CHUYÊN ĐỀ TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC, DIỆN TÍCH TỨ GIÁC

NHỜ SỬ DỤNG CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

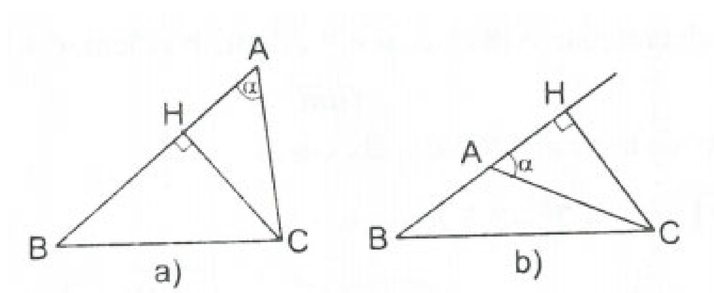
.Ta đã biết cách tính diện tích tam giác theo một công thức rất quen thuộc là $S=\frac{1}{2}ah,$ *trong đó a là độ dài một cạnh của tam giác, h là chiều cao ứng với cạnh đó.*

.Bây giờ ta vận dụng các tỉ số lượng giác, các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông để xây dựng thêm các công thức tính diện tích tam giác, tứ giác.

B. BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng diện tích một tam giác bằng nửa tích hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Giải



Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh *AB, AC* của tam giác *ABC*. Vẽ đường cao *CH*. Xét ΔACH vuông tại *H* có $CH = AC.\sin\alpha$

Diện tích ΔABC là $S=\frac{1}{2}AB.CH$. Do đó $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha.$

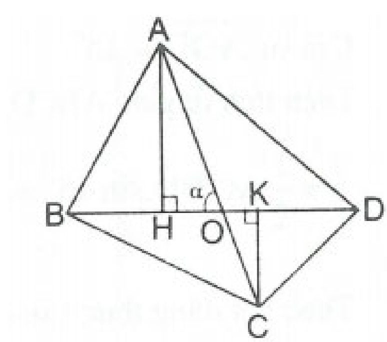
Lưu ý: Nếu $\alpha = 90^0$, ta có ngay $S=\frac{1}{2}AB.AC$

Như vậy $sin\ 90^0 = 1,$ điều này sẽ học ở các lớp trên.

Ví dụ 2. Tứ giác *ABCD* có $AC = m,\ BD = n,$ góc nhọn tạo bởi hai đường chéo bằng α.

Chứng minh rằng diện tích của tứ giác này được tính theo công thức

$S=\frac{1}{2}mn\sin\alpha.$ **Giải**



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử $\widehat{BOC}=\alpha.$

Vẽ $AH \perp BD,\ CK \perp BD.$

Ta có $AH = OA\sin\alpha;$

$CK = OC\sin\alpha$ và $OA + OC = AC.$

Diện tích tứ giác $ABCD$ là:

$$S = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}BD.AH + \frac{1}{2}BD.CK$$
$$= \frac{1}{2}BD(AH + CK) = \frac{1}{2}BD(\text{OA}\sin\alpha + OC\sin\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}BD\sin\alpha(OA + OC) = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha = \frac{1}{2}mn\sin\alpha$$

Lưu ý:

• Nếu $AC \perp BD$ ta có ngay $S = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}mn$

• Phương pháp tính diện tích của tứ giác trong ví dụ này là chia tứ giác thành hai tam giác không có điểm trong chung, rồi tính diện tích của từng tam giác.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn *ABC*. Gọi độ dài các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt là *a, b, c*. Tính diện tích tam giác *ABC* biết $a = 4\sqrt{2}cm,\ b = 5cm,\ c = 7cm.$

Giải

Theo định lí côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

Do đó $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + 7^2 - 2.5.7.\cos A$

Suy ra $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.5.7.\frac{4}{5} = 14\left(cm^2\right)$

Nhận xét: Trong cách giải trên ta đã tìm $\cos A$ rồi suy ra $\sin A$. Ta cũng có thể vận dụng định lí côsin để tìm $\cos B$ rồi suy ra $\sin B$ (hoặc tìm $\cos C$ rồi suy ra $\sin C$)

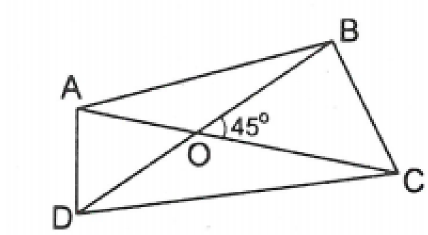
Ví dụ 4. Tứ giác *ABCD* có $AC + BD = 12cm.$ Góc nhọn giữa hai đường chéo là $45°.$ Tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó.

