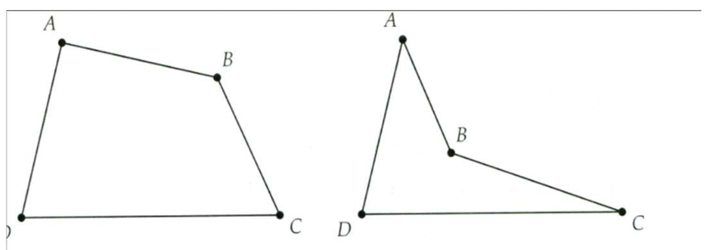
TỨ GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

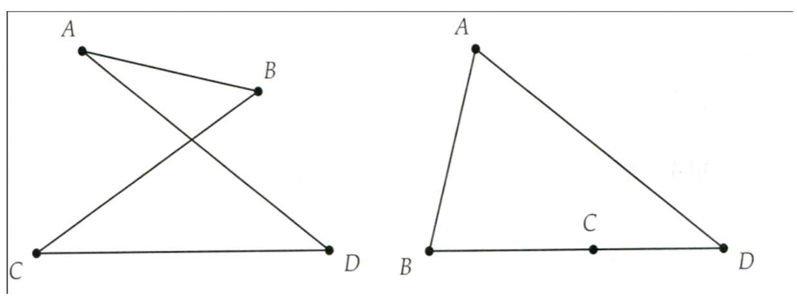
* *Tứ giác ABCD* là hình gồm bốn đoạn thẳng *AB, BC, CD* và *DA*; trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.

* *Tứ giác lồi* là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác.

* *Chú ý:* Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.



a) Tứ giác lồi b) Tứ giác không lồi



a) Tứ giác không lồi b) Không phải tứ giác

* *Định lý:* Tổng các góc của một tứ giác bằng 360^0.

* *Mở rộng:* Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360^0.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A.CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA CƠ BẢN

Dạng 1. Tính số đo góc

Phương pháp giải: Sử dụng định lý tổng bốn góc trong một tứ giác. Kết hợp các kiến thức đã học về tính chất dãy tỉ số bằng nhau, toán tổng hiệu... để tính ra số đo các góc.

Bài 1. Cho tứ giác *ABCD* biết $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}:\widehat{D}=4:3:2:1$.

a) Tính các góc của tứ giác *ABCD.*

b) Các tia phân giác của $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ cắt nhau tại *E*. Các đường phân giác của góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau tại F. Tính $\widehat{CED}$ và $\widehat{CFD}$.

Bài 2. Tính số đo các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ của tứ giác *ABCD* biết $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 90°$ và $\widehat{C} = 2\widehat{D}$.

Dạng 2. Tìm mối liên hệ giữa các cạnh, đường chéo của tứ giác

Phương pháp giải: Có thể chia tứ giác thành các tam giác để sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Bài 3. Cho tứ giác *ABCD*. Chứng minh:

a) Tổng hai cạnh đối nhỏ hơn tổng hai đường chéo;

b) Tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD và một điểm M thuộc miền trong của tứ giác. Chứng minh:

a) $MA + MB + MC + MD \geq AB + CD$;

b) $MA + MB + MC + MD \geq \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$.

Dạng 3.Tổng hợp

Bài 5. Cho tứ giác *ABCD* có *AB = AD, CB* = CD (ta gọi tứ giác *ABCD* trong trường hợp này là tứ giác có hình *cánh diêu)*.

a) Chứng minh *AC* là đường trung trực của *BD*.

b) Tính $\widehat{B}, \widehat{D}$ biết $\widehat{A} = 100°$, $\widehat{C} = 60°$.

Bài 6. Tứ giác *ABCD* có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^0$. Các tia phân giác của $\widehat{C}, \widehat{D}$ cắt nhau tại *I* và $\widehat{CID} = 115^0$. Tính các góc $\widehat{A}, \widehat{B}$.

Bài 7.

a) Chứng minh trong một tứ giác có hai đường chéo vuông góc, tổng bình phương của hai cạnh đối này bằng tổng các bình phương của hai cạnh đối kia.

b) Tứ giác *ABCD* có *AC* vuông góc với *BD*. Biết *AD* = 5cm, *AB* = 2 cm, *BC* = 10 cm. Tính độ dài *CD.*

Bài 8. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và *BC = AD*. Chứng minh:

a) $\Delta DAB = \Delta CBA$, từ đó suy ra *BD = AC*;

b) $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$;

c) AB // CD.

