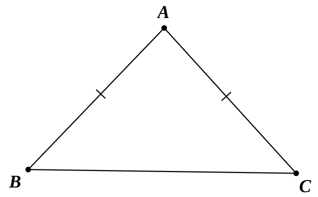
CHUYÊN ĐỀ 16: TAM GIÁC CÂN
ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Tam giác cân

a. *Định nghĩa:* Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.



ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = AC \end{cases}$

b. *Tính chất:* Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau. Ngược lại một tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

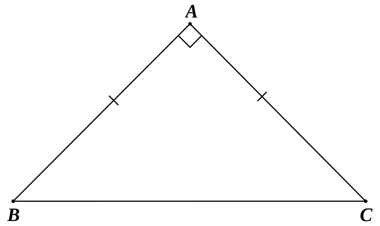
c. *Dấu hiệu nhận biết*:

- Tam giác có hai cạnh bằng nhau thì đó là tam giác cân.

- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

2. Tam giác vuông cân

a. *Định nghĩa*: Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ \hat{A} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$

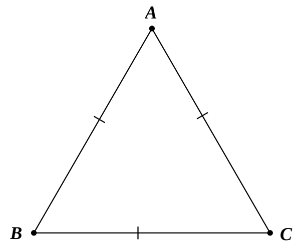
***b. Tính chất*:** Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45^o

ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} = 45^o$

3. Tam giác đều

a. *Định nghĩa*: Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau

Δ ABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$



b. Tính chất: Trong tam giác đều mỗi góc bằng $60°$.

c. Dấu hiệu nhận biết

- Tam giác có 3 cạnh bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

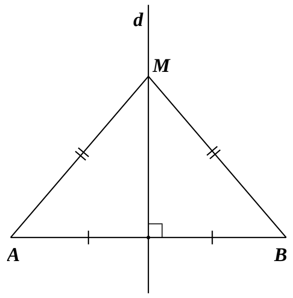
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

- Nếu một tam giác cân có một góc bằng $60°$ thì tam giác đó là tam giác đều.

4. Đường trung trực của đoạn thẳng

a. Định nghĩa đường trung trực:

Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.



Trên hình vẽ bên, d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Ta cũng nói: A đối xứng B qua d.

b. Tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

c. Nhận xét: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB.

d. Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

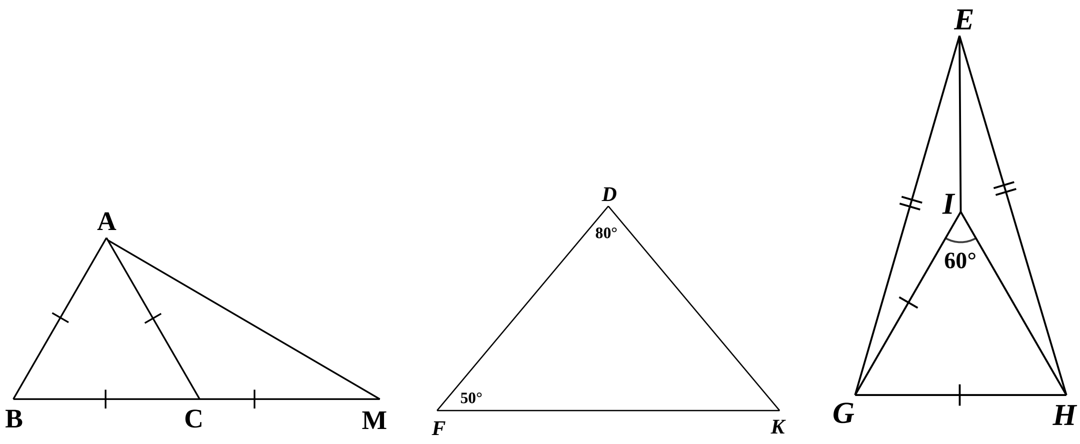
Dạng 1. Chứng minh tam giác cân, tam giác đều và sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để giải quyết bài toán.

I. Phương pháp giải:

Dựa và dấu hiệu nhận biết của tam giác cân, tam giác đều. Dựa vào tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Lời giải:

a) Xét ΔABC có: $AB = AC = BC$ nên ΔABC đều

Xét ΔACM có: $AC = CM$ nên ΔACM cân tại C

b) Trong ΔDFK có $K + D + F = 180°$

Ta có $K = 180° - F - D = 50°$

$\Rightarrow K = F$

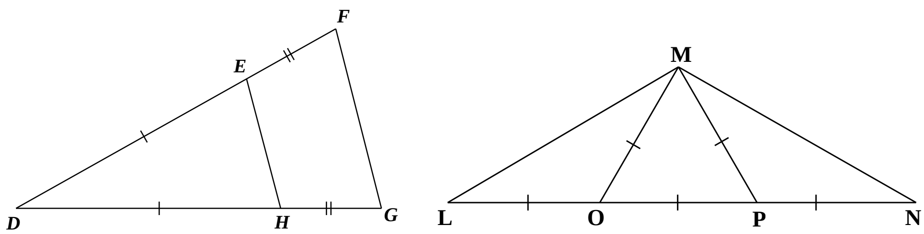
$\Rightarrow \Delta DFK$ cân tại D.

c) Xét ΔIGH có: $IG = GH$ nên ΔIGH cân tại G

Mà $GIH = 60°$ nên ΔIGH đều

Xét ΔEGH có: $EG = EH$ nên ΔEGH cân tại E

Bài 2. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Lời giải:

a) Trong ΔDEH có $DE = DH \Rightarrow \Delta DEH$ cân tại D.

Ta có $DE = DH$; $EF = HG$

$\Rightarrow DE + EF = DH + HG$

$\Rightarrow DF = DG$

$\Rightarrow \Delta DFG$ cân tại D.

b) Ta có $MO = MP = PO \Rightarrow \Delta MPO$ đều.

Lại có $LO = MO \Rightarrow \Delta LOM$ cân tại O

$MP = PN \Rightarrow \Delta MPN$ cân tại P.

Vì ΔMOP đều nên $POM = MPO = 60^\circ$

Mà $MOP + MOL = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $MPO + MPN = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow MOL = MPN$

Xét ΔMOL và ΔMPN ta có:

$MOL = MPN$ (cmt), $OL = PN$ (gt), $MO = MP$ (gt)

Suy ra $\Delta MOL = \Delta MPN$ (c.g.c)

Do đó $ML = MN \Leftrightarrow \Delta LMN$ cân tại M.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC nếu biết:

a) $A = 40^\circ$; b) $B = 50^\circ$; c) $C = 60^\circ$.

Lời giải:

a) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Mà $B = C$ (Vì ΔABC cân tại A)

$$\Rightarrow B = C = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

b) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow B = C = 50^\circ$

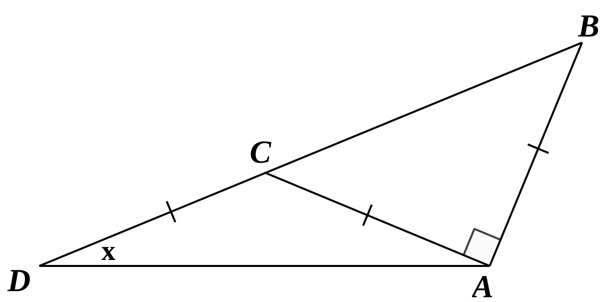
$\Rightarrow A = 180^\circ - 2.B = 108^\circ - 2.50^\circ = 80^\circ$

c) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow B = C = 60^\circ$

$\Rightarrow A = 180^\circ - 2.C = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$

Bài 4. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Trong ΔABC vuông tại A có $AB = AC$ nên ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow ABC = ACB = 45°$

Xét ΔADC có $AC = DC$ nên ΔADC cân tại C

$\Rightarrow CDA = CAD = x$

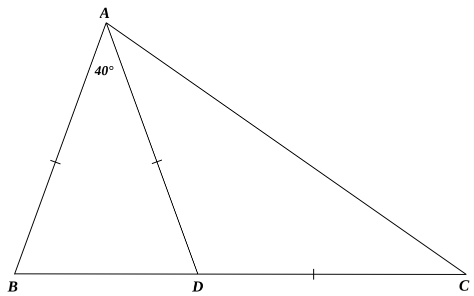
Ta lại có BCA là góc ngoài của ΔADC

$\Rightarrow BCA = CDA + CAB = x + x = 2x$

Do đó $2x = 45° \Rightarrow x = 22,5°$

Bài 5. Cho tam giác ABD cân tại A có $A = 40°$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm C sao cho $DC = DA$. Tính số đo góc ACB.

Lời giải:



Trong ΔABC có $BAD + B + ADB = 180°$

$\Rightarrow B + ADB = 180° - BAD = 140°$

Mà $B = ADB$ (ΔABD cân tại A)

$\Rightarrow B = ADB = \dfrac{140°}{2} = 70°$

Ta có $ADB + ADC = 180°$ (hai góc kề bù)

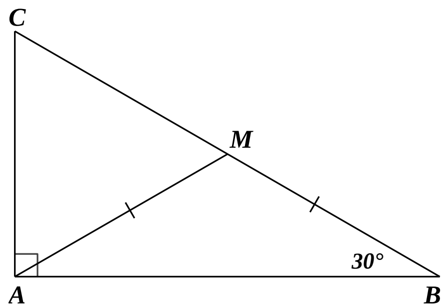
$\Rightarrow ADC = 110°$

ΔADC có $DC = DA$ (gt) $\Rightarrow$ ΔADC cân tại D

$ACB = \dfrac{180° - ADC}{2} = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $B = 30°$. Trên cạnh BC lấy M sao cho $AM = BM$. Chứng minh ΔAMC đều.

