SỞ GD & ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: Toán học 12
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (*7,0 điểm*).

a) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ với m là tham số. Tìm m để hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(x+1)y+x=0 \\ (y-2)\left(\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}\right)=5y-8 \end{cases}$.

Câu 2 (*2,0 điểm*).

Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người có một đồng xu đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình. Ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp thì vẫn ngồi yên. Tính xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau.

Câu 3 (*4,0 điểm*).

a) Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}(m^3-8)x^4+(m^2+4)x^3+(2m-4)x^2+4x+2022$, với m là tham số. Tìm m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;3]$.

b) Cho hai số thực thay đổi x,y thỏa mãn $x^6+3x^2+y^6-3y^4+6y^2=4$. Tìm các giá trị nguyên của biểu thức $P=\frac{x+2y+1}{2x+y+3}$.

Câu 4 (*2,0 điểm*).

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA,SB,SC lần lượt lấy các điểm D,E,F (khác S). Gọi M là điểm chung của ba mặt phẳng $(ABF),(BCD),(CAE)$. Đường thẳng SM lần lượt cắt các mặt phẳng (ABC) và (DEF) tại P và N. Chứng minh rằng $\frac{NP}{NS}=3.\frac{MP}{MS}$.

Câu 5 (*5,0 điểm*).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh AB và góc giữa mặt phẳng $(A'ACC')$ và đáy bằng $\arctan 2$.

a) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính sin của góc giữa đường thẳng $A'G$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

……………. **Hết** …………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh…………………….……….............Số báo danh.........................

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HSG TRƯỜNG

(Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 **7,0 điểm**	**a)(3,0 điểm). Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ với m là tham số. Tìm m để hàm số có giá trị cực tiểu bằng** -3.	
	Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m); y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$	**1,0**
	TH1: $m\le 0,$ từ bảng biến thiên ta có $y_{CT}=y(0)=3m-2$	**0,5**
	Do đó: $y_{CT}=-3\Leftrightarrow 3m-2=-3\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$ (thoả mãn điều kiện)	**0,5**
	TH2: $m>0,$ từ bảng biến thiên ta có $y_{CT}=y(\pm\sqrt{m})=-m^2+3m-2$	**0,5**
	Do đó: $y_{CT}=-3\Leftrightarrow m^2-3m-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ (thoả mãn điều kiện)	**0,5**
	b) (4,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(x+1)y+x=0 \ \ (1) \\ (y-2)\left(\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}\right)=5y-8 \ \ (2) \end{cases}.$	
	Điều kiện xác định: $x\ge \dfrac{3}{4}.$ Ta có $(1)\Leftrightarrow (y-x)(y-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=x \end{array}\right.$.	**0,5**
	Với $y=1,$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}=3,$ Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}, x\ge \dfrac{3}{4}.$ Ta có $f'(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+4}}+\dfrac{2}{\sqrt{4x-3}}>0, \forall x>\dfrac{3}{4},$ suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[\dfrac{3}{4};+\infty).$ Mặt khác $x=1$ là nghiệm của phương trình nên nó là nghiệm duy nhất.	**1,0**
	Với $y=x,$ thay vào (2) ta được $(x-2)\left(\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}\right)=5x-8.$ Vì $x=2$ không thoả mãn phương trình nên pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}=\dfrac{5x-8}{x-2}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}-\dfrac{5x-8}{x-2}=0$	**0,5**
	Xét hàm số $g(x)=\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{4x-3}-\dfrac{5x-8}{x-2}, x\in[\dfrac{3}{4};+\infty)\setminus\{2\}.$ Ta có $g'(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+4}}+\dfrac{2}{\sqrt{4x-3}}+\dfrac{2}{(x-2)^2}, x\in(\dfrac{3}{4};+\infty)\setminus\{2\}.$	**0,5**
	Vì $g'(x)>0, \forall x\in(\dfrac{3}{4};+\infty)\setminus\{2\}$ nên hàm số đồng biến trên $[\dfrac{3}{4};2)$ và $(2;+\infty)$. Do đó phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.	**0,5**
	Mặt khác $x=1, x=3$ là hai nghiệm của $g(x)=0$. Vậy phương trình chỉ có hai nghiệm là $x=1, x=3$.	**0,5**
Câu 2 **2,0 điểm**	**Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người có một đồng xu đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình. Ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp**	

