SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIÊN GIANG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi: **30/8/2023**

Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 *(5,0 điểm)*

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ với $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tìm: $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}\cdot$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho dãy số (y_n) xác định bởi:

$$y_n = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k + \left(\frac{1}{x_2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{x_n}\right)^k$$ với $n \geq 1$, là dãy bị chặn.

Bài 2 *(5,0 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x)\, f(yf(x) - 1) = f(x^2y) - f(x)$$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 3 *(5,0 điểm)*

a) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$(2^{p-2} - 1)^p(2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2$$ chia hết cho p^3.

b) Cho n là một số nguyên lớn hơn 7. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho $2a \leq n$ và $4a^2 + n$ là một hợp số.

Bài 4 *(5,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm là J và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm D. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của ID, JD. Đường tròn có đường kính là AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G khác A. Chứng minh rằng: $\widehat{IDB} = \widehat{AGE}$.

--------------------HẾT--------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KIÊN GIANG**	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA **NĂM HỌC 2023-2024**
HƯỚNG DẪN CHẤM THI **Đề thi chính thức**	Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi: **30/8/2023** Hướng dẫn chấm thi gồm **05** trang

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2. Nếu học sinh có sử dụng các định lý, hệ quả, các kết quả phụ trợ … phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng HSG và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.

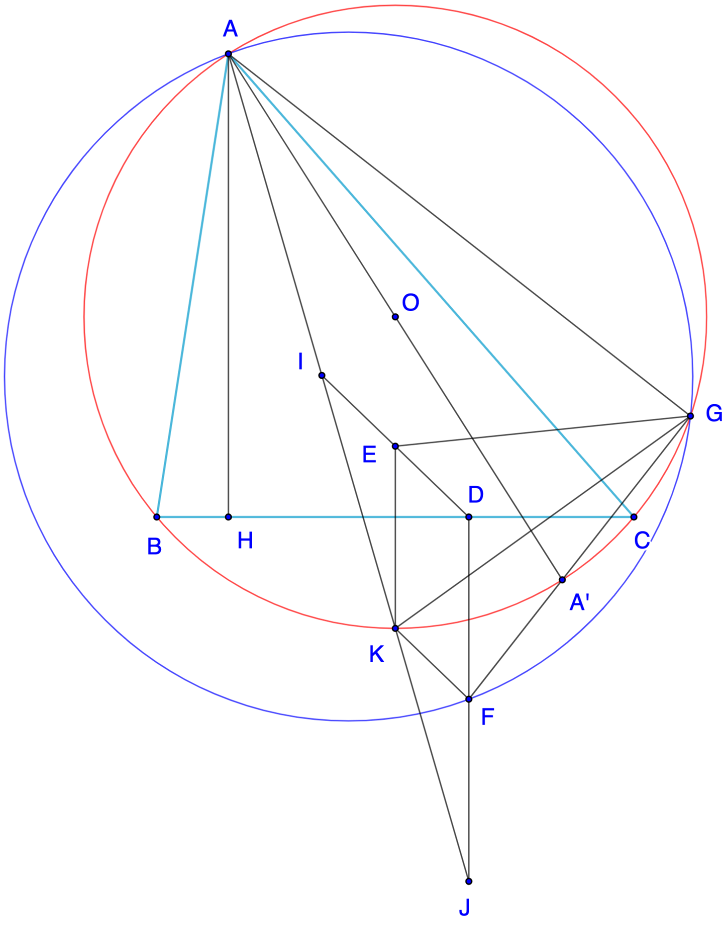
3. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Bài	Ý	Nội dung	Biểu điểm
1 **(5,0 đ)**	**a)**	Bằng quy nạp, $x_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.	**0,5**
		Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+1}^2 > x_n^2 + 2$. Từ đó bằng quy nạp ta được: $x_n^2 \geq 2n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.	**0,5**
		Do đó, $x_{n+1}^2 < x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} \leq x_n^2 + 2 + \frac{1}{2n+2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thành thử, $$x_n^2 < 2n + 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+2}$$	**0,5**
		Nhận xét 1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+2}\right) = 0.$$ *Chứng minh*. Có thể sử dụng định lý trung bình Cesàro hoặc làm như sau: $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{n-1} 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{k}\right) < 2.$$ Do đó $$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+2}\right) < \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$$ $$< \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) < \frac{3}{\sqrt{n}} \to 0$$	**0,5**

