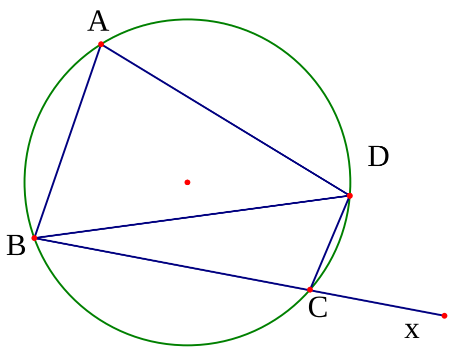
MỘT SỐ TIÊU CHUẨN NHẬN BIẾT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Tiêu chuẩn 1. Điều kiện cần và đủ để bốn đỉnh của một tứ giác lồi nằm trên cùng một đường tròn là tổng số đo của hai góc tứ giác tại hai đỉnh đối diện bằng 180^0.



Điều kiện để tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp là: $A + C = 180^0$ hoặc $B + D = 180^0$

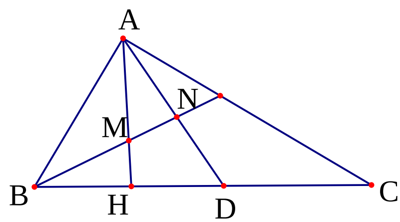
Hệ quả: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được $BAD = DCx$

Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc HAC. Phân giác trong góc ABC cắt AH, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng: $BND = 90^0$.

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có $MHD = 90^0$. Nếu $MND = 90^0$ thì tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Vì vậy thay vì trực tiếp chỉ ra góc $BND = 90^0$ ta sẽ đi chứng minh tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Tức là ta chứng minh $AMN = ADH$.



Thật vậy ta có $AMN = BMH = 90^0 - MBH$, $NDH = 90^0 - HAD$ mà $MBH = \frac{1}{2}ABC, HAD = \frac{1}{2}HAC$ và $ABC = HAC$ do cùng phụ với góc BCA từ đó suy ra $AMN = ADH$ hay tứ giác $MHDN$ nội tiếp $\Rightarrow MND = MHD = 90^0$

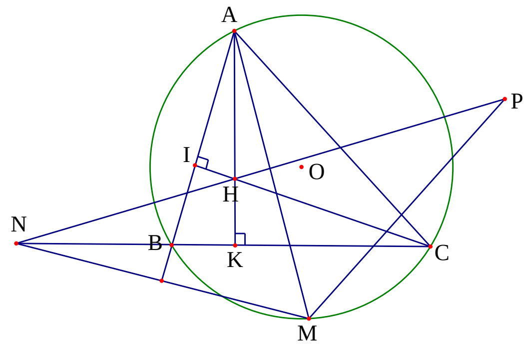
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là điểm H. Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B,C). Gọi N,P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB,AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) N,H,P thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của điểm M để độ dài đoạn NP lớn nhất.

Phân tích và hướng dẫn giải:



a). Giả sử các đường cao của tam giác là AK,CI . Để chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh $AHC+APC=180^0$ .Mặt khác ta có $AHC=IHK$ (đối đỉnh), $APC=AMC=ABC$ (do tính đối xứng và góc nội tiếp cùng chắn một cung). Như vậy ta chỉ cần chứng minh $ABC+IHK=180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $BIHK$ là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh N,H,P thẳng hàng ta sẽ chứng minh $NHA+AHP=180^0$ do đó ta sẽ tìm cách quy hai góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp. Thật vậy ta có: $AHP=ACP$ (tính chất góc nội tiếp), $ACP=ACM$ (1) (Tính chất đối xứng) . Ta thấy vai trò tứ giác $AHCP$ giống với $AHBN$ nên ta cũng dễ chứng minh được $AHBN$ là tứ giác nội tiếp từ đó suy ra $AHN=ABN$, mặt khác $ABN=ABM$ (2) (Tính chất đối xứng) . Từ (1), (2) ta suy ra chỉ cần chứng minh $ABM + ACM = 180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $ABMC$ nội tiếp. Vậy $NHA + AHP = 180^0$ hay N, H, P thẳng hàng.

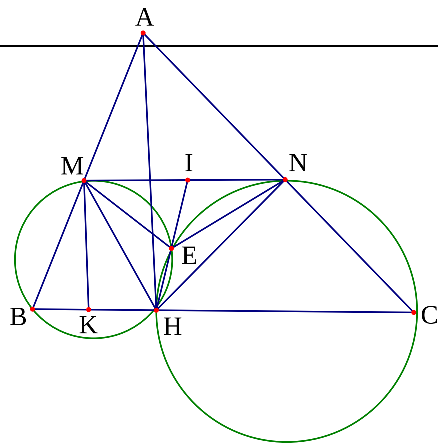
<u>Chú ý:</u> Đường thẳng qua N, H, P chính là đường thẳng Steiners của điểm M. Thông qua bài toán này các em học sinh cần nhớ tính chất. Đường thẳng Steiners của tam giác thì đi qua trực tâm của tam giác đó . (Xem thêm phần "Các định lý hình học nổi tiếng'').

c). Ta có $MAN = 2BAM, MAP = 2MAC \Rightarrow NAP = 2BAC$. Mặt khác ta có $AM = AN = AP$ nên các điểm M, N, P thuộc đường tròn tâm A bán kính AM. Áp dụng định lý sin trong tam giác NAP ta có:

$NP = 2R.\sin NAP = 2AM.\sin 2BAC$. Như vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất. Hay AM là đường kính của đường tròn (O)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

<u>Phân tích, định hướng cách giải:</u>



Để chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh: $MAN + MEN = 180^0$. Ta cần tìm sự liên hệ của các góc $MAN; MEN$ với các góc có sẵn của những tứ giác nội tiếp khác.

