MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Phương trình vô tỷ cơ bản:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 2x + 1$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$

Lời giải:

a). Phương trình tương đương với:

$x = 2 + \sqrt{2}$

b). Điều kiện: $x \geq 0$. Bình phương 2 vế ta được:

$$3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + x} = 4x + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 4(2x^2 + x) = (x+8)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 7x^2 - 12x - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\dfrac{16}{7} \end{array}\right.$. Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

II. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ THƯỜNG GẶP

1. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp:

Dấu hiệu:

+ Khi ta gặp các bài toán giải phương trình dạng: $\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+h(x)=0$

Mà không thể đưa về một ẩn, hoặc khi đưa về một ẩn thì tạo ra những phương trình bậc cao dẫn đến việc phân tích hoặc giải trực tiếp khó khăn.

+ Nhẩm được nghiệm của phương trình đó: bằng thủ công (hoặc sử dụng máy tính cầm tay)

Phương pháp:

- Đặt điều kiện chặt của phương trình (nếu có)

Ví dụ: Đối phương trình: $\sqrt{x^2+3}+3=\sqrt{2x^2+7}+2x$.

+ Nếu bình thường nhìn vào phương trình ta thấy:

Phương trình xác định với mọi $x\in R$. Nhưng đó chưa phải là điều kiện chặt. Để giải quyết triệt để phương trình này ta cần đến điều kiện chặt đó là:

+ Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x^2+7}=2x-3$

Để ý rằng: $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x^2+7}<0$ do đó phương trình có nghiệm khi $2x-3<0\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$

- Nếu phương trình chỉ có một nghiệm x_0:

Ta sẽ phân tích phương trình như sau: Viết lại phương trình thành:
$\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{f(x_0)}+\sqrt[m]{g(x)}-\sqrt[m]{g(x_0)}+h(x)-h(x_0)=0$

Sau đó nhân liên hợp cho từng cặp số hạng với chú ý:

+ $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}b+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b^3$

+ $\left(\sqrt{a}-b\right)\left(\sqrt{a}+b\right)=a-b^2$

+ Nếu $h(x)=0$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta luôn phân tích được $h(x)=(x-x_0)g(x)$

Như vậy sau bước phân tích và rút nhân tử chung $x-x_0$ thì phương trình ban đầu trở thành: $(x-x_0)A(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ A(x)=0 \end{array}\right.$

Việc còn lại là dùng hàm số , bất đẳng thức hoặc những đánh giá cơ bản để kết luận $A(x)=0$ vô nghiệm.

- Nếu phương trình có 2 nghiệm x_1,x_2 theo định lý viet đảo ta có nhân tử chung sẽ là: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2$

Ta thường làm như sau:

+ Muốn làm xuất hiện nhân tử chung trong $\sqrt[n]{f(x)}$ ta trừ đi một lượng $ax+b$. Khi đó nhân tử chung sẽ là kết quả sau khi nhân liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)}-(ax+b)$

+ Để tìm a,b ta xét phương trình: $\sqrt[n]{f(x)}-(ax+b)=0$. Để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 ta cần tìm a,b sao cho $\begin{cases} ax_1+b=\sqrt[n]{f(x_1)} \\ ax_2+b=\sqrt[n]{f(x_2)} \end{cases}$

+ Hoàn toàn tương tự cho các biểu thức còn lại:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4=0$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

Giải:

a).

Phân tích: Phương trình trong đề bài gồm nhiều biểu thức chứa căn nhưng không thể quy về 1 ẩn. Nếu ta lũy thừa để triệt tiêu dấu $\sqrt[3]{\ }, \sqrt{\ }$ thì sẽ tạo ra phương trình tối thiểu là bậc 6. Từ đó ta nghỉ đến hướng giải : Sử dụng biểu thức liên hợp để tách nhân tử chung.

Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: $x = 1$. Khi đó $\sqrt{5x^3 - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2; \sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$

Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{5x^3 - 1} - 2 + \sqrt[3]{2x - 1} - 1 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^3 - 5}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2 = 0} + \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{5(x^2 + x + 1)}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + 1\right] = 0$$

Dễ thấy :

Với điều kiện $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ thì $\frac{5(x^2 + x + 1)}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + 1 > 0$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

b). Điều kiện: $x \in [2; 4]$

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: $x = 3$. Khi đó $\sqrt{x - 2} = \sqrt{3 - 2} = 1; \sqrt{4 - x} = \sqrt{4 - 3} = 1$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2}-1+1-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}+\dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}=(x-3)(2x+1)$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)\right]=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)=0 \end{array}\right.$$

Để ý rằng: Với điều kiện $x\in[2;4]$ thì

$\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}\le 1;\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}\le 1; 2x+1\ge 5$ nên

$\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)<0$

Từ đó suy ra: $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét: Để đánh giá phương trình cuối cùng vô nghiệm ta thường dùng các ước lượng cơ bản: $A+B\ge A$ với $B\ge 0$ từ đó suy ra $\dfrac{A}{A+B}\le 1$ với mọi số A,B thỏa mãn $\begin{cases} A+B>0 \\ B\ge 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

b) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$

Giải:

a). Điều kiện: $x\ge\sqrt[3]{2}$.

Ta nhẩm được nghiệm $x=3$. Nên phương trình được viết lại như sau:

$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+x-3=\frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}=0 \end{array}\right.$$

Ta dự đoán: $\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}<0$ (Bằng cách thay một giá trị $x\ge\sqrt[3]{2}$ ta sẽ thấy $\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}<0$)

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1$ và $\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2$

Thật vậy:

+ Ta xét $\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}>x-1$

Đặt $\sqrt[3]{x^2-1}=t>0\Rightarrow x=\sqrt{t^3+1}$. Bất phương trình tương đương với

$t^2+2t+1>\sqrt{t^3+1}\Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t>0$. Điều này là hiển nhiên đúng.

+ Ta xét:
$$\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2 \Leftrightarrow x^2+3x-1 > 2\sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9>0$$

$\forall x \geq 0 (*)$. Điều này luôn đúng.

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất: $x=3$

b.) Điều kiện: $x \geq 7$.

Để đơn giản ta đặt $\sqrt[3]{x} = t \geq \sqrt[3]{7} \Rightarrow x = t^3$

Phương trình đã cho trở thành:
$$t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0 \Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0$$

Nhẩm được $t=2$. Nên ta phân tích phương trình thành:

$$\Leftrightarrow 4t^3-t^2+2t-32+(t^3-4)\left(\sqrt{t^3-7}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left[\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)\right]=0$$

Để ý rằng $4t^2+7t+16>0$ và $t^3 \geq 7$ nên ta có
$\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)>0$. Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t=2 \Leftrightarrow x=8$.

Nhận xét: Việc đặt $\sqrt[3]{x}=t$ trong bài toán để giảm số lượng dấu căn đã giúp đơn giản hình thức bài toán .

Ngoài ra khi tạo liên hợp do $(t^3-4)>0$ nên ta tách nó ra khỏi biểu thức để các thao tác tính toán được đơn giản hơn.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}=x^2+2x+9$

b) $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{2x-11}{5}$

c) $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2\left(x+1\right)}$ (Tuyển sinh vòng 1 lớp 10 Trường THPT chuyên Tự nhiên- ĐHQG Hà Nội 2012)

d) $\dfrac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+x+2}$

a). Điều kiện: $-3\le x\le\dfrac{19}{3}$

Ta nhẩm được 2 nghiệm là $x=1, x=-2$ nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là: x^2+x-2. Để làm được điều này ta thực hiện thêm bớt nhân tử như sau:

+ Ta tạo ra $4\sqrt{x+3}-(ax+b)=0$ sao cho phương trình này nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Để có điều này ta cần: $\begin{cases} a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3} \\ b=\dfrac{20}{3} \end{cases}$

+ Tương tự $\sqrt{19-3x}-(mx+n)=0$ nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Tức là $\begin{cases} m+n=5 \\ -2m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

Từ đó ta phân tích phương trình thành:

$$4\sqrt{x+3}-\left(\frac{4}{3}\text{x}+\frac{20}{3}\right)+\sqrt{19-3x}-\left(\frac{13}{3}-\frac{x}{3}\right)-\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[3\sqrt{x+3}-\left(x+5\right)\right]+\frac{3\sqrt{19-3x}-(13-x)}{3}-\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[\frac{-x^2-x+2}{3\sqrt{x+3}+\left(x+5\right)}\right]+\frac{-x^2-x+2}{3\left[3\sqrt{19-3x}+(13-x)\right]}-\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x^2-x-2\right)\left[\frac{4}{3}.\frac{1}{3\sqrt{x+3}+\left(x+5\right)}+\frac{1}{3\left[3\sqrt{19-3x}+(13-x)\right]}+1\right]=0$$

Dễ thấy với $-3\le x\le\frac{19}{3}$ thì $\frac{1}{3\sqrt{x+3}+\left(x+5\right)}>0,$

$\frac{1}{3\left[3\sqrt{19-3x}+(13-x)\right]}>0$

Nên $\frac{4}{3}.\frac{1}{3\sqrt{x+3}+\left(x+5\right)}+\frac{1}{3\left[3\sqrt{19-3x}+(13-x)\right]}+1>0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3,x=8$.

b). Điều kiện: $x\ge\frac{8}{3}$.

Phương trình được viết lại như sau: $5\sqrt{3x-8}-5\sqrt{x+1}=2x-11$

Ta nhẩm được 2 nghiệm $x=3, x=8$ nên suy ra nhân tử chung là:

$x^2-11x+24$

Ta phân tích với nhân tử $5\sqrt{3x-8}$ như sau:

+ Tạo ra $5\sqrt{3x-8}-\left(ax+b\right)=0$ sao cho phương trình này nhận $x=3, x=8$ là nghiệm. Tức là a,b cần thỏa mãn hệ: $\begin{cases}3a+b=5\\8a+b=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$

+ Tương tự với $5\sqrt{x+1}-(mx+n)=0$ ta thu được: $\begin{cases}3m+n=10\\8m+n=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=7\end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$5\sqrt{3x-8}-(3x-4)+(x+7)-5\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow\frac{-9(x^2-11x+24)}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{x^2-11x+24}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-11x+24\right)\left[\frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-11x+24=0\\\dfrac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\dfrac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}=0\end{array}\right.$$

Ta xét $A(x)=\dfrac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\dfrac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}$

Ta chứng minh: $A(x)<0$ tức là: $\dfrac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\dfrac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}<0$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3x-8}+3x-4-9(x+7+5\sqrt{x+1})<0$$

$\Leftrightarrow 3x-8-5\sqrt{3x-8}+\frac{25}{4}+\frac{275}{4}+x+45\sqrt{x+1}>0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-8}-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{275}{4}+x+45\sqrt{x+1}>0$. Điều này là hiển nhiên đúng.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

Chú ý:

Những đánh giá để kết luận $A(x)<0$ thường là những bất đẳng thức không chặt nên ta luôn đưa về được tổng các biểu thức bình phương.

Ngoài ra nếu tinh ý ta có thể thấy: $5\sqrt{3x-8}+3x-4-9(x+7+5\sqrt{x+1})<0$
$5\sqrt{3x-8}+3x-4\le 9x+63+5\sqrt{81x+81}$ Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do: $5\sqrt{3x-8}<5\sqrt{81x+81}; 3x-4<9x+63$ với mọi $x\ge\frac{8}{3}$

c). Điều kiện: $x>0$

Ta nhẩm được $x=1; x=3$ nên biến đổi phương trình như sau:

Ta có: khi $x=1\Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)}=2$, khi $x=3\Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)}=2$ nên ta trừ 2 vào 2 vế thì thu được: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=\frac{x^2+7}{2(x+1)}-2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}$

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3+3x}+2x}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+3x}+2x=2(x+1) & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) suy ra $x=1, x=3$

Giải (2) ta có: $\sqrt{x^3+3x}+2x=2(x+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x}=2\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm là $x=1; x=3$

Nhận xét: Ta cũng có thể phân tích phương trình như câu a,b .

d). Ta có: $x^3+5x^2+4x+2=(x+3)(x^2+2x+3)-5x-7$ nên phương trình tương đương với

$$\frac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow x+3-\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{5x+7}{x^2+2x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (5x+7)\left(\frac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{x^2+2x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(5x+7)=0\\ \left(\frac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{x^2+2x+3}\right)=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\frac{1}{(x+3)+\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{x^2+2x+3} \Leftrightarrow x^2+x-\sqrt{x^2+x+2}=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}>0$. Phương trình trở thành:

$$t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-1(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm: $x=-\frac{7}{5}; x=1; x=-2$

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^3+15}+2=\sqrt{x^3+8}+3x$

b) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}+1-x=0$

a). Phương trình được viết lại như sau:

$\sqrt{x^3+15}+2=\sqrt{x^3+8}+3x \Leftrightarrow \sqrt{x^3+15}-\sqrt{x^3+8}=3x-2$. Để phương trình có nghiệm ta cần: $3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{2}{3}$. Nhẩm được $x=1$ nên ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^3+15}-4=\sqrt{x^3+8}-3+3x-3$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+15}+4}-\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+8}+3}-3\right]=0$$

Để ý rằng: $\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+15}+4}-\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+8}+3}-3<0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b). Điều kiện $x\in\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$

Ta viết lại phương trình như sau: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}+1-x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}+1-x=0 \Leftrightarrow (2x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$4x+4+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-10x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=5-2\sqrt{7}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x=1, x=5-2\sqrt{7}$

Nhận xét:

+ Ta thấy phương trình có nghiệm $x=1$. Nếu ta phân tích phương trình thành $\sqrt{3x+1}-2+2-\sqrt{x+3}+4-4x=0$ thì sau khi liên hợp phương trình mới thu được sẽ là: $\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1-x}{2+\sqrt{x+3}}+4-4x=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}-4\right)=0$ .Rõ ràng phương trình hệ quả $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}-4=0$ phức tạp hơn phương trình ban đầu rất nhiều.

+ Để ý rằng khi $x=1$ thì $\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ nên ta sẽ liên hợp trực tiếp biểu thức $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}$.