Giải

Gọi O là giao điểm của *AC* và *BD.*

Giả sử $\widehat{AOD} = 45°.$

Diện tích tứ giác *ABCD* là:



$$S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin 45° = \frac{1}{2}AC.BD.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.AC.BD$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $AC.BD \le \left(\frac{AC+BD}{2}\right)^2$

Do đó $S \le \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{AC+BD}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}.6^2 = 9\sqrt{2}\left(cm^2\right)$

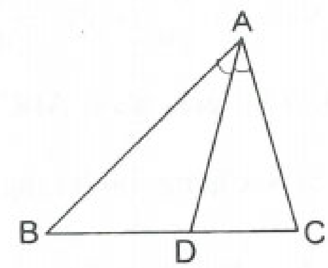
Vậy $\max S = 9\sqrt{2}cm^2$ khi $AC = BD = 6cm.$

Ví dụ 5. Cho tam giác $ABC,\ \widehat{A} = 60°$. Vẽ đường phân giác *AD.*

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$

Giải

Ta có



$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin 30^0 = \frac{1}{2}AB.AD.\frac{1}{2}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AC.AD.\ \sin 30° = \frac{1}{2}AC.AD.\frac{1}{2}.$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60° = \frac{1}{2}AB.AC.\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $S_{ABD} +\ S_{ACD} = S_{ABC}$ nên $\frac{1}{2}AB.AD.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}AC.AD.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}AB.AC.\frac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $AD\left(AB + AC\right) = AB.AC\sqrt{3}$

Suy ra $\frac{\text{AB}+\text{AC}}{\text{AB.AC}} = \frac{\sqrt{3}}{\text{AD}}$ hay $\frac{1}{\text{AB}} + \frac{1}{\text{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{\text{AD}}.$

Nhận xét: Phương pháp giải trong ví dụ này dựa trên quan hệ tổng diện tích các tam giác *ABD* và tam giác *ACD* bằng diện tích tam giác *ABC.*

Ví dụ 6. Tam giác *ABC* có mỗi cạnh đều nhỏ hơn 4*cm.* Chứng minh rằng tam giác này có diện tích nhỏ hơn $7cm^2$

Giải

Giả sử $\widehat{A} \le \widehat{B} \le \widehat{C}$, khi đó $\widehat{A} \le 60°$ và $\sin A \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tam giác *ABC* là:

$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \le \frac{1}{2}.4.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} = 6,92... < 7\left(cm^2\right).$

Nhận xét: Do vai trò các góc *A, B, C* của tam giác *ABC* là như nhau nên ta có thể giả sử

$\widehat{A} \le \widehat{B} \le \widehat{C}$, từ đó suy ra $\widehat{A} \le 60°$, dẫn tới $\sin A \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

• Tính diện tích

Bài 1. Chứng minh rằng diện tích của hình bình hành bằng diện tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AC = a$ và $\widehat{BAC} = \alpha$ $\left(0° < \alpha < 45°\right)$. Chứng minh rằng diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha$

Bài 3. Cho góc nhọn *xOy*. Trên tia *Ox* lấy điểm *A* và *C*, trên tia *Oy* lấy điểm *B* và *D* sao cho $\frac{OA}{OC} = m, \frac{OB}{OD} = n$. Chứng minh rằng $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = m.n$

Bài 4. Tam giác nhọn *ABC* có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi diện tích tam giác *ABC* là *S*. Chứng minh rằng $S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\cot A}$. Áp dụng với $a = 39$, $b = 40$, $c = 41$ và $\widehat{A} = 45°$. Tính *S*.

Bài 5. Cho góc *xOy* có số đo bằng $45°$. Trên hai cạnh *Ox* và *Oy* lần lượt lấy hai điểm *A* và *B* sao cho $OA + OB = 8cm$. Tính diện tích lớn nhất của tam giác *AOB*.

Bài 6. Cho tam giác nhọn *ABC*. Trên các cạnh *AB, BC, CA* lần lượt lấy các điểm *M,N, P* sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$, $BN = \frac{1}{3}BC$, $CP = \frac{1}{2}CA$. Chứng minh rằng diện tích tam giác *MNP* nhỏ hơn $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác *ABC*.

