

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày kiểm tra: 22/04/2023
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $N = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = 9$.

2) Chứng minh $N = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{M}{N}$.

Bài II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Mặt sàn phòng hội trường của trường X có dạng hình chữ nhật. Nhà trường muốn sửa lại căn phòng cho rộng rãi hơn. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $90m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m, phòng hội trường sẽ rộng thêm $87m^2$. Tính diện tích ban đầu của hội trường.

2) Trái bóng da tiêu chuẩn dùng trong thi đấu có diện tích bề mặt là $576\pi cm^2$. Coi quả bóng có dạng hình cầu, tính thể tích của trái bóng. (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

2) Cho phương trình ẩn x : $x^2 - (2m-1)x + m-1 = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Tìm tất cả giá trị của m để $x_1^3 + x_2^3 = 2m^2 - m$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn MNP ($MN < MP$) nội tiếp đường tròn (O; R). Ba đường cao MA, NB, PC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm J của đường tròn đó.

2) Đường thẳng BC và đường thẳng NP cắt nhau tại I. Chứng minh $IB \cdot IC = IN \cdot IP$.

3) Đường thẳng MI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $\widehat{KMC} = \widehat{KBC}$ và ba điểm K, H, J thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + b + c$.

..... Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:
Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

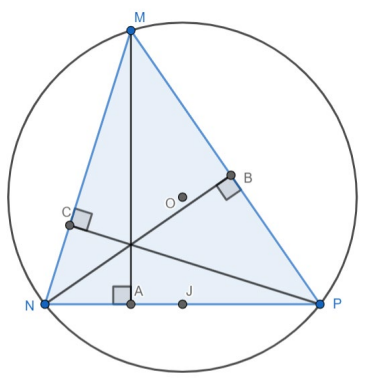
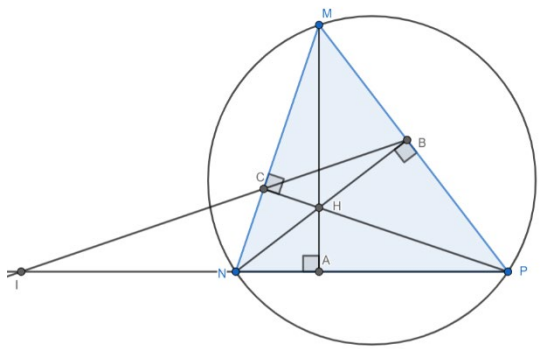
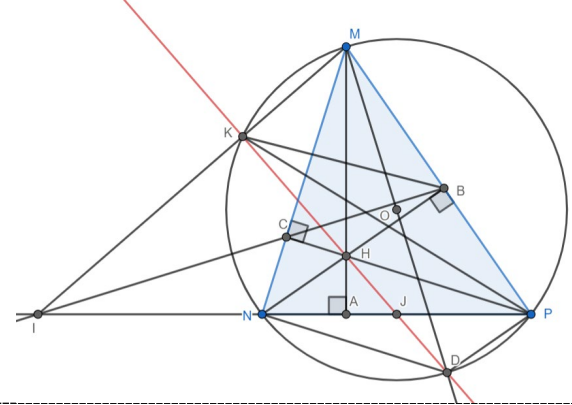
HƯỚNG DẪN CHẤM CHO ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHUNG

- +) Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.
- +) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.
- +) Bài IV, nếu học sinh vẽ $MN \geq MP$ mà lập luận đúng thì trừ 0,25 điểm hình vẽ.
- +) Hướng dẫn chấm gồm 03 trang.

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức M khi $x = 9$.	0,5
		Thay $x = 9$ (TMĐK) vào biểu thức M .	0,25
		Tính được $M = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-2} = 4$.	0,25
	2)	Chứng minh $N = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$.	1,0
		$N = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-2)+8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$	0,25
	3)	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{M}{N}$.	0,5
		Tìm được $P = \frac{M}{N} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$.	0,25
		Ta có $\sqrt{x}+2 \geq 2 \quad \forall x \geq 0, x \neq 4$ Vậy $\frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}$	
		Suy ra $P = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	
	Vậy $\text{Min } P = \frac{1}{2}$ khi $x = 0$.	0,25	

