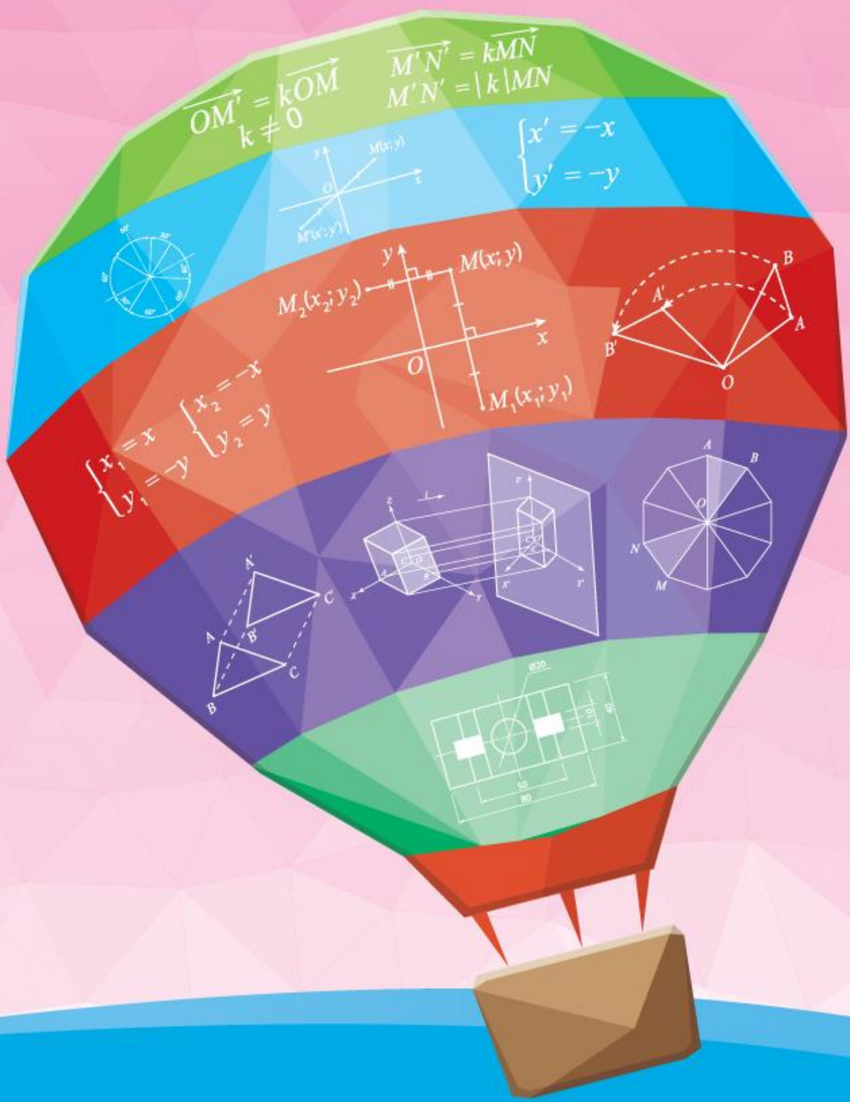
LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

# TOÁN 11

## Chuyên đề




NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ

DTP
Education Solutions

# HỘI ĐỒNG QUỐC GIA
# THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

## Môn: Toán – Lớp 11

| Họ và Tên | Chức vụ Hội đồng |
|---|---|
| **Ông LÊ MẬU HẢI** | Chủ tịch |
| **Bà CAO THỊ HÀ** | Phó Chủ tịch |
| **Ông PHẠM ĐỨC TÀI** | Uỷ viên, Thư kí |
| **Ông PHẠM KHẮC BAN** | Uỷ viên |
| **Ông NGUYỄN HẮC HẢI** | Uỷ viên |
| **Ông NGUYỄN DOÃN PHÚ** | Uỷ viên |
| **Ông NGUYỄN CHIẾN THẮNG** | Uỷ viên |
| **Bà NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN** | Uỷ viên |
| **Ông ĐINH CAO THƯỢNG** | Uỷ viên |
| **Bà VŨ THỊ NHƯ TRANG** | Uỷ viên |
| **Ông PHẠM ĐÌNH TÙNG** | Uỷ viên |

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

Cùng Khám Phá

# TOÁN 11

## Chuyên đề

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ

DTP
Education Solutions

# LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

***Toán 11 – Cùng khám phá*** là một sự tiếp nối các cuốn sách giáo khoa Toán cùng bộ đã có ở các lớp dưới, được biên soạn nhằm đáp ứng yêu cầu đổi mới nội dung và phương pháp dạy – học, hướng tới mục tiêu chuẩn bị cho học sinh hoà nhập tốt với xã hội hôm nay và ngày mai. Sách được biên soạn theo tinh thần kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển sách giáo khoa hiện đại và vận dụng những lí thuyết dạy học đang được thừa nhận rộng rãi trên thế giới.

Thông qua các mục *Mở đầu chương*, *Khởi động*, *Hoạt động*, *Luyện tập – Vận dụng* hay *Em có biết*, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** xây dựng mối liên kết giữa Toán học với cuộc sống cũng như các môn học khác, giúp đỡ và khuyến khích học sinh ứng dụng kiến thức thu nhận được không chỉ trong lĩnh vực Toán học mà còn cả trong việc giải quyết nhiều vấn đề ngoài Toán học. Các hoạt động xuyên suốt ***Toán 11 – Cùng khám phá*** với phương thức trình bày đa dạng vừa tạo điều kiện để học sinh trải nghiệm, khám phá, tự học, tự đánh giá, vừa thuận lợi cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, vừa giúp phụ huynh kiểm tra kiến thức của các em.

Đúng như tên gọi của nó, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** giúp các em khám phá kiến thức và có thể vận dụng được những khái niệm tưởng chừng như trừu tượng vào việc giải quyết nhiều vấn đề của khoa học và thực tiễn.

Ban biên soạn mong rằng bộ sách sẽ khơi gợi niềm vui và hứng thú cho các em học sinh trong quá trình tìm hiểu toán học. Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới và nhận ra sự hiện diện khắp nơi của toán học trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

## HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Các chương, bài của **Toán 11 Chuyên đề** được trình bày theo một cấu trúc thống nhất, gồm các mục:

| | |
|---|---|
| **1. Mở đầu chương** | Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với các tình huống thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu trong đề mục này. |
| **2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:** | |
| **HOẠT ĐỘNG** | Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc hình thành kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của kiến thức đó trong những ngữ cảnh cụ thể. |
| **KIẾN THỨC TRỌNG TÂM** | Được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những kiến thức trọng tâm của bài học. |
| **VÍ DỤ** | Cung cấp ví dụ có lời giải để minh hoạ, giúp học sinh nhận thấy các ý tưởng hay lập luận toán học được diễn đạt rõ ràng và chính xác bằng ngôn ngữ toán học như thế nào, kiến thức vừa học có thể được sử dụng ra sao. |
| **LUYỆN TẬP**<br>**VẬN DỤNG** | Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hay của thực tiễn, qua đó hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức đang bàn đến. |
| **BÀI TẬP** | Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản - áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được nghiên cứu, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức Toán học ở mức độ cao hơn về lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học. |
| **3. Ôn tập chương** | Qua hệ thống bài tập ôn tập (tự luận và trắc nghiệm), học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng. |

Bên cạnh đó, trong các bài còn có thêm một số đề mục bổ trợ sau đây:

| **Ghi chú / Lưu ý** | **NHẮC LẠI** | **THẢO LUẬN** | **EM CÓ BIẾT** |
|---|---|---|---|
| Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các khái niệm cốt lõi. | Nhắc lại những khái niệm hoặc định nghĩa mà học sinh đã học trước đó, từ đó tạo mối liên hệ giữa chúng với các chủ đề đang được nghiên cứu. | Đặt một số câu hỏi liên quan đến các khái niệm mà học sinh đang học nhằm thúc đẩy sự tương tác tích cực, chủ động giữa giáo viên với học sinh và giữa học sinh với nhau. | Giới thiệu một số câu chuyện thú vị về toán học, lịch sử toán học và các nhà toán học. |

# MỤC LỤC


**Chuyên đề 1** **PHÉP BIẾN HÌNH PHẲNG**

Bài 1 Phép dời hình 2
Bài 2 Phép đối xứng trục 6
Bài 3 Phép đối xứng tâm 11
Bài 4 Phép tịnh tiến 16
Bài 5 Phép quay 21
Bài 6 Phép vị tự. Phép đồng dạng 24
Ôn tập chuyên đề 31

**Chuyên đề 2** **MỘT SỐ YẾU TỐ VẼ KĨ THUẬT**

Bài 1 Một số nội dung cơ bản về vẽ kĩ thuật 34
Bài 2 Đọc và vẽ bản vẽ kĩ thuật đơn giản 51
Ôn tập chuyên đề 62

**Chuyên đề 3** **MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ**

Bài 1 Một số khái niệm cơ bản của lí thuyết đồ thị 65
Bài 2 Đường đi và chu trình 69
Bài 3 Đồ thị có trọng số và đường đi ngắn nhất 76
Ôn tập chuyên đề 79

**Bảng tra cứu thuật ngữ** **80**

**Bảng giải thích thuật ngữ** **81**

*Đại Giáo đường Chúa Kitô Phục Sinh ở Saint-Petersburg, Nga*

# CHUYÊN ĐỀ 1 Phép biến hình phẳng

Chuyên đề này nghiên cứu các phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng. Trong thực tiễn cuộc sống và trong nghệ thuật, người ta có thể sử dụng phép biến hình để tạo ra các hoa văn, hoạ tiết trang trí, mẫu thiết kế cho các công trình kiến trúc hay những bức hoạ ấn tượng…

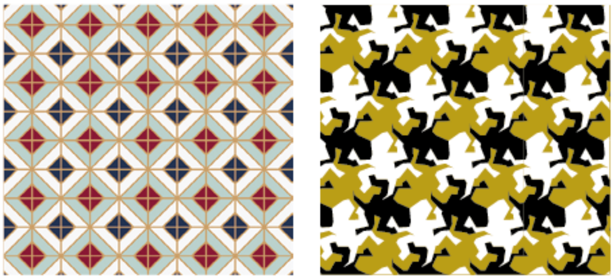
- Nhận biết được khái niệm phép dời hình và phép đồng dạng;
- Nhận biết được tính chất của một số phép dời hình và phép vị tự;
- Xác định được ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua một số phép dời hình như: phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép tịnh tiến và phép quay;
- Xác định được ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép vị tự;
- Vận dụng được một số phép dời hình và phép đồng dạng trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn.

**BÀI 1**

# PHÉP DỜI HÌNH

Tessellation là tên gọi của kĩ thuật dùng những hình bằng nhau để phủ kín mặt phẳng. Kĩ thuật này được sử dụng trong nghệ thuật và kiến trúc để sáng tạo các bức tranh hay để trang trí bề mặt tường, trần nhà của nhiều công trình,…

Tessellation là một trong những minh chứng cho sự kết nối giữa toán học và nghệ thuật khi mà ta có thể sử dụng các phép dời hình để tạo ra các bức hoạ ấn tượng hay các hoa văn trang trí đẹp mắt.



*Hình 1.1*

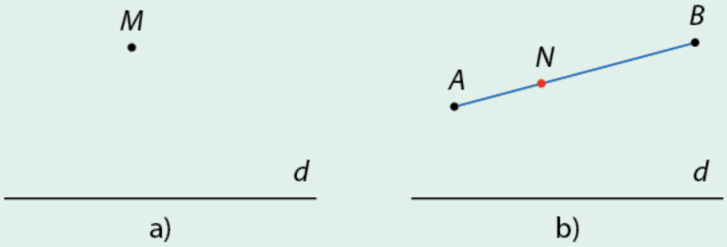
## I Phép biến hình

### HOẠT ĐỘNG 1

Cho trước một đường thẳng $d$.

a) Với điểm $M$ không thuộc $d$ (*Hình 1.2a*), hãy kẻ $MM' \perp d$ ($M'$ thuộc $d$). Điểm $M'$ được gọi là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $d$.

b) Gọi $N$ là một điểm bất kì trên đoạn $AB$ (*Hình 1.2b*) và $N'$ là hình chiếu vuông góc của $N$ trên $d$. Khi điểm $N$ di động trên đoạn $AB$ thì $N'$ sẽ di động trên đoạn thẳng nào?




*Hình 1.2*

Với mỗi điểm $M$, quy tắc xác định duy nhất một điểm $M'$ tương ứng như trong Hoạt động 1 là ví dụ cho một phép biến hình.

**Phép biến hình** $F$ trong mặt phẳng là quy tắc cho tương ứng mỗi điểm $M$ với một điểm $M'$ duy nhất. Điểm $M'$ được gọi là ảnh của $M$ qua phép biến hình đó, kí hiệu $M' = F(M)$.

**Lưu ý:** Với mỗi hình $\mathcal{H}$, hình $\mathcal{H}'$ bao gồm các điểm $M' = F(M)$ với $M \in \mathcal{H}$ được gọi là ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép biến hình $F$, kí hiệu $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$.

### VÍ DỤ 1

Quy tắc nào dưới đây là một phép biến hình?

a) Quy tắc $F$ cho tương ứng mỗi điểm $M$ với điểm $O$, trong đó $O$ là một điểm cố định cho trước;

b) Quy tắc $G$ cho tương ứng mỗi điểm $M$ với điểm $M'$ sao cho $MM' = 1$.

**Giải**

a) Quy tắc $F$ cho tương ứng mỗi điểm $M$ với điểm $O$ duy nhất nên $F$ là một phép biến hình.

b) Với mỗi điểm $M$, ta có các điểm $M'$ nằm trên đường tròn tâm $M$ bán kính 1 đều thoả điều kiện $MM' = 1$. Do đó quy tắc $G$ không cho tương ứng mỗi điểm $M$ với duy nhất một điểm $M'$. Vậy $G$ không phải là phép biến hình.

### LUYỆN TẬP 1

Trong mặt phẳng $Oxy$, xét quy tắc $F$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành điểm $M'(2x; 2y)$.

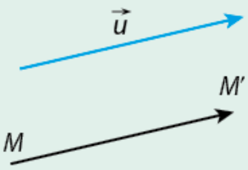
a) Giải thích vì sao quy tắc $F$ là một phép biến hình.

b) Tìm ảnh của điểm $A(-3; 2)$ qua phép biến hình $F$.

## II Phép dời hình

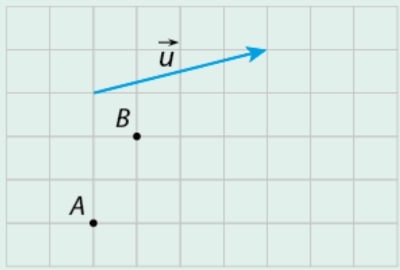
### HOẠT ĐỘNG 2

Với vectơ $\vec{u}$ cho trước, xét phép biến hình $F$ biến điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ như *Hình 1.3*.




*Hình 1.3*

Cho hai điểm $A$, $B$ bất kì và một vectơ $\vec{u}$ như *Hình 1.4*, hãy vẽ các ảnh $A' = F(A)$ và $B' = F(B)$. So sánh độ dài hai đoạn thẳng $AB$ và $A'B'$.




*Hình 1.4*

**Phép dời hình** là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

### VÍ DỤ 2

Trong mặt phẳng $Oxy$, phép biến hình nào dưới đây là phép dời hình?

a) Phép biến hình $F$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành $M'(x; y-1)$;

b) Phép biến hình $G$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành $M'(2x; y)$.

**Giải**

a) Xét hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Gọi $A' = F(A)$ và $B' = F(B)$. Khi đó $A'(x_A; y_A - 1)$ và $B'(x_B; y_B - 1)$.

