

BÀI 4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC CẠNH – GÓC - CẠNH (C.G.C)

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được cách vẽ tam giác biết hai cạnh và một góc xen giữa.
- + Phát biểu và hiểu được trường hợp bằng nhau cạnh - góc - cạnh.
- + Phát biểu và nắm được hệ quả của trường hợp cạnh - góc - cạnh trong tam giác vuông.

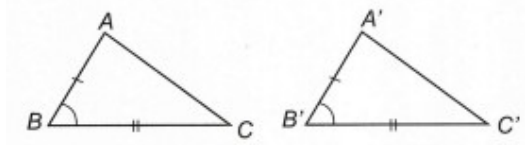
❖ Kỹ năng

- + Vẽ thành thạo một tam giác khi biết hai cạnh và góc xen giữa.
- + Phát hiện và chứng minh được hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – góc – cạnh.
- + Chứng minh hai góc tương ứng bằng nhau thông qua chứng minh hai tam giác bằng nhau thông qua chứng minh hai tam giác bằng nhau.
- + Biết trình bày và lập luận chặt chẽ trong bài toán chứng minh hai tam giác bằng nhau, hai góc (đoạn thẳng) bằng nhau.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Trường hợp bằng nhau cạnh - góc - cạnh

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



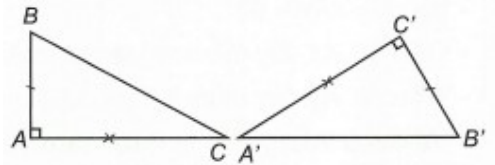
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$AB = A'B'$$

$$\widehat{B} = \widehat{B'}$$

$$BC = B'C'$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c)



Xét $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) và $\triangle A'B'C'$ ($\widehat{A'} = 90^\circ$) có

$$AB = A'B'$$

$$AC = A'C'$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (hai cạnh góc vuông).

Hệ quả

Trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vẽ một tam giác khi biết độ dài hai cạnh và góc xen giữa

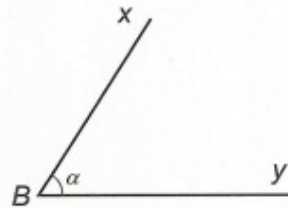
Phương pháp giải

Vẽ $\triangle ABC$ biết độ dài hai cạnh $AB = a$, $BC = b$ và

$$\widehat{B} = \alpha$$

Bước 1. Vẽ góc $\widehat{xBy} = \alpha$.

Bước 1.

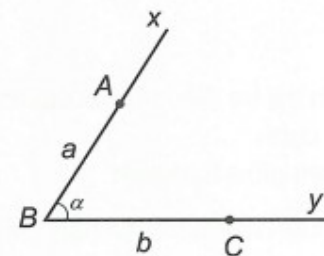


Bước 2. Xác định vị trí hai đỉnh còn lại của tam giác.

- Trên tia Bx lấy điểm A sao cho $AB = a$;

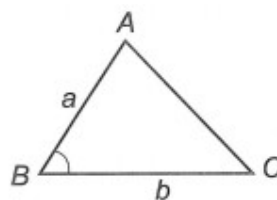
- Trên tia By, lấy điểm C sao cho $BC = b$.

Bước 2.



Bước 3. Nối đoạn thẳng AC, ta được ΔABC .

Bước 3.

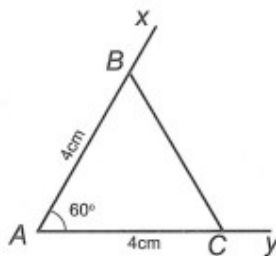


Ví dụ mẫu

Ví dụ. Vẽ tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = AC = 4\text{cm}$. Xác định độ dài cạnh BC.

Hướng dẫn giải

- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 60^\circ$.
 - Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 4\text{cm}$.
 - Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$.
 - Vẽ đoạn thẳng BC ta được tam giác ABC.
- Dùng thước đo độ dài, ta đo được $BC = 4\text{cm}$.



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Vẽ tam giác ABC biết $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$.

Câu 2: Vẽ tam giác MNP biết $MN = 4\text{cm}$, $MP = 5\text{cm}$, $\widehat{M} = 45^\circ$.

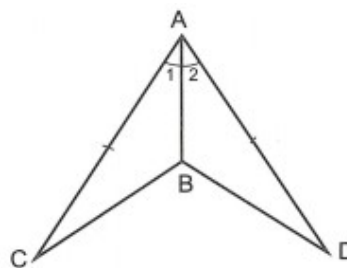
Câu 3: Vẽ tam giác ABC có $\widehat{C} = 50^\circ$, $CA = CB = 3\text{cm}$.