Lời giải:



Ta có $AM = BM$ (gt) $\Rightarrow \Delta AMB$ cân tại M

$\Rightarrow BAM = B$.

Vì ΔABC vuông tại A $\Rightarrow B + C = 90^\circ$

Mà $BAM + CAM = 90^\circ$; $BAM = B$ (cmt)

Nên $CAM = C$

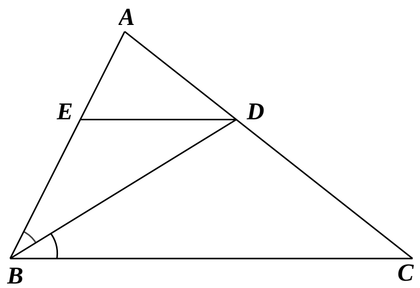
$\Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M .

Ta lại có $C = 90^\circ - B = 60^\circ$.

Suy ra ΔAMC đều.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác EBD cân.

Lời giải:



Vì $DE \mathbin{//} BC$ nên $DBC = EDB$ (vì hai góc so le trong)

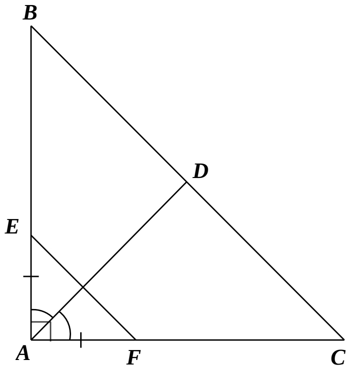
Mà $DBC = DBE$ (vì BD là tia phân giác của ABC)

$\Rightarrow EBD = EDB$

$\Rightarrow \Delta EDB$ cân tại E

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = CF$. Chứng minh $\Delta ABD, \Delta ADC, \Delta AEF$ vuông cân.

Lời giải:



Xét ΔAEF vuông tại A có $AE = AF$ $\Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A

Vì ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow B = C = 45°$

Ta lại có: AD là phân giác BAC $\Rightarrow BAD = CAD = \dfrac{BAC}{2} = 45°$

Xét ΔABD có $BDA = 180° - \left(B + BAD\right) = 90°$

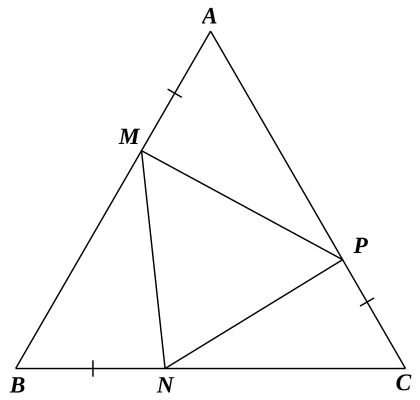
$\Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow ADC = 90°$

Xét ΔADB vuông tại D có $B = DAB = 45°$ $\Rightarrow \Delta ADB$ vuông cân tại D

Xét ΔADC vuông tại D có $C = DAC = 45°$ $\Rightarrow \Delta ADC$ vuông cân tại D

Bài 9. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP đều.

Lời giải:



Ta có $AB = BC = CA$ và $AM = BN = CP$

$\Rightarrow AB - AM = BC - BN = CA - CP$

$\Rightarrow MB = NC = PA$.

Xét ΔMBN và ΔNCP ta có:

$B = C\left(= 60°\right)$ (vì ΔABC đều), $BM = CN$ (cmt), $BN = CP$ (gt)

Suy ra $\Delta MBN = \Delta NCP$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = NP$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $\Delta PAM = \Delta NCP(c.g.c)$

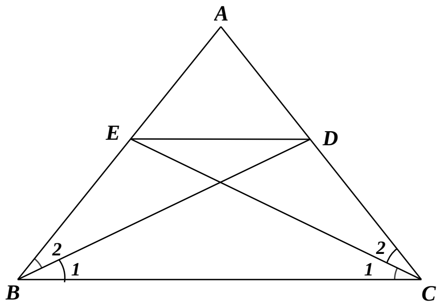
$\Rightarrow PM = NP$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM = NP = MN$

Suy ra ΔMNP đều.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D, tia phân giác góc C cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.

Lời giải:



Vì BD, CE lần lượt là tia phân giác của ABC, ACB

Nên $B_1 = B_2 = \dfrac{ABC}{2}$, $C_1 = C_2 = \dfrac{ACB}{2}$

Mà $ABC = ACB$ (do tam giác ABC cân tại A)

Suy ra: $B_2 = C_2$

Xét ΔABD và ΔACE ta có:

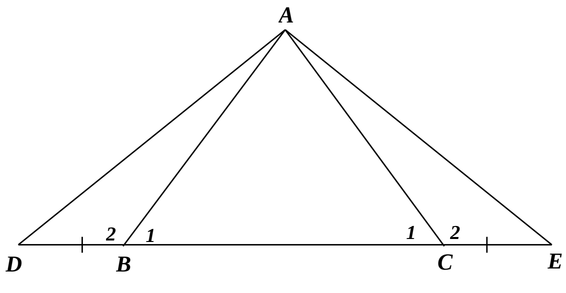
$B_2 = C_2$, A là góc chung, $AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh tam giác ADE cân.

Lời giải:



Ta có: $B_1 + B_2 = 180^\circ$, $C_1 + C_2 = 180^\circ$ (kề bù)

$B_1 = C_1$ (ΔABC cân tại A)

Nên $B_2 = C_2$

Xét ΔABD và ΔACE ta có:

$B_2 = C_2$ (cmt)

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

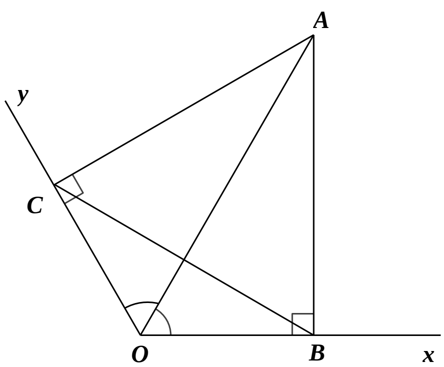
$DB = CE$ (gt)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Bài 12. Cho $xOy = 120°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác ABC là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải:



Xét ΔABO và ΔACO ta có:

$AOB = AOC\left(=\dfrac{1}{2}xOy = 60°\right)$ (vì OA là tia phân giác của xOy)

$ABO = ACO = 90°$

OA là cạnh chung

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (ch.gn)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Vì ΔABO vuông tại B $\Rightarrow AOB + BAO = 90°$

$\Rightarrow BAO = 90° - 60° = 30°$

Mà $BAO = CAO\left(\text{do } \Delta ABO = \Delta ACO\right)$

$\Rightarrow BAC = 60°$

Xét ΔABC cân tại A có $BAC = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E.

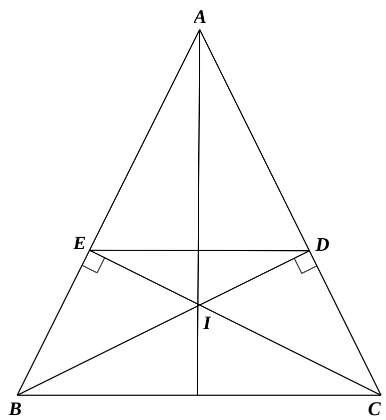
a) Chứng minh tam giác ADE cân.

b) Chứng minh $DE \,//\, BC$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $IB = IC$.

d) Chứng minh $AI \perp BC$.

Lời giải:



Xét ΔABD và ΔACE ta có:

$ADB = AEC = 90°$

BAC là góc chung

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (ch.gn)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

b) ΔABC cân tại $A \Rightarrow ACB = \dfrac{180° - BAC}{2}$ (1)

ΔADE cân tại $A \Rightarrow ADE = \dfrac{180° - BAC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ADE = ACB$, mà hai góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow DE \,//\, BC$

c) Ta có $ABC = ABI + IBC$; $ACB = ACI + ICB$

Mà $ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A) ; $ABI = ACI$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACE$)

Nên $IBC = ICB \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại $I \Rightarrow IB = IC$

d) Ta có $AB = AC$ (ΔABC cân tại A) $\Rightarrow A$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC

$IB = IC$ (cmt) $\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC

Do đó AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow AI \perp BC$.

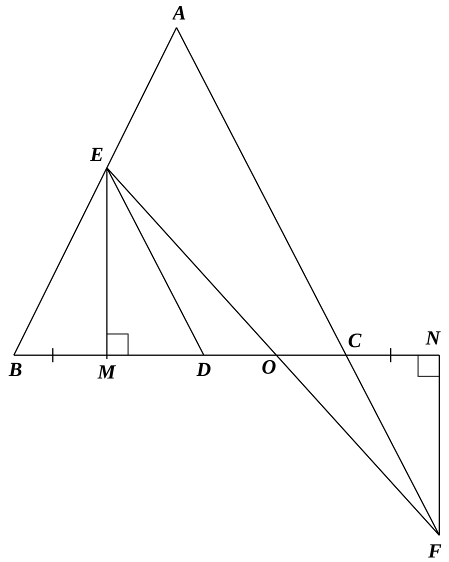
Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC $(MB < MC)$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc BC cắt AC tại F.

a) Chứng minh: $EM = FN$

b) Qua E kẻ $ED // AC$ ($D \in BC$). Chứng minh $MB = MD$.

c) EF cắt BC tại O. Chứng minh $OE = OF$.

Lời giải:



a) Ta có $EBM = ACB$ (ΔABC cân)

mà $FCN = ACB$ (đối đỉnh) nên $EBM = FCN$.