Ta có: $A'B' = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

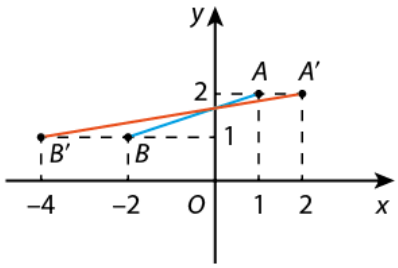
Do đó $AB = A'B'$. Vậy $F$ là phép dời hình.

b) Xét hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ và ảnh của chúng qua $G$ lần lượt là $A'$ và $B'$ (*Hình 1.5*). Khi đó, ta có $A'(2; 2)$ và $B'(-4; 1)$.

$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$.

$A'B' = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{37}$.

Vì $A'B' \neq AB$ nên $G$ không phải là phép dời hình.




*Hình 1.5*

**LUYỆN TẬP 2**

Trong mặt phẳng $Oxy$, xét phép biến hình $F$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(y; x)$. Chứng minh rằng $F$ là phép dời hình.

## III Tính chất của phép dời hình

**HOẠT ĐỘNG 3**

Cho phép dời hình $F$ và ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng trong đó $B$ nằm giữa $A$ và $C$. Gọi $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$, $C$ qua $F$.

a) Biểu diễn $A'C'$ theo $A'B'$ và $B'C'$.

b) Từ đó rút ra mối quan hệ giữa ba điểm $A'$, $B'$ và $C'$.

Qua Hoạt động 3, ta rút ra tính chất sau đây của phép dời hình:

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng.

**Hệ quả:** Phép dời hình $F$:

- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

**VÍ DỤ 3**

Cho đường tròn $(C)$: $(x+2)^2 + y^2 = 16$. Viết phương trình đường tròn $(C')$ là ảnh của $(C)$ qua phép dời hình $F$ trong Ví dụ 2a.

**Giải**

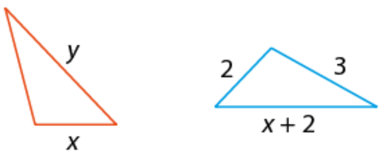
Ta có đường tròn $(C)$ có tâm $I(-2; 0)$ và bán kính $R = 4$. Gọi $I' = F(I)$, khi đó $I'(-2; -1)$.

Đường tròn $(C')$ nhận $I'$ là tâm và có bán kính $R' = R = 4$.

Vậy đường tròn $(C')$ có phương trình là $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$.

### LUYỆN TẬP 3

Trong *Hình 1.6*, tam giác màu cam là ảnh của tam giác màu xanh qua một phép dời hình. Tìm giá trị của $x$ và $y$.




*Hình 1.6*

## IV Hai hình bằng nhau

Ta đã biết phép dời hình $F$ biến một tam giác thành một tam giác bằng nó. Tổng quát, người ta đưa ra định nghĩa sau đây về khái niệm hai hình bằng nhau:

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu tồn tại một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

### VÍ DỤ 4

Cho hai đoạn thẳng $AB$ và $A'B'$. Biết rằng có một phép dời hình $F$ biến $AB$ thành $A'B'$.

a) Hai đoạn thẳng đã cho có bằng nhau hay không? Giải thích vì sao.

b) Gọi $M$ là trung điểm của $AB$, hãy xác định ảnh của $M$ qua phép dời hình $F$.

**Giải**

a) Vì có phép dời hình $F$ biến đoạn thẳng $AB$ thành đoạn thẳng $A'B'$ nên $AB = A'B'$.

b) Gọi $M' = F(M)$. Vì $M$ là trung điểm $AB$ nên $M$ nằm giữa $A$, $B$ và $MA = MB$.
Theo tính chất của phép dời hình, ta có $M'$ nằm giữa $A'$, $B'$ và $M'A' = M'B'$ (do $M'A' = MA$ và $M'B' = MB$).
Suy ra $M'$ là trung điểm của $A'B'$.

### LUYỆN TẬP 4

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có giao điểm hai đường chéo lần lượt là $O$ và $O'$. Biết rằng có một phép dời hình $F$ biến $ABCD$ thành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $O'$ là ảnh của $O$ qua $F$.

### BÀI TẬP

**1.1.** Trong các phép biến hình sau, phép biến hình nào là phép dời hình?

a) Phép biến hình $F$ biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $d$, với $d$ là một đường thẳng cho trước;

b) Phép biến hình $D$ biến mỗi điểm $M$ thành chính nó (phép biến hình này được gọi là phép đồng nhất).

**1.2.** Trong mặt phẳng $Oxy$, xét phép biến hình $F$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành điểm $M'(2x; 2y)$. Cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(-1; 3)$.

a) Tìm toạ độ $A' = F(A)$ và $B' = F(B)$.

b) $F$ có phải là phép dời hình hay không? Vì sao?

**1.3.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho phép biến hình $F$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành điểm $M'(x; -y)$.

a) Chứng minh $F$ là phép dời hình.

b) Tìm ảnh của đường thẳng $d$: $2x - y = 0$ qua phép dời hình $F$.

**1.4.** Cho tam giác $ABC$ có trọng tâm $G$ và một phép dời hình $F$. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của tam giác $ABC$ qua $F$. Xác định ảnh của $G$ qua phép dời hình $F$.

## BÀI 2

# PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Vào ngày nắng đẹp, ta có thể quan sát thấy khung cảnh xung quanh được phản chiếu sống động trên một mặt hồ yên tĩnh. Ảnh phản chiếu ta quan sát được trong *Hình 1.7* là một ví dụ minh hoạ cho ảnh qua một phép đối xứng trục.

*Hình 1.7*

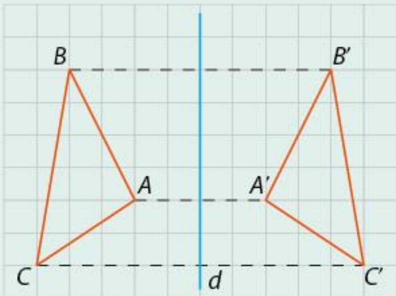
## I Phép đối xứng trục

### HOẠT ĐỘNG 1

Cho một tấm bìa, trên đó có hai tam giác $ABC$, $A'B'C'$ và đường thẳng $d$ như *Hình 1.8*.

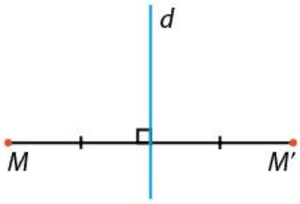
a) Gấp tấm bìa theo đường thẳng $d$. Có nhận xét gì về vị trí của hai tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ sau khi gấp?

b) Quan sát hình vẽ, có nhận xét gì về mối quan hệ giữa đường thẳng $d$ với các đoạn thẳng $AA'$, $BB'$ và $CC'$?




*Hình 1.8*

Cho đường thẳng $d$. Phép biến hình biến điểm $M$ thuộc $d$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ không thuộc $d$ thành điểm $M'$ sao cho $d$ là đường trung trực của đoạn thẳng $MM'$ được gọi là **phép đối xứng qua đường thẳng** $d$ hay **phép đối xứng trục** $d$, kí hiệu $Đ_d$.




*Hình 1.9*

**Lưu ý:**

- Trong phép đối xứng trục $d$, $d$ được gọi là trục đối xứng.
- Nếu $M' = Đ_d(M)$ thì ta nói $M$ và $M'$ đối xứng với nhau qua trục $d$.
- Cho hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}' = Đ_d(\mathcal{H})$. Khi đó, ta nói $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ đối xứng với nhau qua $d$ hay $\mathcal{H}'$ đối xứng với $\mathcal{H}$ qua $d$.

### VÍ DỤ 1

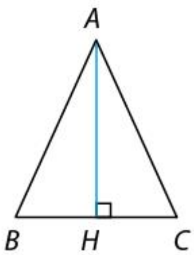
Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường cao $AH$. Tìm ảnh của các điểm $A$, $B$ và $C$ qua phép đối xứng trục $AH$.

**Giải**

Do tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên $AH$ là trung trực của đoạn $BC$.

Suy ra $Đ_{AH}(B) = C$, $Đ_{AH}(C) = B$.

Điểm $A$ thuộc đường thẳng $AH$ nên $Đ_{AH}(A) = A$.




*Hình 1.10*

### LUYỆN TẬP 1

Cho hình vuông $ABCD$. Tìm phép đối xứng trục:

a) Biến điểm $A$ thành điểm $B$;

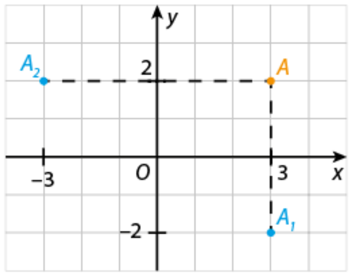
b) Biến điểm $A$ thành điểm $C$.

### VÍ DỤ 2

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $A(3; 2)$. Tìm toạ độ điểm $A_1 = Đ_{Ox}(A)$ và $A_2 = Đ_{Oy}(A)$.

**Giải**

Ta có $A_1(3; -2)$ và $A_2(-3; 2)$.

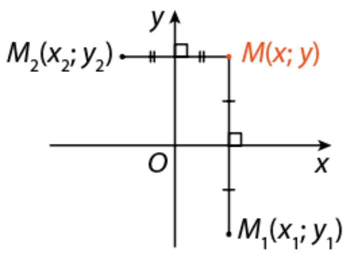



*Hình 1.11*

**Nhận xét:** Trong mặt phẳng $Oxy$, với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của $M$ qua phép đối xứng trục $Ox$ và $M_2(x_2; y_2)$ là ảnh của $M$ qua phép đối xứng trục $Oy$, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -x \\ y_2 = y. \end{cases}$$

Hai biểu thức trên lần lượt được gọi là biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục $Ox$ và phép đối xứng trục $Oy$.




*Hình 1.12*

### LUYỆN TẬP 2

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M$ và $M' = Đ_{Oy}(M)$. Biết rằng điểm $M'(-5; -3)$:

a) Xác định toạ độ điểm $M$;

b) Xác định toạ độ điểm $M'' = Đ_{Ox}(M)$.

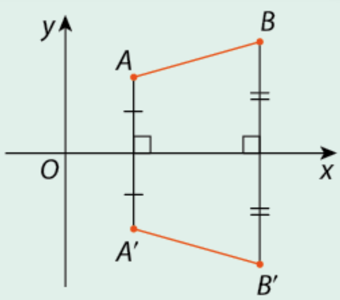
## II Tính chất của phép đối xứng trục

### HOẠT ĐỘNG 2

Gọi $Đ_d$ là phép đối xứng qua đường thẳng $d$. Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxy$ sao cho trục $Ox$ trùng với đường thẳng $d$. Xét hai điểm tuỳ ý $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$.

a) Hãy viết toạ độ của $A' = Đ_d(A)$ và $B' = Đ_d(B)$.

b) Dùng công thức tính khoảng cách để so sánh $A'B'$ và $AB$.

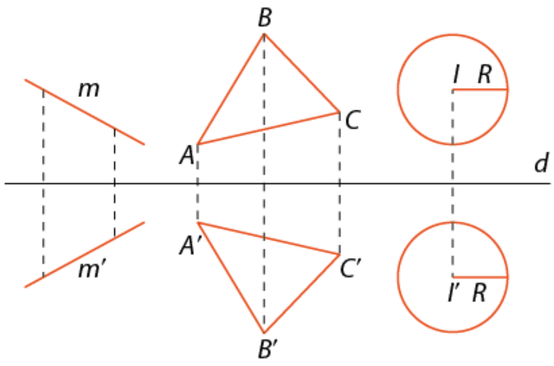



*Hình 1.13*

Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

**Hệ quả:** Phép đối xứng trục:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



*Hình 1.14*

## VÍ DỤ 3

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng $d'$ là ảnh của $d$ qua phép đối xứng trục $Ox$.

**Giải**

Lấy hai điểm $A(0; 2)$ và $B(1; 3)$ thuộc đường thẳng $d$.

Gọi $A' = Đ_{Ox}(A)$ và $B' = Đ_{Ox}(B)$. Khi đó $A'(0; -2)$ và $B'(1; -3)$.

Đường thẳng $d'$ nhận $\overrightarrow{A'B'} = (1; -1)$ là vectơ chỉ phương nên nhận $\vec{n} = (1; 1)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình của $d'$ có dạng: $1(x - 0) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

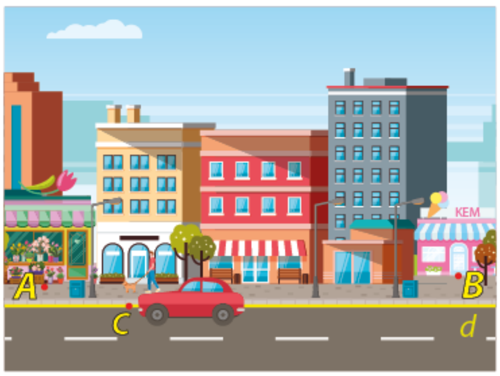
## LUYỆN TẬP 3

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Viết phương trình đường tròn $(C')$ là ảnh của $(C)$ qua phép đối xứng trục $Oy$.

## VẬN DỤNG

Hai bạn An và Bình đi chung trên một chiếc ô tô đến khu phố mua sắm. An muốn đến tiệm hoa (điểm $A$) để mua một bó hoa tặng mẹ nhân ngày Quốc tế Phụ nữ. Bình muốn đến tiệm kem (điểm $B$) để mua kem sô-cô-la. Xem lề đường là đường thẳng $d$, hãy tìm trên $d$ một vị trí dừng $C$ của ô tô sao cho tổng quãng đường của An và Bình đến tiệm hoa và tiệm kem là ngắn nhất.

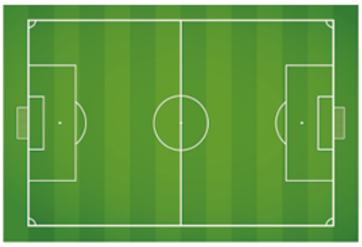
*Gợi ý: Vẽ điểm $A'$ là ảnh của điểm $A$ qua phép đối xứng trục $d$. Tìm điểm $C$ trên $d$ sao cho $CA' + CB$ nhỏ nhất.*



*Hình 1.15*

## III Trục đối xứng của một hình

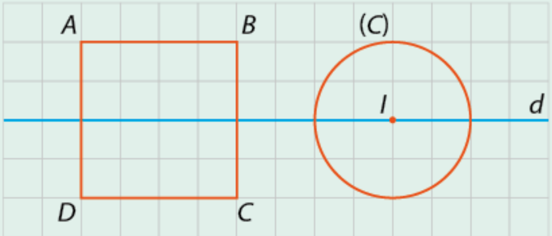
Ở lớp 6, ta đã tìm hiểu về khái niệm hình có trục đối xứng. Phép đối xứng trục cho ta cách hiểu chính xác về khái niệm trục đối xứng của một hình.



*Hình 1.16*

**HOẠT ĐỘNG 3**

Hãy vẽ ảnh của hình vuông *ABCD* và đường tròn (*C*) qua phép đối xứng trục *d* trong *Hình 1.17*.




*Hình 1.17*

Đường thẳng *d* được gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu như phép đối xứng trục *d* biến $\mathcal{H}$ thành chính nó.
Khi đó, ta còn nói $\mathcal{H}$ là hình có trục đối xứng.

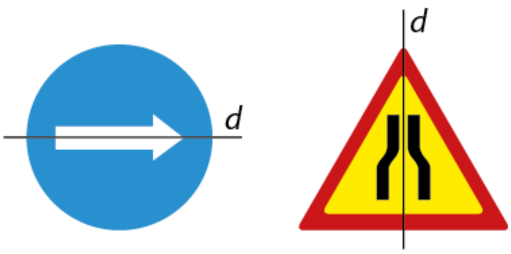
**VÍ DỤ 4**

Vẽ trục đối xứng của các hình sau:

*Hình 1.18*

**Giải**

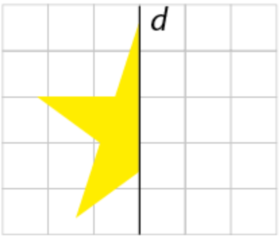
Trục đối xứng của các hình là đường thẳng *d* được vẽ trong *Hình 1.19*.