Bài 9. Cho tứ giác *ABCD, AB* Cắt *CD* tại *E, BC* cắt *AD* tại *F*. Các tia phân giác của $\widehat{E}$ và $\widehat{F}$ cắt nhau tại I. Chứng minh

a) $\widehat{EIF} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ADC}}{2}$;

b) Nếu $\widehat{BAD} = 130^0$ và $\widehat{BCD} = 50^0$ thì $IE \perp IF$.

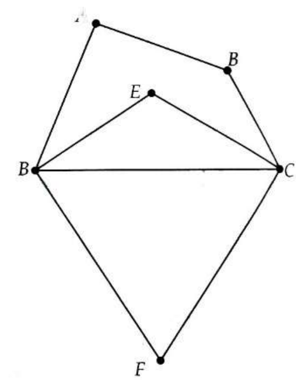
HƯỚNG DẪN

Bài 1. a) Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

$\widehat{A} = 144^0$, $\widehat{B} = 108^0, \widehat{C} = 72^0$, $\widehat{D} = 36^0$

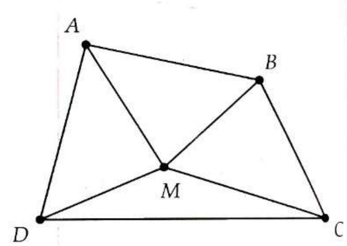
b) Sử dụng tổng ba góc trong tam giác tính được $\widehat{CED} = 126^0$.

Chú ý hai phân giác trong và ngoài tại mỗi góc của một tam giác thì vuông góc nhau, cùng với tổng bốn góc trong tứ giác, ta tính được $\widehat{CFD} = 54^0$



Bài 2. HS tự chứng minh:

$\widehat{D} = 50^0$, $\widehat{C} = 100^0$

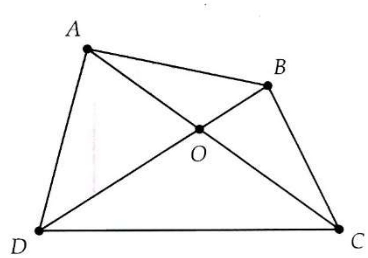


Bài 3.

a) Sử dụng tính chất tổng hai cạnh trong một tam giác thì lớn hơn cạnh còn lại cho các tam giác OAB, OBC,OCD và ODA.

b) Chứng minh tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi tứ giác sử dụng kết quả của a).

Chứng minh tổng hai đường chéo nhỏ hơn chu vi tứ giác sử dụng tính chất tổng hai cạnh trong một tam giác thì lớn hơn cạnh còn lại cho các tam giác ABC, ADC, ABD và CBD.



Bài 4.

a) HS tự chứng minh

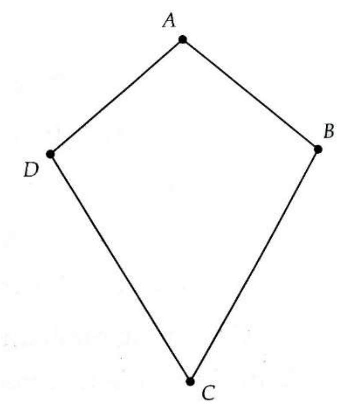
b) Tương tự 2A a)

Bài 5.

a) HS tự chứng minh

b) Sử dụng tổng bốn góc trong tứ giác và chú ý

$\widehat{B}=\widehat{D}$



Bài 6. Tính tổng $\widehat{C}+\widehat{D}$

Bài 7

a) Sử dụng Pytago

b) Áp dụng a)

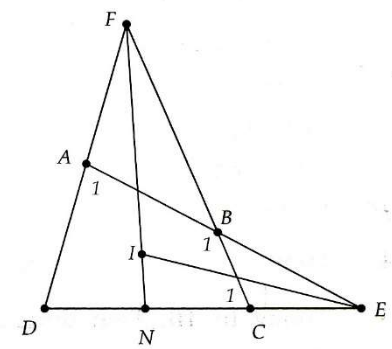
Bài 8.