		Lưu ý. Nếu HS không chứng minh, thì trừ **0.25 đ**	
		Ta có $\lim\frac{2n+3}{n}=2$ và từ **Nhận xét 1**, $\displaystyle \lim\frac{1}{n}\left(2n+3+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+2}\right)=2$ Do đó, theo nguyên lý kẹp: $\displaystyle \lim\frac{x_n^2}{n}=2$	**0,5**
		Bình luận. +/ Học sinh có thể chứng minh dãy tăng, không bị chặn trên để suy ra $\lim x_n=+\infty$, từ đó suy ra $\lim(x_{n+1}^2-x_n^2)=2$ và sử dụng định lý Stolz, sẽ ra ngay kết quả. Nếu làm đúng, vẫn cho điểm tối đa. +/ Trong chứng minh **Nhận xét 1**, học sinh sử dụng định lý trung bình Cesàro để suy ra ngay kết quả của Nhận xét, là được điểm tối đa.	
	b)	Đầu tiên ta có nhận xét $x_n>2$ với mọi $n\geq 1$. Từ đó nếu $k\geq 3$ thì $x_n^k\geq\ x_n^3$ và nếu $k\leq 2$ thì $x_n^k\leq\ x_n^2$.	**0,25**
		Xét $k\geq 3$. Theo ý **a)**, $x_n^2\geq 2n+3>n+1$ nên $x_n^k\geq(n+1)\sqrt{n+1}$. Thành thử $\displaystyle y_n\leq\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\cdots+\frac{1}{x_n^3}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2$ (xem chứng minh trong **a)**). Vậy dãy (y_n) bị chặn khi $k\geq 3$.	**1,25**
		Xét $k\leq 2$. Ta có thì $x_n^k\leq\ x_n^2$ nên $\displaystyle y_n>\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}.$ Mặt khác, theo **a)**, ta có $\displaystyle x_n^2<2n+3+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+2}<2n+3+\frac{n}{4}<6n.$ Thành thử: $\displaystyle y_n>\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$	**0,5**
		Nhận xét 2. Dãy (h_n) với $\displaystyle h_n=\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}$ không bị chặn. Thật vậy, nếu (h_n) bị chặn thì (h_n) có giới hạn hữu hạn. Thành thử $\lim(h_{2n}-h_n)=0.$ Tuy nhiên $h_{2n}-h_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$ mâu thuẫn.	**0,25**

		Vậy, (h_n) là dãy không bị chặn. Do đó, (y_n) không bị chặn. Tóm lại, đáp số của bài toán là: mọi số tự nhiên $k \geq 3$.	**0,25**
	Bình luận. Về nhận xét $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2$ nếu học sinh sử dụng ở cả hai ý mà không làm rõ, chỉ trừ **0,25** một lần.		
2 **(5,0 đ)**		Giả sử f là hàm số cần tìm. Đầu tiên, nếu f là hàm hằng c thì $c^2 = c - c$. Vậy $c = 0$. Xét f là hàm khác hằng số.	**0,5**
		Thay $y = 0$: ta được $$f(x)(f(-1)+1) = f(0) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$ Nếu $f(-1) \neq -1$ thì $f(x) = \frac{f(0)}{f(-1)+1}$ do đó f là hàm hằng, loại. Vậy $f(-1) = -1$ và $f(0) = 0$.	**1,0**
		Giả sử $a \in \mathbb{R}$ mà $f(a) = 0$: Thay $x = a$, ta được $f(a^2 y) = 0$ với mọi y. Vì f khác hằng số nên $a = 0$. Thành thử, $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.	**1,0**
		Với mỗi $x \neq 0$: Chọn $y = \frac{1}{x}$ thì $f(x).f\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = 0$. Theo nhận xét ngay trên $f(x) \neq 0$ nên $f\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = 0$. Từ đó $\frac{f(x)}{x} - 1 = 0$ hay $f(x) = x$. Do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.	**1,5**
		Thử lại, ta thấy các hàm $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv x$ thoả mãn phương trình hàm ban đầu.	**0,5**
3 **(5,0 đ)**		Theo định lý Fermat nhỏ $2^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$. Thành thử, ta có thể viết: $$2^{p-1} = kp + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$	**0,5**
	a)	Kí hiệu biểu thức đã cho là S. Ta có $$2^p.S = 2.(kp-1)^p.(2kp+1) - 2(kp+1)^p + 4.(kp+1)$$ Theo công thức Newton $$(kp-1)^p \equiv -1 + kp^2 (\text{mod } p^3)$$ và $$(kp+1)^p \equiv 1 + kp^2 (\text{mod } p^3).$$	**1,0**
		Thành thử $2^p.S \equiv 2(kp^2-1)(2kp+1) - 2(1+kp^2) + 4(kp+1)$ $\equiv -4kp - 2 + 2kp^2 - 2(1+kp^2) + 4(kp+1)$ $\equiv 0 \ (\text{mod } p^3)$. Do p là số nguyên tố lẻ, nên $S \equiv 0 (\text{mod } p^3)$.	**1,0**

