

Họ tên HS:

Lớp:

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

+ Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn, tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn
+ Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ.

+ Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

2. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

+ Tính chất, đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

+ Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của PT bậc hai.

+ Hệ thức Viet và ứng dụng.

3. Một số phương trình đưa về phương trình bậc hai

+ Phương trình trùng phương
+ Phương trình chứa ẩn ở mẫu
+ Phương trình tích

II. HÌNH HỌC

1. Góc với đường tròn

+ Góc ở tâm
+ Góc nội tiếp
+ Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung
+ Góc có đỉnh ở bên trong, bên ngoài đường tròn
+ Cung chứa góc

2. Tứ giác nội tiếp

+ Định nghĩa, tính chất
+ Các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

3. Công thức tính độ dài cung, diện tích quạt tròn.

+ Độ dài (C) của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \text{ hoặc } C = \pi d \text{ (với } d = 2R).$$

+ Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n° được tính theo công thức: $l = \frac{\pi R n}{180}$.

+ Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$

+ Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n° được tính theo công thức:

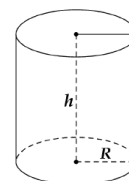
$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2} \text{ (l là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn).}$$

4. Hình không gian:

a. Hình trụ

Nếu Hình trụ có bán kính đáy R, đường kính d và chiều cao h thì:

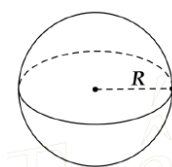
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = P_{\text{đáy}} \cdot h = 2\pi R h$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi R h + 2\pi R^2$
- Thể tích: $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi R^2 h$



b. Hình cầu

Nếu Hình cầu có bán kính R, đường kính d thì:

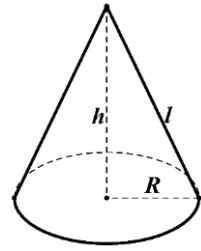
- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$
- Thể tích: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$



c. Hình nón

Nếu **Hình nón** có bán kính đáy R , chiều cao h và đường sinh l thì:

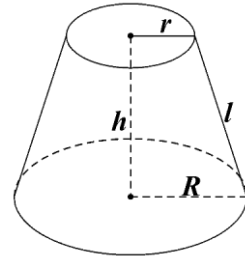
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi Rl + \pi R^2$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



d. Hình nón cụt

Nếu **Hình nón cụt** bán kính đáy lớn R , bán kính đáy nhỏ r , chiều cao h và đường sinh l thì:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + r)l$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy lớn}} + S_{\text{đáy nhỏ}}$
 $= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$



B. MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO:

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Bài toán rút gọn biểu thức và các câu hỏi phụ

Bài 1. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ ($x \geq 0$) và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ ($x \geq 0; x \neq 4$)

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) $P = A \cdot B$. Tìm x để $P > \frac{1}{3}$
- d) Tìm x nguyên để P nguyên
- e) Tìm x là số nguyên tố để $|P| > P$
- f) Tìm $x \in \mathbb{N}$ để P đạt GTLN, GTNN

Bài 2. Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+2}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

- a/ Tính giá trị của biểu thức B khi $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
- b/ Rút gọn $P = A : B$
- c/ Chứng minh $P < 4$
- d/ Tìm các giá trị của x để $P^2 = P + 2$
- e/ Tìm x để P nguyên.

Dạng 2: Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Bài 3. Cho một số có hai chữ số, biết rằng tổng của hai lần chữ số hàng chục và ba lần chữ số hàng đơn vị là 32. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì tỉ số của số mới và số ban đầu là $\frac{7}{4}$. Tìm số đã cho ban đầu.

Bài 4. Quãng đường AB dài 160 km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A để đi đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10km/h nên đến B sớm hơn 48 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài 5. Một tàu thủy chở hàng đi từ bến A đến bến B, rồi quay lại bến A. Thời gian cả đi và về là 2 giờ 30 phút. Hãy tìm vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 24 km và vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 6. Một xí nghiệp theo kế hoạch phải sản xuất 75 sản phẩm trong một số ngày dự kiến. Trong thực tế, do cải tiến kĩ thuật mỗi ngày xí nghiệp làm vượt mức 5 sản phẩm. Vì vậy họ không những làm được 80 sản phẩm mà còn hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được bao nhiêu sản phẩm ?

Bài 7. Hai người thợ cùng sơn một ngôi nhà, mất 4 ngày thì xong việc. Hai người cùng làm trong 1 ngày thì người thứ nhất có việc bận nên một mình người thứ hai làm trong 6 ngày nữa thì mới xong công việc. Hỏi mỗi người làm việc một mình thì sau bao lâu xong công việc?

Bài 8. Để đáp ứng nhu cầu khẩu trang trong phòng chống dịch CoVid-19, theo kế hoạch hai tổ sản xuất dự định làm 1000 hộp khẩu trang để cung cấp cho các địa phương. Nhưng khi thực hiện tổ một làm vượt mức kế hoạch 15%, tổ hai làm vượt mức kế hoạch 20% nên cả hai tổ làm được 1170 hộp khẩu trang. Tính số hộp khẩu trang mà mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước ban đầu của mảnh vườn.