Bài 7. Cho đoạn thẳng $AB = 5cm$. Lấy điểm *O* nằm giữa *A* và *B* sao cho $OA = 2cm$. Trên một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *Ax, By* cùng vuông góc với *AB*. Một góc vuông đỉnh O có hai cạnh cắt các tia *Ax, By* lần lượt tại *D* và *E*. Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác *DOE*.

Bài 8. Cho hình bình hành *ABCD*, góc *B* nhọn. Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu của *A* trên các đường thẳng *DC* và *BC*.

a) Chứng minh rằng $\Delta KAH \sim \Delta ABC$, từ đó suy ra $KH = AC.\sin B$;

b) Cho $AB = a$, $BC = b$ và $\widehat{B} = 60°$. Tính diện tích ΔAHK và tứ giác *AKCH*.

• Chứng minh các hệ thức

Bài 9. Cho tam giác $ABC(AB < AC), \widehat{A} = 60°$. Đường phân giác ngoài tại đỉnh *A* cắt đường thẳng *BC* tại *N*. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AN}$

Bài 10. Cho tam giác *ABC* vuông tại A $\left(AB < AC\right)$. Các đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh *A* của tam giác cắt đường thẳng *BC* tại *M* và *N*. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{AB}$ b) $\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{AC}$

Bài 11. Cho tam giác $ABC, \widehat{A}=\alpha=90^0$. Vẽ đường phân giác *AD*. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$$

Bài 12. Cho góc *xOy* có số đo bằng $30°$. Trên tia phân giác của góc đó lấy điểm *A* sao cho $OA=a$. Qua *A* vẽ một đường thẳng cắt *Ox* và *Oy* theo thứ tự tại *B* và *C*.

Tính giá trị của tổng $\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}$

Bài 13. Cho hình bình hành *ABCD,* góc nhọn giữa hai đường chéo bằng góc nhọn của hình bình hành. Chứng minh rằng độ dài hai đường chéo tỉ lệ với độ dài hai cạnh kề của hình bình hành.

- **Tính số đo góc. Tính độ dài**

Bài 14. Tam giác nhọn *ABC* có $AB=4,6cm$; $BC=5,5cm$ và có diện tích là $9,69cm^2$. Tính số đo góc *B* (làm tròn đến độ).

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$, $\widehat{B}<90°$. Biết $AB=4cm$, $BC=3cm$ và diện tích của hình bình hành là $6\sqrt{3}cm^2$. Tính số đo các góc của hình bình hành.

Bài 16. Cho tam giác *ABC* có diện tích $S=50cm^2$, $\widehat{A}=\alpha<90°$. Trên hai cạnh *AB* và *AC* lần lượt lấy các điểm *D* và *E* sao cho ΔADE nhọn, có diện tích là $S_1=\frac{1}{2}S$. Chứng minh rằng

$$DE\geq 10\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}}(cm)$$

Bài 17. Cho tam giác *ABC,* đường phân giác *AD.* Biết $AB=4,7cm$, $AC=5,3cm$ và $\widehat{A}=72°$. Tính độ dài *AD* (làm tròn đến hàng phần mười).

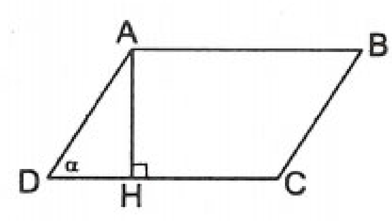
Bài 18. Cho tam giác ABC, $AB=6cm$, $AC=12cm$, $\widehat{A}=120°$. Vẽ đường phân giác *AD.* Tính độ dài *AD.*

Bài 19. Cho tam giác ABC, $AB=5cm$, $BC=7cm$, $CA=8cm$. Vẽ đường phân giác *AD.* Tính độ dài *AD.*

Bài 20. Cho tam giác *ABC,* đường phân giác *AD.* Biết $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$, tính số đo góc *BAC.*

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Xét hình bình hành $ABCD$, $\widehat{D}=\alpha<90°$.



