

I. ĐẠI SỐ

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = 3\sqrt{50} - 2\sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{48}$.

b) $B = \frac{2}{3}\sqrt{45} + \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{21}} - 20\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$.

c) $C = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} - \sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

d) $D = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 5\sqrt{2}$.

e) $E = \frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

f) $F = \frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{4-\sqrt{25}} - \sqrt{125} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$.

Bài 2. Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x-1} - \sqrt[3]{27} = 0$.

b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

c) $\sqrt{9x^2-6x+1} = \sqrt{x^2+8x+16}$.

d) $\sqrt{x^2-10x+25} = x+1$.

e) $\sqrt{4x-12} + \sqrt{x-3} = 8 + \frac{1}{3}\sqrt{9x-27}$.

f) $12\sqrt{\frac{x+1}{16}} + \frac{1}{2}\sqrt{4x+4} - \frac{2}{3}\sqrt{9x+9} - 10 = 0$.

g) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

h) $\sqrt{2x^2-12x+34} + \sqrt{4x^2-24x+40} = -3+6x-x^2$.

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{10}{2-\sqrt{x}} + \frac{4}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{216}$.

b) Tìm x để $A > \frac{1}{3}$.

c) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-2}$ và tìm $x \in \mathbb{Z}$ để B nhận giá trị là số nguyên.

d) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để P nhận giá trị là số nguyên.

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x+19}{P \cdot (\sqrt{x}+2)}$.

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} + \frac{10\sqrt{x}}{25-x} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x > 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 18 + \sqrt[3]{-8}$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$.

c) Tìm x để $\sqrt{B} \leq \sqrt{\frac{1}{6}}$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$ khi $x \in \mathbb{N}$.

II. HÌNH HỌC

Bài 1. Cho ΔABC nhọn có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

a) Biết $AE = 6,4$ cm; $BE = 3,6$ cm. Tính diện tích tam giác ABH.

b) Chứng minh các tam giác AEF và ACB đồng dạng.

c) Chứng minh $\frac{AF}{AC} = \sin^2 C$.

d) Chứng minh $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \sin^2 B \cdot \sin^2 C$.

Bài 2. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AC$ tại F.

a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$, từ đó suy ra $\Delta AEF \sim \Delta ACB$.

b) Khi $CH = 2\text{ cm}$, $CF = \sqrt{2}\text{ cm}$, $\widehat{BAH} = 25^\circ$. Tính các góc của ΔABC .

c) Khi $S_{AHE} = 4\text{ cm}^2$, $S_{BHE} = 1\text{ cm}^2$, hãy tính độ dài đoạn thẳng AB .

d) Chứng minh $\sin \widehat{BAC} = \frac{EF}{AH}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$ đường cao AH .

a) Giả sử $BH = 7\text{ cm}$, $CH = 9\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AC và số đo góc C (làm tròn đến độ)

b) Trên cạnh AB lấy điểm D ($D \neq A$; $D \neq B$). Gọi K là hình chiếu của A trên CD . Chứng minh:

$CK \cdot CD = CH \cdot CB$ và ΔCKH đồng dạng với ΔCBD .

c) Chứng minh: 4 điểm A, C, K, H cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

d) Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của A và C trên HK . Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP với (O) . Chứng minh: $CE \parallel PQ$ và $PK = QH$.

Bài 4. Trên một khúc sông với hai bờ song song với nhau, một người lái đò dự định chèo đò qua sông từ vị trí A ở bờ bên này sang vị trí B ở bờ bên kia, đường thẳng AB vuông góc với các bờ sông. Do người lái đò không giỏi toán, lí nên đã xuất phát từ A và lái đò theo phương vuông góc với bờ sông, do đó con đò bị dòng nước đẩy xiên và cập bến ở bờ bên kia tại vị trí C cách B một đoạn 45 m . Biết khúc sông rộng 270 m , hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch một góc có số đo bằng bao nhiêu so với phương AB ? (làm tròn kết quả đến phút).

Bài 5. Một chiếc máy bay cất cánh với vận tốc 320 km/h và bay lên theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 28° . Hỏi sau $1,5$ phút máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét so với mặt đất (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)? Giả sử mặt đất bằng phẳng và vận tốc máy bay không đổi.

Bài 6. Một con robot di chuyển với vận tốc không đổi là 2 m mỗi phút trên mặt phẳng trong thời gian 15 phút từ vị trí A đến vị trí B . Con robot đó chuyển động thẳng ngoại trừ ba lần rẽ vuông góc sang trái tại các điểm E, F, K vào các thời điểm 9 phút, 12 phút, 14 phút tính từ lúc xuất phát. Tính độ dài đoạn thẳng AB (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) và tính \widehat{EAB} (làm tròn kết quả đến phút).

III. NÂNG CAO (Dành cho lớp H và HSG các lớp khác)

1. Giải phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{y-5} + \sqrt{z-4} = 20 - \frac{4}{\sqrt{x-3}} - \frac{9}{\sqrt{y-5}} - \frac{25}{\sqrt{z-4}}$.

2. Tìm max, min của $Q = \frac{-15}{3 + \sqrt{6x - x^2 - 5}}$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = x - \sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+7} + 12$.

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-3} + \sqrt{x+6} - 6\sqrt{x-3}$.

5. Cho a và b là các số dương thỏa mãn $a + b \leq 1$. Chứng minh $ab + \frac{1}{ab} \geq \frac{17}{4}$.

6. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq 2(a+b+c)$.

7. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm max, min của $P = \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab}$.

8. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm max, min của $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}$.

9. Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm max, min của $H = \sqrt{7x^2+9} + \sqrt{7y^2+9} + \sqrt{7z^2+9}$.