CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I/ ĐỊNH NGHĨA

1) Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ: 2, 3, 5, 7 11, 13,17, 19....

2) Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Ví dụ: 4 có 3 ước số: 1 ; 2 và 4 nên 4 là hợp số.

3) Các số 0 và 1 không phải là só nguyên tố cũng không phải là hợp số

4) Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố

II/ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1) Định lý 1: Dãy số nguyên tố là dãy số vô hạn

Chứng minh:

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là p_1; p_2; p_3; ....p_n. trong đó p_n là số lớn nhất trong các nguyên tố. Xét số $N = p_1 p_2 ...p_n +1$ thì N chia cho mỗi số nguyên tố p_i $(i = \overline{1, n})$ đều dư 1 (1)

Mặt khác N là một hợp số (vì nó lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó N phải có một ước nguyên tố nào đó, tức là N chia hết cho một trong các số p_i $(i = \overline{1, n})$. (2)

Ta thấy (2) mâu thuẫn (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố.

2/ Định lý 2:

Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số).

Chứng minh:

* Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố:

Thật vậy: giả sử điều khẳng định trên là đúng với mọi số m thoả mãn: $1< m < n$ ta chứng minh điều đó đúng với mọi n.

Nếu n là nguyên tố, ta có điều phải chứng minh.

Nếu n là hợp số, theo định nghĩa hợp số, ta có: $n = a.b$ (với $a, b < n$)

Theo giả thiết quy nạp: a và b là tích các thừa số nhỏ hơn n nên n là tích cuả các thừa số nguyên tố.

* Sự phân tích là duy nhất:

Giả sử mọi số $m < n$ đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất, ta chứng minh điều đó đúng với n:

Nếu n là số nguyên tố thì ta được điều phải chứng minh.

Nếu n là hợp số: Giả sử có 2 cách phân tích n ra thừa số nguyên tố khác nhau:

n = p.q.r....

n = p′.q′.r′....

Trong đó p, q, r ..... và p′, q′, r′.... là các số nguyên tố và không có số nguyên tố nào cũng có mặt trong cả hai phân tích đó (vì nếu có số thoả mãn điều kiện như trên, ta có thể chia n cho số đó lúc đó thường sẽ nhỏ hơn n, thương này có hai cách phân tích ra thừa số nguyên tố khác nhau, trái với giả thiết của quy nạp).

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết p và p′ lần lượt là các số nguyên tố nhỏ nhất trong phân tích thứ nhất và thứ hai.

Vì n là hợp số nên n′ > p^2 và n > p'^2

Do p = p′ => n > p.p′

Xét m = n - pp′ < n được phân tích ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất ta thấy:

p | n => p | n – pp′ hay p | m

p′ | n => p′ | n – pp′ hay p′ | m

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố ta có:

m = n - pp′ = pp′ . P.Q ... với P, Q ∈ P (P là tập các số nguyên tố)

⇨ pp′ | n = pp′ | p.q.r ... => p′ | q.r ... => p′ là ước nguyên tố của q.r ...

(Chú ý: kí hiệu p | n là n chia hết cho p)

Mà p′ không trùng với một thừa số nào trong q,r ... (điều này trái với giả thiết quy nạp là một số nhỏ hơn n đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất).

Vậy, điều giả sử không đúng, n không thể là hợp số mà n phải là số nguyên tố (Định lý được chứng minh).

III/ CÁCH NHẬN BIẾT SỐ NGUYÊN TỐ

Cách 1:

Chia số đó lần lượt cho các nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7...

Nếu có một phép chia hết thì số đó không nguyên tố.

Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là nguyên tố.

Cách 2:

Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố

Cho học sinh lớp 6 học cách nhận biết 1 số nguyên tố bằng phương pháp thứ nhất (nêu ở trên), là dựa vào định lý cơ bản:

Ước số nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số khôngvượt quá $\sqrt{a}$.

Đặc biệt: Với dãy 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 nên cho học sinh học thuộc, tuy nhiên khi găp 1 số a nào đó (a < 100) muốn xét xem a là số nguyên tố hay hợp số ta thử a có chia hết cho 2; 3; 5; 7 hay không.

+ Nếu a chia hết cho 1 trong 4 số đó thì a là hợp số.

+ Nếu a không chia hết cho số nào đó trong 4 số trên thì a là số nguyên tố.

Với quy tắc trên trong một khoản thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì học sinh nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là nguyên tố hay không.

Hệ quả:

Nếu có số a > 1 không có một ước số nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{a}$ thì a là một nguyên tố.

(Do học sinh lớp 6 chưa học khái niệm căn bậc hai nên ta không đặt vấn đề chứng minh định lý này, chỉ giới thiệu để học sinh tham khảo.).

IV/ SỐ CÁC ƯỚC SỐ VÀ TỔNG CÁC ƯỚC SỐ CỦA MỘT SỐ

Giả sử: $A = p_1^{X1} . p_2^{X2} ......p_n^{Xn}$

Trong đó: $p_i \in P$; $x_i \in N$; $i = \overline{1, n}$

a) Số các ước số của A tính bằng công thức:

$T(A) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) .....(x_n + 1)$

Ví dụ: 30 = 2.3.5 thì T(A) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8

Thật vậy: Ư(30) ={ 1;2;3;5;6;10;15;30}

Ư(30) có 8 phần tử

Ứng dụng: Có thể không cần tìm Ư(A) vẫn biết A có bao nhiêu ước thông qua việc phân tích ra thừa số nguyên tố.

3^{100} có (100 + 1) = 101 ước

1 000 000 000 = $10^9 = 2^9.5^9$ có (9 + 1)(9+1) = 100 ước

Ý nghĩa: Khi thông báo cho học sinh cách tính số ước của một số các em có thể tin tưởng khi viết một tập hợp ước của một số và khẳng định đã đủ hay chưa.

V/ HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

1- Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất (ƯCLN) bằng 1.

a, b nguyên tố cùng nhau <=> (a,b) = 1 a,b $\in$ N

2- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau

3- Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

4- Các số a,b,c nguyên tố cùng nhau <=> (a,b,c) = 1

5- a,b,c nguyên tố sánh đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau

a,b,c nguyên tố sánh đôi <=> (a,b) = (b,c) = (c,a) = 1

VI/ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐẶC BIỆT

1) Định lý Đirichlet

Tồn tại vô số số nguyên tố p có dạng:

p = ax + b (x ∈ N, a, b là 2 số nguyên tố cùng nhau).

Việc chứng minh định lý này khá phức tạp, trừ một số trường hợp đặc biệt.

Ví dụ: Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng: 2x – 1; 3x – 1; 4x + 3; 6x + 5.....

2) Định lý Tchebycheff

Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên 2n có ít nhất một số nguyên tố (n > 2).

3) Định lý Vinogradow

Mọi số lẻ lớn hơn 3^3 là tổng của 3 số nguyên tố.

Các định lý 2 và 3 ta có thể giới thiệu cho học sinh tham khảo và sử dụng để giải một số bài tập.

B/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Sử dụng phương pháp phân tích thành thừa số

Bài 1. Tìm $n \in N^*$ để:

a) n^4+4 là số nguyên tố. b) $n^{2003}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có:

$$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Nếu n^4+4 là số nguyên tố thì $n^2-2n+2=1 \Leftrightarrow n=1$.

Thử lại: Với $n=1$ thì $n^4+4=5$ là số nguyên tố.

Vậy, với n=1 thì n^4+4 là số nguyên tố.

b) Ta có: $n^{2003}+n^{2002}+1=n^2(n^{2001}-1)+n(n^{2001}-1)+n^2+n+1$.

Với $n>1$ ta có:

$n^{2001}-1 \vdots n^3-1 \vdots n^2+n+1$ do đó: $\left(n^{2003}+n^{2002}+1\right) \vdots \left(n^2+n+1\right)$ và $n^2+n+1>1$ nên $n^{2003}+n^{2002}+1$ là hợp số.

Với n = 1 thì $n^{2003}+n^{2002}+1=3$ là số nguyên tố.

Bài 2.

a) Tìm các số nguyên số p để 2p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhên.

Lời giải

a) Giả sử $2p+1=n^3$ (với $n \in N$); n là số lẻ nên $n=2m+1$ ($m \in N$), khi đó

$$2p+1=(2m+1)^3 \Rightarrow p=m(4m^2+6m+3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại: $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3(n\in N); p\ge 2$ suy ra $n\ge 3$.

$$13p+1=n^3\Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743\Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13\Rightarrow n=3$, khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy với p = 2, p = 211 thì 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên tố x,y thỏa $x^2-2y^2=1$.

Lời giải

Giả sử x,y là các số nguyên tố thỏa: $x^2-2y^2=1$. Khi đó $x^2=2y^2+1$, suy ra x là số lẻ, đặt $x=2n+1(n\in N^*)$. Ta có:

$(2n+1)^2=2y^2+1\Rightarrow 4n^2+4n+1=2y^2+1\Rightarrow y^2=2(n^2+n)\vdots 2\Rightarrow y\vdots 2$, mà y là số nguyên tố nên suy ra y = 2.

Với y = 2, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2-2y^2=1$.

Bài 4. Tìm các số nguyên tố x,y,z thỏa $x^y+1=z$.

Lời giải

Vì x,y là các số nguyên tố nên $x\ge 2, y\ge 2$ suy ra $z\ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x = 2, khi đó $z=2^y+1$.

Nếu y lẻ thì $2^y+1\vdots 3$, suy ra $z\vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z=2^2+1=5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x=y=2; z=5$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n(n\in N^*)$ là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k\in N$.

Lời giải

Đặt $n=3^k.m$ với (m, 3)=1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)}=1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a=2^{3^k}$), suy ra

$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2,(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 6. Cho $a,b,c,d \in N^*$ thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng: $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Lời giải

Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a = ta_1, c = tc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1b = c_1d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt: $b = kc_1 \Rightarrow c_1d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó: $A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^na_1^n + k^nc_1^n + t^nc_1^n + k^na_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 7. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (n \geq 1)$.

Lời giải

Ta có:

$$p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\dfrac{n-1}{2} > 1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 8. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Lời giải

Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\dfrac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2,3,5,7\}$.

Từ * ta có ab = ap - bp $(a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+p = p^2 \\ p-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p-1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 9. Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố ($a, b, c \in N^*$). Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Lời giải

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a,b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn, vậy p = 2.

Từ đó suy ra a = b = 1; q = c + 1 và r = c + 1 nên q = r.

Bài 10.

a) Cho $2^k + 1$ là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Cho 2^k - 1 là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Lời giải

a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó k = 2^n . t, với t lẻ > 1. Vô lí với 2^k + 1 là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó 2^k - 1 = $\left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì 2^t-1 >1.

Vậy k là số nguyên tố.

Dạng 2: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện cho trước

** Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.*

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng* $4n \pm 1$.

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng* $3k \pm 1$.

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng* $6n \pm 1$.

Chứng minh:

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 2*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 4n – 1; 4n ; 4n + 1; 4n + 2 .

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và 4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đề có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 4. 4 - 1 = 15 không là số nguyên tố .

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 3*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 6n – 1; 6n ; 6n + 1; 6n + 2 ; 6n + 3

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 4n và 6n; 6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đề có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in N)$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 6. 4 + 1 = 25 không là số nguyên tố.

Ví dụ minh họa:

Bài 1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2 và p + 4 là các số nguyên tố.

Lời giải

Với p = 2 thì p + 2 = 4 và p + 4 = 6 không phải là các số nguyên tố.

Với p = 3 thì p + 2 = 5 và p + 4 = 7 là các số nguyên tố.

Với p > 3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng p = 3k + 1 hoặc p = 3k + 2

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(3k + 1) \vdots 3$ không là số nguyên tố.

Nếu p = 3k + 2 thì $p + 4 = 3k + 6 = 3(3k + 2) \vdots 3$ không là số nguyên tố;

Vậy với $p = 3$ thì p + 2 và p + 4 là số nguyên tố.

Bài 2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2; p + 6; p + 8; p + 14 đều là các số nguyên tố.

Lời giải

Trường hợp 1: p = 5k mà p nguyên tố nên p = 5, khi đó:

p + 2 = 7; p + 6 = 11; p + 8 = 13; p + 14 = 19 đều là số nguyên tố nên p = 5 thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: p = 5k + 1, khi đó: p + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 14) nên p + 14 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 1 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 3: p = 5k + 2, khi đó: p + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 10) nên p + 10 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 2 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 4: p = 5k + 3, khi đó: p + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 2) nên p + 2 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 3 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 5: p = 5k + 4, khi đó: p + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 6) nên p + 6 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 4 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Do đó p = 5 là số cần tìm.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của số nguyên tố p để: p + 10 và p + 14 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

+ Nếu p = 3 thì p + 10 = 3 + 10 = 13

và p + 14 = 3 + 14 = 17 đều là các số nguyên tố

⇨ p = 3 là giá trị cần tìm

+ Nếu p ≠ 3 => p có dạng 3k + 1 hoặc dạng 3k – 1

* Nếu p = 3k + 1 thì p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5) : 3

* Nếu p = 3k – 1 thì p + 10 = 3k + 9 = 3(k + 3) : 3

Vậy nếu p ≠ 3 thì hoặc p + 10 hoặc p + 14 là hợp số.

=> không thỏa mãn bài ra

Do đó: giá trị duy nhất cần tìm là: $p = 3$

Bài 4. Tìm k để trong 10 số tự nhiên liên tiếp: $k + 1$; $k + 2$; $k + 3$;....$k + 10$ có nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải

Giáo viên hướng dẫn học sinh rút ra nhận xét: Trong 10 số tự nhiên liên tiếp, có 5 số chẵn và 5 số lẻ (trong 5 số chẵn, có nhiều nhất là 1 số nguyên tố chẵn là 2).