Vẽ đường cao *AH.*

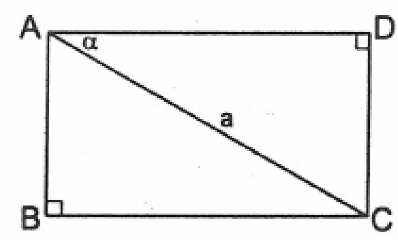
Xét tam giác *ADH* vuông tại *H*, ta có:

$AH=AD.\sin\alpha$

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là:

$S = CD.AH = CD.AD.\sin\alpha$.

Vậy $S = AD.DC.\sin\alpha$.



Bài 2. Xét ΔABC vuông tại B có

$AB = AC\cos\alpha = a\cos\alpha;\ BC = AC\sin\alpha = a\sin\alpha$

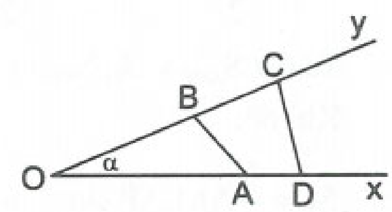
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:

$S = AB.BC = a\cos\alpha.\, a\sin\alpha = a^2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}a^2.2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha$

Bài 3. Tacó $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA.OB\sin\alpha;\ S_{COD} = \frac{1}{2}OC.OD\sin\alpha$.

Do đó $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \frac{\frac{1}{2}OA.OB\sin\alpha}{\frac{1}{2}OC.OD\sin\alpha} = \frac{OA}{OC}.\frac{OB}{OD} = m.n$



Bài 4. Vì ΔABC nhọn nên theo định lí côsin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Ta có $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (vì $S = \frac{1}{2}bc\sin A$)

Do đó $S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\cot A}$.

Áp dụng: Với $a = 39,\ b = 40,\ c = 41$ và $\widehat{A} = 45°$ ta có:

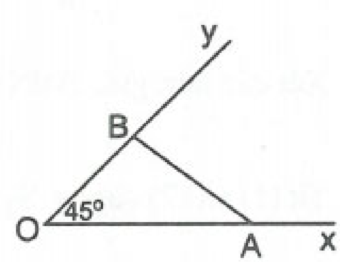
$S = \frac{40^2 + 41^2 - 39^2}{4\cot 45^0} = 440$ (đvdt)

Bài 5. Ta đặt diện tích tam giác AOB là S.

Ta có $S = \frac{1}{2}OA.OB\ \sin O = \frac{1}{2}OA.OB\sin 45°$

$= \frac{1}{2}OA.OB.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}OA.OB$

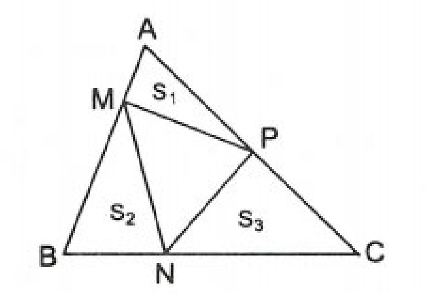
Nhưng $OA.OB \le \left(\frac{OA + OB}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$



Do đó $S \le \frac{\sqrt{2}}{4}.16 = 4\sqrt{2}\left(cm^2\right)$ khi $OA = OB = 4cm$

Vậy $\max S = 4\sqrt{2}cm^2$

Bài 6. Tacó $AM = \frac{1}{4}AB \Rightarrow BM = \frac{3}{4}AB;$



$BN = \frac{1}{3}BC \Rightarrow CN = \frac{2}{3}BC;$

$CP = \frac{1}{2}CA \Rightarrow AP = \frac{1}{2}CA.$

Ta đặt $S_{AMP} = S_1;\ S_{BMN} = S_2;\ S_{CNP} = S_3$ và $S_{ABC} = S$

Khi đó:

$$S_1 = \frac{1}{2}AM.AP\sin A = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}AB.\frac{1}{2}AC.\sin A = \frac{1}{8}.\frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{8}S$$

$$S_2 = \frac{1}{2}BM.BN\sin B = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}AB.\frac{1}{3}BC.\sin B = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}BA.BC.\sin B = \frac{1}{4}S$$

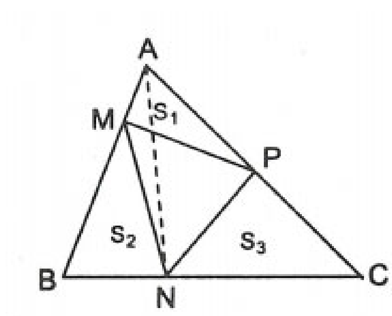
$$S_3 = \frac{1}{2}CN.CP\sin C = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}CB.\frac{1}{2}.CA.\sin C = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CB.CA.\sin C = \frac{1}{3}S$$