2. Đặt ẩn phụ dựa vào tính đẳng cấp của phương trình:

Ta thường gặp phương trình dạng này ở các dạng biến thể như:

+ $ax^2+bx+c=d\sqrt{px^3+qx^2+rx+t}$ (1)

+ $ax^2+bx+c=d\sqrt{px^4+qx^3+rx^2+ex+h}$ (2)

+ $A\sqrt{ax^2+bx+c}+B\sqrt{ex^2+gx+h}=C\sqrt{rx^2+px+q}$ (*)

Thực chất phương trình (*) khi bình phương 2 vế thì xuất hiện theo dạng (1) hoặc (2).

Để giải các phương trình (1), (2).

Phương pháp chung là:

+ Phân tích biểu thức trong dấu $\sqrt{\ }$ thành tích của 2 đa thức $P(x), Q(x)$

+ Ta biến đổi $ax^2+bx+c=mP(x)+nQ(x)$ bằng cách đồng nhất hai vế.

Khi đó phương trình trở thành: $mP(x)+nQ(x)=d\sqrt{P(x).Q(x)}$

Chia hai vế cho biểu thức $Q(x)>0$ ta thu được phương trình:

$m\frac{P(x)}{Q(x)}+n=d\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$. Đặt $t=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\geq 0$ thì thu được phương trình:

$mt^2-dt+n=0$.

Một cách tổng quát: Với mọi phương trình có dạng:

$aP^n(x)+bQ^n(x)+cP^{n-k}(x)Q^k(x)+d\sqrt[2n]{P(x).Q(x)}=0$ thì ta luôn giải được theo cách trên.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

b) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$

c) $4x^2+3\left(x^2-x\right)\sqrt{x+1}=2\left(x^3+1\right)$

Lời giải:

a). Điều kiện: $x\geq -2$.

Ta viết lại phương trình thành: $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$

Giả sử $x^2-3x+2=m(x+2)+n(x^2-2x+4)$. Suy ra m,n phải thỏa mãn

$$\begin{cases} n=1 \\ m-2n=-3 \\ 2m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho có dạng:

$$-2(x+2)+2(x^2-2x+4)-3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}=0.$$

Chia phương trình cho $x^2-2x+4>0$ ta thu được:

$$-2\left(\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)-3\sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}+2=0$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}\geq 0$ ta thu được phương trình: $-2t^2-3t+2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \text{ do } t\geq 0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-2x+4=4(x+2).$$

$$x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right.$$

b). Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-4x+1\geq 0 \end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình ta thu được:

$$x^2+2x+1+2(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}+x^2-4x+1=9x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-11x+2+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-4x+1)}=0$$

Giả sử

$$2x^2-11x+2=m(x^2+2x+1)+n(x^2-4x+1)\Rightarrow\begin{cases}m+n=2\\2m-4n=-11\\m+n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\n=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$-\frac{1}{2}(x^2+2x+1)+\frac{5}{2}(x^2-4x+1)+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-4x+1)}=0$$

Chia phương trình cho $x^2+2x+1>0$ ta thu được:

$-1+5\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+2x+1}\right)+4\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+2x+1}\right)}=0$. Đặt $t=\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+2x+1}\right)}\geq 0$ ta có

Phương trình $5t^2+4t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+2x+1}\right)=\dfrac{1}{25}$

$$\Leftrightarrow 24x^2-102x+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\x=4\end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{1}{4},x=4$

Nhận xét: Trong lời giải ta đã biến đổi:

$(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}=\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-4x+1)}$ là vì $x+1>0$

c). Điều kiện: $x\geq -1$

Ta viết lại phương trình thành: $(x-1)\left[2x^2-2x-2-3x\sqrt{x+1}\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2-2x-2-3x\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.$$

Xét phương trình:

$2x^2-2x-2-3x\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

Dễ thấy $x=-1$ không phải là nghiệm.

Xét $x>-1$ ta chia cho $x+1$ thì thu được phương trình:

$$2\frac{x^2}{x+1}-3\frac{x}{\sqrt{x+1}}-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=2 & (1)\\ \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=-1 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-4x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2+2\sqrt{2}$

Giải (2): $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2-4x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là:

$x=1; x=2\pm 2\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x)$

b) $\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x-18}=5\sqrt{x}$

c) $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Lời giải:

a). Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$2x^3-8x^2+10x-4-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2-4x+2)-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ (2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}=0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình:

$$2x^2-4x+2-3x\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x+2-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$$

Ta giả sử: $2x^2-4x+2=mx^2+n(2x-1) \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-2 \end{cases}$

Phương trình trở thành: $2x^2-2(2x-1)-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$. Chia cho $x^2>0$

Ta có: $2-2.\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)-3\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}}=0$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}}\geq 0$ phương trình mới là: $-2t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có: $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-8x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+2\sqrt{3} \\ x=4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Nhận xét:

+ Đối với phương trình $2x^2-4x+2-3x\sqrt{2x-1}=0$ ta có thể không cần đưa x vào trong dấu $\sqrt{\ }$ khi đó ta phân tích: $2x^2-4x+2=mx^2+n(2x-1)$ và chia như trên thì bài toán vẫn được giải quyết. Việc đưa vào $\sqrt{\ }$ là giúp các em học sinh nhìn rõ hơn bản chất bài toán.

+ Ngoài ra cần lưu ý rằng: Khi đưa một biểu thức $P(x)$ vào trong dấu $\sqrt[2n]{\ }$ thì điều kiện là $P(x) \geq 0$. Đây là một sai lầm học sinh thường mắc phải khi giải toán.

b). Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6$.

Phương trình đã cho được viết lại thành: $\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được: $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = 0$

Nếu ta giả sử $2x^2 - 9x + 9 = mx + n(x^2 - 3x - 18)$ thì m, n phải thỏa mãn

$\begin{cases} n = 2 \\ m - 3n = -9 \\ -18n = 9 \end{cases}$ điều này là hoàn toàn vô lý.

Để khắc phục vấn đề này ta có chú ý sau : $x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3)$ khi đó $\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = \sqrt{x(x-6)(x+3)} = \sqrt{(x^2 - 6x)(x+3)}$

Bây giờ ta viết lại phương trình thành: $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x+3)} = 0$

Giả sử: $2x^2 - 9x + 9 = m(x^2 - 6x) + n(x+3) \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ -6m + n = -9 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

Như vậy phương trình trở thành:

$$2(x^2 - 6x) + 3(x+3) - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x+3)} = 0$$

Chia cho $x + 3 > 0$ ta thu được: $2\left(\dfrac{x^2 - 6x}{x+3}\right) - 5\sqrt{\left(\dfrac{x^2 - 6x}{x+3}\right)} + 3 = 0$

Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^2-6x}{x+3}\right)}\ge 0 \Rightarrow 2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2-6x}{x+3}\right)}=1 \Leftrightarrow x^2-7x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7+\sqrt{61}}{2} \\ x=\frac{7-\sqrt{61}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $x=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2:

$t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2-6x}{x+3}\right)}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x^2-33x-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-\frac{3}{4}\end{array}\right. \Rightarrow x=9$

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là: $x=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$ và $x=9$

c). Điều kiện $x\ge 5$.

Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2=5\sqrt{\left(x^2-x-20\right)\left(x+1\right)}$

Giả sử: $2x^2-5x+2=m\left(x^2-x-20\right)+n\left(x+1\right)$

Khi đó ta có : $\begin{cases} m=2 \\ -m+n=-5 \\ -20m+n=2 \end{cases}$ không tồn tại m,n thỏa mãn hệ.

Nhưng ta có :

$\left(x^2-x-20\right)\left(x+1\right)=\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)=\left(x+4\right)\left(x^2-4x-5\right)$

Giả sử: $2x^2-5x+2=\alpha\left(x^2-4x-5\right)+\beta\left(x+4\right)$. Suy ra

$$\begin{cases} m=2 \\ -4m+n=-5 \\ -5m+4n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$$

Ta viết lại phương trình: $2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$.

Chia hai vế cho $x+4>0$ ta thu được:

$$2\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)-5\sqrt{\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)}+3=0$$

Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)}\geq 0$ ta thu được phương trình:

$$2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{x+4}=1 \Leftrightarrow x^2-5x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{x+4}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là:

$x=8; x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

b) $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

Lời giải: a). Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Bình phương 2 vế phương trình ta thu được:

$$x^2+4x-1+2\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=3x^2+4x+1\Leftrightarrow x^2+1-\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=0$$

Ta giả sử: $x^2+1=m(x^2+2x)+n(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=-1\\2m+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$(x^2+2x)-(2x-1)-\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=0\Leftrightarrow-\left(\frac{2x-1}{x^2+2x}\right)-\sqrt{\left(\frac{2x-1}{x^2+2x}\right)}+1=0$$

Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{2x-1}{x^2+2x}\right)}\ge0\Rightarrow-t^2-t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Về cơ bản đến đây ta hoàn toàn tìm được x. Nhưng với giá trị $\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}>0$ như vậy việc tính toán sẽ gặp khó khăn.

Để khắc phục ta có thể xử lý theo hướng khác như sau:

Ta viết lại: $\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=\sqrt{(x+2)(2x^2-x)}$ lúc này bằng cách phân tích như trên ta thu được phương trình:

$$\frac{1}{2}(2x^2-x)+\frac{1}{2}(x+2)-\sqrt{(x+2)(2x^2-x)}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-x}{x+2}-2\sqrt{\frac{2x^2-x}{x+2}}+1=0$$

Đặt

$$t=\sqrt{\frac{2x^2-x}{x+2}}\ge 0\Rightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow 2x^2-x=x+2\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Kiểm tra điều kiện ta thấy chỉ có giá trị $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện.

b). Điều kiện: $x\ge -2$.

Ta viết lại phương trình thành: $x^3-3x(x+2)+2\sqrt{(x+2)^3}=0$

Để ý rằng:

Nếu ta đặt $y=\sqrt{x+2}$ thì phương trình trở thành: $x^3-3xy^2+2y^3=0$. Đây là một phương trình đẳng cấp bậc 3. Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

+ Xét trường hợp: $x=0$ không thỏa mãn phương trình:

+ Xét $x\ne 0$. Ta chia phương trình cho x^3 thì thu được:

$$1-3\frac{(x+2)}{x^2}+2\frac{\sqrt{(x+2)^3}}{x^3}=0.$$

Đặt $t=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ ta có phương trình: $2t^3-3t^2+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \\ t=1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-4x-8=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2-2\sqrt{3}$$

Trường hợp 1: $t=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x=2; x=2-2\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $2x^3-x^2-3x+1=\sqrt{x^5+x^4+1}$

b) $5\sqrt{x^4+8x}=4x^2+8$

Lời giải:

a). Hình thức bài toán dễ làm cho người giải bối rối nhưng để ý thật kỹ ta thấy:

Chìa khóa bài toán nằm ở vấn đề phân tích biểu thức: x^5+x^4+1

Ta thấy do vế trái là biểu thức bậc 3 nên ta nghỉ đến hướng phân tích:

$x^5+x^4+1=(x^2+ax+1)(x^3+bx^2+cx+1)$. Đồng nhất hai vế ta thu được:

$a=1; b=0; c=-1$. Nên ta viết lại phương trình đã cho thành:

$$2(x^3-x+1)-(x^2+x+1)-\sqrt{(x^3-x+1).(x^2+x+1)}=0$$

Chia cho $x^2+x+1>0$ ta thu được:

$2.\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}\right)-\sqrt{\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}\right)}-1=0$. Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}\right)}\geq 0$ ta có

phương trình: $2t^2-t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} (L) \end{array}\right.$

Giải $t=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-x+1}{x^2+x+1}=1 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Kết luận: Thử lại ta thấy 3 nghiệm: $x=0, x=-1; x=2$ đều thỏa mãn.

b). Điều kiện: $x^4+8x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

Ta thấy chìa khóa bài toán nằm ở việc phân tích biểu thức:

$x^4+8x = x\left(x^3+8\right) = x\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right) = \left(x^2+2x\right)\left(x^2-2x+4\right)$ Giả sử

$4x^2+8 = m(x^2-2x+4)+n(x^2+2x) \Rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ -2m+2n=0 \Leftrightarrow m=n=2 \\ 4m=8 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$2(x^2-2x+4)+2(x^2+2x)-5\sqrt{(x^2-2x+4)(x^2+2x)}=0$. Chia hai vế cho $x^2-2x+4>0$ ta thu được: $2\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}-5\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}}+2=0$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}} \geq 0$ ta có phương trình: $2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}=4 \Leftrightarrow 3x^2-10x+16=0$ vô nghiệm

Trường hợp 2:

$t=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2+10x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{3} \\ x=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{3} \end{array}\right.$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{3} \\ x=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{3} \end{array}\right.$

Nhận xét: Ta có thể phân tích:

$$\sqrt{x^4+8x}=\sqrt{x\left(x^3+8\right)}=\sqrt{x(x+2)(x^2-2x+4)}=\sqrt{(x^2+2x)(x^2-2x+4)}$$

Chú ý rằng: Trong một số phương trình: *Ta cần dựa vào tính đẳng cấp của từng nhóm số hạng để từ đó phân tích tạo thành nhân tử chung.*

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $(x+2)(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1})+\sqrt{2x^2+5x+3}-1=0$

b) $(x^2+4)\sqrt{2x+4}=3x^2+6x-4$

c) $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

Giải:

a). Đặt $\sqrt{2x+3}=a,\sqrt{x+1}=b\Rightarrow a,b\geq 0$

Phương trình đã cho trở thành: $(a^2-b^2)(a-2b)-(a^2-ab-2b^2)=0$

$$\Leftrightarrow (a-2b)(a-b)(a+b)-(a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow (a-2b)(a-b)(a+b-1)=0$$

Ta quy bài toán về giải 3 phương trình cơ bản là: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=0 \\ 2\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1=0 \end{array}\right.$

Với điều kiện: $x\geq -1\Rightarrow a\geq 1,b\geq 0$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow 2x+3=x+1 \Leftrightarrow x=-2(L)$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow 8x+12=x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{7}(L)$

Trường hợp 3: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1=0$. Vì $\sqrt{2x+3}\geq 1, \sqrt{x+1}\geq 0 \Rightarrow VT \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-1$.

