

**Bài 1. (3,0 điểm)**

a) Phân tích đa thức thành nhân tử:  $(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$

b) Xác định đa thức  $P(x)$ , biết  $P(x)$  chia cho đa thức  $x+1$  dư 4,  $P(x)$  chia cho đa thức  $x+2$  dư 6.  $P(x)$  chia cho đa thức  $x^2 + 3x + 2$  được thương là  $x+3$  và còn dư.

c) Cho  $x, y, z$  đôi một khác nhau và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$ .

**Bài 2. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình sau:  $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$ .

b) Cho ba số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  
$$M = \frac{1}{a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{16c}$$

c) Cho  $a, b, c, d$  là các số nguyên thỏa mãn  $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$ . Chứng minh rằng:  $a + b + c + d$  chia hết cho 6.

**Bài 3. (2,0 điểm)**

Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH vuông góc với AC ( $H \in AC$ ). Gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng:  $BM \perp MK$ .

**Bài 4. (2,0 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn  $AB < AC$ , ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a/ Chứng minh: Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC và FC là tia phân giác của góc EFD.

b/ Hai đường thẳng EF và CB cắt nhau tại M. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại I; cắt AD tại K. Chứng minh rằng: B là trung điểm của IK.

**Bài 5. (1,0 điểm)**

Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ:  $a_1; a_2; \dots; a_{2023}$ . Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số trong dãy trên chia hết cho 2023.

----- Hết -----

**Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay**

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI**  
**NĂM HỌC 2022 – 2023**  
**MÔN: TOÁN 8**

Câu	Ý - Nội dung	Điểm
<b>1</b>	a) Ta có: $(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$ $= (x^2 + 2x + 1)^2$ $= (x + 1)^4$	0,5  0,5
	b) Do đa thức chia $x^2 + 3x + 2$ có bậc 2 nên đa thức dư có dạng : $ax + b$ với $a, b$ thuộc $\mathbb{R}$ $P(x) = (x^2 + 3x + 2)(x + 3) + ax + b$ Theo định lí Bôzơ $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 4 $\Leftrightarrow P(-1) = 4 \Leftrightarrow -a + b = 4 \quad (1)$ $P(x)$ chia cho $x + 2$ dư 6 $\Leftrightarrow P(-2) = 6 \Leftrightarrow -2a + b = 6 \quad (2)$ Từ (1) $\Leftrightarrow b = 4 + a$ thay vào (2) ta được $-2a + 4 + a = 6 \Leftrightarrow a = -2$ Thay $a = -2$ ta được $b = 2$ $P(x) = (x^2 + 3x + 2)(x + 3) - 2x + 2 = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$ Vậy đa thức $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$	0,25  0,25  0,25  0,25
	c/ Đặt $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$ Ta có: $xy + yz + zx = 0 \Rightarrow -xy - xz = yz; -xz - yz = xy; -xy - yz = xz$ Khi đó $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$ $= \frac{yz}{(x-y)(x-z)} - \frac{xz}{(x-y)(y-z)} + \frac{xy}{(x-z)(y-z)}$ $= \frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 1$	0,25  0,25  0,25
	a) $(x - 7)(x - 5)(x - 4)(x - 2) = 72$ $\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x + 20) = 72$ Đặt $x^2 - 9x + 17 = t$ Phương trình thành: $(t - 3)(t + 3) = 72$ $\Leftrightarrow t^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -9 \end{cases}$	0,25

	<p>+) Với <math>t = 9</math> ta có:</p> $x^2 - 9x + 17 = 9$ $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases}$ <p>+) Với <math>t = -9</math> ta có:</p> $x^2 - 9x + 17 = -9$ $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 26 = 0$ <p>(Vô nghiệm vì <math>x^2 - 9x + 26 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} &gt; 0</math> với mọi <math>x</math>)</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là <math>S = \{1; 8\}</math></p>	0,25
	<p>b) <math>M = \frac{1}{a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{16c} = (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{16c} \right)</math> (do <math>a+b+c=1</math>)</p> $M = \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{16c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{4b} + \frac{b}{16c} + \frac{21}{16}$ <p>Áp dụng BĐT Cô si với hai số dương <math>\frac{a}{4b}</math> và <math>\frac{b}{a}</math> ta được:</p> $\frac{a}{4b} + \frac{b}{a} \geq 1 \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = 2b$ <p>Tương tự:</p> $\frac{a}{16c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{2} \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = 4c$ $\frac{c}{4b} + \frac{b}{16c} \geq \frac{1}{4} \text{ dấu bằng xảy ra } b = 2c$ <p>Khi đó:</p> $M = \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{16c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{4b} + \frac{b}{16c} + \frac{21}{16} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{21}{16}$ $\Rightarrow \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{16c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{4b} + \frac{b}{16c} + \frac{21}{16} \geq \frac{49}{16}$ <p>Dấu "=" xảy ra <math>\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 4c \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a \\ c = \frac{1}{4}a \\ b = 2c \end{cases}</math></p>	0,25