Xét ΔBEM và ΔCFN ta có:

$EBM = FCN$ (cmt)

$BM = CN$ (gt)

$EMB = FNC$ $(= 90°)$

Vậy $\Delta BEM = \Delta CFN$ (g.c.g)

$\Rightarrow EM = FN$

b) Ta có $ED // AC \Rightarrow EDM = ACB$ (đồng vị)

mà $EBM = ACB$ nên $EDM = EBM$

Suy ra ΔEBD cân tại E, do đó $EB = ED$.

Xét ΔBME vuông tại M và ΔDME vuông tại M, ta có

$EB = ED$ (cmt);

$EDM = EBM$ (cmt)

Suy ra $\Delta BME = \Delta DME$ (ch.gn)

$\Rightarrow BM = MD$.

c) Ta có $EM \,//\, FN$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow MEO = NFO$ (so le trong).

Xét ΔMEO và ΔNFO, ta có:

$MEO = NFO$ (cmt)

$EM = FN$ (câu a)

$EMO = FNO$ $(= 90°)$

Suy ra $\Delta MEO = \Delta NFO$ (g.c.g)

$\Rightarrow OE = OF$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

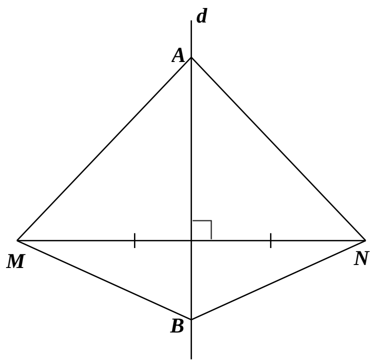
I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN. Chứng minh $\Delta MAB = \Delta NAB$.

Lời giải:



Do A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN nên $AM = AN$, $BM = BN$

Xét ΔMAB và ΔNAB có:

$AM = AN$ (cmt)

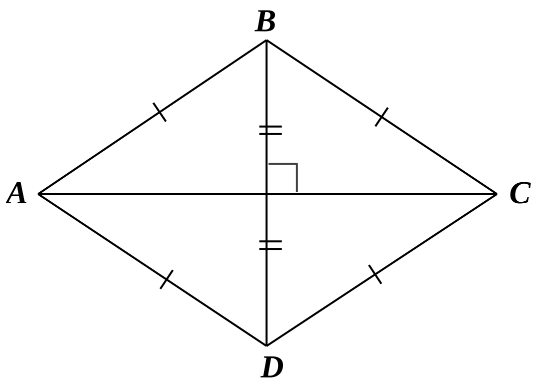
$BM = BN$ (cmt)

AB là cạnh chung

Do đó $\Delta MAB = \Delta NAB$ (c.c.c).

Bài 2. Cho ΔABC cân tại B. Lấy điểm D đối xứng với điểm B qua AC. Chứng minh $\Delta ABD = \Delta CBD$.

Lời giải:



Vì D đối xứng với điểm B qua AC nên AC là đường trung trực của BD

Do A, C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BD nên $AB = AD$, $BC = DC$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ có:

$AB = AD$ (cmt)

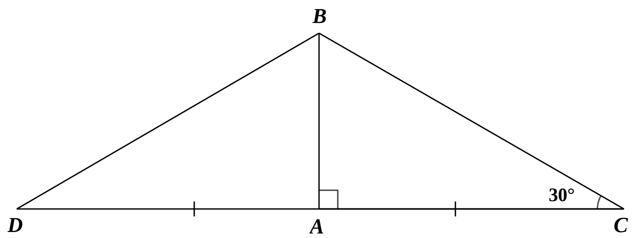
$BC = DC$ (cmt)

AC là cạnh chung

Do đó $\triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c).

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} = 30°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tính số đo góc $\widehat{BDA}$.

Lời giải:



Vì $AB \perp DC$ và $AD = AC$ nên AB là đường trung trực của DC

$\Rightarrow BD = BC$

Suy ra ΔDBC cân tại B

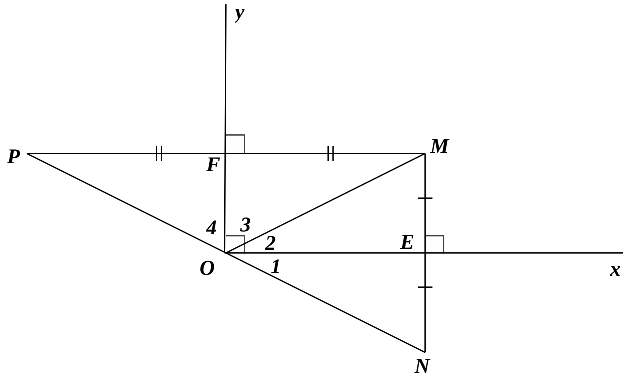
$\Rightarrow \widehat{BDA} = \hat{C} = 30°$

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N và P sao cho tia Ox là đường trung trực của MN và Oy là đường trung trực của MP .

a) Chứng minh $ON = OP$.

b) Chứng minh ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Lời giải:



a) Vì Ox là đường trung trực của MN nên $OM = ON$

Vì Oy là đường trung trực của MP nên $OM = OP$

Do đó $ON = OP$

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MN và Ox, MP và Oy.

$\Delta OME = \Delta ONE$ (c.g.c) nên $O_1 = O_2$

$\Delta OMF = \Delta ONP$ (c.g.c) nên $O_3 = O_4$

Ta có $PON = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2\left(O_2 + O_3\right) = 2.90° = 180°$

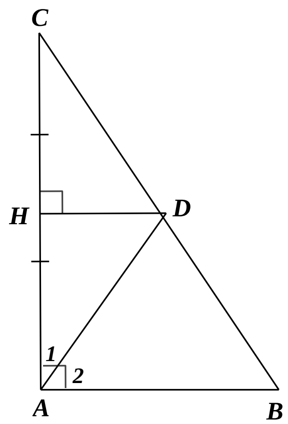
Do đó ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC tại H, cắt BC tại D. Nối A và D.

a) So sánh số đo góc DAB và DBA.

b) Chứng minh D là trung điểm của BC

Lời giải:



a) Từ giả thiết vì HD là đường trung trực của AC nên $DC = DA \Rightarrow C = A_1$

Vì ΔABC vuông tại A nên $A_2 + A_1 = 90°$, $B + C = 90°$

$=> A_2 = B$

b) $A_2 = B$ nên ΔADB cân tại $D \Rightarrow DA = DB$

Mà $DC = DA$ (vì HD là đường trung trực của AC) .

$\Rightarrow DC = DB$

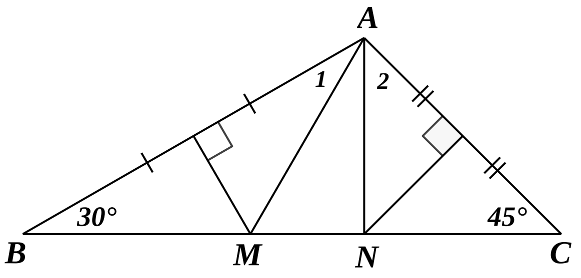
Suy ra D là trung điểm của BC

Bài 6. Cho ΔABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở M và N.

a) Biết $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 45°$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MAN}$.

b) Chứng minh $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC} - 180°$.

Lời giải:



a) Ta có M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow MA = MB$

$\Rightarrow \Delta AMB$ cân tại M

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 = 30°$

Tương tự N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC

$\Rightarrow NA = NC$

$\Rightarrow \Delta ANC$ cân tại N

$\Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_2 = 45°$

Trong ΔANC có $\widehat{ANC} = 180° - \left(\hat{C} + \hat{A}_2\right) = 180° - (45° + 45°) = 90°$ nên $\widehat{ANC} = 90°$.

Suy ra $AN \perp BC$.

Xét Δ ABC có $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 45° \Rightarrow \widehat{BAC} = 180° - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 105°$.

Vậy $\widehat{MAN} = 105° - \hat{A}_1 - \hat{A}_2 = 105° - 30° - 45° = 30°$

b) Ta có: $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \widehat{BAC} - (\hat{B} + \hat{C}) = \widehat{BAC} - (180° - \widehat{BAC}) = 2\widehat{BAC} - 180°$

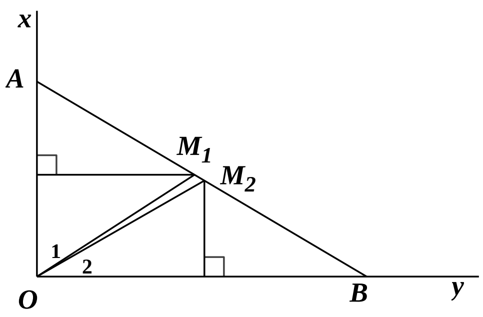
Vậy $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC} - 180°$

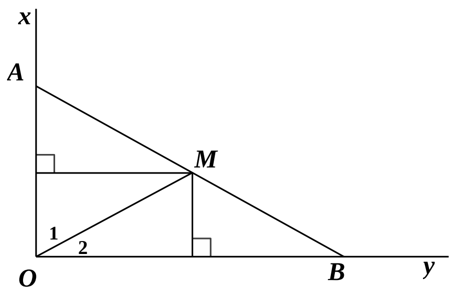
Bài 7. Cho góc vuông xOy. Trên các tia Ox, Oy lấy hai điểm A và B (không trùng với O). Đường trung trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở M. Chứng minh:

a) A, M, B thẳng hàng.

b) M là trung điểm của AB.

Lời giải:





a) Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của trung trực đoạn OA, OB với AB.