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$

b). Điều kiện $x\geq -2$

Ta thấy rằng nếu bình phương trực tiếp sẽ dẫn đến phương trình bậc 5

Để khắc phục ta sẽ tìm cách tách x^2+4 ra khỏi $\sqrt{2x+4}$

Từ đó ta viết lại phương trình như sau: $(x^2+4)\sqrt{2x+4}+x^2+4=4x^2+6x$

$\Leftrightarrow (x^2+4)(\sqrt{2x+4}+1)=2x(2x+3) \Leftrightarrow (x^2+4)(\sqrt{2x+4}+1)=2x(\sqrt{(2x+4)^2}-1)$

$\Leftrightarrow (x^2+4)(\sqrt{2x+4}+1)=2x(\sqrt{2x+4}+1)(\sqrt{2x+4}-1)$

Do $\sqrt{2x+4}+1>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$\Leftrightarrow x^2+4=2x(\sqrt{2x+4}-1) \Leftrightarrow x^2+2x+4-2x\sqrt{2x+4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x+4}\right)^2=0$

$x-\sqrt{2x+4}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{5}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{5}$

c). Điều kiện: $x\geq 2$

Giả sử

$$x^2-6x+11=m(x^2-x+1)+n(x-2)\Rightarrow\begin{cases}m=1\\-m+n=-6\\m-2n=11\end{cases}\Leftrightarrow m=1,n=-5$$

$$x^2-4x+7=p(x^2-x+1)+q(x-2)\Rightarrow\begin{cases}p=1\\-p+q=-4\\p-2q=7\end{cases}\Leftrightarrow p=1,q=-3$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\left[(x^2-x+1)-5(x-2)\right]\sqrt{x^2-x+1}-2\left[(x^2-x+1)-3(x-2)\right]\sqrt{x-2}=0$$

Chia phương trình cho $\sqrt{(x^2-x+1)^3}$ ta thu được:

$$1-5.\frac{x-2}{x^2-x+1}-2\sqrt{\frac{x-2}{x^2-x+1}}+6\sqrt{\left(\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)^3}=0$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-x+1}}\geq 0$

Ta thu được phương trình: $6t^3-5t^2-2t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{3}\\t=-\dfrac{1}{2}(L)\end{array}\right.$

+ Nếu $t=1\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow x^2-2x+3=0(VN)$

+ Nếu $t=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x^2-10x+19=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{6}$

Kết luận: $x=5\pm\sqrt{6}$

2. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

+ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn là phương pháp chọn một số hạng trong phương trình để đặt làm ẩn sau đó ta quy phương trình ban đầu về dạng một phương trình bậc 2: $mt^2 + g(x)t + h(x) = 0$ (phương trình này vẫn còn ẩn x)

+ Vấn đề của bài toán là phải chọn giá trị m bằng bao nhiêu để phương trình bậc 2 theo ẩn t có giá trị Δ chẵn $\left(\Delta = \left[A(x)\right]^2\right)$ như thế viêc tính t theo x sẽ được dễ dàng.

+ Thông thường khi gặp các phương trình dạng:

$ax^2 + bx + c + (dx+e)\sqrt{px^2 + qx + r} = 0$ thì phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn tỏ ra rất hiệu quả:

+ Để giải các phương trình dạng này ta thường làm theo cách:

- Đặt $\sqrt{f(x)} = t \Rightarrow t^2 = f(x)$
- Ta tạo ra phương trình: $mt^2 + g(x)t + h(x) = 0$

Ta có $\Delta = \left[g(x)\right]^2 - 4m.h(x) = f_1(m)x^2 + g_1(m)x + h_1(m)$. Để Δ có dạng $\left[A(x)\right]^2$ thì điều kiện cần và đủ là

$\Delta_m = \left[g_1(m)\right]^2 - 4f_1(m).g_1(m) = 0 \Rightarrow m$

Ta xét các ví dụ sau:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $x^2 + 1 - (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 0$

b) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

c) $(2x+7)\sqrt{2x+7}=x^2+9x+7$ (Trích đề TS lớp 10 Chuyên Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội 2009)

Giải:

a) Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}>0\Rightarrow t^2=x^2-2x+3$

Phương trình đã cho trở thành: $x^2+1-(x+1)t=0$

Ta sẽ tạo ra phương trình: $mt^2-(x+1)t+x^2+1-m(x^2-2x+3)=0$

(Ta đã thêm vào mt^2 nên phải bớt đi một lượng $mt^2=m(x^2-2x+3)$)

Phương trình được viết lại như sau:

$$mt^2-(x+1)t+(1-m)x^2+2mx+1-3m=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(x+1)^2-4m\left[(1-m)x^2+2mx+1-3m\right]$$

$$=(4m^2-4m+1)x^2+(2-8m^2)x+12m^2-4m+1$$

Ta mong muốn

$$\Delta=(\mathrm{Ax}+B)^2\Leftrightarrow \Delta_m=(1-4m^2)^2-(12m^2-4m+1)(4m^2-4m+1)=0\Leftrightarrow m=1$$

Phương trình mới được tạo ra là: $t^2-(x+1)t+2x-2=0$

Ta có $\Delta=x^2-6x+9=(x-3)^2$

Từ đó ta có: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x+1-(x-3)}{2}=2 \\ t=\dfrac{x+1+(x-3)}{2}=x-1 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}=2 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

+ Trường hợp 2:

$$t=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x+3=x^2-2x+1 \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm.

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là: $x=1\pm\sqrt{2}$

b) Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Bình phương 2 vế phương trình và thu gọn ta được:

$$9x^2-16\sqrt{8-2x^2}+8x-32=0.$$

Đặt $t=\sqrt{8-2x^2}$ ta tạo ra phương trình là:

$$mt^2-16t-m(8-2x^2)+9x^2+8x-32=0$$
$$\Leftrightarrow mt^2-16t+(9+2m)x^2+8x-8m-32=0$$
$$\Delta'=64-m\left[(9+2m)x^2+8x-8m-32\right]$$
$$=(-2m^2-9m)x^2+8mx+8m^2+32m+64$$

Ta mong muốn $\Delta'=(Ax+B)^2 \Leftrightarrow \Delta=0$ phải có nghiệm kép . Tức là:

$$\Delta'_m=16m^2-(-2m^2-9m)(8m^2+32m+64)=0 \Leftrightarrow m=-4$$

Từ đó suy ra phương trình mới là: $-4t^2-16t+x^2+8x=0$

Tính được: $\Delta'=4x^2+32x+64=(2x+8)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{8-(2x+8)}{-4}=\dfrac{x}{2} \\ t=\dfrac{8+(2x+8)}{-4}=-\dfrac{x}{2}-4 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: $t=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2}=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4(8-2x^2)=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

+ Trường hợp 2:

$$t=-\frac{x}{2}-4\Leftrightarrow\sqrt{8-2x^2}=-\frac{x}{2}-4\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -8\\4(8-2x^2)=(x+8)^2\end{cases}VN$$

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

c). Đặt $\sqrt{2x+7}=t$ ta tạo ra phương trình:
$mt^2-\left(2x+7\right)t+x^2+\left(9-2m\right)x+7-7m=0$

Làm tương tự như trên ta tìm được $m=1$. Nên phương trình có dạng

$$t^2-\left(2x+7\right)t+x^2+7x=0\Rightarrow\Delta=\left(2x+7\right)^2-4\left(x^2+7x\right)=49\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x+7\\t=x\end{array}\right.$$

giải theo các trường hợp của t ta tìm được $x=1+2\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3=0$

b) $x^3+6x^2-2x+3-(5x-1)\sqrt{x^3+3}=0$

c) $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Lời Giải:

a) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x+1}$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2-8xt+(10-2m)x^2+(3m-9)x+3-m=0$$

Ta có $\Delta = 16x^2 - m\left[(10-2m)x^2 + (3m-9)x + 3 - m\right]$

$$= 16x^2 - m\left[(10-2m)x^2 + (3m-9)x + 3 - m\right]$$

$$= (2m^2 - 10m + 16)x^2 + (9m - 3m^2)x + m^2 - 3m$$

Ta cần : $\Delta_m = (9m - 3m^2)^2 - 4(2m^2 - 10m + 16)(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m = 3$

Phương trình đã cho trở thành: $3t^2 - 8xt + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3}x \\ t = 2x \end{array}\right.$

Trường hợp
1
$t = \dfrac{2}{3}x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \dfrac{2}{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 9(2x^2 - 3x + 1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 14x^2 - 27x + 9 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $t = 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ -3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm: $x = \dfrac{3}{2}, x = \dfrac{3}{7}, x = \dfrac{1}{3}$

b) Điều kiện: $x \ge 1$. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 3} \ge 0 \Leftrightarrow x^3 = t^2 - 3$. Do hệ số của x^3 trong phương trình là: 1. Phương trình đã cho trở thành:
$t^2 - (5x-1)t + 6x^2 - 2x = 0$

$\Delta = (5x-1)^2 - 4(6x^2 - 2x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{(5x-1)-(x-1)}{2}=2x \\ t=\dfrac{(5x-1)+(x-1)}{2}=3x-1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^3+3}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^3-4x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}(L) \end{array}\right.$

Trường hợp 2:

$\sqrt{x^3+3}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ x^3-9x^2+6x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4+2\sqrt{3} \\ x=4-2\sqrt{3}(L) \end{array}\right.$

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm: $x=1, x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}, x=4+3\sqrt{2}$

a) Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Ta viết phương trình thành:

$4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}=3x+1+\sqrt{1-x^2}$.

Bình phương 2 vế ta thu được phương trình mới:

$$16(x+1)+4(1-x)-16\sqrt{1-x^2}=9x^2+6x+1+2(3x+1)\sqrt{1-x^2}+1-x^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-6x-18+(6x+18)\sqrt{1-x^2}=0$$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2+(6x+18)t+(8+m)x^2-6x-18-m=0$$

Có $\Delta'=(3x+9)^2-m\left[(8+m)x^2-6x-18-m\right]$

$$= (9-8m-m^2)x^2 + (54+6m)x + m^2 + 18m + 81$$

Ta mong muốn

$\Delta = (Ax+B)^2 \Leftrightarrow \Delta'_m = (3m+27)^2 - (9-8m-m^2)(m^2+18m+81) = 0$

Từ đó tính được $m = -8$

Phương trình đã cho trở thành: $-8t^2 + (6x+18)t - 6x - 10 = 0$

Ta có $\Delta' = (3x+9)^2 - 8(6x+10) = (3x+1)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-3x-9-(3x+1)}{-8} = \dfrac{3x+5}{4} \\ t = \dfrac{-3x-9+(3x+1)}{-8} = 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ thỏa mãn điều kiện

Trường hợp 2:
$t = \dfrac{3x+5}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{1-x^2} = 3x+5 \Leftrightarrow 16(1-x^2) = 9x^2 + 30x + 25$

$16(1-x^2) = 9x^2 + 30x + 25 \Leftrightarrow 25x^2 + 30x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

Thử lại ta thấy: $x = -\dfrac{3}{5}$ thỏa mãn phương trình:

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = 0, x = -\dfrac{3}{5}$

Chú ý: Ở bước cuối cùng khi giải ra nghiệm ta phải thử lại vì phép bình phương lúc đầu khi ta giải là không tương đương.

Ví dụ 4) Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5-x} = x^2 - 5$

b) $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$

$8x^2 + 3x + \left(4x^2 + x - 2\right)\sqrt{x+4} = 4$

Giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \le 5 \\ x^2 \ge 5 \end{cases}$

Bình phương 2 vế ta thu được: $5^2 - (2x^2+1).5 + x + x^4 = 0$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 của 5 ta có:

$$\Delta = (2x^2+1)^2 - 4(x+x^4) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x+1)^2$$

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} 5 = \dfrac{1}{2}(2x^2+1+2x-1) = x^2 + x \\ 5 = \dfrac{1}{2}(2x^2+1-2x+1) = x^2 - x + 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta có 4 nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

b) Ta viết lại phương trình thành: $3 - (2x^2+1)\sqrt{3} + x + x^4 = 0$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 của $\sqrt{3}$ ta có:

$\Delta = (2x^2+1)^2 - 4(x+x^4) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x+1)^2$

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(2x^2+1+2x-1) = x^2+x \\ \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(2x^2+1-2x+1) = x^2-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-\sqrt{3}=0 \\ x^2-x+1-\sqrt{3}=0 \end{array}\right.$

Giải 2 phương trình trên ta thu được các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$

c) Điều kiện $x \geq -4$

Ta viết lại phương trình thành:
$x+4+\left(4x^2+x-2\right)\sqrt{x+4}+8x^2+2x-8=0$. Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn $\sqrt{x+4}$ thì

$\Delta = \left(4x^2+x-2\right)^2 - 4\left(8x^2+2x-8\right) = \left(4x^2+x-6\right)^2$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = -2x \\ \sqrt{x+4} = 2x+1 \end{array}\right.$

Giải 2 trường hợp ta thu được các nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{65}}{8} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{57}}{8} \end{array}\right.$$

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $3(\sqrt{2x^2+1}-1) = x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$

b) $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{2x^2-1} = 3x+1$

Lời Giải:

a) Ta viết lại phương trình thành: $3x^2 + x + 3 + (8x-3)\sqrt{2x^2+1} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2+1} \geq 0$ suy ra $t^2 = 2x^2 + 1$.

Ta tạo ra phương trình: $mt^2 + (8x-3)t + (3-2m)x^2 + x + 3 - m = 0$.

Ta có $\Delta = (8x-3)^2 - 4m\left[(3-2m)x^2 + x + 3 - m\right] =$

$$= (8m^2 - 12m + 64)x^2 - (48+4m)x + 4m^2 - 12m + 9.$$

Ta cần $\Delta'_m = (24+2m)^2 - (8m^2-12m+64)(4m^2-12m+9) = 0 \Rightarrow m = 3$.

Phương trình trở thành: $3t^2 + (8x-3)t - 3x^2 + x = 0$.

Ta có: $\Delta = (8x-3)^2 - 12.(-3x^2+x) = 100x^2 - 60x + 9 = (10x-3)^2$.

Từ đó tính được : $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3-8x-(10x-3)}{6} = -3x+1 \\ t = \dfrac{3-8x+(10x-3)}{6} = -\dfrac{x}{3} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2+1} = -3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2+1} = -\dfrac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 17x^2 + 9 = 0 \end{cases} VN$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 0$

b) Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^2+3x+6} = 3x + 1 - \sqrt{2x^2-1}$.

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình mới:

$10x^2+3x-6-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=0$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}\geq 0$ suy ra $t^2=2x^2-1$.

