CHUYÊN ĐỀ: QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

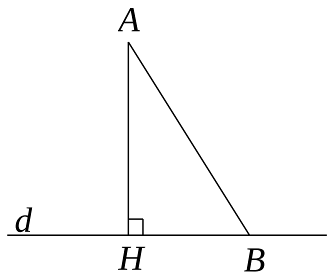
1. Khái niệm đường vuông góc và đường xiên.

Cho điểm A không thuộc đường thẳng d, các điểm B, C thuộc đường thẳng d không trùng với điểm H.

- Đoạn thẳng AH là đoạn thẳng vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng d

- Điểm H là chân đường vuông góc hay hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.

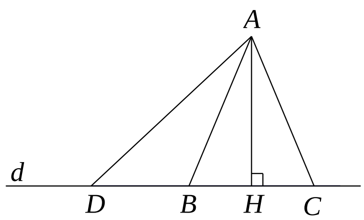
- Độ dài đoạn thẳng AH là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.



2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

- Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

$$AH \perp d \Rightarrow AH < AC,\ AH < AD$$



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

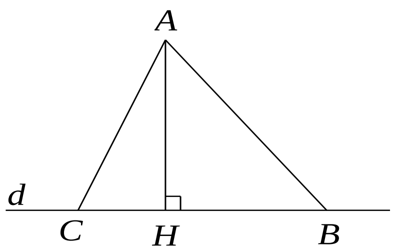
I. Phương pháp giải:

- Dựa vào khái niệm đường vuông góc, đường xiên để nhận biết các loại đường đó.

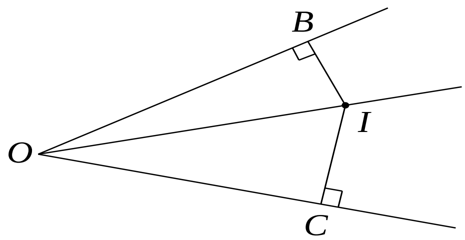
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng chính là tính độ dài đường vuông góc kẻ từ điểm đó đến đường thẳng.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho các hình vẽ sau. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ điểm A trong hình 1 và điểm I trong hình 2.



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

Hình 1: Đường vuông góc: AH.

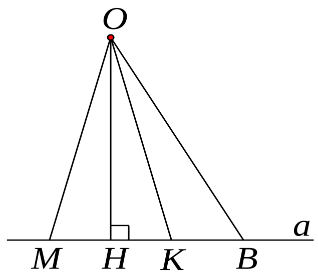
Các đường xiên: AB, AC.

Hình 2: Các đường vuông góc: IB, IC

Đường xiên: IO

Bài 2. Cho đường thẳng a và điểm O (không thuộc đường thẳng a) hãy vẽ đường vuông góc và ba đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a. Chỉ ra các đường xiên và đường vuông góc vừa vẽ.

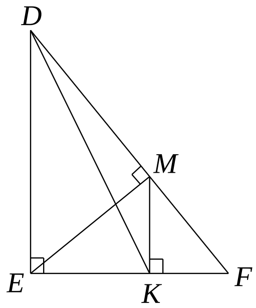
Lời giải:



Đường vuông góc: OH.

Các đường xiên: OM, OK, OB.

Bài 3. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng EF đến đường thẳng đó trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Các đường vuông góc kẻ từ một điểm đến đường thẳng EF: DE, MK.

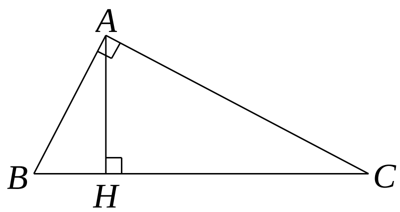
Các đường xiên kẻ từ một điểm đến đường thẳng EF: DK, DF, ME, MF.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC.

a) Tìm các đường vuông góc và đường xiên trên hình

b) Tìm khoảng cách từ đỉnh A, B, C đến các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải:



a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB \perp AC$ (GT)

H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC (GT) suy ra $AH \perp BC$

Do đó: Các đường vuông góc: BA, BC, AH.

Các đường xiên:

Đường xiên BA, BC kẻ từ điểm A đến cạnh BC

Đường xiên CB kẻ từ điểm C đến cạnh AB

Đường xiên BC kẻ từ điểm B đến cạnh AC

b) Khoảng cách từ điểm A đến cạnh BC là độ dài cạnh AH.

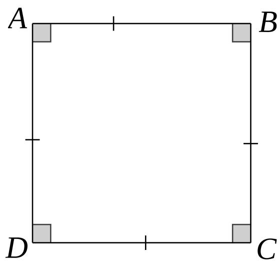
Khoảng cách từ điểm B, C đến cạnh AC, AB lần lượt là độ dài cạnh BA, CA.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Hỏi trong bốn đỉnh của hình vuông

a) Đỉnh nào cách đều hai điểm D và B ?

b) Đỉnh nào cách đều hai đường thẳng AD và DC?

Lời giải:



a) Vì hình vuông $ABCD$ có $AD = AB$; $CD = CB$ nên đỉnh cách đều hai điểm D và B là: A và C.

b) Ta có $BA \perp AD$ tại A $\Rightarrow$ BA là khoảng cách từ B đến đường thẳng AD.