Vậy $S_1 + S_2 + S_3 = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)S = \frac{17}{24}S.$ Do đó $S_{MNP} = S - \frac{17}{24}S = \frac{7}{24}S$

$$S_{MNP} = \frac{7}{24}S < \frac{8}{24}S = \frac{1}{3}S.$$

Cách giải khác: (không dùng tỉ số lượng giác) (h.5.10)

Vẽ đoạn thẳng *AN*. Xét các tam giác *NMB* và *NAB* có $BM = \frac{3}{4}AB$ và chung chiều cao vẽ từ 4 đỉnh *N* nên $S_2 = \frac{3}{4}S_{NAB}.\ (1)$



Xét các tam giác *ABN* và *ABC* có $BN = \frac{1}{3}BC$ nên

$S_{ABN} = \frac{1}{3}S\left(2\right)$

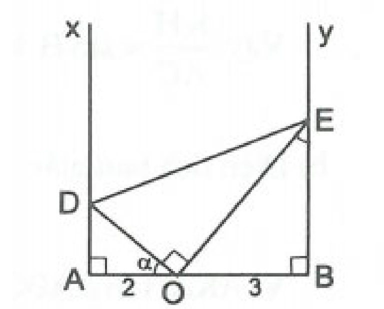
Từ (1) và (2) suy ra $S_2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{3}S = \frac{1}{4}S$

Chứng minh tương tự ta được $S_3 = \frac{1}{3}S; S_1 = \frac{1}{8}S$

Do đó $S_{MNP} = S - \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)S = \frac{7}{24}S < \frac{8}{24}S = \frac{1}{3}S$

Bài 7. Ta có $\widehat{AOD} = \widehat{BEO}$ (cùng phụ với $\widehat{BOE}$).

Ta đặt $\widehat{AOD} = \alpha$ thì $\widehat{BEO} = \alpha$



Xét ΔAOD vuông tại O, ta có: $OD = \frac{OA}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$

Xét ΔBEO vuông tại B, ta có: $OE = \frac{OB}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$

Diện tích tam giác *DOE* là:

$S = \frac{1}{2}OD.OE = \frac{1}{2}.\frac{2}{\cos\alpha}.\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{6}{2\sin\alpha\cos\alpha}(*)$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2 \ge 2xy$ ta được:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \ge 2\sin\alpha\cos\alpha$ hay $1 \ge 2\sin\alpha\cos\alpha$

Thay vào (*) ta đươc: $S = \frac{6}{2\sin\alpha\cos\alpha} \ge \frac{6}{1}$

(dấu "=" xảy ra khi $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$)

Vậy $\min S = 6cm^2$ khi $\alpha = 45°$

Nhận xét: Việc đặt $\widehat{AOD} = \alpha$ giúp ta tính được các cạnh góc vuông của ΔDOE, từ đó tính được diện tích của tam giác này theo các tỉ số lượng giác của góc α. Do đó việc tìm $\min S$ đưa về tìm $\max(\sin\alpha\cos\alpha)$ đơn giản hơn.

Bài 8. a) Ta có $AB//CD$ mà $AH \perp CD$ nên $AH \perp AB$.

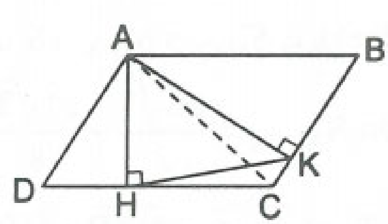
- ΔADH và ΔABK có: $\widehat{H} = \widehat{K} = 90°$;

$\widehat{D} = \widehat{B}$ (hai góc đối của hình bình hành).

Do đó $\Delta ADH \backsim \Delta ABK$ (g.g).

Suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AK}$

Do đó $\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{BC}$ (vì $AD = BC$)



- ΔKAH và ΔABC có $\widehat{KAH} = \widehat{B}$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$);

$\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{BC}$.