Vậy: trong 10 số đó có không quá 6 số nguyên tố

+) Nếu $k = 0$, từ 1 đến 10 có 4 số nguyên tố: 2; 3; 5; 7

+) Nếu $k = 1$ từ 2 đến 11 có 5 số nguyên tố: 2; 3; 5; 7; 11

+) Nếu $k > 1$ từ 3 trở đi không có số chẵn nào là số nguyên tố. Trong 5 số lẻ liên tiếp, ít nhất có 1 số là bội số của 3 do đó, dãy sẽ có ít hơn 5 số nguyên tố.

Vậy với $k = 1$, dãy tương ứng: $k + 1$; $k + 2$, ... $k + 10$ có chứa nhiều số nguyên tố nhất (5 số nguyên tố).

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên tố p để: $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố

Giải:

Xét hai trường hợp:

+) $p \le 3 \Leftrightarrow p = 2$ hoặc $p = 3$

* Nếu $p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \notin P$

* Nếu $p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^2 + 3^2 = 17 \in P$

+) $p > 3$ ta có $2^p + p^2 = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$

vì p lẻ => $(2^p + 1) \vdots 3$

và $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) \vdots 3 \Rightarrow 2^p + p^2 \notin P$

Vậy: Có duy nhất 1 giá trị $p = 3$ thoả mãn bài ra.

Bài 7. Tìm tất cả các số nguyên tố sao cho: $p \mid 2^p + 1$

Giải:

Vì $p \in P$, $p \mid 2^p + 1 \Rightarrow p \neq 2$

Ta thấy: $2 \mid p$ vì $p \neq 2$

Theo định lý Fermatm ta có: $p \mid 2^{p-1} - 1$

Mà $p \mid 2^p + 1$ (giả thiết) $\Rightarrow p \mid 2.2^{p-1} - 2 + 3$

$\Rightarrow p \mid 2(2^{p-1} - 1) + 3$

$\Rightarrow p \mid 3$ [vì $p \mid 2(2^{p-1} - 1)$]

Vì $p \in P$ $p \mid 3 \Rightarrow p = 3$

Vậy: $p = 3$ là số nguyên tố thoả mãn tính chất $p \mid 2^p + 1$

Tóm lại:

Các bài toán thuộc dạng: Tìm số nguyên tố thoả mãn các điều kiện cho trước là loại toán không khó trong các loại bài toán về số nguyên tố. Qua loại toán này, giáo viên cần cố gắng trang bị cho học sinh những kiến thức cơ bản nhất về số nguyên tố. Đặc biệt giúp học sinh nắm vững: Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất và nhỏ nhất của tập số nguyên tố.

Dựa vào cách viết số nguyên tố dạng a.x + b, (a,b) = 1. Rèn kỹ năng xét các trường hợp có thể xảy ra, phương pháp loại trừ các trường hợp dẫn đến điều vô lý.

Qua dạng toán này, giáo viên cần giúp học sinh rèn luyện tư duy lôgic, tư duy sáng tạo, tính tích cực chủ động khi làm bài.

Dạng 3: Nhận biết số nguyên tố, sự phân bố số nguyên tố trong N

Bài 1: Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số 8p +1 và 8p-1 là 2 số nguyên tố, hỏi số thứ 3 (ngoài 2 số nguyên tố, số còn lại) là số nguyên tố hay hợp số?

Lời giải

Với p = 3 ta có 8p + 1 = 25 là hợp số, còn 8p -1 là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ ta có 8p -1, 8p, 8p + 1 là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3.

Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3,do đó 8p -1 hoặc 8p+1 có một số chia hết cho 3.

Vậy số thứ 3 ngoài hai số nguyên tố là hợp số.

Bài 2: Nếu p < 5 và 2p + 1 là các số nguyên tố thì 4p + 1 là nguyên tố hay hợp số

Lời giải

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp: 4p; 4p + 1; 4p + 2

Trong 3 số ắt có một số là bội của 3

Mà $p < 5,\ p \in \mathrm{P}$ nên p có dạng 3k + 1 hoặc 3k + 2

+) Nếu p = 3k + 1 thì 4p = 4(3k + 1) <=> 3Q + 1 = p

và 4p + 2 = 4(3k + 1) + 2 <=> p = 3.Q : 3

Mặt khác: 4p + 2 = 2(2p +1) = 3Q nên 3Q : 3

=> 2(2p + 1) : 3; (2;3) = 1 nên (2p + 1) : 3 (trái với giả thiết)

+) Nếu p có dạng 3k + 2

Khi đó 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 = 3M : 3

=> 4p + 1 là hợp số

Vậy trong 3 số ắt có một số là bội của 3.

Bài 3: Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Giải:

Chọn dãy số:

a_1 = 1998! + 2 a_1 : 2

a_2 = 1998! + 3 a_2 : 3

a_3 = 1998! + 4 a_3 : 4

....

a_{1997} = 1998! + 1998 a_{1997} : 1998

Như vậy: Dãy số a_1; a_2; a_3; ..... a_{1997} gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

Bài tập số 4: (Tổng quát bài số 3)

Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp (n > 1) không có số nào là số nguyên tố ?

Giải:

Ta chọn dãy số sau:

$a_1 = (n+1)! + 2$ $\quad$ $a_1 \vdots 2$ $\quad$ $a_1 > 2$ nên a_1 là hợp số

$a_2 = (n+1)! + 3$ $\quad$ $a_2 \vdots 3$ $\quad$ $a_2 > 3$ nên a_2 là hợp số

.... $\quad$ ....

$a_n = (n+1)! + (n+1)$ $\quad$ $a_n \vdots (n+1)$ $\quad$ $a_n > (n+1)$ nên a_n là hợp số

Dãy a_1; a_2; a_3; .....a_n ở trên sẽ gồm có n số tự nhiên liên tiếp trong đó không có số nào là số nguyên tố cả.

Tóm lại:

Qua các bài toán dạng: Nhận biết số nguyên tố, sự phân biệt số nguyên tố trong N, giáo viên cần giúp cho học sinh hướng suy nghĩ để chứng minh hoặc xem xét 1 số có phải là số nguyên tố hay không? Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết và các định lý, hệ quả đã học để loại bỏ các trường hợp mâu thuẫn. Bài tập số 3 là bài tập tổng quát về sự phân bố số nguyên tố trong N. Qua đó giáo viên cho học sinh thấy được sự phân bố số nguyên tố "càng về sau càng rời rạc". Từ bài toán này có thể phát triển thành bài toán khác giúp học sinh rèn luyện kỹ xảo chứng minh.

Dạng 4: Các bài toán chứng minh số nguyên tố

Bài 1: Chứng minh rằng: (p – 1)! chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Lời giải

+) Xét trường hợp p là hợp số:

Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các luỹ thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các luỹ thừa ấy chứa trong (p – 1)!.

Vậy: $(p-1)! \vdots p$ (điều phải chứng minh).

+) Xét trường hợp p là số nguyên tố:

Vì $p \in P$ => p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của (p –1)!

(vì p > p-1 => $(p-1)! \not\vdots\ p$ (điều phải chứng minh)

Bài 2: Cho $2^m - 1$ là số nguyên tố

Chứng minh rằng m cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử m là hợp số => m = p.q ($p, q \in N$; p, q > 1)

Khi đó: $2^m - 1 = 2^{p.q} - 1 \quad = (2^p)^q - 1$

$= (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ...+ 1)$

vì p > 1 (giả thiết) của điều giả sử => $2^p - 1 > 1$

và $(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ...+ 1) > 1$

Dẫn đến $2^m - 1$ là hợp số (trái với giả thiết $2^m - 1$ là số nguyên tố)

⇨ Điều giả sử không thể xảy ra.

Vậy m phải là số nguyên tố (điều phải chứng minh)

Bài 3: Chứng minh rằng: mọi ước nguyên tố của 1994! – 1 đều lớn hơn 1994.

Lời giải

Gọi p là ước số nguyên tố của (1994! – 1)

Giả sử p ≤1994 => 1994. 1993 ..... 3. 2. 1 : p

<=> 1994! : p

mà (1994! – 1) : p => 1 : p (vô lý)

Vậy: p không thể nhỏ hơn hoặc bằng 1994 hay p > 1994 (điều phải chứng minh).

Bài 4: Chứng minh rằng: n > 2 thì giữa n và n! có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).

Lời giải

Vì n > 2 nên k = n! – 1 > 1, do đó k có ít nhất một ước số nguyên tố p.

Ta chứng minh p > n .Thật vậy: nếu p ≤ n thì n! : p

Mà k : p => (n! – 1) : p.Do đó: 1 : p (vô lý)

Vậy: p > n=>n < p < n! – 1 < n! (Điều phải chứng minh)

Dạng 5: Có bao nhiêu số nguyên tố dạng ax + b (với x ∈ N và (a,b) = 1)

Bài 1: Chứng minh rằng: có vô số số nguyên tố có dạng: 3x – 1 (x<1)

Giải:

Giáo viên gợi ý và hướng dẫn học sinh để học sinh tự rút ra nhận xét:

Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: 3x; 3x + 1; hoặc 3x - 1

+) Những số có dạng 3x (với x>1) là hợp số

+) Xét 2 số có dạng 3x + 1: đó là số (3m + 1) và số (3n + 1)

Xét tích (3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1 = 3x + 1

Tích trên có dạng: 3x + 1

+) Lấy một số nguyên tố p có dạng 3x – 1 (với p bất kỳ ε P) ta lập tích của p với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi ta có:

M = 2.3.5.7....p – 1 = 3(2.5.7....p) – 1

M có dạng: 3x – 1

Có 2 khả năng xảy ra:

* Khả năng 1: M là số nguyên tố, đó là số nguyên tố có dạng $(3x - 1) > p$, bài toán được chứng minh.

* Khả năng 2: M là hợp số: Ta chia M cho 2, 3, 5,....,p đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước nguyên tố của M đều lớn hơn p, trong các ước này không có số nào có dạng $3x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng 3x (hợp số) hoặc $3x + 1$....

Vì nếu tất cả có dạng $3x + 1$ thì M phải có dạng $3x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó, ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x + 1$, ước này luôn lớn hơn p.

Vậy: Có vô số số nguyên tố dạng $3x - 1$.

Bài 2: Chứng minh rằng: Có vô số số nguyên tố có dạng $4x + 3$ (với $x \in \mathbb{N}$)

Nhận xét: Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng 4x hoặc $4x + 2$.

Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới 1 trong 2 dạng

$4x + 1$ hoặc $4x + 3$. Ta sẽ chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng $4x + 3$

+) Xét tích 2 số có dạng $4x + 1$ là: $4m + 1$ và $4n + 1$

Ta có: $(4m + 1)(4n + 1) = 16mn + 4m + 4n + 1$

$= 4(4mn + m + n) + 1$

$= 4x + 1$

Vậy tích của 2 số có dạng $4x + 1$ là một số cũng có dạng $4x + 1$

+) Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng $4x - 1$, ta lập tích của 4p với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi 1 khi đó ta có:

$N = 4(2.3.5.7 ..... p) - 1$ Có 2 khả năng xảy ra

**** Khả năng 1:***

N là số nguyên tố => $N = 4(2.3.5.7....p) - 1$ có dạng $4x - 1$.

Những số nguyên tố có dạng $4x - 1$ cũng chính là những số có dạng $4x + 3$ và bài toán được chứng minh.

**** Khả năng 2:***

N là hợp số: Chia N cho 2, 3, 5, ..., p đều được các số dư khác 0 => các ước nguyên tố của N đều lớn hơn p.

Các ước này không thể có dạng 4x hoặc $4x + 2$ (vì đó là hợp số). Cũng không thể toàn các ước có dạng $4x + 1$ vì như thế N phải có dạng $4x + 1$. Như vậy trong các ước nguyên tố của N có ít nhất 1 ước có dạng $4x - 1$ mà ước này hiển nhiên lớn hơn p.

Vậy: Có vô số số nguyên tố có dạng $4x - 1$ (hay có dạng $4x + 3$).

Trên đây là mộ số bài toán chứng minh đơn giản của định lý Đirielet: Có vô số số nguyên tố dạng $ax + b$ trong đó $x \in \mathbb{N}$,$(a,b) = 1$.

Mục đích của những bài tập dạng này là: Rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy sâu, cách xem xét và kết luận về một vấn đề toán học bằng cách xét hết các khả năng có thể xảy ra, dùng những vấn đề toán học đã được chứng minh hoặc đã biết để loại bỏ các khả năng không thể xảy ra và làm sáng tỏ vấn đề cần phải chứng minh.

Sau khi thành thạo dạng toán này học sinh lớp 6 hiểu được sâu sắc hơn, có khái niệm rõ ràng hơn. Thế nào là chứng minh một vấn đề toán học và có được những kỹ năng, kỹ xảo chứng minh cần thiết.

Tuy nhiên, với dạng toán này, ở trình độ lớp 6 các em chỉ giải quyết được những bài tập ở dạng đơn giản. Việc chứng các bài tập ở dạng này phức tạp hơn, các em sẽ gặp nhiều khó khăn chứ không thể dễ dàng chứng minh được. Chẳng hạn chứng minh về vô số số nguyên tố có dạng 4a + 1; 6a + 1……… phức tạp hơn nhiều.

Dạng 6: Áp dụng định lý Fermat

p là số nguyên tố và (a,p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Bài 1. Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n}+1$ để tìm các số nguyên tố với mọi n tự nhiên.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi n = 4.
2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải

1. Ta thay n= 4 vào công thức Fermat và được:

$2^{2^4}+1=65537$ là số nguyên tố.

2.Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối 6+7=13 đúng bằng tỏng ba chữ số còn lại 5+5+3=13.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2+5^2+5^2+3^2+7^2=36+25+25+9+49=144$ là số chính phương vì $144=12^2$.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2+7^2=36+49=85$. Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là $5^2+5^2+3^2=25+25+9=59$. Tổng các chữ số đó là $6+5+5+3+7=26$.

Ta nhận thấy rằng $85-59=26$. Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố 65537.

Bài 2. Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}}+19$ và $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là những hợp số.

Lời giải

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $2^{10} \equiv 1(\bmod 1) \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2(\bmod 22) \Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2, (k \in N)$.

Theo định lý Fermat:

$2^{22} \equiv 1(\bmod 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2} \equiv 4(\bmod 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n\in N^*$.