Ta tạo ra phương trình: $mt^2-2(3x+1)t+(10-2m)x^2+3x-6+m=0$. Ta có

$\Delta'=(3x+1)^2-m\left[(10-2m)x^2+3x-6+m\right]$

$=(2m^2-10m+9)x^2+(6-3m)x-m^2+6m+1$.

Ta cần $\Delta_m=(6-3m)^2-4(2m^2-10m+9)(-m^2+6m+1)=0\Rightarrow m=4$.

Phương trình trở thành: $4t^2-2(3x+1)t+2x^2+3x-2=0$.

Ta có: $\Delta'=(3x+1)^2-4.(2x^2+3x-2)=x^2-6x+9=(x-3)^2$.

Từ đó tính được: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3x+1-(x-3)}{4}=\dfrac{x+2}{2} \\ t=\dfrac{3x+1+(x-3)}{4}=\dfrac{2x-1}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2-1}=\dfrac{x+2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq -2 \\ 7x^2-4x-8=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7} \\ x=\dfrac{2-2\sqrt{15}}{7} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}$ là thỏa mãn điều kiện .

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2-1}=\dfrac{2x-1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2+4x-5=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện .

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$ và $x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Dấu hiệu:

Các bài toán giải được bằng hằng đẳng thức thường có dạng:

$ax^3+bx^2+cx+d=e\left(fx+h\right)\sqrt{px+q}$ hoặc
$ax^3+bx^2+cx+d=e\sqrt[3]{px^3+qx^2+rx+s}$

Phương pháp chung để giải các bài toán này là: Đặt $\sqrt[n]{f\left(x\right)}=y$ với $n=2$ hoặc $n=3$.

Đưa phương trình ban đầu về dạng $m\left(Ax+B\right)^3+n\left(Ax+B\right)=my^3+ny$

Ví dụ 1:

a) $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$

b) $8x^3-13x^2+7x=2\sqrt[3]{x^2+3x-3}$

c) $\sqrt[3]{24x-11}-16x\sqrt{2x-1}-1=0$.

d) $x^3=6\sqrt[3]{6x+4}+4$

e) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

f) $\left(4x^2+1\right)x=\left(3-x\right)\sqrt{5-2x}$

Giải:

Những phương trình có dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=\left(ex+h\right)\sqrt{px+q}$ (1)

Hoặc: $ax^3+bx^2+cx+d=e\sqrt[3]{px^3+qx^2+rx+h}$ (2)

ta thường giải theo cách:

<u>Đối với (1):</u> Đặt $\sqrt{px+q}=y$ khi đó $x=\dfrac{y^2-p}{q}$ thay vào phương trình ta đưa về dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=Ay^3+By$. Sau đó biến đổi phương trình thành: $A.\left[u(x)\right]^3+B.u(x)=Ay^3+By$

<u>Đối với (2):</u> Đặt $g\sqrt[3]{px^3+qx^2+rx+h}=y$ sau đó tạo ra hệ tạm:

$\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d=s.y \\ g^3\left(px^3+qx^2+rx+h\right)=y^3 \end{cases}$ cộng hai phương trình ta thu được:

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=s.y+y^3$ sau đó đưa phương trình về dạng:

$$\left[u(x)\right]^3+s.\left[u(x)\right]=y^3+s.y$$

Ta xét các ví dụ sau:

a) Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=y$ ta có hệ sau: $\begin{cases} 8x^3-36x^2+53x-25=y \\ 3x-5=y^3 \end{cases}$ (I)

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được:

$8x^3-36x^2+56x-30=y^3+y$ (*). Ta nghỉ đến việc biến đổi vế trái thành:

$\left[A(x)\right]^3+A(x)$ để phương trình có dạng: $\left[A(x)\right]^3+A(x)=y^3+y$

Giả sử: $8x^3-36x^2+56x-30=(2x+a)^3+(2x+a)$.

Đồng nhất hệ số của $x^2 \Rightarrow a=-3$

Như vậy phương trình $(*)$ có dạng: $(2x-3)^3+(2x-3)=y^3+y$ (1)

Đặt $z=(2x-3)$. Từ phương trình ta suy ra $z^3+z=y^3+y$

$z^3+z=y^3+y \Leftrightarrow (z-y)\left(z^2+zy+y^2+1\right)=0$. Do

$$z^2+zy+y^2+1=\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1>0, \forall y,z \Rightarrow PT \Leftrightarrow y=z$$

$$\Leftrightarrow y=2x-3 \Leftrightarrow 8x^3-36x^2+53x-25=2x-3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Qua ví dụ trên ta thấy việc chuyển qua hệ tạm (I) giúp ta hình dung bài toán được dễ dàng hơn.

b) Đặt $\sqrt[3]{x^2+3x-3}=y$ ta thu được hệ phương trình sau:

$\begin{cases} 8x^3-13x^2+7x=2y \\ x^2+3x-3=y^3 \end{cases}$. Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

$$8x^3-12x^2+10x-3=y^3+2y \Leftrightarrow (2x-1)^3+2(2x-1)=y^3+2y \ (*)$$

Đặt $z=2x-1$ ta thu được phương trình: $z^3+2z=y^3+2y$

$$\Leftrightarrow (z-y)\left(z^2+zy+y^2+2\right)=0 \Leftrightarrow z=y \Leftrightarrow y=2x-1 \Leftrightarrow 8x^3-13x^2+7x=4x-2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{16} \end{array}\right.$$

c) Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$. Ta đặt $\sqrt{2x-1}=a\ge 0$ thì phương trình đã cho trở thành: $\sqrt[3]{12a^2+1}-8a^3-8a-1=0 \Leftrightarrow 8a^3+8a+1=\sqrt[3]{12a^2+1}$

Đặt $\sqrt[3]{12a^2+1}=y$ ta thu được hệ sau: $\begin{cases}8a^3+8a+1=y\\12a^2+1=y^3\end{cases}$. Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được: $(2a+1)^3+(2a+1)=y^3+y$ (*)

Đặt $2a+1=z$ ta có: $z^3+z=y^3+y$.

Tương tự như các bài toán trên ta suy ra $z=y$.

Theo (*) ta có $\Leftrightarrow y=2a+1\Rightarrow 8a^3+8a+1=2a+1\Leftrightarrow a=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Kết luận: $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

d) Đặt $y=\sqrt[3]{6x+4}$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases}x^3-4=6y\\6x+4=y^3\end{cases}\Leftrightarrow x^3+6x=y^3+6y\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+6\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

Thay vào phương trình ta có:

$$x^3-6x-4=0\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-2x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

e) Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ:

$$\begin{cases}x^3+1=2y\\2x=y^3+1\end{cases}\Leftrightarrow x^3+2x=y^3+2y\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

Suy ra $x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

f) $\left(4x^2+1\right)x=\left(3-x\right)\sqrt{5-2x}$

Đặt $\sqrt{5-2x}=y\ge 0\Rightarrow x=\dfrac{5-y^2}{2}$ thay vào ta có:

$$\left(4x^2+1\right)x=\left(3-\frac{5-y^2}{2}\right)y\Leftrightarrow 8x^3+2x=y^3+2y\Leftrightarrow\left(2x-y\right)\left(4x^2+2x.y+y^2+2\right)=0$$

$y=2x\Leftrightarrow 4x^2+2x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$ Thử lại ta thấy chỉ có

$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

b) $3x^3+4x^2-1=\sqrt[3]{x^6+2x^3+x^2}$

c) $\left(\dfrac{x^3-x}{2}\right)^3=2x+\sqrt[3]{\dfrac{x^3+3x}{2}}$

Giải:

a)Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình:

Chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được:

$\dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$ ta thu được hệ sau: $\begin{cases}\dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2y\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3=y^3\end{cases}$.

Cộng hai phương trình của hệ ta có:

$$\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^2}+\frac{10}{x}-3=y^3+2y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}-1\right)^3+2\left(\frac{2}{x}-1\right)=y^3+2y \quad (*)$$

Đặt $z=\frac{2}{x}-1$ ta thu được:

$$z^3+2z=y^3+2y \Rightarrow (z-y)\left(z^2+yz+y^2+2\right)=0 \Leftrightarrow z=y$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2}{x}-1 \Leftrightarrow \frac{7}{x}-\frac{13}{x^2}+\frac{8}{x^3}=\frac{4}{x}-2 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3}-\frac{13}{x^2}+\frac{3}{x}+2=0.$$

Suy ra $x=1, x=\frac{-5\pm\sqrt{89}}{4}$

b) Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho x thì thu được phương trình tương đương là: $3x^2+4x-\frac{1}{x}=\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$ ta có hệ sau: $\begin{cases} 3x^2+4x-\frac{1}{x}=y \\ x^3+2+\frac{1}{x}=y^3 \end{cases}$. Cộng hai phương trình của hệ ta có: $(x+1)^3+(x+1)=y^3+y$.

Từ phương trình ta suy ra $y=x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-\frac{1}{x}=x+1$

$$3x^2+4x-\frac{1}{x}=x+1 \Leftrightarrow 3x^3+3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right..$$

c) Ta viết lại phương trình thành: $\left(x^3-x\right)^3-16x=4\sqrt[3]{4x^3+12x}$

Đặt $y=\sqrt[3]{4x^3+12x}$ ta có hệ tạm sau: $\begin{cases}\left(x^3-x\right)^3-16x=4y\\ 4x^3+12x=y^3\end{cases}$

Cộng hai vế hệ phương trình ta thu được: $\left(x^3-x\right)^3+4\left(x^3-x\right)=y^3+4y$

Đặt $z=x^3-x$ ta có:

$z^3+4z=y^3+4y\Leftrightarrow\left(z-y\right)\left(z^2+yz+y^2+4\right)=0\Leftrightarrow\left(x^3-x\right)^3=4x^3+12x$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2\left(x^2-1\right)^3-4x^2-12\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=3\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x=0;x=\pm\sqrt{3}$

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Những kỹ thuật qua trọng để giải phương trình giải bằng phương pháp đánh giá ta thường sử dụng là:

+ Dùng hằng đẳng thức: $A_1{}^2+A_2{}^2+..A_n{}^2=0\Leftrightarrow A_1=A_2=..=A_n=0$

+ Dùng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, Bất đẳng thức hình học

+ Dùng phương pháp khảo sát hàm số để tìm $GTLN, GTNN$:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$.

b) $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=0$.

c) $x\left(5x^3+2\right)-2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0$ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Trường chuyên Amsterdam 2014).

d) $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

Lời giải:

a) Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$4x^2-4x\sqrt{x+3}+(x+3)+2x-1-2\sqrt{2x-1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\sqrt{x+3}=0\\\sqrt{2x-1}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

b) Điều kiện: $x\ge 1$. Ta viết lại phương trình thành:

$$13\left(x-1-\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\right)+9\left(x+1-3\sqrt{x+1}+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+9\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}=0\\\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

c) Điều kiện $x\ge-\frac{1}{2}$.Ta viết lại phương trình thành:

$$5x^4+\left(2x+1-2\sqrt{2x+1}+1\right)=0\Leftrightarrow 5x^4+\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\\sqrt{2x+1}-1=0\end{cases}$$

Suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

d) Điều kiện $x\ge 1; y\ge 4; z\ge 9$ ta viết lại phương trình thành:

$$2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}+6\sqrt{z-9}=x+y+z$$

$$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1+y-4-4\sqrt{y-4}+4+z-9-6\sqrt{z-9}+9=0$$

$$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-9}-3\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-1=0\\\sqrt{y-4}-2=0\\\sqrt{z-9}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=8\\z=18\end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$

b) $4x^4+x^2+3x+4=3\sqrt[3]{16x^3+12x}$

c) $96x^2-20x+2+x\sqrt{8x-1}-\sqrt[3]{4x(8x+1)}=0$

Giải:

a) Vì $16x^4+5>0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $4x^3+x\geq 0\Leftrightarrow x(4x^2+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Để ý rằng khi $x=\dfrac{1}{2}$ thì $VT=VP$ nên ta nghỉ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{1}{2}$. Mặt khác khi $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4x^3+x=4.\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}=1$ thì Từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau: Theo bất đẳng thức Cô si dạng $3\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c$ ta có

Ta có $6\sqrt[3]{4x^3+x}=2.3.\sqrt[3]{\left(4x^3+x\right).1.1}\leq 2\left(4x^3+x+1+1\right)=8x^3+2x+4$

Mặt khác ta có:

$16x^4+5-(8x^3+2x+4)=16x^4-8x^3-2x+1=\left(2x-1\right)^2\left(4x^2+2x+1\right)\geq 0$

Suy ra $VT\geq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$\begin{cases}2(2x-1)^2(2x^2+2x+1)=0\\4x=(4x^2+1)=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Tóm lại: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$

b) Vì $4x^4+x^2+3x+4>0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $16x^3+12x\geq 0\Leftrightarrow 4x(4x^2+3)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Để ý rằng khi $x=\dfrac{1}{2}$ thì $VT=VP$ nên ta nghỉ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$. Khi $x=\frac{1}{2}$ thì $16x^3+12x=16.\frac{1}{8}+12.\frac{1}{2}=8$. Từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau:

Theo bất đẳng thức Cô si dạng $3\sqrt[3]{abc}\le a+b+c$ ta có

$$3\sqrt[3]{\left(16x^3+12x\right)}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(16x^3+12x\right).8.8}\le\frac{1}{4}\left(16x^3+12x+8+8\right)=4x^3+3x+4$$

Mặt khác ta có:

$4x^4+x^2+3x+4-(4x^3+3x+4)=4x^4-4x^3+x^2=x^2(2x-1)^2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2(2x-1)^2=0\\2=x(4x^2+3)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

c) Điều kiện: $x\ge\frac{1}{8}$. Để ý rằng $x=\frac{1}{8}$ là nghiệm của phương trình nên ta có lời giải như sau:

$$\sqrt[3]{4x(8x+1)}=\sqrt[3]{1.1.4x(8x+1)}\le\frac{1+1+4x(8x+1)}{3}=\frac{32x^2+4x+2}{3}.$$

Mặt khác ta có

$$96x^2-20x+2-\frac{32x^2+4x+2}{3}=\frac{256x^2-64x+4}{3}=\frac{4(8x-1)^2}{3}\ge 0.$$

Suy ra $96x^2-20x+2+x\sqrt{8x-1}-\sqrt[3]{4x(8x+1)}\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{8}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4x-3}}=\frac{2}{x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}\right)$

c) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}=\sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{5x-2}{3}}$

d) $\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}=\sqrt{2}$

Giải:

a) Điều kiện: $x>\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho có thể viết lại như sau: $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x}{\sqrt[4]{4x-3}}=2$.