Ta có

$$MEN = 360^0 - \left(MEH + NEH\right) = 360^0 - \left(180^0 - ABC + 180^0 - ACB\right) = ABC + ACB$$

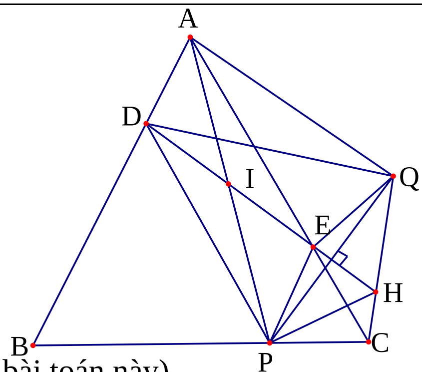
$= 180^0 - BAC$ suy ra $MEN + MAN = 180^0$. Hay tứ giác $AMEN$ là tứ giác nội tiếp.

Kẻ $MK \perp BC$, giả sử HE cắt MN tại I thì IH là cát tuyến của hai đường tròn (BMH), (CNH). Lại có $MB = MH = MA$ (Tính chất trung tuyến tam giác vuông). Suy ra tam giác MBH cân tại $M \Rightarrow KB = KH \Rightarrow MK$ luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH. Hay MN là tiếp tuyến của

(MBH) suy ra $IM^2 = IE.IH$, tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (HNC) suy ra $IN^2 = IE.IH$ do đó $IM = IN$.

Xem thêm phần: ‘’Các tính chất của cát tuyến và tiếp tuyến’’

Ví dụ 4) Cho tam giác cân ABC $(AB = AC)$ P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với $AB, AC\left(E \in AC, D \in AB\right)$ gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE. Chứng minh bốn điểm Q, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.



Phân tích định hướng giải:

Bài toán có 2 giả thiết cần lưu ý. Đó là các đường thẳng song song với 2 cạnh tam giác , và điểm Q đối xứng với P qua DE.

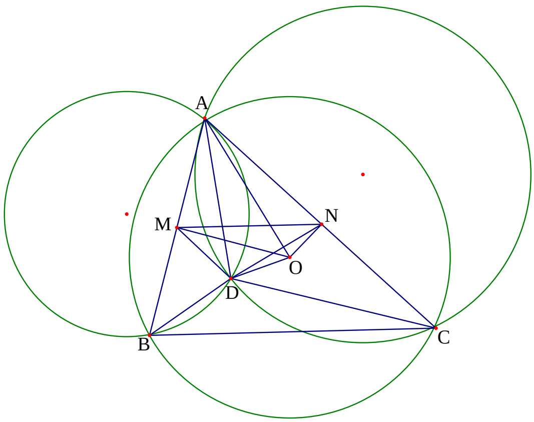
Do đó ta sẽ có: $AD = EP = EC = EQ$ và $DP = DQ$ (Đây là chìa khóa để ta giải bài toán này)

Từ định hướng đó ta có lời giải như sau: Do $AD//PE, PD//AE \Rightarrow ADPE$ là hình bình hành

$\Rightarrow AE = DP = DQ$. Mặt khác do P, Q đối xứng nhau qua $DE \Rightarrow AD = PE = EQ$. Suy ra $DAQE$ là hình thang cân $\Rightarrow DAQ = AQE$. Kéo dài DE cắt CQ tại H ta có $DAQ = AQE = PEH$. Như vậy để chứng minh $ABCQ$ nội tiếp ta cần chứng minh: $PCH + PEH = 180^0 \Leftrightarrow PEHC$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác ta có: $ECQ = EQC$ (do tam giác EQC cân), $EPH = EQH$(Do tính đối xứng) suy ra $ECH = EPH \Leftrightarrow EPCH$ là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 5) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Dựng đường tròn qua B và tiếp xúc với cạnh AC tại A dựng đường tròn qua C và tiếp xúc với AB tại A hai đường tròn này cắt nhau tại D. Chứng minh $ADO = 90^0$

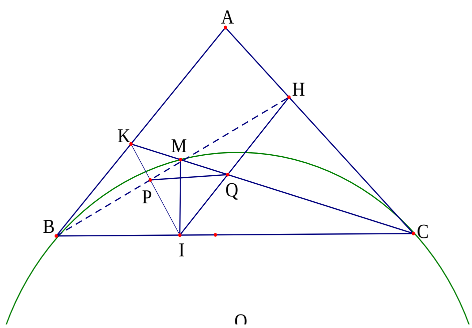
Phân tích định hướng giải:



Ta thấy rằng $ADO = 90^0$ thì các điểm A, D, O cùng nằm trên đường tròn đường kính OA.Ta mong muốn tìm ra được một góc bằng $ADO = 90^0$. Điều này làm ta nghỉ đến tính chất quen thuộc ‘’Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung thì vuông góc với dây đó’’. Vì vậy nếu ta gọi M, N là trung điểm của AB, AC thì ta sẽ có: $OMA = ONA = 90^0$. Do đó tứ giác $OMAN$ nội tiếp. Công việc còn lại là ta chứng minh $AMDO$ hoặc $ANOD$ hoặc $DMAN$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác ta có: $ABD = CAD$ và $ACD = BAD$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) $\Rightarrow \Delta BDA$ và ΔADC đồng dạng nên ta suy ra $DMA = DNC$ $\Rightarrow DMA + DNA = DNC + DNA = 180^0 \Rightarrow AMDN$ nội tiếp suy ra năm điểm A, M, D, O, N nằm trên đường tròn đường kính $OA \Rightarrow ADO = 90^0$

<u>Ví dụ 6:</u> Cho tam giác ABC vuông cân tại A một đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại B, C. Trên cung BC nằm trong tam giác ABC lấy một điểm M $(M \neq B; C)$. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên $BC; CA; AB$ và P là giao điểm của MB với IK, Q là giao điểm của MC với IH. Chứng minh $PQ//BC$.