Dạng 2: Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho ΔABC và ΔABD như hình vẽ.

Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ABD$.



Bước 1. Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau: cạnh - **Hướng dẫn giải**

góc - cạnh.

Chú ý: Góc xen giữa hai cạnh

Bước 2. Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có

$$AC = AD \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (giả thiết),}$$

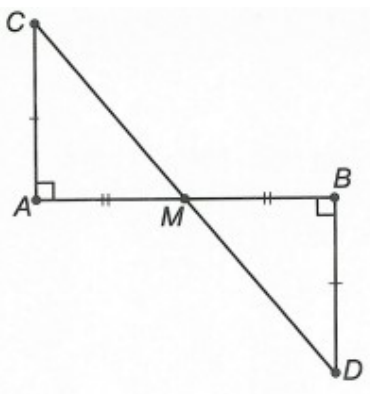
AB là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABC = \triangle ABD(c.g.c)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho đoạn thẳng AB . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB , vẽ các đoạn thẳng AC, BD bằng nhau và vuông góc với AB . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng $\triangle AMC = \triangle BMD$.

Hướng dẫn giải



Vì AC, BD vuông góc với AB nên $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$.

Lại có M là trung điểm của AB nên $MA = MB$.

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BMD$, có

$$AC = BD \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{CAM} = \widehat{DBM} = 90^\circ$$

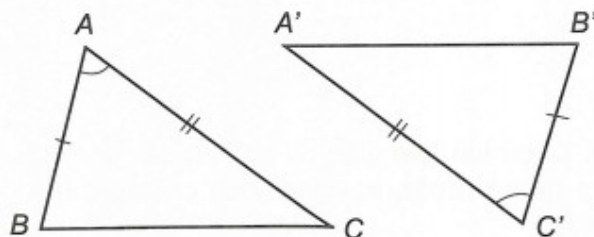
$$AM = BM.$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle BMD(c.g.c)$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Chọn đáp án đúng từ câu 1 đến câu 4

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

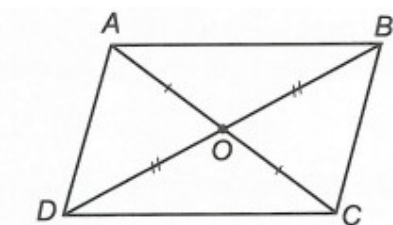
A. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

B. $\triangle ABC = \triangle B'A'C'$.

C. $\triangle ABC = \triangle C'A'B'$.

D. $\triangle ABC = \triangle C'B'A'$.

Câu 2: Cho hình vẽ bên. Khẳng định nào đúng?



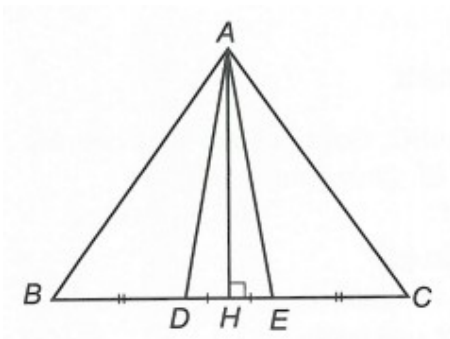
A. $\triangle AOD = \triangle BOC$.

B. $\triangle AOB = \triangle COD$.

C. $\triangle AOD = \triangle COD$.

D. $\triangle ADB = \triangle ADC$.

Câu 3: Cho hình vẽ bên. Khẳng định nào sai?



A. $\triangle AHD = \triangle AHE$.

B. $\triangle AHB = \triangle AHC$.

C. $\triangle ABD = \triangle AEC$.

D. $\triangle ADB = \triangle AEC$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có $AB = NM$, $AC = NP$, $\hat{A} = \hat{N}$.

Trong các khẳng định sau, hãy chọn khẳng định sai

A. $\triangle ABC = \triangle NMP$.

B. $\triangle BAC = \triangle MNP$.

C. $\triangle ABC = \triangle MNP$.

D. $\triangle CAB = \triangle PNM$.

Câu 5: Cho góc nhọn \widehat{xAy} . Trên tia Ax lấy hai điểm B và E , trên tia Ay lấy hai điểm D và C sao cho $AB = AD$, $AE = AC$. Chứng minh rằng $\triangle ABC = \triangle ADE$.