$BC \perp CD$ tại C $\Rightarrow$ BC là khoảng cách từ B đến đường thẳng CD.

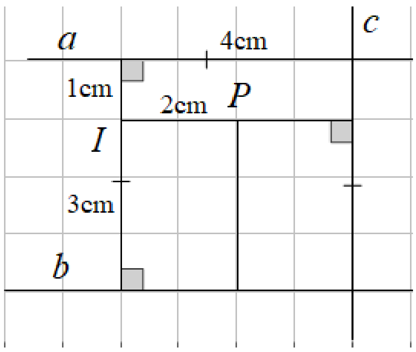
Mà $BA = BC$ (Vì $ABCD$ là hình vuông)

Vậy đỉnh cách đều hai đường thẳng AD và DC là đỉnh B.

Bài 6. Quan sát hình dưới và cho biết:

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a, b, c.

b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b, c.



Lời giải

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a là 1 cm.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng b là 3 cm.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng c là 4 cm.

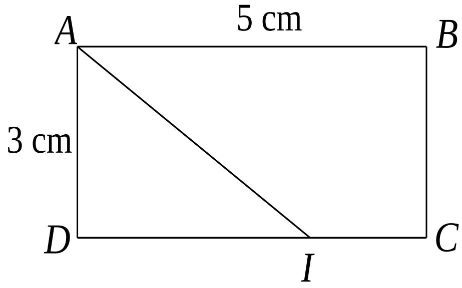
b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b là 3 cm.

Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng c là 2 cm.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $3\text{ cm},\ 5\text{ cm}$, I là một điểm trên cạnh CD.

a) Hãy chỉ ra các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD.

b) Tìm khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD.



Lời giải:

a) Đường vuông góc kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD là: AD.

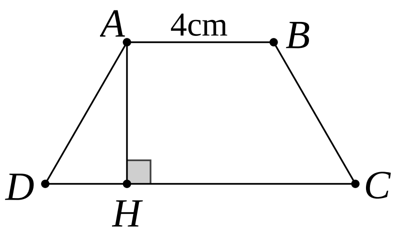
Đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD là: AI.

b) Vì $CD \perp AD$ tại D và $CD = 5\text{ cm}$

Nên khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là 5 cm.

Bài 9. Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ bằng 4 cm, độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân, biết diện tích hình thang cân đó bằng 18 cm^2.

Lời giải



Ta có đáy nhỏ $AB = 4\text{ cm}$; độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ

Do đó độ dài đáy lớn CD là: $4.2 = 8\ (\text{cm})$

Kẻ $AH \perp CD\ (H \in CD)$, khi đó AH là chiều cao của hình thang cân $ABCD$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ bằng 18 cm^2, suy ra $S = \dfrac{(AB+CD).AH}{2} = 18$

Mà $AB = 4\text{ cm}, CD = 8\text{ cm}$

Suy ra $S = \dfrac{(4+8).AH}{2} = 18$

suy ra chiều cao của hình thang cân là: $AH = \dfrac{18.2}{4+8} = \dfrac{36}{12} = 3$

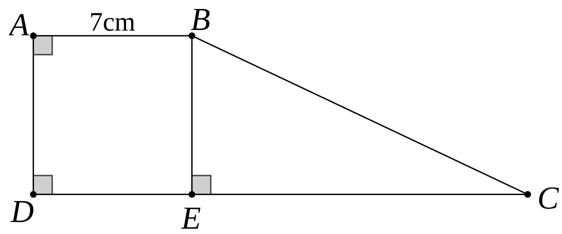
Vì $AH \perp CD\ (H \in CD)$ nên độ dài AH là khoảng cách từ A đến đáy lớn CD.

Mặt khác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có $AB // CD$.

Do đó AH là khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân $ABCD$.

Vậy khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân $ABCD$ là 3 cm.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ (Hình vẽ) có $AB = 7$ cm. Gọi E là hình chiếu của B lên cạnh CD. Biết $ABED$ là hình vuông và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 2 lần diện tích hình vuông $ABED$. Hãy tính khoảng cách từ C đến đường thẳng BE.



Lời giải:

Ta có E là hình chiếu của B lên cạnh CD, suy ra $BE \perp CD$ tại E hay $CE \perp BE$ tại E

Do đó độ dài CE là khoảng cách từ C đến đường thẳng BE (1)

Hình vuông $ABED$ có diện tích là $7.7 = 49 \ (\text{cm}^2)$

Diện tích hình thang $ABCD$ là: $49.2 = 98 \ (\text{cm}^2)$

Ta có công thức tính diện tích hình thang $ABCD$: $S = \dfrac{(AB + CD).BE}{2}$

Mà $AB = BE = 7$ cm; $S = 98 \text{ cm}^2$

Suy ra độ dài đáy lớn của hình thang $ABCD$ là $CD = \dfrac{98.2}{7} - 7 = 21 \ (\text{cm}^2)$

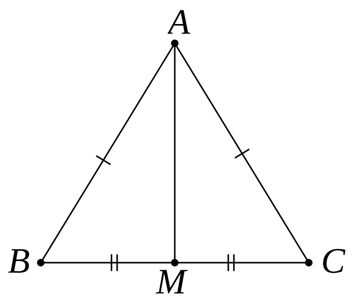
Do $E \in CD$ nên $CD = CE + DE$

$\Rightarrow CE = CD - DE = 21 - 7 = 14 \ (\text{cm}) \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra khoảng cách từ C đến đường thẳng BE là 14 cm.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Có M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Lời giải:



Xét ΔABM và ΔACM có:

$AB = AC$ (Vì tam giác ABC cân tại A).