Phân tích định hướng giải:

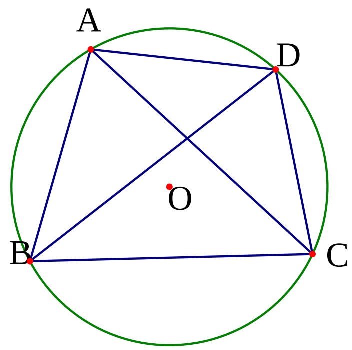


Để chứng minh $PQ//BC$ ta chứng minh $MPQ = MBC$ nhưng tứ giác $BIMK$ nội tiếp nên $MBC = MKI$. Mặt khác AC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $ACK = MBC$ và $CIMH$

nội tiếp nên $ACK = MIH$ .Như vậy để chứng minh $PQ//BC$ ta cần chứng minh $MIH = MPQ$. Tức là ta cần chứng minh tứ giác $MPIQ$ nội tiếp . Để ý rằng $BMC = KMH = 135^0$, $PIQ = PIM + IMQ$

$= KBM + KCH = \frac{1}{2}sđ\left(BM + MC\right) = 45^0$ suy ra đpcm.(Các em học sinh tự hoàn thiện lời giải)

Tiêu chuẩn 2: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $ADB = ACB$

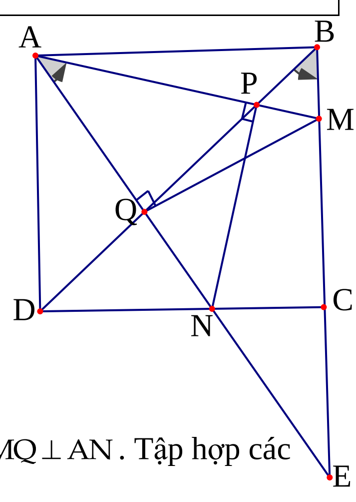


Ví dụ 1. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $MAN = 45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABMQ$ và $ADNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải:



a). Gọi E là giao điểm của AN và BC. Các điểm M và Q nằm trên hai cạnh EB và EA của tam giác EBA, nên tứ giác $ABMQ$ là lồi. Các đỉnh A và B cùng nhìn đoạn thẳng MQ dưới một góc 45^0 .

Vì vậy tứ giác $ABMQ$ nội tiếp.

Lập luận tương tự ta suy ra tứ giác $ADNP$ nội tiếp.

b) Từ kết quả câu a, suy ra

$ADP = ANP = 45^0, QAM = QBM = 45^0 \Rightarrow NP \perp AM, MQ \perp AN$. Tập hợp các điểm P,Q,C nhìn đoạn MN dưới một góc vuông, nên các điểm này nằm trên đường tròn đường kính MN.

Ví dụ 2). Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM; CM,BM cắt d lần lượt tại D,E. Chứng minh rằng B,C,D,E cùng thuộc một đường tròn.

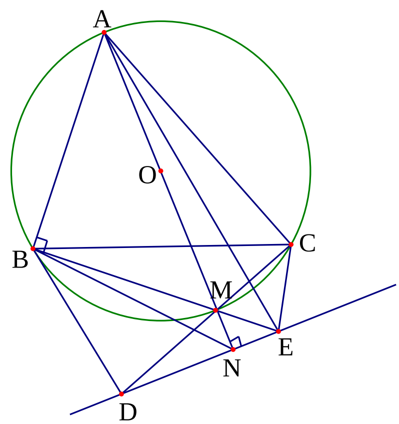
Lời giải:

Kẻ đường kính AM cắt d tại N. Ta có $ANE = ABE = 90^0$ nên tứ giác $ABNE$ nội tiếp, suy ra $BEN = BAN$.

Mặt khác $BAN = BCM$,

do đó $BCM = BEN$ hay $BCD = BED$.

Vậy B,C,D,E cùng thuộc một đường tròn.

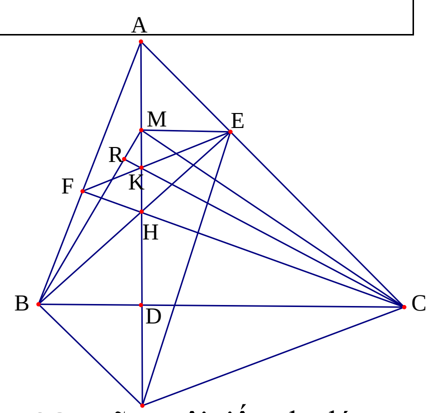


Ví dụ 3) Cho tam giác ABC có các đường cao AD,BE,CF đồng quy tại H. Gọi K là giao điểm của EF và AH, M là trung điểm của AH. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác MBC.

Lời giải:

Lấy điểm S đối xứng với H qua BC, R là giao điểm của KC với MB.

Vì $ME = MA = MH$ (Tính chất trung tuyến), kết hợp tính đối xứng của điểm S ta có $MSB = BHD = MHE = MEB$ nên tứ giác $MESB$ nội tiếp. Suy ra $RBE = MSE$ (1).

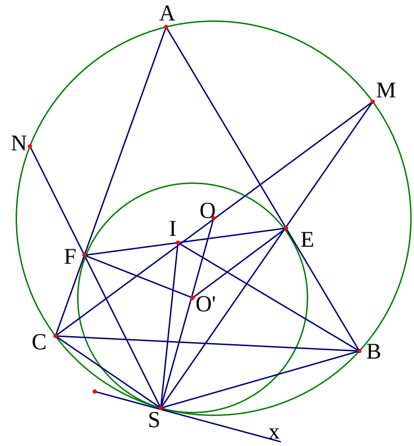


Lại có $KSC = CHD = AHF = AEK$ nên tứ giác $KSCE$ cũng nội tiếp, do đó $MSE = RCE$ (2).Từ (1) và (2) suy ra $RBE = RCE$ nên tứ giác $RBCE$ nội tiếp.