Ta có M_1 nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA

$\Rightarrow$ $M_1A = M_1O$

$\Rightarrow \Delta M_1OA$ cân tại M_1 nên $A = O_1$ (1)

Ta lại có M_2 nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OB

$\Rightarrow$ $M_2B = M_2O$

$\Rightarrow \Delta M_2OB$ cân tại M_2 nên $B = O_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O_1 + O_2 = A + B$

Xét ΔOAB vuông tại O nên $A + B = 90^\circ$

Do đó $O_1 + O_2 = 90^\circ$ (3)

Ta lại có $AOB = O_1 + M_1OM_2 + O_2 = 90^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $M_1OM_2 = 0^\circ \Rightarrow M_1 \equiv M_2 \equiv M$

Vậy A, M, B thẳng hàng.

b) Ta có M lần lượt nằm trên đường trung trực của đoạn OA, OB

Nên $MO = MA$, $MO = MB$

$\Rightarrow MA = MB$ mà A, M, B thẳng hàng nên M là trung điểm của AB.

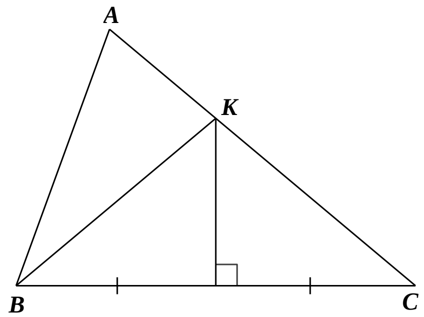
Bài 8. ΔABC có $B - C = 30^\circ$. Đường trung trực của BC cắt AC ở K.

a) Chứng minh $KBC = KCB$.

b) Tính số đo góc ABK

c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm. Tính chu vi tam giác ABK.

Lời giải:



a) K thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow KB = KC$

$\Rightarrow \Delta BKC$ cân tại $K \Rightarrow KBC = C$

b) Ta có: $ABK = ABC - KBC = ABC - C = 30°$

c) Ta có: $AK + BK = AK + KC = AC = 5$ cm.

$\Rightarrow AB + AK + BK = 8$ cm

Vậy chu vi tam giác ABK là 8 cm.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

I. Phương pháp giải:

• Để chứng minh điểm M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB, ta dùng nhận xét: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB.

• Để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta chứng minh d chứa hai điểm phân biệt cách đều A và B, hoặc dùng định nghĩa đường trung trực.

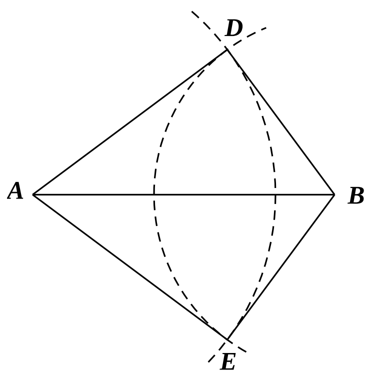
II. Bài toán.

Bài 1. Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E. Chứng minh:

a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) AB là đường trung trực của DE.

Lời giải:



a) Từ giả thiết điểm D, E nằm trên đường tròn tâm A nên $AD = AE$.

Suy ra điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) Tương tự ý a), ta có điểm điểm B thuộc đường trung trực của DE.

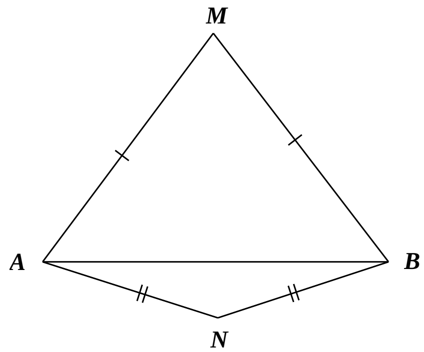
Vậy AB là đường trung trực của DE.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Dựng các tam giác cân MAB, NAB lần lượt tại M và N (M, N nằm khác phía so với AB). Chứng minh:

a) Điểm M thuộc đường trung trực của AB;

b) MN là đường trung trực của AB.

Lời giải:



a) ΔAMB cân tại M nên $AM = BM$

Suy ra điểm M thuộc đường trung trực của AB. (1)

Ta lại có ΔANB cân tại N nên $AN = BN$

Nên điểm N thuộc đường trung trực của AB. (2)

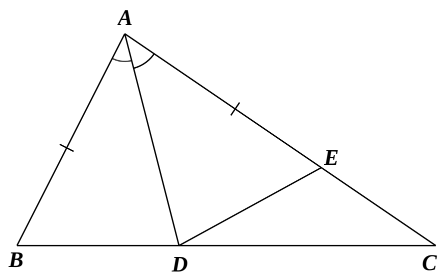
Từ (1) và (2) suy ra: MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 3. Cho ΔABC, đường phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = DE$;

b) AD là đường trung trực của BE.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔAED có:

AD là cạnh chung

$BAD = EAD$ (Vì AD là tia phân giác của BAC)

$AB = AE$ (gt)

Do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) nên $BD = DE$

b) Vì $BD = DE$ (cmt) suy ra D nằm trên đường trung trực của BE (1).

Theo giả thiết: $AB = AE$ suy ra A nằm trên đường trung trực của BE (2).

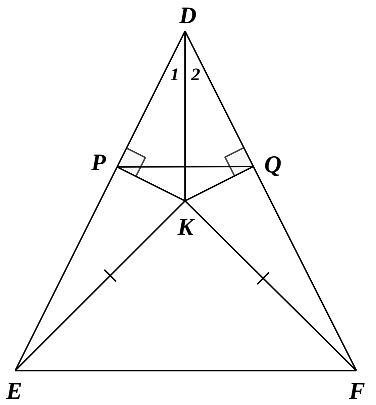
Từ (1) và (2), suy ra AD là đường trung trực của BE.

Bài 4. Cho ΔDEF có $DE = DF$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $KE = KF$. Kẻ KP vuông góc với DE ($P \in DE$), KQ vuông góc với DF ($Q \in DF$). Chứng minh:

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ;

b) DK là đường trung trực của EF và PQ. Từ đó suy ra $PQ // EF$.

Lời giải:



a) Ta có: $\begin{cases} DE = DF \\ KE = KF \end{cases}$ nên K, D thuộc trung trực của EF.

Xét ΔDEK và ΔDFK có:

PK là cạnh chung

$KE = KF$ (gt)

$DE = DF$ (gt)

Do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) nên $BD = DE$

$\Rightarrow D_1 = D_2$

Xét ΔDPK và ΔDQK có:

$DPK = DQK = 90°$

$D_1 = D_2$ (cmt)

DK là cạnh chung

Do đó $\Delta DPK = \Delta DQK$

$\Rightarrow PK = QK$ và $DP = DQ$.

Từ đó suy ra K, D thuộc trung trực của PQ.

b) Ta có K, D thuộc trung trực của EF

$\Rightarrow DK$ là đường trung trực của PQ

$\Rightarrow DK \perp PQ$ (1)

Ta lại có K, D thuộc trung trực của PQ

$\Rightarrow DK$ là đường trung trực của EF.

$\Rightarrow DK \perp EF$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $PQ \,//\, EF$.

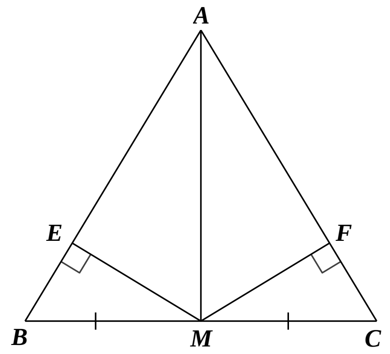
Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC. ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) AM là trung trực của của BC;

b) $ME = MF$ và AM là trung trực của EF;

c) $EF \,//\, BC$.

Lời giải:



a) Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow AB = AC$ (1)

Mà $MB = MC$ (Vì M là trung điểm của BC) (2)

Suy ra A, M thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow AM$ là trung trực của của BC

b) Vì ΔABC cân tại A nên $B = C$.

Xét ΔBEM và ΔCFM có:

$BEM = CFM = 90^\circ$ (gt)

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

$B = C$ (Vì ΔABC cân tại A)

Do đó $\Delta BEM = \Delta CFM$ (ch-gn)

$\Rightarrow ME = MF$

Ta có $\Delta BEM = \Delta CFM$ (ch-gn) $\Rightarrow BE = CF$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$

Do đó $AB - BE = AC - CF$

$\Rightarrow AE = AF$

Mặt khác, $ME = MF$ nên AM là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

c) Ta có: AM là đường trung trực của BC và EF

$\Rightarrow AM \perp BC$, $AM \perp EF$ $\Rightarrow EF // BC$.