\+ Ta chứng minh: $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\geq 1$. Thật vậy bất đẳng thức tương đương với $x^2\geq 2x-1\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$. Điều này là hiển nhiên đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Ta chứng minh: $\dfrac{x}{\sqrt[4]{4x-3}}\geq 1$. Thật vậy bất đẳng thức tương đương với

$x^4\geq 4x-3\Leftrightarrow x^4-4x+3\geq 0\Leftrightarrow (x^2-2x+1)(x^2+2x+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+3)\geq 0$

Điều này là hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Từ đó suy ra $VT\geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}\right)$

Ta thấy rằng: $4x-1=x+x+2x-1;5x-2=x+2x-1+2x-1$

Theo bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\ge \frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$$

Mặt khác ta có

$(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})^2\le 3(4x-1)\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\le \sqrt{3(4x-1)}$ (Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 3 số)

Từ đó suy ra: $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2x-1}}\ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}}+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}}+\frac{1}{\sqrt{5x-2}}\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

c) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng:

$(\mathrm{ax}+by+cz)^2\le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ ta có:

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2\le (1+1+1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}\le \sqrt{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

Lại có $\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\le \sqrt{3(4x-1)}$ suy ra

$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}\le\sqrt{3\sqrt{3(4x-1)}}=\sqrt[4]{27(4x-1)}$
(1)

Tương tự: $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}\le\sqrt{3\sqrt{3(5x-2)}}=\sqrt[4]{27(5x-2)}$
(2)

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều (1), (2) ta có:

$$3\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}\right)\le\sqrt[4]{27(4x-1)}+\sqrt[4]{27(5x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2x-1}\le\sqrt[4]{\frac{4x-1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{5x-2}{3}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

c) Ta có

$$VT=\sqrt{(x+3)(7-x)}-\sqrt{(x+2)(5-x)}=\frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}}$$

Điều kiện xác định là $-2\le x\le 5$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{(x+3)(7-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+6)(7-x)}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2x+6)+(7-x)\right]=\frac{x+13}{2\sqrt{2}}$$

và

$$\sqrt{(x+2)(5-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+4)(5-x)}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2x+4)+(5-x)\right]=\frac{x+9}{2\sqrt{2}}$$

Như vậy: $\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}(x+11)$

Từ đó ta suy ra: $VT=\dfrac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}}\ge\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}(2x+6)=(7-x)\\(2x+4)=(5-x)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Vậy $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(7x^2-x+4\right)$

b) $\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}=\frac{1}{2}\left(36x-8x^2-21\right)$

c) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

Giải:

Điều kiện: $x\ge 1\vee x\le -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số $\left(1;1;-x\right)$ và $\left(\sqrt{3x^2-1};\sqrt{x^2-x};\sqrt{x^2+1}\right)$ ta có: $VT(*)\le \sqrt{\left(x^2+2\right)\left(5x^2-x\right)}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Do $x\ge 1\vee x\le -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2-x>0$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$VP(*)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2-x+2\left(x^2+1\right)\right]\ge \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{\left(5x^2-x\right)2\left(x^2+2\right)}$$
$$=\sqrt{\left(5x^2-x\right)\left(x^2+2\right)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$ và $x=\frac{4}{3}$. Từ đó ta có nghiệm của PT(*) là: $x=-1$

b) Ta có:

$$VT=\sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2+(4x-6)^2}$$

$$\geq |3x+1|+\left|2x-\frac{5}{2}\right|+|x| \Rightarrow VT\geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right|=\left|6x-\frac{3}{2}\right|\geq 6x-\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{3}{2}$. Mặt khác ta cũng có:

$$VP=\frac{1}{2}\left[12x-3-2\left(4x^2-12x+9\right)\right]=\frac{1}{2}\left[12x-3-2(2x-3)^2\right]\leq \frac{1}{2}(12x-3)=6x-\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{3}{2}$. Từ đó ta có nghiệm của phương trình là $x=\frac{3}{2}$

c) Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{1(x^2+x-1)}\leq \frac{1}{2}\left[1+(x^2+x-1)\right]=\frac{x^2+x}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1=(x^2+x-1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

$$\sqrt{-x^2+x+1}=\sqrt{1(-x^2+x+1)}\leq \frac{1}{2}\left[1+(-x^2+x+1)\right]=\frac{-x^2+x+2}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1=(-x^2+x+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $VT\leq \frac{x^2+x}{2}+\frac{-x^2+x+2}{2}=(x+1)$.

Mặt khác ta có $x^2-x+2-(x+1)=(x-1)^2\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{14-x^3}+x=2(1+\sqrt{x^2-2x-1})$

b) $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=12(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$

Giải:

a) Điều kiện: $x^2-2x-1\geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{14-x^3}=2\sqrt{x^2-2x-1}+2-x$

Do $2\sqrt{x^2-2x-1}\geq 0$ nên từ phương trình ta cũng suy ra:
$\sqrt[3]{14-x^3}\geq 2-x$

Lập phương 2 vế ta thu được: $14-x^3\geq (2-x)^3 \Leftrightarrow 6(x^2-2x-1)\leq 0$

Như vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi
$x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: $x=1+\sqrt{2}$ và $x=1-\sqrt{2}$

b) Điều kiện: $0\leq x\leq 4$.

Xét $f(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ trên $[0;4]$ Dễ thấy
$\sqrt{12}=f(0)\leq f(x)\leq f(4)=12 \Rightarrow VT\leq 12$ (1)

Xét $g(x)=\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}$ trên $[0;4]$ ta có

Dễ thấy $1=g(4)\leq g(x)\leq g(0)=\sqrt{5}$. Suy ra $VP\geq 12$ (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình có nghiệm khi $VT=VP=12 \Leftrightarrow x=4$.

MỘT SỐ CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ KHÁC

1) Đặt ẩn phụ hoàn toàn để quy về phương trình một ẩn.

+ Điểm mấu chốt của phương pháp này là phải chọn một biểu thức $f(x)$ để đặt $f(x)=t$ sao cho phần còn lại phải biểu diễn được theo ẩn t. Những bài toán dạng này nói chung là dễ.

+ Trong nhiều trường hợp ta cần thực hiện phép chia cho một biểu thức có sẵn ở phương trình từ đó mới phát hiện ẩn phụ. Tùy thuộc vào cấu trúc phương trình ta có thể chia cho $g(x)$ phù hợp (thông thường ta chia cho x^k với k là số hữu tỷ)

+ Đối với những bài toán mà việc đưa về một ẩn dẫn đến phương trình mới phức tạp như: Số mũ cao, căn bậc cao .. thì ta có thể nghỉ đến hướng đặt nhiều ẩn phụ để quy về hệ phương trình hoặc dựa vào các hằng đẳng thức để giải toán.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2=(1-\sqrt{x})(2x-3\sqrt{x}+3)$

b) $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$ c) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$

d) $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

Giải:

a) Điều kiện: $x\geq 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại như sau:
$x^2=(1-\sqrt{x})\left[2x+3(1-\sqrt{x})\right]\Leftrightarrow x^2=2x(1-\sqrt{x})+3(1-\sqrt{x})^2$. Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Ta chia hai vế cho x^2 thì

thu được: $1=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)+3\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)^2$. Đặt $\frac{1-\sqrt{x}}{x}=t$ ta có phương trình

theo t: $3t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=-1$ ta có: $\frac{1-\sqrt{x}}{x}=-1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1=0(VN)$

Trường hợp 2: $t=\frac{1}{3}$ ta có:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\frac{3-\sqrt{21}}{2}(L) \\ \sqrt{x}=\frac{3+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{15+3\sqrt{21}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất: $x=\frac{15+3\sqrt{21}}{2}$

b) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Vì vậy ta chia hai vế cho x thì thu được: $x+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-2=0$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$ ta thu được phương trình:

$$t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-4x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 2-\sqrt{3} \\ x\ge 2+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho $\sqrt{x}$ ta thu được: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-4+\frac{1}{x}}=3$. Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow t^2=x+\frac{1}{x}+2$ theo bất đẳng thức Cô si ta có $t\geq 2$. Thay vào phương trình ta có:

$$\sqrt{t^2-6}=3-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq 3\\ t^2-6=t^2-6t+9\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{25}{4}=x+\frac{1}{x}+2\Leftrightarrow 4x^2-17x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x=4,x=\frac{1}{4}$

d). Nhận xét: $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình:

Ta chia hai vế cho x khi đó phương trình trở thành:

$x-\frac{1}{x}+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-3=0$. Đặt $t=\sqrt{x-\frac{1}{x}}\geq 0$ phương trình trở thành:

$$t^2+2t-3=0\Rightarrow t=1\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

b) $7\sqrt{3x-7}+(4x-7)\sqrt{7-x}=32$.

Giải:

a) Điều kiện $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$.

Phương trình được viết lại như sau:

$7\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)-2\left[(2x-3)\sqrt{2x-3}+(5-2x)\sqrt{5-2x}\right]$ Đặt
$=2+8\sqrt{(5-2x)(2x-3)}$

$t=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\Rightarrow\sqrt{(5-2x)(2x-3)}=\dfrac{t^2-2}{2}$. Điều kiện
$\left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)$.

Phương trình đã cho có dạng: $t^3-4t^2+t+6=0\Rightarrow t=2\Rightarrow x=2$

Ngoài ra ta cũng có thể giải phương trình trên bằng cách đưa về hệ.

b) Điều kiện: $\dfrac{7}{3}\le x\le 7$ .Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\left[\frac{1}{2}(3x-7)+\frac{3}{2}(7-x)\right]\sqrt{3x-7}+\left[\frac{1}{2}(7-x)+\frac{3}{2}(3x-7)\right]\sqrt{7-x}=32$$

$$\Leftrightarrow\left[(3x-7)+(7-x)\right]\sqrt{3x-7}+\left[(7-x)+(3x-7)\right]\sqrt{7-x}=64$$

Đặt $t=\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x}$
$\Rightarrow t^3=(3x-7)\sqrt{3x-7}+(7-x)\sqrt{7-x}+3\sqrt{(3x-7)(7-x)}\left(\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x}\right)$

Từ phương trình suy ra $t^3=64\Leftrightarrow t=4$. Hay $\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x}=4$

Bình phương 2 vế ta thu được:

$$\sqrt{(3x-7)(7-x)}=8-x\Leftrightarrow 4x^2-44x+113=0\Leftrightarrow x=\frac{11\pm2\sqrt{2}}{2}$$

Tại sao ta phân tích được hai phương trình như trên:

Ta thấy với những phương trình:

$(ax+b)\sqrt{cx+d}+(ex+h)\sqrt{gx+k}+r\sqrt{(cx+d)(gx+k)}+s=0$ thì một trong những cách xử lý khá hiệu quả là:

Phân tích: $ax+b=m(cx+d)+n(gx+k)$ và $ex+h=m'(cx+d)+n'(gx+k)$ sau đó ta có thể đặt ẩn phụ trực tiếp , hoặc đặt hai ẩn phụ để quy về hệ.

Ví dụ:

Khi giải phương trình:

$(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$ ta thực hiện các phân tích :

+ Giả sử: $13-4x=m(2x-3)+n(5-2x)$.

Đồng nhất hai vế ta suy ra: $\begin{cases}2m-2n=-4\\-3m+5n=13\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2},n=\dfrac{7}{2}$

+ Tương tự ta giả sử: $(4x-3)=m'(2x-3)+n'(5-2x)\Rightarrow m'=\dfrac{7}{2},n'=\dfrac{3}{2}$

Khi giải phương trình: $7\sqrt{3x-7}+(4x-7)\sqrt{7-x}=32$.

Ta thực hiện phân tích: $m(3x-7)+n(7-x)=7$ và $p(3x-7)+q(7-x)=4x-7$ Sau đó đồng nhất 2 vế để tìm m, n, p, q ta có: $m=\dfrac{1}{2};n=\dfrac{3}{2};p=\dfrac{3}{2};q=\dfrac{1}{2}$

Như vậy ngoài cách đặt ẩn phụ như trên ta có thể giải các bài toán theo cách khác như sau:

a) Điều kiện $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{2x-3},b=\sqrt{5-2x}$ thì $a^2+b^2=2$.

Từ cách phân tích trên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (3a^2+7b^2)a+(3b^2+7a^2)b=4+16ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ 3(a+b)^3-2ab(a+b)-16ab-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ 3(a+b)^3+\left[2-(a+b)^2\right](a+b)+8\left[2-(a+b)^2\right]-4=0 \end{cases}.$$

Đặt $a+b=S, ab=P$ điều kiện $S,P\ge 0; S^2\ge 4P$.

Ta có hệ mới sau:

$$\begin{cases} S^2-2P=2 \\ 2S^3-8S^2+2S+12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow x=2$$

b) Đặt $a=\sqrt{3x-7}, b=\sqrt{7-x}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)^3=64 \\ a^2+3b^2=14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a^2+3b^2=14. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta thu được: $a,b\Rightarrow x$.

2) Đặt ẩn phụ hoàn để quy về hệ đối xứng loại 2:

Phương pháp này đặc biệt hiệu quả với các phương trình dạng:

$ax^2+bx+c=d\sqrt{ex+h}$ hoặc $ax^3+bx^2+cx+d=e\sqrt[3]{gx+h}$

Với mục đích tạo ra các hệ đối xứng hoặc gần đối xứng ta thường làm theo cách:

Đối với những phương trình dạng: $ax^2+bx+c=d\sqrt{ex+h}$ **.**

Ta đặt $my+n=\sqrt{ex+h}$ thì thu được quan hệ:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=d(my+n) \\ m^2y^2+2mny+n^2=ex+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ax}^2+bx-dmy+c-dn=0 \\ m^2y^2+2mny-ex+n^2-h=0 \end{cases}$$

Ta mong muốn có quan hệ $x=y$. Nếu điều này xảy ra thì từ hệ trên ta sẽ có: $\frac{a}{m^2}=\frac{b-dm}{2mn}=\frac{c-dn}{n^2-h}(*)$.