*Hình 1.19*

## LUYỆN TẬP 4

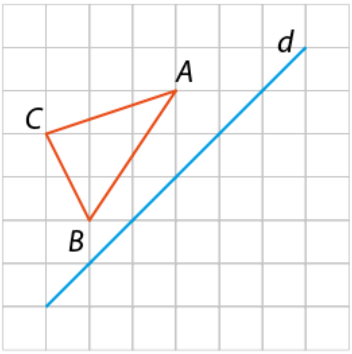
Hình ngôi sao năm cánh có trục đối xứng là đường thẳng $d$ trong *Hình 1.20*. Bạn Hương đã vẽ được nửa bên trái của ngôi sao này. Hãy chép lại *Hình 1.20* và vẽ nửa còn lại để hoàn thiện ngôi sao.




*Hình 1.20*

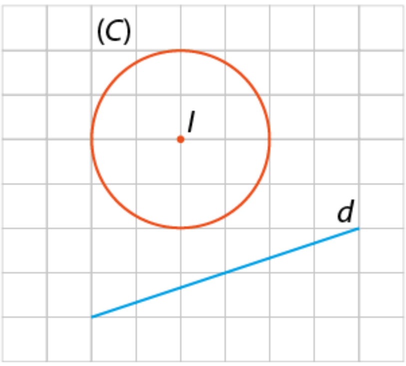
## BÀI TẬP

**1.5.** Vẽ ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng trục $d$ trong *Hình 1.21*.




*Hình 1.21*

**1.6.** Vẽ ảnh của đường tròn $(C)$ qua phép đối xứng trục $d$ trong *Hình 1.22*.




*Hình 1.22*

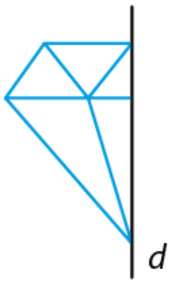
**1.7.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $A(2; -5)$ và đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm $A_1$, $A_2$ lần lượt là ảnh của $A$ qua phép đối xứng trục $Ox$ và $Oy$.

b) Viết phương trình đường thẳng $d'$ là ảnh của $d$ qua phép đối xứng trục $Oy$.

**1.8.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn $(C')$ là ảnh của $(C)$ qua phép đối xứng trục $Ox$.

**1.9.** Kim cương là một khoáng sản có giá trị vì có độ cứng rất cao, được sử dụng với nhiều mục đích. Do đó, biểu tượng kim cương thường được sử dụng để trang trí. Biết rằng biểu tượng kim cương là một hình có trục đối xứng $d$ như trong *Hình 1.23*. Bạn Loan chỉ vừa kịp vẽ một nửa bên trái của biểu tượng này. Hãy vẽ một nửa còn lại để hoàn thiện biểu tượng.




*Hình 1.23*

**1.10.** Cho góc $mOn$ nhọn và điểm $A$ nằm trong góc đó.

a) Xác định các điểm $A_1$ và $A_2$ lần lượt là ảnh của $A$ qua phép đối xứng trục $Om$ và $On$.

b) Xác định các điểm $B$ và $C$ lần lượt nằm trên tia $Om$ và $On$ sao cho tam giác $ABC$ có chu vi nhỏ nhất.

BÀI 3

# PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Trong bài trước, ta biết rằng hình có trục đối xứng là hình có ảnh là chính nó qua một phép đối xứng trục. Ở lớp 6, ta đã được tìm hiểu về những hình có tâm đối xứng như các hình sau:

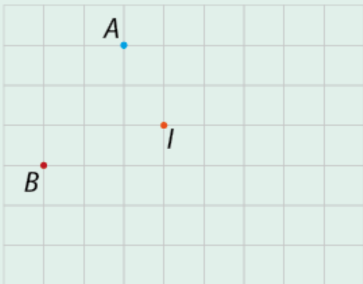

*Hình 1.24*

Vậy có phép biến hình nào biến những hình như trên thành chính nó hay không?

## I Phép đối xứng tâm

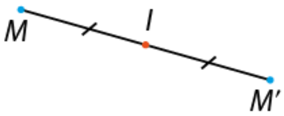
### HOẠT ĐỘNG 1

Trong *Hình 1.25* với điểm $I$ cho trước, xét phép biến hình $F$ biến điểm $I$ thành chính nó và biến mỗi điểm $M$ khác $I$ thành $M'$ sao cho $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $MM'$.
Với hai điểm $A$ và $B$ trên *Hình 1.25*, hãy vẽ các ảnh $A' = F(A)$ và $B' = F(B)$.




*Hình 1.25*

Cho điểm $I$. Phép biến hình biến điểm $I$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ khác $I$ thành $M'$ sao cho $I$ là trung điểm của $MM'$ được gọi là phép đối xứng tâm $I$, kí hiệu $Đ_I$.




*Hình 1.26*

**Lưu ý:**

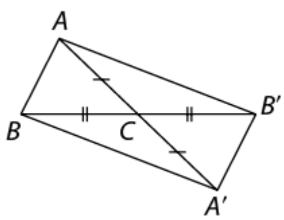
- Trong phép đối xứng tâm $I$, điểm $I$ được gọi là tâm đối xứng.
- Nếu $M' = Đ_I(M)$ thì ta nói $M'$ đối xứng với $M$ qua $I$.
- Cho hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}' = Đ_I(\mathcal{H})$. Khi đó ta nói $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ đối xứng với nhau qua tâm $I$ hay $\mathcal{H}'$ đối xứng với $\mathcal{H}$ qua tâm $I$.

### VÍ DỤ 1

Cho tam giác $ABC$. Gọi $A'$ và $B'$ lần lượt là ảnh của $A$ và $B$ qua phép đối xứng tâm $C$. Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì? Vì sao?

**Giải**

Vì $A'$ và $B'$ lần lượt là ảnh của $A$ và $B$ qua phép đối xứng tâm $C$ nên $C$ đồng thời là trung điểm của $AA'$ và $BB'$. Suy ra tứ giác $ABA'B'$ là hình bình hành.




*Hình 1.27*

### LUYỆN TẬP 1

Cho hình bình hành $MNPQ$ có $I$ là giao điểm hai đường chéo. Một đường thẳng $d$ qua $I$ cắt cạnh $MN$ và $PQ$ lần lượt tại $E$ và $F$. Chứng minh rằng $E$ đối xứng với $F$ qua $I$.

## II Tính chất của phép đối xứng tâm

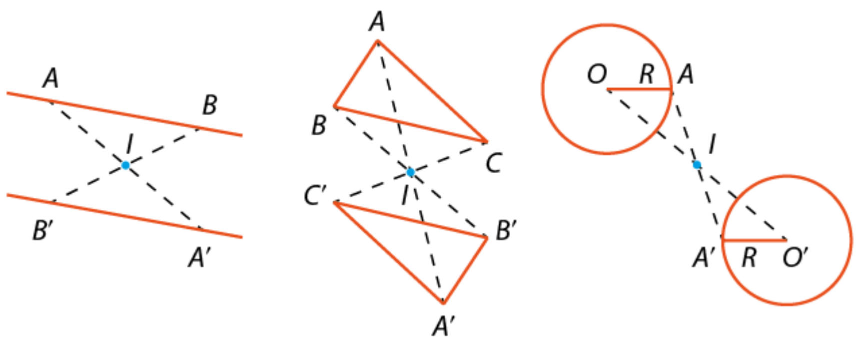
### HOẠT ĐỘNG 2

Có nhận xét gì về độ dài hai đoạn thẳng $AB$ và $A'B'$ trong Hoạt động 1?

Phép đối xứng tâm là một phép dời hình.

**Hệ quả:** Phép đối xứng tâm:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



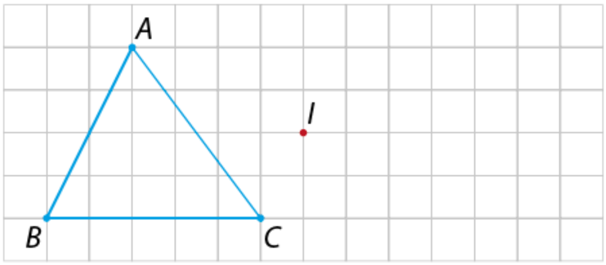
*Hình 1.28*

**THẢO LUẬN**

Xét đường thẳng $d$ và $d' = Đ_I(d)$. Khi nào:
- $d$ trùng $d'$?
- $d$ song song $d'$?

### VÍ DỤ 2

Vẽ ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng tâm $I$ trong *Hình 1.29*.

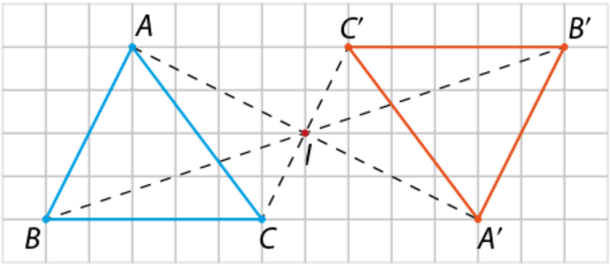


*Hình 1.29*

**Giải**

**Bước 1** Vẽ ba điểm $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$, $C$ qua phép đối xứng tâm $I$.

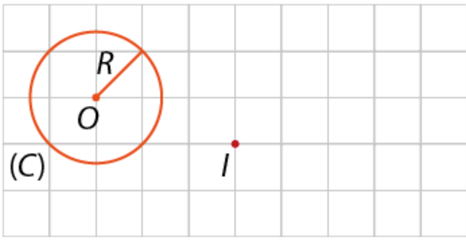
**Bước 2** Vẽ các đoạn thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng tâm $I$ là tam giác $A'B'C'$.




*Hình 1.30*

## LUYỆN TẬP 2

Vẽ ảnh của đường tròn $(C)$ qua phép đối xứng tâm $I$ trong *Hình 1.31*.




*Hình 1.31*

## VÍ DỤ 3

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $A(-1; 2)$. Tìm toạ độ điểm $A'$ là ảnh của $A$ qua phép đối xứng tâm $O$.

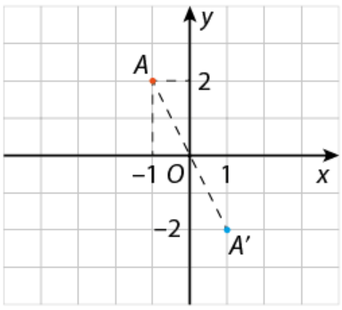
**Giải**

Do $A'$ là ảnh của $A$ qua phép đối xứng tâm $O$ nên $O$ là trung điểm $AA'$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} = x_O \\ \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = y_O. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x_{A'} = 2x_O - x_A = 1 \\ y_{A'} = 2y_O - y_A = -2. \end{cases}$

Vậy $A'(1; -2)$.

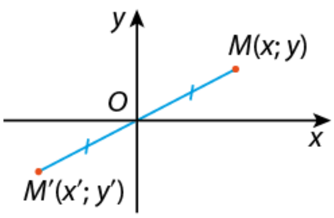



*Hình 1.32*

**Nhận xét:** Trong mặt phẳng $Oxy$, với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M$ qua phép đối xứng tâm $O$, ta có:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ $O$.




*Hình 1.33*

## LUYỆN TẬP 3

Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm ảnh của đường tròn $(C)$: $(x+3)^2+(y+5)^2=9$ qua phép đối xứng tâm $O$.

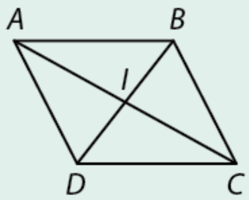
# III Tâm đối xứng của một hình

## HOẠT ĐỘNG 3

Cho hình bình hành $ABCD$ với $I$ là giao điểm hai đường chéo (*Hình 1.34*).

a) Xác định ảnh của các điểm $A$, $B$, $C$ và $D$ qua phép đối xứng tâm $I$.

b) Xác định ảnh của hình bình hành $ABCD$ qua phép đối xứng tâm $I$.



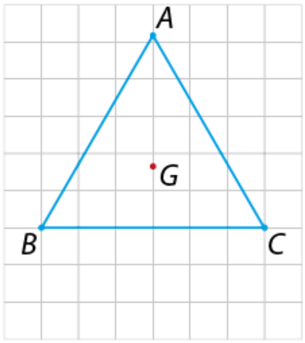
*Hình 1.34*

Điểm $I$ được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu như phép đối xứng tâm $I$ biến $\mathcal{H}$ thành chính nó.

Khi đó ta còn nói $\mathcal{H}$ là hình có tâm đối xứng.

## VÍ DỤ 4

Ngôi sao 6 cánh là một hình có tâm đối xứng. Tâm đối xứng của nó là trọng tâm $G$ của tam giác đều $ABC$ như trong *Hình 1.35*. Hãy vẽ ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng tâm $G$ để hoàn thiện hình vẽ ngôi sao 6 cánh.

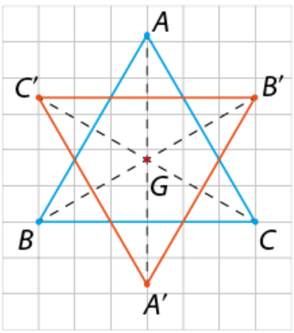


*Hình 1.35*

**Giải**

**Bước 1** Vẽ ba điểm $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là ảnh của ba điểm $A$, $B$, $C$ qua phép đối xứng tâm $G$.

**Bước 2** Vẽ các đoạn thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ là ba cạnh của tam giác $A'B'C'$. Ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng tâm $G$ là tam giác $A'B'C'$. Hình tạo bởi hai tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ là hình ngôi sao 6 cánh cần vẽ (*Hình 1.36*).



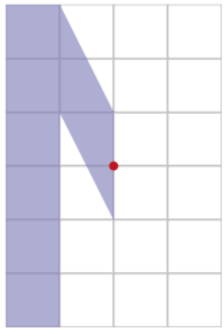
*Hình 1.36*

## LUYỆN TẬP 4

Bạn Đạt tham gia cắt chữ cái bằng giấy màu để trang trí cho buổi liên hoan văn nghệ ở trường. Bạn ấy vẽ các chữ cái trên giấy có ô li rồi dùng kéo để cắt chúng. Sau khi vẽ được một phần của một chữ cái, Đạt phát hiện ra chữ cái đó có tâm đối xứng là điểm màu đỏ như trong *Hình 1.37*.

a) Chữ cái Đạt đang vẽ là chữ gì?

b) Hãy chép lại *Hình 1.37* và vẽ một nửa còn lại để hoàn thiện chữ cái nói trên.



*Hình 1.37*

## BÀI TẬP

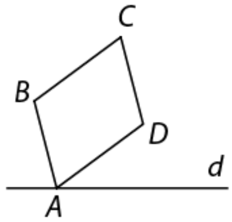
**1.11.** Cho hai điểm phân biệt $A$ và $B$. Trên đường trung trực của đoạn thẳng $AB$ lấy điểm $I$ ($I$ không thuộc đoạn $AB$). Gọi $A'$ và $B'$ lần lượt là ảnh của $A$ và $B$ qua phép đối xứng tâm $I$. Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì? Vì sao?

**1.12.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $2x - y + 3 = 0$ và đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$. Tìm ảnh của đường thẳng $d$ và đường tròn $(C)$ qua phép đối xứng tâm $O$.

**1.13.** Cho đường thẳng $d$ và hai điểm $B$, $D$ không nằm trên $d$. Gọi $A$ là điểm nằm trên $d$ và $C$ là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 1.38*).

a) Gọi $O$ là trung điểm của $BD$. Tìm ảnh của điểm $A$ qua phép đối xứng tâm $O$.

b) Khi điểm $A$ di động trên $d$ thì điểm $C$ di động trên đường thẳng nào?