Bài 6. Cho góc xOy khác góc bẹt Oz là tia phân giác của xOy. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Oz. Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A, cắt Oy tại C và vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B, cắt Ox tại D. Chứng minh:

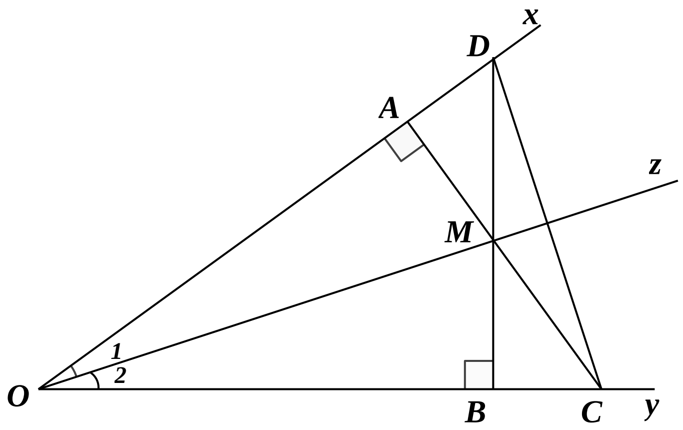
a) Điểm O thuộc đường trung trực của AB;

b) OM là đường trung trực của AB;

c) OM là đường trung trực của CD.

d) $AB // CD$

Lời giải:



a) Xét ΔOAM và ΔOEM có:

OM là cạnh chung

$O_1 = O_2$ (Vì Oz là tia phân giác của xOy)

$OAM = OBM = 90°$ (gt)

Do đó $\Delta OAM = \Delta OEM$ (ch-gn) nên $\begin{cases} OA = OB \\ MA = MB \end{cases}$

Vì $OA = OB$ nên O thuộc đường trung trực của AB.

b) Vì $MA = MB$ nên M thuộc trung trực của AB.

Mà O thuộc trung trực của AB

Suy ra OM là đường trung trực của AB.

c) $\Delta OBD = \Delta OAC$ (c.g.c)

Nên $OD = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của CD. (1)

$\Delta OMD = \Delta OMC$ (c.g.c)

Nên $MD = MC \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của CD. (2)

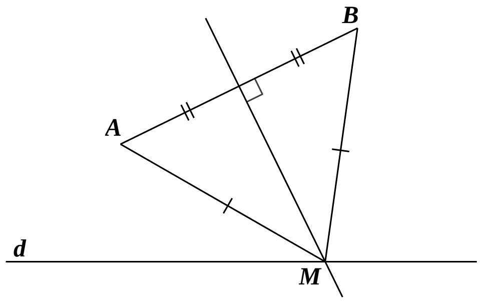
Từ (1) và (2) suy ra OM thuộc đường trung trực của CD.

d) Ta có OM là đường trung trực của AB và CD

$\Rightarrow OM \perp AB$, $OM \perp CD$ $\Rightarrow AB \,//\, CD$.

Bài 7. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A và B

Lời giải:



Vì điểm M cách đều hai điểm A và B nên M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Vậy điểm M là giao điểm của đường thẳng d với đường trung trực của AB.

Chú ý: Nếu A, B nằm sao cho $AB \perp d$ thì không tồn tại điểm cần tìm.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại điểm D. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BD$. Chứng minh:

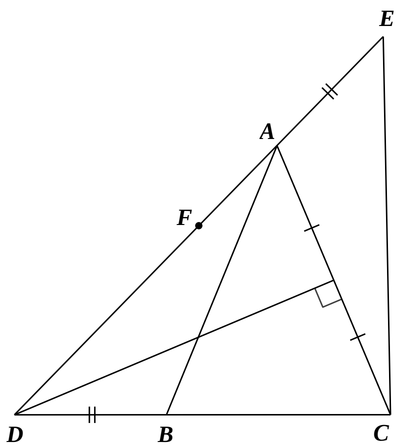
a) Chứng minh ΔADC cân;

b) Chứng minh $DAC = ABC$;

c) Chứng minh $AD = CE$;

d) Lấy F là trung điểm của DE. Chứng minh CF là đường trung trực của DE.

Lời giải:



a) Vì D thuộc đường trung trực của AC nên $DA = DC$.

$\Rightarrow \Delta ADC$ cân.

b) ΔADC cân $\Rightarrow DAC = DCA$ (1)

Vì $AB = AC$ nên $ABC = DCA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DAC = ABC$

c) Ta có : $EAC + DAC = DBA + ABC (= 180°)$

Mà $DAC = DCA$ suy ra $EAC = ABD$.

Chứng minh được $\Delta EAC = \Delta DBA$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = CE$.

d) Ta có: $AD = CE$, $DA = DC$ nên $CE = CD$.

Mà $FE = FD$ (F là trung điểm của DE).

$\Rightarrow CF$ là đường trung trực của DE.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm P và Q lần lượt đối xứng với H qua AB; AC.

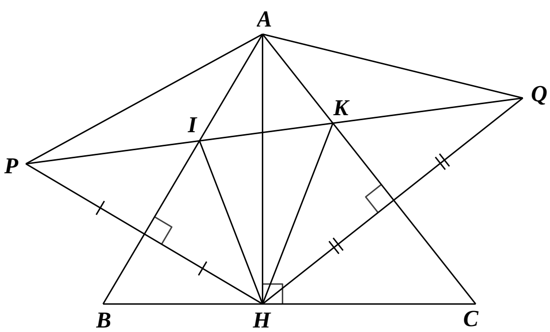
a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi I , K lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh $API = AHI$ và $AHK = AQK$.

c) Chứng minh HA là tia phân giác của IHK.

d) Cho BAC = 60°. Tính số đo góc PAQ

Lời giải:



a) Ta có P đối xứng với H qua AB nên AB là đường trung trực của đoạn thẳng PH

$\Rightarrow AP = AH$

Ta lại có Q đối xứng với H qua AC nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng QH

$\Rightarrow AQ = AH$

Do đó $AP = AQ (= AH)$

b) Xét ΔAPI và ΔAHI ta có:

$AP = AH$ (A nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PH)

$IP = IH$ (I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PH)

AI cạnh chung

Vậy $\Delta API = \Delta AHI$ (c.c.c)

$=> API = AHI$ (1)

Chứng minh tương tự: $\Delta AHK = \Delta AQK$ (c.c.c)

$\Rightarrow AHK = AQK$ (2)

c) Ta có $AP = AQ$ $\Rightarrow \Delta PAQ$ cân tại A $\Rightarrow API = AQK$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có: $AHI = AHK$

$\Rightarrow HA$ là tia phân giác của IHK.

d) Ta có $\Delta API = \Delta AHI$ $=> PAI = HAI$

$\Delta AHK = \Delta AQK$ $\Rightarrow HAK = QAK$

Mà $PAQ = PAH + HAQ = 2(IAH + HAK) = 2BAC = 120°$

Vậy $PAQ = 120°$

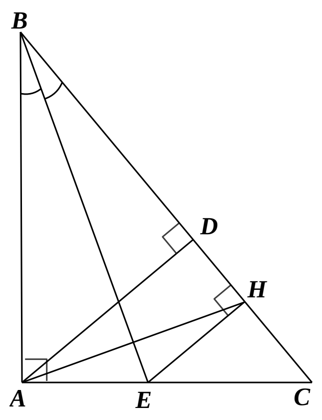
Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

Lời giải:



a) Xét ΔABE và ΔHBE ta có:

$BAE = BHE = 90°$

BE cạnh chung

$ABE = DBE$ (gt)

Suy ra $\Delta ABE = \Delta HBE$ (cạnh huyền - góc nhọn)

b) Vì $\Delta ABE = \Delta HBE$ (cmt) $\Rightarrow BA = BH$, $EA = EH$

$BA = BH$ (hai cạnh tương ứng) nên B thuộc đường trung trực của AH

$EA = EH$ (hai cạnh tương ứng) nên E thuộc đường trung trực của AH

Vậy BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH

c) Ta có: $AD // EH$ (cùng vuông góc với BC) nên $DAH = EHA$ (so le trong)

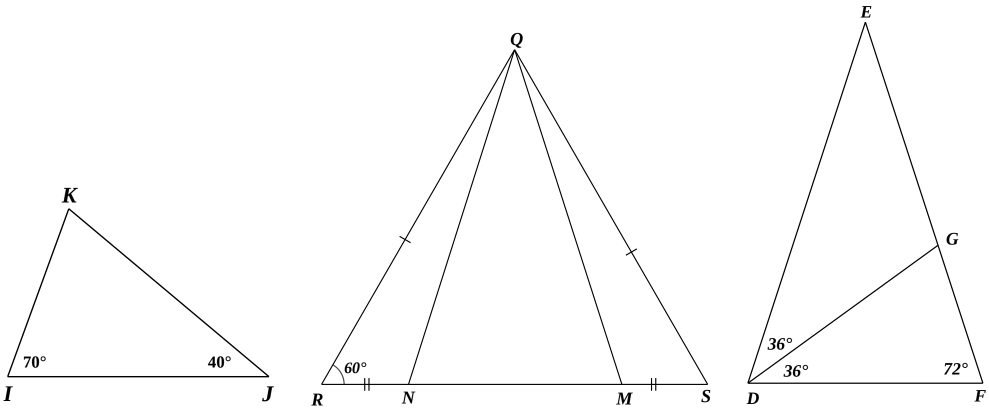
Vì $EA = EH$ (cmt) nên tam giác EAH cân tại E nên $EAH = EHA$

Vậy $EAH = DAH$ hay AH là tia phân giác của DAC.

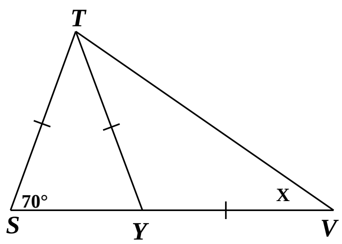
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh tam giác cân, tam giác đều và sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để giải quyết bài toán.

Bài 1: Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$.

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân.

b) ΔABE đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A (AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$;

b) ΔDBF là tam giác cân;

c) $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC.

Bài 2. Cho ΔABC cân có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$.

c) Tính số đo DFE.

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA.