	<p>Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BH  Ta có M, O lần lượt là trung điểm của AH, BH nên: MO là đường trung bình của <math>\Delta HAB \Rightarrow MO = \frac{1}{2}AB, MO \parallel AB</math></p> <p>Mà <math>AB = CD, AB \parallel CD</math>, Vì K là trung điểm của CD suy ra <math>KC = \frac{1}{2}CD</math></p> <p>Do đó: <math>MO = KC, MO \parallel KC</math>, suy ra tứ giác MOKC là hình bình hành.  Từ đó có: <math>CO \parallel MK</math>  Ta có: <math>MO \parallel KC, KC \perp CB \Rightarrow MO \perp CB</math>  Xét <math>\Delta MBC</math> có <math>MO \perp CB, BH \perp MC</math> nên O là trực tâm của <math>\Delta MBC \Rightarrow CO \perp BM</math>  Ta có: <math>CO \perp BM</math> và <math>CO \parallel MK</math> nên <math>BM \perp MK</math> (đpcm)</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
4	<p>Vẽ hình :</p>	
	<p>a/ Chứng minh : Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC và FC là tia phân giác của góc EFD</p> <p>+ CM: Tam giác AFC đồng dạng với tam giác AEB (g-g)  Suy ra <math>AF/AC = AE/AB</math></p> <p>+ CM: Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC (c.g.c)  Suy ra Góc AFE = Góc ACB (1)</p> <p>+ CM: Tam giác BFC đồng dạng với tam giác BDA (g-g)  + CM: Tam giác BFD đồng dạng với tam giác BCA (c.gc)  Suy ra Góc BFD = Góc BCA(2)</p> <p>+ Mà góc BFD + Góc DFC = <math>90^0</math>  và góc AFE + Góc EFC = <math>90^0</math>  Suy ra : Góc EFC = góc DFC  Suy ra : FC là phân giác của góc EFD.</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>b) Vì CF vuông góc với AB , suy ra FC vuông góc với FB  Mà FC là phân giác suy ra FB là phân giác của góc MFD  Áp dụng tính chất đường phân giác FB cho tam giác MFD  ta có <math>MB/BD = MF/FD</math> (3)</p>	<p>0,25</p>

	<p>Mà FB vuông góc với FC (cmt) Suy ra FC là phân giác góc ngoài tại F của tam giác FMD</p> <p>Suy ra <math>CM/CD = FM/FD</math> (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra có <math>MB/BD = CM/CD</math></p> <p>Suy ra <math>MB/CM = BD/CD</math> (5)</p> <p>+ Vì <math>IB \parallel AC</math> áp dụng hệ quả Ta Lét cho tam giác MAC</p> <p>Có : <math>IB/AC = MB/MC</math> (6)</p> <p>+ Vì <math>BK \parallel AC</math> áp dụng hệ quả Ta Lét cho tam giác BDK</p> <p><math>BK/AC = BD/DC</math> (7)</p> <p>Từ (5) (6) và (7) suy ra : <math>BK/AC = BI/AC</math></p> <p>Suy ra: <math>BK = BI</math>, mà B thuộc IK nên B là trung điểm của IK</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
5	<p>Lập dãy số.</p> <p><math>B_1 = a_1.</math></p> <p><math>B_2 = a_1 + a_2 .</math></p> <p><math>B_3 = a_1 + a_2 + a_3</math></p> <p>.....</p> <p><math>B_{2023} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} .</math></p> <p>Nếu tồn tại <math>B_i</math> (<math>i = 1,2,3,\dots,2023</math>) nào đó chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh.</p> <p>Nếu không tồn tại <math>B_i</math> (<math>i = 1,2,3,\dots,2023</math>) nào chia hết cho 2023 thì ta làm như sau:</p> <p>Đem chia <math>B_i</math> chia cho 2023 , số dư trong phép chia cho 2023 thuộc <math>\in \{ 1,2,3,\dots,2022\}.</math></p> <p>Theo nguyên lí Diricle tồn tại ít nhất 2 số chia cho 2023 có cùng số dư, giả sử là <math>B_m</math> và <math>B_n</math> (<math>m &gt; n</math>) khi ấy <math>B_m - B_n</math>, chia hết cho 2023</p> <p>Suy ra điều phải chứng minh.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

**Lưu ý : Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.**