a) HS tự chứng minh

b) HS tự chứng minh

c) Sử dụng a), b) và tổng bốn góc trong tứ giác

Bài 9.



a) Gọi $\text{IF} \cap CD=\{N\}$

Theo định lý về góc ngoài của tam giác

$\triangle NIE$ có $\widehat{FIE}=\widehat{FNE}+\dfrac{\widehat{E}}{2}$;

$\triangle DNF$ có $\widehat{FNE}=\widehat{D}+\dfrac{\widehat{E}}{2}$;

Vậy $\widehat{FIF}=\widehat{D}+\dfrac{\widehat{E}+\widehat{F}}{2}(1)$.

ΔADE có

$\widehat{E}=180^0-(\widehat{D}+\widehat{A}_1)$;

$\triangle DFC$ có $\widehat{F}=180^0-(\widehat{D}+\widehat{C_1});$ $\Rightarrow \widehat{E}+\widehat{F}=360^0-(2\widehat{D}+\widehat{A_1}+\widehat{C_1})$ $=\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D}-(2\widehat{D}+\widehat{A_1}+\widehat{C_1})=\widehat{B_1}-\widehat{D};$ Thay vào (1) được $\widehat{EIF}=\widehat{D}+\dfrac{\widehat{B_1}-\widehat{D}}{2}=\dfrac{\widehat{D}+\widehat{B_1}}{2}$ (ĐPCM) b) Áp dụng a).	

B.DẠNG BÀI NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Dạng 1.Tính số đo góc

Bài 1. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A}+\widehat{B}=220°$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K. Tính số đo của góc CKD.

Bài 3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A}=\widehat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có $AD=DC=CB$; $\widehat{C}=130°$; $\widehat{D}=110°$. Tính số đo góc A, góc B.

Dạng 2.So sánh các độ dài

Bài 5. Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 ?

Bài 6. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB=3$; $BC=6,6$; $CD=6$. Tính độ dài AD.

Bài 7. Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác.

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

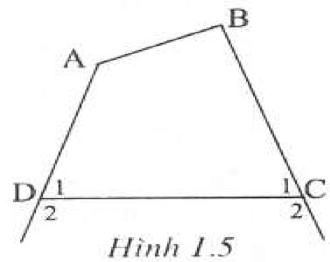
Bài 9. Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S=a+b+c+d$ chia hết cho a, cho b, cho c, cho d. Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

Dạng 3. Bài toán giải bằng phương trình tô màu

Bài 10. Có chín người trong đó bất kì ba người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. **• Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau** (h.1.5)

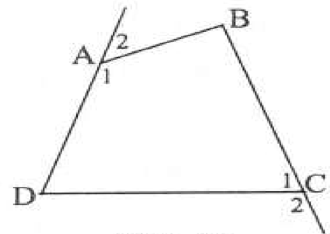


Hình 1.5

Gọi $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$ là số đo hai góc trong; $\widehat{D_2}$, $\widehat{D_2}$ là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D. Ta có:

$\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\left(180^\circ-\widehat{C_1}\right)+\left(180^\circ-\widehat{D_1}\right)=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (1)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A}+\widehat{B}=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (2)



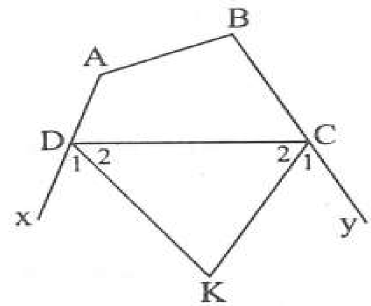
Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\widehat{A}+\widehat{B}$.

• Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau (h.1.6)

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{A_2}+\widehat{C_2}=\widehat{B}+\widehat{D}$

Bài 2. (h.1.7)



Hình 1.7

Ta có: $\widehat{CDx}+\widehat{DCy}=\widehat{A}+\widehat{B}=220^\circ$. (bài 1.1).

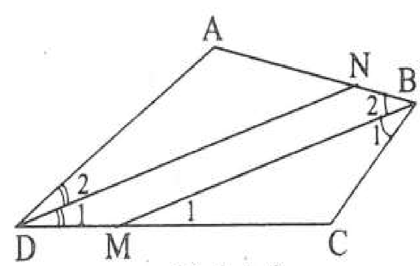
$\Rightarrow \dfrac{\widehat{CDx}+\widehat{CDy}}{2}=110^\circ$. Do đó $\widehat{D_2}+\widehat{C_2}=110^\circ$.

