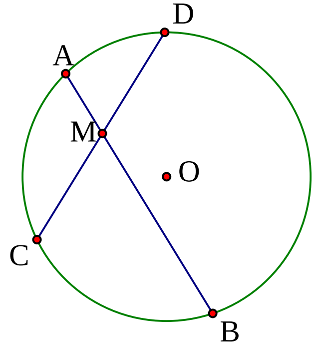
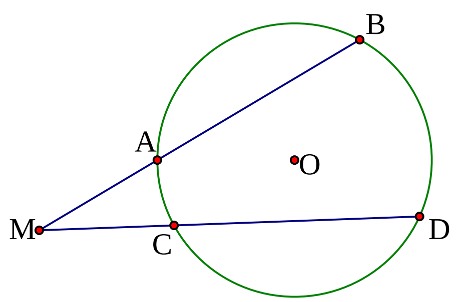
CHÙM BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN, CÁT TUYẾN

Những tính chất cần nhớ:

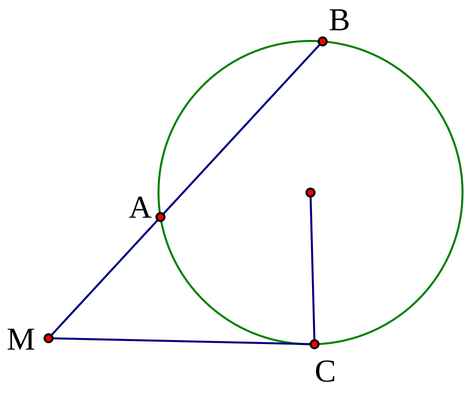
1). Nếu hai đường thẳng chứa các dây AB, CD, KCD của một đường tròn cắt nhau tại M thì $MA.MB = MC.MD$

2). Đảo lại nếu hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M và $MA.MB = MC.MD$ thì bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn.

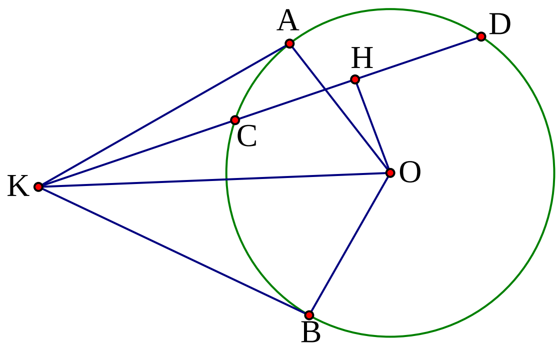




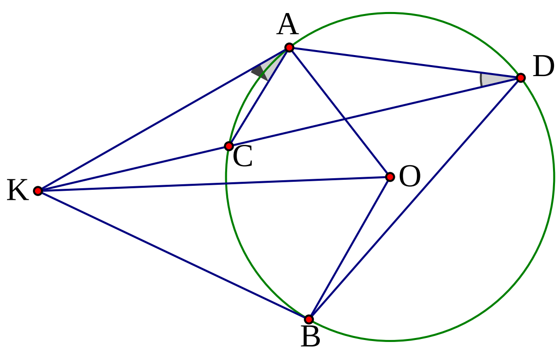
3). Nếu MC là tiếp tuyến và MAB là cát tuyến thì
$MC^2 = MA.MB = MO^2 - R^2$



4). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD, H , là trung điểm CD thì năm điểm K, A, H, O, B nằm trên một đường tròn.



5). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD thì $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$



Ta có: $KAC = ADK \Rightarrow \Delta KAC \# \Delta KAD \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{KC}{KA}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{BC}{BD}=\frac{KC}{KB}$ mà $KA=KB$ nên suy ra $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$

Chú ý: Những tứ giác quen thuộc $ACBD$ như trên thì ta luôn có: $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$ và $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$

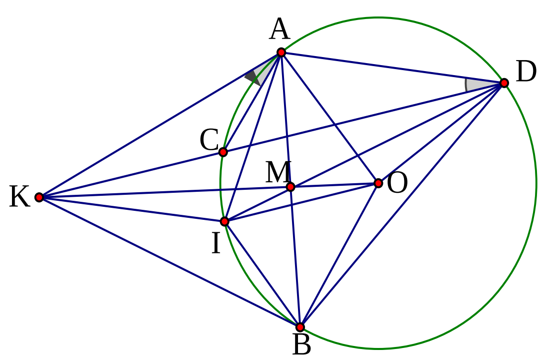
NHỮNG BÀI TOÁN TIÊU BIỂU

Bài 1: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA,KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Vẽ dây DI qua M. Chứng minh

a) $KIOD$ là tứ giác nội tiếp

b) KO là phân giác của góc IKD

Giải:



a) Để chứng minh $KIOD$ là tứ giác nội tiếp việc chỉ ra các góc là rất khó khăn.