Công việc còn lại là chọn m,n chẵn thỏa mãn $(*)$

Đối với những phương trình dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=e\sqrt[3]{gx+h}$

Ta đặt: $my+n=\sqrt[3]{gx+h}$ thì thu được hệ:

$$\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d=e(my+n) \\ m^3y^3+3m^2ny^2+3mn^2y^2+n^3=gx+h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^3+bx^2+cx-emy+d-en=0 \\ m^3y^3+3m^2ny^2+3mn^2y^2-gx+n^3-h=0 \end{cases}$$

Để thu được quan hệ $x=y$ ta cần: $\frac{a}{m^3}=\frac{b}{3m^2n+3mn^2}=\frac{c-em}{-g}=\frac{d-en}{n^3-h}$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x-\frac{37}{3}=0$

c) $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

d) $27\sqrt[3]{81x-8}=27x^3-54x^2+36x-54$

Giải:

a) Điều kiện: $x\ge -\frac{5}{4}$. Đặt $my+n=\sqrt{4x+5}$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x^2-6x-1=my+n \\ m^2y^2+2mny+n^2=4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12x-2my-2-2n=0 \\ m^2y^2+2mny-4x+n^2-5=0 \end{cases}$$

Ta cần tìm m,n để tạo ra quan hệ $x=y \Leftrightarrow \frac{4}{m^2}=\frac{-12-2m}{2mn-4}=\frac{-2-2n}{n^2-5}$

Chọn $m=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2-2n}{n^2-5}=1 \\ \dfrac{-16}{4n-4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+2n-3=0 \\ 4n=-12 \end{cases} \Rightarrow n=-3$

Chú ý:

Việc nhân số 2 vào phương trình (1) của hệ để tạo ra $4x^2-12x-1$ là rất cần thiết để chọn m được chẵn và nhóm $4x^2-12x-2$ thành bình phương biểu thức bậc 2 được dễ hơn.

Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}$ thì thu được hệ:

$$\begin{cases} 4x^2-12x-2=2(2y-3) \\ (2y-3)^2=4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2=4y+5 \\ (2y-3)^2=4x+5 \end{cases}.$$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta có:

$$(2x-3)^2-(2y-3)^2=4(y-x) \Leftrightarrow 2(x-y)(4x+4y-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y=2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1:

$$x=y \Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{4x+5} \begin{cases} (2x-3)^2=4x+5 \\ x\ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$$

Trường hợp:

$$y=2-x \Leftrightarrow 2(2-x)-3=\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)^2=4x+5 \\ x\le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: $x=2+\sqrt{3}, x=1-\sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{4}$.

Phương trình đã cho được viết lại như sau: $9x^2-26x+\frac{47}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}$

Đặt $my+n=\sqrt{4x+1}$

$$\Rightarrow\begin{cases}9x^2-26x+\frac{37}{3}=\frac{2}{3}(my+n)\\ m^2y^2+2mny+n^2=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x^2-26x-\frac{2}{3}my+\frac{37}{3}-\frac{2}{3}n=0\\ m^2y^2+2mny-4x+n^2-1=0\end{cases}$$

Ta cần: $\frac{9}{m^2}=\frac{-26-\frac{2}{3}m}{2mn-4}=\frac{\frac{37}{3}-\frac{2}{3}n}{n^2-1}$. Chọn

$$m=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{-28}{6n-4}=1\\ \frac{-\frac{37}{3}-\frac{2}{3}n}{n^2-1}=1\end{cases}\Rightarrow n=-4$$

Đặt $3y-4=\sqrt{4x+1}\Rightarrow$

Hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(3x-4)^2=2x+2y+1\\ (3y-4)^2=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\ (x-y)(9x+9y-22)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\ \left[\begin{array}{l}x=y\\ 9x+9y-22=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Giải phương trình ứng với 2 trường hợp trên ta thu được các nghiệm là

$$x=\frac{14+\sqrt{61}}{9} \text{ và } x=\frac{12-\sqrt{53}}{9}$$

Chú ý: Ta có thể tìm m,n nhanh hơn bằng cách:

c) Đặt $my+n=\sqrt{4x+5}$ khi đó ta có hệ: $\begin{cases}(2x-3)^2=2(my+n)+11\\(my+n)^2=4x+5\end{cases}$

Trừ hai phương trình cho nhau: $(2x-3)^2-(my+n)^2=2my-4x+2n+6$

Để có quan hệ: $x=y$ ta cần: $\begin{cases}2my=4x\\2n+6=0\end{cases}\Rightarrow m=2;n=-3$.

Tương tự khi giải quyết câu b).

d) Đặt $my+n=\sqrt[3]{3x-5}$ ta có hệ sau:

$$\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25\Leftrightarrow\begin{cases}8x^3-36x^2+53x-my-n-25=0\\m^3y^3+3m^2ny^2+3mn^2y-3x+n^3+5=0\end{cases}$$

Ta chọn m,n sao cho $\frac{8}{m^3}=\frac{-36}{3m^2n}=\frac{53-m}{3mn^2-3}=\frac{-n-25}{n^3+5}\Rightarrow m=2,n=-3$

Đặt $2y-3=\sqrt[3]{3x-5}$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(2x-3)^3=2y-3+x-2\\(2y-3)^3=3x-5\end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta thu được:

$(2x-3)^3-(2y-3)^3=2y-2x$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)\left[(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1\right]=0\Leftrightarrow x=y$$

Do $(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1$

$$=\left[(2x-3)+\left(\frac{2y-3}{2}\right)\right]^2+\frac{3}{4}(2y-3)^2+1>0$$

Giải $x=y$ ta có: $(2x-3)^2=3x-5\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+54x-27=3x-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(8x^2-20x+11\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=2$, $x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$

d) Ta viết lại phương trình thành: $27\sqrt[3]{81x-8}=(3x-2)^3-46$

Đặt $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=27(3y-2)+46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=81x-8 \end{cases}.$$

Trừ hai phương trình của hệ ta thu được: $(3x-2)^3-(3y-2)^3=81(y-x)$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[(3x-2)^2+(3x-2)(3y-2)+(3y-2)^2+27\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào ta được:

$$(3x-2)^3=27(3x-2)+46 \Leftrightarrow 27x^3-54x^2-33x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3\pm2\sqrt{5}}{3} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là: $x=0$, $x=\dfrac{3\pm2\sqrt{5}}{3}$

Chú ý:

\+ **Với những phương trình dạng:** $\left[f(x)\right]^n+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$ **(*)**

Bằng phép đặt $t=f(x)$; $y=\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta có hệ đối xứng loại 2 là:

$$\begin{cases} t^n+b=ay \\ y^n+b=at \end{cases}$$

\+ **Trong phương trình (*)** nếu ta thay a, b bởi các biểu thức chứa x thì cách giải phương trình vẫn như trên. Những phương trình dạng này thường có hình thức và lời giải khá đẹp.

* **Ta xét ví dụ sau:**

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2-11x+6=(x-1)\sqrt{2x^2-6x+6}$

b) $8x^3-13x+7=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$.

Giải:

a) Ta viết lại phương trình thành:

$$(2x-3)^2+x-3=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3)-(x-3)}$$

Đặt $a=2x-3, b=\sqrt{(x-1)(2x-3)-(x-3)}$ ta thu được hệ sau:

$\begin{cases} a^2+x-3=(x-1)b \\ b^2+x-3=(x-1)a \end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ ta được:

$$a^2-b^2=(x-1)(b-a)\Leftrightarrow(a-b)(a+b+x-1)=0$$

Trường hợp 1:

$$a=b\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{2x^2-6x+6}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2} \\ 2x^2-6x+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}(L) \\ x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}(TM) \end{array}\right.$$

Trường hợp 2:

$$2x-3+\sqrt{2x^2-6x+6}+x-3=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-6x}=6-3x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\le 2 \\ 7x^2-30x+36=0 \end{cases}(VN)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

b) Ta viết lại phương trình thành:

$$(2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$$

Đặt $a=2x-1, b=\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}=\sqrt[3]{3x^2-2}$ ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} a^3-(x^2-x+1)=(x+1)b \\ b^3-(x^2-x+1)=(x+1)a \end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được: $(a-b)(a^2+ab+b^2+x+1)=0$

Trường hợp 1: $a=b$ ta có:

$$2x-1=\sqrt[3]{3x^2-2} \Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $a^2+ab+b^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+x+1=0$

$$\Leftrightarrow 4\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+4x^2+2(2x-1)^2+5=0(VN)$$

Tóm lại phương trình có 2 nghiệm là $x=1, x=-\frac{1}{8}$.

3) Một số cách đặt ẩn phụ khác:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6$

b) $2(x^2+x+1)^2+2x^2+2x-3-\sqrt{4x+5}=0$.

Giải:

a) Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x+6} = z \\ \sqrt[3]{z+6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^3 - x = 6 \\ y^3 - z = 6 \end{cases}$

Mặt khác với các phép đặt ẩn phụ trên, từ phương trình trong đầu bài, ta có $x^3 - y - 6 = 0$.

Như vậy ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = y+6 & (1) \\ y^3 = z+6 & (2) \\ z^3 = x+6 & (3) \end{cases}$

Nhìn thấy hệ trên không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$ (x là số lớn nhất trong 3 số x, y, z hay $x \ge y, x \ge z$)

Nếu $x > y$, từ (1) và (2) suy ra $y + 6 = x^3 > y^3 = z + 6 \Rightarrow y > z$

Khi đó từ (2), (3) suy ra $y + 6 = x^3 > y^3 = x + 6 \Rightarrow z > x$. Mâu thuẫn với giả thiết $x \ge z$ ở trên. Do đó phải có $x = y$.

Với $x = y$, từ (1) và (2) suy ra $y = z$

Vậy $x = y = z$

Phương trình (1) trở thành: $x^3 - x - 6 = 0$ hay $(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$ (4)

Vì $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$ nên PT (4) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Đặt $y = x^2 + x - 1$ khi đó phương trình đưa về

$$2y^2 + 2(y+1) = 3 + \sqrt{5+4x} \Leftrightarrow y^2 + y - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5+4x}}{2}$$

Đặt $z=\dfrac{-1+\sqrt{5+4x}}{2}$ điều kiện $z\ge\dfrac{-1}{2}$.

Ta có $2z+1=\sqrt{5+4x}\Rightarrow 4z^2+4z+1=5+4x\Rightarrow z^2+z-1=x$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+x-1=y\\ y^2+y-1=z\\ z^2+z-1=x\end{cases}$ (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)=y+1\\ y(y+1)=z+1\\ z(z+1)=x+1\end{cases}$.

Do điều kiện $z\ge\dfrac{-1}{2}\Rightarrow y\ne-1\Rightarrow z\ne-1$.

Nhân các phương trình theo vế rồi rút gọn được $xyz=1$.

Mặt khác từ hệ phương trình (*), cộng các phương trình vế theo vế ta có:

$x^2+y^2+z^2=3\ge\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\le1$.

Do đẳng thức xảy ra nên phải có $x^2=y^2=z^2=1\Leftrightarrow x=y=z=1$ (vì $x,y,z\ne-1$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+4x+7}=x^4+4x^3+3x^2-2x-7$

b) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

c) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

b) $2(5x-3)\sqrt{x+1}+5(x+1)\sqrt{3-x}=3(5x+1)$

Giải:

Cách 1: Biến đổi pt như sau:

$$4\sqrt{2x^2+4x+7}=\left(2x^2+4x+7\right)^2-16\left(2x^2+4x+7\right)+35\ (1)$$

Đặt $\sqrt{2x^2+4x+7}=a$ (với $a\ge\sqrt{5}$), ta có:

$$4a=a^4-16a^2+35\Leftrightarrow\left(a^2-6\right)^2=\left(2a+1\right)^2\Leftrightarrow\left(a^2-2a-7\right)\left(a^2+2a-5\right)=0(*)$$

Với $a\ge\sqrt{5}$ thì $a^2+2a-5>0$, nên từ (*) suy ra $a^2-2a-7=0$, phương trình này có 2 nghiệm là $a=1\pm2\sqrt{2}$. Đối chiếu với điều kiện $a\ge\sqrt{5}$ chỉ chọn được $a=1+2\sqrt{2}$.

Khi đó $\sqrt{2x^2+4x+7}=1+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+2x-\left(1+2\sqrt{2}\right)=0$ (**)

Phương trình (**) có 2 nghiệm là $-1\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. Vậy tập nghiệm của PT đã cho là $\left\{-1\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right\}$.

Cách 2: Biến đổi PT về dạng: $\sqrt{2\left(x+1\right)^2+5}=\left(x+1\right)^4-3\left(x+1\right)^2-5$

Đặt $\left(x+1\right)^2=u;\sqrt{2\left(x+1\right)^2+5}=v,\left(u\ge0;v\ge\sqrt{5}\right)$. Ta có hệ:

$$\begin{cases}u^2-3u-5=v\\2u+5=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-u=v^2+v\\2u+5=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v-1=0\\v=\sqrt{2u+5}\end{cases}$$

Dẫn đến $u^2-4u-4=0$, PT này có 2 nghiệm $2\pm2\sqrt{2}$. Do $u\ge0$ nên chọn $u=2+2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra kết quả như cách 1.

b) Điều kiện trên ta được: $x\ge\sqrt{\frac{5}{2}}$ hoặc $-1\le x<0$ (*).

Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{2x-\frac{5}{x}}=x-\frac{4}{x}$

Đặt $u=\sqrt{x-\frac{1}{x}};v=\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$ với $u\ge 0;v\ge 0$. Ta được: $u-v=x-\frac{4}{x}$ (1)

Lại có $v^2-u^2=\left(2x-\frac{5}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)=x-\frac{4}{x}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $v^2-u^2=u-v\Leftrightarrow (u-v)(u+v+1)=0$. Vì $u+v+1>0$ nên $u-v=0\Leftrightarrow x-\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Thử lại thấy nghiệm $x=-2$ không thỏa mãn điều kiện , nghiệm $x=2$ thỏa mãn phương trình.

c) Điều kiện: $-5<x<5$.

Đặt: $a=\sqrt{5+x};b=\sqrt{5-x}$ $(a,b>0)$.