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

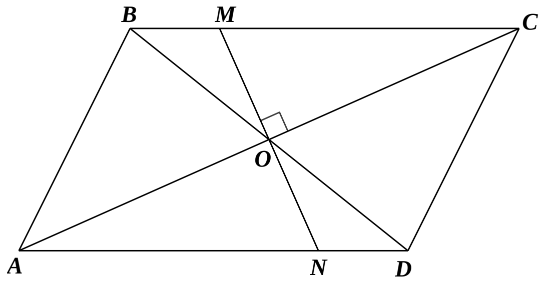
Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

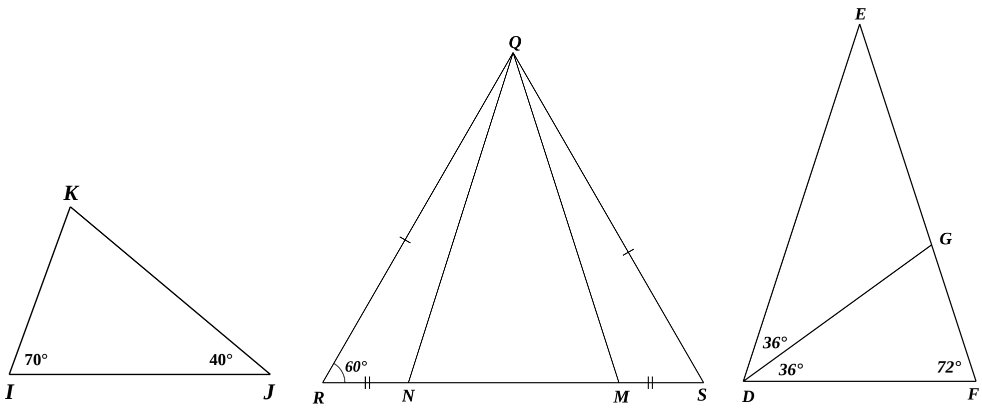
Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI $(I \in BC)$. Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau. Bài 1. Bài 1: Bài Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Lời giải:

a) Trong ΔKIJ có $K + \hat{I} + J = 180°$

Ta có $K = 180° - \hat{I} - J = 70°$

$\Rightarrow K = \hat{I}$

$\Rightarrow \Delta IJK$ cân tại J.

b) Ta có: ΔQRS có $QR = QS$ và $QRS = 60° \Rightarrow \Delta QRS$ đều.

Suy ra $\Delta QRN = \Delta QSM$ (c.g.c)

$\Rightarrow QN = QM \Leftrightarrow \Delta QMN$ cân.

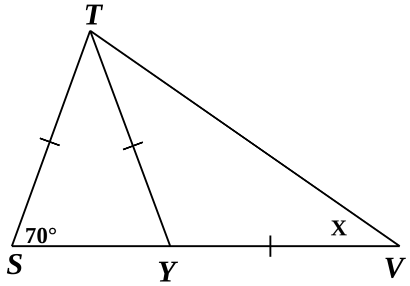
c) Ta có $DGF = 72° \Rightarrow DGE = 108°; DEF = 36°$.

Xét ΔDEF có $EDF = EFD = 72°$ suy ra ΔDEF cân tại E.

Xét ΔDFG có $DGF = DFG = 72° \Rightarrow \Delta DFG$ cân tại D.

Xét ΔDGE có $EDG = DEG = 36° \Rightarrow \Delta DGE$ cân tại G.

Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Vì $TS = TY$ nên ΔTSY cân tại T

$\Rightarrow TYS = S = 70°$

Vì $TY = YV$ nên ΔTYV cân tại Y

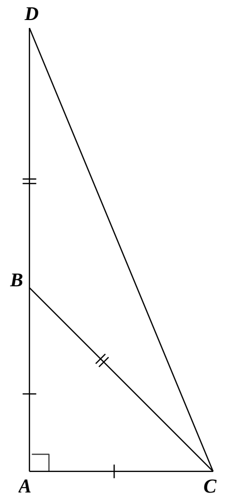
$\Rightarrow YTV = V = x$

Ta có TYS là góc ngoài của ΔTYV nên $TYS = YTV + V = 2x = 70°$

$\Rightarrow x = 35°$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Lời giải:



Có $ABC = ACB = 45° \Rightarrow CBD = 135°$.

Tam giác BCD cân tại B suy ra $ADC = BCD = \dfrac{180° - 135°}{2} = 22,5°$.

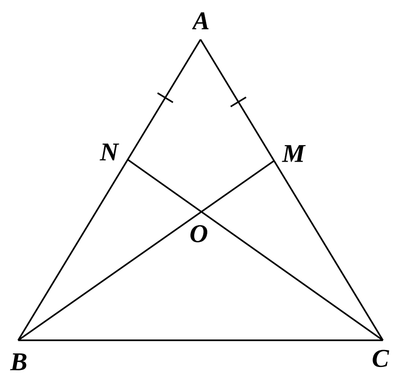
Suy ra $ACD = 67,5°$.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Lời giải:



a) Xét ΔAMB và ΔANC ta có:

$AM = AN$ (gt)

BAC là góc chung

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta AMB = \Delta ANC$ (c.g.c)

$\Rightarrow ABM = ACN$

b) Ta có: $ABC = ABM + MBC$, $ACB = ACN + NCB$

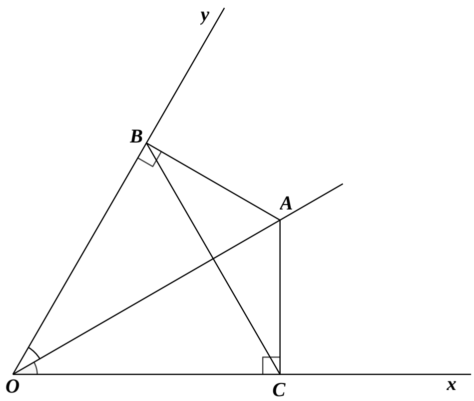
Mà $ABM = ACN$ (cmt), $ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A)

Do đó $MBC = NCB$

Hay $OBC = OCB \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải:



Xét ΔABO và ΔACO ta có:

$AOB = AOC$ (vì OA là phân giác xOy)

$ABO = ACO = 90°$

OA là cạnh chung

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (ch.gn)

$\Rightarrow OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O

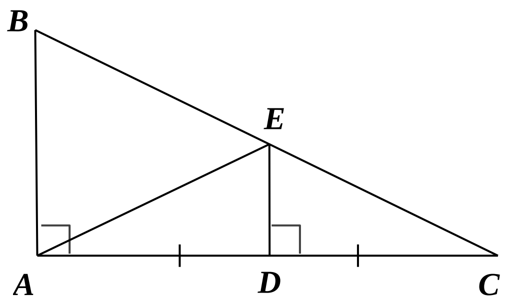
ΔOBC có $BOC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ đều.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân.

b) ΔABE đều.

Lời giải:



a) Xét ΔEAD và ΔECD có $DA = DC$; $EDA = EDC$;

ED chung suy ra $\Delta EDA = \Delta ECD$. Suy ra $EA = EC \Rightarrow \Delta ECA$ cân.

b) Ta có $\begin{cases} ABE + ECA = 90^\circ \\ ECA = EAC \end{cases} \Rightarrow ABE + EAC = 90^\circ$

$\Rightarrow BAE = EBA$ (cùng phụ góc BAE).

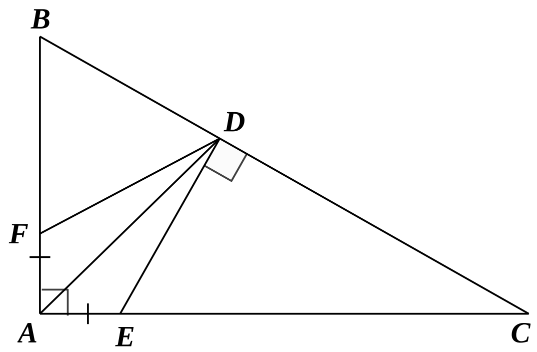
Suy ra ΔABE cân tại $E \Rightarrow EC = BE = EA = \dfrac{AB}{2} = AB$

$\Rightarrow \Delta ABE$ đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$; b) ΔDBF là tam giác cân; c) $DB = DE$.

Lời giải:



a) Ta có $ABC + ACB = 90^\circ$; $ACB + DEC = 90^\circ$

suy ra $ABC = DEC$.

b) Xét ΔFAD và ΔEAD có: AD chung; $FAD = EAD$; $AF = AE$.

Suy ra $\Delta FAD = \Delta EDA$ (c.g.c).

$\Rightarrow DFA = DEA; \Rightarrow DFB = DEC$ mà $ABC = DEC \Rightarrow ABC = DFB$

$\Rightarrow \Delta DBF$ cân tại D.

c) Ta có $\Delta FAD = \Delta EDA \Rightarrow DE = DF$ (1)

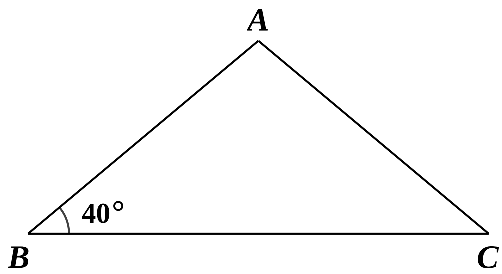
Tam giác DBF cân tại $D \Rightarrow DB = DF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán.

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC

Lời giải:



Vì A nằm trên đường trung trực của BC nên $AB = AC$

Suy ra ΔABC cân tại A

Tính được: $ACB = 40°$, $BAC = 100°$

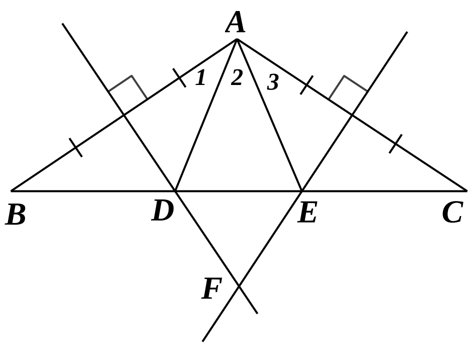
Bài 2. Cho ΔABC cân tại A có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$

c) Tính số đo DFE.