Xét ΔCKD có: $\widehat{CKD}=180^\circ-\left(\widehat{D_2}+\widehat{C_2}\right)=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

Bài 3. (h.1.8)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{B}+\widehat{D}=360^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)=360^\circ-2\widehat{C}$.

Vì $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$ nên $\widehat{B_1}+\widehat{D_1}=180^\circ-\widehat{C}\Rightarrow \widehat{B_1}+\widehat{D_1}+\widehat{C}=180^\circ$. (1)



Hình 1.8

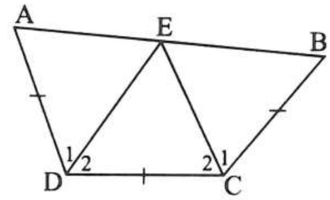
Xét ΔBCM có $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}+\widehat{C}=180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{M_1}$. Do đó $DN // BM$.

Bài 4. (h.1.9)

Vẽ đường phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ chúng cắt nhau tại E.

Xét ΔECD có $\widehat{CED}=180^\circ-\dfrac{110^\circ+130^\circ}{2}=60^\circ$.



Hình 1.9

$\Delta ADE=\Delta CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{CED}=60^\circ$.

$\Delta BCE=\Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC}=\widehat{DEC}=60^\circ$.

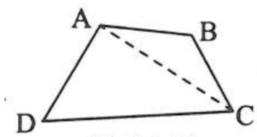
Suy ra $\widehat{AEB}=180^\circ$ do đó ba điểm A, E, B thẳng hàng

Vậy $\widehat{BAD}=\widehat{EAD}=\widehat{ECD}=65^\circ$. Do đó $\widehat{ABC}=360^\circ-\left(65^\circ+110^\circ+130^\circ\right)=55^\circ$.

Bài 5. (h.1.10)

Giả sử tứ giác ABCD có CD là cạnh dài nhất.

Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại (1).



Hình 1.10

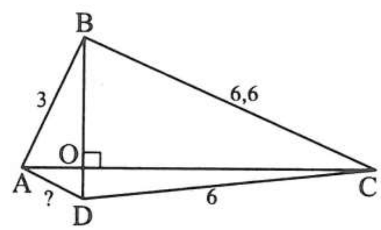
Thật vậy, xét ΔABC ta có: $AC<AB+BC$.

Xét ΔADC có: $CD<AD+AC$. Do đó $CD<AD+AB+BC$.

Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.

Bài 6. (h.1.11)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.



Hình 1.11

Xét ΔAOB, ΔCOD vuông tại O, ta có:

$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$.

Chứng minh tương tự, ta được:

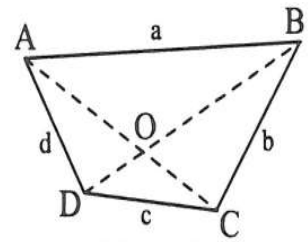
$BC^2+AD^2=OB^2+OC^2+OD^2+OA^2$.

Do đó: $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

Suy ra: $3^2+6^2=6,6^2+AD^2\Rightarrow AD^2=9+36-43,56=1,44\Rightarrow AD=1,2$.

Bài 7. (h1.12)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD.



Hình 1.12

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d. Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:

$OA + OB > a;\ OC + OD > c$.

Do đó $(OA + OC) + (OB + OD) > a + c$ hay $AC + BD > a + c$. (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $AC + BD > d + b$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được:

$$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \frac{a+b+c+d}{2}$$

Xét các ΔABC và ΔADC ta có: $AC < a + b;\ AC < c + d$

$\Rightarrow 2AC < a + b + c + d$. (3)

Tương tự có: $2BD < a + b + c + d$. (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được: $2(AC + BD) < 2(a + b + c + d)$

$\Rightarrow AC + BD < a + b + c + d$.

Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 8. • Trước hết ta chứng minh một bài toán phụ:

Cho ΔABC, $\widehat{A} \ge 90°$. Chứng minh rằng $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$.