Từ đó suy ra $BRC = BEC = 90^0$. Trong tam giác MBC, ta có $MK \perp BC$ và $CK \perp MB$ nên K là trực tâm của tam giác MBC.

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn (O') tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại E, F tiếp xúc với (O) tại S. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $BEIS, CFIS$ là các tứ giác nội tiếp.

Lời giải:



Nhận xét: bài toán này thực chất là định lý Lyness được phát biểu theo cách khác;(Xem thêm phần: ‘’Các định lý hình học nổi tiếng’’)

Kéo dài SE, SF cắt đường tròn (O) tại E, F. Ta có các tam giác OMS, $O'EF$ cân tại O, O' nên

$O'ES = OMS \Rightarrow O'E // OM \Rightarrow OM \perp AB$ hay M là điểm chính giữa của cung AB.

Kẻ đường phân giác trong góc ACB cắt EF tại I, ta chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Thật vậy ta có: C, I, M thẳng hàng và $ICS \equiv MCS = MSx$ và $IFS \equiv EFS = MSx$ nên $ICS = IFS \Rightarrow$ tứ giác $IFCS$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow EIS = SCF$. Mặt khác tứ giác $ACSB$ nội tiếp nên $ACS + ABS = 180^0 \Rightarrow EIS + ABS = 180^0$ hay tứ giác $EISB$ nội tiếp.

Công việc còn lại là chứng minh: IB là phân giác trong của góc ABC.

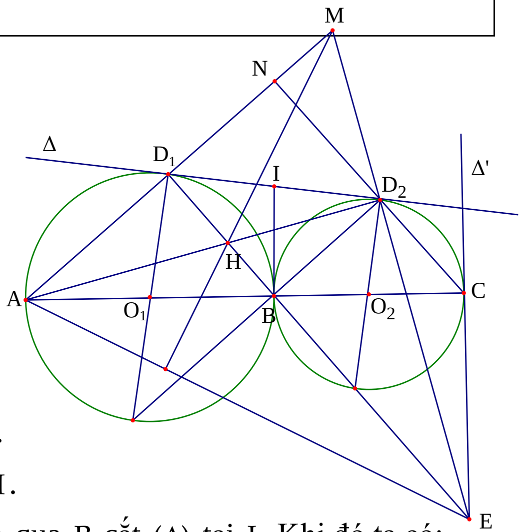
Vì $EBI = ESI$ mà

$ESI = ISB - ESB = AEF - MSB = \frac{180 - A}{2} - MCB = \frac{180 - A}{2} - \frac{C}{2} = \frac{B}{2}$. Điều này chứng tỏ IB là phân giác trong của góc ABC. Hay I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC

<u>Chú ý:</u> Nếu thay giả thiết điểm I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác thành. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác FCS, SBS cắt nhau tại I thì hình thức bài toán khác đi nhưng bản chất vẫn là định lý Lyness. Để ý rằng: ΔAEF cân tại A nên ta dễ dàng suy ra được: I là trung điểm của EF

Ví dụ 5) Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau. Kẻ đường thẳng O_1O_2 cắt hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ lần lượt tại A,B,C (B là tiếp điểm). Đường thẳng Δ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với các tiếp điểm tương ứng là D_1,D_2 . Đường thẳng (Δ') là tiếp tuyến với (O_2) qua C. Đường thẳng BD_1 cắt (Δ') tại E. AD_1 cắt ED_2 tại M, AD_2 cắt BD_1 tại H. Chứng minh $AE \perp MH$.

<u>Phân tích định hướng giải:</u>



+ Vì $ED_1 \perp MA$ do góc AD_1B là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Vì vậy để chứng minh $AE \perp MH$ ta phải chứng minh $AD_2 \perp ME$, tức là ta chứng minh H là trực tâm của tam giác MAE. Khi đó ta sẽ có:

$AD_1E = AD_2E$

hay tứ giác AD_1D_2E là tứ giác nội tiếp.

+ Gọi N là giao điểm của CD_2 và AM.

Xét tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) qua B cắt (Δ) tại I. Khi đó ta có: $ID_1 = IB = ID_2 \Rightarrow \Delta BD_1D_2$ vuông tại B, $D_1E//CN$ (cùng vuông góc với BD_2). Do đó $BAD_1 = BD_1D_2$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), mặt khác $BD_1D_2 = D_1D_2N$ (so le trong). Suy ra $CAD_1 = ND_2D_1 \Rightarrow AD_1D_2C$ là tứ giác nội tiếp. (1) Xét tứ giác ED_1D_2C ta có: $ED_1//CD_2, BEC = IBD_1$ (góc đồng vị). Suy ra $ED_1D_2 = D_1EC$ suy ra tứ giác ED_1D_2C là hình thang cân nên nội tiếp được (2). Từ (1), (2) ta suy ra 5 điểm A,D_1,D_2,C,E cùng thuộc một đường tròn. Suy ra tứ giác AD_1D_2E nội tiếp được.

Ví dụ 6) Cho tam giác ABC có hai đường cao BD,CE cắt nhau tại H gọi I là trung điểm của BC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và CDI cắt nhau ở K, DE cắt BC tại M. Chứng minh tứ giác $BKDM$ nội tiếp.

Phân tích định hướng giải:

Ta thấy ngay đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADE,BEI,CDI sẽ cắt nhau tại điểm K (Định lý Miquel). Như vậy ta sẽ thấy $AEKD$ là tứ giác nội tiếp, mặt khác từ giả thiết ta cũng có: $AEHD$ là tứ giác nội tiếp. Nên suy ra 5 điểm A,E,H,K,D thuộc một đường tròn đường kính AH. Đây chính là chìa khóa để giải quyết bài toán .