$B = C$ (Vì tam giác ABC cân tại A).

$BM = MC$ (Vì M là trung điểm của BC).

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AMB = AMC$ (Hai góc tương ứng). (1)

Mà hai góc AMB và AMC là hai góc kề bù

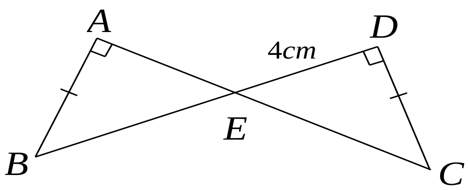
$\Rightarrow AMB + AMC = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AMB = AMC = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Do đó $AM \perp BC$ tại M.

Vậy AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Bài 12. Cho hình vẽ bên, biết $AB = CD$, $BAC = BDC = 90^\circ$, $DE = 4$ cm. Tính khoảng cách từ E đến đường thẳng AB.



Lời giải:

Xét ΔABE có $A + B + AEB = 180^\circ$ (Định lí tổng ba góc trong một tam giác)

Suy ra $B = 180^\circ - A - AEB$ (1)

Xét ΔCDE có $C + D + CED = 180^\circ$ (Định lí tổng ba góc trong một tam giác)

Suy ra $C = 180^\circ - D - CED$ (2)

Mà $AEB = CED$ (2 góc đối đỉnh). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $B = C$.

Xét ΔABE và ΔDCE có:

$BAC = BDC = 90^\circ$

$AB = CD$

$B = C$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta DCE$ $(g.c.g)$

$\Rightarrow AE = DE$

Có $DE = 4$ cm $\Rightarrow AE = 4$ cm

Mà AE là khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB (Vì $AE \perp AB$ tại A).

Vậy khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB bằng 4 cm.

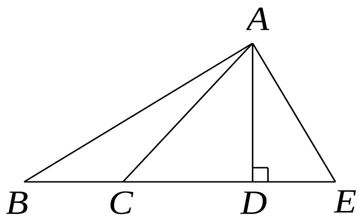
Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

I. Phương pháp giải:

Sử dụng định lý đường vuông góc ngắn hơn đường xiên (từ một điểm đến cùng một đường thẳng).

II. Bài toán.

Bài 1. Độ dài nào ngắn nhất trong các độ dài AB, AC, AD, AE.

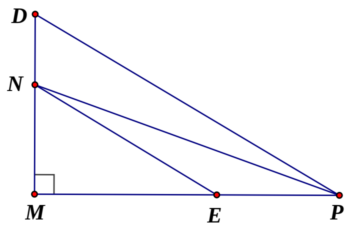


Lời giải

Ta có $AD \perp BE$ suy ra AD là đường vuông góc; AB, AC, AE là các đường xiên.

Vậy độ dài nào ngắn nhất AD.

Bài 2. Quan sát hình bên.



a) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn NM, NE, NP.

b) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng PM, PN, PD.

Lời giải:

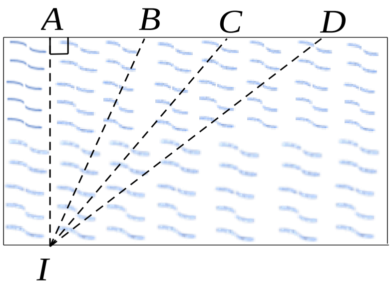
a) Vì $NM \perp MP$ nên NM là đường vuông góc kẻ từ N đến đường thẳng MP; NE, NP là các đường xiên kẻ từ N đến MP.

Vậy trong các đoạn NM, NE, NP thì NM là đoạn thẳng ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

b) Vì $PM \perp MD$ nên PM là đường vuông góc kẻ từ P; PN, PD là các đường xiên kẻ từ P.

Vậy trong các đoạn PM, PN, PD thì PM là đoạn thẳng ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

Bài 3. Bạn Bình xuất phát từ điểm I bên hồ bơi. Bạn ấy muốn tìm đường ngắn nhất để bơi đến thành hồ đối diện. Theo em, bạn Bình phải bơi theo đường nào?



Lời giải:

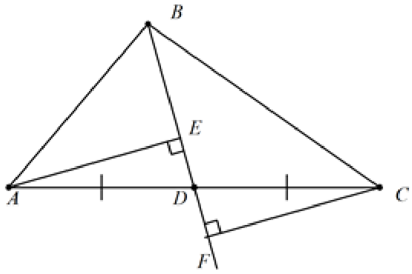
Ta có IA là đường vuông góc; IB, IC, ID là các đường xiên.

Do đó IA là đường ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

Vậy để bơi đến thành hồ đối diện theo đường ngắn nhất thì Bình phải bơi thep đường IA.

Bài 4. Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với tổng $AE+CF$.

Lời giải:



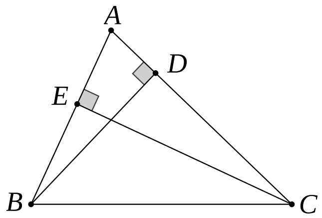
AE là đường vuông góc, AD là đường xiên nên $AE < AD$.