Khi đó ta có: $6-2x=2b^2-4;\ 6+2x=2a^2-4$

Khi đó ta có:

$$\frac{2b^2-4}{a}+\frac{2a^2-4}{b}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow (2b^2-4)a+(2a^2-4)b=\frac{8}{3}ab$$
$$\Leftrightarrow 2ab(a+b)-4(a+b)=\frac{8}{3}ab$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2ab(a+b)-4(a+b)=\frac{8}{3}ab\\ a^2+b^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2ab(a+b)-4(a+b)=\frac{8}{3}ab\\ (a+b)^2-2ab=10\end{cases}$$

Đặt: $S=a+b;P=ab,S\ge\sqrt{10}$.

Hệ phương trình trên trở thành: $\begin{cases} 2SP - 4S = \dfrac{8}{3}P \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $P = \dfrac{S^2 - 10}{2}$ thế lên phương trình trên và rút gọn ta được: $6S^3 - 8S^2 - 84S + 80 = 0 \Leftrightarrow (S-4)(3S^2 + 8S - 10) = 0 \Leftrightarrow$ $S = 4$ (TM)

$3S^2 + 8S - 10 = 0 (VN)$ vì $S > \sqrt{10}$.

$S = 4$

$\Rightarrow P = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5+x}.\sqrt{5-b} = 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$ (TM)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 4; x = -4$

d) Điều kiện $-1 \le x \le 3$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{3-x} \end{cases}$ ta suy ra $\begin{cases} u^2 = x+1 \\ 3u^2 - 2v^2 = 5x - 3 \\ 4u^2 - v^2 = 5x + 1 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$2\left(3u^2 - 2v^2\right) + 5uv^2 = 3\left(4u^2 - v^2\right) \Leftrightarrow 6u^2(2-u) = v^2(u+3).$$

Thay $v^2 = 4 - u$ ta thu được phương trình:

$$2\left(3u^2 - 2v^2\right) + 5uv^2 = 3\left(4u^2 - v^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 6u^2\left(2-u\right) = \left(4-u^2\right)\left(u+3\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2 \\ u = \dfrac{5+\sqrt{145}}{10} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{7+\sqrt{145}}{10} \end{array}\right.$

Khi gặp các phương trình dạng: $a\sqrt[n]{b+c.f(x)}+d\sqrt[m]{e+h.f(x)}=g$ **ta có thể đặt ẩn phụ theo cách:**

Đặt $\sqrt[n]{b+c.f(x)}=u \Rightarrow f(x)=\dfrac{u^n-b}{c}$, $\sqrt[m]{e+h.f(x)}=v \Rightarrow f(x)=\dfrac{v^m-e}{h}$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} au+dv=g \\ \dfrac{u^n-b}{c}-\dfrac{v^m-e}{h}=0 \end{cases}$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

b) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1$

c) $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

d) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

Giải:

a) Điều kiện: $x\le 12$

Đặt $u=\sqrt[3]{24+x}; v=\sqrt{12-x} \Rightarrow u\le \sqrt[3]{36}, v\ge 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u\left(u^2+u-12\right)=0(*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm $u=0; u=-4; u=3$ thỏa mãn $u\le \sqrt[3]{36}$.

Từ đây ta tìm được: $x=-24; x=-88; x=3$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x=-24; x=-88; x=3$.

b) Điều kiện: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \le x \le 1$.

Ta thấy tổng của biểu thức trong căn bằng 1 nên ta đặt:

$a = \sqrt{1-x^2}, b = \sqrt[4]{x^2+x-1}, c = \sqrt[6]{1-x};\ a,\ b,\ c \ge 0$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a,b,c \ge 0 \end{cases}$

Vì $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le a,b,c \le 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \le a \\ b^4 \le b \\ c^6 \le c \end{cases} \Rightarrow a^2+b^4+c^6 \le 1$.

Hệ phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} a=a^2 \\ b=b^4 \\ c=c^6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ thì $\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn là t:

$$1+\frac{t^2-1}{3}=t \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1;\ t=2$$

Vậy ta có: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-x^2}=0 \\ VN\left(VT<2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0; x=1$

d) Sử dụng đẳng thức: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Lập phương 2 vế ta thu được:

$$\Leftrightarrow 2x-3+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3$$

Thay $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$ thì phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0 \Leftrightarrow x=1, x=2, x=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$

b) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}+4$

c) $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$

d) $(x-1)(x+3)+2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=8$

Giải:

a) Điều kiện: $x \geq \frac{6}{7}$.

Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}, (t \geq 0) \Rightarrow 14x+2\sqrt{49x^2+7x-42}=t^2-1$

BPT đã cho trở thành:

$$t+t^2-1=181 \Leftrightarrow t^2+t-182=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=13 \\ t=-14 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=13$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13 \; (*)$$

Vì hàm số $f(x)=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-13$ là hàm đồng biến và $f(6)=0$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x=6$.

b) Điều kiện: $x > 0$. Phương trình $\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\frac{1}{4x}\right)+4$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}},\left(t\ge\sqrt{2}\right)\Rightarrow x+\frac{1}{4x}=t^2-1$.

Phương trình trở thành:

$$5t=2\left(t^2-1\right)+4\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x+\frac{1}{4x}=3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\\x=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$ là nghiệm của pương trình.

c) Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=x\sqrt{2(1-x^2)}$$

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\frac{t^2-1}{2}=x\sqrt{1-x^2}$. Ta có phương trình:

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\,\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t^2+2\sqrt{2}t+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-\sqrt{2}\pm 1\end{array}\right.$$

\+ Nếu: $t=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}-x=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-x\right)^2=1-x^2\left(do\left|x\right|\le 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

+ Nếu $t=-\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-1-\sqrt{2}$ vô nghiệm ,do $VT \ge -1 > VP$

+ Nếu $t=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1-\sqrt{2} \\ x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

d). Điều kiện: $\frac{x+3}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow x \le -3$ hoặc $x>1$. Đặt $t=\left(x-1\right)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ thì $t^2=\left(x-1\right)\left(x+3\right)$ ta có phương trình: $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array}\right.$

Nếu $t=2 \Rightarrow \left(x-1\right)\left(x+3\right)=4 \Leftrightarrow x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Nết $t=-4$ thì $\left(x-1\right)\left(x+3\right)=16 \Leftrightarrow x^2+2x-19=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{5} \\ x=-1-2\sqrt{5} \end{array}\right.$

Tóm lại phương trình có 4 nghiệm là:
$x=\left\{-1+2\sqrt{2};-1-2\sqrt{2};-1-2\sqrt{5};-1+2\sqrt{5}\right\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Giải các phương trình sau:

1) $x^2+x+6+2x\sqrt{x+3}=4\left(x+\sqrt{x+3}\right)$ (1).

2) $\sqrt{x+2}=\dfrac{x^2+2x+2}{2x+1}$.

3) $\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$.

4) $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x(x-3)}$.

5) Tìm tất cả các số nguyên dương $p>1$ sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0$$

6) $\sqrt[3]{x^2-4x+31}+x^2=4x-1$.

7) $x^4+\sqrt{x^2+2016}=2016$.

8) Tìm k để phương trình sau có nghiệm:

$\left(x^2+2\right)\left[x^2-2x(2k-1)+5k^2-6k+3\right]=2x=1$. Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Amsterdam 2002).

9) Cho phương trình $m\sqrt{x^6+1}=3\left(x^4+2\right)$

a) Giải phương trình với $m=10$.

b) Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

10) $x^2-2(x+1)\sqrt{x^2-1}-3x^2+6x-1=0$.

11) $x+1=\sqrt{2(x+1)+2\sqrt{2(x+1)+2\sqrt{4(x+1)}}}$.

12) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$ (*).

13) $\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$.

14) $\sqrt{x(3x+1)}-\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}$ (1).

15) $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

16) $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$ (1).

17) $\sqrt{12-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4x^2-\frac{3}{x^2}}=4x^2$ (*).

18) $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$ (THPT chuyên KHTN-ĐHQG Hà Nội 2011-2012).

19) Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{25x\left(2x^2+9\right)}\ge 4x+\frac{3}{x}$. Trích đề thi vòng 2, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam 2004-2005

20) $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x\left(x^2-x+1\right)}\le\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^3}{x}}$

21) $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}\le x^3+30$

22) $(x+1)\sqrt{2x^2-2x}=2x^2-3x-2$ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2014)

23) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$. (Trích đề tuyển sinh lớp 10 PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh 2015).

24) $8x^2+16x-20-\sqrt{x+15}=0$

25) $4x^2-11x+10=(x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}$

26) $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

27) $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+71=0$

28) $\left(2x^2-4x+1\right)\sqrt{2x-1}=4x^2-7x+3$

29) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

30) $\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2=0$

31) $5\sqrt{x^3+1}=2\left(x^2+2\right)$

32) $\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$

33) $x^3+6x^2-2x+3=(5x-1)\sqrt{x^3+3}$

34) $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

35) $25x+9\sqrt{9x^2-4}=\frac{2}{x}+\frac{18x}{x^2+1}$

36) $\sqrt{20x^2+80x+125}+\le 2x+1+4\sqrt{3x+6}$

37) $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Giải:

Điều kiện: $x\ge -3$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2-3x+2x\sqrt{x+3}-4\sqrt{x+3}+6=0 \quad (2)$

Đặt $t=x+\sqrt{x+3}$

Do đó (2) $\Rightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow (t-1)(t-3)=0\Leftrightarrow t=1;t=3$

Với $t=1$, ta giải phương trình $x+\sqrt{x+3}=1\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-x\ge 0\\ x+3=(1-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x+3=1-2x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x^2-3x-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

Với $t=3$, ta giải phương trình $x+\sqrt{x+3}=3\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, x=1$.

2)

Điều kiện $x\ge -2; x\ne -\dfrac{1}{2}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x+2}=x^2+2x+2$

$\Leftrightarrow (x+x+1)\sqrt{x+2}=x(x+1)+(x+2)$

$\Leftrightarrow (x+2)-(2x+1)\sqrt{x+2}+x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-x\right)\left[\sqrt{x+2}-(x+1)\right]=0$

Trường hợp 1: $\sqrt{x+2}=x$ với $x\ge 0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn) hoặc $x=-1$ (loại)

Trường hợp 2: $\sqrt{x+2}=x+1$ với $x\ge -1 \Rightarrow x^2+x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2, x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3)

Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{1-x} \quad (u, v\ge 0)$

Phương trình đã cho trở thành:
$u+2u^2=-v^2+v+3uv \Leftrightarrow v^2-(3u+1)v+2u^2+u=0 \quad (1)$

Xem (1) như là phương trình bậc hai đối với biến v, giải ra được $u=v$ hoặc $v=2u+1$.

Xét $v=2u+1$, vì $v^2=1-x=2-u^2 \Rightarrow 2-u^2=\left(2u+1\right)^2$

$\Leftrightarrow 5u^2+4u-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{5}(tm) \\ u=-1(l) \end{array}\right.$. Với $u=\dfrac{1}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{24}{25}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0; x=-\dfrac{24}{25}$.

4) Giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x=0 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$

Dễ thấy $x=0$ là 1 nghiệm và $x=3$ không là nghiệm của phương trình đã cho

Xét $x\ne 0, x\ne 3$ khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}+\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{4}{x-3}}+\sqrt{1+\frac{5}{x-3}}=1$$

Đặt $a=\sqrt{1+\dfrac{4}{x-3}} \quad (a>0)$; $b=\sqrt{1+\dfrac{5}{x-3}} \quad (b>0)$

Ta có hệ $\begin{cases} a+b=1 \\ 5a^2-4b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4-\sqrt{21}(l) \\ a=-4+\sqrt{21} \end{cases}$

$$\Rightarrow 1+\frac{4}{x-3}=-4+\sqrt{21} \Leftrightarrow x=\frac{-2\sqrt{21}}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0; x=\frac{-2\sqrt{21}}{3}$.

5) Phương trình đã cho tương đương với $(x+p-1)\left(x^2+x+\frac{1}{p-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-p+1 & (1) \\ x^2+x+\frac{1}{p-1}=0 & (2) \end{array}\right.$ Yêu cầu bài toán tương đương (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=-(p-1)$

Vậy $p\in\{2;3;4\}$.

6)

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{(x-2)^2+27}+(x-2)^2=3$.

Do $\sqrt[3]{(x-2)^2+27}+(x-2)^2\geq 3, \forall x$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

7)

Phương trình đã cho tương đương với:

$x^4+x^2+\frac{1}{4}=(x^2+2016)-\sqrt{x^2+2016}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+2016}-\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}=\sqrt{x^2+2016}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{x^2+2016} \Leftrightarrow x^4+x^2-2015=0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{8061}}{2}}; x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{8061}}{2}}$.

8) Giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x^2+2\right)\left[x^2-2x.\left(2k-1\right)+\left(4k^2-4k+1\right)+\left(k^2-2k+1\right)+1\right]=2x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2\right)\left(x-2k+1\right)^2+\left(x^2+2\right)\left(k-1\right)^2+\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=k=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $k=1$.

9) Phương trình đã cho tương đường với:

$$m\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=3\left[\left(x^2+1\right)+\left(x^4-x^2+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{3}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}}$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2+1}}$, $(t>0)$ ta được: $\dfrac{m}{3}=t+\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow t^2-\dfrac{m}{t}.t+1=0$

a) Với $m=10$ ta có phương trình: $3t^2-10t+3=0$

ta suy ra $t=3$ hoặc $t=\dfrac{1}{3}$

b) Tự giải

10) .Giải:

Điều kiện: $|x|\ge 1$**.** Phương trình tương đương với

$$x^2-1-2\left(x+1\right)\sqrt{x^2-1}+x^2+2x+1-4x^2+4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(2-x-\sqrt{x^2-1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\sqrt{x^2-1}\\ 2-x=\sqrt{x^2-1}\end{array}\right.$$

Trường hợp $3x=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ 9x^2=x^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le 1\le 1\\ 8x^2=-1\end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp

$$2-x=\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ x^2-4x+4=x^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ 4x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ x=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

11) .Giải:

Điều kiện $x\ge -1$.Ta có $x=3$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x>3$. Đặt $x+1=y,\left(y>4\right)$, phương trình đã cho

thành: $y=\sqrt{2y+2\sqrt{2y+2\sqrt{4y}}}$.