Dạng 3: Chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau

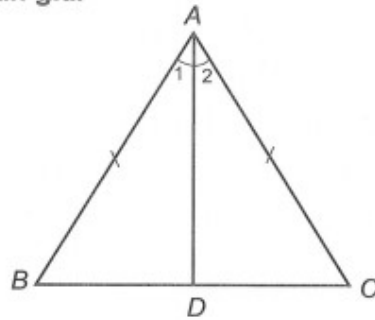
Phương pháp giải

Để chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau, ta có thể chứng minh hai tam giác bằng nhau có chứa hai đoạn thẳng hoặc hai góc đó.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D .

Chứng minh rằng $\hat{B} = \hat{C}$ và $BD = DC$.

Hướng dẫn giải



Bước 1. Chọn hai tam giác có cạnh (hoặc góc) là hai đoạn thẳng (hoặc hai góc) cần chứng minh bằng nhau.

Bước 2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - cạnh - cạnh hoặc cạnh - góc - cạnh (tùy theo giả thiết đề bài cho).

Bước 3. Suy ra cặp góc (cặp cạnh) tương ứng bằng nhau.

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có

$AB = AC$ (giả thiết)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (do AD là tia phân giác)

AD là cạnh chung.

Do đó $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.g.c).

Suy ra:

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (hai góc tương ứng);

$BD = DC$ (hai cạnh tương ứng).

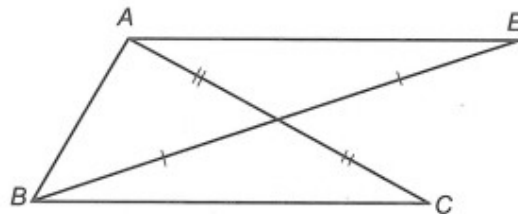
Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là trung điểm của AC. Trên tia đối của tia IB lấy điểm E sao cho $IE = IB$. Chứng minh rằng:

a) $AE = BC$.

b) $AE \parallel BC$.

Hướng dẫn giải



Xét $\triangle AIE$ và $\triangle CIB$, ta có

$AI = CI$ (giả thiết);

$\widehat{AIE} = \widehat{CIB}$ (hai góc đối đỉnh);

$IE = IB$ (giả thiết).

Do đó $\triangle AIE = \triangle CIB$ (c.g.c).

Suy ra $AE = BC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) $\triangle AIE = \triangle CIB$.

Suy ra $\widehat{EAI} = \widehat{BCI}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{BCA} = \widehat{CAE}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AE \parallel BC$.

Bài tập tự luyện dạng 3

BÀI TẬP CƠ BẢN

Câu 1: Cho góc xOy . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Gọi K là giao điểm của AB với tia phân giác của góc xOy . Chứng minh rằng:

- a) $AK = KB$.
- b) $OK \perp AB$.

Câu 2: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 50^\circ$. Vẽ đoạn thẳng AI vuông góc và bằng AB (I và C khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AK vuông góc và bằng AC (K và B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng:

- a) $IC = BK$.
- b) $IC \perp BC$.

Câu 3: Cho đoạn thẳng BC , điểm H nằm giữa B và C . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với BC , trên đường thẳng đó lấy các điểm A và K sao cho $HA = HK$. Kẻ các đoạn thẳng AB, BK, KC, CA .

- a) Chứng minh rằng $BA = BK$.
- b) Chứng minh rằng BC là tia phân giác của góc ABK .
- c) Kể tên các góc bằng góc BAH .
- d) ΔABC bằng với tam giác nào? Vì sao?

BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB , điểm O nằm giữa A và B . Kẻ tia Ox vuông góc với AB . Trên tia Ox lấy các điểm C và D sao cho $OC = OA, OD = OB$. Gọi M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC .

Chứng minh rằng:

- a) $AD = CB$.
- b) $OM = ON$, OM vuông góc với ON .

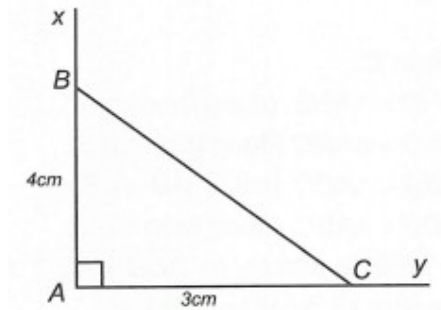
Câu 5. Cho ΔABC . Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC .

- a) Trên tia đối của tia ED lấy điểm I sao cho $EI = ED$. Chứng minh rằng $AI = DC$.
- b) Chứng minh rằng $DE = \frac{1}{2}BC, DE \parallel BC$.

ĐÁP ÁN

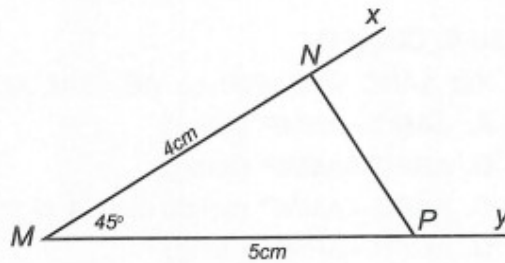
Dạng 1. Vẽ một tam giác khi biết độ dài hai cạnh và góc xen giữa

Câu 1:



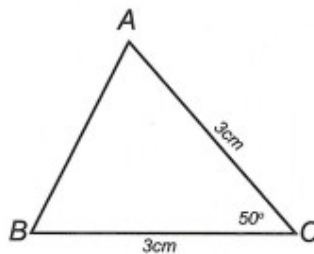
- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3\text{cm}$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$.
- Vẽ đoạn thẳng BC ta được tam giác ABC .

Câu 2:



- Vẽ góc $\widehat{xMy} = 45^\circ$.
- Trên tia Mx lấy điểm N sao cho $MN = 4\text{cm}$.
- Trên tia My lấy điểm P sao cho $MP = 5\text{cm}$.
- Vẽ đoạn thẳng PN ta được tam giác MNP .

Câu 3:

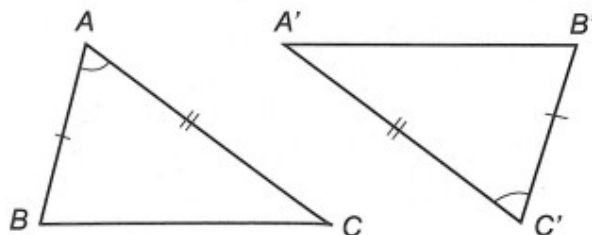


- Vẽ góc $\widehat{xCy} = 50^\circ$.
- Trên tia Cx lấy điểm A sao cho $CA = 3\text{cm}$.
- Trên tia Cy lấy điểm B sao cho $BC = 3\text{cm}$.
- Vẽ đoạn thẳng AB ta được tam giác ABC .

Dạng 2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh

1-D	2-B	3-C	4-C						
-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--

Câu 1: Chọn D



Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có

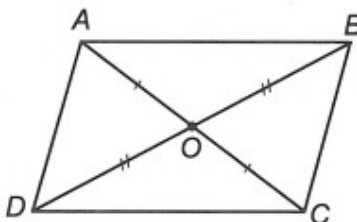
$$AB = B'C'$$

$$\widehat{A} = \widehat{C'}$$

$$AC = A'C'$$

Do đó $\Delta ABC = \Delta C'B'A'$ (c.g.c).

Câu 2: Chọn B



Quan sát hình vẽ, để chứng minh được:

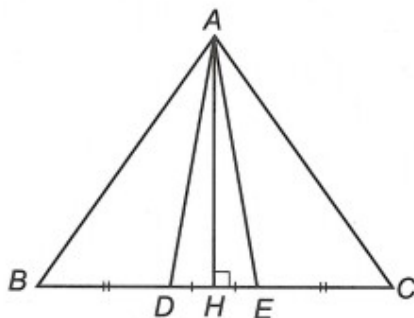
$$\Delta AOB = \Delta COD \text{ (c.g.c) (B đúng).}$$

$$\Delta AOD = \Delta COB \text{ (c.g.c) (A và C sai).}$$

D. $\Delta ADB = \Delta DAC$ sai do $BD \neq AC$.

Do đó chỉ có đáp án B đúng.

Câu 3:



A. $\Delta AHD = \Delta AHE$ (đúng theo c.g.c).

B. $\Delta AHB = \Delta AHC$ (đúng theo c.g.c).

C. $\triangle ABD = \triangle AEC$ (sai vì $AB \neq AE$).

D. $\triangle ADB = \triangle AEC$ (đúng theo c.g.c).

Ở đáp án D, ta cần chỉ ra $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$; $AD = AE$ (điều này được suy ra từ $\triangle AHD = \triangle AHE$).

Câu 4: Chọn C

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có $AB = NM$, $AC = NP$, $\widehat{A} = \widehat{N}$. Suy ra $\triangle ABC = \triangle NMP$ (c.g.c).