CF là đường vuông góc, CD là đường xiên nên $CF < CD$.

Do đó $AE+CF < AD+CD$

$\Rightarrow AE+CF < AC$

Bài 5. Cho hình vẽ. Chứng minh rằng: $BD+CE < AB+AC$



Lời giải:

Ta có $BD \perp AC$ suy ra BD là đường vuông góc; BA là đường xiên

$\Rightarrow BD < AB$ (Quan hệ đường vuông góc và đường xiên) (1)

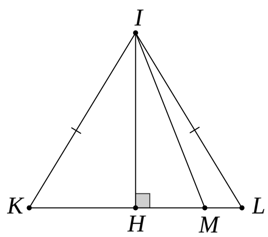
Ta có $CE \perp AB$ suy ra CE là đường vuông góc; CA là đường xiên

$\Rightarrow CE < AC$ (Quan hệ đường vuông góc và đường xiên) (2)

Cộng từng vế (1) và (2), ta có $BD+CE < AB+AC$

Bài 6. Cho tam giác IKL, $IK = IL$. Lấy điểm M tùy ý nằm giữa K và L. Khi M thay đổi thì độ dài IM thay đổi. Xác định vị trí của M để độ dài IM nhỏ nhất.

Lời giải:



a) Kẻ $IH \perp KL$ Suy ra IH đường vuông góc kẻ từ I đến đường thẳng KL.

Theo định lí về quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc thì IH chính là đường ngắn nhất trong tam giác IKL.

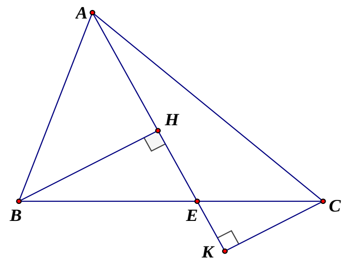
Vậy nếu M trùng với chân đường cao kẻ từ I đến đường thẳng KL thì IM sẽ có độ dài nhỏ nhất.

Bài 7. Cho ΔABC, điểm E nằm giữa B, C (AE không vuông góc với BC). Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AE.

a) So sánh BH và BE.

b) Chứng minh $BC > BH + CK$.

Lời giải:



a) Dễ thấy BH là đường vuông góc, BE là đường xiên kẻ từ điểm B đến đường thẳng AK, do đó $BE > BH$.

b) Ta thấy CK là đường vuông góc, CE là đường xiên kẻ từ điểm C đến đường thẳng AK, do đó $CE > CK$.

Suy ra: $BE + CE > BH + CK$

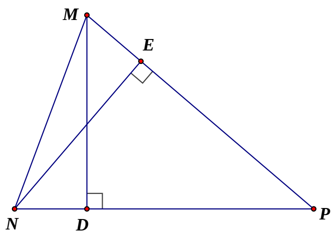
Hay $BC > BH + CK$.

Bài 8. Cho ΔMNP nhọn. Kẻ $MD \perp NP\ (D \in NP)$, $NE \perp MP\ (E \in MP)$

a) So sánh MN và MD.

b) Chứng minh $2MN > MD + NE$.

Lời giải:



a) Dễ thấy MD là đường vuông góc, MN là đường xiên kẻ từ điểm M đến đường thẳng NP, do đó $MN > MD$.

b) Ta thấy NE là đường vuông góc, NM là đường xiên kẻ từ điểm N đến đường thẳng MP, do đó $MN > NE$.

Suy ra: $MN + MN > MD + NE$

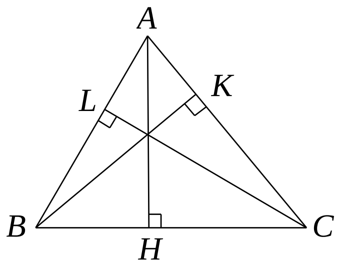
Hay $2MN > MD + NE$.

Bài 9. Cho ΔABC, kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Kẻ $BK \perp AC$ tại K, $CL \perp AB$ tại L. Chứng minh $AH + BK + CL < AB + BC + CA$

Lời giải:



a) Ta có AH là đường vuông góc; AB, AC là các đường xiên.

Suy ra $AH < AB$; $AH < AC$

$\Rightarrow 2AH < AB + AC$

Vậy $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Ta có $BK \perp AC$ tại K suy ra BK là đường vuông góc; $AB,\ BC$ là các đường xiên.

$CL \perp AB$ tại L suy ra CL là đường vuông góc; $CA,\ CB$ là các đường xiên.

Suy ra $BK < \frac{1}{2}(BA + BC)$

$CL < \frac{1}{2}(CA + CB)$

Mà $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

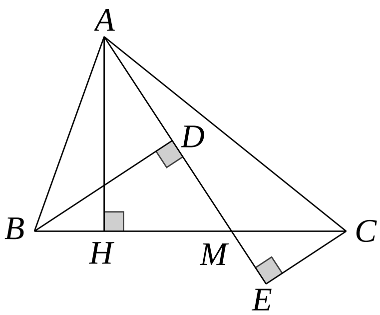
Từ ba điều trên suy ra $AH + BK + CL < AB + BC + CA$.

Bài 10. Cho ΔABC, các góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $d \le BC$.

b) Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất.