Do đó $\Delta KAH \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

Suy ra $\dfrac{KH}{AC}=\dfrac{AK}{AB}$

Xét ΔABK vuông tại K có $\sin B=\dfrac{AK}{AB}$

Vậy $\dfrac{KH}{AC}=\sin B$ hay $KH=AC.\sin B$

b) Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB.BC.\sin B=\dfrac{1}{2}ab.\sin 60°=\dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

Vì $S_{KAH}\backsim S_{ABC}$ nên $\dfrac{S_{KAH}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AK}{AB}\right)^2=(\sin B)^2=\dfrac{3}{4}$

Suy ra $S_{KAH}=\dfrac{3}{4}S_{ABC}=\dfrac{3}{4}\dfrac{ab\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}ab}{16}$ (đvdt)

Ta có $S_{ABCD}=ab\sin 60°=\dfrac{ab\sqrt{3}}{2}$ (dvdt)

$S_{ABK}=\dfrac{1}{2}BA.BK.\sin 60°=\dfrac{1}{2}.BA.(BA\cos 60°).\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}a.a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (đvdt)

$S_{ADH}=\dfrac{1}{2}DA.DH.\sin 60°=\dfrac{1}{2}.DA.(DA\cos 60°).\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}b^2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{8}$ (đvdt)

Mặt khác $S_{AKCH}=S_{ABCD}-S_{ABK}-S_{ADH}$

Nên $S_{AKCH}=\dfrac{ab\sqrt{3}}{2}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}-\dfrac{b^2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(4ab-a^2-b^2\right)$ (đvdt)

Bài 9. Ta có $\widehat{NAx}=\widehat{NAB}=\left(180^0-60^0\right):2=60^0$

$S_{ANC}=\dfrac{1}{2}AN.AC.\sin 60°$

$S_{ANB}=\dfrac{1}{2}AN.AB.\sin 60°$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60°$

Vì $S_{ANC}-S_{ANB}=S_{ABC}$

nên $\frac{1}{2}AN.AC.\sin 60° - \frac{1}{2}AN.AB.\sin 60° = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°$

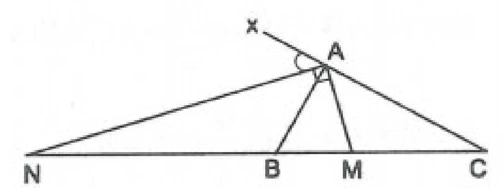
Do đó $AN(AC - AB) = AB.AC$

Suy ra $\frac{AC - AB}{AB.AC} = \frac{1}{AN}$ hay $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AN}$

5.10. a) *AM, AN* là hai đường phân giác của hai góc kề bù nên $AM \perp AN$.

$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin 45^0 = \frac{1}{2}AB.AM.\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.AN.\sin 45^0 = \frac{1}{2}AB.AN.\frac{\sqrt{2}}{2}$;



$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN$ (vì ΔAMN vuông tại *A*).

Mặt khác, $S_{ABM} + S_{ABN} = S_{AMN}$ nên:

$\frac{1}{2}AB.AM.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}AB.AN.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}AM.AN$

Do đó $AB(AM + AN).\frac{\sqrt{2}}{2} = AM.AN.$

$\frac{AM + AN}{AM.AN} = \frac{1}{AB.\frac{\sqrt{2}}{2}}$ hay $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{AB}$;

b) Góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng *AN, AC* là $45°$.

Ta có $S_{ANC} = \frac{1}{2}AC.AN.\sin 45° = \frac{1}{2}AC.AN.\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$S_{AMC} = \frac{1}{2}AC.AM.\sin 45° = \frac{1}{2}AC.AM.\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN$ (vì ΔAMN vuông tại *A*).

Mặt khác, $S_{ANC} - S_{AMC} = S_{AMN}$ nên $\frac{1}{2}AC.AN.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}AC.AM.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}AM.AN.$

Do đó $AC(AN - AM).\frac{\sqrt{2}}{2} = AM.AN$

Suy ra $\frac{AN - AM}{AM.AN} = \frac{1}{AC.\frac{\sqrt{2}}{2}}$ hay $\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{AC}$

Bài 11.