Ta chứng minh: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5 \vdots 11$ với mọi $n\geq 1$.

Bài 3. Tìm số nguyên tố p sao cho 2^p+1 chia hết cho p.

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa: $2^p+1 \vdots p$.

Theo định lý Fermat:

$2^p\equiv 2(\bmod p)\Rightarrow 2^p-2 \vdots p\Rightarrow 3=(2^p+1)-(2^p-2) \vdots p\Rightarrow p=3$.

Với p=3 ta có $2^p+1=9 \vdots 3$.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n-1$ chia hết cho p.

Lời giải

Ta có $2^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$, ta tìm $n=(p-1)$ sao cho $n.2^n\equiv 1(\bmod p)$.

Ta có: $n.2^n=m(p-1).2^{m(p-1)}(\bmod p)\Rightarrow n.2^n\equiv -m\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow m=kp-1,(k\in N^*)$.

Vậy, với $n=(kp-1)(p-1),(k\in N^*)$ thì $n.2^n-1 \vdots p$.

Bài 5. Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số 2^p-1 chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk+1$.

Lời giải

Gọi q là ước nguyên tố của 2^p-1 thì q lẻ, nên theo định lí Fermat:

$2^{q-1}-1 \vdots q\Rightarrow (2^p-1,2^{q-1}-1)=2^{(p,q-1)}-1 \vdots q\Rightarrow q-1 \vdots p$, vì nếu $(q-1,p)=1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác: q-1 chẵn suy ra $q-1 \vdots 2p\Rightarrow q=2pk+1$.

Bài 6. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\dfrac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1}\equiv 1$ (mod m).

Lời giải

Ta có: $m=\dfrac{3^p-1}{2}.\dfrac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\dfrac{3^p-1}{2},b=\dfrac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9 \vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9 \vdots 8p\Rightarrow m-1 \vdots \dfrac{9^p-9}{8} \vdots p$.

Vì $m-1 \vdots 2$ nên $m-1 \vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \dfrac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 7. Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$$2003+23k=p^n \qquad (1).$$

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,\ldots$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p=2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p=3 có $2003+23.8=3^7$

Với p=4 có $2003+23.6=2141$

Với p=2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 8. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Lời giải

Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}\ldots.,p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

. Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$7.7.7.7.7.7.7=7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6$ thỏa mãn (*).

. Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

Dạng 7. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau ƯCLN(a, b) = 1.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau ƯCLN(a, b, c) = 1.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau

ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, c) = ƯCLN(c, a) = 1.

Bài 1. Chứng minh rằng:

a)Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 ($n \in N$) là hai số nhuyên tố cùng nhau.

Lời giải

a) Gọi $d \in uc(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in uc(2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$. Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d=1.

c) Gọi $d \in ƯC(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$.

Bài 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.

a) a và a + b. b) a^2 và a + b. c) ab và a + b.

Lời giải

a) Gọi $d \in ƯC(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên $d \in ƯC(a, b)$, do đó d = 1(vì a, b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.

Vậy a^2 và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.

Vậy (ab, a + b) = 1.

Bài 3. Tìm số tự nhiên n để các số 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$9n + 24 - 3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2; 3\}.$$

Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số 9n + 4 và 3n + 4 không chia hết cho 2. Ta thấy:

9n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 9n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ,

3n + 4 là số lẻ $\Leftrightarrow$ 3n lẻ $\Leftrightarrow$ n lẻ.

Vậy điều kiện để (9n + 4, 3n + 4) = 1 là n là số lẻ.

Dạng 8. Giải phương trình nghiệm nguyên nhờ sử dụng tính chất của số nguyên tố

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các số nguyên tố của số dạng $n = a^{2^t} + b^{2^t}$.

Một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình:

** **Mệnh đề 1**. Nếu số nguyên tố* $p = 2^t k + 1$ *với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước của số* $n = a^{2^t} + b^{2^t}$ *thì p là ước số chung của a và b.*

<u>Chứng minh:</u>

+ Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số b

$\Rightarrow (a,p) = (b,p) = 1$. *Theo định lí nhỏ Fermat thì* $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$ *hay* $a^{2^t k} \equiv 1$ *(mod p).*

+ Tương tự $b^{2^t k} \equiv 1$ *(mod p) suy ra* $a^{2^t k} + b^{2^t k} \equiv 2$ *(mod p)* *

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $(a^{2^t})^k + (b^{2^t})^k = (a^{2^t} + b^{2^t}).M = n.M$ *trong đó k lẻ và M là số nguyên.*

Theo giả thiết $n \vdots p \Rightarrow (a^{2^t} + b^{2^t}) \vdots p$, *mâu thuẫn với *.*

Tương tự p không là ước của số p thì p không là ước của số a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b.

** **Mệnh đề 2**: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của* $a^2 + b^2$ *chỉ có dạng 4m + 1 (mà không có dạng 4m + 3) trong đó m là số nguyên dương.*

<u>Chứng minh:</u>

+ Xét ước số nguyên tố p = 4m + 3 = 2(2m + 1) +1. Theo mệnh đề 1 nếu p là ước số nguyên tố của n = $a^2 + b^2$ *thì p là ước số chung của a và b* $\Rightarrow p = 1$, *mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng p = 4m + 1.*

+ Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - y^3 = 7$ (1)

Lời giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$ (2)

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y = 2k + 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng 4m + 3 (vì tích các số dạng 4m + 1 lại có dạng 4k + 1). Suy ra $x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng p = 4m + 3, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Lời giải

Giả sử $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d=(x,y)$ thì $x=du, y=dv$ với $(u,v)=1$.

Theo giả thiết $x^2+y^2=k(x-y) \Leftrightarrow d(u^2+v^2)=k(u-v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì u^2+v^2 không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d=k.t$. Từ (1) có $t(u^2+v^2)=u-v$, do đó $u^2<u^2+v^2\le u-v<u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2+v^2)=5m(u-v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$$t(u^2+v^2)=5(u-v) \quad (2)$$

Từ (2) có $u^2+v^2\le 5(u-v)$

$$A=u^2+v^2-5(u-v)\le 0 \quad (3)$$

Mặt khác

$$4A=4u^2-20u+25+4v^2+20v+25-50=(2u-5)^2+(2v+5)^2-50\ge 1^2+7^2-50\ge 0 \Rightarrow A\ge 0$$

Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u-5=\pm 1$ và v = 1,

nghĩa là $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t=1 \Rightarrow d=m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x=3m \\ y=m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 3. Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng 15a + 16b và 16a -15b với a, b là các số nguyên dương nào đó.

Lời giải

Giả sử 15a + 16b $=m^2$ và 16a -15b = n^2 (1) với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó:

$$m^4+n^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=(15^2+16^2)(a^2+b^2)=481(a^2+b^2)$$

hay $m^4+n^4=13.37(a^2+b^2)$ (2)

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p=2^2k+1$ với k lẻ.

Giả sử $(m,n)=d \Rightarrow m=du, n=dv$ với (u,v) =1 thì (2) trở thành $d^4(u^4+v^4)=481(a^2+b^2)$ (3)

Vì (u,v) = 1 nên u^4+v^4 không chứa các ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của d $\Rightarrow d=481.t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy t = 1. Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4+v^4)=a^2+b^2$ (4)

Từ (1) có $m^2-n^2=31b-a$ hay $481^3(u^2-v^2)=31a-b$ (5).

Có thể chọn $u = v = 1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó a = 31b và $a^2 + b^2 = 481^3.2$. Từ đó có b = 481 và a = 31.481 suy ra m = n = 481.

Bài 4. Tìm số có 3 chữ số mà có đúng 5 ước.

Lời giải

Giả sử p và q là hai số nguyên tố khác nhau, khi đó pq có 4 ước đó là 1, p, q, pq và số p^2q có 6 ước đó là 1, p, p^2, q, pq, p^2p. Do đó số phải tìm có dạng p^n.

Vì số p^n có n + 1 ước nên muốn có đúng 5 ước thì rõ ràng n = 4.

Số p^4 là số có 3 chữ số khi p = 5.

Vậy số phải tìm là $5^4 = 625$.

Bài 5. Tìm 3 số nguyên tố biết rằng một trong ba số đó bằng hiệu các lập phương của hai số kia.

Lời giải

Gọi ba số nguyên tố đó là a, b, c. Ta có $c = a^3 - b^3$ chẳng hạn. Thế thì

$c = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Muốn c là số nguyên tố thì a - b = 1, điều này chỉ xảy ra khi các số nguyên tố là a = 3, b = 2. Suy ra: c = 27 - 8 = 19.

Vậy ba số nguyên phải tìm là 2; 3; 19.

Bài 6. Xét dãy số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;... ta lập hai dãy số 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7; 18 = 7 + 11; 24 = 11 + 13; ... và 6 = 2.3; 15 = 3.5; 35 = 5.7; 77 = 7.11; 143 = 11.13; ... Có hay không một số hạng nào đó của dãy thứ nhất bằng một số hạng nào đó của dãy thứ hai.

Lời giải

Trước hết ta nhận xét rằng:

. Ở dãy thứ nhất các số hạng theo thứ tự là tổng của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 5) đều là chẵn.

. Ở dãy thứ hai các số hạng theo thứ tự là tích của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 6) đều là lẻ.

Do đó ta có thể kết luận rằng: không có một số hạng nào của dãy thứ nhất bằng một số hạng của dãy thứ hai.

Bài 7. Tìm số nguyên tố p biết rằng p + 2 và p + 4 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Do $p \neq 1$ vì 1 không phải là số nguyên tố, nên p có thể có dạng p = 3k.

Nếu p = 3k + 1 thì p + 2 = 3k + 3 là hợp số.

Nếu p = 3k + 2 thì p + 4 = 3k + 6 cũng là hợp số.

Do đó p chỉ có thể bằng 3 và p + 2 = 3 + 2 =5 là số nguyên tố, p + 4 =3 +4 =7 là số nguyên tố.

Bài 8. Có bao nhiêu số có ba chữ số mà mỗi chữ số của nó là ước nguyên tố của chúng?

Lời giải

Các ước nguyên tố có 1 chữ số là: 2; 3; 5 và 7. Nếu số phải tìm bắt đầu bằng chữ số 2 thì nó phải chia hết cho 2 và tận cùng bằng 2.Chữ số thứ hai phải là 2, vì số 232 không chia hết cho 3, số 252 không chia hết cho 5 và số 272 không chia hết cho 7. Vậy số phải tìm là 222.

Tương tự số phải tìm mà bắt đầu bằng chữ số 5 thì đó là số 555.

Bây giờ nếu bắt đầu bằng 3 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 3, do đó chúng chỉ có thể là 3 và 3 hoặc 5 và 7.

Thử lại thấy rằng chỉ có số 333 là thích hợp.

Cuối cùng nếu bắt đầu bằng 7 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 7. Thử lại thấy rằng chỉ có hai số 777 và 735 là thích hợp.

Tóm lại có 5 số thỏa mãn bài ra là: 222; 333; 555; 735; 777.

Bài 9. Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Lời giải

Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a+n) + 10(b-n) + (c-n) = n(100a + 10b + c)$ hay

$100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$.

Từ đó ta được:

$$100a + 10b + c = \frac{89n}{n-1}.$$

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1.

Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 10. Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng 111...11?

Lời giải

Trước hết ta nhận xét rằng số có dạng 111...11 không chia hết cho 2 số nguyên tố 2 và 5.

Giả sử p là số nguyên tố khác 2 và 5. Ta hãy xét p + 1 số sau:

1, 11, 111, 1111, ...,111...11.

ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, thế thì hiệu của chúng 11...1100..0 chia hết cho p.

vậy số có dạng 111...11 có ước là tất cả số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

Dạng 9. Các bài toán liên quan đến số nguyên tố

Bài 1. Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng

Lời giải

Gọi 3 số nguyên tố phải tìm là; a, b, c ta có:

$a.b.c = 5(a+b+c) \Rightarrow abc \vdots 5$

Vì a, b, c có vai trò bình đẳng

Giả sử: $a \vdots 5$, vì $a \in P \Rightarrow a = 5$

Khi đó: $5bc = 5(5+b+c) \Leftrightarrow 5+b+c = bc \Leftrightarrow bc-b-c+1 = 6$

$\Leftrightarrow b(c-1) - (c-1) = 6$

$(c-1)(b-1) = 6$

Do vậy: $b-1 = 1 \Rightarrow b = 2$

Và $c-1 = 6$ và $c = 7$

$b-1 = 2 \Rightarrow b = 3$ (loại vì $c = 4 \notin P$)

và $c-1 = 3$ và $c = 4$

Vai trò a, b, c, bình đẳng

Vậy bộ số (a ;b ;c) cần tìm là (2 ;5 ;7)

Bài 2. Tìm hai số nguyên tố p,q sao cho $p^2 = 8q + 1$

Lời giải

Ta có: $p^2 = 8q + 1 \Rightarrow 8q = p^2 - 1 \Leftrightarrow 8q = (p+1)(p-1)$ (1)

Do $p^2 = 8q + 1$ lẻ $\Rightarrow p^2$ lẻ $\Rightarrow p$ lẻ

Đặt $p = 2k + 1$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $8q = 2k(2k + 2)$

$2q = k(k + 1)$ (3)

Nếu $q = 2 \Rightarrow 4 = k(k+1) \Rightarrow$ không tìm được k

Vậy $q \neq 2$, vì $q \in P$, $q \neq 2 \Rightarrow (2,q) = 1$

Từ (3) ta có: $k = 2$ và $q = k + 1 \Rightarrow k = 2$ và $q = 3$

Thay kết quả trên vào (2) ta có:

$p = 2.2 + 1 = 5$

Hoặc

$q = k$ và $2 = k + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ k = 1 \end{cases}$ (không thoả mãn)

Vậy cặp số (q,p) là (5;3) là cặp số cần tìm.