Lời giải:



a) Vẽ $BD \perp AM$, $CE \perp AM$

Suy ra $BD \le BM$; $CE \le CM$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow BD + CE \le BM + CM$

Theo bài ta có $BD + CE = d$

$M \in BC$ nên $BM + CM = BC$

Từ những điều trên suy ra $d \le BC$.

b) Theo a) ta có $d \le BC$

Do đó giá trị lớn nhất của d là BC

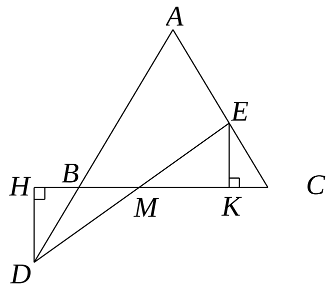
$\Leftrightarrow BD = BM$; $CE = CM$

$\Leftrightarrow D$ trùng với M và E trùng với M

$\Leftrightarrow M$ trùng với hình chiếu H của A trên BC.

Bài 11. Hai tam giác: tam giác cân ABC và tam giác ΔADE Có chung góc ở đỉnh A có $AE + AD = AB + AC$. Chứng minh rằng $BC < DE$.

Lời giải:



Vì $AD + AE = AB + AC = 2AB = 2AC$ (GT).

Nên $BD = CE$

Nếu điểm E thuộc đoạn thẳng AC thì D thuộc tia đối của tia BA

Kẻ $DH \perp BC$; $EK \perp BC$

Có ΔABC cân tại A (GT) $\Rightarrow ACB = ABC$

$HBD = ABC$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow HBD = ACB$ $(= ABC)$

Hay $HBD = KCE$

Xét ΔDHB và ΔEKC có:

$DHB = EKC = 90°$

$BD = CE$

$HBD = KCE$

$\Rightarrow \Delta DHB = \Delta EKC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow$ $BH = CK$ (Hai cạnh tương ứng)

Lại có $BK + CK = BC$; $BK + BH = HK$

Suy ra $BC = HK$ (1)

Gọi M là giao điểm của BC và DE.

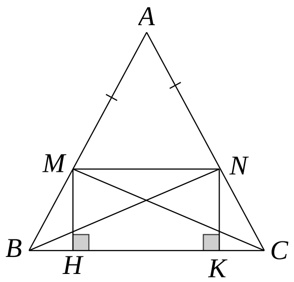
Do $DH \perp BC$; $EK \perp BC$ nên $MH < DM$; $MK < EM$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Suy ra $MH + MK < DM + EM$ $\Rightarrow HK < DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC < DE$.

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A, trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng: $BN > \dfrac{BC+MN}{2}$

Lời giải:



Kẻ $MH \perp BC$ tại H; $NK \perp BC$ tại K

$\Rightarrow BN > BK;\ CM > CH$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow\ BN + CM > BK + CH$

Mà $BK = BH + HK$ (Do tại $H \in BK$)

$\Rightarrow\ BN + CM > BH + HK + CH$

Hay $BN + CM > BC + HK$ (Vì $BC = BH + CH$) (1)

Xét ΔABN và ΔACM có:

$AB = AC$ (Vì ΔABC cân tại A)

A chung

$AN = AM$ (GT)

$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BN = CM$ (Hai cạnh tương ứng) (2)

Xét ΔAMN có $AN = AM$ $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

$AMN + ANM + A = 180^\circ$ (Định lí tổng các góc trong tam giác)

$\Rightarrow\ AMN = ANM = 180^\circ - A\ \Rightarrow AMN = \dfrac{180^\circ - A}{2}$

Chứng minh tương tự: ΔABC cân tại A $\Rightarrow ABC = \dfrac{180^\circ - A}{2}$

Do đó $AMN = ABC\left(=\dfrac{180^\circ - A}{2}\right)$

Mà AMN và ABC là hai góc đồng vị

$\Rightarrow\ MN // BC$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Ta lại có $MH \perp BC$; $NK \perp BC$ $\Rightarrow\ MH // NK$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Do đó $MN = HK$ (Tính chất đoạn chắn) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2BN > BC + MN$

Vậy $BN > \dfrac{BC + MN}{2}$

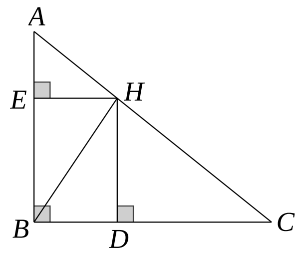
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết:

a) Các đường vuông góc kẻ đến $AB;\ BC$

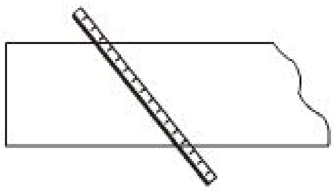
b) Các đường xiên kẻ đến $AB;\ BC$



Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm, I là một điểm trên cạnh CD và cách C 1 cm. Tìm khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng AD.

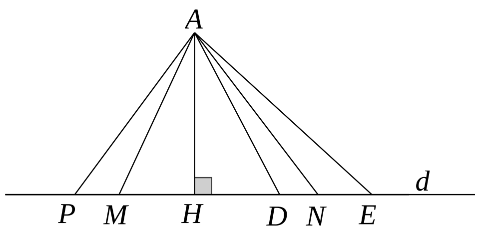
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại B có AD là tia phân giác của BAC ($D \in BC$). Kẻ $DF \perp AC$ tại F. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AC, biết $BD = 2\text{ cm}$.