Lời giải:



a) ΔABC cân tại A

$$\Rightarrow B = C = \frac{180° - BAC}{2} = \frac{180° - 110°}{2} = 35°$$

Ta có D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow DA = DB$

$\Rightarrow \Delta ADB$ cân tại $D \Rightarrow B = A_1 = 35°$

Tương tự E nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $AC \Rightarrow EA = EC$

$\Rightarrow \Delta AEC$ cân tại $E \Rightarrow C = A_3 = 35°$

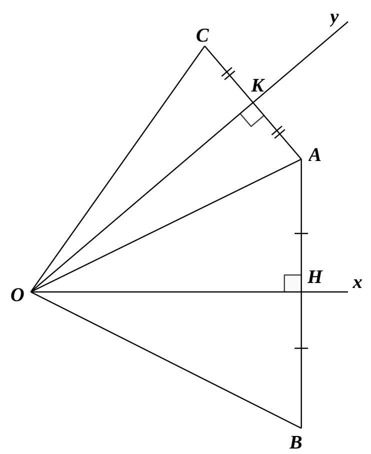
$DAE = BAC - A_1 - A_3 = 110° - 2.35° = 40°$

b) Ta có: $DAE + 180° = A_2 + (B + C + BAC) = A_2 + A_1 + A_3 + BAC = BAC + BAC = 2BAC$

Vậy $2BAC = DAE + 180°$

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Lời giải:



Ox là đường trung trực của AB, $O \in AB$

Nên $OA = OB$ (1)

Tương tự ta có Oy là đường trung trực của AC, $O \in AC$

Nên $OA = OC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OB = OC$.

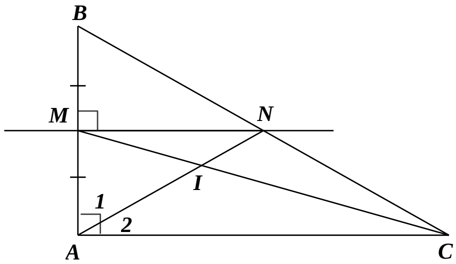
Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

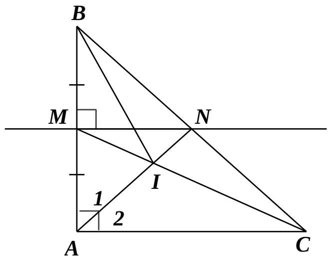
a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA.

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

Lời giải:





a) Vì N nằm trên đường trung trực của đoạn AB nên $NA = NB$.

$\Rightarrow \Delta ANB$ là tam giác cân tại đỉnh N.

b) ΔANB là tam giác cân tại đỉnh N nên $B = A_1$.

ΔABC vuông tại A nên $B + ACB = 90°$

Mà $A_1 + A_2 = 90°$ Nên $A_2 = ACB$

Suy ra ΔANC cân tại $N \Rightarrow AN = NC$

Mà $NA = NB$ nên $NB = NC$

Do đó N là trung điểm BC.

c) Nếu $IB = IC$ mà $NB = NC$ nên IN là đường trung trực của BC.

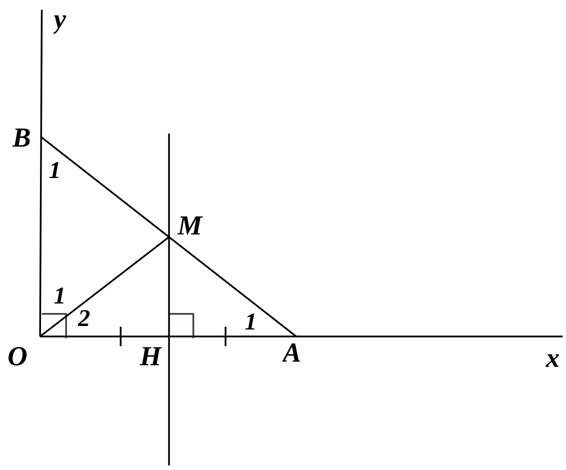
Mà $A \in IN$ nên $AB = AC$

Khi đó ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow ABC = 45°$.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Lời giải:



Ta có HM là đường trung trực của đoạn thẳng OA nên $MA = MO$

$\Rightarrow \Delta OMA$ cân tại M $\Rightarrow O_2 = A_1$

Mặt khác, $A_1 + B_1 = O_2 + O_1 = 90°$

$\Rightarrow O_1 = B_1 \Rightarrow MO = MB$.

Vậy M thuộc trung trực của OB

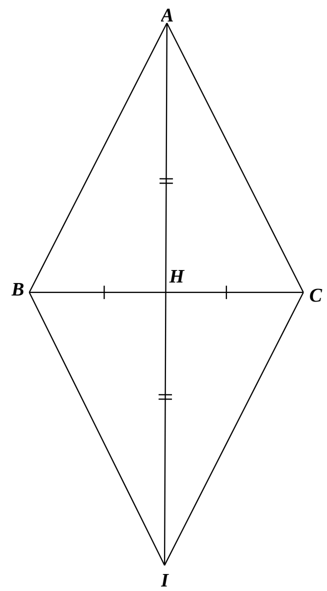
Bài 2. Cho tam giác ABC có cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABH = \Delta ACH$

b) Chứng minh rằng AH là đường trung trực của BC

c) Trên tia đối của tia HA lấy điểm I sao cho $HA = HI$. Chứng minh rằng: $IC \,//\, AB$

d) Chứng minh $CAH = CIH$



a) ΔABH và ΔACH có:

$AB = AC$ (gt)

AH cạnh chung

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta ACH$ (c-c-c)

b) Ta có: $AHB + AHC = 180°$ (2 góc kề bù)

Mà $AHB = AHC$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

$\Rightarrow AHB = 90^0 \Rightarrow AH \perp BC$

Mà H là trung điểm BC (gt)

Nên AH là đường trung trực của BC

c) ΔABH và ΔIHC có:

$HA = HI$ (gt)

$AHB = IHC$ (đối đỉnh)

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta IHC$ (c-g-c)

$\Rightarrow BAH = CIH$

Mà BAH và CIH ở vị trí so le trong

Nên $IC // AB$

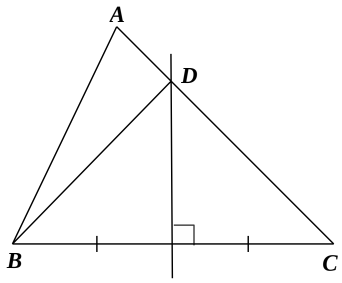
d) Ta có: $BAH = CAH$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

Mà $BAH = CIH$ (cm trên)

Nên $CAH = CIH$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Lời giải:



Ta có: $AC = DA + DC$.

Nên $DA + DB = AC \Leftrightarrow DA + DB = AD + DC$

$\Leftrightarrow DB = DC$

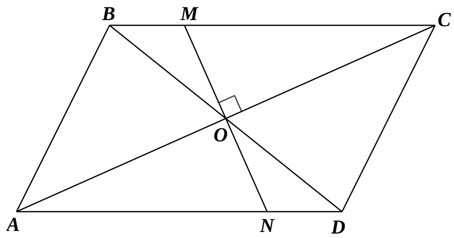
$\Leftrightarrow D$ thuộc đường trung trực của BC.

Vậy D là giao điểm của AC với đường trung trực của BC thì $DA + DB = AC$.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.

Lời giải:



Chứng minh được:

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (g.c.g) nên $BC = AD$;

$\Delta BOC = \Delta DOA$(g.c.g) nên $OC = AO$

Do $BC // AD$ nên $MCO = NAO$ (so le trong)

$\Delta MOC = \Delta NOA \Rightarrow OM = ON$,

$AC \perp MN$ tại trung điểm của MN nên AC là trung trực của MN. Suy ra $AM = AN$ và $CM = CN$, và được MN cũng là trung trực của AC nên $AM = MC$.

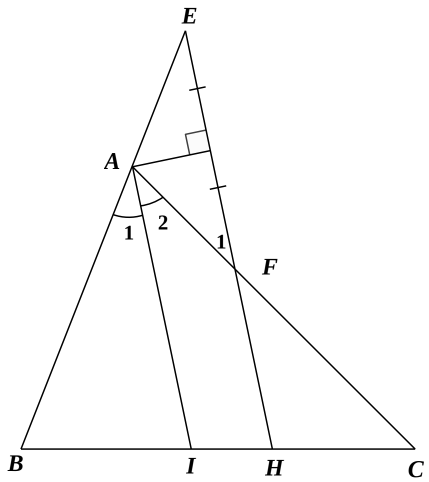
Suy ra $AM = MC = CN = NA$.

Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

Lời giải:



a) Vì $HE // AI$ nên $E = A_1$ (đồng vị) và $F_1 = A_2$ (so le trong).

Mà $A_1 = A_2$, do đó $E = F_1 \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A

$\Rightarrow AE = AF$

$\Rightarrow$ Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC.