Tóm lại:

Ngoài các dạng bài tập cơ bản về số nguyên tố. Phần số nguyên tố còn có nhiều bài tập ở các dạng khác mà khi giải chúng học sinh cần phải vận dụng một cách linh hoạt các kiến thức có liên quan: ước số, bội số, chia hết và vẫn phải lần lượt xét các khả năng có thể xẩy ra. Khi giảng dạy giáo viên cần giúp học sinh giải quyết theo từng dạng bài để củng cố và khắc sâu kỹ năng giải từng loại bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

c) p +2, p + 6, p +8, p + 12, p + 14.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì n^3+2 cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a,k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

Bài 10. Cho $n \in N^*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) A = $2^{2^{2n+1}}+3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}}+7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}}+13$.

Bài 11. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

Bài 12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

Bài 13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Bài 14. Tìm $n \in N^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 15. Tìm các số $x, y \in N^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

Bài 16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ $(n \ge 1)$.

Bài 17. Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với n>1.

Bài 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b)+b-a=y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

Bài 19. Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + y^2 = 585$

b) $x^2 + y^2 = 1210$.

Bài 20. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) 7n + 10 và 5n + 7 ;

b) 2n + 3 và 4n + 8.

Bài 21. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và a - b (a > b) ;

b) $a^2 + b^2$ và ab.

Bài 22. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

Bài 23. Tìm số tự nhiên n, sao cho:

a) 4n - 5 chia hết cho 13 ;

b) 5n + 1 chia hết cho 7 ;

c) 25n + 3 chia hết cho 53.

Bài 24. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) 4n + 3 và 2n + 3 ;

b) 7n + 13 và 2n + 4 ;

c) 9n + 24 và 3n + 4 ;

d) 18n + 3 và 21n + 7

Bài 25. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để n + 15 và n + 72 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 26. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Đồng Nai năm học 2018-2019)*

Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Bài 27. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr = p + q + r + 160$.

Bài 28. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Bài 29. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố *p, q* sao cho $8q + 1 = p^2$.

Bài 30. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thái Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho $\dfrac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 31. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Cho số nguyên tố p $(p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Bài 32. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2017-2018)*

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Bài 33. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2016-2017)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

Bài 34. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1.$$

Bài 35. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2015-2016)*

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3 + 1 = y^3$.

Bài 36. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Vĩnh Long năm học 2015-2016)*

Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

Bài 37. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hà Nội năm học 2015-2016)*

Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

Bài 38. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của n + 1 hợp số.

Bài 39. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2014-2015)*

Tìm tất cả các số nguyên tố *p, q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn :

$$\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}.$$

Bài 40. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2014-2015)*

Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 41. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Cẩm Thủy năm học 2011-2012)*

Tìm số tự nhiên n để $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố

Bài 42. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Tiền Hải năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}} \text{ là số hữu tỉ và } a^2+b^2+c^2 \text{ là số nguyên tố}$$

Bài 43. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Gia Lộc năm học 2015-2016)*

Tìm số nguyên tố k để k^2+4 và k^2+16 đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 44. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Lục Nam năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100

Bài 45. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Kim Thành năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-1 \vdots 24$

Bài 46. *(Trích đề chọn học sinh giỏi lớp 9 Amsterdam năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Bài 47. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Hải Phòng năm học 2019-2020)*

Tìm các số nguyên tố *p, q* thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p

Bài 48. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Quảng Bình năm học 2019-2020)*

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2018-2019)*

Tìm các số nguyên dương *a, b* nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}=\dfrac{9}{41}$.

Bài 50. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2015-2016)*

Cho dãy số tự nhiên 2; 6; 30; 210; ... được xác định như sau: số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên $(k = 1; 2; 3; ...)$. Biết rằng có hai số hạng của dãy số đó có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Bài 51. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2018-2019)*

Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương

Bài 52. *(Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

Bài 53. *(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Dương năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n, k để $n^8 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố

Bài 54. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vĩnh Long năm học 2018-2019)*

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $P = -x^4 + x^2 + 14x + 49$ là số nguyên tố

Bài 55. *(Trích đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm học 2015-2016)*

Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn n^2+4 và n^2+16 là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Bài 56. *(Trích đề vào 10 Chuyên Amsterdam năm học 2014-2015)*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1) \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1 = 2x(x+2) \\ p^2-1 = 2y(y+2) \end{cases}$

Bài 57. *(Trích đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm học 2014-2015)*

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Bài 58. *(Trích đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm học 2014-2015)*

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. *(Trích đề HSG lớp 8 Gia Viễn năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$

Bài 60. *(Trích đề HSG lớp 8 Thanh Chương năm học 2012-2013)*

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Bài 61. *(Trích đề HSG lớp 8 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 62. *(Trích đề HSG lớp 8 Trực Ninh năm học 2017-2018)*

Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Bài 63. *(Trích đề HSG lớp 8)*

Cho số nguyên tố p > 3. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. *(Trích đề HSG lớp 7 Triệu Sơn 2016-2017)*

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.

Bài 65. *(Trích đề HSG lớp 6 Hoằng Hóa 2018-2019)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p+q$ và $pq+11$ đều là số nguyên tố.

Bài 66. *(Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô 2018-2019)*

Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab}$; $\overline{cd}$ cũng là các sô snguyeen tố và $b^2=\overline{cd}+b-c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

Bài 67. *(Trích đề HSG lớp 6 TP Bắc Ninh 2018-2019)*

Cho các số $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ là các số nguyên tố

Bài 68. *(Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình 2018-2019)*

Giả sử p và p^2+2 là các số nguyên tố. Chứng tỏ p^3+p^2+1 cũng là số nguyên tố.

Bài 69. *(Trích đề HSG lớp 6 Nghĩa Đàn 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2-y^2=45$.

Bài 70. *(Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh 2018-2019)*

1) Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.
2) Tìm các số x, y nguyên tố để $x^2+23=y^3$.

Bài 71. *(Trích đề HSG lớp 6 Nông Cống 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a>b>0)$, biết $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương

Bài 72. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Bài 74. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2-2q^2=1$.

Bài 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3+\frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 77. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^q+q^p=r$

Bài 78. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn các điều kiện sau:

$$5\le p<q<r; 49\le 2p^2-r^2; 2q^2-r^2\le 193$$

Bài 79. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$20abc<30\left(ab+bc+ca\right)<21abc$$

Bài 80. Tìm các số nguyến tố p, q và số nguyên x thỏa mãn $x^5+px+3q=0$

Bài 81.Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Bài 82. Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{\left(x+1\right)\left(2x+1\right)}{2012}$ là một số chính phương thì x là hợp số.

Bài 83. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Đặt $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3$ với n là một số tự nhiên.

Bài 84. Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a, b, c, a+b+c, a+b-c, a+c-b, b+c-a$ trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể nhận là bao nhiêu.

Bài 85. Cho số nguyên tố p. Giả sử x và y là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2+py^2}{xy}=p+1$

Bài 86. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2016 viết được thành $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2016 bằng số 2017.

Bài 87. Tìm tất cả số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Bài 88. Cho số tự nhiên $n\ge 2$, xét các số $a_1;a_2;...;a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1;p_2;...;p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1-a_2|=p_2|a_2-a_3|=...=p_n|a_n-a_1|$. Chứng minh rằng $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 89. Tồn tại hay không số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$.

Bài 90.Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mỗi số nguyên tố p đó luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Bài 91. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3+8n^2+1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 92. Cho p là một số nguyên tố. Tìm các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương.

Bài 93. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$.

Bài 94. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95. Tìm các số nguyên không âm a,b sao cho $a^2-b^2-5a+3b+4$ là số nguyên tố.

Bài 96. Cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a là số nguyên dương. Biết $f(5)-f(4)=2012$. Chứng minh rằng $f(7)-f(2)$ là hợp số.

Bài 97. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5)-f(3)=2010$. Chứng minh rằng $f(7)-f(1)$ là hợp số.

Bài 98. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m;p;q)$ sao cho p, q là số nguyên tố và $2^m.p^2+1=q^5$.

Bài 99. Tìm sáu số nguyên tố $p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6$ thỏa mãn $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^3+p_5^2=p_6^2$.

Bài 100. Cho số nguyên tố p dạng $4k+3$. Tồn tại hay không số nguyên a nào thỏa điều kiện $(a^2+1)\vdots p$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 $(k\in N)$.

c) Đáp số: p = 5. Xét p dưới các dạng : p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2,

p = 5k + 3, p = 5k + 4 $(k\in N)$.

Bài 2. n = 3.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)\vdots 3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $(p-1)(p+1)\vdots 24$.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r ($k, r\in N$, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r ($k,r\in N, 0 < r < 30$). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p = 1010...101 = \dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9. Tất cả đều là hợp số.

a) $A = \underbrace{11...1}_{2001} = \underbrace{1+1+...+1}_{2001} \vdots 3$.

b) $B = \underbrace{11...1}_{2000} \vdots 11$.

c) $C = 1010101 \vdots 101$.

d) $D = 1112111 = 1111000 + 1111 \vdots 1111$.

e) $E \vdots 3$ vì $1! + 2! = 3 \vdots 3$, còn $3! + 4! + ... + 100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

Bài 10. Chứng minh $A \vdots 7; B \vdots 11; C \vdots 29$.

Bài 11. 240 = 2^4. 3. 5.

Bài 12. n = 6k + 4, k$\in$N.

Bài 13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

Bài 14. $n^3 - n^2 + n - 1 = (n-1)(n^2+1)$, n =2.

Bài 15.

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$x = y = 1$ thì $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố.

Bài 16. $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n \geq 4$ thì n +3 >6 và n^2 + 2 > 17.

n + 3 và n^2 +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

Bài 17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 (k$\in$N*), ta có:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k+1} = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2.n^2.2^{2k+1} \\ &= (n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}) \\ &= \left[(n-2^k)^2 + 2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2 + 2^{2k}\right] \end{aligned}$$

Bài 18. Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b) > 0$, suy ra b < x <a. Đặt $a - x = m, x - b = n$ thì

m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn - m - n = y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi $(2) \Leftrightarrow (4m-1)(4n-1) = 4y^2 + 1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1) \vdots p$ hay $4y^2 \equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow \left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Bài 20. a) Gọi $d \in ƯC(7n+10, 5n+7)$ thì

$5(7n+10) - 7(5n+7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1.$

b) Gọi d là ƯCLN (2n + 3, 4n + 8).

(4n + 8) - 2(2n + 3) $\vdots$ d $\Rightarrow 2 \vdots d$.

Do d là ước của số lẻ 2n + 3 nên d = 1.

Bài 21.

a) Gọi d $\in ƯC(b, a-b)$ thì $a - b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a,b) = 1$

nên d = 1.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 22.

Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 23.a)

$$\begin{aligned} &4n - 5 \vdots 13 \\ &\Rightarrow 4n - 5 + 13 \vdots 13 \\ &\Rightarrow 4n + 8 \vdots 13 \\ &\Rightarrow 4(n+2) \vdots 13 \end{aligned}$$

Do (4, 13) = 1 nên n + 2 $\vdots$ 13.

Đáp số: n = 13k - 2 (k$\in N^*$).

b) Đáp số: n = 7k - 3 (k$\in$N).

c) $25n + 3 \vdots 53 \Rightarrow 25n + 3 - 53 \vdots 53$.

Đáp số: n = 53k + 2 (k $\in$ N).

Bài 24.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử 18n + 3 và 21n + 7 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì $6(21n+7)-7(18n+3)\vdots d \Rightarrow 21\vdots d$.

Vậy $d \in \{3;7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 21n + 7 không chia hết cho 3. Như vậy (18n +3, 21n + 7) $\neq 1 \Leftrightarrow 18n+3\vdots 7$ (còn 21n + 7 luôn chia hết cho 7) $\Leftrightarrow 18n+3-21\vdots 7 \Leftrightarrow 18(n-1)\vdots 7 \Leftrightarrow n-1\vdots 7$.

Vậy nếu n $\neq 7k+1 (k \in N)$ thì $(18n+3, 21n+7)=1$.

Bài 25.

Bài toán không yêu cầu tính mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+15, n+72)=1$. Do đó ngoài cách giải trên có thể giải như sau:

Gọi d $\in$ ƯC$(n+15, n+72)$ thì $57\vdots d$. Do $n+15\vdots d, 57\vdots d$ nên nếu tồn tại n sao cho n + 15 = 57k + 1 thì d = 1. Nếu ta chọn n = 57k - 14 (k = 1, 2, 3, ….) thì (n + 15, n + 72) = 1, rõ ràng có vô số giá trị n.

Bài 26.

Dùng hàm Ơle:

Phân tích số m ra thừa số nguyên tố: $m = p_1^x.p_2^y.p_3^z...$

Số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m là

$$\varphi(m) = m.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)....$$

Ta có: $999 = 3^3.37 \Rightarrow \varphi(999) = 999.\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{37}\right) = 648$

Có 648 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 999.

Vây có 649 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 1000.

Cách khác:

Gọi A là số các số nguyên dương không vượt quá 1000. Suy ra A = 1000

B là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không nguyên tố cùng nhau với 999.

C là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Ta có: $999 = 3^3.37$

B = (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3) – (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3)

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{3}+1=333$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 là: $\frac{999-37}{37}+1=27$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho cả 37 và 3 (chia hết cho 111) là: $\frac{999-111}{111}+1=9$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3 là: $27-9=18$

Suy ra B = 333+ 18 = 351. Vậy C= A – B = 1000 – 351 = 649

Bài 27.

1. Không mất tổng quát giả sử $p\le q\le r$.

Với $p=2$: $2qr=q+r+162\Leftrightarrow 4qr-2q-2r=324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1)-(2r-1)=325\Leftrightarrow(2q-1)(2r-1)=325=5^2\cdot 13.$

$3\le 2q-1\le 2r-1\Rightarrow 9\le(2q-1)^2\le(2r-1)(2q-1)\Leftrightarrow 9\le(2q-1)^2\le 325\Leftrightarrow 3\le 2q-1\le 18.$

Do $2q-1$ là ước của $5^2\cdot 13$ nên $2q-1\in\{5;13\}$.

Nếu $2q-1=5\Leftrightarrow q=3\Rightarrow r=33$ (loại).