Ta phải dựa vào các tính chất của cát tuyến , tiếp tuyến.

Ta có: $AIBD$ là tứ giác nội tiếp và $AB\cap ID=M$ nên ta có: $MA.MB=MI.MD$

Mặt khác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp nên $MA.MB = MO.MK$

Từ đó suy ra $MO.MK = MI.MD$ hay $KIOD$ là tứ giác nội tiếp.

a) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $KIOD$. Ta có
$IO = OD = R \Rightarrow OKI = OKD$

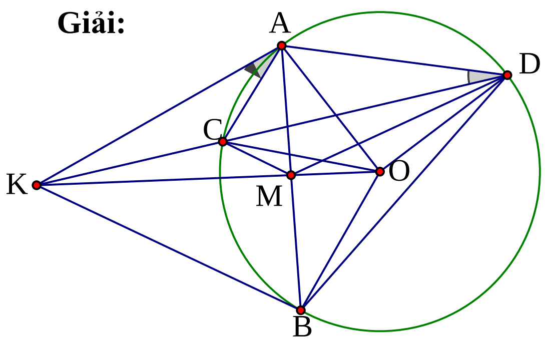
suy ra KO là phân giác của góc IKD

Bài 2: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Chứng minh

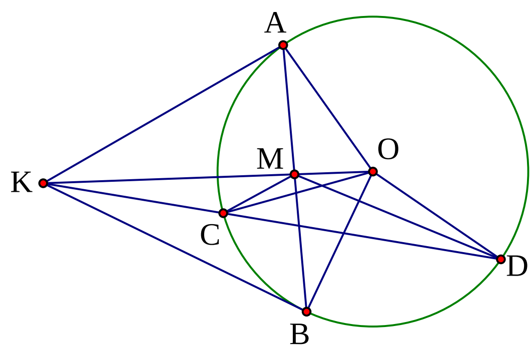
a) $CMOD$ là tứ giác nội tiếp

b) Đường thẳng AB chứa phân giác của góc CMD

Giải:



h1



h2

a) Vì KB là tiếp tuyến nên ta có: $KB^2 = KC.KD = KO^2 - R^2$

Mặt khác tam giác KOB vuông tại B và $BM \perp KO$ nên $KB^2 = KM.KO$ suy ra

$KC.KD = KM.KO$ hay $CMOD$ là tứ giác nội tiếp

b) $CMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $KMC = ODC, OMD = OCD$.

Mặt khác ta có: $ODC = OCD \Rightarrow KMC = OMD$

Trường hợp 1:

Tia KD thuộc nửa mặt phẳng chứa A và bờ là KO (h1)

Hai góc AMC, AMD có 2 góc phụ với nó tương ứng là KMC, ODC mà $KMC = ODC$ nên $AMC = AMD$ hay MA là tia phân giác của góc CMD

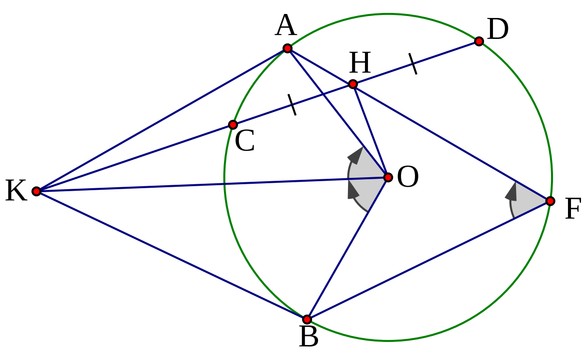
Trường hợp 2:

Tia KD thuộc nửa mặt phẳng chứa B và bờ là KO (h2) thì tương tự ta cũng có MB là tia phân giác của góc CMD

Suy ra Đường thẳng AB chứa phân giác của góc CMD.

Bài 3. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi H là trung điểm CD. Vẽ dây AF đi qua H. Chứng minh $BF//CD$

Giải:



Để chứng minh $BF//CD$ ta chứng minh $AHK = AFB$

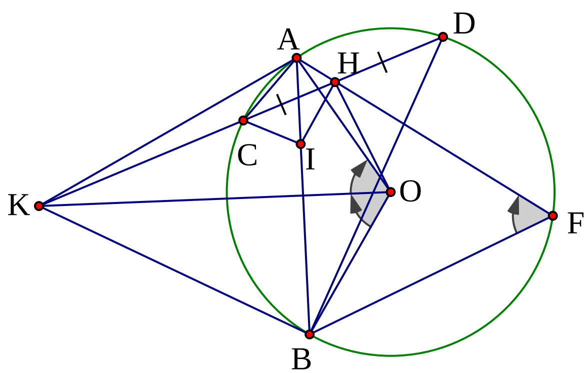
Ta có $AFB = \frac{1}{2} AOB$ (Tính chất góc nội tiếp chắn cung AB).