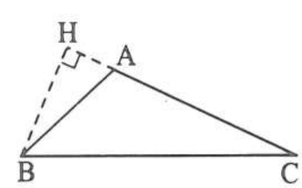
Giải (h.1.13).

Vẽ $BH \perp AC$. Vì $\widehat{A} \ge 90°$ nên H nằm trên tia đối của tia AC.

Xét ΔHBC và ΔHBA vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = HB^2 + HC^2 = (AB^2 - HA^2) + (HA + AC)^2$$

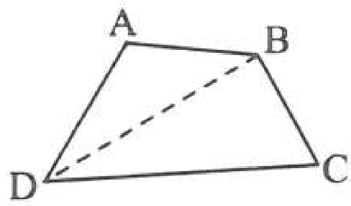
$$= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2HA.AC.$$



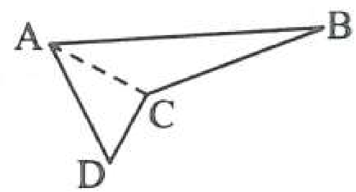
Hình 1.13

Vì $HA.AC \ge 0$ nên $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$ (dấu "=" xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi ΔABC vuông).

- Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho



Hình 1.14



Hình 1.15

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lồi (h.1.14)

Ta có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$.

Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 90°, giả sử $\widehat{A}\geq 90^\circ$.

Xét ΔABD ta có $BD^2 \geq AB^2+AD^2>10^2+10^2=200$ suy ra $BD>\sqrt{200}$, do đó $BD>14$.

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lõm (h.1.15)

Nối CA, Ta có: $\widehat{ACD}+\widehat{ACB}+\widehat{BCD}=360^\circ$.

Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 120°.

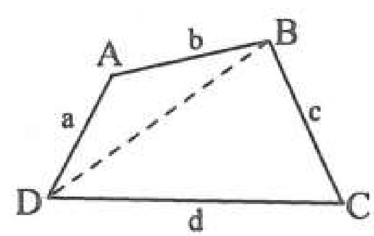
Giả sử $\widehat{ACB}\geq 120^\circ$, do đó $\widehat{ACB}$ là góc tù

Xét ΔACB có $AB^2 \geq AC^2+BC^2>10^2+10^2=200$.

Suy ra $AB>\sqrt{200} \Rightarrow AC>14$.

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

Bài 9. (h.1.16)



Hình 1.16

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

Ta có thể giả sử $a<b<c<d$.

Ta có: $a+b+c>BD+c>d$.

Do đó $a+b+c+d>2d$. Ta đặt $a+b+c+d=S$ thì $S>2d$. (*)

Ta có: $S \vdots a \Rightarrow S=ma\ (m\in N)$ (1)

$S \vdots b \Rightarrow S=nb\ (n\in N)$ (2)

$S \vdots c \Rightarrow S = pc\ (p \in N)$ (3)

$S \vdots d \Rightarrow S = qd\ (q \in N)$ (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$.

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$.

Do đó $q \geq 3;\ p \geq 4;\ n \geq 5;\ m \geq 6$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S}; \frac{1}{n} = \frac{b}{S}; \frac{1}{p} = \frac{c}{S}; \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$.

Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$.

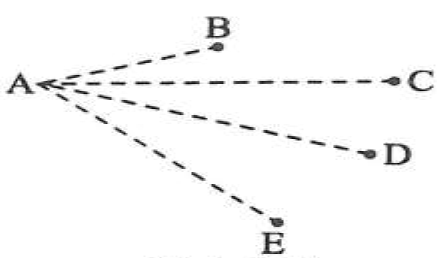
Từ đó: $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

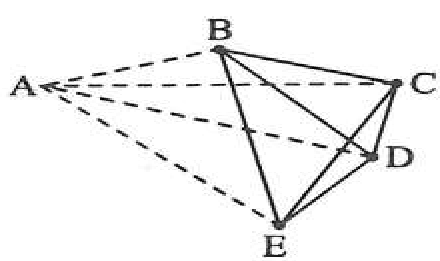
Bài 10. Coi mỗi người như một điểm, ta có chín điểm A, B, C,…

Nối hai điểm với nhau ta được một đoạn thẳng. Ta tô màu xanh nếu hai người không quen nhau, ta tô màu đỏ nếu hai người quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo cùng tô màu đỏ.