Nếu $2q-1=13\Leftrightarrow q=7\Rightarrow r=13$ (thỏa mãn).

$pqr=p+q+r+160\Leftrightarrow p(qr-1)-q-r=160$

$\Leftrightarrow(qr-1)(p-1)+qr-1-q-r=160\Leftrightarrow(qr-1)(p-1)+q(r-1)-(r-1)-2=160$

$\Leftrightarrow(qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)=162.$

Nếu p lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow(qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)\vdots 4$ mà 162 không chia hết cho $4\Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

Bài 28.

Đặt $p^3-4p+9=t^2(t\in N)$

Biến đổi thành $p(p^2-4)=(t-3)(t+3)\quad(1)\Rightarrow p\mid(t-3)\vee p\mid(t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p\mid t-3$

Đặt $t-3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p(p^2-4)=pk(pk+6)\Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4(6k+4)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $(k^2)^2<k^4+24k+16<(k^2+4)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=(k^2+1)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6) \Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 29.

Ta có p^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét p^2 chia cho 3 dư 0, vì p là số nguyên tố nên $p=3$, suy ra $q=1$, vô lí.

Xét p^2 chia cho 3 dư 1, suy ra $8q$ chia hết cho 3 mà $(8;3)=1$ nên $q=3 \Rightarrow p=5$ thỏa mãn.

Vậy $p=5;q=3$ thỏa mãn bài.

Bài 30.

Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$

$\Rightarrow mx-my=(mz-ny)\sqrt{2019}\ \Rightarrow\begin{cases}nx-my=0\\ mz-my=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}\Rightarrow xz=y^2$

$x^2+y^2+z^2=\left(x+z\right)^2-2xz+y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x+y+z\right)\left(x+z-y\right)$.

Vì $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x+y+z\\ x-y+z=1\end{cases}$.

Từ đó suy ra $x=y=z=1$.

Thử lại $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận $\left(x;y;z\right)=\left(1;1;1\right)$.

Bài 31.

Ta có: $p^2+a^2=b^2\Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2\left(p+a+1\right)=2\left(p+\dfrac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=\left(p+1\right)^2$ là số chính phương.

Bài 32.

Do $p-5\,\vdots\,8$ nên $p=8k+5\ (k\in\mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2}\vdots\left(ax^2-by^2\right)\vdots\,p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}\vdots\,p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots\left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4}\vdots\,p$ (*)

Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x,y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv1(\text{mod }p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv1(\text{mod }p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\bmod p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Bài 33.

Ta có :

$p^{2016}-1=(p^4)^{504}-1^{504}=(p^4-1).A=(p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A\in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1)\vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k\pm 1;\quad 5k\pm 2$

- Nếu $p=5k\pm 1$ thì $p^2=25k^2\pm 10k+1=5n+1$

- Nếu $p=5k\pm 2$ thì $p^2=25k^2\pm 20k+4=5l-1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4-1=5q\vdots 5$ (4) $((n,l,q\in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016}-1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

Bài 34.

Không mất tính tổng quát giả sử $m<n<p<q$.

Nếu $m\ge 3$ thì $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3.5.7.11}<1.$

Vậy $m=2$ và (1) trở thành $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}=\frac{1}{2}$ (2).

Nếu $n\ge 5$ ta có $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2.5.7.11}<\frac{1}{2}.$

Vậy $n=3$ và (2) trở thành $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{6pq}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow(p-6)(q-6)=37$

suy ra $p=7$ và $q=43$.

Vậy $(m;n;p;q)$ là $(2;3;7;43)$ và các hoán vị của nó.

Bài 35.

Nếu $x=0\Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Nếu $y=0\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x\ne 0; y\ne 0$ phương trình đã cho có dạng

$4.54x^3(54x^3+1)=4.54x^3.y^3\Leftrightarrow(4.27x^3+1)^2=(6xy)^3+1$

Đặt $4.27x^3=a;6xy=b$ ta được phương trình

$\left(a+1\right)^2=\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)\quad (*)$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1>0$. Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1=b\left(b+1\right)-2\left(b+1\right)+3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$$

Mặt khác $\left(a+1\right)^2=\left(4.27x^3+1\right)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow \left(b+1;b^2-b+1\right)=1$

Từ $(*)$ nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases}\quad \left(m;n\in\mathbb{N}^*;m\ge 2;m^2\ge 4\right)$

Ta có $n^2=\left(m^2-1\right)^2-\left(m^2-1\right)+1$

$\Leftrightarrow n^2=\left(m^2-1\right)^2-\left(m^2-2\right)\quad (1); n^2=\left(m^2-2\right)^2+\left(m^2-1\right)\quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(m^2-2\right)^2<n^2<\left(m^2-1\right)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$.

Bài 36.

Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k\in N^*$.

+ Nếu $q=3k+1$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q=3k+2$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q=6\left(k+1\right)\vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Bài 37.

Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x=2$ ta được $2^x+x^2=2^2+2^2=8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x=3$ ta được $2^x+x^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x>3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x=2k+1\left(k\in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x=2^{2k+1}=2.4^k=2\left(3+1\right)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy 2^x+x^2 luôn chia hết cho 3. Do đó 2^x+x^2 luôn là hợp số khi $x>3$.

Vậy $x=3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ $x=2;3$. Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.

Bài 38.

Giả sử $2015 = a_1 + a_2 + ... + a_n$, trong đó $a_1; a_2; ...; a_n$ là các hợp số

Theo bài ra ta có

+ Mỗi số hạng $a_1; a_2; ...; a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)

+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)

Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.

Nếu có hợp số lẻ $a_1 \geq 15 \Rightarrow a_1 = 9 - (a_1 - 9)$ với $(a_1 - 9) \geq 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)

Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)

Do đó: $2015 = 9 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ với $a_2; a_3; ..; a_n$ là các hợp số chẵn

$\Rightarrow a_2 + a_3 + ... + a_n = 2006 \quad (3)$

$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.

Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2 \geq 8 \Rightarrow a_2 = 4 - (a_2 - 4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)

Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4

Giả sử $a_2 = 6 \Rightarrow a_3 = a_4 = ...a_n = 4 \Rightarrow (n-2).4 = 2000 \Rightarrow n = 502$

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 502$

Bài 39.

Nếu $p = q$ thì $p = \dfrac{2(m^2+1)}{m+1} = 2m - 2 + \dfrac{4}{m+1}$.

Do $m \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4 \vdots (m+1) \Rightarrow m = 0; m = 1; m = 3 \Rightarrow p = 2;\ p = 5$.

Nếu $p \neq q$ thì pq và $p + q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p + q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1 \Rightarrow \left[(m+1)(m-1)\right] \vdots r \Rightarrow (m^2-1) \vdots r$

$\Rightarrow \left[(m^2+1) - (m^2-1)\right] \vdots r \Rightarrow 2 \vdots r \Rightarrow r = 1$ hoặc $r = 2$.

+) $r = 1$ suy ra $p + q = m + 1,\ pq = m^2 + 1 \Rightarrow p, q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do

$\Delta = -3m^2 + 2m - 3 = -(m-1)^2 - (2m^2 + 2) < 0$

+) $r = 2$ suy ra $2pq = m^2 + 1$ và $2(p+q) = m + 1 \Rightarrow p,\ q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do

$\Delta = -7m^2 + 2m - 7 = -(m-1)^2 - (6m^2 + 6) < 0$.

Vậy bộ các số nguyên tố $(p; q)$ cần tìm là $(p;q) = (2;2);\ (p;q) = (5;5)$.

Bài 40.

+) Nếu p=7k+i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2

Xét $p>2 \Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$

Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT

+) Xét p=2 thì $3p^2+4$=16 (loại)

+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p = 7 là nguyên tố, có:

$2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy p = 7

Bài 41.

Xét n = 0 thì A = 1 không phải số nguyên tố

n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố

Xét n > 1 ta có:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1=n^2\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]+n\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^3-1\right)$ suy ra $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Tương tự: $\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Do đó với n > 1 thì A chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$ nên A là hợp số.

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm.

Bài 42.

Đặt $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}=\dfrac{x}{y}$ $(x, y \in Z, xy \neq 0) \Rightarrow ay - bx = (by - cx)\sqrt{2}$ (*)

Vì a, b, c, x, y $\in$ Z $\Rightarrow$ ay – bx $\in$ Z $\Rightarrow$ (by – cx)$\sqrt{2}$ $\in$ Z

Mà $\sqrt{2}$ $\in$ I nên từ (*) $\Rightarrow \begin{cases} ay-bx=0 \\ by-cx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay=bx \\ cx=by \end{cases}$

$\Rightarrow$ acxy = b^2xy $\Rightarrow$ ac = b^2 (vì xy ≠ 0)

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac + b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+c+b)$

Vì $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố và a + c – b < a + c + b

$\Rightarrow$ a + b – c = 1 $\Rightarrow$ $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$ (1)

Mà a, b, c nguyên dương nên $a \leq a^2$, $b \leq b^2$, $c \leq c^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = b = c = 1, thử lại: Thỏa mãn, kết luận

Bài 43.

Vì k là số nguyên tố suy ra $k^2+4>5;\ k^2+16>5$

-Xét k = 5n $(n\in N)$ mà k là số nguyên tố nên k = 5.

Khi đó k² + 4 = 29; k²+16 = 41 đều là các số nguyên tố.

-Xét k = 5n+1 $(n\in N)\Rightarrow k^2=25n^2+10n+1\Rightarrow k^2+4\vdots 5$

$\Rightarrow k^2+4$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 2 $(n\in N)\Rightarrow k^2=25n^2=20n+4\Rightarrow k^2+16\vdots 5$

$\Rightarrow k^2+16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n +3 $(n\in N)\Rightarrow k^2=25n^2+30n+9\Rightarrow k^2+16\vdots 5$

$\Rightarrow k^2+16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n+4 $(n\in N)\Rightarrow k^2=25n^2+40n+16\Rightarrow k^2+4\vdots 5$

$\Rightarrow k^2+4$ không là số nguyên tố.

Vậy để k^2+4 và k^2+16 là các số nguyên tố thì k = 5.

Bài 44.

Ta có $p^{20}-1=\left(p^4-1\right)\left(p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1\right)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2+1$ và p^2-1 là các số chẵn

$\Rightarrow p^4-1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20}-1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được p^4-1 chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20}-1$ chia hết cho 25.

Mà $(4;25)=1$ nên $p^{20}-1$. (đpcm)

Bài 45.

Ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra $(p-1)(p+1)\vdots 8$ (1) .

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1;\ p;\ p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3;8)=1$ và $3.8=24$ ta suy ra $p^2-1\vdots 24$ (đpcm).

Bài 46.

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.

Trường hợp 1: $p=2$

$\Rightarrow p(p+3)=2(2+3)=2.5=10$

$\Rightarrow 10+q(q+3)=n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà $p\,;\,q\,;\,n$ là các số nguyên dương

$\Rightarrow n>q\ge 2.$

$\Rightarrow n+q+3>2+2+3=7$

Mà $10=1.10=2.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p=3$

$\Rightarrow p(p+3)=3.(3+3)=3.6=18$

$\Rightarrow 18+q(q+3)=n(n+3) \Leftrightarrow 18=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà $p\,;\,q\,;\,n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n>q\ge 3.$

$\Rightarrow n+q+3>3+3+3=9$

Mà $18=1.18=2.9=3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$

$$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3 \text{ dư } 1.$$

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$

$$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3 \text{ dư } 1.$$

Trở lại bài toán chính:

Vì $q \geq p > 3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3.$

$$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3 \text{ dư } 2.$$

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n \nmid 3$) hoặc $n(n+3) \vdots 3$ nếu $n \vdots 3$.

$$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3) \neq n(n+3)$$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47.

$p^2q+p \vdots p^2+q \Rightarrow q(p^2+q)-(p^2q+p)=q^2-p \vdots p^2+q.$

$pq^2+q \vdots q^2-p \Rightarrow (pq^2+q)-p(q^2-p)=p^2+q \vdots q^2-p.$

$q^2-p=-(p^2+q) \Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0 (VN).$

$q^2-p=p^2+q \Leftrightarrow (q+p)(q-p-1)=0 \Leftrightarrow q-p-1=0 \Leftrightarrow q=p+1.$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p=2, q=3$ (thỏa mãn bài toán)

Bài 48.

Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó $\Delta=b^2-4ac=m^2, (m \in \mathbb{N})$.

Suy ra $b^2>m^2$ hay $b>m$. (1)

Ta có $4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac$

$$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$$

$$=(20a+b+m)(20a+b-m)$$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m) \vdots \overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m) \vdots \overline{abc}$, suy ra $20a+b+m \geq \overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m \geq 100a+10b+c>100a+10b$

Do đó

$20a+2b>100a+10b \Leftrightarrow 2(10a+b)>10(10a+b) \Leftrightarrow 2>10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49.

Ta có: $\frac{9}{41}=\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{2}{a+b}\Rightarrow a+b<10,(a+b)\vdots 9\Rightarrow\begin{cases}a+b=9\\a^2+b^2=41\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(4;5),(5;4)$

Bài 50.

Xét dãy số có dạng 2; 2.3; 2.3.5; ...

Giả sử hai số cần chọn là $a=2.3.5...p_n$; $b=2.3.5...p_m$ với p_n; p_m $(n<m)$ là các số nguyên tố thứ n và thứ m.

Ta có $b-a=2.3.5...p_m-2.3.5...p_n=30000\Leftrightarrow 2.3.5.p_n(p_{n+1}.p_{n+2}...p_m-1)=2.3.5.1000$

Ta thấy $2.3.5.1000$ tồn tại ước của 3 nên a và b có chữa số nguyên tố 3 nên $p_n\ge 3$ và 1000 không có ước nguyên tố khác 2 và 5 nên a không có ước khác 2 và 5 nên $p_n\le 5$. Từ đó ta được

+ Nếu $p_n=3$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=10000$, không tồn tại p_m thỏa mãn

+ Nếu $p_n=5$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m=1001=7.11.13\Rightarrow p_m=13$, từ đó ta được

$$a=2.3.5=30;\ b=2.3.5.7.11.13=30030$$

Bài 51.