*Hình 1.38*

**1.14.** Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt về an toàn giao thông, bạn Minh cần vẽ biển báo đường hai chiều. Hình vẽ bên trong biển báo là hai mũi tên đối xứng với nhau qua tâm $G$ của tam giác đều $ABC$. Bạn Minh chỉ vừa vẽ được một mũi tên bên trái. Hãy giúp bạn vẽ mũi tên còn lại để hoàn thiện biển báo đường hai chiều.

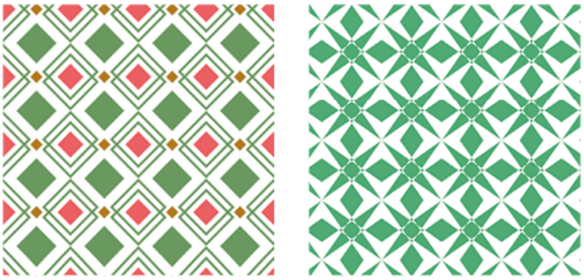

*Hình 1.39*

**1.15.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $M$ là điểm đối xứng với $D$ qua $A$ và $N$ là điểm đối xứng với $D$ qua $C$. Chứng minh rằng $M$ là điểm đối xứng với $N$ qua $B$.

BÀI 4

# PHÉP TỊNH TIẾN

Bằng cách sử dụng các phép tịnh tiến, ta có thể lấp đầy một bề mặt bằng những hình giống nhau.



*Hình 1.40*

## I Phép tịnh tiến

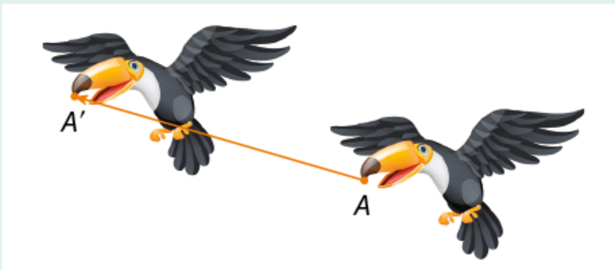
### HOẠT ĐỘNG 1

*Hình 1.41* là hình ảnh hai con chim Toucan. Hình con chim bên trái là ảnh của con chim bên phải qua một phép biến hình.

a) Trong *Hình 1.41*, ta thấy hai điểm $A$ và $A'$ biểu diễn cùng một vị trí giống nhau của con chim (đầu mỏ của chim). Hãy tìm thêm ba cặp điểm tương tự như vậy.

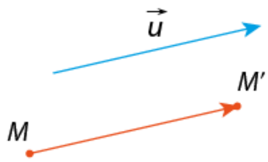
b) Nối từng cặp điểm tương ứng đã tìm được ở câu a bằng các vectơ với điểm đầu là các điểm nằm trên con chim bên phải (tương tự như vectơ $\overrightarrow{AA'}$).

c) Quan sát các vectơ vừa vẽ, nhận xét về mối quan hệ giữa chúng.




*Hình 1.41*

Cho vectơ $\vec{u}$. Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ được gọi là **phép tịnh tiến** theo vectơ $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$.



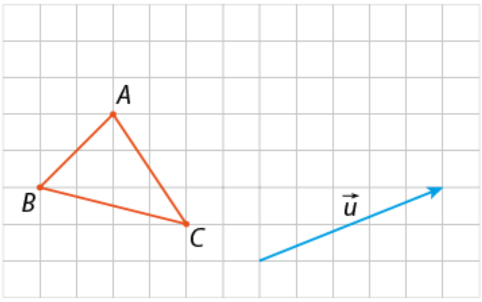

*Hình 1.42*

**Lưu ý:**

- Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ là phép đồng nhất.
- $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{u}}(M')$.

**VÍ DỤ 1**

Cho tam giác $ABC$ và vectơ $\vec{u}$ trên *Hình 1.43*. Hãy vẽ ảnh của các đỉnh $A$, $B$ và $C$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

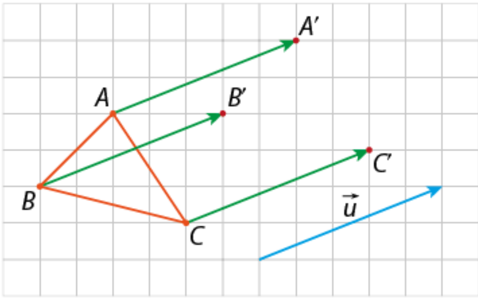



*Hình 1.43*

**Giải**

Ta vẽ các điểm $A'$, $B'$ và $C'$ sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$.

Ảnh của $A$, $B$, $C$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ lần lượt là $A'$, $B'$, $C'$ như *Hình 1.44*.




*Hình 1.44*

**LUYỆN TẬP 1**

Cho hình bình hành $MNPQ$. Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm $M$ thành điểm $Q$. Tìm ảnh của điểm $N$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

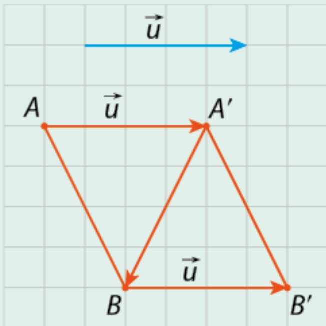
## II Tính chất của phép tịnh tiến

**HOẠT ĐỘNG 2**

Cho hai điểm $A$, $B$ bất kì và vectơ $\vec{u}$. Gọi $A'$ và $B'$ lần lượt là ảnh của $A$ và $B$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\overrightarrow{A'B}$.

b) Từ đó suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ bằng nhau.

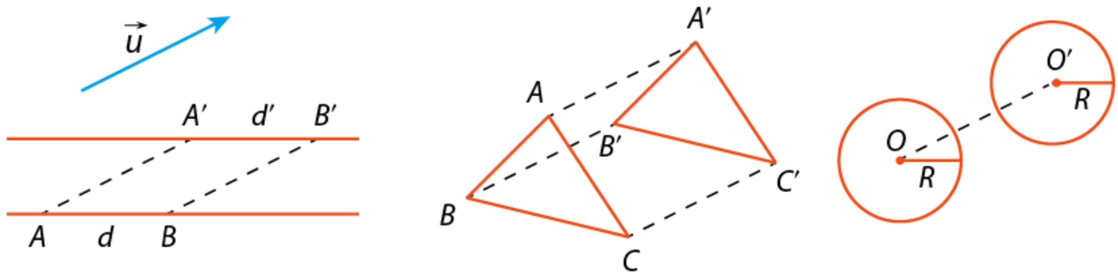



*Hình 1.45*

Phép tịnh tiến là một phép dời hình.

**Hệ quả:** Phép tịnh tiến:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.




*Hình 1.46*

## VÍ DỤ 2

Cho đường thẳng $d$. Gọi $d'$ là ảnh của $d$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$. Xét vị trí tương đối giữa $d$ và $d'$ trong các trường hợp sau:

a) Vectơ $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $d$;

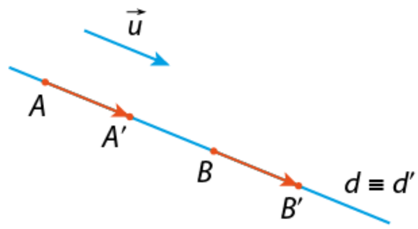
b) Vectơ $\vec{u}$ không phải là vectơ chỉ phương của $d$.

**Giải**

a) Lấy hai điểm phân biệt bất kì $A$ và $B$ trên $d$. Gọi $A' = T_{\vec{u}}(A)$ và $B' = T_{\vec{u}}(B)$, ta có $A' \in d'$ và $B' \in d'$. (1)

Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$ và $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $d$ nên $A' \in d$ và $B' \in d$. (2)

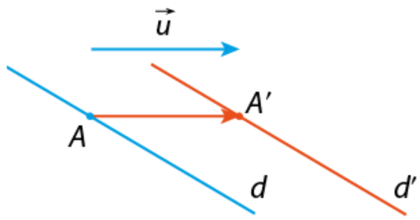
Từ (1) và (2) suy ra $d'$ và $d$ trùng nhau.




*Hình 1.47*

b) Vì $d'$ là ảnh của $d$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ nên $d'$ và $d$ song song hoặc trùng nhau.

Lấy điểm $A$ bất kì trên $d$. Gọi $A' = T_{\vec{u}}(A)$, ta có $A' \in d'$. Do $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ không phải là vectơ chỉ phương của $d$ nên $A' \notin d$. Vậy $d$ không trùng $d'$. Do đó, $d$ và $d'$ song song với nhau.




*Hình 1.48*

## LUYỆN TẬP 2

Cho hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R)$. Hãy tìm một phép tịnh tiến biến đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R)$.

## VÍ DỤ 3

Trong mặt phẳng $Oxy$, xét điểm $M(x; y)$. Gọi $M'$ là ảnh của $M$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$. Chứng minh rằng điểm $M'$ có toạ độ là $(x + a; y + b)$.

### Giải

Giả sử $M'$ có toạ độ là $(x'; y')$.

Suy ra $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y)$.

Vì $M'$ là ảnh của $M$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$ nên $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

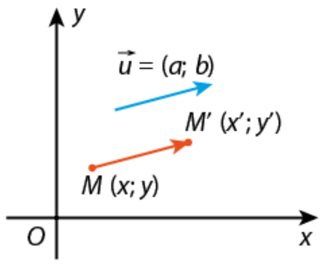
Suy ra $\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b' \end{cases}$ hay $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$

Suy ra toạ độ điểm $M'$ là $(x + a; y + b)$.

**Nhận xét:** Trong mặt phẳng $Oxy$, với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$. Ta có:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$.




*Hình 1.49*

## LUYỆN TẬP 3

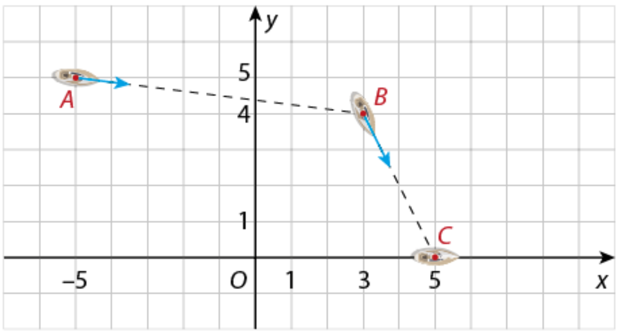
Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ và vectơ $\vec{u} = (2; -1)$.

a) Gọi $I$ là tâm của $(C)$. Xác định toạ độ $I'$ là ảnh của $I$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

b) Xác định ảnh $(C')$ của đường tròn $(C)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

## VẬN DỤNG

Chúng ta thường xuyên quan sát thấy các hình ảnh động được tạo ra trên máy vi tính. *Hình 1.50* mô tả một con thuyền chuyển động từ $A(-5; 5)$ đến $B(3; 4)$ rồi từ $B$ đến $C(5; 0)$. Người ta có thể sử dụng các phép tịnh tiến để mô tả một vật chuyển động thẳng từ điểm này đến điểm khác. Chẳng hạn, chuyển động từ $A$ đến $B$ được mô tả bởi phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.



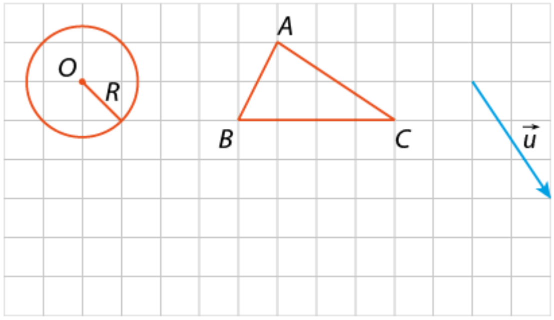

*Hình 1.50*

a) Hãy tìm các phép tịnh tiến mô tả chuyển động từ $B$ đến $C$, từ $A$ đến $C$.

b) Nếu thuyền đang ở điểm $C$ và di chuyển theo phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, với $\vec{u} = (-3; -2)$ thì nó sẽ đến điểm $D$ có toạ độ là bao nhiêu?

**BÀI TẬP**

**1.16.** Vẽ ảnh của tam giác $ABC$ và ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ trong *Hình 1.51*.




*Hình 1.51*

**1.17.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho vectơ $\vec{u} = (3; -2)$.

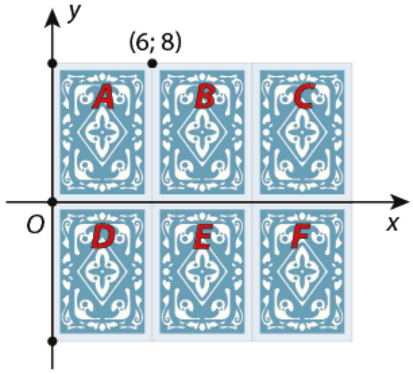
a) Tìm toạ độ của điểm $A'$ là ảnh của $A(1; 2)$ qua $T_{\vec{u}}$.

b) Tìm ảnh $d'$ của đường thẳng $d$: $3x - 2y - 2 = 0$ qua $T_{\vec{u}}$.

c) Tìm ảnh $(C')$ của đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ qua $T_{\vec{u}}$.

**1.18.** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm toạ độ vectơ $\vec{u}$ sao cho phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến điểm $A(-3; 5)$ thành điểm $A'(1; 4)$.

**1.19.** Phép tịnh tiến có thể được sử dụng để tạo hình trang trí cho vải, giấy dán tường, lát gạch sàn nhà,… Một nhà thiết kế muốn tạo ra mẫu trang trí để phủ kín một bề mặt. Anh ta tạo ra một mẫu hoa văn như hình chữ nhật $A$ trên máy vi tính, đặt nó vào một hệ trục toạ độ như *Hình 1.52* và sau đó tịnh tiến hình $A$ để được các hình $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$.




*Hình 1.52*

a) Tìm một phép tịnh tiến biến hình $A$ thành hình $B$.

b) Tìm một phép tịnh tiến biến hình $A$ thành hình $F$.

**1.20.** Cho tam giác nhọn $ABC$ có $H$ là trực tâm và $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi $D$ là điểm đối xứng với $B$ qua $O$.

a) Chứng minh tứ giác $AHCD$ là hình bình hành.

b) Gọi $M$ là trung điểm $BC$. Chứng minh rằng $H$ là ảnh của $A$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{OM}$.

BÀI 5

# PHÉP QUAY

Cầu quay sông Hàn là một công trình giao thông độc đáo và mang tính biểu tượng của thành phố Đà Nẵng. Thiết kế của cầu có thể hỗ trợ việc khơi thông cho các tàu thuyền qua lại. Phần giữa của cầu có thể quay 90 độ quanh trục đến vị trí dọc theo dòng chảy của dòng sông, mở đường cho tàu lớn đi qua (nguồn: *https://vinwonders.com/*).

*Hình 1.53*

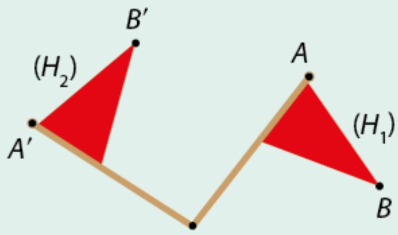
## I Phép quay

### HOẠT ĐỘNG 1

Trong *Hình 1.54*, một lá cờ (hình $H_1$) được quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm $O$ đến vị trí mới (hình $H_2$). Lấy hai điểm $A$ và $B$ trên $(H_1)$ và hai điểm $A'$, $B'$ tương ứng trên $(H_2)$. Sử dụng thước đo độ dài và thước đo góc, hãy:

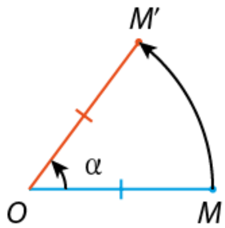
a) So sánh độ dài $OA$ và $OA'$, $OB$ và $OB'$;

b) So sánh số đo hai góc $\widehat{AOA'}$ và $\widehat{BOB'}$.




*Hình 1.54*

Cho điểm $O$ và góc lượng giác $\alpha$. Phép biến hình biến $O$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ khác $O$ thành $M'$ sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM, OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm $O$ góc quay $\alpha$, kí hiệu $Q_{(O,\alpha)}$.