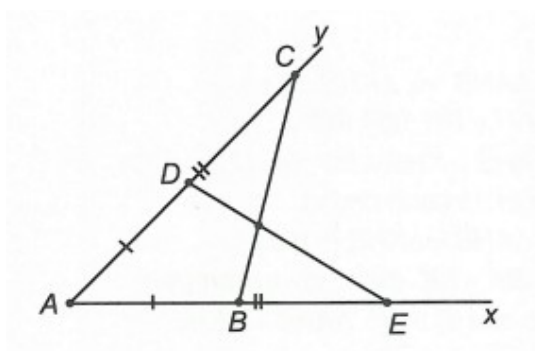
A. $\triangle ABC = \triangle NMP$ (đúng).

B. $\triangle BAC = \triangle MNP$ (đúng).

C. $\triangle ABC = \triangle MNP$ (sai do đỉnh A, N không tương ứng).

D. $\triangle CAB = \triangle PNM$ (đúng).

Câu 5:



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ ta có

$AB = AD$ (giả thiết),

\widehat{A} chung,

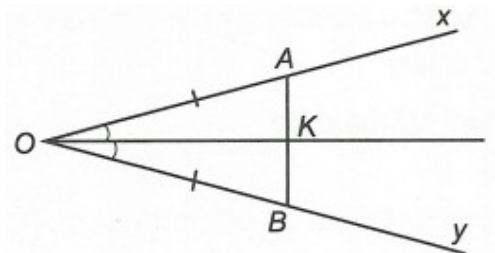
$AC = AE$ (giả thiết).

Do đó $\triangle ABC = \triangle ADE$ (c.g.c).

Dạng 3. Chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau

BÀI TẬP CƠ BẢN

Câu 1:



a) Xét $\triangle AOK$ và $\triangle BOK$, ta có

$OA = OB$ (giả thiết),

$\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$ (do AK là tia phân giác của góc O),

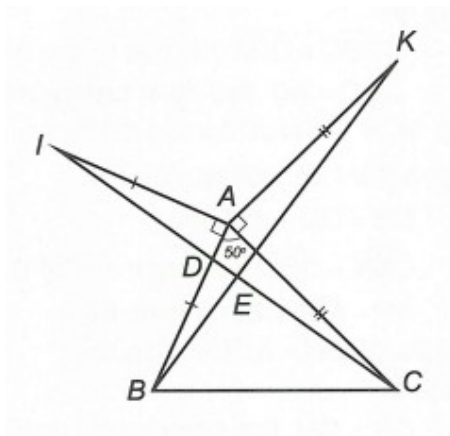
OK là cạnh chung.

Do đó $\triangle AOK = \triangle BOK$ (c.g.c). Suy ra $AK = BK$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) ta có $\triangle AOK = \triangle BOK$. Suy ra $\widehat{AKO} = \widehat{BKO}$ (hai góc tương ứng).

Lại có $\widehat{AKO} + \widehat{BKO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AKO} = \widehat{BKO} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow OK \perp AB$.

Câu 2:



a) Ta có $\widehat{IAC} = \widehat{IAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$;

$$\widehat{BAK} = \widehat{KAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ.$$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle ABK$, ta có

$$AI = AB \text{ (giả thiết),}$$

$$AC = AK \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{IAC} = \widehat{BAK} (= 140^\circ).$$

Do đó $\triangle AIC = \triangle ABK$ (c.g.c).

Suy ra $IC = BK$ (hai cạnh tương ứng).

b) Gọi D là giao điểm của IC và AB , E là giao điểm của IC và BK .

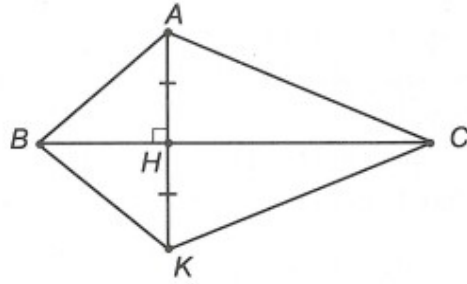
Vì $\triangle AIC = \triangle ABK$ nên $\widehat{AID} = \widehat{EBD}$ (hai góc tương ứng).

Lại có $\widehat{ADI} = \widehat{EDB}$ (hai góc đối đỉnh).

Mà $\triangle AID$ vuông tại A nên $\widehat{AID} + \widehat{ADI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} + \widehat{EDB} = 90^\circ$.