• Trường hợp góc A nhọn

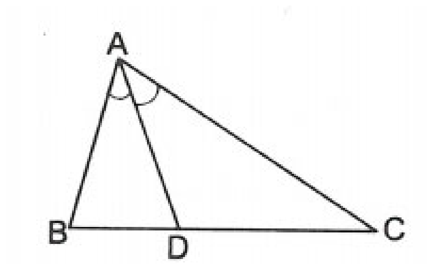
Ra đặt $\widehat{A}=\alpha$

Ta có $S_{ABD}=\frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{\alpha}{2}$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}AC.AD.\sin\frac{\alpha}{2};S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha$

Mặt khác, $S_{ABD}+S_{ACD}=S_{ABC}$ nên

$\frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}AC.AD.\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha$



Suy ra $AB.AD.\sin\frac{\alpha}{2}+AC.AD.\sin\frac{\alpha}{2}=AB.AC.2.\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

(vì $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$)

Do đó $AD\left(AB+AC\right)=AB.AC.2.\cos\frac{\alpha}{2}$

Suy ra $\frac{AB+AC}{AB.AC}=\frac{2.\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$ dẫn tới $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2.\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$

• Trường hợp góc A tù

Ta đặt $\widehat{BAC}=\alpha$ thì $\widehat{BAx}=180°-\alpha.$

Khi đó $\widehat{BAx}$ là góc nhọn.

Ta có $S_{ABD}+S_{ACD}=S_{ABC}$

Do đó $\frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}AC.AD.\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(180°-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}AB.AC.2.\sin\frac{180°-\alpha}{2}\cos\frac{180°-\alpha}{2}=\frac{1}{2}AB.AC.2.\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)$

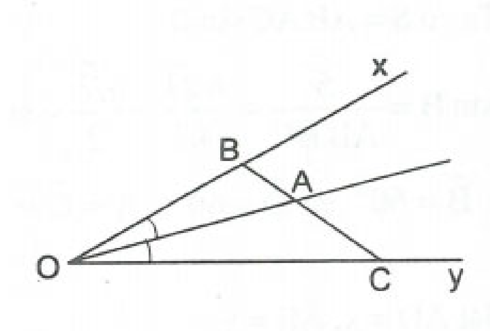
$\frac{1}{2}AB.AC.2.\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

Suy ra $AD\left(AB+AC\right)=AB.AC.2.\cos\frac{\alpha}{2}$

Do đó $\frac{AB+AC}{AB.AC}=\frac{2.\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$ hay $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2.\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$

Nhận xét: Nếu $\widehat{A} = 90°$ thì ta chứng minh được $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$, vẫn phù hợp với kết luận của bài toán.

Bài 12.



Ta có $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin 15^0$

$S_{AOC} = \frac{1}{2}OA.OC.\sin 15^0$

$S_{BOC} = \frac{1}{2}OB.OC.\sin 30^0$

Mặt khác, $S_{AOB} + S_{AOC} = S_{BOC}$

nên $\frac{1}{2}OA.OB.\sin 15° + \frac{1}{2}OA.OC.\sin 15° = \frac{1}{2}OB.OC.2\sin 15°\cos 15°$

Do đó $OA(OB + OC) = 2OB.OC\cos 15°.$

Suy ra $\frac{OB + OC}{OB.OC} = \frac{2\cos 15°}{OA}$ hay $\frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{a.4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2a}$

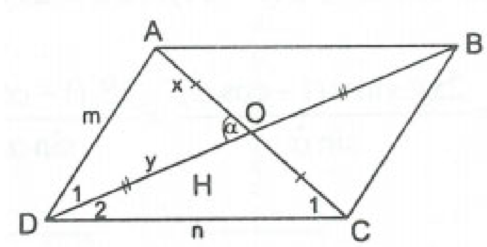
Bài 13. Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Ta đặt $OC = OA = x,\ OD = OB = y,\ AD = m,\ CD = n.$

Giả sử $\widehat{AOD} = \widehat{ADC} = \alpha < 90°.$

Xét ΔOCD có $\widehat{AOD}$ là góc ngoài nên

$\widehat{D_2} + \widehat{C_1} = \widehat{AOD} = \alpha$



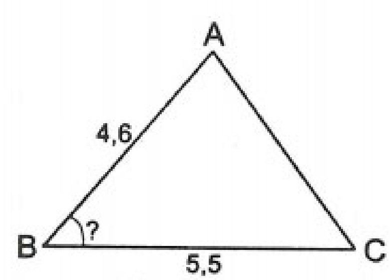
Mặt khác $\widehat{D_2} + \widehat{C_1} = \widehat{ADC} = \alpha.$ Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

Ta có $S_{ADO} = \frac{1}{2}\ m.y\sin\widehat{D_1};\ S_{DCO} = \frac{1}{2}n.x\sin\widehat{C_1}$