Bài 10. Trong một buổi liên hoan văn nghệ, phòng họp chỉ có 320 chỗ ngồi, nhưng số người tới dự hôm đó có tới 420 người. Do đó phải đặt thêm 1 dãy ghế và thu xếp để mỗi dãy ghế thêm được 4 người ngồi nữa mới đủ. Hỏi lúc đầu trong phòng có bao nhiêu dãy ghế?

Dạng 3: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

Bài 11. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 12 \\ 3x - y = 8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{2}{y-1} = 9 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{1}{y-1} = 6 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} 3|x+5| - \frac{2}{\sqrt{y-2}} = 4 \\ |x+5| + \frac{1}{\sqrt{y-2}} = 3 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{2}{x-y} + \sqrt{y+1} = 4 \\ \frac{1}{x-y} - 3\sqrt{y+1} = -5 \end{cases}
 \end{array}$$

Dạng 4: Phương trình:

Bài 12. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } x^2 - 6x = 0 & \text{b) } x^2 - 9 = 0 & \text{c) } x^2 - 6x + 9 = 0 \\
 \text{d) } x^2 - 3x + 4 = 0 & \text{e) } x^2 - 4x + 2 = 0 & \text{f) } x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0 \\
 \text{g) } 2x^4 + x^2 + 5 = 0; & \text{h) } (x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 84 = 0 & \\
 \text{i) } \frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{3x}{x - 2} & \text{j) } \frac{x + 5}{3} - \frac{x - 3}{5} = \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{x + 5} &
 \end{array}$$

Bài 13: Tìm hai số u và v thỏa mãn:

a) $u + v = 15, uv = 36;$

b) $u^2 + v^2 = 13, uv = 6.$

c) $u + v = 4, uv = 7;$

d) $u + v = -12, uv = -20.$

Bài 14: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$.

Dạng 5: Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ và phương trình bậc hai một ẩn

Bài 15. Cho phương trình ẩn $x: x^2 - mx + 2m - 4 = 0$

a) Tìm m để PT có 2 nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để PT có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 8.$

c) Tìm m để PT có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 4.$

Bài 16. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = 2mx - m^2 + 1$ có đồ thị (d)

a) Chứng tỏ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2.$

b) Tìm m để x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1.$

Bài 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx + 2$ có đồ thị (d)

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng hệ tọa độ khi $m = 1.$

b) Chứng tỏ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm nằm khác phía với trục tung.

c) Tìm m để (d) cắt (P) tại điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ phân biệt sao cho $y_1 + y_2$ đạt GTNN

Bài 18. Cho phương trình ẩn $x: mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c) Giả sử PT có hai nghiệm $x_1; x_2$, lập hệ thức liên hệ hai nghiệm của PT không phụ thuộc vào $m.$

Bài 19. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx - m + 1$ có đồ thị (d)

a) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P)

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 = 2x_2$

c) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 = |x_2|$ và $x_1 > x_2$

d) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| > |x_2|$ và $x_1 < x_2$

Bài 20. Cho phương trình ẩn $x: x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$

a) Giải phương trình với $m = 1.$

b) Tìm m để PT có 4 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để PT có 3 nghiệm phân biệt.

d) Tìm m để PT có 2 nghiệm phân biệt.

II. HÌNH HỌC:

Dạng 6: Hình học phẳng

Bài 21. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 2R = 10cm$. Gọi C là trung điểm OA, qua C kẻ dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ MB, H là giao điểm AK và MN.

a) Chứng minh tứ giác BHCK nội tiếp.

b) Chứng minh $AK \cdot AH = R^2$ và tính diện tích hình quạt tạo bởi OM, OB và cung MB

c) Trên KN lấy I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = KB$.

d) Tìm vị trí điểm K để chu vi tam giác MKB lớn nhất.

Bài 22. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O; R) ($AB < CD$). Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ AB, DP cắt AB tại E và cắt CB tại K; CP cắt AB tại F và cắt DA tại I.

a) Chứng minh tứ giác CKID và tứ giác CDFE nội tiếp.

b) Chứng minh $IK \parallel AB$ và $AP^2 = PE \cdot PD = PF \cdot PC$

c) Chứng minh AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED .

Bài 23. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O) , trên Ax lấy điểm M sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ tiếp tuyến MB với (O) , tiếp tuyến (O) tại C cắt AB tại D , OM cắt AB tại I , cắt cung nhỏ AB tại E .

- Chứng minh tứ giác $OICD$ nội tiếp
- Chứng minh $AB \cdot AD$ không đổi.

c) Gọi K là giao điểm của MC với (O) . Chứng minh tứ giác $AOBE$ là hình thoi và $\widehat{MIK} = \widehat{OCM}$

d) Cho $R = 6\text{cm}$ tính độ dài cung nhỏ AK và chứng minh $OD \perp MC$.

Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp (O) . Từ một điểm D trên cạnh BC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E . Gọi H là giao điểm của BF và CE .

- Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp
- Chứng minh $BF \cdot BH = BD \cdot BC$

c) Cho $\widehat{AEF} = 30^\circ$, $R = 6\text{cm}$. Tính diện tích hình quạt tạo bởi hai bán kính OA , OB và cung AB và chứng minh $BF \cdot BH + CH \cdot CE = BC^2$.

d) Gọi I là trung điểm EF . Chứng minh $OI \perp AH$.

Bài 25. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ đường cao AD và đường kính AK . Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK .

- Chứng minh tứ giác $ACFD$ nội tiếp.
- Chứng minh $DE \parallel CK$.

c) Cho BC cố định, A chuyển động sao cho ΔABC nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF cố định.

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A , C khác O). Đường thẳng qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K . Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K , M khác B).

a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp

b) Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM , BM lần lượt tại H và D . Chứng minh $CA \cdot CB = CH \cdot CD$.

c) Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N . Chứng minh ba điểm A , N , D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH .

d) Khi M di động trên cung KB , chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 27. Cho ba điểm A , B , C cố định, thẳng hàng theo thứ tự ấy. Vẽ một đường tròn (O) bất kì đi qua B và C (BC không là đường kính). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM , AN đến đường tròn (O) (M , N là các tiếp điểm, N và O thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC). Gọi K là trung điểm của BC , OA cắt MN tại I . Giao điểm của MK với (O) là D .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AMON$ và tứ giác $AOKM$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AM^2 = AB \cdot AC$

c) Chứng minh $ND \parallel AC$

d) Gọi H là giao của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác OKI . Chứng minh rằng I , H , M thẳng hàng và H là điểm cố định.

Bài 28. Từ điểm M bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA , MB với đường tròn (O) , A và B là các tiếp điểm. Gọi E là trung điểm của đoạn MB ; C là giao điểm của AE và (O) (C khác A), H là giao điểm của AB và MO .

a) Chứng minh 4 điểm M , A , O , B cùng thuộc một đường tròn.

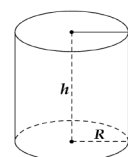
b) Chứng minh $EB^2 = EC \cdot EA$

c) Chứng minh tứ giác $HCEB$ là tứ giác nội tiếp.

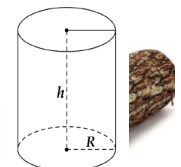
d) Gọi D là giao điểm của MC và (O) (D khác C). Chứng minh ΔABD là tam giác cân.

Dạng 7: Hình học không gian:

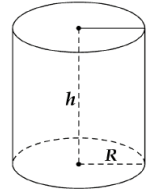
Bài 29. Người ta dự định làm dự định làm một chiếc bồn chứa dầu bằng sắt hình trụ có chiều cao $1,8\text{ m}$, đường kính đáy $1,2\text{ m}$. Hỏi chiếc bồn đó chứa đầy được bao nhiêu lít dầu, biết rằng $1\text{ m}^3 = 1000\text{ lít}$ (Bỏ qua bề dày của bồn; lấy $\pi \approx 3,14$)



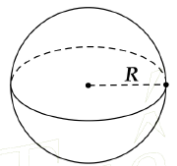
Bài 30. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy bằng 12 cm , chiều cao bằng bán kính đáy. Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (lấy $\pi \approx 3,14$).



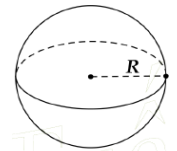
Bài 31. Một bồn nước inox có dạng hình trụ với chiều cao $1,75\text{ m}$ và diện tích đáy là $0,32\text{ m}^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn). (*Đề thi TS vào 10 của Hà Nội, năm học 2019 – 2020*)



Bài 32. Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm . Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$). (*Đề thi TS vào 10 của Hà Nội, năm học 2020 – 2021*)



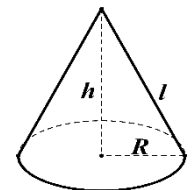
Bài 33. Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.



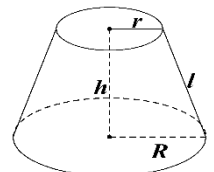
Bài 34. Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 cm và thể tích bằng $90\pi\text{ cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc?



Bài 35. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 cm và đường sinh bằng 30 cm . Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi \approx 3,14$).



Bài 36. Tính thể tích của cái chậu đựng nước hình nón cụt, biết bán kính đáy chậu bằng 19 cm , bán kính miệng chậu bằng 34 cm và chiều cao bằng 23 cm .



III. Bài toán nâng cao

Bài 37. Giải phương trình:

$$a/ (\sqrt{x+2}-1)^2 = 3x - 8\sqrt{x+2} + 11.$$

$$b/ \sqrt{4x^2 - 2x + \frac{1}{4}} = 4x^3 + 8x - x^2 - 2.$$

Bài 38. Cho các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{a}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b}{\sqrt{b+ca}} + \frac{c}{\sqrt{c+ab}}.$$

Bài 39. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$

Bài 40. Cho $a \leq 1; a + b \geq 3$. Tìm GTNN của $3a^2 + b^2 + 3ab$

Bài 41. Cho $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Chúc các con ôn tập tốt!