- Trường hợp có một điểm là đầu mút của bốn đoạn thẳng màu xanh AB, AC, AD, AE vẽ nét đứt (h.1.17)



Hình 1.17



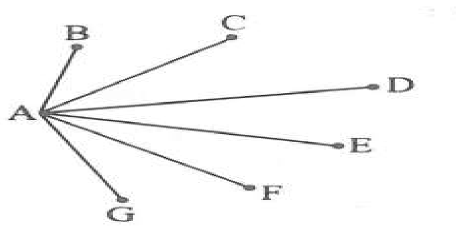
Hình 1.18

Xét ΔABC có hai đoạn thẳng AB, AC màu xanh nên đoạn thẳng BC màu đỏ vì bất kì tam giác nào cũng có một đoạn thẳng màu đỏ. Tương tự các đoạn thẳng CD, DE, EB, BD, CE cũng có màu đỏ (vẽ nét liền) (h.1.18). Do đó tứ giác BCDE có các cạnh và đường chéo được tô đỏ nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

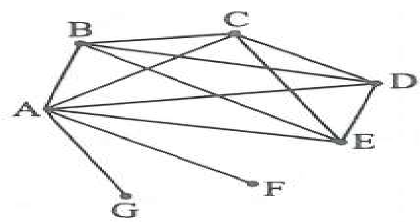
- Trường hợp mọi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là ba đoạn thẳng màu xanh. Không thể mọi điểm đều là đầu mút của ba đoạn thẳng màu xanh vì khi đó số đoạn thẳng màu xanh là $\frac{9.3}{2} \notin N$.

Như vậy tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất là hai đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn đó là điểm A, do đó A là đầu mút của ít nhất là sáu đoạn thẳng màu đỏ, giả sử đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG (h.1.19)

Trong sáu điểm B, C, D, E, F, G tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác có ba cạnh cùng màu (đây là bài toán cơ bản về phương pháp tô màu) chẳng hạn đó là ΔBCD (h.1.20).



Hình 1.19



Hình 1.20

Trong ΔBCD có một cạnh màu đỏ (theo đề bài) nên ba cạnh của ΔBCD cùng màu đỏ. Khi đó tứ giác ABCD là tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

C.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Bài 1: a) Có tứ giác nào có 4 góc nhọn không?

b) Một tứ giác có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn, bao nhiêu góc tù, bao nhiêu góc vuông?

Bài 2: a) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 55^0; \widehat{B} = 110^0; \widehat{D} = 75^0$. Tính số đo góc $\widehat{C}$

b) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 55^0; \widehat{B} = 107^0; \widehat{C} = 72^0$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh D

Bài 3: Tứ giác ABCD có $\hat{C} = 100^0, \hat{D} = 60^0, \hat{A} : \hat{B} = 3:2$. Tính các góc A và B.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD biết $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^0$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$; $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^0$

a) Tính số đo các góc của tứ giác.

b) Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ của tứ giác. Chứng minh: $\widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$

Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm các tia phân giác của các góc C và D.

a) Tính $\widehat{COD}$ biết $\hat{A} = 120^0, \hat{B} = 90^0$.

b) Tính $\widehat{COD}$ theo $\hat{A}$ và $\hat{B}$.

c) Các tia phân giác của góc A và B cắt nhau ở I và cắt các tia phân giác các góc C và D thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng tứ giác $OEIF$ có các góc đối bù nhau.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD, $\widehat{A}-\widehat{B}=50^0$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{COD}=115^0$. Chứng minh rằng $AB\perp BC$.

Bài 7: Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$, $CB=CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$.

Bài 8: Tứ giác ABCD có $\hat{C}+\hat{D}=90^0$. Chứng minh rằng $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2$

Bài 9: Cho tứ giác ABCD, M là một điểm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để $MA+MB+MC+MD$ nhỏ nhất.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A}=\widehat{C}$ tia phân giác góc B cắt đường thẳng AD ở M; tia phân giác của góc D cắt đường thẳng BC ở N. Chứng minh rằng: $BM//CN$

HƯỚNG DẪN

Bài 1:a) Không có tứ giác nào có 4 góc nhọn.