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td rowspan="2">b)</td>
<td>Nếu $n+1$ có một ước nguyên tố lẻ p, ta chọn $a=\frac{p-1}{2}$ thì $2a\leq$ $p-1\leq n$ và
$$4a^2+n=(p-1)^2-1+(n+1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$
Rõ ràng
$$4a^2+n\geq 4+n>p,$$
nên $4a^2+n$ là một hợp số.</td>
<td>1,0</td>
</tr>
<tr>
<td>Nếu $n+1=2^k$, với $k\geq 4$. Khi đó, $n+4=4(2^{k-2}+1)$ và $2^{k-2}+1$ là một số lẻ lớn hơn 1, nên $n+4$ sẽ có một ước nguyên tố lẻ p. Ta chọn $a=p-1$ thì
$$2(a+1)=2p\leq\frac{n+4}{2}$$
nên $2a<n$. Bên cạnh đó
$$4a^2+n=4(a^2-1)+(n+4)$$
chia hết cho p. Mặt khác,
$$4a^2+n\geq n+4\geq 4p>p$$
Nên $4a^2+n$ là một hợp số.</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Bình luận: Trường hợp $n+1=2^k$, khi $k=4$ tức $n=15$, ta chọn $a=3$, còn với $k\geq 5$, có thể lấy $a=2^{k-4}-1$. Khi đó
$$4a^2+n=4(2^{k-4}-1)^2+2^k-1=(2^{k-3}+1)(2^{k-3}+3)$$
là một hợp số.</td>
</tr>
<tr>
<td></td><td></td><td></td><td></td>
</tr>
<tr>
<td>4
(5,0 đ)</td>
<td></td>
<td>Gọi K là trung điểm của IJ. Ta có Δ IBJ vuông tại B nên $KB=KC=KI$. Do đó K là trung điểm cung BC của (O).

</td>
<td>1,5</td>
</tr>
</table>

		Gọi A' là giao điểm của GF với (O) và $\angle AGF = 90°$ nên AA'là đường kính của (O). Kẻ đường cao AH. Do đó $\angle KGF = \angle KAA' = \angle KAH = \angle KJD = \angle EKI = \angle KEF.$ Vậy tứ giác $KEGF$ nội tiếp.	**2,5**
		Ta có $\angle IDB = \angle IDJ - 90° = \angle EKF - 90° = 90° - \angle EGF = \angle AGE.$	**1,0**

--- HẾT---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KIÊN GIANG**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2023-2024**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi: **31/8/2023** Đề thi gồm 01 trang, 03 bài

Bài 5 *(7,0 điểm)*

Cho 2023 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ thoả mãn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} = 0.$$

a) Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương $i < j \leq 2023$ sao cho

$$a_i a_j \leq -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2}{2023}.$$

b) Giả sử rằng $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ là các số thực sao cho bất đẳng thức

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - b_{2023})^2$$

đúng với mọi bộ 2023 số thực $(x_1, \dots, x_{2023})$ thoả mãn $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2023}$. Chứng minh rằng

$$a_1 + \cdots + a_k \leq b_1 + \cdots + b_k \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, 2023.$$

Bài 6 *(6,0 điểm)*

Cho số nguyên dương n và một bảng ô vuông $(2n+1) \times (2n+1)$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho: có thể đặt k viên bi vào k ô của bảng đã cho, mỗi ô không quá 1 viên bi và đồng thời trong mỗi bảng con 2×2 của bảng ô vuông đã cho luôn có không quá 2 viên bi.

Bài 7 *(7,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm là H. Gọi M là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O). Đường thẳng qua O song song với AM cắt HM tại K. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên AC, AB. Gọi N là trung điểm HM. Chứng minh rằng

a) B, C, O, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) K, E, N, F là các đỉnh của một hình bình hành.