Bài 4. Một tấm gỗ xẻ có hai cạnh song song. Chiều rộng của tấm gỗ là khoảng cách giữa hai cạnh đó. Muốn đo chiều rộng của tấm gỗ, ta phải đặt thước như thế nào? Tại sao? Cách đặt thước trong hình dưới có đúng không?

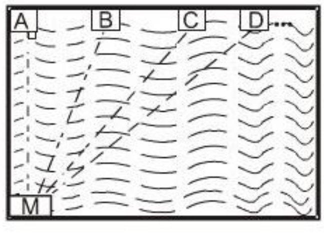


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết đường nào là đường ngắn nhất? Vì sao?



Bài 2. Để tập bơi nâng dần khoảng cách, hàng ngày bạn Mai xuất phát từ M, ngày thứ nhất bạn bơi đến A, ngày thứ hai bạn bơi đến B, ngày thứ ba bạn bơi đến C, ... (Hình bên).



Bài 3. Cho tam giác ABC, điểm M nằm giữa B và C. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB và AC. So sánh BC và $MH + MK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh $AB < \frac{BE+BF}{2}$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

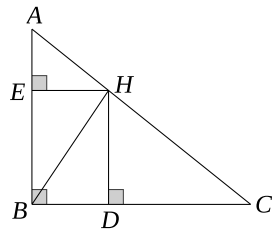
Bài 1.

a) Các đường vuông góc kẻ đến AB là: CB, HE

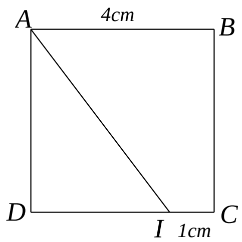
Các đường vuông góc kẻ đến BC là: AB, HD

b) Các đường xiên kẻ đến AB là HA, HB.

Các đường xiên kẻ đến BC là HC, HB.

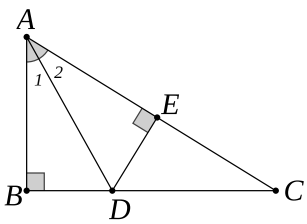


Bài 2.



Khoảng cách từ I đến đường thẳng AD là $4-1=3$ (cm)

Bài 3.



Xét ΔABD và ΔAED có

$B = E = 90^\circ$

AD chung

$A_1 = A_2$ (Vì AD là tia phân giác của BAC)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $BD = 2$ cm

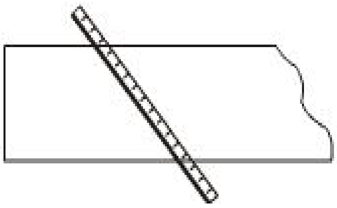
$\Rightarrow$ $ED = 2$ cm

Vậy khoảng cách từ D đến đường thẳng AC là 2 cm.

Bài 4. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu nằm trên hai đường thẳng và vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

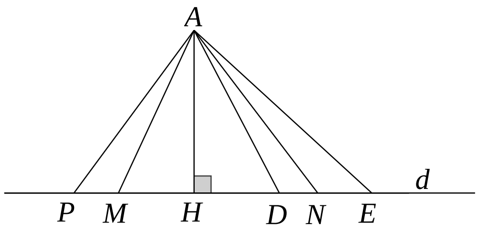
Vì vậy muốn đo bề rộng của một tấm gỗ chính là xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng song song ta phải đặt thước vuông góc với hai cạnh song song của tấm gỗ.

Cách đặt thước như trong hình dưới là sai.



Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1.



AH là đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng d

$AP,\ AM,\ AD,\ AN,\ AE$ là các đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng d

Do đó AH là đường ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Bài 2. Nhận thấy các điểm $A,\ B,\ C,\ D,\ ...$ cùng nằm trên một đường thẳng. Gọi đường thẳng đó là đường thẳng d.

Theo định nghĩa:

$MB,\ MC,\ MD,\ ...$ là các đường xiên kẻ từ M đến d.

MA là đường vuông góc kẻ từ M đến d.

AB là hình chiếu của đường xiên MB trên d

AC là hình chiếu của đường xiên MC trên d

AD là hình chiếu của đường xiên MD trên d

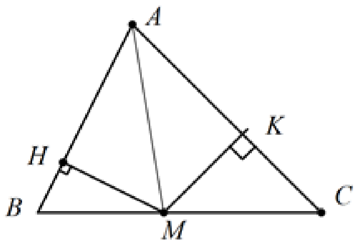
…

Theo định lý MA là đường ngắn nhất trong các đường $MA, MB,\ MC,\ MD,\ ...$

Vì $AB < AC < AD < \ ...$ nên $MB < MC < \ MD < \ ...$

Vậy $MA < MB < MC < \ MD < \ ...$nên bạn Mai đã tập đúng mục đích đề ra.

Bài 3.



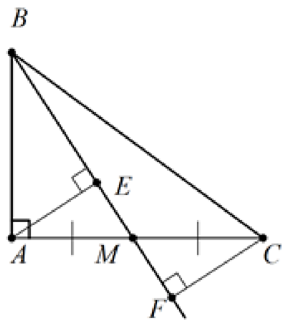
HM là đường vuông góc, BM là đường xiên nên $HM < BM$.