Tổng các góc của 1 tứ giác bằng 360^0. Do đó, một tứ giác có nhiều nhất ba góc nhọn, có nhiều nhất ba góc tù, nhiều nhất 4 góc vuông.

Bài 2: a) $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0\Rightarrow\widehat{C}=120^0$

b) Tương tự tính được $\widehat{D}=126^0$. Vậy góc ngoài đỉnh D có số đo là 54^0

Bài 3: $\dfrac{\widehat{A}}{3}=\dfrac{\widehat{B}}{2}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{5}=\dfrac{360^0-\left(100^0+60^0\right)}{5}=40^0$. Từ đó tính được $\widehat{A}=120^0$. $\widehat{B}=80^0$.

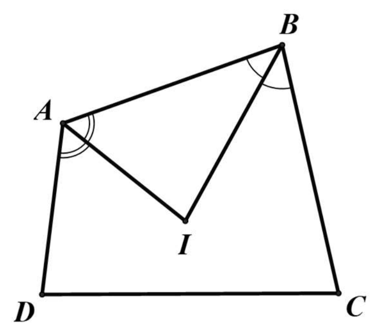
Bài 4: a) Từ giả thiết ta có: $2\widehat{B}+2\widehat{C}+2\widehat{D}=200°+180°+120°\Rightarrow\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=250°$

Vì $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°\Rightarrow\hat{A}=110°$.

$\widehat{B}=250°-(\widehat{C}+\widehat{D})=250°-120°=130°$

$\widehat{C}=200^\circ-\widehat{B}=200°-130°=70°$.

$\widehat{D}=120^0-\widehat{C}=120^0-70^0=50^0$.



b) Trong tam giác ABI:

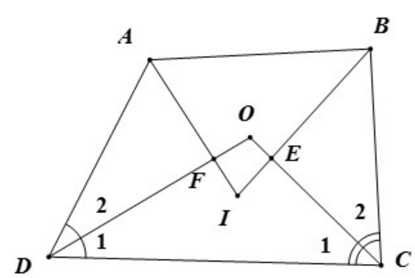
$\widehat{AIB}=180^\circ-\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\dfrac{360^\circ-(\hat{A}+\hat{B})}{2}=\dfrac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$.

Bài 5: a) Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0\Rightarrow120^0+90^0+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$

$\Rightarrow\widehat{C}+\widehat{D}=150^0\Rightarrow\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=(\widehat{C}+\widehat{D}):2=150^0:2=75^0$

ΔCOD có $\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=75^0$ nên

$\widehat{COD}=180^0-(\widehat{C_1}+\widehat{D_1})=180^0-75^0=105^0$.



b) Giải tương tự như câu a. Đáp số: $\widehat{COD}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$.

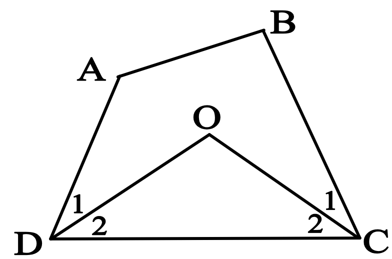
c) Chứng minh tương tự như câu b, ta được $\widehat{EIF}=\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$.

Do đó: $\widehat{COD}+\widehat{EIF}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}}{2}=\dfrac{360^0}{2}=180^0$. Suy ra: $\widehat{OEI}+\widehat{OFI}=360^0-180^0=180^0$.

Bài 6: Xét ΔCOD có $\widehat{COD}=180^0-\left(\widehat{C_2}+\widehat{D_2}\right)=180^0-\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$

(vì $\widehat{C_1}=\widehat{C_2};\ \widehat{D_1}=\widehat{D_2}$).

Xét tứ giác ABCD có $\widehat{C}+\widehat{D}=360^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)$, do đó

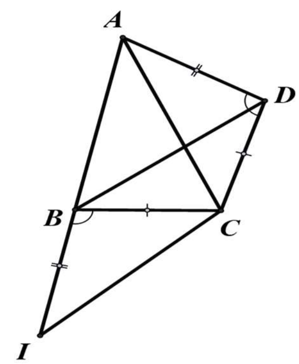


$\widehat{COD}=180^0-\dfrac{360^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)}{2}=180^0-180^0+\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$.