	thì vẫn ngồi yên. Tính xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau.	
	Số khả năng xảy ra là $2^8 = 256$	**0,5**
	Để không có hai người đứng cạnh nhau thì chỉ có tối đa 4 người đứng. TH1: không có người nào đứng, ta có 1 cách. TH2: có đúng 1 người đứng, ta có 8 cách. TH3: có đúng hai người đứng, ta có $C_8^2 - 8 = 20$ cách.	**0,5**
	TH4: có đúng 3 người đứng, ta có $C_8^3 - 8 - 8.4 = 16$ cách. TH5: có đúng 4 người đứng, ta có 2 cách.	**0,5**
	Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1+8+20+16+2}{256} = \dfrac{47}{256}$.	**0,5**
Câu 3 **4,0 điểm**	**a)(2,5 điểm) Cho hàm số** $f\left(x\right) = \dfrac{1}{4}(m^3-8)x^4 + (m^2+4)x^3 + (2m-4)x^2 + 4x + 2021,$ **với** m **là tham số. Tìm** m **để hàm số** $f(x)$ **đồng biến trên đoạn** $\left[-1;3\right]$**.**	
	Ta có $f'\left(x\right) = (m^3-8)x^3 + 3(m^2+4)x^2 + (4m-8)x + 4$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[-1;3\right] \Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in \left[-1;3\right]$ (1).	**0,5**
	Ta có $f'\left(x\right) \ge 0 \Leftrightarrow m^3x^3 + 3m^2x^2 + 4mx + 4 \ge 8x^3 - 12x^2 + 8x$ $\Leftrightarrow (mx+1)^3 + mx + 1 \ge (2x-1)^3 + 2x - 1$ (2).	**0,5**
	Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t,$ suy ra $g(t)$ đồng biến trên R. Do đó $(2) \Leftrightarrow mx + 1 \ge 2x - 1 \Leftrightarrow (m-2)x + 2 \ge 0.$	**0,5**
	Từ đó, $(1) \Leftrightarrow h(x) = (m-2)x + 2 \ge 0, \forall x \in \left[-1;3\right] \Leftrightarrow \begin{cases} h(-1) \ge 0 \\ h(3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} \le m \le 4.$	**1,0**
	b) (1,5 điểm) Cho hai số thực thay đổi x, y **thỏa mãn** $x^6 + 3x^2 + y^6 - 3y^4 + 6y^2 = 4.$ **Tìm các giá trị nguyên của biểu thức** $P = \dfrac{x+2y+1}{2x+y+3}$.	
	Từ giả thiết ta có: $x^6 + 3x^2 = (1-y^2)^3 + 3(1-y^2) \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$	**0,5**
	Đặt $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$. Ta có $P = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1}{2\sin\alpha + \cos\alpha + 3} \Leftrightarrow (2P-1)\sin\alpha + (P-2)\cos\alpha = 1 - 3P, (2\sin\alpha + \cos\alpha + 3 \ne 0, \forall\alpha)$	**0,5**
	Áp dụng điều kiện có nghiệm ta được: $(2P-1)^2 + (P-2)^2 \ge (3P-1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \le P \le \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}.$ Các giá trị nguyên của P là –1;0.	**0,5**
Câu 4 **2,0 điểm**	Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E, F (khác S). Gọi M là điểm chung của ba mặt phẳng $(ABF), (BCD), (CAE)$. Đường thẳng SM lần lượt cắt các mặt phẳng (ABC) và (DEF) tại P và N. Chứng minh rằng $\dfrac{NP}{NS} = 3.\dfrac{MP}{MS}$.	