$n^3-1=(n-1).(n^2+n+1)\vdots p$

$(p-1)\vdots n\Rightarrow p-1\ge n\Rightarrow p\ge n+1$

Vì $p\ge n+1\Rightarrow(n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1)\vdots p\Leftrightarrow(n^2+n+1)\vdots p$

Đặt : $p-1=kn,\quad k\ge 1\Rightarrow p=kn+1\quad(*)$

$\Rightarrow(n^2+n+1)\vdots(kn+1)\Rightarrow kn+1\le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn\le n^2+n\Leftrightarrow k\le n+1$

$k(n^2+n+1)-n(kn+1)\vdots(kn+1)$

$\Rightarrow[(k-1)n+k]\vdots(kn+1)$

$k\ge 1\Rightarrow(k-1)n+k>0$

$\Rightarrow(k-1)n+k\ge kn+1$

$\Rightarrow k\ge n+1$

$\Rightarrow k=n+1\Rightarrow p=kn+1=n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Bài 52.

Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b\in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b\ge 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k\in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a\ge 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Bài 53.

Ta có:

$$n^8+4^{2k-1}=n^8+\left(2^{2k-1}\right)^2=\left(n^2\right)^4+2.2^{k-1}n^2+\left(2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}-2^{k-1}.n\right)\left(n^2+2^{2k-1}+2^{k-1}.n\right)$$

Do n,k là các số tự nhiên và n^8+4^{2k+1} là một số nguyên tố nên

$n^8+4^{2k+1}=\left(n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n\right)\left(n^2+2^{2k+1}+2^{k+1}.n\right)$

$\Rightarrow n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n=1$

$\Leftrightarrow n^2-2.2^k.n+2.\left(2^k\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \left(n-2^k\right)^2+\left(2^k\right)^2=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n-2^k=0\\2^k=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\n=1\end{cases}\Rightarrow n^8+4^{2k+1}=1+2+2=5\\ \begin{cases}n-2^k=1\\2^k=0\end{cases}(VN)\\ \begin{cases}n-2^k=-1\\2^k=0\end{cases}(VN)\end{array}\right.$$

Vậy $n=1,k=0$ là các giá trị cần tìm.

Bài 54.

$P=\left(7+x+x^2\right)\left(7+x-x^2\right)$

Ta có $7+x+x^2>1$

Vì P là số nguyên tố nên $7+x-x^2=1\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\quad\text{(L)}\end{array}\right.$

Vậy $x=3\Rightarrow P=19$ (thỏa mãn).

Bài 55.

Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1\Rightarrow n^2+4=5k+5\,\vdots\,5$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

nên n^2+4 không là số nguyên tố.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4\Rightarrow n^2+16=5k+20\,\vdots\,5$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2\,\vdots\,5$ hay n chia hết cho 5.

Nhận xét. Bài toán áp dụng tính chất chia hết, chia có dư của một số chính phương khi chia cho 5; tính chất số nguyên tố, hợp số,…

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ tồn tại số dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Chứng minh:
  + $m=5k\Rightarrow m^2=25k^2$ chia 5 dư 0 (đúng).
  + $m=5k+1\Rightarrow m^2=25k^2+10k+1$ chia 5 dư 1 (đúng).
  + $m=5k+2\Rightarrow m^2=25k^2+20k+4$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+3\Rightarrow m^2=25k^2+30k+9$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+4\Rightarrow m^2=25k^2+40k+16$ chia 5 dư 1 (đúng).
- Áp dụng tính chất chia hết, chia có dư vào bài toán; "Số nguyên tố" là số chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

+ n chia 5 dư 1 thì $\left(n^2+4\right)\vdots 5$ nên $\left(n^2+4\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).

+ n chia 5 dư 4 thì $\left(n^2+16\right)\vdots 5$ nên $\left(n^2+16\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).

+ Do đó nếu $\left(n^2+4\right)$ và $\left(n^2+16\right)$ là số nguyên tố thì chỉ còn tồn tại trường hợp n^2 chia hết cho 5. Khi đó n chia hết cho 5.

Bài 56.

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

⇒ n chỉ có thể có dạng 10k ± 1 và 10k ± 3 với k ∈ ℕ.

Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Do n lẻ nên n – 1 ⋮ 2; n + 1 ⋮ 2 và n^2 + 1 ⋮ 2 ⇒ n^4 – 1 ⋮ 8. (1)

• Nếu n = 10k ± 1 ⇒ $n^2 \equiv (\pm1)^2 \equiv 1$ (mod 10) ⇒ n^2 – 1 ⋮ 10 ⇒ n^4 – 1 ⋮ 5 (2)

Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra n^4 – 1 ⋮ 40

• Nếu n = 10k ± 3 ⇒ $n^2 \equiv (\pm3)2 = 9$ (mod 10) ⇒ n^2 + 1 ⋮ 10 ⇒ n^4 – 1 ⋮ 5 (3)

Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra n^4 – 1⋮ 40

Vậy trong mọi trường hợp ta có n^4 – 1 ⋮ 40

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được

$p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

⇒ 2(y – x)(y + x + 2) ⋮ p. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• y – x ⋮ p ⇒ y – x = kp (k ∈ ℕ*)

Khi đó từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(x + y + 2) ⇒ kp – k = $2k^2$(x + y + 2) ⇒ y – x – k = $2k^2$(x + y + 2)

(loại vì x + y + 2 > y – x – k > 0 ; $2k^2$> 1 ⇒ $2k^2$(x + y + 2) > y – x – k)

• y + x + 2 ⋮ p ⇒ x + y + 2 = kp (k ∈ ℕ*)

Từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(y – x) ⇒ kp – k = $2k^2$(y – x) ⇒ x + y + 2 – k = $2k^2$(y – x) (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ x + y = $2k^2$(y – x) + k – 2 ≥ 8(y – x) (vì y – x > 0)

⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x

Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)

(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))

⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

Bài 57. a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} => \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} => c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ ab ⋮ (a + b) ⇒ a ⋮ (a + b) hoặc b ⋮ (a + b)
Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.
Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ c(a+b)=ab=>ca+cb=ab=>ca+ab=2ab-ab=>a(b+c)=b(2a-c)
⇒ a(b + c) ⋮ b (**)
Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1
Do đó từ (**) suy ra a ⋮ b.
Chứng minh tương tự ta có b(a + c) = a(2b – c) ⇒ b ⋮ a
Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c
Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)
Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 58. Ta có

$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2xd+d^2+ab-cd$

$\Leftrightarrow ab-cd=(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(*)$

Nếu ab-cd = 0: Do a + b + c + d > 0 => a + b – c – d = 0 => a + b + c + d = 2(c + d) là hợp số do c + d ∈ ℕ* và c + d > 1

Nếu ab -cd $\neq 0$:Từ (*) ⇒ ab – cd ⋮ (a + b + c + d).

$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Rightarrow 3(ab-cd)+(a^2-2ab+b^2)=c^2-2cd+d^2$

$\Rightarrow 3(ab-cd)=(c-d)^2-(a-b)^2=(c-d+a-b)(c-d-a+b)\neq 0$

⇒ (c – d + a – b)(c – d – a + b) ⋮ (a + b + c + d)
Giả sử a + b + c + d là số nguyên tố thì ta có
c – d + a – b ⋮ a + b + c + d hoặc c – d – a + b ⋮ a + b + c + d
Điều này mâu thuẫn do –(a + b + c + d) < c – d + a – b < a + b + c + d ;
–(a + b + c + d) < c – d – a + b < a + b + c + d và (c – d + a – b)(c – d – a + b) ≠ 0
Vậy a + b + c + d là hợp số.

Bài 59.

Biến đổi được $p=\left(n^2+1\right)\left(n-1\right)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề bài vì $p=\left(2^2+1\right)\left(2-1\right)=5$

Nếu $n>3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1>1$ và $n^2+1>n-1>1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

Bài 60.

Ta có: $n^3+n+2=n^3+1+n+1=\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)+\left(n+1\right)=\left(n+1\right)\left(n^2-n+2\right)$

Do $\forall n\in N^*$ nên $n+1>1$ và $n^2-n+2>1$. Vậy n^3+n+2 là hợp số

Bài 61.

Ta có: $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{c}\Leftrightarrow(a-c)(b^2-ac)=0\Rightarrow b^2=ac$

Mà

$a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$

Ta thấy $a^2+b^2+c^2>3$ do đó nếu $a^2+b^2+c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1)a+c-b=1;a+c+b=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=1,b=\pm1\qquad(ktm)$

$2)a+c+b=1,a+c-b=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=1,b=\pm1\qquad(ktm)$

$3)a+c+b=-1,a+c-b=-(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=-1,b=\pm1\qquad(ktm)$

$4)a+c-b=-1,a+c+b=-(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=-1,b=\pm1\qquad(ktm)$

Bài 62.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p=3k+1;p=3k-1$ với $k>1$

+ Nếu $p=3k+1$ thì $2p+1=6k+3=3(2k+1)$

Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p=3k-1,k>1$ thì $4p+1=12k-3=3.(4k-1)$

Do $k>1$ nên $4k-1>3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

Bài 63.

Do p là số nguyên tố và p > 3 nên p không chia hết cho 3. (*)

p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.

Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n. Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = $90 \,\vdots\, 3$ nên $p^n \,\vdots\, 3$

Điều này mâu thuẫn (*).

Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64.

Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: p = 42k + r (0 < r < 42, k, r tự nhiên)

Hay p = 2.3.7k + r.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

=> r là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và r < 42

Học sinh chỉ ra được r = 25

Vậy hợp số r = 25

Bài 65.

Ta có: $p,\ q$ là số nguyên tố nên $pq+11$ là số nguyên tố lớn hơn 11

$\Rightarrow pq+11$ là số lẻ suy ra pq là số chẵn.

Do $7p+q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p và q không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p=2$ thì $7p+q=14+q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu q chia hết cho 3, do q là số nguyên tố nên $q=3$.

$7p+q=17$; $pq+11=17$ (T/m)

+) Nếu q chia cho 3 dư 1 thì $14+q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+q$ là hợp số

+) Nếu q chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq+11=2q+11$ chia hết cho 3

$\Rightarrow pq+11$ là hợp số.

*) TH2: $q=2$ thì $7p+q=7p+2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p+q=23; pq+11=17$

(Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên 2p chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow pq+11=2p+11$ chia hết cho 3 nên $pq+11$ là hợp số.

Vậy: $p=2,\ q=3$ hoặc $p=3,\ q=2$.

Bài 66.

Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên b,d lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2=\overline{cd}+b-c \Leftrightarrow b^2-b=9c+d \Leftrightarrow b(b-1)=9c+d$

Nếu $b=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=3$ nên $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; \mathrm{d}=6$ (loại)

Nếu $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Leftrightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1;2;7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$

Bài 67.

Trong 3 số $a,\ b,\ c$ có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.
Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.
Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c + 1$ và $r = c + 1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 68.

+) Với $p=2$ thì $p^2+2=8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p=3$ thì $p^2+2=11$ và $p^3+p^2+1=37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p>3 \Rightarrow p=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}, k\ge 2)$

$\Rightarrow p^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1)\ \vdots\ 3$ nên p^2+2 là hợp số.

Vậy chỉ có $p=3$ thì p^2+2 và p^3+p^2+1 đều là số nguyên tố.

Bài 69.

Ta có: $x^2=45+y^2$.

Ta thấy $x^2>45$ và x là số nguyên tố nên x phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra x^2 là số lẻ.

Từ đó suy ra y^2 là số chẵn, mà y là số nguyên tố. Suy ra $y=2$; $x=7$

Vậy $x=7$ và $y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 70. 1) Đặt $d=UCLN(2n+1, 10n+7)$

Suy ra $2n+1 \vdots d$. Vì vậy $5(2n+1) \vdots d$.

Mà $10n+7 \vdots d$ nên $10n+7-5(2n+1) \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

Do đó $d=2$ hoặc $d=1$.

Nếu $d=2$ thì $2n+1 \vdots 2$ (vô lý).

$\Rightarrow d=1$.

$1=UCLN(2n+1, 10n+7)$

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

2)

- Nếu là số nguyên tố lẻ thì $y^3=x^2+23$ là số chẵn. Vậy $y^3=2$ (loại).
- Nếu $x=2$ thì $y^3=2^2+23=27$. Vậy $y=3$.

Bài 71.

$\Rightarrow \overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)$

$\Rightarrow \overline{ab}-\overline{ba}=3^2(a-b)$

Để $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương khi $a-b$ là số chính phương
Do a, b là các chữ số và $0<a,b\le 9 \Rightarrow 1\le a-b\le 8$

=> $(a-b)$ là số chính phương khi $(a-b)\in\{1,4\}$

+Nếu $a-b=1\Rightarrow \overline{ab}\in\{21,32,43,54,65,76,87,98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ => $\overline{ab}=43$

+Nếu $a-b=4\Rightarrow \overline{ab}\in\{51,62,73,84,95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ => $\overline{ab}=73$

Vậy $\overline{ab}\in\{43;73\}$

Bài 72. Vì p là số nguyên tố do đó ta được $4p^2+1>5$ và $6p^2+1>5$

Đặt $x=4p^2+1=5p^2-(p-1)(p+1)$; $y=6p^2+1\Rightarrow 4y=25p^2-(p-2)(p+2)$

Khi đó

- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5

Suy ra x chia hết cho 5 mà $x>5$ nên x không là số nguyên tố.

- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5

Suy ra 4y chia hết cho 5 mà $(4,5)=1$ nên y chia hết cho 5 mà $y>5$

Do đó y không là số nguyên tố

Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố nên $p=5$.

Thử với $p=5$ thì $x=101$; $y=151$ là các số nguyên tố

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. C

Xét ba số tự nhiên liên tiếp là $2^n-1;2^n;2^n+1$.

Trưng ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3.

Do $n>2$ nên $2^n-1>3$, mà theo giả thiết thì 2^n-1 là số nguyên tố, do đó 2^n-1 không chia hết cho 2. Lại có 2^n không chia hết cho 3. Do đó suy ra 2^n+1 chia hết cho 3.