--------------------HẾT--------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KIÊN GIANG**	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2023-2024

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi chính thức

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: **31/8/2023**
Hướng dẫn chấm thi gồm **05** trang

I. Hướng dẫn chung

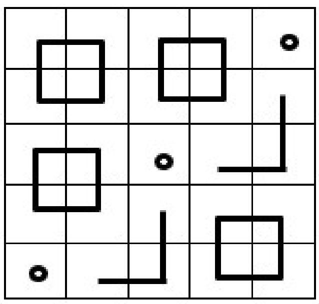
1. Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

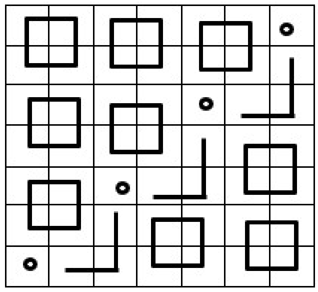
2. Nếu học sinh có sử dụng các định lý, hệ quả, các kết quả phụ trợ … phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng HSG và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.

3. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Bài	Ý	Nội dung	Biểu điểm
5 **(7,0 đ)**	**a)**	Không mất tính tổng quát, giả sử $$m \coloneqq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2023} =: M$$ Khi đó với mỗi $k = 1, \dots, 2023$ ta có $$(a_k - m)(a_k - M) \leq 0$$ hay $$a_k^2 + mM \leq (m + M)a_k.$$ Cộng các bất đẳng thức lại, ta có $$a_1^2 + \cdots + a_{2023}^2 + 2023mM \leq (m + M)(a_1 + \cdots + a_{2023}) = 0.$$ Từ đó, $$mM \leq -\frac{a_1^2 + \cdots + a_{2023}^2}{2023}$$ Do đó, có thể chọn $i = 1, j = 2023$.	**3,0**
	b)	Với mỗi bộ $(x_1, \dots, x_{2023})$ thoả mãn $x_1 \leq \cdots \leq x_{2023}$, xét số dương ε tuỳ ý, và bộ $(x_1', \dots, x_{2023}')$ được xác định $x_i' = x_i + i\varepsilon$ thì $$x_1' < \cdots < x_{2023}'.$$ Do đó $$(x_1' - a_1)^2 + \cdots + (x_{2023}' - a_{2023})^2 \leq (x_1' - b_1)^2 + \cdots + (x_{2023}' - b_{2023})^2$$ Cho $\varepsilon \to 0^+$ ta thu được $$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_{2023} - b_{2023})^2.$$ Thành thử, bất đẳng thức trên đúng với mọi bộ bộ $(x_1, \dots, x_{2023})$ thoả mãn $x_1 \leq \cdots \leq x_{2023}$.	**0,5**

		Đầu tiên, chọn bộ $x_1 = \cdots = x_{2023} = 0$ ta được $$a_1^2 + \cdots + a_{2023}^2 \leq\ b_1^2 + \cdots + b_{2023}^2.$$	**0,5**
		Chọn bộ $x_1 = \cdots = x_{2023} = x$, rồi rút gọn, ta được $$2x(b_1 + \cdots\ + b_{2023} - a_1 - \cdots - a_{2023}) \leq\ C$$ trong đó $$C = b_1^2 + \cdots + b_{2023}^2 - a_1^2 - \cdots - a_{2023}^2.$$ Do bất đẳng thức này đúng với mọi số x nên $$b_1 + \cdots\ + b_{2023} - a_1 - \cdots - a_{2023} = 0.$$ Vậy, $b_1 + \cdots + b_{2023} = 0$.	**1,0**
		Với mỗi $k = 1, \ldots, 2023$ ta chọn $x = x_1 = \cdots = x_k$ và $y = x_{k+1} = \cdots = x_{2023}$ với $x \leq\ y$ bất kì, ta được: $$(x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_k)^2 + (y - a_{k+1})^2 + \cdots + (x - a_{2023})^2$$ $$\leq (x - b_1)^2 + \cdots + (x - b_k)^2 + (x - b_{k+1})^2 + \cdots + (x - b_{2023})^2$$ Từ đó $$-2A_1\,x - 2A_2 y + 2B_1 x + 2B_2 y$$ $$\leq\ b_1^2 + \cdots + b_{2023}^2 - a_1^2 - \cdots - a_{2023}^2 =: C$$	**1,0**
		Ta có $A_1 + A_2 = 0$ và $B_1 + B_2 = 0$. Do đó $$2(A_1 - B_1)(y - x) \leq C$$ đúng với mọi $x \leq\ y$. Nếu $A_1 > B_1$ thì chỉ cần chọn cặp $(x; y)$ mà $y - x = 1 + \frac{C}{2(A_1 - B_1)}$ thì $2(A_1 - B_1)(y - x) > C$, mâu thuẫn. Vậy $A_1 \leq\ B_1$ hay $a_1 + \cdots + a_k \leq\ b_1 + \cdots + b_k$.	**1,0**
	Bình luận.		
6 **(6,0 đ)**		Phân hoạch bảng thành n^2 bảng con $2 \times\ 2$; $n + 1$ bảng con 1×1 và n hình chữ L dạng 1×2 . Với $n = 2$:  Với $n = 3$:	**2,0**