	Đặt $\overrightarrow{SD}=a\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SE}=b\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SF}=c\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SP}=x\overrightarrow{SA}+y\overrightarrow{SB}+z\overrightarrow{SC}.$ Do A,B,C,P đồng phẳng nên $x+y+z=1.$	0,5
	Ta có $\overrightarrow{SM}=\frac{SM}{SP}.\overrightarrow{SP}=\frac{SM}{SP}(\frac{x}{a}\overrightarrow{SD}+y\overrightarrow{SB}+z\overrightarrow{SC}).$ Do D,B,C,M đồng phẳng nên $\frac{SM}{SP}(\frac{x}{a}+y+z)=1\Leftrightarrow\frac{SP}{SM}=\frac{x}{a}+y+z.$ Tương tự: $\frac{SP}{SM}=x+\frac{y}{b}+z=x+y+\frac{z}{c}$. Suy ra $3.\frac{SP}{SM}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2\Leftrightarrow 3.\frac{MP}{MS}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1$ (1).	0,5
	Ta có $\overrightarrow{SN}=\frac{SN}{SP}.\overrightarrow{SP}=\frac{SN}{SP}(\frac{x}{a}\overrightarrow{SD}+\frac{y}{b}\overrightarrow{SE}+\frac{z}{c}\overrightarrow{SF}).$ Do D,E,F,N đồng phẳng nên $\frac{SN}{SP}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})=1\Leftrightarrow\frac{SP}{SN}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\Leftrightarrow\frac{NP}{NS}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1$ (2).	0,5
	Từ (1) và (2) ta có $\frac{NP}{NS}=3.\frac{MP}{MS}$.	0,5
Câu 5 **5,0 điểm**	**Cho hình lăng trụ** $ABC.A'B'C'$ **có đáy là tam giác đều cạnh bằng** $3a$, **cạnh bên bằng** $2a$, **hình chiếu vuông góc của** A' **lên mặt phẳng** (ABC) **thuộc cạnh** AB **và góc giữa mặt phẳng** $(A'ACC')$ **và đáy bằng** $\arctan 2$.	
	a)(2,5 điểm) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Hạ $A'H\perp AB, HK\perp AC$. Khi đó: $((A'ACC'),(ABC))=\widehat{A'KH}$.	0,5
	Đặt $A'H=x$, ta có: $HK=\frac{x}{2}, AH=\frac{x}{\sqrt{3}}$.	1,0
	Ta có $A'H^2+AH^2=A'A^2\Leftrightarrow x=a\sqrt{3}.$ $S_{\Delta ABC}=\frac{9a^2.\sqrt{3}}{4}$	0,5
	$V_{ABC.A'B'C'}=\frac{9a^2.\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}=\frac{27a^3}{4}.$	0,5
	b) (2,5 điểm) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính sin của góc giữa đường thẳng $A'G$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.	
	Gọi M và M’ lần lượt là trung điểm BC, B’C’. Gọi I là giao điểm của A’G với MM’. Ta có $\frac{A'G}{GI}=\frac{AG}{GM}=2\Rightarrow A'I=\frac{3}{2}A'G.$	0,5
	Ta có $AG=a\sqrt{3}, HG=a, A'G=2a\Rightarrow A'I=3a.$	0,5
	$V_{A'.BCC'B'}=\frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}=\frac{9a^3}{2}.$ Ta có $\cos B'BC=\frac{\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}}{BB'.BC}$, mà $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA'}).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}a^2$ Suy ra $\cos B'BC=-\frac{1}{4}\Rightarrow\sin B'BC=\frac{\sqrt{15}}{4}$	0,5

	$S_{BCC'B'}=BB'.BC.\sin B'BC=\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{2}$ Suy ra $d(A',(BCC'B'))=\dfrac{3V_{A'.BCC'B'}}{S_{BCC'B'}}=\dfrac{9a}{\sqrt{15}}$	**0,5**
	Vậy $\sin(A'G,(BCC'B'))=\dfrac{d(A',(BCC'B'))}{A'I}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$.	**0,5**

……………………….Hết……………………….

<u>Ghi chú</u>: HS giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.