Lời giải: Trước tiên ta chứng minh: tứ giác $AEKD$ nội tiếp (Bạn đọc có thể tham khảo ở phần ''Các định lý hình học nổi tiếng'') Ta có:

$A+B+C+EKC+EKI+IKD=540^0$. Theo giả thiết

$B+EKI=IKD+C=180^0 \Rightarrow A+EKD=180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $AEKD$ nội tiếp

$\Rightarrow ADE=AKE$, $BD\perp AC, CE\perp AB \Rightarrow$ tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow ADE=B$.

Kết hợp với $ADE=AKE$ được $B=AKE \Rightarrow EKI+AKE=EKI+B=180^0$

$\Rightarrow A,K,I$ thẳng hàng.

ΔBDC là tam giác vuông nên $ID=IC$, $IKDC$ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$IKC=IDC=ICD$, $IKC=KAC+ACK$ (Tính chất góc ngoài),

$ICD=ICK+KCD \Rightarrow KAC=ICK$, mà $KAD=DEK$ (chắn cung DK)

$\Rightarrow ICK=DEK \Rightarrow$ tứ giác $MEKC$ nội tiếp $\Rightarrow MEC=MKC$. Theo kết quả trên suy ra $IKC=AED=MEB, MEC=MEB+90^0, MKC=MKI+IKC \Rightarrow MKI=90^0$

$\Rightarrow MK\perp KI \Rightarrow A,E,H,D,K$ nằm trên đường tròn đường kính

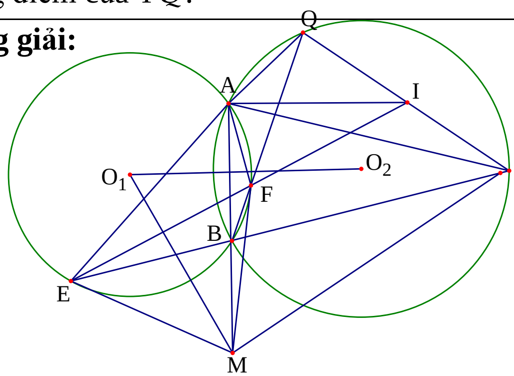
$AH \Rightarrow HK\perp AI \Rightarrow M,H,K$ thẳng hàng.

Tứ giác $DEHK$ nội tiếp $\Rightarrow HEK=HDK$, tứ giác $MEKC$ nội tiếp

$\Rightarrow KEC=KMC \Rightarrow KMC=HDK \Rightarrow KMB=BDK \Rightarrow$ tứ giác $BKDM$ nội tiếp.

Ví dụ 7) Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A,B. Kéo dài AB về phía B lấy điểm M qua M kẻ hai tiếp tuyến ME,MF với đường tròn (O_1) (E,F là các tiếp điểm) điểm F,O_2 nằm cùng phía so với AB. Đường thẳng BE,BF cắt đường tròn (O_2) tại P,Q gọi I là giao điểm của PQ và EF. Chứng minh I là trung điểm của PQ.

Phân tích định hướng giải:



Để ý rằng: Đường thẳng EFI cắt ba cạnh tam giác BPQ lần lượt tại I, E, F. Theo định lý Menelauyt ta có: $\frac{QI}{IP}.\frac{EP}{EB}.\frac{FB}{FQ}=1$. Để chứng minh I là trung điểm của PQ ta sẽ chứng minh: $\frac{EP}{EB}.\frac{FB}{FQ}=1$. Bây giờ ta sẽ tìm cách thay thế các đại lượng trong $\frac{EP}{EB}.\frac{FB}{FQ}=1$ (*) thành các đại lượng tương đương để thông qua đó ta có thể quy về việc chứng minh tứ giác nội tiếp, hoặc tam giác đồng dạng. Xét đường tròn (O_1) với cát tuyến M, B, A và hai tiếp tuyến ME, MF. Ta có tính chất quen thuộc: $\frac{FA}{FB}=\frac{EA}{EB}$ (Xem phần chùm bài tập cát tuyến và tiếp tuyến). Từ đó suy ra $\frac{FB}{EB}=\frac{FA}{EA}$ thay vào (*) ta quy bài toán về chứng minh: $\frac{EP}{FQ}.\frac{FA}{EA}=1 \Leftrightarrow \frac{EP}{FQ}=\frac{EA}{FA} \Leftrightarrow \Delta EPA \sim \Delta FQA$ nhưng ta có: $EPA = FQA$ góc nội tiếp chắn cung AB. $AEP = AFQ$ (tứ giác $AEBF$ nội tiếp) . Qua đó ta có kết quả cần chứng minh:

Các em học sinh tự hoàn chỉnh lời giải dựa trên những phân tích định hướng mà tác giải vừa trình bày.

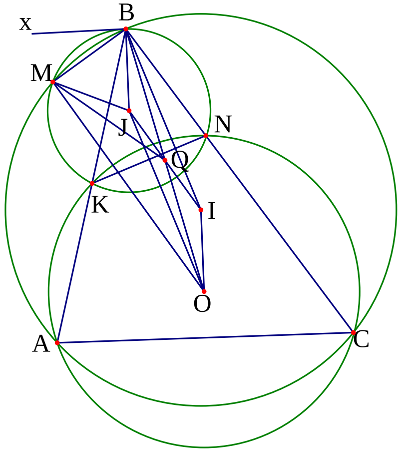
Nếu không dùng định lý Menaleuyt ta có thể giải theo các khác như sau:

Vì MF là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) nên ta có: $MFB = FAB$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $\Delta MFB, \Delta MAF$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{MF}{MA}=\frac{FB}{FA}$. Tương tự ta cũng có: $\Delta MEB, \Delta MAE$ đồng dạng suy ra $\Rightarrow \frac{ME}{MA}=\frac{EB}{EA}$, mà $ME = MF \Rightarrow \frac{FB}{FA}=\frac{EB}{EA}$ (1) , mặt khác $AFE = ABE$ (chắn cung AE) và $ABE = AQP$ (do tứ giác $ABPQ$ nội tiếp). Suy ra $AFE = AQP \Rightarrow AFIQ$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $AFQ = AIQ \Rightarrow AFB = AIP$, ta cũng có: $ABF = APQ$ suy ra $\Delta FBA, \Delta IPA$ đồng dạng suy ra $\frac{BF}{AF}=\frac{PI}{AI}$ (2).