Tổng quát: với bảng $(2n+1)\times(2n+1)$ đầu tiên ta xếp

$$1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

bảng vuông con $2\times\ 2$ ở một phần tư của bảng đã cho, có góc vuông đỉnh trên bên trái. Tương tự, ta xếp các bảng vuông ở góc dưới cùng bên phải tuần tự

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

bảng vuông con $2\times\ 2$. Tổng số có n^2 bảng con $2\times\ 2$. Trên đường chéo, các ô còn trống được lấp bởi các con domino 1×1: có cả thảy $n+1$ con như vậy. Phần còn lại lấp bởi các con chữ L kích cỡ $1\times\ 2$.

Nếu k là số thoả mãn yêu cầu bài toán: trong mỗi bảng con $2\times\ 2$, có tối đa 2 viên bi. Trong mỗi hình chữ L cũng có tối đa 2 viên bi. Thành thử số bi được đặt tối đa là

$$n^2\times 2+(n+1)+n\times 2=2n^2+3n+1=(n+1)(2n+1).$$

Vậy

$$k\le(n+1)(2n+1).$$

2,0

Ta chỉ ra một cách đặt $k_0=(n+1)(2n+1)$ bi vào bảng thoả mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, xét các cột lẻ $1,3,5,\ldots,2n+1$. Ta đặt bi vào tất cả các ô của các cột này. Do mỗi cột có đúng $2n+1$ ô nên tổng số bi cần đặt là:

$$(2n+1)\times\ (n+1)=k_0.$$

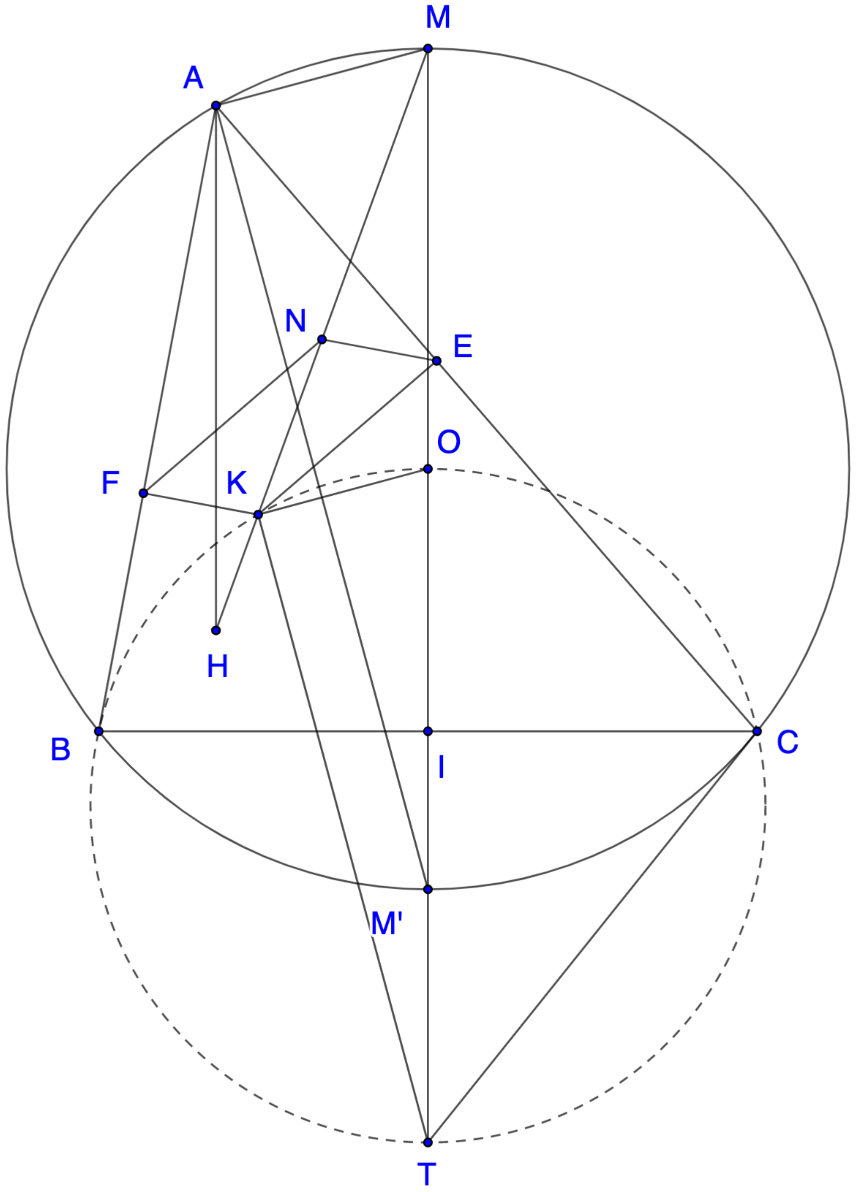
Vậy số nguyên dương k lớn nhất là đặt $k_0=(n+1)(2n+1)$.