Bài II 2,0 điểm		Tính diện tích của hội trường.	1,5
		Gọi chiều dài phòng hội trường trước khi sửa là x (m). Gọi chiều rộng phòng hội trường trước khi sửa là y (m). Điều kiện $0 < y < x$	0,25
	1)	Diện tích phòng hội trường cũ là xy (m^2) Tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m, chiều dài mới là $x + 2$ (m), chiều rộng mới là $y + 3$ (m). Khi đó, diện tích hội trường tăng thêm $90 m^2$, vậy ta có phương trình $(x + 2)(y + 3) = xy + 90 \Leftrightarrow 3x + 2y = 84$	0,25
		Tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m, chiều dài mới là $x + 3$ (m), chiều rộng mới là $y + 2$ (m). Khi đó, diện tích hội trường tăng thêm $87 m^2$, vậy ta có phương trình $(x + 3)(y + 2) = xy + 87 \Leftrightarrow 2x + 3y = 81$	0,25
		Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 84 \\ 2x + 3y = 81 \end{cases}$	0,25
		Giải phương trình tìm được $(x; y) = (18; 15)$.	0,25
		Đối chiếu điều kiện và tính diện tích. Vậy diện tích hội trường lúc đầu là $270 m^2$.	0,25
	2)	Tính thể tích của trái bóng.	0,5
		Diện tích bề mặt trái bóng $S = 4\pi R^2 = 576\pi$ $\Rightarrow R = 12$ cm $\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 2304\pi \approx 7234,56$ (cm^3)	0,25
		Vậy $V \approx 7234,56$ (cm^3).	0,25
Bài III 2,5 điểm	1)	Giải phương trình $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$	1,0
		$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4x^2 + 12 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$ hoặc $x^2 - 4 = 0$.	0,25
		$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ hoặc $x = \pm 2$	0,25
		Kết luận: $S = \{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$	0,25
	2a)	Chứng minh (1) luôn có hai nghiệm phân biệt	0,75
		$x^2 - (2m - 1)x + m - 1 = 0$ (1) Tính được $\Delta = 4(m - 1)^2 + 1$.	0,25
		Chỉ ra $\Delta > 0$ với mọi giá trị của m .	0,25
		Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.	0,25
	2b)	Tìm tất cả giá trị của m để $x_1^3 + x_2^3 = 2m^2 - m$.	0,75
Ta có: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$.		0,25	

	$\begin{aligned} \text{Từ đó } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] \\ &= (2m - 1)[(2m - 1)^2 - 3(m - 1)] \\ &= (2m - 1)(4m^2 - 7m + 4) \end{aligned}$	0,25	
	<p>Suy ra $2m^2 - m = (2m - 1)(4m^2 - 7m + 4)$</p> $\Leftrightarrow (2m - 1)(4m^2 - 8m + 4) = 0$ $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = 1$	0,25	
Bài IV 3,0 điểm	<p>Chứng minh rằng 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm J của đường tròn đó.</p>	1,0	
		Vẽ đúng hình đến ý 1).	0,25
		Chỉ ra $\widehat{NCP} = 90^\circ$. Suy ra C thuộc đường tròn đường kính NP.	0,25
		Chỉ ra $\widehat{NBP} = 90^\circ$. Suy ra B thuộc đường tròn đường kính NP.	0,25
		Vậy 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc đường tròn đường kính NP, tâm J là trung điểm NP.	0,25
	<p>Chứng minh $IB \cdot IC = IN \cdot IP$.</p>		0,75
			
		Vì NCBP là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{NPC} = \widehat{NBC}$	0,25
		Chỉ ra $\triangle INB \sim \triangle ICP$. Suy ra tỉ lệ cạnh $\frac{IN}{IC} = \frac{IB}{IP}$	0,25
		Suy ra $IB \cdot IC = IN \cdot IP$	0,25
<p>Chứng minh $\widehat{KMC} = \widehat{KBC}$ và ba điểm K, H, J thẳng hàng.</p>		1,25	
	Chỉ ra $\widehat{KMN} = \widehat{KPN}$ Suy ra $\triangle INM \sim \triangle IKP$ Đến tới $IN \cdot IP = IK \cdot IM$	0,25	
	Do đó $IN \cdot IP = IK \cdot IM = IB \cdot IC$.	0,25	

		Từ đó suy ra $\frac{IK}{IC} = \frac{IB}{IM}$ Chỉ ra $\Delta IKB \sim \Delta ICM$	
		Suy ra $\widehat{IBK} = \widehat{IMC}$ hay $\widehat{KMC} = \widehat{KBC}$ (đpcm)	0,25
		Suy ra tứ giác KMBC nội tiếp. Mà tứ giác MBHC nội tiếp đường tròn đường kính MH. Suy ra K, M, C, H, B cùng thuộc đường tròn đường kính MH. Suy ra $MK \perp HK$. (đpcm)	0,25
		Vẽ đường kính MD của đường tròn O, suy ra $MK \perp KD$, suy ra K, H, D thẳng hàng. Chứng minh NHPD là hình bình hành, suy ra H, J, D thẳng hàng. Suy ra K, H, J thẳng hàng.	0,25
		Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + b + c$.	0,5
		Có $A^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 18$, nên $A \leq 3\sqrt{2}$. $Min A = 3\sqrt{2}$ khi $a = b = c = \sqrt{2}$.	0,25
	Bài V <i>0,5 điểm</i>	Vì $a, b, c \geq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0$ $\Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$ Tương tự $bc + 1 \geq b + c$ và $ca + 1 \geq c + a$ Nên $2(a + b + c) \leq ab + bc + ca + 3$ Hay $4A \leq 2(ab + bc + ca) + 6 = (a + b + c)^2 = A^2$ Mà A dương nên $A \geq 4$. $Max A = 4$ khi $a = b = 1, c = 2$.	0,25

..... **Hết**