Ta có $\sqrt{4y}<\sqrt{y^2}=y\Rightarrow 2\sqrt{4y}<2y$

$$\Rightarrow\sqrt{2y+2\sqrt{2y+2\sqrt{4y}}}<\sqrt{2y+2\sqrt{4y}}<\sqrt{2y+2y}=\sqrt{4y}<y$$

Phương trình vô nghiệm.

Với $0<x<3$. Chứng minh tương tự, ta có phương trình vô nghiệm.

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

12) Giải:

Ta có (*) $\Leftrightarrow\dfrac{4}{x}-x+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}=0\quad(1)$

Đặt $u=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}};v=\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$ thì $u,v\ge 0$ và $u^2-v^2=\dfrac{4}{x}-x$

Do đó (1) thành: $u^2-v^2+u-v=0\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(u+v+1\right)=0\Leftrightarrow u=v$ (vì $u,v\ge 0$)

Từ đó ta có: $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}=2x-\dfrac{5}{x}\ge 0\quad(2)$

Phương trình $x-\frac{1}{x}=2x-\frac{5}{x}$ có nghiệm là $x=\pm 2$

Từ (2) suy ra chỉ có $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

13)

Giải:Điều kiện $x\geq 0$.

Phương trình tương đương với:

$$x+9=x+\frac{8}{x+1}+\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow\frac{9x+1}{x+1}-\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{8x}{x+1}-\frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}+1=0\Leftrightarrow\left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}=1\Leftrightarrow 8x=x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$$ (thỏa mãn

14) Giải:

Điều kiện: $x\geq 1$. Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của (1)

Với $x\neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\sqrt{x^2}\neq 0$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow\sqrt{3+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=2$

Đặt $u=\sqrt{3+\frac{1}{x}}\geq 0, v=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\geq 0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u-v=2\\ u^2+v^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+2 & (2)\\ (2+v)^2+v^2=4 & (3)\end{cases}$

Giải hệ ta được $v=0,u=2$ từ đó ta có $x=1$.

15) .Giải:

$$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)+\left(x+1-4\sqrt{x+1}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

16) Giải:

Điều kiện: $x \geq -2$

Nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}>0$, ta được phương trình tương đương:

$$1+\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5}=1 \\ \sqrt{x+2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-4 & (l) \\ x=-1 & (tm) \end{array}\right. .$$

17) Giải:

Đặt $y=x^2, y \geq 0$, ta có (*) thành: $\sqrt{12-\dfrac{3}{y}}=4y-\sqrt{4y-\dfrac{3}{y}}$

Bình phương rồi biến đổi thành: $\left(\sqrt{4y^2-3}-\sqrt{y}\right)^2=0 \Leftrightarrow 4y^2-y-3=0$

Do đó các nghiệm của phương trình là $x=1, x=-1$.

18) Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Nhân cả tử và mẫu vế trái với biểu thức $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ ta thu được:

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1-x}+1=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \quad (*)$$

Nếu $x=1$ thì $VT(*)=3=VP(*)$ nên $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $0\le x<1$ thì $\sqrt{1-x}>0 \Rightarrow 3\sqrt{1-x}+3>3$ hay $\text{VT}(*)>3$ với $0\le x<1$

Vì $0\le x<1$ nên $\sqrt{x+3}<\sqrt{1+3}=2, \sqrt{x}<\sqrt{1}=1 \Rightarrow VP(*)<3$

Do đó phương trình đã cho không có nghiệm trong nửa khoảng $\left[0;1\right)$.

Vậy phương tình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

19) Giải:

Điều kiện: $x\ne 0$

Trường hợp $x>0$: áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4x+\frac{3}{x}=\frac{5}{3}x+\frac{2x^2+9}{3x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{5}{3}x.\frac{5}{3}x.\frac{2x^2+9}{3x}}=\sqrt[3]{25x\left(2x^2+9\right)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{5}{3}x=\frac{2x^2+9}{3x} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

Trường hợp $x<0$: từ phần trên ta thấy, với mọi $x<0$ đều thỏa mãn bất phương trình

Đáp số $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x<0 \end{array}\right.$.

20) .Giải:

Điều kiện $x > 0$

Chia cả hai vế bất phương trình cho $\sqrt{x\left(x^2+1\right)}$ và đặt $t = x + \frac{1}{x}, t \ge 2$, ta đưa về bất phương trình $\sqrt{1-\frac{1}{t}} \le t - \sqrt{t-\frac{1}{t}}$

Với điều kiện $t \ge 2$ thì cả hai vế của (1) đều dương. Bình phương hai vế ta đưa về bất phương trình tương đương $\left(\sqrt{t-\frac{1}{t}}-1\right)^2 \ge 0$

Bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $t \ge 2$.

Vậy nghiệm của bất phương tình đã cho là $x > 0$.

21) .Giải:

Điều kiện: $2 \le x \le 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \le \sqrt{\frac{x-2+4-x}{2}} = 1$;

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{\sqrt{x-2}.1} \le \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} \le \frac{\frac{x-2+1}{2}+1}{2} = \frac{x+1}{4};$$

$$\sqrt[4]{4-x} \le \frac{-x+7}{2}; 6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{x^3.27} \le x^3+27$$

Do đó $VT \le VP$ với mọi x thỏa mãn $2 \le x \le 4$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $2 \le x \le 4$.

22) Đặt $t = \sqrt{2x^2-2x} \ge 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x = t^2$. Phương trình trở thành : $t^2 - (x+1)t - x - 2 = 0$. Ta có

$\Delta = x^2 + 2x + 1 + 4x + 8 = \left(x+3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x+1-\left(x+3\right)}{2} = -1 \\ t = \dfrac{x+1+x+3}{2} = x+2 \end{array}\right.$. Do $t \ge 0$ ta chỉ

cần giải: $\sqrt{2x^2 - 2x} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{13}$.

23) Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ 1 - 2x^2 \ge 0 \\ x - x^2 \ge 0 \end{cases}$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$2x - 1 + 1 - 2x^2 + 2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(1-2x^2\right)} = 4\left(x - x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(1-2x^2\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-2x^2} - \sqrt{2x-1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện nài toán chỉ có nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

24) Ta viết lại phương trình thành:

$$16x^2 + 32x - 40 - 2\sqrt{x+15} = 0 \Leftrightarrow \left(4x+4\right)^2 - 56 = \sqrt{4x+60}$$

Đặt $\sqrt{4x+60} = 4y + 4$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \left(4y+4\right)^2 = 4x + 60 \\ \left(4x+4\right)^2 - 56 = 4y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4y+4\right)^2 = 4x + 60 \\ \left(4x+4\right)^2 = 4y + 60 \end{cases}.$$

Trừ từng vế 2 phương trình của hệ ta có:

$$\left(4x+4\right)^2-\left(4y+4\right)^2=4\left(y-x\right)\Leftrightarrow 16\left(x-y\right)\left(x+y+8\right)=4\left(y-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 4\left(x+y+8\right)=1 \end{array}\right.$$

Giải phương trình ứng với 2 trường hợp ta thu được: $x=1;x=\dfrac{-9+\sqrt{221}}{9}$

25) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta viết lại phương trình thành:

$$\left(2x-3\right)^2+(x+1)=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3)-(x+1)}$$

Đặt $\begin{cases} u=2x-3 \\ v=\sqrt{(x-1)(2x-3)-(x+1)} \end{cases}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2+x+1=(x-1)v \\ v^2+x+1=(x-1)u \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta có:

$$\left(u-v\right)\left(u+v+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-v-x+1 \end{array}\right.$$

Giải theo hai trường hợp ta thu được phương trình vô nghiệm.

26) Cách 1: Ta viết lại phương trình thành:

$$x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

Chia phương trình cho $\left(x^2+x+1\right)>0$ ta thu được:

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)}$. Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)}>0$

Ta có phương trình: $2t^2+\frac{\sqrt{3}}{3}t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Giải $\sqrt{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=1$

*** Cách 2:**

Xét $x>0$ chia hai vế phương trình ta có: $x-3+\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\geq 2$ ta có phương trình: $t-3=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t^2-1}$

Xét $x<0$ chia hai vế phương trình ta có: $x-3+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$ ta có phương trình: $t-3=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t^2-1}$

27) Điều kiện: $1\leq x\leq 5$. Phương trình được viết lại:

Ta viết lại phương trình thành:

$2\sqrt{x-1}-4+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+75=0$

$$\Leftrightarrow 2\frac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+3\sqrt{5-x}+(x-5)(3x-15)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+3\sqrt{5-x}+(x-5)(3x-15)=0\left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}+2}+3-\sqrt{5-x}(3x-15)=0 \end{array}\right.$$

Ta thấy $-\sqrt{5-x}(3x-15)\ge 0 \forall x\in[1;5]$

Ta chứng minh: $\dfrac{-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}+2}+3\ge 0\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+6-2\sqrt{5-x}\ge 0$ nhưng điều này là hiển nhiên đúng do: $2\sqrt{5-x}\le 2\sqrt{5-1}=4$ nên $6-2\sqrt{5-x}>0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$

28) Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Đặt $u=x-1; v=\sqrt{2x-1}$ phương trình đã cho trở thành

$$\left(2u^2-1\right)v=\left(2v^2-1\right)u\Leftrightarrow(u-v)(2uv+1)=0$$

\+ Nếu $u=v\Rightarrow x-1=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$

\+ Nếu $2uv+1=0\Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

Mặt khác ta có: $2(1-x)<2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$; $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{2-1}=1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm

Kết luận: $x=2+\sqrt{2}$

29) Sử dụng đẳng thức: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}\\ \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0\end{cases}(*)\Leftrightarrow x=1; x=2; x=\frac{3}{2}$$

30)

Điều kiện: $-1<x<1$. Đặt $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow t^2=\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}+1$.

PT đã cho thành: $2t^2+5t+2=0\Leftrightarrow t=-2;$

* $t=-2\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-2\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0\\ \frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}=3\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

* $t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0\\ \frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}=-\frac{3}{4}\end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

31)

Điều kiện. $x\ge -1$

$$PT\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=2(x^2-x+1)+2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2\frac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0(Do: x^2-x+1>0\forall x)$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}, t\ge 0$, ta có: $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

* $t=2\Leftrightarrow\frac{x+1}{x^2-x+1}=4\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ PT vô nghiệm

* $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x^2-x+1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-5x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

32) Do $VT\ge 1$ nên $\Rightarrow VP\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có PT $\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{2x^2+2}\right)+\left(\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{2x^2+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)\left(2x+2\right)}+\sqrt[3]{\left(2x^2+2\right)^2}}+\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{2x^2\left(2x+1\right)}+\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}}=0$$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

33) Điều kiện: $x\ge -\sqrt[3]{3}$.

Ta thấy $x=\frac{1}{5}$ không là nghiệm của phương trình nên ta có:

Phương trình $\Leftrightarrow\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}=\sqrt{x^3+3}$.

$$\Leftrightarrow\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}-2x=\sqrt{x^3+3}-2x\Leftrightarrow\frac{x^3-4x^2+3}{5x-1}=\sqrt{x^3+3}-2x\ \ (1)$$

* Nếu $\sqrt{x^3+3}-2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^3-4x^2+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ \left(x-1\right)\left(x^2-3x-3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$

Khi đó (1) đúng $\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ là một nghiệm của phương trình.

* Nếu $x\ne\frac{3-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow\frac{x^3-4x^2+3}{5x-1}=\frac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3-4x^2+3=0 & (1)\\ \sqrt{x^3+3}+2x=5x-1 & (2)\end{array}\right.$

Ta thấy: (1) có 2 nghiệm $x=1;x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3} = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ (x-1)\left(x^2 - 8x - 2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 + 3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x = 1; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}; x = 4 + 3\sqrt{2}2$.

34) Điều kiện: $x > -4$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1\right) + x^2 - 3 = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + 1} + x^2 - 3 + \frac{4 - \left(x^2+1\right)}{\left(2 + \sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-3\right)}{\sqrt{(x+4)\left(x^2+x+1\right)} + x + 4} + x^2 - 3 + \frac{x^2-3}{\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\left[\frac{2}{(x+4)\left(x^2+x+1\right) + x + 4} + 1 + \frac{1}{\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

35) Điều kiện: $|x| \ge \dfrac{2}{3}$

* Với $x \ge \dfrac{2}{3}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$25+\frac{9\sqrt{9x^2-4}}{x}=\frac{2}{x^2}+\frac{18}{x^2+1} \quad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) có $VT>25$ và do $x\ge\frac{2}{3}$ ta có $VP\le\frac{9}{2}+\frac{162}{13}<25$ nên phương trình đã cho vô nghiệm

* Với $x\le-\frac{2}{3}$ phương trình đã cho tương đương với

$$25-9\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{x^2}+\frac{18}{x^2+1} \quad (2)$$

Đặt $\frac{1}{x^2}=t\left(0<t\le\frac{9}{4}\right)$, phương trình (2) thành:

$$25-9\sqrt{9-4t}=2t+\frac{18t}{1+t}\Leftrightarrow 9-9\sqrt{9-4t}=2t+\frac{18t}{1+t}-16$$

$$\Leftrightarrow\frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1}=\frac{2(t-2)(t+4)}{t+1}\Leftrightarrow(t-2)\left(\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1}-\frac{t+4}{t+1}\right)=0 \qquad (1)$$

Lưu ý rằng với $0<t\le\frac{9}{4}$ có $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1}\ge\frac{18}{4}$ và $\frac{t+4}{t+1}=1+\frac{3}{t+1}<4<\frac{18}{4}$

nên $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1}-\frac{t+4}{t+1}>0$.

Vậy (3) $\Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

KL: Phương trình có 1 nghiệm $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

36) Điều kiện: $x\ge-2$

BPT được viết lại: $\sqrt{5(2x+1)^2+20(3x+6)}\le 2x+1+4\sqrt{3x+6}$

Đặt a = 2x + 1; b $\sqrt{3x+6}$; BPT $\Leftrightarrow\sqrt{5a^2+20b^2}\le a+4b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4b \ge 0 \\ 5a^2+20b^2 \le (a+4b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b$$

$$2x+1=\sqrt{3x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình là: $x=1$

37) Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Bình phương 2 vế ta có : $x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2 \le (13+27)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40\left(16-10x^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2\left(16-10x^2\right) \le \left(\dfrac{16}{2}\right)^2=64$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2=16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$