Xét $\triangle BED$ có $\widehat{BED} = 180^\circ - (\widehat{EBD} + \widehat{EDB}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Suy ra $IC \perp BK$

Câu 3:



a) Xét ΔAHB và ΔKHB , ta có

$AH = KH$ (giả thiết),

$\widehat{AHB} = \widehat{KHB} = 90^\circ$ (do $AK \perp BC$),

BH là cạnh chung.

Do đó $\Delta AHB = \Delta KHB$ (c.g.c).

Suy ra $BA = BK$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) ta có $\Delta AHB = \Delta KHB$.

Suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{KBH}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra BC là tia phân giác của \widehat{ABK} .

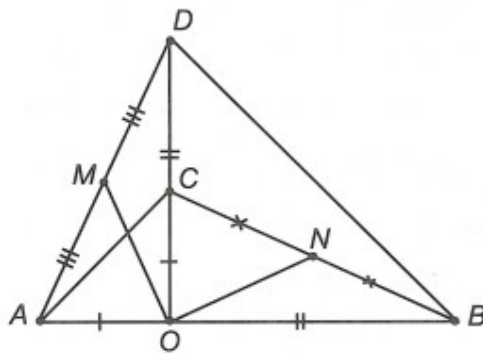
c) Theo câu a) ta có $\Delta AHB = \Delta KHB$ suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{BKH}$ (hai góc tương ứng).

d) $\Delta ABC = \Delta KBC$ (c.g.c) vì $AB = BK$ (chứng minh a); $\widehat{ABC} = \widehat{KBC}$ (do BC là tia phân giác của \widehat{ABK});

BC chung

BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 4:



a) Xét ΔAOD và ΔCOB , ta có

$AO = CO$ (giả thiết),

$\widehat{AOD} = \widehat{COB} = 90^\circ$ (vì $OD \perp AB$),

$OD = OB$ (giả thiết).

Do đó $\Delta AOD = \Delta COB$ (c.g.c).

Suy ra $AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Theo câu a) ta có $\Delta AOD = \Delta COB$.

Suy ra:

$$\widehat{OBC} = \widehat{ODA} \text{ (hai góc tương ứng);}$$

$$BC = AD \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

Mà M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC nên $NB = MD$.

Xét ΔOBN và ΔODM có

$$OB = OD \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{OBN} = \widehat{ODM} \text{ (chứng minh trên),}$$

$$NB = MD \text{ (chứng minh trên).}$$

Do đó $\Delta OBN = \Delta ODM$ (c.g.c).

Suy ra

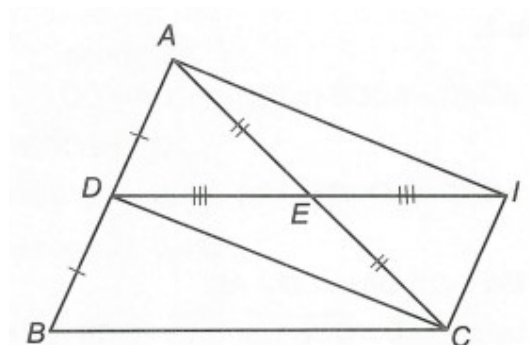
$$ON = OM \text{ (hai cạnh tương ứng);}$$

$$\widehat{NOB} = \widehat{MOD} \text{ (hai góc tương ứng).}$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{NOB} + \widehat{NOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MOD} + \widehat{CON} = 90^\circ.$$

Vậy $MO \perp ON$.

Câu 5:



a) Xét ΔAEI và ΔCED ta có

$$EA = EC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{AEI} = \widehat{CED} \text{ (hai góc đối đỉnh);}$$

$$EI = ED \text{ (giả thiết).}$$

Do đó $\Delta AEI = \Delta CED$ (c.g.c).

Suy ra $AI = CD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $\Delta AEI = \Delta CED$ (câu a)

Suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{DCE}$ (hai góc tương ứng). Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AI \parallel DC$.

Suy ra $\widehat{DAI} = \widehat{BDC}$ (hai góc đồng vị).

Xét ΔBDC và ΔDAI ta có $BD = DA$ (giả thiết), $\widehat{BDC} = \widehat{DAI}$ (chứng minh trên), $DC = AI$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle BDC = \triangle DAI$ (c.g.c). Suy ra $DI = BC$ (hai cạnh tương ứng).

$$\text{Mà } DE = \frac{1}{2}DI \Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC.$$

Ta lại có $\widehat{DBC} = \widehat{ADI}$ (hai góc tương ứng). Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.