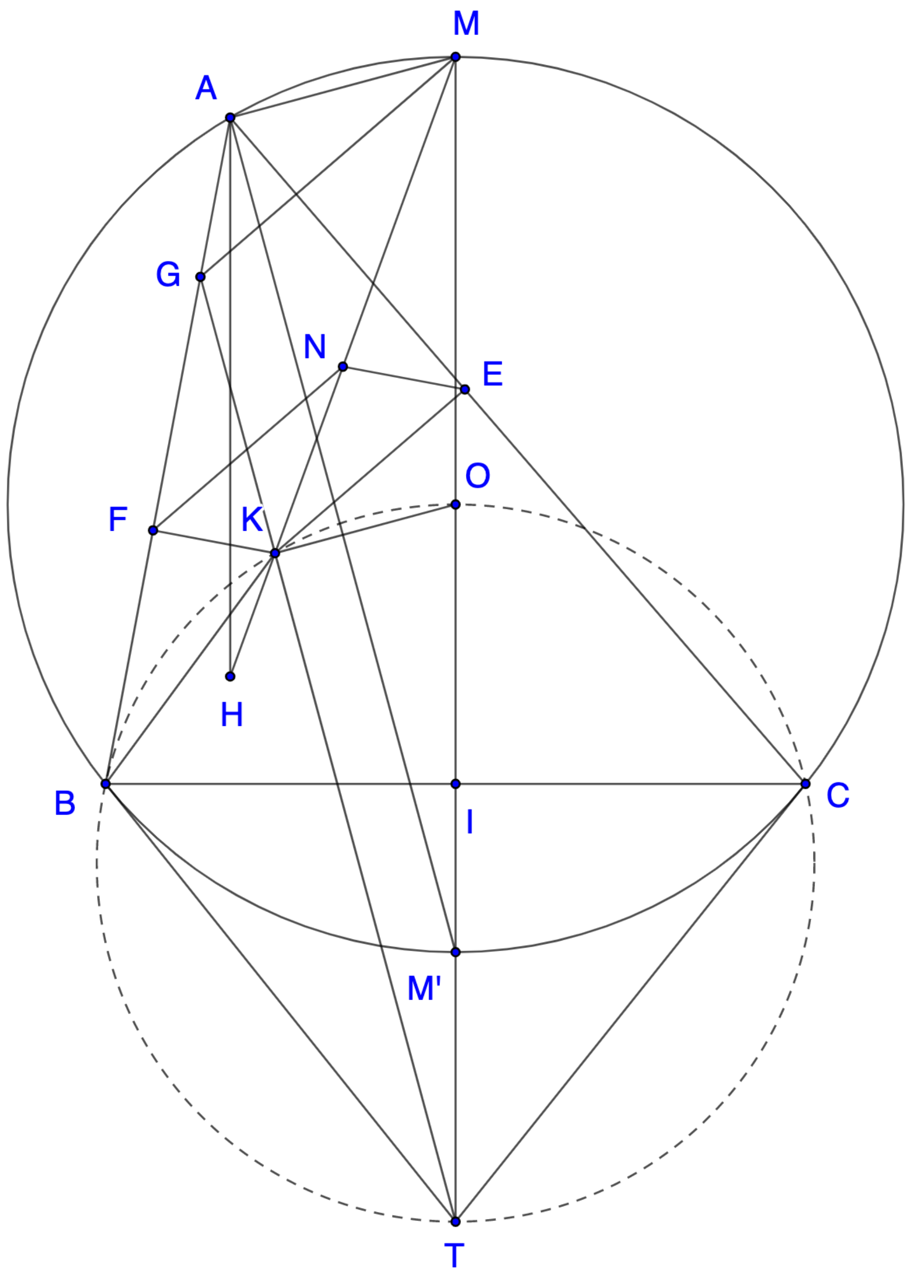
2,0

Bình luận. Học sinh có thể chứng minh kết quả bằng quy nạp theo n. Trong đó bước từ $n+1$ quy về n có thể làm như sau: Chia bảng $(2n+3)\times(2n+3)$ thành bảng con$(2n+1)\times\ (2n+1)$ ở góc trên bên trái, sau đó là một bảng $(2n+1)\times 2$, một bảng $2\times(2n+1)$ và một bảng 2×2 ở góc dưới cùng bên phải. Sau đó áp dụng giả thiết quy nạp, thì số bi đặt được sẽ không vượt quá

$$(n+1)(2n+1)+2(n+1)+2(n+1)+2=(n+2)(2n+3)+1.$$

Tuy nhiên, dấu bằng không xảy ra, vì nếu đạt được, bảng 2×2 cuối cùng phải có 2 bi. Khi đó, 4 ô kề với bảng này chứa tối đa 2 bi (nếu 2 bi trong bảng góc 2×2 không nằm trên đường chéo, hãy xét các bảng con 2×2 cạnh ô góc dưới cùng bên phải). Từ đó số bi sẽ không vượt quá $(n+2)(2n+3)-1<k_0$, mâu thuẫn.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">7
(7,0 đ)</td>
<td rowspan="2">a)</td>
<td>Gọi I là trung điểm BC, M' là trung điểm cung BC, T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của (O). Do $\Delta\, AMH \sim \Delta\, OKM$ nên
$$\frac{AM}{OK} = \frac{AH}{OM} = \frac{2OI}{OC} = \frac{2OC}{OT} = \frac{MM'}{OT}.$$
Từ đây suy ra
$$\frac{MA}{MM'} = \frac{OK}{OT}.$$</td>