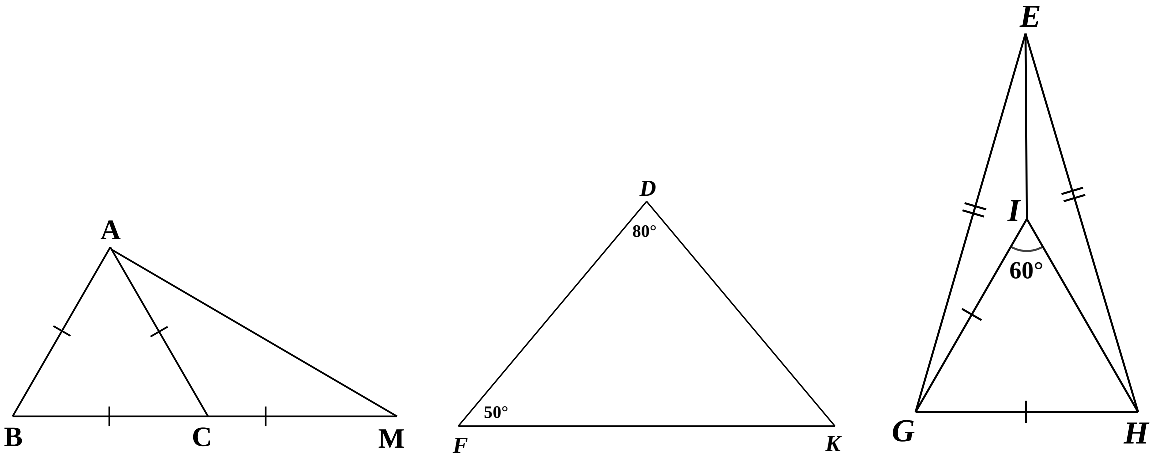
b) Vì $EF // AI$ nên đường trung trực của EF vuông góc với AI.

Từ kết quả ý a), suy ra đường trung trực của EF luôn đi qua điểm A và vuông góc với AI cố định. Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

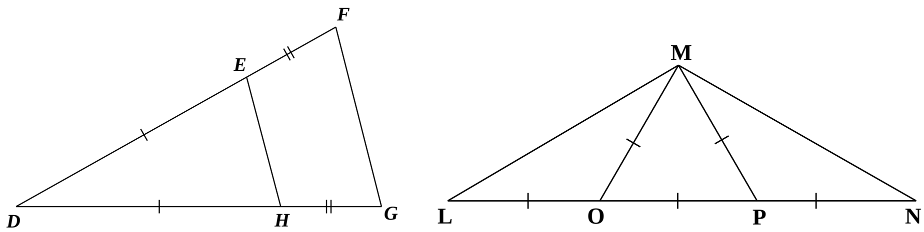
PHIẾU BÀI TẬP.

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



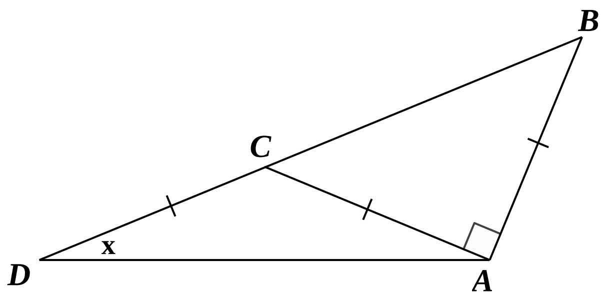
Bài 2. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC nếu biết:

a) $A = 40^\circ$; b) $B = 50^\circ$; c) $C = 60^\circ$.

Bài 4. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 5. Cho tam giác ABD cân tại A có $A = 40^\circ$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm C sao cho $DC = DA$. Tính số đo góc ACB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $B = 30^\circ$. Trên cạnh BC lấy M sao cho $AM = BM$. Chứng minh ΔAMC đều.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác EBD cân.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = CF$. Chứng minh $\Delta ABD, \Delta ADC, \Delta AEF$ vuông cân.

Bài 9. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP đều.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D, tia phân giác góc C cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh tam giác ADE cân.

Bài 12. Cho $xOy = 120°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác ABC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E.

a) Chứng minh tam giác ADE cân.

b) Chứng minh $DE \,//\, BC$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $IB = IC$.

d) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC $(MB < MC)$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc BC cắt AC tại F.

a) Chứng minh: $EM = FN$

b) Qua E kẻ $ED \,//\, AC$ ($D \in BC$). Chứng minh $MB = MD$.

c) EF cắt BC tại O. Chứng minh $OE = OF$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN, Chứng minh $\Delta MAB = \Delta NAB$.

Bài 2. Cho ΔABC cân tại B. Lấy điểm D đối xứng với điểm B qua AC. Chứng minh $\Delta ABD = \Delta CBD$.

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A có $C = 30°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tính số đo góc BDA.

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N và P sao cho tia Ox là đường trung trực của MN và Oy là đường trung trực của MP .

a) Chứng minh $ON = OP$.

b) Chứng minh ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC tại H, cắt BC tại D. Nối A và D.

a) So sánh số đo góc DAB và DBA.

b) Chứng minh D là trung điểm của BC

Bài 6. Cho ΔABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở M và N.

a) Biết $B = 30°$, $C = 45°$. Tính số đo góc BAC và MAN.

b) Chứng minh $MAN = 2BAC - 180°$.

Bài 7. Cho góc vuông xOy. Trên các tia Ox, Oy lấy hai điểm A và B (không trùng với O). Đường trung trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở M. Chứng minh:

a) A, M, B thẳng hàng.

b) M là trung điểm của AB.

Bài 8. ΔABC có $B - C = 30°$. Đường trung trực của BC cắt AC ở K.

a) Chứng minh $KBC = KCB$.

b) Tính số đo góc ABK

c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm. Tính chu vi tam giác ABK.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E. Chứng minh:

a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) AB là đường trung trực của DE.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Dựng các tam giác cân MAB, NAB lần lượt tại M và N (M, N nằm khác phía so với AB). Chứng minh:

a) Điểm M thuộc đường trung trực của AB;

b) MN là đường trung trực của AB.

Bài 3. Cho ΔABC, đường phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = DE$;

b) AD là đường trung trực của BE.

Bài 4. Cho ΔDEF có $DE = DF$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $KE = KF$. Kẻ KP vuông góc với DE ($P \in DE$), KQ vuông góc với DF ($Q \in DF$). Chứng minh:

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ;

b) DK là đường trung trực của EF và PQ. Từ đó suy ra $PQ // EF$.

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC. ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) AM là trung trực của của BC;

b) $ME = MF$ và AM là trung trực của EF;

c) EF // BC.

Bài 6. Cho góc xOy khác góc bẹt Oz là tia phân giác của xOy. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Oz. Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A, cắt Oy tại C và vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B, cắt Ox tại D. Chứng minh:

a) Điểm O thuộc đường trung trực của AB;

b) OM là đường trung trực của AB;

c) OM là đường trung trực của CD.

d) AB // CD

Bài 7. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A và B

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại điểm D. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BD$. Chứng minh.:

a) Chứng minh ΔADC cân;

b) Chứng minh $DAC = ABC$;

c) Chứng minh $AD = CE$;

d) Lấy F là trung điểm của DE. Chứng minh CF là đường trung trực của DE.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm P và Q lần lượt đối xứng với H qua AB; AC.

a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh $API = AHI$ và $AHK = AQK$.

c) Chứng minh HA là tia phân giác của IHK.

d) Cho $BAC = 60°$. Tính số đo góc PAQ

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

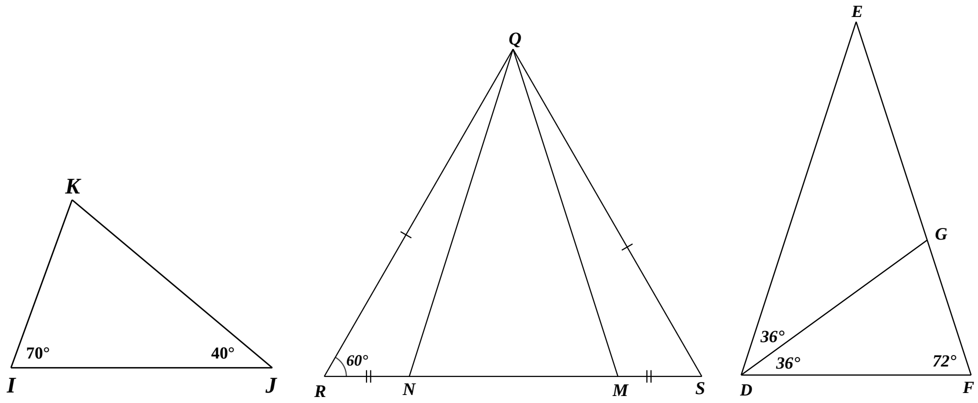
b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

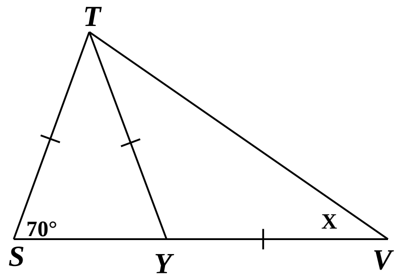
Phần III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ TỰ GIẢI

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

Bài 1: Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân. b) ΔABE đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$ b) ΔDBF là tam giác cân c) $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC

Bài 2. Cho ΔABC cân có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$

c) Tính số đo DFE.

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA .

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

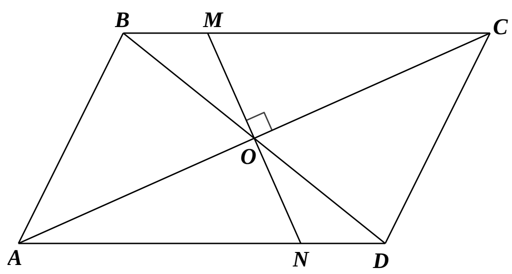
Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.