*Hình 1.55*

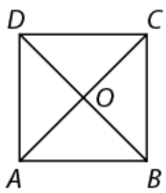
**Lưu ý:** $O$ được gọi là tâm quay, $\alpha$ được gọi là góc quay.

### VÍ DỤ 1

Cho hình vuông $ABCD$ tâm $O$.

a) Tìm ảnh của $A$ qua phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

b) Tìm ảnh của $D$ qua phép quay $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.




*Hình 1.56*

**Giải**

a) Vì $OA = OB$ và $(OA, OB) = \frac{\pi}{2}$ nên $B = Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(A)$.

b) Vì $OD = OC$ và $(OD, OC) = -\frac{\pi}{2}$ nên $C = Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}(D)$.

**THẢO LUẬN**

Phép quay tâm $O$ trở thành phép biến hình nào mà ta đã biết trong các trường hợp sau?

1. Góc quay $k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
2. Góc quay $\pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

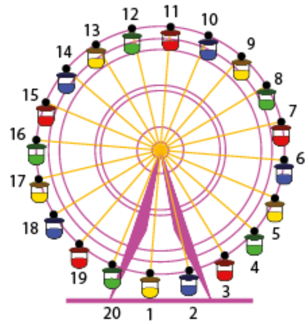
## LUYỆN TẬP 1

Kim phút của một đồng hồ đang ở vị trí số 12 như *Hình 1.57*. Sau khi thực hiện một phép quay tâm $O$ góc quay $-\frac{4\pi}{3}$ thì ảnh của kim phút sẽ ở vị trí số mấy trên đồng hồ?


*Hình 1.57*

## VẬN DỤNG

Trên vòng quay ngoài cùng của một vòng quay lớn có 20 điểm cách đều nhau được đánh số thứ tự từ 1 đến 20, mỗi điểm đó có gắn một lồng để khách tham quan ngồi ngắm cảnh (*Hình 1.58*). Tìm một phép quay tâm $O$ để lồng ở vị trí số 1 di chuyển đến vị trí số 10, với $O$ là vị trí trục của vòng quay.




*Hình 1.58*

# II Tính chất của phép quay

### HOẠT ĐỘNG 2

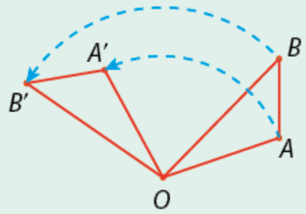
Xét phép quay tâm $O$ góc quay $100°$ và hai điểm $A$, $B$ như trong *Hình 1.59*. Gọi $A' = Q_{(O,100°)}(A)$ và $B' = Q_{(O,100°)}(B)$.

Kiểm chứng các mệnh đề sau:

a) $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$;

b) $\Delta AOB = \Delta A'OB'$;

c) $AB = A'B'$.




*Hình 1.59*

Phép quay là một phép dời hình.

**Hệ quả:** Phép quay:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

## VÍ DỤ 2

Cho hình thập giác đều (đa giác đều có 10 đỉnh) và gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó (*Hình 1.60*). Tìm một phép quay tâm $O$ theo chiều dương biến $\Delta AOB$ thành $\Delta MON$.

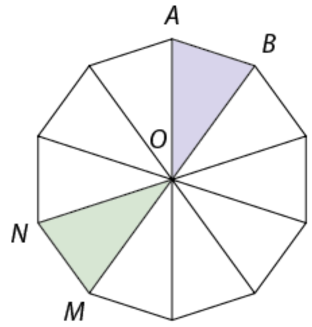
### Giải

Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = \dfrac{360^\circ}{10} \cdot 4 = 144^\circ$.

Xét phép quay $Q_{(O,\,144^\circ)}$ ta có:

$Q_{(O,\,144^\circ)}(O) = O, Q_{(O,\,144^\circ)}(A) = M$ và $Q_{(O,\,144^\circ)}(B) = N$.

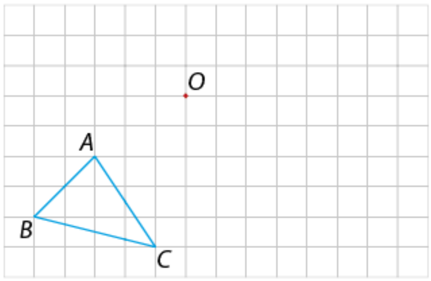
Suy ra $\Delta MON$ là ảnh của $\Delta AOB$ qua phép quay $Q_{(O,\,144^\circ)}$.




*Hình 1.60*

## LUYỆN TẬP 2

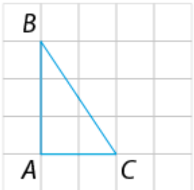
Vẽ ảnh của $\Delta ABC$ qua phép quay tâm $O$ góc quay $90^\circ$ trong *Hình 1.61*.




*Hình 1.61*

## BÀI TẬP

**1.21.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ như *Hình 1.62*.

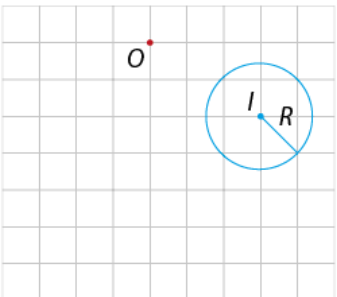



*Hình 1.62*

a) Gọi $D$ là ảnh của điểm $A$ qua phép quay tâm $B$ góc quay $90^\circ$. Tứ giác $ABDC$ là hình gì? Vì sao?

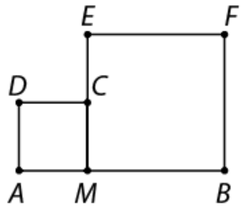
b) Nếu $AB = AC$ thì tứ giác $ABDC$ trở thành hình gì? Vì sao?

**1.22.** Vẽ ảnh của đường tròn $(I; R)$ qua phép quay tâm $O$ góc quay $-\dfrac{\pi}{2}$ trong *Hình 1.63*.



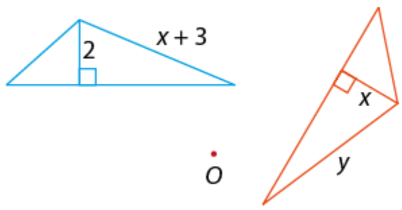

*Hình 1.63*

**1.23.** Cho đoạn thẳng $AB$ và một điểm $M$ nằm giữa $A$ và $B$. Dựng các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ như *Hình 1.64*. Hãy tìm một phép quay biến đoạn thẳng $AE$ thành đoạn thẳng $CB$.




*Hình 1.64*

**1.24.** Trong *Hình 1.65*, tam giác màu xanh là ảnh của tam giác màu cam qua phép quay tâm $O$ góc quay $120^\circ$. Xác định giá trị của $x$ và $y$.




*Hình 1.65*

BÀI 6

# PHÉP VỊ TỰ. PHÉP ĐỒNG DẠNG

Ở lớp 8 ta đã tìm hiểu về các tam giác đồng dạng với nhau. Trong cuộc sống hay trong nghệ thuật và kiến trúc, chúng ta cũng thường quan sát thấy nhiều hình ảnh giống nhau về hình dạng nhưng lại khác nhau về kích thước.

Các phép biến hình nào có thể được sử dụng để biến một hình thành hình mới khác kích thước nhưng có cùng hình dạng với hình ban đầu?

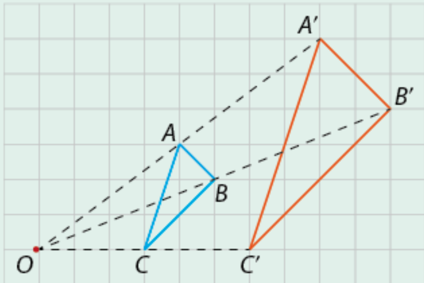
*Hình 1.66*

## I Phép vị tự

### HOẠT ĐỘNG 1

Từ tam giác $ABC$ cho trước, bạn Hương muốn tạo ra một tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác $ABC$ và có độ dài các cạnh gấp hai lần các cạnh của tam giác $ABC$. Bạn Hương thực hiện việc đó như sau:

- Lấy một điểm $O$ nằm ngoài tam giác $ABC$;
- Trên các tia $OA$, $OB$ và $OC$, lần lượt lấy các điểm $A'$, $B'$ và $C'$ sao cho $OA' = 2OA$; $OB' = 2OB$ và $OC' = 2OC$;
- Nối các điểm $A'$, $B'$, $C'$ để thu được tam giác $A'B'C'$ cần vẽ.




*Hình 1.67*

a) Hãy giải thích vì sao tam giác $A'B'C'$ vừa vẽ được theo cách trên thoả yêu cầu đặt ra ban đầu của bạn Hương.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA'}$ và $\overrightarrow{OA}$.

Cho điểm $O$ và số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k$, kí hiệu $V_{(O,k)}$.

**Lưu ý:**

- Phép vị tự còn được gọi là phép đồng dạng phối cảnh.
- Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- Nếu $k > 0$ thì $\overrightarrow{OM'}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng.
- Nếu $k < 0$ thì $\overrightarrow{OM'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng.

### VÍ DỤ 1

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $I(1; 2)$ và $A(-3; 5)$. Tìm toạ độ $A'$ là ảnh của $A$ qua phép vị tự tâm $I$ tỉ số $k = 3$.

**Giải**

Gọi $A'(x'; y')$. Ta có $\overrightarrow{IA'} = (x' - 1; y' - 2)$ và $\overrightarrow{IA} = (-4; 3)$.

Vì $A'$ là ảnh của $A$ qua phép vị tự tâm $I$ tỉ số $k = 3$, ta có:

$$\overrightarrow{IA'} = 3\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = -12 \\ y' - 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -11 \\ y' = 11. \end{cases}$$

Vậy $A'(-11; 11)$.

### LUYỆN TẬP 1

Trong mặt phẳng $Oxy$, cho $I(-2; 1)$ và $A(3; -1)$. Tìm toạ độ $A'$ là ảnh của $A$ qua phép vị tự tâm $I$ tỉ số $k = -2$.

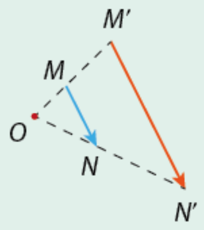
## II Tính chất của phép vị tự

### HOẠT ĐỘNG 2

Xét phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k$ và hai điểm phân biệt $M$ và $N$. Gọi $M' = V_{(O,k)}(M)$ và $N' = V_{(O,k)}(N)$.

a) Hãy biểu diễn $\overrightarrow{M'N'}$ theo $\overrightarrow{MN}$.

b) Từ trên suy ra $M'N' = |k|MN$.




*Hình 1.68*

Nếu phép vị tự tỉ số $k$ biến hai điểm $M$ và $N$ lần lượt thành $M'$ và $N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

### HOẠT ĐỘNG 3

Gọi $A', B', C'$ lần lượt là ảnh của $A, B, C$ qua phép vị tự tỉ số $k$.

a) Khi $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$ $(m \in \mathbb{R})$, có thể kết luận gì về mối quan hệ giữa $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$?

b) Khi điểm $B$ nằm giữa $A$ và $C$, có nhận xét gì về mối quan hệ giữa ba điểm $A', B', C'$?

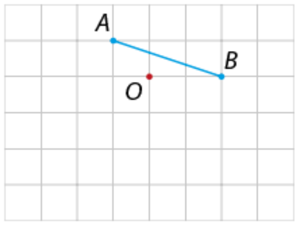
c) Trong trường hợp ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng, gọi $d_1$ là đường thẳng đi qua $A, B, C$ và $d_2$ là đường thẳng đi qua $A', B', C'$. Có nhận xét gì về vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$?

Phép vị tự tỉ số $k$:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài gấp $|k|$ lần đoạn thẳng ban đầu;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó và có tỉ số đồng dạng là $|k|$;
- Biến đường tròn có bán kính $R$ thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

## VÍ DỤ 2

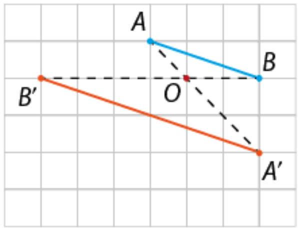
Cho đoạn thẳng $AB$ và điểm $O$ trên *Hình 1.69*. Hãy xác định ảnh $A'B'$ của đoạn thẳng $AB$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = -2$.




*Hình 1.69*

### Giải

Trên tia đối của các tia $OA$ và $OB$, lần lượt lấy các điểm $A'$ và $B'$ sao cho $OA' = 2OA$ và $OB' = 2OB$.
Lúc này $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OB}$ nên $A' = V_{(O,-2)}(A)$ và $B' = V_{(O,-2)}(B)$.
Từ đó suy ra $A'B' = V_{(O,-2)}(AB)$.



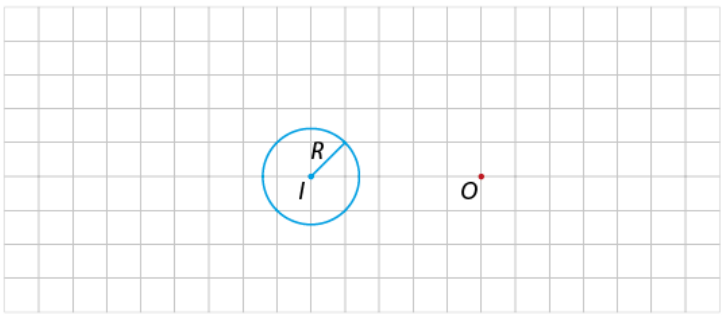

*Hình 1.70*

## LUYỆN TẬP 2

Cho điểm $O$ và đường tròn $(I; R)$ trên *Hình 1.71*. Vẽ ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự:

a) Tâm $O$ tỉ số $k = 2$;

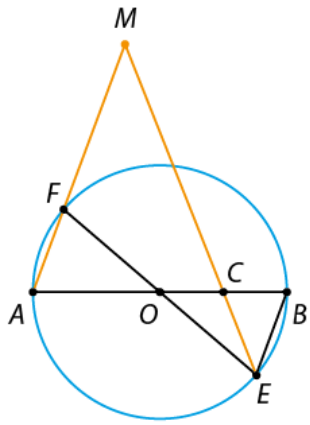
b) Tâm $O$ tỉ số $k = -1$.




*Hình 1.71*

### VÍ DỤ 3

Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$ và $C$ là trung điểm của $OB$. Gọi $E$ là điểm di động trên $(O)$ và $F$ là điểm đối xứng với $E$ qua $O$. Đường thẳng $AF$ và $CE$ cắt nhau tại $M$. Chứng minh rằng điểm $M$ di động trên một đường tròn cố định.




Hình 1.72

**Giải**

Vì $AB$ và $EF$ cắt nhau tại $O$ là trung điểm mỗi đường nên tứ giác $AEBF$ là hình bình hành. Suy ra $BE \parallel AF$ và $AF = BE$.

Theo định lí Thalès ta có:

$\frac{BE}{AM} = \frac{CB}{CA} = \frac{1}{3}$.

Vì $AF = BE$ nên ta có $\frac{AF}{AM} = \frac{BE}{AM} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AF}$. Do đó $M$ là ảnh của $F$ qua phép vị tự $V_{(A;\,3)}$.

Vì $F$ di động trên đường tròn $(O)$ cố định nên $M$ di động trên đường tròn cố định $(O')$ là ảnh của $(O)$ qua phép vị tự $V_{(A;\,3)}$.

### LUYỆN TẬP 3

Cho hai điểm $A$, $B$ cố định và đường thẳng $d$ cố định song song với $AB$. Gọi $M$ là một điểm di động trên $d$ và $G$ là trọng tâm tam giác $MAB$. Chứng minh rằng điểm $G$ di động trên một đường thẳng cố định.