Mà do $n>2$ nên $2^n+1>3$. Từ đó ta được 2^n+1 là hợp số.

Bài 74.

Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Suy ra ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p-1)p(p+1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3.

Để ý là $(3;8)=1$ nên ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2-1;r^2-1;s^2-1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2-q^2+r^2-s^2=(p^2-1)-(q^2-1)+(r^2-1)-(s^2-1)$.

Do đó ta được $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75.

Từ $p^2-2q^2=1$ ta được $p^2=2q^2+1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p=2k+1$ với $k\in N^*$.

Khi đó ta được $(2k+1)^2=2q^2+1\Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2q^2+1\Leftrightarrow 2k(k+1)=q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q=2$.

Thay vào $p^2-2q^2=1$ ta suy ra được $p=3$.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)=(3;2)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

Bài 76.

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$ suy ra $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2: Nếu $p=4k+1$, khi đó ta được $p^3+\dfrac{p-1}{2}=(4k+1)^3+2k$ là số lẻ nên

$p^3+\dfrac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

- Trường hợp 3: Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3+\dfrac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3+\dfrac{p-1}{2}=x(x+1)\Leftrightarrow 2p(2p^2+1)=(2x+1)^2+1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2+1\,\vdots\, p$ vô lí vì $p=4k+3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 77.

Do p và q là các số nguyên tố nên $p;q \ge 2$, do đó suy ra $r \ge 3$, mà r là số nguyên tố nên r là số lẻ.

Từ đó suy ra p^q và q^p khác tính chẵn lẻ nên p và q khác tính chẵn lẻ.

Như vậy trong hai số p, q có một số chẵn, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là q.

Khi đó $q = 2$ nên ta được $p^2 + 2^p = r$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p = 3$, khi đó ta có $3^2 + 2^3 = r$ hay $r = 17$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p > 3$, do p là số nguyên tố nên có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với k là số

nguyen dương.

Từ đó suy ra p^2 chia 3 dư 1 hay $p^2 = 3n + 1\left(n \in N^*\right)$.

Lại có p là số lẻ nên $2^p = \left(3 - 1\right)^p = 3m - 1\left(m \in N^*\right)$.

Từ đó ta được $p^2 + 2^p = 3n + 1 + 3m - 1 = 3\left(m + n\right) \vdots 3$ nên là hợp số. Do đó trường hợp này loại.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $\left(p;q;r\right) = \left(2;3;17\right), \left(3;2;17\right)$.

Bài 78.

Từ $49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$ ta có $2q^2 - 193 \le r^2 \le 2p^2 - 49$, do đó $q^2 - p^2 \le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5 \le p < q < r$ ta được $r \ge 11$, do đó $2p^2 \ge 49 + 121 = 170$ hay $p \ge 11$.

Vì $\left(q - p\right)\left(q + p\right) \le 72$ nên $q - p = 2$ hoặc $q - p \ge 4$. Xét hai trường hợp sau:

- Với $q - p = 2$ và $q + p \le 36$, khi đó ta được $p = 11; q = 13$ hoặc $p = 17; q = 19$.

+ Nếu $p = 11; q = 13$ thì $145 \le r^2 \le 193$, suy ra $r = 13 = q$ (loại)

+ Nếu $p = 17; q = 19$ thì $529 \le r^2 \le 529$, suy ra $r = 23$ (nhận).

- Với $q - p \ge 4$ và $q + p \le 18$, không tồn tại vì $p \ge 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p = 17; q = 19; r = 23$.

Bài 79.

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$.

Suy ra $\frac{2}{3}<\frac{3}{c}\Rightarrow 2c<9$, do đó $c\in\{2;3\}$

- Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$

Do đó $b\in\{7;11\}$

+ Với $b=7$, khi đó từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42}<\frac{1}{a}<\frac{2}{35}\Rightarrow a\in\{19;23;29;31;37;41\}$

+ Với $b=11$ từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66}<\frac{1}{a}<\frac{6}{55}\Rightarrow a=13$, do $a>b$

- Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<6\Rightarrow b=5$ (do $b>c$)

Thay $b=5$ vào $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}$ ta được $6<a<\frac{15}{2}\Rightarrow a=7$.

Vậy có các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a;b;c)$ thoả mãn là:

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 80.

Ta có $x^5+px+3q=0\Leftrightarrow x\left(x^4+p\right)=-3q$.

Vì q là số nguyên tố và x là số nguyên nên từ phương trình trên suy ra $x\in\{-1;-3;-q;-3q\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x=-1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1+p=3q$. Do q là số nguyên tố nên

- Khi $q=2$ thì ta được $p=5$
- Khi $q>2$ thì $3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn, do đó $p=2$ nên $q=1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x=-3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81=q$, do đó p là số nguyên tố chẵn và q là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p=2;q=83$.

+ Nếu $x=-q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+p^4=3$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+q^4>3$.

+ Nếu $x = -3q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p + 81p^4 = 1$. Trường hợp này không xảy ra do p và q là số nguyên tố nên $p + 81q^4 > 1$.

Vậy các bộ số $(x; p; q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-1; 5; 2), (-3; 2; 83)$.

Nhận xét: Từ phương trình $x(x^4 + p) = -3q$ ta suy ra được x chia hết cho 3 hoặc $x^4 + p$ chia hết cho 3. Đến đây ta xét các trường hợp như trên. Tuy nhiên với cách làm này việc lý luận sẽ phức tạp hơn.

Bài 81.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2} = x^2$ và $\frac{p^2+1}{2} = y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p + 1 = 2x^2 & (1) \\ p^2 + 1 = 2y^2 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p(p-1) = 2(y+x)(y-x)\ (3)$

Suy ra ta được $2(y+x)(y-x) \vdots p\ (4)$.

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x > 1 >$ Ta có $p + 1 = 2x^2 = x^2 + x^2 > x + 1 \Rightarrow p > x$.

Từ (2) ta lại có $y > 1$ nên $p^2 + 1 = 2y^2 = y^2 + y^2 > y^2 + 1 \Rightarrow p > y$.

Từ (3) ta suy ra được $y > x$. Từ đó ta được $0 < y - x < p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x = y \vdots p$.

Mà ta lại có $0 < x + y < 2p$ nên ta được $x + y = p$. Thay vào (30 ta được $p - 1 = 2(y - x)$.

Từ đó suy ra $y - x = \frac{p+1}{2}$ nên ta được $x = \frac{p+1}{4}; y = \frac{3p-1}{4}$.

Thay $x = \frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p + 1 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow p = 7$.

Thay $p = 7$ vào (2) ta được $7^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow y = 5$.

Vậy $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p:

Với p chẵn không xẩy ra, với $p = 4k + 1$ khi đó ta được $\frac{p^2+1}{2} = \frac{(4k \pm 1)^2 + 1}{2} = 8k^2 \pm 4k + 1$.

Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2 \pm 4k + 1$ là các số chính phương.

Bài 82.

Giả sử tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q để $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = q^2$ hay $(x+1)(2x+1) = 2012q^2$.

Vì 2012 chia hết cho 4 nên $(x+1)(2x+1) \vdots 4$. Mà $2x+1$ là số lẻ nên $x+1 \vdots 4$.

Từ đó ta được $x = 4k - 1$ với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình trên ta được $4k(8k-1) = 2012q^2 \Leftrightarrow k(8k-1) = 503q^2$.

Để ý là $(k, 8k-1) = 1$ và 503 là số nguyên tố. Nên tồn tại các số nguyên dương a và b sao

cho $q = ab$ và $(a, b) = 1$. Từ đó ta có các hệ $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm vì b^2 chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4.

+ Với $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$. Khi đó ta được $x = 4k - 1 = 4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$.

Nếu $a = 1$ thì $x = 3$, khi đó ta được $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = \frac{7}{503}$ không phải là số nhính phương.

Nếu $a \geq 2$ khi đó $x = (2a-1)(2a+1)$ là một hợp số. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 83.

Đặt $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p = 2$, khi đó ta được $n = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p > 2$, khi đó ta có $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)$.

Từ đó ta được $n+1 \vdots p$ hoặc $n^2-n+1 \vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n+1 \vdots p$ thì ta được $n+1 \ge p$. Từ đó ta được $2\left(n^2-n+1\right) \ge n^2+\left(n-1\right)^2+1 > n > p-1$.

Từ đó ta được $p\left(p-1\right) < 2\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2-n+1 \vdots p$, khi đó ta đặt $n^2-n+1 = kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p\left(p-1\right) = 2\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ ta được $p = 2\left(n+1\right)k+1$.

Từ đó suy ra $n^2-n+1 = 2\left(n+1\right)k^2+k$ hay $n^2-\left(2k^2+1\right)n-\left(2k^2+k-1\right) = 0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2+1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta = \left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $\left(2k^2+1\right)^2 < \Delta < \left(2k^2+4\right)^2$. Do đó $\Delta = \left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right) = \left(2k^2+3\right)^2$.

Từ đó ta tính được $k=3$ suy ra $n=20$ nên $p=127$. Thử lại ta thấy $p=127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p=2$ và $p=127$.

Bài 84.

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

Khi đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$.

Do đó ta được $d = \left(a+b+c\right)-\left(a+b-c\right) = 2c$, nên để có d lán nhất ta cần chọn được số nguyên tố c lớn nhất.

Chú ý rằng a, b, c là các số nguyên tố lẻ vì nếu $a=2$ thì khi đó $b+c-a$ là số chẵn lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Do đó cả bảy số nguyên tố đã cho đều là số lẻ.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $a+b=800$, khi đó số nguyên tố $a+b-c \ge 3$ nên ta được $c \le 797$. Vì 797 là số nguyên tố và ta cần lấy c lớn nhất nên ta chọn $c=797$.

Khi đó ta được $a+b+c=1597$ và $a+b-c=3$. Vì 1597 và 3 đều là các số nguyên tố nên ta cần chọn các số nguyên tố a, b sao cho $797+a-b$ và $797+b-a$ là các số nguyên tố.

La chọn $a = 13$ thì ta được $b = 787$ và $797 + a - b = 23; 797 + b - a = 1571$ đều là các số nguyên tố.

Lúc đó ta được $d = 2c = 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 2: Nếu $b + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $b = 3$.

Mà ta lại có $a < b$ nên $a = 2$ không thỏa mãn. Do đó $c < 797$ nên $d < 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 3: Nếu $a + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $a = 3$.

Từ đó ta được $a + b - c \geq 5$ nên suy ra $b \geq 799$, do đó $b > c$ không thỏa mãn.

Do đó $c < 797$ nên $d = 2c < 1594$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là 1594 với các số nguyên tố được chọn trong trường hợp 1 và $a + b = 800$.

Bài 85.

Gọi $UCLN(x, y) = d\left(d \in N^*\right)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da; y = db$ và $(a, b) = 1$.

Ta có $\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2a^2 + pd^2a^2}{d^2ab} = \frac{a^2 + pb^2}{ab} \in N^*$.

Từ đó ta được $a^2 + pb^2 \vdots ab \Rightarrow a^2 + pb^2 \vdots b \Rightarrow a^2 \vdots b$.

Do $(a, b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $a^2 + p \vdots a \Rightarrow p \vdots a$.

Do p là số nguyên tố nên ta được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d$ nên suy ra $\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + pd^2}{d^2} = p + 1$.
- Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp; y = d$ nên suy ra $\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2p^2 + d^2p}{d^2p} = p + 1$.

Vậy ta luôn có $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Bài 86.

Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A > 3)$ viết được thành tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A = 4a + r$, trong đó a là số nguyên dương và $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

• Trường hợp 1: Nếu $r = 0$, khi đó $A = 4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n = a$

• Trường hợp 2: Nếu $r = 1$, khi đó $A = 4a + 1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a - 1) = 4a + 1 + 4 > 4a + 1 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 1 = 4(a - 2) + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

• Trường hợp 3: Nếu $r = 2$, khi đó $A = 4a + 2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n \le a$.

Xét $n = a$ ta có $A = 4a + 2 = 4(a - 1) + 6$ nên số n lớn nhất là $n = a$

• Trường hợp 4: Nếu $r = 3$, khi đó $A = 4a + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$.

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a - 1) = 4a + 3 + 2 > 4a + 3 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 3 = 4(a - 3) + 15 = 4(a - 3) + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A > 3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số.

Với số nguyên dương $A > 3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a - 1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.

Áp dụng: Với $A = 2016 = 4.504$ thì ta được n lớn nhất là 504 và $A = 2016 = 504.4$.

Với $A = 2017 = 4.504 + 1$ thì ta được n lớn nhất là 503 và $A = 2017 = 502.4 + 9$.

Bài 87.

Giả sử p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Ta có $p,q,r\ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $r=2$, khi đó phương trình trên trở thành $5(p+1)(q+2)=8pq$.

Do $(5,8)=1$ và 5 là ước nguyên tố của pq nên ta được $p=5$ hoặc $q=5$.

+ Với $p=5$, khi đó ta được $5(5+1)(q+2)=8.5q \Rightarrow q=6$ không phải là số nguyên tố.

+ Với $q=5$, khi đó ta được $5(p+1)(5+2)=8.5p \Rightarrow p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r=3$, khi đó phương trình trên trở thành $(p+1)(q+2)=2pq$

Từ đó ta được $(p-1)(q-2)=4=1.4=2.2$. Do p và q là các số nguyên tố nên

$q-2\ne 2; q-2\ne 4$.

Nên từ đó ta suy ra được $\begin{cases} p-1=4 \\ q-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r>3$, khi đó ta có $4pqr=(p+1)(q+2)(r+3)<2r(p+1)(p+2)$

Hay ta được $2pq<(p+1)(q+2)\Rightarrow (p-1)(q-2)<4$.

Do đó $p-1<4; q-2<4$ và p là số nguyên tố nên ta được $p=2$ hoặc $p=3$.

+ Với $p=2$ thì từ phương trình đã cho ta được $3(q+2)(r+3)=8qr$.