MK là đường vuông góc, MC là đường xiên nên $MK < MC$.

Do đó $MH + MK < MB + MC$

$\Rightarrow MH + MK < \text{BC}.$

Bài 4.



Xét ΔMAE và ΔMCF có:

$AM = CM$ (gt)

$AME = CMF$ (Hai góc đối đỉnh)

$AEM = CFM = 90°$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta MCF$ $(ch - gn)$

$\Rightarrow ME = MF$

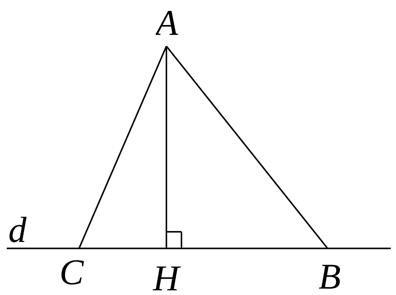
$\Rightarrow$ $BE + BF = BM - ME + BM + MF = 2BM$.

Mặt khác $AB < BM \Rightarrow AB < \dfrac{BE + BF}{2}$

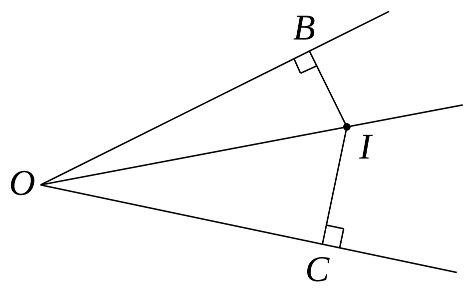
PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Cho các hình vẽ sau. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ điểm A trong hình 1 và điểm I trong hình 2



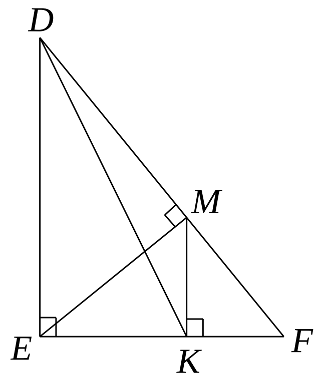
Hình 1



Hình 2

Bài 2. Cho đường thẳng a và điểm O hãy vẽ đường vuông góc và ba đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a. Chỉ ra các đường xiên và đường vuông góc vừa vẽ.

Bài 3. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng EF đến đường thẳng đó trong hình vẽ sau:



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC.

a) Tìm các đường vuông góc và đường viên trên hình.

b) Tìm khoảng cách từ đỉnh A, B, C đến các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Hỏi trong bốn đỉnh của hình vuông

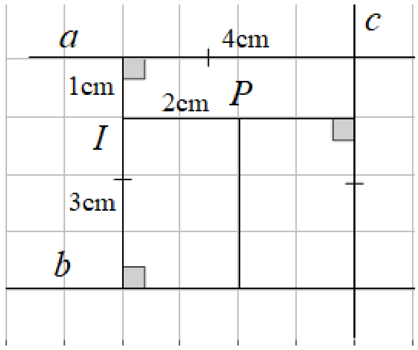
a) Đỉnh nào cách đều hai điểm D và B ?

b) Đỉnh nào cách đều hai đường thẳng AD và DC?

Bài 6. Quan sát hình dưới và cho biết:

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a, b, c.

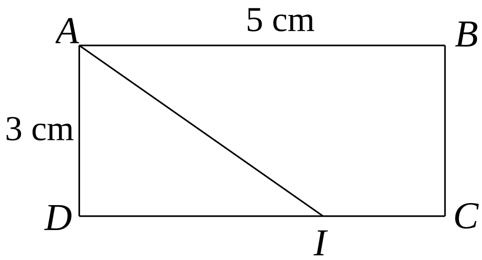
b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b, c.



Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 3cm, 5cm, I là một điểm trên cạnh CD.

a) Hãy chỉ ra các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD.

b) Tìm khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD.



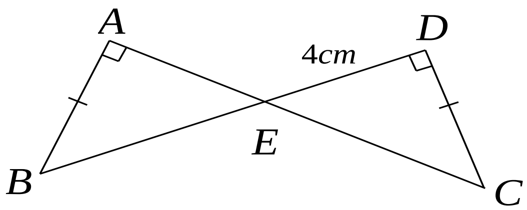
Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích là 36 cm^2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD.

Bài 9. Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ bằng 4 cm, độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân, biết diện tích hình thang cân đó bằng 18 cm^2.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ (Hình vẽ) có $AB = 7$ cm. Gọi E là hình chiếu của B lên cạnh CD. Biết $ABED$ là hình vuông và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 2 lần diện tích hình vuông $ABED$. Hãy tính khoảng cách từ C đến đường thẳng BE.

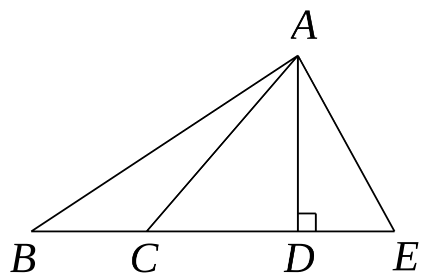
Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Có M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Bài 12. Cho hình vẽ bên, biết $AB = CD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90°$, $DE = 4\text{cm}$. Tính khoảng cách từ E đến đường thẳng AB.