Tương tự ta chứng minh được: $\Delta ABE, \Delta AQI$ đồng dạng suy ra $\frac{QI}{IA} = \frac{BE}{AE}$ (3).Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{QI}{IA} = \frac{PI}{IA} \Leftrightarrow IP = IQ$

Ví dụ 8) Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) đi qua A và C cắt AB, AC theo thứ tự tại K và N. Đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác KBN cắt nhau tại B và M. Chứng minh $BIOJ$ là hình bình hành từ đó suy ra OMB vuông.

Phân tích định hướng giải:



Để chứng minh $BIOJ$ là hình bình hành ta chứng minh $BI // OJ, BJ // OI$.

Mặt khác dễ thấy OI là trung trực của AC nên $OI \perp AC$.

Ta cần chứng minh $BJ \perp AC$, việc tìm liên hệ trực tiếp là tương đối khó vì vậy ta nghỉ đến hướng tạo một đường thẳng ''đặc biệt'' vuông góc với BJ sau đó chứng minh đường thẳng này song song với AC từ đó ta nghỉ đến dựng tiếp tuyến Bx của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.

Khi đó ta có : $Bx \perp BJ$ và $KBx = BNK$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Mặt khác $AKNC$ nội tiếp $\Rightarrow BAC = BNK \Rightarrow MKx = A \Rightarrow Bx // AC$.

Từ đó suy ra $BJ // OI$.

Tương tự: Từ B kẻ tiếp tuyến By với đường tròn ngoại tiếp ΔABC, chứng minh như trên ta có: $BI // OJ$ $\Rightarrow$ tứ giác $BIOJ$ là hình bình hành.

Gọi Q là giao điểm BO và $IJ \Rightarrow QO = QB$, IJ là trung trực BM (Tính chất đường nối tâm của hai đường tròn cắt nhau).

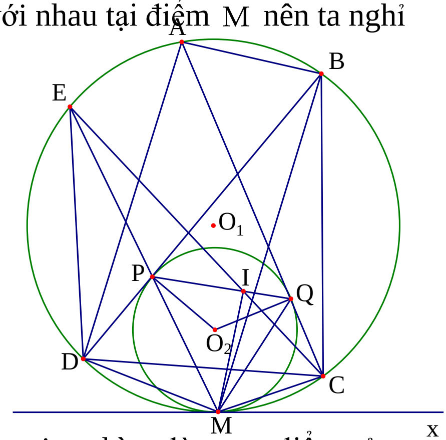
$\Rightarrow QM = QB \Rightarrow QM = QB = QO \Rightarrow \Delta BMO$ là tam giác vuông $\Rightarrow OMB = 90^0$.

Ví dụ 9) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong tại M (đường tròn (O_2) nằm trong). Hai điểm P và Q thuộc đường tròn (O_2) qua P kẻ tiếp tuyến với (O_2) cắt (O_1) tại B và D qua Q kẻ tiếp tuyến với (O_2) cắt

(O_1) tại A và C. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD nằm trên PQ.

Phân tích định hướng giải:

Vì giả thiết hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau tại điểm M nên ta nghỉ đến việc tiếp tuyến chung Mx để tận dụng các yếu tố về góc: Bài toán này làm ta nghỉ đến định lý Lyness nổi tiếng (Xem thêm phần các định lý hình học nổi tiếng **(Định lý Lyness mở rộng)** và các tínhchất quen thuộc liên quan đến chứng minh định lý này là: MP là



phân giác góc DMB, kéo dài MP cắt (O_1) tại E thì E là trung điểm của BD …

Từ những định hướng trên ta suy ra cách giải cho bài toán như sau:

+ Dựng tiếp tuyến chung Mx của hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ khi đó ta có:

$DPM = PMx = \frac{1}{2}sđPM$, $DBM = DMx = \frac{1}{2}sđDM$ mà $DPM = PMB + PBM$ (tính chất góc ngoài của tam giác), $PMx = PMD + DMx$ $\Rightarrow PMD = PMB$ $\Rightarrow MP$ là phân giác DMB, gọi E là giao điểm MP với (O_1) thì E là trung điểm của $BD \Rightarrow CE$ là phân giác BCD.

+ Gọi I là giao điểm của CE và PQ ta cần chứng minh DI là phân giác củan BDC.

Mặt khác nếu I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác BCD thì ta sẽ có: $EI = ED = EB$ (Tính chất quen thuộc liên quan đến tâm vòng tròn nội tiếp, bạn đọc có thể xem thêm phần ‘’góc ‘’ ở phần đầu) .

+ Ta có

$ICM = \frac{1}{2}sđEDM = \frac{1}{2}\left(sđDM + sđDE\right) = \frac{1}{2}\left(sđDM + sđEB\right) = DPM = EPB =$

$IQM \Rightarrow IQCM$ nội tiếp suy ra $MIC = MQC$ mà $MQC = MPQ = \frac{1}{2}sđMQ$

(Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) suy ra

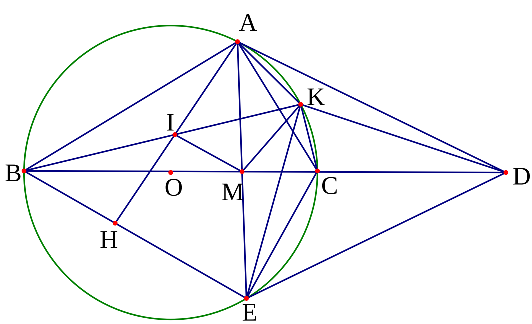
$MIC = MPQ \Rightarrow EPI = EIM \Rightarrow \Delta EIM$ đồng dạng $\Delta EPI \Rightarrow EI^2 = EP.EM,$ Tương tự ta cũng chứng minh được $DPIM$ là tứ giác nội tiếp và ΔDEP đồng dạng với $\Delta MDE \Rightarrow ED^2 = EP.EM \Rightarrow ED = EI = EB \Rightarrow EDI = EID \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD.