Do $(3,8)=1$ nên 3 phải là ước nguyên tố của qr, mà q và r là các số nguyên tố, lại có $r>3$ nên suy ra được $q=3$. Từ đó ta được $r=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3$ thì từ phương trình đã cho ta được $(q+2)(r+3)=3qr$

Hay ta được $2qr-3q-2r=6 \Leftrightarrow (q-1)(2r-3)=9=1.9=3.3$.

Lại có $r>3$ nên $2r-3>3$, do đó từ phương trình trên ta được $\begin{cases} 2r-3=9 \\ q-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=6 \\ q=2 \end{cases}$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(7;5;2),(5;3;3),(2;3;5)$.

Bài 88.

Đặt $p_1|a_1-a_2|=p_2|a_2-a_3|=...=p_n|a_n-a_1|=k$ với k là một số không âm.

Khi đó ta được $\left|a_1-a_2\right|=\frac{k}{p_1}$; $\left|a_2-a_3\right|=\frac{k}{p_2}$;...; $\left|a_n-a_1\right|=\frac{k}{p_n}$

Hay $a_1-a_2=\frac{kt_1}{p_1}$; $a_2-a_3=\frac{kt_2}{p_2}$;...; $a_n-a_1=\frac{kt_n}{p_n}$ với $t_1;t_2;...;t_n$ nhận giá trị là 1 hoặc -1.

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$

Đặt $M=\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n} \Rightarrow M-\frac{t_1}{p_1}=\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}=\frac{Q}{p_2.p_3...p_n}$. Suy ra Q là một số nguyên. Từ đó ta được $p_2.p_3...p_n\left(Mp_1-t_1\right)=Qp_1$. Hay ta được

$p_1\left(p_2.p_3...p_n.M-Q\right)=t_1.p_2.p_3...p_n$

Nếu M là số nguyên thì từ đẳng thức trên suy ra vế trái chia hết cho p_1 còn vế phải không chia hết cho p_1, điều này vô lí. Do đó M không thể là số nguyên, suy ra $M\neq 0$.

Do đó từ $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$ ta suy ra được $k=0$

Điều này dẫn đến $p_1\left|a_1-a_2\right|=p_2\left|a_2-a_3\right|=...=p_n\left|a_n-a_1\right|=0$

Hay suy ra được $\left|a_1-a_2\right|=\left|a_2-a_3\right|=...=\left|a_n-a_1\right|=0$ nên $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 89.

Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c=2$, khi đó $a^b+2011=2$, điều này vô lí do a, b lớn hơn 1.
- Nếu $c>3$, khi đó do c là số nguyên tố nên c là số lẻ.

Từ $a^b+2011=c$ ta suy ra được a^b+2011 là số lẻ nên a^b là số chẵn hay a là số chẵn.

Do a là số nguyên tố nên ta được $a=2$. Như vậy 2^b+2011 là số nguyên tố. Ta xét các khả năng sau

+ Khi $b=2$ thì ta được $2^b+2011=2015$ là một hợp số.

+ Khi $b\geq 3$, do b là số nguyên tố nên b là số lẻ. Ta đặt $b=2k+1, k\in N^*$.

Khi đó ta có $2^b+2011=2^{2k+1}+2011=2.2^{2k}+2011=2.4^k+2011=2.\left(3+1\right)^k+2011$

Dễ thấy $2(3+1)^k$ chia 3 dư 2 và 2011 chia 3 dư 2 nên ta được $2.(3+1)^k+2011$ chia hết cho 3.

Do đó 2^b+2011 chia hết cho 3. Suy ra 2^b+2011 là một hợp số.

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, c để $a^b+2011=c$.

Bài 90. Ta xét các trường hợp sau

- Với $p=2$, khi đó tồn tại $n=1$ và $x=y=1$ để $2^1=1^3+1^3$.
- Với $p=3$, khi đó tồn tại $n=2$ và $x=1;y=2$ để $3^2=1^3+2^3$.
- Với $p>3$, khi đó giả sử tồn tại các số nguyên dương n, x, y với n bé nhất thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Do $p>3$ nên suy ra $(x;y)\neq(1;1)$, do đó $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy>1$ và $x+y>1$.

Ta có $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ nên $(x^3+y^3)\vdots(x+y)$ và $(x^3+y^3)\vdots(x^2-xy+y^2)$.

Do đó suy ra $(x+y)$ và (x^2-xy+y^2) phải cùng chia hết cho p.

Suy ra $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$ chia hết cho p. Do p là số nguyên tố và $p^n=x^3+y^3$ nên ta được x và y chia hết cho p.

Từ đó suy ra $n>3$, khi đó chia cả hai vế của $p^n=x^3+y^3$ cho p^3 ta được

$$p^{n-3}=\left(\frac{x}{p}\right)^3+\left(\frac{y}{p}\right)^3.$$

Từ đó suy ra tồn tại số tự các số nguyên dương $n-3;\frac{x}{p};\frac{y}{p}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Tuy nhiên điều này lại mâ thuẫn với việc nhọn n nhỏ nhất.

Vậy với $p>3$ thì không tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Do đó các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p=2$ và $p=3$.

Bài 91. Đặt $A=\frac{n^3+8n^2+1}{3n}=\frac{n^2}{3}+\frac{8n}{3}+\frac{1}{3n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $n=3k$ với k là một số nguyên dương, khi đó ta được

$$A=3k^3+8k+\frac{1}{9k}$$

Dễ thấy $3k^2+8k<A<3k^2+8k+1$ nên suy ra $\left[A\right]=\left[3k^2+8k+\frac{1}{9k}\right]=3k^2+8k=k\left(3k+8\right)$.

Để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k=1$, khi đó $\left[A\right]=11$ là đó nguyên tố. Từ đó ta tìm được $n=3$

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+1$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+2k+\frac{1}{3}+8k+\frac{8}{3}+\frac{1}{9k+3}=3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}$$

Dễ thấy $3k^2+10k+3<A<3k^2+10k+3+1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}\right]=3k^2+10k+3=\left(k+3\right)\left(3k+1\right).$$

Như vậy để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k+3=1$ hoặc $3k+1=1$, từ đó ta tìm được $k=1$.

Khi đó $\left[A\right]=3$ là một số nguyên tố và $n=1$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+2$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+4k+\frac{4}{3}+8k+\frac{16}{3}+\frac{1}{9k+6}=3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}$$

Ta thấy $0<\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}<1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}\right]=3k^2+12k+6=3\left(k^2+4k+2\right)$$

Suy ra với mọi k thì $\left[A\right]$ luôn là số nguyên tố.

Vậy để $\left[A\right]$ là số nguyên tố thì $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 92. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $p=2$, khi đó ta có $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k^2-2k}=\sqrt{\left(k^2-2k+1\right)-1}=\sqrt{\left(k-1\right)^2-1}$

Để $\sqrt{\left(k^2-2k+1\right)-1}$ thì $\left(k-1\right)^2-1$ là một số chính phương.

Như vậy $\left(k-1\right)^2-1$ và $\left(k-1\right)^2$ là hai số tự nhiên liên tiếp. Từ đó ta được $\left(k-1\right)^2-1=0$ và $\left(k-1\right)^2=1$. Trường hợp này loại.

+ Nếu $p>2$, khi đó p là số nguyên tố lẻ. Nếu k chia hết cho p, khi đó tồn tại số nguyên dương n để $k=np$. Từ đó ta được $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{np^2\left(n-1\right)}$, như vậy để $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương thì $p^2n(n-1)$ phải là số chính phương, mà $(n,n-1)=1$ nên n và $n-1$ phải là hai số chính phương. Điều này không thể xảy ra. Do đó k không thể chia hết cho p.

Từ đó ta được k và p là hai số nguyên tố cùng nhau, điều này dẫn đến k và $k-p$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Từ đó để $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k(k-p)}$ là một số nguyên dương thì k và $k-p$ phải là hai số chính phương. Đặt $k=m^2$ và $k-p=n^2$ với $m,n\in N^*$

Khi đó ta được $p=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Do p là số nguyên tố nên ta được $p=m+n$ và $m-n=1$. Do đó ta tính được $k=\frac{(p+1)^2}{4}$.

Vậy với $k=\frac{(p+1)^2}{4}$ và p là số nguyên tố lẻ thì $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương.

Bài 93. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$. Khi đó ta được $p^3-q^5>0$.

Từ đó ta được $p^3>q^5\ge 2^5$ nên ta được $p>3$.

Suy ra p không chia hết cho 3. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $q=3$, khi đó $p^3-3^5=(p+3)^2 \Leftrightarrow p^3-p^2-6p-252=0 \Leftrightarrow (p-7)(p^2+6p+36)=0$.

Do $p^2+6p+36>0$ nên ta được $p-7=0 \Rightarrow p=7$.

- Nếu $q\ne 3$ khi đó $p=3m\pm 1; q=3n\pm 1$ với m, n là các số nguyên dương.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n+1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n-1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 2 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n+1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 1 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n-1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(3;7)$.

Bài 94.

Ta có $2a^2b = a(a+b)^2 - a(a^2+b^2)$.

Do p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ nên p^4 cũng là ước của $2a^2b$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên suy ra p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 không vượt quá 2, khi đó a^2 không chia hết cho p^4. Do đó b phải chứa p^2, điều này có nghĩa là b chia hết cho p^2, từ đó ta được b^2 chia hết cho p^4. Từ đó suy ra a^2+b^2 không chia hết cho p^4, điều này mâu thuẫn vơi giả thiết.

Do vậy a phải chia hết cho p^2 nên a^2 không chia hết cho p^4. Từ a^2+b^2 không chia hết cho p^4 ta suy ra được b^2 chia hết p^4, do đó b chia hết cho p^2

Dẫn đến $a+b$ chia hết cho p^2 nên suy ra $a(a+b)$ chia hết cho p^4.

Vậy p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95.

Đặt $A = a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$, dễ thấy A là số chẵn. Do đó A là số nguyên tố khi và chỉ khi $A = 2,$ hay $A = a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4 = 2$, suy ra $(a+b-4)(a-b-1) = 2$.

Ta xét các trường hợp sau :

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=1 \\ a-b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=4; b=1$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=2 \\ a-b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=4;\ b=2$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-1 \\ a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2$.

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-2 \\ a-b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=1$

Bài 96.

Ta có $f(5) - f(4) = 2012 \Leftrightarrow 61a + 9b + c = 2012$

$$f(7)-f(2)=(343a+49b+7c+d)-(8a+4b+2c+d)=335a+45b+5c$$
$$=305a+45b+5c+30a=2012+30a=2(1006+15a)$$

Vì a là số nguyên nên ta được $f(7)-f(2)$ chia hết cho 2 và $1006+15a$ khác 1

Do đó $f(7)-f(2)$ là hợp số

Bài 97.

Theo bài ra f(x) có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a nguyên dương.

Ta có $2010=f(5)-f(3)=(5^3-3^3)a+(5^2-3^2)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$$\Rightarrow 16b+2c=(2010-98a)$$

Lại có

$$f(7)-f(1)=(7^3-1^3)a+(7^2-1^2)b+(7-1)c=342a+48b+6c=342a+3(16b+2c)$$
$$=342a+3(2010-98a)=48a+6030=3(16a+2010)$$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$. Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số

Bài 98. Biến đổi $2^m.p^2+1=q^5$ thành $2^m.p^2=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Do $q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ nên $q-1=2^m.p^k$ với $k=0;1;2$

+ Nếu $k=0$ khi đó ta có $q-1=2^m$ Từ đó ta được

$$p^2=\frac{(2^m+1)^5-1}{2^m}=2^{4m}+5.2^{3m}+10.2^{2m}+10.2^m+5$$

Nếu $m>1$ thì $p^2\equiv 5(\bmod 8)$ vô lí nên suy ra $m=1$, từ đó ta được $p=11;q=3$.

+ Nếu $k=1$ khi đó ta có $q-1=2^m.p$ do đó ta được $p=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Do đó để p là số nguyên tố thì $q-1=1\Rightarrow q=2$, từ đó suy ra $q=31$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $2^m.31^2+1=2^5$, phương trình không có m nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $k=2$ khi đó ta có $q-1=2^m.p^2$ do đó ta được $1=q^4+q^3+q^2+q+1$ điều này vô lí do q là số nguyên tố

Vậy bộ $(m;p;q)=(1;11;3)$ là bộ duy nhất cần tìm.

Bài 99. Từ giả thiết suy ra $p_6 > 2 \Rightarrow p_6^2 \equiv 1(\bmod 8)$.

Mà $p_i^2 \equiv 1;4(\bmod 8)$ nên trong 5 số $p_i\left(i=\overline{1;5}\right)$ có bốn số bằng 2, một số lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử k là số số chẵn trong dãy p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Suy ra

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2 = 4k + A \text{ (A là tổng bình phương của 5-k số lẻ)}$$

$$\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right) \equiv 4k + (5-k).1(\bmod 8) \equiv 3k+5(\bmod 8)$$

Mà $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right) \equiv 1(\bmod 8)$ nên $3k+4 \vdots 8 \Rightarrow k=4$.

Nhận xét được chứng minh xong.

Bây giờ ta giả sử $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2;\ p_5 > 2$

Từ đó suy ra $p_6^2 - p_5^2 = 16 \Leftrightarrow (p_6 - p_5)(p_6 + p_5) = 16$

Từ đó giải được $p_6 = 5; p_5 = 3$.

Vậy bộ các số nguyên tố các số cần tìm là $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6)$ trong đó $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5)$ được xác định là $(2;2;2;2;3)$ và các hoán vị, còn cố định $p_6 = 5$.

Bài 100.

Giả sử có số nguyên a để $(a^2+1) \vdots p$ hay ta có $a^2 \equiv -1(\bmod p)$

Suy ra $a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$ hay $a^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1(\bmod p)$

Nhưng theo định lí Fecmat thì $a^{p-1} - 1 \equiv 0(\bmod p)$

Nên ta được $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0(\bmod p)$ mà p là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0(\bmod p) \Leftrightarrow -2 \equiv 0(\bmod p), \text{ điều này vô lí.}$$

Nên không tồn tại số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán