

Đề chính thức

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$$

2. Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $4x = 3y$; $\frac{x}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

3. Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$.

Tính $(S - P)^{2022}$

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Tìm x, y biết: $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0$

2. Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$ với $x + y = 2$

3. Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) : 7$.

Chứng minh rằng: $11b + 15 + 43a : 7$

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y biết: $x + y - 2xy = 4$

2. Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 12 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

1. Tam giác ABE bằng tam giác ADC

2. $DE = BE$

3. $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của \widehat{DIE}

Câu 5: (2,0 điểm)

1. Cho f(x) là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng f(7) không thể là số chính phương.

2. Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q. Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho p.q

.....Hết.....

Họ tên thí sinh:..... SBD.....

Cán bộ coi giao lưu học sinh giỏi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 6, 7, 8
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN: TOÁN 7

		Nội dung	Điểm
Câu 1 (4.0đ)	1. (2.0đ)	a) (1.0) $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$ $= \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2}$ $= \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$	0,5đ 0,5đ
		b) (1.0) $B = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2022}{2023}\right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2022}{2023}\right)$ $= \frac{2022}{2023}$	0,25đ 0,25đ 0,5đ
		Từ $4x = 3y$; $\frac{x}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ta có: $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$	0,25đ 0,25đ
		$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ x = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$	0,5đ
	3. (1.0đ)	Ta có: $P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ $= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right)$	0,25đ

		$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007}\right)$ $= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right)$ $- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}\right)$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S.$ <p>Do đó $(S-P)^{2022} = 0$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
Câu 2 (4.0đ)	1. (1.25đ)	<p>Vì $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x; $2y - 6 \geq 0 \forall y$, do đó:</p> $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + 2y - 6 \geq 0 \forall x, y,$ <p>theo đề bài thì:</p> $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + 2y - 6 \leq 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + 2y - 6 = 0. \text{ Khi đó:}$ $\begin{cases} 3x - \frac{1}{6} = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{18} \\ y = 3 \end{cases}$	<p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
	2. (1.25đ)	$P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$ $= x^2(x + y) - 2x^2 - y(x + y) + 3y + x + 2021$ $= 2x^2 - 2x^2 - 2y + 3y + x + 2021 = x + y + 2021 = 2023$ <p>Vậy với $x + y = 2$ thì $P = 2023$</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.25đ</p>
	3. (1.5đ)	<p>Từ $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) : 7$ suy ra $(7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) : 7$ $\Rightarrow (a - 3b + 1) : 7$ vì $(7a - 21b + 5)$ không chia hết cho 7 và 7 là số nguyên tố.</p> <p>Từ $(a - 3b + 1) : 7 \Rightarrow (42a + 14b + 14) + (a - 3b + 1) : 7$ Vì $(42a + 14b + 14) : 7 \Rightarrow 43a + 11b + 15 : 7$ (đpcm)</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
Câu 3 (4.0đ)	1. (2.0đ)	<p>Ta có: $x + y - 2xy = 4$ suy ra $x - 2xy + y - 4 = 0$</p> $\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 7$ $\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 7 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 7$	<p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p>

Lập bảng

$2x - 1$	1	7	-1	-7
$1 - 2y$	7	1	-7	-1
x	1	4	0	-3
y	-3	0	4	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

1.0đ

Vậy $(x; y)$ cần tìm là $(1; -3); (4; 0); (0; 4); (-3; 1)$

0.25đ

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)
Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

0.25đ

Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

0.5đ

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

2.
(2.0đ)

$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}$ (2)

0.5đ

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

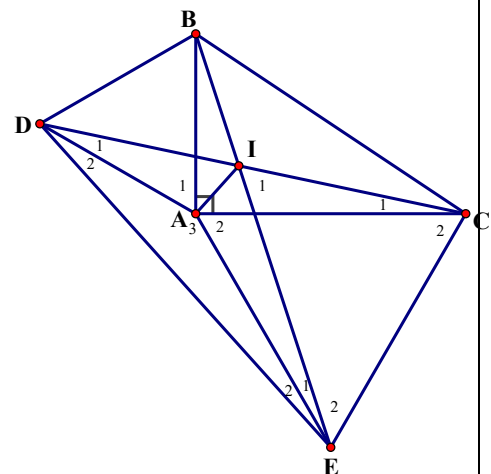
Vậy: $c' - c = 12$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 12 \Rightarrow \frac{x}{90} = 1080$

0.5đ

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 1080 gói.

0.25đ

Câu 4
(6.0đ)



<p>1. (1.5đ)</p>	<p>Ta có: $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A}_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$</p> <p>Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có:</p> <p>$DA = BA$ (gt)</p> <p>$\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (Chứng minh trên)</p> <p>$AC = AE$ (gt)</p> <p>$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c)</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.75đ</p> <p>0.25đ</p>
<p>2. (2.0đ)</p>	<p>Ta có: $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{BAC} + \widehat{A}_2 = 360^\circ$</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 = 150^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{DAC} = 150^\circ$</p> <p>Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:</p> <p>$DA = BA$ (gt)</p> <p>$\widehat{A}_3 = \widehat{DAC}$ (Chứng minh trên)</p> <p>AE: Cạnh chung</p> <p>$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE$ (c - g - c)</p> <p>$\Rightarrow DE = BE$ (hai cạnh tương ứng)</p>	<p>0.75đ</p> <p>0.75đ</p> <p>0.5đ</p>
<p>3. (2.5đ)</p>	<p>* Ta có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (CM câu a) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ (hai góc tương ứng)</p> <p>Lại có: $\widehat{I}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{ICE} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + (\widehat{AEC} - \widehat{E}_1) + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) = 180^\circ$</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 60^\circ - \widehat{E}_1 + \widehat{C}_1 + 60^\circ = 180^\circ$</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 120^\circ = 180^\circ$ (Vì $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$)</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 = 60^\circ$</p> <p>* Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của \widehat{DEI} (1)</p> <p>Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của \widehat{EDC} (2)</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của \widehat{DIE}</p>	<p>0.25đ</p> <p>0.75đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>

	1. (1.0đ)	<p>Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng :</p> $f(x) = 2 + x(x - 1).g(x)$ <p>trong đó $g(x)$ là 1 đa thức với hệ số nguyên</p> <p>Ta có $f(7) = 2 + 42.g(7) \equiv 2 \pmod{3}$ nên $f(7)$ không thể là số chính phương</p>	0.5đ 0.5đ
Câu 5 (2.0 đ)	2. (1.0đ)	<p>Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.</p> <p>Áp dụng định lí Fermat ta có :</p> $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \text{ và } q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ <p>suy ra $p^{q-1} - 1 \vdots q$ và $q^{p-1} - 1 \vdots p$ mặt khác $p^{q-1} \not\vdots p$ và $q^{p-1} \not\vdots q$</p> <p>nên ta có : $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots q$; $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p$ mà $(p, q) = 1$</p> <p>nên : $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p.q$</p>	0.25đ 0.5đ 0.25đ

*Chú ý: - Nếu HS làm theo cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Bài hình nếu vẽ hình sai thì không chấm điểm*