+ Tương tự, tâm của đường tròn nội tiếp ΔACD nằm trên PQ.

Nhận xét: Đối với các bài toán có giả thiết hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau thì việc kẻ tiếp tuyến chung để suy ra các góc bằng nhau và từ đó phát hiện ra các tứ giác nội tiếp là một hướng quan trọng để giải toán

Ví dụ 10) Cho tam giác vuông $ABC\left(A = 90^0\right)$ và $B < C$ tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A cắt cạnh BC kéo dài tại D gọi E là điểm đối xứng của A qua BC, H là hình chiếu của A trên BE. Gọi I là trung điểm của AH đường thẳng BI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.

Phân tích định hướng giải:



Để chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thông thường ta chứng minh đường thẳng đó vuông góc với một bán kính tại tiếp điểm. Muốn làm được điều này điều kiện cần là phải xác định rõ tâm đường tròn. Nhưng việc làm này là không dễ nếu tâm đường tròn không phải là điểm đặc biệt. Để khắc phục khó khăn này ta thường chọn cách chứng minh theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.

<u>Trở lại bài toán:</u> Để chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (AKD) ta phải chứng minh: $KDB = KAD$.

+ Vì E là điểm đối xứng của A qua BC $\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow AE \perp BC$ và $MA = ME$. Theo giả thiết $IA = IH$ nên $IM//BE \Rightarrow KIM = KBE = KAE \Rightarrow A, I, M, K$ nằm trên một đường tròn

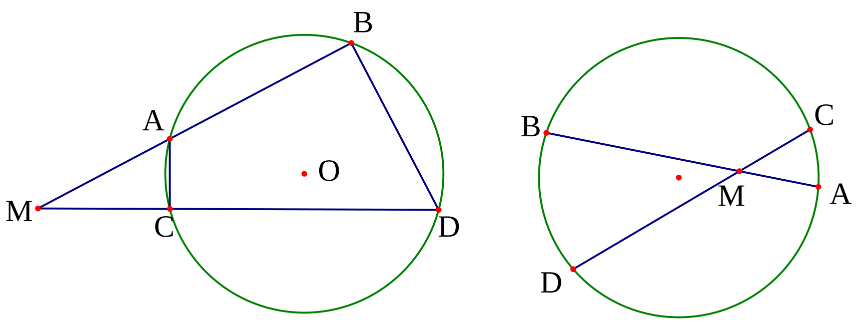
$\Rightarrow IAM = IKM$; $BAH = BAE - HAE = BKE - IKM = MKE$ (1)

Mặt khác, $ABE = EAD$ (chắn cung AE);

$BAH = 90^0 - ABH = 90^0 - EAD = ADM = EDM$ (2)

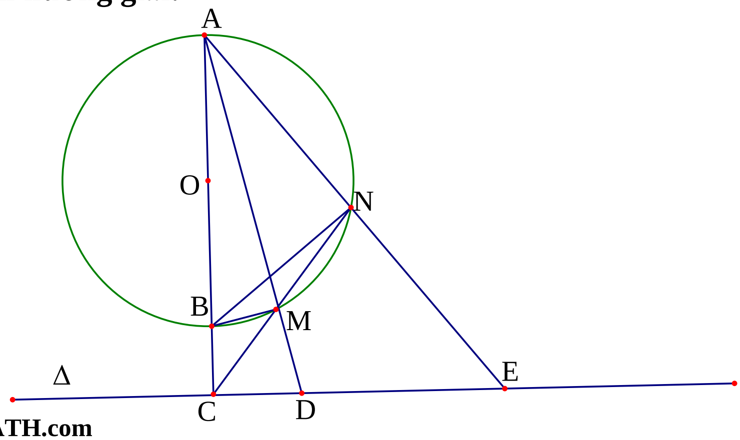
+ Từ (1) và (2) suy ra $MKE = EDM \Rightarrow$ bốn điểm M, K, D, E nằm trên một đường tròn $\Rightarrow KDM = KEM = KEA = KAD \Rightarrow BD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.

<u>Tiêu chuẩn 3)</u> Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M. Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$



Ví dụ 1) Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB và đường thẳng Δ nằm ngoài đường tròn (O) vuông góc với AB tại C. Kẻ cát tuyến CMN với đường tròn (O) , AM, AN cắt Δ tại D, E. Chứng minh $MNED$ nội tiếp được:

Phân tích định hướng giải:



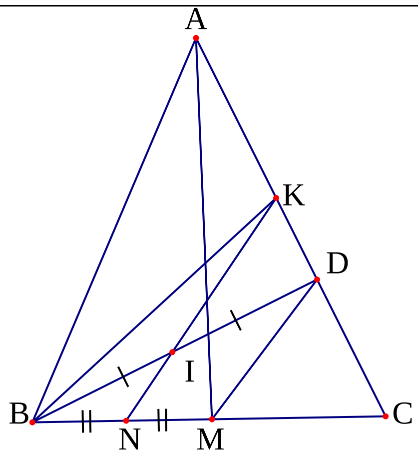
Vì $AMB = 90^0 \Rightarrow BCDM$ là tứ giác nội tiếp , suy ra $AB.AC = AM.AD$ (1) .

Tương tự vì góc $ANB = 90^0 \Rightarrow BNE = BCE = 90^0$ hay tứ giác $BCNE$ nội tiếp, từ đó suy ra $AB.AC = AN.AE$ (2). Kết hợp (1), (2) ta có:

$AM.AD = AN.AE \Rightarrow MNED$ là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 2) Cho tam giác cân $ABC(AB = AC, A < 90^0)$ có đường cao BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của các đoạn BC, BM, BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh các tứ giác $ABMD, ABNK$ nội tiếp và $3BC^2 = 4CA.CK$

Giải:



Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$ mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow ABMD$ là tứ giác nội tiếp.