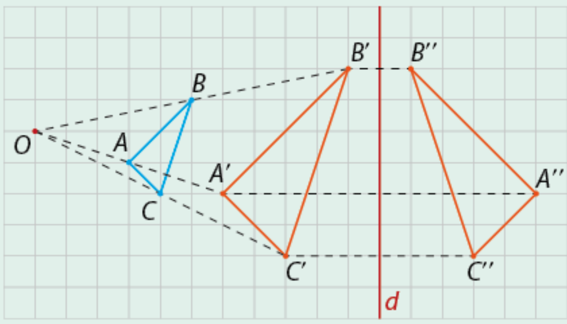
## III Phép đồng dạng và tính chất

### HOẠT ĐỘNG 4

Trong *Hình 1.73*, ta có tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác $ABC$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = 2$; tam giác $A''B''C''$ là ảnh của tam giác $A'B'C'$ qua phép đối xứng trục $d$.

a) Tính các tỉ số $\frac{A''B''}{AB}$; $\frac{A''C''}{AC}$ và $\frac{B''C''}{BC}$.

b) Tam giác $A''B''C''$ có đồng dạng với tam giác $ABC$ không? Vì sao?




Hình 1.73

Trong Hoạt động 4, bằng cách thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép đối xứng trục, ta thu được tam giác $A''B''C''$ đồng dạng với tam giác $ABC$. Phép biến hình $F$ biến tam giác $ABC$ thành tam giác $A''B''C''$ như trên là một ví dụ minh hoạ cho phép đồng dạng.

Phép biến hình $F$ được gọi là **phép đồng dạng** tỉ số $k$ ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì $M$, $N$ và $M' = F(M)$, $N' = F(N)$ ta luôn có $M'N' = kMN$.

**Lưu ý:**

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.
- Phép vị tự tỉ số $k$ là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Phép biến hình có được bằng việc thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép dời hình là phép đồng dạng.

Người ta chứng minh được rằng mọi phép đồng dạng $F$ có thể thay thế bằng việc thực hiện liên tiếp một phép vị tự $V$ và một phép dời hình $D$. Từ tính chất của phép vị tự và phép dời hình, ta rút ra các tính chất sau đây của phép đồng dạng:

Phép đồng dạng tỉ số $k$ ($k > 0$):

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của chúng;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài gấp $k$ lần đoạn thẳng ban đầu.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó và có tỉ số đồng dạng là $k$.
- Biến đường tròn có bán kính $R$ thành đường tròn có bán kính $kR$.

### VÍ DỤ 4

Trong mặt phẳng $Oxy$, xét phép biến hình $F$ biến điểm $M(x; y)$ bất kì thành điểm $M'(2x + 1; 2y - 3)$. Chứng minh $F$ là phép đồng dạng tỉ số $k$ và xác định giá trị của $k$.

**Giải**

Xét hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ bất kì. Gọi $A' = F(A)$ và $B' = F(B)$. Khi đó $A'(2x_1 + 1; 2y_1 - 3)$ và $B'(2x_2 + 1; 2y_2 - 3)$.

Ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ và $A'B' = \sqrt{(2x_2 - 2x_1)^2 + (2y_2 - 2y_1)^2} = 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Suy ra $A'B' = 2AB$.

Do đó $F$ là phép đồng dạng tỉ số $k = 2$.

### LUYỆN TẬP 4

Xác định ảnh của đường tròn $(C)$: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ qua phép đồng dạng $F$ ở Ví dụ 4.

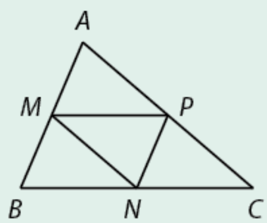
## IV Hai hình đồng dạng

### HOẠT ĐỘNG 5

Cho tam giác $ABC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC$ và $CA$.

a) Tìm một phép vị tự biến tam giác $ABC$ thành tam giác $AMP$.

b) Tìm một phép đồng dạng biến tam giác $ABC$ thành tam giác $NPM$.



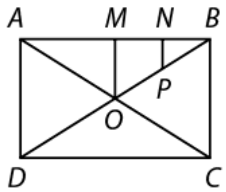

*Hình 1.74*

Cho trước hai tam giác đồng dạng với nhau, người ta chứng minh được rằng luôn tồn tại một phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia. Theo đó, người ta cũng đưa ra định nghĩa sau đây về khái niệm hai hình đồng dạng:

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

### VÍ DỤ 5

Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $O$ là giao điểm hai đường chéo. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $AB, MB, OB$. Chứng minh rằng hai tứ giác $NPOM$ và $MOCB$ đồng dạng với nhau.



*Hình 1.75*

**Giải**

Xét phép vị tự $V_{(B,\,2)}$, ta có: $V_{(B,\,2)}(N) = M, V_{(B,\,2)}(P) = O, V_{(B,\,2)}(O) = D, V_{(B,\,2)}(M) = A$.

Suy ra tứ giác $MODA$ là ảnh của tứ giác $NPOM$.

Xét phép đối xứng trục $Đ_{MO}$. Ta có tứ giác $MOCB$ là ảnh của tứ giác $MODA$.

Do đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình $V_{(B,\,2)}$ và $Đ_{MO}$ biến tứ giác $NPOM$ thành tứ giác $MOCB$.

Suy ra hai tứ giác $NPOM$ và $MOCB$ đồng dạng với nhau.

### LUYỆN TẬP 5

Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng với nhau.

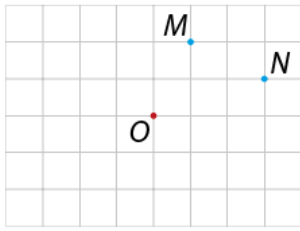
## BÀI TẬP

**1.25.** Cho các điểm $M, N$ và $O$ như *Hình 1.76*.

a) Tìm ảnh của các điểm $M$ và $N$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = 1$.

b) Vẽ các điểm $M'$ và $N'$ lần lượt là ảnh của $M$ và $N$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = -1$.

c) Hai phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = 1$ và $k = -1$ có là phép dời hình hay không?



*Hình 1.76*

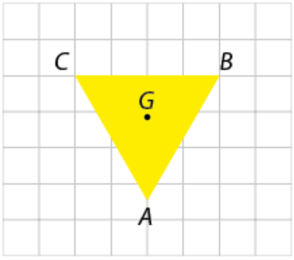
**1.26.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $I(-1; -2)$ và đường thẳng $d$: $x + 5y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng $d'$ là ảnh của $d$ qua phép vị tự tâm $I$ tỉ số $k = 3$.

**1.27.** Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt về an toàn giao thông, bạn Đạt cần vẽ biển báo giao nhau với đường được ưu tiên. Hình dạng của biển báo này là một tam giác đều có viền màu đỏ, nền màu vàng như *Hình 1.77*. Để vẽ biển báo này, bạn Đạt cần vẽ hai tam giác đều có cùng trọng tâm nhưng khác kích thước như sau:

- Vẽ tam giác đều $ABC$ (tam giác bên trong) và xác định trọng tâm $G$ của nó;
- Vẽ tam giác $A'B'C'$ (tam giác bên ngoài) là ảnh của tam giác $ABC$ qua phép vị tự tâm $G$ tỉ số $k = \frac{5}{4}$.


*Hình 1.77*

Bạn Đạt chỉ vừa vẽ được tam giác $ABC$ như *Hình 1.78*. Hãy chép lại hình và vẽ tam giác $A'B'C'$ để hoàn thiện biển báo giao nhau với đường được ưu tiên.




*Hình 1.78*

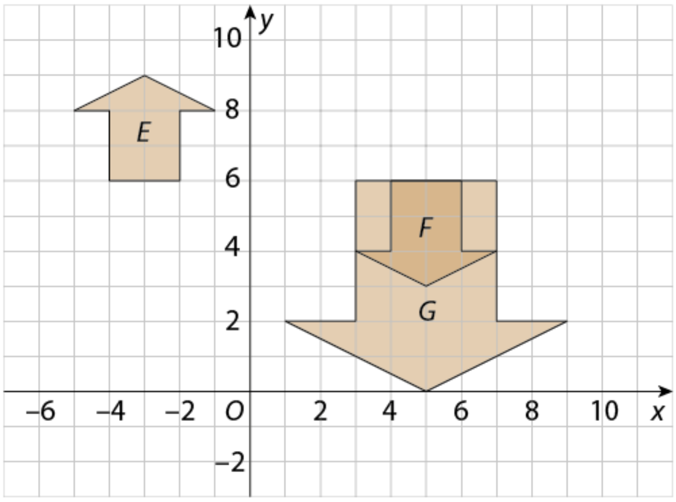
**1.28.** Từ hình $E$ ban đầu, một người đã tạo ra hình $G$ đồng dạng với nó (như trong *Hình 1.79*) bằng cách thực hiện hai bước sau đây:

**Bước 1** Vẽ hình $F$ là ảnh của $E$ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$.

**Bước 2** Vẽ hình $G$ là ảnh của $F$ qua phép vị tự $V_{(J,\,k)}$.

a) Xác định toạ độ tâm $I$ của phép đối xứng tâm đã thực hiện ở Bước 1.

b) Xác định toạ độ tâm $J$ và tỉ số $k$ của phép vị tự đã thực hiện ở Bước 2.




*Hình 1.79*

**1.29.** Cho tam giác $ABC$, đường cao $AH$. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của tam giác $ABC$ qua một phép đồng dạng $F$.

a) Xác định ảnh của $H$ qua $F$.

b) Chứng minh rằng $F$ biến trực tâm tam giác $ABC$ thành trực tâm tam giác $A'B'C'$.

**1.30.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$, tâm đường tròn ngoại tiếp $O$ và trọng tâm $G$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $AC$ và $AB$.

a) Chứng minh $O$ là trực tâm của tam giác $MNP$.

b) Chứng minh phép vị tự tâm $G$ tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến tam giác $ABC$ thành tam giác $MNP$.

c) Chứng minh ba điểm $G$, $H$, $O$ thẳng hàng và $GH = 2GO$.

## ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 1

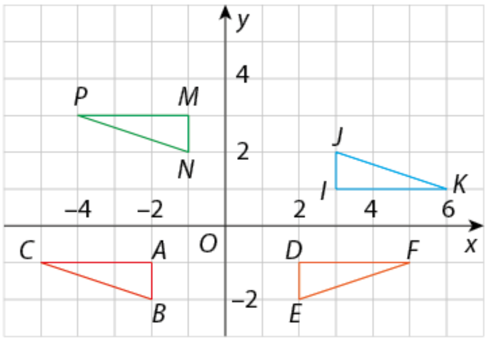
### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**1.31.** Trong *Hình 1.80*, xác định một phép dời hình:

a) Biến tam giác $ABC$ thành tam giác $DEF$;

b) Biến tam giác $ABC$ thành tam giác $IJK$;

c) Biến tam giác $ABC$ thành tam giác $MNP$.




*Hình 1.80*

**1.32.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 2 = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng $d_1$ là ảnh của $\Delta$ qua phép đối xứng tâm $O$.

b) Viết phương trình đường thẳng $d_2$ là ảnh của $\Delta$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = -\frac{3}{2}$.

**1.33.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$.

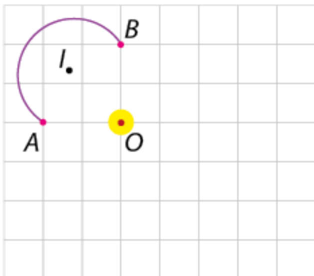
a) Viết phương trình đường tròn $(C_1)$ là ảnh của $(C)$ qua phép đối xứng trục $Ox$.

b) Viết phương trình đường tròn $(C_2)$ là ảnh của $(C)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2; -3)$.

c) Viết phương trình đường tròn $(C_3)$ là ảnh của $(C)$ qua phép quay tâm $O$ góc quay $\alpha = \pi$.

**1.34.** Bạn Vy dự định vẽ một bông hoa bốn cánh bằng cách sau:

- Chọn một điểm $O$ là tâm đối xứng của hình và vẽ một hình tròn tâm $O$ làm nhị;
- Chọn một điểm $I$ và vẽ một cung tròn $(C)$ tâm $I$ với hai đầu mút là $A$ và $B$ như *Hình 1.81*;
- Vẽ lần lượt ảnh của $(C)$ qua phép quay tâm $O$ góc quay $\alpha$, $2\alpha$ và $3\alpha$.




*Hình 1.81*

a) Xác định số đo $\alpha$ để bốn cung tròn nối kín với nhau.

b) Hãy giúp bạn Vy vẽ tiếp ba cung tròn bị thiếu để hoàn thành hình vẽ bông hoa bốn cánh.

c) Hình bông hoa bạn Vy định vẽ có phải là hình có trục đối xứng hay không?

**1.35.** Cho tam giác $ABC$, vẽ về phía ngoài của tam giác $ABC$ các tam giác đều $ABD$ và $ACE$.

a) Tìm ảnh của $D$ và $C$ qua phép quay $Q_{(A, 60^\circ)}$.

b) Chứng minh $CD = BE$.

c) Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $CD$ và $BE$, chứng minh tam giác $AIJ$ đều.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**1.36.** Trong các phép biến hình sau, phép biến hình nào không phải là phép dời hình?

A. Phép đối xứng tâm.

B. Phép tịnh tiến.

C. Phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = 5$.

D. Phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.

**1.37.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(-1; 5)$. Gọi $A'$, $B$ lần lượt là ảnh của $A$ và $B$ qua phép đồng dạng tỉ số $k = 2$. Độ dài đoạn thẳng $A'B'$ bằng

A. $\frac{25}{2}$.	B. 10.	C. $\frac{5}{2}$.	D. 50.

**1.38.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. Đường tròn $(C')$ là ảnh của $(C)$ qua phép vị tự tâm $I(1; 1)$ tỉ số $k = 3$ có phương trình là

A. $(x-7)^2 + (y+5)^2 = 4$.

B. $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 4$.

C. $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 36$.

D. $(x-7)^2 + (y+5)^2 = 36$.

**1.39.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $2x - 3y + 1 = 0$. Đường thẳng $d'$ là ảnh của $d$ qua phép đối xứng trục $Oy$ có phương trình là

A. $2x + 3y - 1 = 0$.

B. $2x + 3y + 1 = 0$.

C. $2x - 3y - 1 = 0$.

D. $2x + 3y - 5 = 0$.

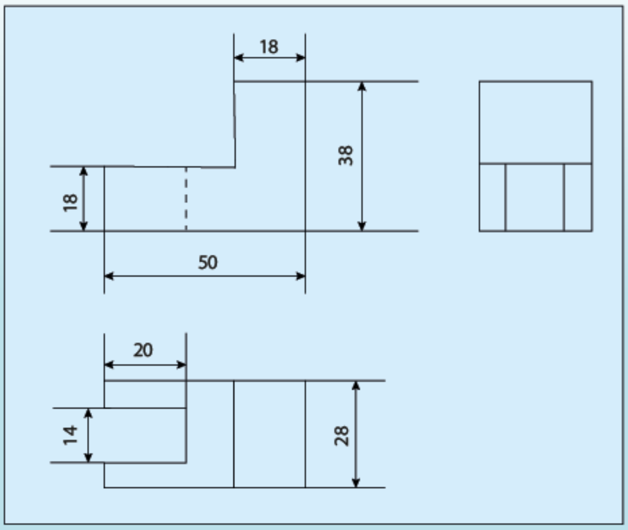
**1.40.** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho điểm $M(x; y)$ và $I(a; b)$. Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M$ qua phép đối xứng tâm $I$. Biểu thức tính toạ độ điểm $M'$ là

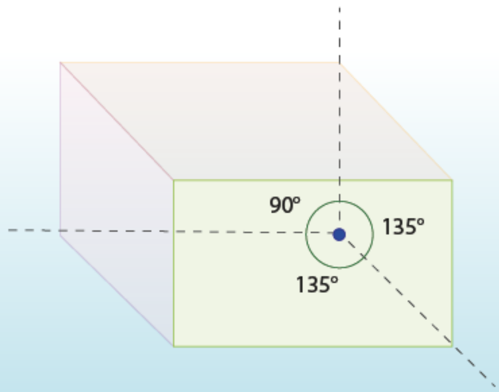
A. $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}$

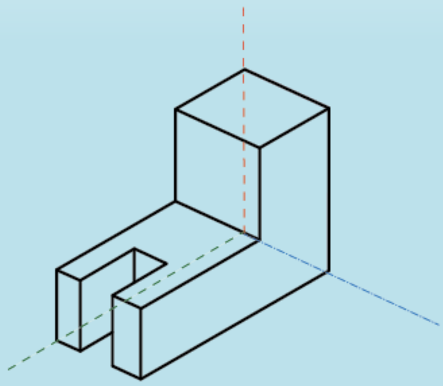
B. $\begin{cases} x' = 2a + x \\ y' = 2b + y. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = a - x \\ y' = b - y. \end{cases}$



# CHUYÊN ĐỀ 2 Một số yếu tố vẽ kĩ thuật

Xung quanh ta có rất nhiều đồ vật, công cụ được con người chế tạo để phục vụ nhu cầu cuộc sống, chẳng hạn như các bộ phận của máy móc cơ khí, nhà cửa, bàn ghế,... Trong sản xuất chế tạo, để chuyển các ý tưởng thiết kế thành các đồ vật thực tế chính xác về kích thước, hình dạng,... người ta dùng một "ngôn ngữ" thống nhất với nhau, đó là bản vẽ kĩ thuật. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số yếu tố liên quan đến vẽ kĩ thuật gắn liền với phép chiếu song song trong hình học không gian đã học.