Vậy $\widehat{COD}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD}=115^0$ nên $\widehat{A}+\widehat{B}=230^0$.

Mặt khác, $\widehat{A}-\widehat{B}=50^0$ nên $\widehat{B}=\left(230^0-50^0\right):2=90^0$. Do đó $AB\perp BC$.

Bài 7: Trên tia đối tia BA lấy điểm I sao cho $BI=AD$.



Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{IBC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$

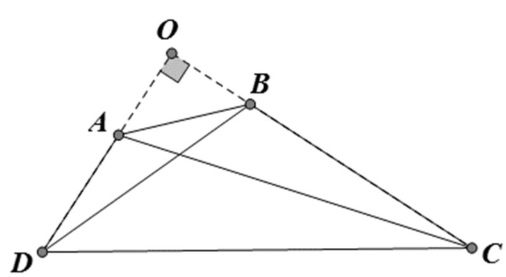
$AD=IB,\ DC=BC$. Từ đó ta có $\Delta ADC=\Delta IBC$.

Suy ra: $\widehat{DAC}=\widehat{BIC}$ và $AC=IC$.

Tam giác ACI cân tại C nên $\widehat{BAC}=\widehat{BIC}=\widehat{DAC}$.

Vậy AC là phân giác trong $\widehat{BAD}$

Bài 8: Gọi O là giao điểm AD và BC.



Ta có $\widehat{C}+\widehat{D}=90^0$ nên $\widehat{O}=90^0$

Áp dụng định lí Py – ta – go,

Ta có $AC^2=OA^2+OC^2$.

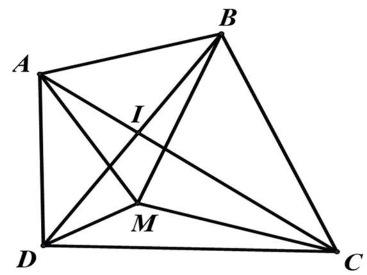
$BD^2=OB^2+OD^2$

Nên

$AC^2+BD^2=\left(OA^2+OB^2\right)+\left(OC^2+OD^2\right)=AB^2+CD^2$

Bài 9: Gọi I là giao điểm của AC và BD. Ta có các bất đẳng thức:

$\mathrm{MA}+\mathrm{MC} \geq \mathrm{AC},\ \mathrm{MB}+\mathrm{MD} \geq \mathrm{BD}$.



Từ đó suy ra $\mathrm{MA}+\mathrm{MB}+\mathrm{MC}+\mathrm{MD} \geq \mathrm{AC}+\mathrm{BD}$

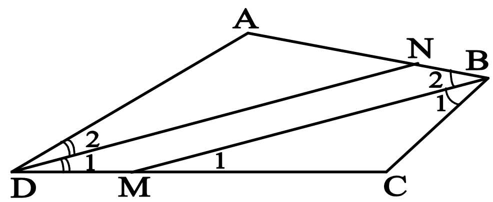
$\mathrm{MA}+\mathrm{MB}+\mathrm{MC}+\mathrm{MD}=\mathrm{AC}+\mathrm{BD}$ khi M trùng với I.

Vậy khi M là giao điểm hai đường chéo thì

$MA+MB+MC+MD$ nhỏ nhất.

Bài 10:

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\mathrm{D}}=360^{\circ}-\left(\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{C}}\right)=360^{\circ}-2\widehat{\mathrm{C}}.$



Vì $\widehat{\mathrm{B}_1}=\widehat{\mathrm{B}_2};\ \widehat{\mathrm{D}_1}=\widehat{\mathrm{D}_2}$ nên $\widehat{\mathrm{B}_1}+\widehat{\mathrm{D}_1}=180^{\circ}-\widehat{\mathrm{C}}$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{B}_1}+\widehat{\mathrm{D}_1}+\widehat{\mathrm{C}}=180^{\circ}.\ (1)$

Xét ΔBCM có $\widehat{\mathrm{B}_1}+\widehat{\mathrm{M}_1}+\widehat{\mathrm{C}}=180^{\circ}.\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{\mathrm{D}_1}=\widehat{\mathrm{M}_1}$. Do đó $BM \,//\, CN$

========== **TOÁN HỌC SƠ ĐỒ** ==========