Vì $NI // = \frac{1}{2}MD \Rightarrow KNC = DMC$, ta cũng có $DMC = KAB$ (Tính chất tứ giác nội tiếp) suy ra $KNC = KAB$ hay $ABNK$ là tứ giác nội tiếp.

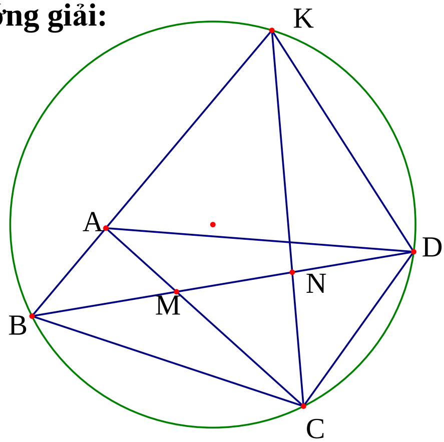
Ta có:

$CA.CK = CN.CB$ mà $CN = \frac{3}{4}CB \Rightarrow \frac{3}{4}BC^2 = CA.CK \Leftrightarrow 3BC^2 = 4CA.CK$.

Ví dụ 3) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có giao điểm 2 đường chéo là M. Đường phân giác trong góc ACD cắt BA tại K.

Giả sử $MA.MC + MA.CD = MB.MD$. Chứng minh $BKC = CDB$

Phân tích định hướng giải:



Ta gọi N là giao điểm của CK và BD theo tính chất đường phân giác trong ta có: $\frac{ND}{NM}=\frac{CD}{CM}\Rightarrow CD=\frac{MC.DN}{MN}$ thay vào biểu thức $MA.MC+MA.CD=MB.MD$ ta có:

$MB.MD=MA.MC+MA.\frac{MC.DN}{MN}=MA.MC.\frac{MD}{MN}\Leftrightarrow MA.MC=MB.MN$. Do M nằm trong tứ giác $ABCN$ theo tiêu chuẩn 3 ta có: $ABNC$ là tứ giác nội tiếp nên $ABD=ACK=KCD$. Theo tiêu chuẩn 2 ta có: $BCDK$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $BKC=CDB$

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) đi qua A và C cắt AB, AC theo thứ tự tại K và N. Đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác KBN cắt nhau tại B và M. Chứng minh OMB vuông. **(IMO 1985)**

Phân tích định hướng giải:

Gọi P là giao điểm của các đường thẳng AC và KN.

Ta có $KMA=BMA-BMK=BCA-BNK=KPA$ nên 4 điểm M, P, A, K nằm trên một đường tròn. Ngoài ra ta cũng có

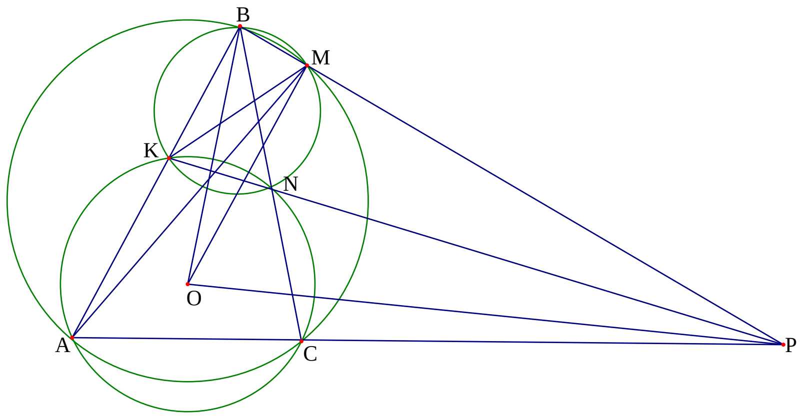
$AMP=AKP=180-ACB=180-AMB$ (do $ACNK$ là tứ giác nội tiếp) nên ta suy ra điểm M nằm trên đoạn BP. Gọi R là bán kính của đường tròn (O)

Ta có: $BM.BP=BN.BC=BK.BA=BO^2-R^2$ và

$PM.PB=PN.PK=PA.PC=PO^2-R^2$ cộng từng vế hai đẳng thức trên ta thu được: $BM.BP+PM.BP=BO^2+PO^2-2R^2\Leftrightarrow BP^2=BO^2+PO^2-2R^2$. Khi đó ta có:

$$BM^2-PM^2=\left(\frac{BO^2-R^2}{BP}\right)^2-\left(\frac{OP^2-R^2}{BP}\right)^2=\frac{(BO^2+PO^2-2R^2)(BO^2-OP^2)}{BP^2}$$

$=BO^2-OP^2$. Từ đó suy ra $OM\perp BP$.



<u>Chú ý:</u> Để chứng minh $OM \perp BP$ ta đã dùng kết quả: Cho tam giác ABC và điểm H nằm trên cạnh BC. Khi đó AH là đường cao khi và chỉ khi

$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$

Thật vậy:

Nếu AH là đường cao thì ta luôn có: $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$ (Theo định lý Pitago). Ngược lại: Nếu ta có: $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$ (*), gọi M là điểm trên BC sao cho $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$. Từ đó ta có:

$HB^2 - HC^2 = MB^2 - MC^2$ hay

$(HB+HC)(HB-HC) = (MB+MC)(MB-MC) \Leftrightarrow BC.(HB-HC) = BC(MB-MC)$

$\Leftrightarrow HB - HC = MB - MC \Leftrightarrow M \equiv H$ suy ra điều phải chứng minh:

<u>Bạn đọc có thể tham khảo cách giải khác ở ví dụ 8 Dấu hiệu 2</u>