- Nhận biết được hình biểu diễn của một số hình, khối;
- Nhận biết được một số nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật;
- Đọc được thông tin từ một số bản vẽ kĩ thuật đơn giản;
- Vẽ được bản vẽ kĩ thuật đơn giản (gắn với phép chiếu song song và vuông góc).

# BÀI 1 MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ VẼ KĨ THUẬT

Bản vẽ kĩ thuật là phương tiện thông tin dùng trong các lĩnh vực kĩ thuật và trở thành "ngôn ngữ" chung, dùng trong kĩ thuật. Do đó, nó phải được xây dựng theo các quy tắc thống nhất được quy định trong các tiêu chuẩn về bản vẽ kĩ thuật. Dưới đây là một số tiêu chuẩn về trình bày bản vẽ kĩ thuật.

## I Một số nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật

### 1. Khổ giấy

**HOẠT ĐỘNG 1**

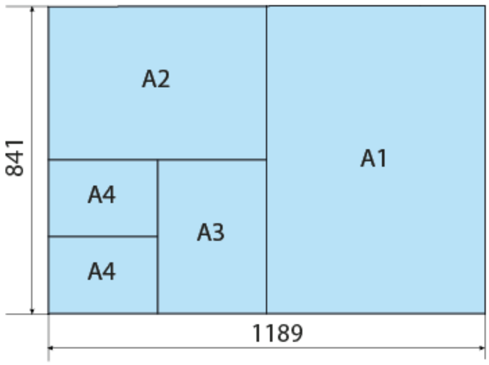
Việc quy định khổ giấy theo một tiêu chuẩn nhất định có liên quan gì đến các thiết bị sản xuất giấy và in ấn?

TCVN 7285 : 2003 (ISO 5457 : 1999)[1] quy định về khổ giấy của các bản vẽ kĩ thuật gồm các khổ giấy chính được trình bày trong *Bảng 2.1.*

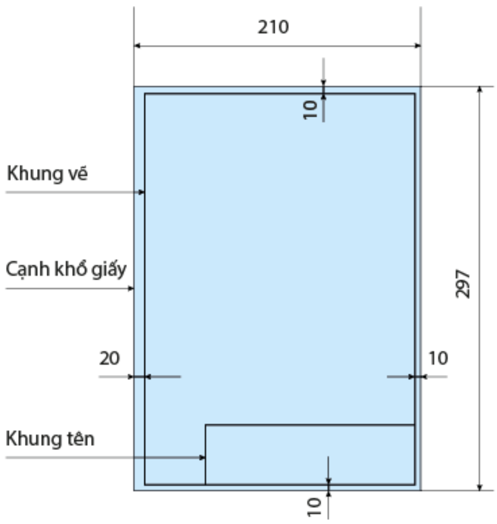
*Bảng 2.1. Các khổ giấy chính*

| Kí hiệu | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Kích thước (mm) | 1189 × 841 | 841 × 594 | 594 × 420 | 420 × 297 | 297 × 210 |

Các khổ giấy chính được lập ra từ khổ giấy A0 (*Hình 2.1*).

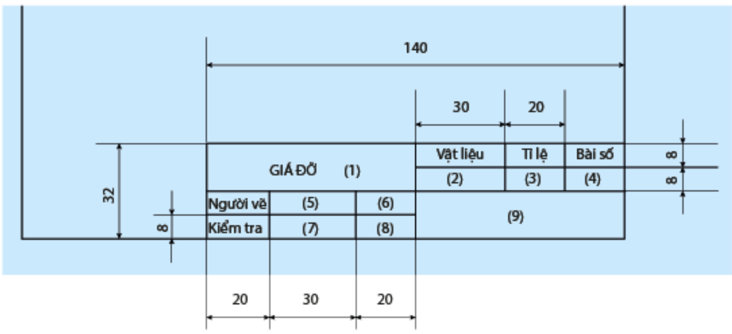



*Hình 2.1. Các khổ giấy chính*




*Hình 2.2a*

Mỗi bản vẽ đều có khung vẽ và khung tên. Khung vẽ phải đảm bảo các kích thước canh lề trái, lề phải, lề trên, lề dưới so với cạnh giấy lần lượt là: 20, 10, 10, 10. Khung tên được đặt ở góc phải phía dưới bản vẽ (*Hình 2.2a* và *Hình 2.2b*).




*Hình 2.2b*

**Ghi chú:**

- [1]TCVN: Chữ viết tắt của Tiêu chuẩn Việt Nam;
- 7285: Số đăng kí của tiêu chuẩn;
- 2003: Năm ban hành tiêu chuẩn;

(Chuyển đổi từ tiêu chuẩn Quốc tế ISO 5457 : 1999).

## VÍ DỤ 1

Quan sát *Bảng 2.1* và *Hình 2.1*, cho biết cách chia các khổ giấy chính từ khổ A0 như thế nào?

**Giải**

Dựa vào *Bảng 2.1*, ta thấy cạnh dài của khổ giấy A1 là cạnh ngắn của khổ giấy A0 và cạnh ngắn của khổ giấy A1 bằng một nửa cạnh dài khổ giấy A0 (đã làm tròn đến hàng đơn vị).
Tương tự, cạnh dài khổ A2 là cạnh ngắn khổ A1 và cạnh ngắn khổ A2 bằng nửa cạnh dài khổ A1.
Cạnh dài khổ A3 là cạnh ngắn khổ A2 và cạnh ngắn khổ A3 bằng nửa cạnh dài khổ A2.
Cạnh dài khổ A4 là cạnh ngắn khổ A3 và cạnh ngắn khổ A4 bằng nửa cạnh dài khổ A3.
Do đó, ta có thể chia các khổ giấy chính như *Hình 2.1*.

## LUYỆN TẬP 1

Quan sát *Hình 2.2a* và *Hình 2.2b*, hãy cho biết giấy dùng để vẽ khung vẽ và khung tên ở đây là khổ giấy nào. Diện tích khung tên là bao nhiêu?

## 2. Tỉ lệ

### HOẠT ĐỘNG 2

Nếu một bản đồ địa lí có ghi tỉ lệ 1 : 2 000 000 thì 1 cm trên bản đồ ứng với bao nhiêu kilômét trên thực địa?

**Tỉ lệ** là tỉ số giữa kích thước đo được trên hình biểu diễn của vật thể và kích thước thực tương ứng trên vật thể đó.

TCVN 7286 : 2003 (ISO 5455 : 1971) quy định tỉ lệ dùng trên các bản vẽ kĩ thuật như sau:

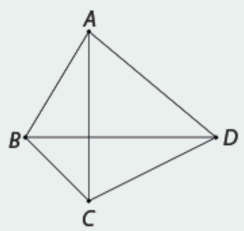
- Tỉ lệ thu nhỏ: 1 : 2 1 : 5 1 : 10 1 : 20 1 : 50 1 : 100…
- Tỉ lệ nguyên hình: 1 : 1
- Tỉ lệ phóng to: 2 : 1 5 : 1 10 : 1 20 : 1 50 : 1 100 : 1…

Tuỳ theo kích thước của vật thể được biểu diễn và khổ giấy vẽ mà chọn tỉ lệ thích hợp.

## 3. Nét vẽ

### HOẠT ĐỘNG 3

Theo nguyên tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian: Đường nét liền cho đường trông thấy và đường nét đứt cho đường bị khuất, *Hình 2.3* là hình biểu diễn của một hình tứ diện *ABCD* có đường thẳng vẽ sai. Đó là đường thẳng nào? Hãy sửa lại cho đúng.




*Hình 2.3*

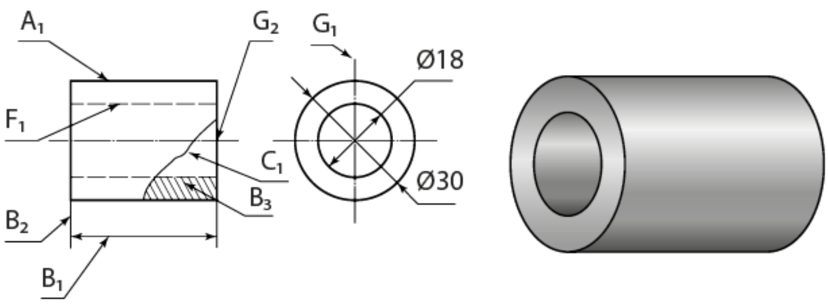
Các hình biểu diễn của vật thể trên bản vẽ kĩ thuật được thể hiện bằng nhiều loại nét vẽ khác nhau. TCVN 8 – 20 : 2002 (ISO 128 – 20 : 1996) quy định tên gọi, hình dạng, chiều rộng và ứng dụng của các nét vẽ.

### a) Các loại nét vẽ

Các loại nét vẽ thường dùng được trình bày trong *Bảng 2.2* và *Hình 2.4*.

*Bảng 2.2. Các loại nét vẽ thường dùng*

| Tên gọi | Hình dạng | Ứng dụng |
|---|---|---|
| Nét liền đậm | | $A_1$ - Đường bao thấy, cạnh thấy |
| Nét liền mảnh | | $B_1$ - Đường kích thước<br>$B_2$ - Đường gióng<br>$B_3$ - Đường gạch gạch trên mặt cắt |
| Nét lượn sóng | | $C_1$ - Đường giới hạn một phần hình cắt |
| Nét đứt mảnh | 12*d* 3*d* | $F_1$ - Đường bao khuất, cạnh khuất |
| Nét gạch chấm mảnh | 24*d* 6*d* | $G_1$ - Đường tâm<br>$G_2$ - Đường trục đối xứng |
| Chú thích: *d* là chiều rộng của nét vẽ. | | |




*Hình 2.4. Ứng dụng các loại nét vẽ*

### b) Chiều rộng của nét vẽ

**HOẠT ĐỘNG 4**

Việc quy định chiều rộng của nét vẽ có liên quan gì đến bút vẽ?

Chiều rộng của nét vẽ (*d*) được chọn trong dãy kích thước sau:

0,13; 0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1,4 và 2 mm.

Ta thường lấy chiều rộng nét đậm bằng 0,5 mm và nét mảnh bằng 0,25 mm.

## 4. Chữ viết

Chữ viết trên bản vẽ kĩ thuật phải rõ ràng, thống nhất, dễ đọc.
TCVN 7284 – 2 : 2003 (ISO 3092 – 2 : 2000) quy định khổ chữ và kiểu chữ của chữ La-tinh viết trên bản vẽ và các tài liệu kĩ thuật.

**HOẠT ĐỘNG 5**

Hình vẽ bên là một vài chữ viết theo quy định vẽ kĩ thuật. Xem mỗi ô vuông là một hình vuông cạnh 1 mm. Hãy cho biết chiều cao của các chữ này và độ rộng của mỗi nét chữ.


*Hình 2.5*

### a) Khổ chữ

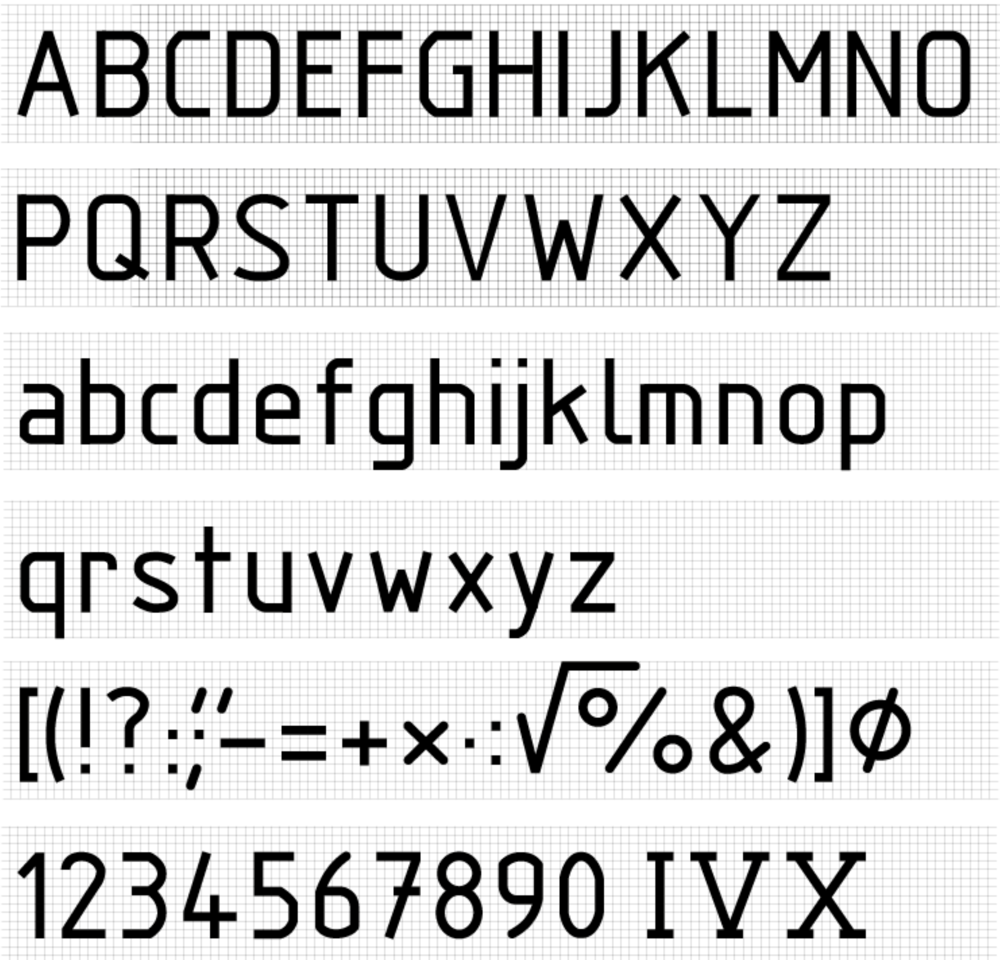
- Khổ chữ ($h$) được xác định bằng chiều cao của chữ hoa tính bằng milimét. Có các khổ chữ sau: 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20 mm.
- Chiều rộng ($d$) của nét chữ thường lấy bằng $\frac{1}{10}h$.

### b) Kiểu chữ

Có các kiểu chữ như sau:

- Kiểu A đứng và kiểu A nghiêng 75° với $d = \frac{1}{14}h$;
- Kiểu B đứng và kiểu B nghiêng 75° với $d = \frac{1}{10}h$.

Trên các bản vẽ kĩ thuật, thông thường người ta dùng kiểu chữ B đứng như *Hình 2.6*.