Mặt khác $S_{ADO} = S_{DCO}$ nên $m.y = n.x.$

Do đó $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{2x}{2y} = \frac{m}{n}$ hay $\frac{AC}{BD} = \frac{AD}{DC}$

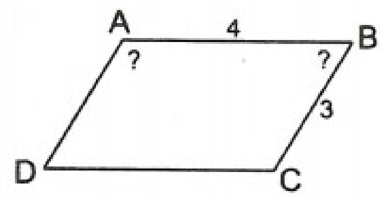
Bài 14. Ta có $S = \frac{1}{2}AB.BC\sin B$



$\Rightarrow \sin B = \frac{2S}{AB.BC} = \frac{2.9,69}{4,6.5,5} \approx \sin 50^0$

Vậy $\widehat{B} \approx 50°$.

Bài 15. Ta có $S = AB.AC.\sin B$

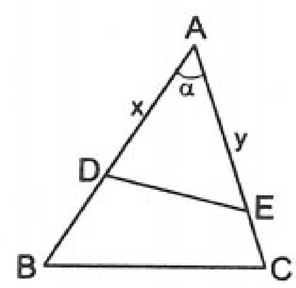


$$\sin B = \frac{S}{AB.BC} = \frac{6\sqrt{3}}{4.3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$$

Vậy $\widehat{B} = 60° \Rightarrow \widehat{D} = 60°;\ \widehat{A} = \widehat{C} = 120°$.

Bài 16. Ta đặt $AD = x,\ AE = y$.

Khi đó diện tích ΔADE là $S_1 = \frac{1}{2}x.y\sin\alpha$;



$$S_1 = \frac{1}{2}S = 25cm^2$$

Ta có $DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$

Mặt khác $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (dấu "=" xảy ra khi $x = y$).

Do đó $DE^2 \geq 2xy - 2xy\cos\alpha = 2xy(1-\cos\alpha)$

$$= \frac{2xy\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{4S_1(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{100.2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = 100\tan\frac{\alpha}{2}$$

Vậy $DE \geq \sqrt{100\tan\frac{\alpha}{2}} = 10\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}}$

Bài 17. Ta có $\frac{1}{AB} + \frac{A}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$ (bài 5.11)

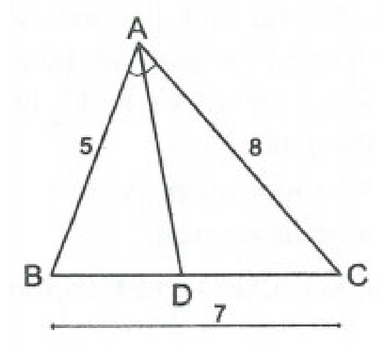
Do đó $\frac{1}{4,7} + \frac{1}{5,3} = \frac{2\cos 36^0}{AD} \Leftrightarrow \frac{10}{4,7.5,3} = \frac{2\cos 36^0}{AD}$

Suy ra $AD = \frac{4,7.5,3.2.\cos 36^0}{10} \approx 4,0(cm)$

Bài 18. Ta có $\frac{1}{AB} + \frac{A}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$

Do đó $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2\cos 60^0}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{AD} \Rightarrow AD=4(cm)$

Bài 19. Vì cạnh *CA* là cạnh lớn nhất nên góc *B* là góc lớn nhất trong ΔABC.



Ta thấy $AC^2 < AB^2 + BC^2$ (vì $8^2 < 5^2 + 7^2$) nên góc B là góc nhọn, do đó ΔABC là tam giác nhọn.

Theo định lí côsin ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow 7^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8\cos A$

Do đó $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$

Ta có: $\frac{1}{AB}+\frac{A}{AC}=\frac{2\cos 30^0}{AD}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{AD} \Leftrightarrow \frac{13}{40}=\frac{\sqrt{3}}{AD} \Rightarrow AD=\frac{40\sqrt{3}}{13}(cm)$

Bài 20. Ta đặt $\widehat{BAC}=\alpha$. Ta có $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$

Mặt khác $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$

Suy ra $\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}=\frac{1}{AD}$. Do đó $2\cos\frac{\alpha}{2}=1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}=\cos 60^0$

Do đó $\frac{\alpha}{2}=\cos 60^0 \Rightarrow \alpha = 120^0$

----------Toán Học Sơ Đồ---------