<td>2,0</td>
</tr>
<tr>
<td>Mà $AM \parallel OK$ nên $\angle AMM' = \angle KOT$. Suy ra $\Delta\, AMM' \sim \Delta\, KOT$. Từ đó $\angle TKO = \angle M'AM = 90^\circ$. Do đó K nằm trên đường tròn đường kính OT. Vậy B, C, O, K nằm trên đường tròn đường kính OT.

</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>Kéo dài TK cắt AB tại G. Theo trên, $KT || AM'$.
Ta có
$$\angle ABK = \angle B - \angle KBC = \angle B - KTO - \angle OTC$$
$$= \angle B - \angle ANM - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BOC$$
$$= \angle B - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\angle C + \angle A - 90^\circ$$</td>
<td>2,0</td>
</tr>
</table>

		$= \frac{1}{2}\angle A = \angle BGK.$ Vậy $\Delta\, BGK$ cân tại K. Do đó F là trung điểm BG.	
		Mặt khác, $\angle GTM = \angle AM'M = \angle ABM$. Do đó $BGMT$ là tứ giác nội tiếp. Đặc biệt $\angle AGM = \angle BTM = \angle OBC = \angle ABH$. Do đó $GM \parallel BH$. Thành thử, FN là đường trung bình của hình thang $GMHB$. Do đó, $FN \parallel BH$. Vậy, $FN \perp AC$. Do đó $FN \parallel KE$. Tương tự, $EN \parallel KF$. Vậy, $KENF$ là hình bình hành.  	**1,5**

--- **HẾT**---