Mặt khác KO là phân giác góc AOB nên

$AOK = BOK = \frac{1}{2}AOB \Rightarrow AFB = AOK$. Vì A, K, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính KO nên $AHK = AOK \Rightarrow AFB = AHK \Leftrightarrow BF//CD$

Bài 4. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi H là trung điểm CD. Đường thẳng qua H song song với BD cắt AB tại I. Chứng minh $CI \perp OB$

Giải:



Ta có $HI//BD \Rightarrow CHI = CDB$. Mặt khác $CAB = CDB$ cùng chắn cung CB nên suy ra $CHI = CAB$ hay $AHIC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $IAH = ICH \Leftrightarrow BAH = ICH$. Mặt khác ta có A, K, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính KO nên $BAH = BKH$

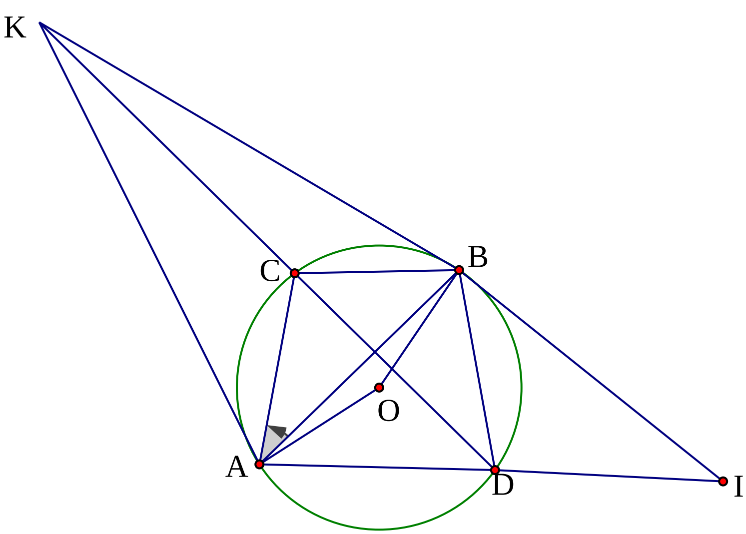
Từ đó suy ra $ICH = BKH \Rightarrow CI//KB$. Mà $KB \perp OB \Rightarrow CI \perp OB$

Nhận xét: Mấu chốt bài toán nằm ở vấn đề $OB \perp KB$.Thay vì chứng minh $CI \perp OB$ ta chứng minh $CI//KB$

Bài 5: Cho đường tròn (O) dây cung ADI. Gọi I là điểm đối xứng với A

qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng $BC//AI$.

Giải:



Ta cần chứng minh: $AIK = KBC$

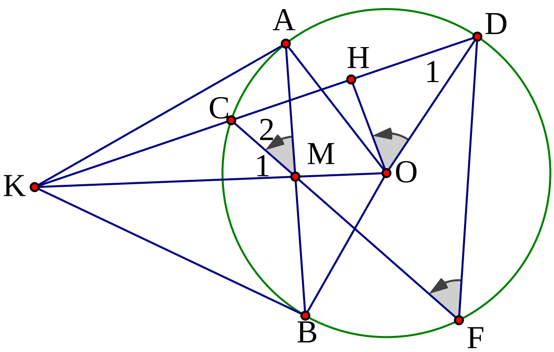
Mặt khác ta có: $KBC = CAB = \frac{1}{2}$sđCB nên ta sẽ chứng minh $AIK = CAB$ hay $\Leftrightarrow \Delta BID \sim \Delta BCA$ Thật vậy theo tính chất 5 ta có: $\frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DA}$ mà $DA = DI \Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DI}$

Tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $BCA = BDI \Rightarrow \Delta BID \sim \Delta BCA \Rightarrow AIK = CAB$

Hay $AIK = KBC \Rightarrow BC//AI$

Bài 6 Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Vẽ dây CF qua M. Chứng minh $DF//AB$

Giải:



Kẻ $OH \perp CD$

Ta chứng minh được: $CMOD$ là tứ giác nội tiếp (bài toán 2) nên $M_1 = D_1$ mà $M_1 + M_2 = 90^0; D_1 + DOH = 90^0 \Rightarrow M_2 = DOH$. Mặt khác ta có: $CFD = \frac{1}{2}COD, DOH = \frac{1}{2}COD \Rightarrow CFD = DOH$. Từ đó suy ra $M_2 = CFD \Leftrightarrow DF//AB$

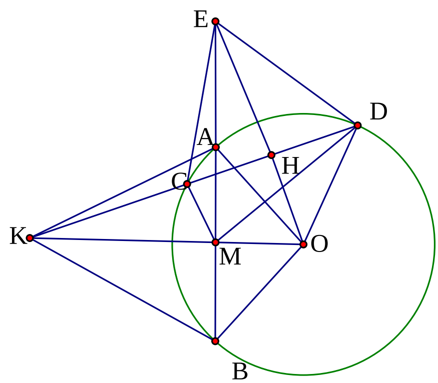
Chú ý: $DF//AB \Rightarrow ABFD$ là hình thang cân có hai đáy là $AB, DF \Rightarrow OMD = OMF$

Bài 7: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Kẻ OH vuông góc với CD cắt AB ở E. Chứng minh

a) $CMOE$ là tứ giác nội tiếp

b) CE, DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Giải:



a) Theo bài toán 2, ta có $CMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $CMK = ODC = OCD$.

Do đó các góc phụ với chúng bằng nhau: $CME = COE$.

Suy ra $CMOE$ là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc).

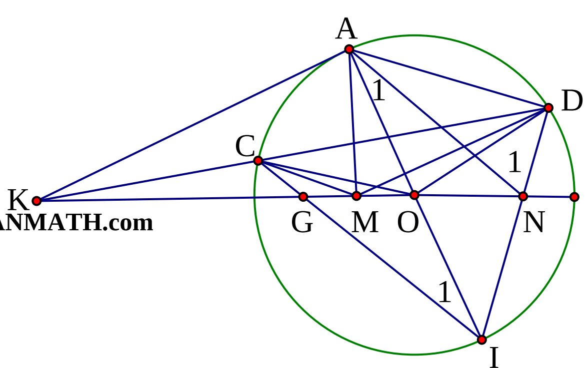
c) Cũng theo bài toán 2, $CMOD$ nội tiếp.

Mặt khác $CMOE$ là tứ giác nội tiếp nên E, C, M, O, D thuộc một đường tròn.

Từ đó dễ chứng minh CE, DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 8) Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Vẽ đường kính AI. Các dây IC, ID cắt KO theo thứ tự ở G, N. Chứng minh rằng $OG = ON$.

Giải:



Ta vẽ trong hình trường hợp O và A nằm khác phía đối với CD. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Để chứng minh $OG = ON$, ta sẽ chứng minh $\Delta IOG = \Delta AON$.

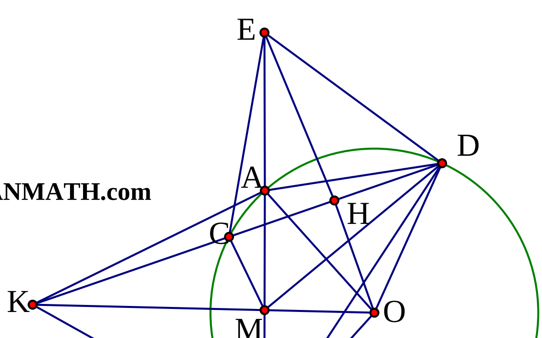
Ta đã có $OI = OA, IOG = AON$, cần chứng minh $CIA = IAN$, muốn vậy phải có $AN // CI$. Ta sẽ chứng minh $AND = CID$. Chú ý đến AI là đường kính, ta có $ADI = 90^0$, do đó ta kẻ $AM \perp OK$ Ta có $AMND$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $AND = AMD \quad (1)$

Sử dụng bài 2, ta có $CMOD$ là tứ giác nội tiếp và $AMD = \frac{1}{2}CMD = \frac{1}{2}COD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AND = \frac{1}{2}COD$. Ta lại có $CID = \frac{1}{2}COD$ nên $AND = \frac{1}{2}CID$.

HS tự giải tiếp.

Bài 9 Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $ADC = MDB$.

Giải:



Kẻ $OH \perp CD$, cắt AB ở E.

Theo bài 7, EC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$, nên theo bài toán quen thuộc 3, ta có $ECMD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $EBD = ECD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CBD = EMD$.

Do đó hai góc bù với nhau chúng bằng nhau:
$CAD = BMD \Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta BMD$ (g.g) nên $ADC = MDB$