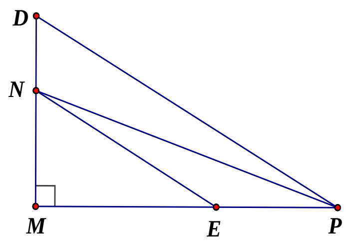


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Độ dài nào ngắn nhất trong các độ dài AB, AC, AD, AE.



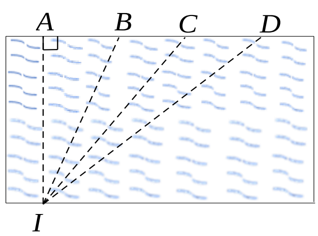
Bài 2. Quan sát hình bên.



a) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn NM, NE, NP.

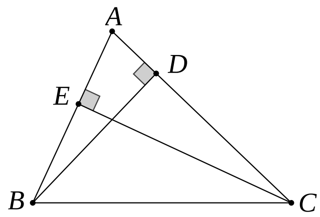
b) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng PM, PN, PD.

Bài 3. Bạn Bình xuất phát từ điểm I bên hồ bơi. Bạn ấy muốn tìm đường ngắn nhất để bơi đến thành hồ đối diện. Theo em, bạn Bình phải bơi theo đường nào?



Bài 4. Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với tổng $AE + CF$.

Bài 5. Cho hình vẽ. Chứng minh rằng: $BD + CE < AB + AC$



Bài 6. Cho tam giác IKL, $IK = IL$. Lấy điểm M tùy ý nằm giữa K và L. Khi M thay đổi thì độ dài IM thay đổi. Xác định vị trí của M để độ dài IM nhỏ nhất.

Bài 7. Cho ΔABC, điểm E nằm giữa B, C (AE không vuông góc với BC). Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AE.

a) So sánh BH và BE.

b) Chứng minh $BC > BH + CK$.

Bài 8. Cho ΔMNP nhọn. Kẻ $MD \perp NP \left(D \in NP\right)$, $NE \perp MP \left(E \in MP\right)$

a) So sánh MN và MD.

b) Chứng minh $2MN > MD + NE$.

Bài 9. Cho ΔABC, kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH < \frac{1}{2}\left(AB + AC\right)$

b) Kẻ $BK \perp AC$ tại K, $CL \perp AB$ tại L. Chứng minh $AH + BK + CL < AB + BC + CA$

Bài 10. Cho ΔABC, các góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $d \le BC$.

b) Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất.

Bài 11. Hai tam giác: tam giác cân ABC và tam giác ΔADE Có chung góc ở đỉnh A có $AE + AD = AB + AC$. Chứng minh rằng $BC < DE$.

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A, trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng: $BN > \dfrac{BC + MN}{2}$

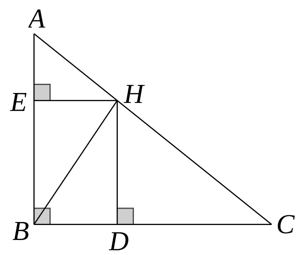
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết:

a) Các đường vuông góc kẻ đến $AB;\ BC$

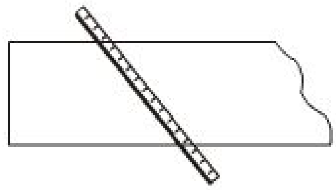
b) Các đường xiên kẻ đến $AB;\ BC$



Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm, I là một điểm trên cạnh CD và cách C 1 cm. Tìm khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng AD.

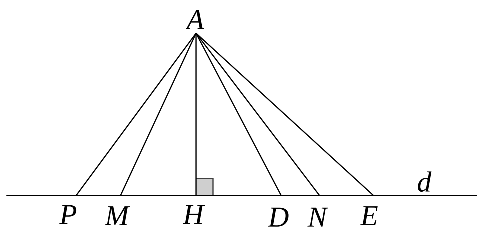
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại B có AD là tia phân giác của BAC ($D \in BC$). Kẻ $DF \perp AC$ tại F. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AC, biết $BD = 2$ cm.

Bài 4. Một tấm gỗ xẻ có hai cạnh song song. Chiều rộng của tấm gỗ là khoảng cách giữa hai cạnh đó. Muốn đo chiều rộng của tấm gỗ, ta phải đặt thước như thế nào? Tại sao? Cách đặt thước trong hình dưới có đúng không?

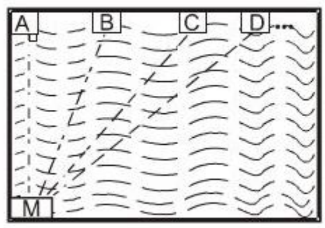


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết đường nào là đường ngắn nhất? Vì sao?



Bài 2. Để tập bơi nâng dần khoảng cách, hàng ngày bạn Mai xuất phát từ M, ngày thứ nhất bạn bơi đến A, ngày thứ hai bạn bơi đến B, ngày thứ ba bạn bơi đến C, ... (Hình bên).



Bài 3. Cho tam giác ABC, điểm M nằm giữa B và C. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB và AC. So sánh BC và $MH + MK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh $AB < \frac{BE + BF}{2}$.