*Hình 2.6. Kiểu chữ đứng*

## VÍ DỤ 2

Dựa vào kiểu chữ đứng (*Hình 2.6*), hãy cho biết tỉ lệ giữa chiều cao của chữ thường thấp nhất với chiều cao của chữ in hoa.

**Giải**

Chiều cao chữ thường thấp nhất (chẳng hạn chữ a, b, c, o,…) chiếm 7 ô li, còn chiều cao chữ in hoa chiếm 10 ô li, ta có tỉ lệ cần tính là $\frac{7}{10}$.

**Lưu ý:**
Trong vẽ kĩ thuật, người ta thường nói chiều cao chữ thường là $\frac{7}{10}h$, với $h$ là khổ chữ 10 của kiểu chữ đứng.

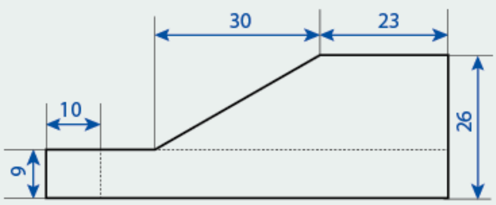
## LUYỆN TẬP 2

Dựa vào kiểu chữ đứng (*Hình 2.6*), hãy cho biết tỉ lệ giữa bề rộng và chiều cao của mỗi chữ in hoa.

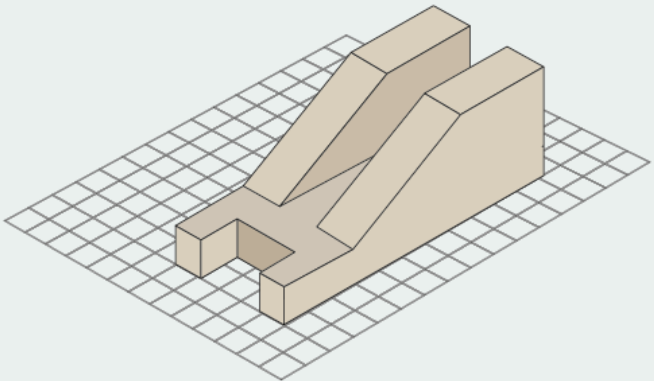
## 5. Ghi kích thước

### HOẠT ĐỘNG 6

*Hình 2.7a* là một phần bản vẽ kĩ thuật chi tiết máy có hình dạng như *Hình 2.7b*. Hãy cho biết chiều cao của chi tiết máy này là bao nhiêu.




a)



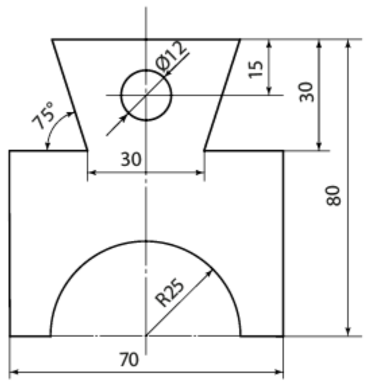
b)

*Hình 2.7*

TCVN 5705 : 1993 quy định quy tắc ghi kích thước dài, kích thước góc trên các bản vẽ và tài liệu kĩ thuật.

### a) Đường kích thước

Đường kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh, song song với phần tử được ghi kích thước. Ở đầu mút đường kích thước có vẽ mũi tên như *Hình 2.8* (trong bản vẽ xây dựng có thể dùng gạch chéo thay cho mũi tên).

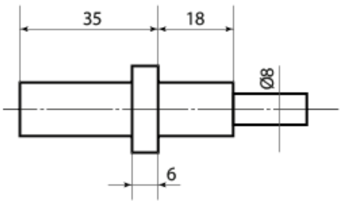



*Hình 2.8*

### b) Đường gióng kích thước

Đường gióng kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh, thường kẻ vuông góc với đường kích thước và vượt quá đường kích thước khoảng 2 – 4 mm.

**Lưu ý:** Nếu đường kích thước quá ngắn, mũi tên sẽ được vẽ phía ngoài hai đường gióng (*Hình 2.9*).

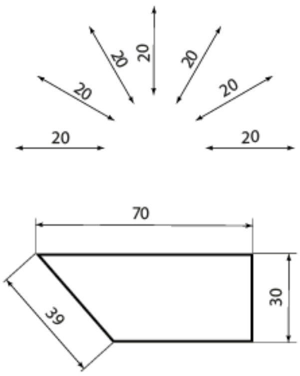



*Hình 2.9*

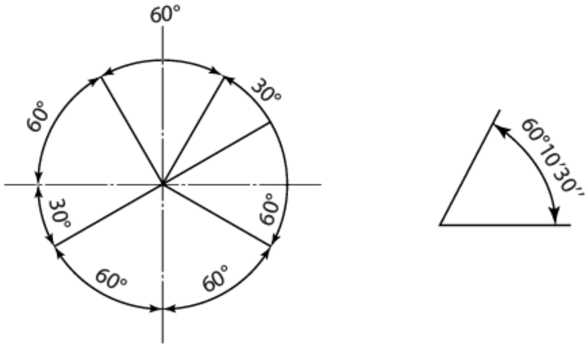
### c) Chữ số kích thước

Chữ số kích thước chỉ trị số kích thước thực, không phụ thuộc vào tỉ lệ bản vẽ và thường được ghi trên đường kích thước.

- Kích thước độ dài dùng đơn vị là milimét, trên bản vẽ không ghi đơn vị đo và được ghi như *Hình 2.10*; nếu dùng đơn vị độ dài khác milimét thì phải ghi rõ đơn vị đo.
- Kích thước góc dùng đơn vị đo là độ, phút, giây và được ghi như *Hình 2.11*.




*Hình 2.10. Kích thước dài*



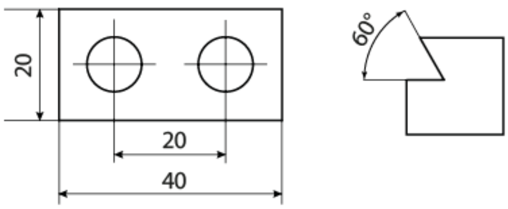

*Hình 2.11. Kích thước góc*

### d) Kí hiệu ∅, R

Trước con số kích thước, đường kính của đường tròn kí hiệu là ∅ và bán kính của cung tròn kí hiệu là R (*Hình 2.8*).

**VÍ DỤ 3**

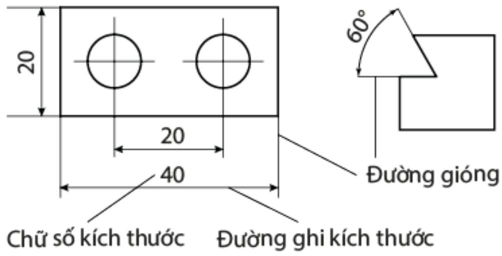
*Hình 2.12* là một phần bản vẽ kĩ thuật. Hãy chỉ ra một số đường gióng, đường kích thước và chữ số kích thước tương ứng.




*Hình 2.12*

**Giải**

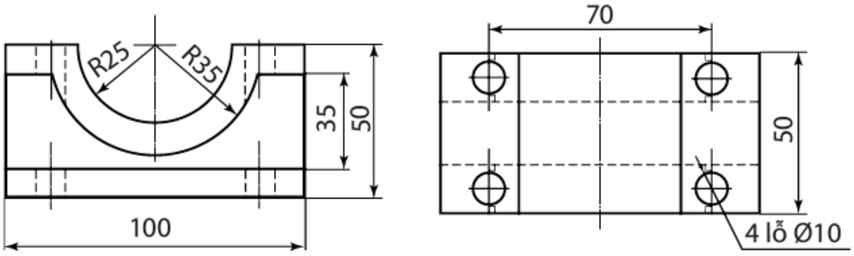
Một số đường gióng và đường kích thước được chỉ ra như ở *Hình 2.13*. Có tất cả tám đường gióng trong hình vẽ này; ba đường kích thước độ dài có chữ số lần lượt là 20 mm, 20 mm và 40 mm và một đường kích thước góc là 60 độ.




*Hình 2.13*

## LUYỆN TẬP 3

Hãy chỉ ra một số đường gióng, đường ghi kích thước, chữ số kích thước, kích thước đường kính, bán kính hình tròn trong hai ảnh sau (*Hình 2.14*):




*Hình 2.14*

### EM CÓ BIẾT

Tiêu chuẩn Việt Nam (TCVN) là văn bản Nhà nước do Uỷ ban Khoa học Nhà nước trước đây, nay là Bộ Khoa học và Công nghệ ban hành. Từ năm 1963 đến nay, nước ta đã ban hành nhiều Tiêu chuẩn Việt Nam, trong đó có các tiêu chuẩn về bản vẽ kĩ thuật.

Tổ chức Tiêu chuẩn hóa Quốc tế (International Organization for Standardization), viết tắt là ISO, được thành lập vào năm 1946. Năm 1977, nước ta là thành viên chính thức của ISO.

ISO đã ban hành Tiêu chuẩn Quốc tế thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau, trong đó có các tiêu chuẩn về các bản vẽ kĩ thuật.

# II Phép chiếu vuông góc, phương pháp chiếu góc

## 1. Phép chiếu vuông góc

Các bản vẽ kĩ thuật ở nước ta và một số nước Châu Âu thường dùng phương pháp chiếu góc thứ nhất để biểu diễn hình chiếu vuông góc của vật thể, người ta thường gọi tắt là phương pháp chiếu góc.

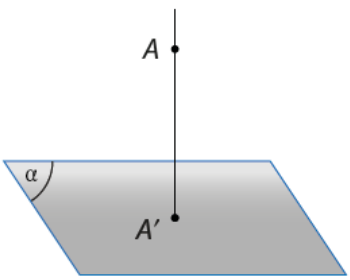
### HOẠT ĐỘNG 7

Trong không gian cho hai điểm $A$, $B$ phân biệt không thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ và đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $(\alpha)$.

a) Xác định điểm $A'$ là hình chiếu song song của $A$ trên $(\alpha)$ theo phương $\Delta$. Hãy nhận xét về $AA'$ và $(\alpha)$.

b) Gọi $B'$ là ảnh của $B$ qua phép chiếu song song lên $(\alpha)$ theo phương $\Delta$. Hãy so sánh độ dài của đoạn thẳng $A'B'$ và $AB$ trong hai trường hợp $AB \,//\, (\alpha)$ và $AB$ không song song $(\alpha)$. Giải thích vì sao có kết quả đó.

Phép chiếu song song lên mặt phẳng $(\alpha)$ theo phương $\Delta$ thoả mãn $\Delta \perp (\alpha)$ được gọi là **phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng** $(\alpha)$.




*Hình 2.15*

**Lưu ý:** Phép chiếu vuông góc lên $(\alpha)$ bảo toàn kích thước đối với các đoạn thẳng song song hoặc nằm trong $(\alpha)$.

## 2. Phương pháp chiếu góc

**HOẠT ĐỘNG 8**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $A'D'$, $B'C'$, $CC'$, $DD'$. Xác định ảnh của:

a) Tứ giác $MNPQ$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABB'A')$ theo phương $AD$;

b) Tứ giác $MNPQ$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $AA'$;

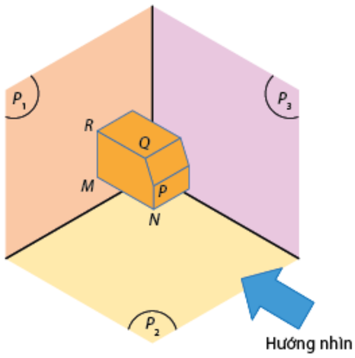
c) Đa giác $BCPNB'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ADD'A')$ theo phương $AB$.

Hãy nhận xét về phương chiếu và mặt phẳng chiếu ở các câu a, b, c.

### a) Vị trí vật thể

Vật thể (trong không gian) được đặt trong góc hợp bởi ba mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ đôi một vuông góc với nhau (*Hình 2.18*). Các mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ lần lượt gọi là mặt phẳng hình chiếu đứng, mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu cạnh.

Mặt phẳng hình chiếu đứng ở sau, mặt phẳng hình chiếu bằng ở dưới và mặt phẳng hình chiếu cạnh ở bên phải vật thể theo hướng nhìn như *Hình 2.16*.




*Hình 2.16*

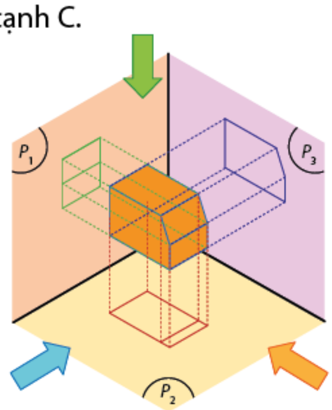
### b) Cách thiết lập

**HOẠT ĐỘNG 9**

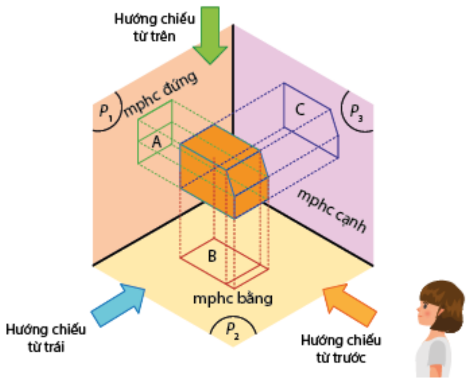
Xác định ảnh của đa giác $MNPQR$ (*Hình 2.18*) qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(P_3)$. Giả sử ảnh đó là $M'N'P'Q'R'$, để có được $M'N' = MN$, $N'P' = NP$, $P'Q' = PQ$, $Q'R' = QR$, $R'M' = RM$, ta cần đặt vật như thế nào?

Thực hiện phép chiếu vuông góc lên các mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ theo các phương chiếu lần lượt vuông góc với ba mặt phẳng này, cụ thể:

- Hướng chiếu (hướng nhìn) từ trước vật thể vuông góc mặt phẳng hình chiếu đứng $(P_1)$ thu được hình chiếu đứng A;
- Hướng chiếu (hướng nhìn) từ trên vật thể vuông góc mặt phẳng hình chiếu bằng $(P_2)$ thu được hình chiếu bằng B;
- Hướng chiếu (hướng nhìn) từ bên trái vật thể vuông góc mặt phẳng hình chiếu cạnh $(P_3)$ thu được hình chiếu cạnh C.



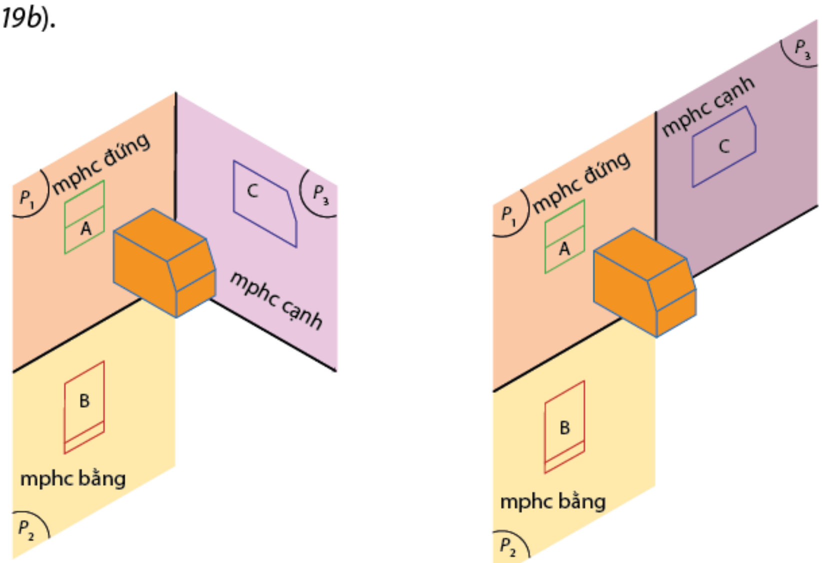

*Hình 2.17*




*Hình 2.18. Phương pháp chiếu góc*

### c) Vị trí các hình chiếu

Mặt phẳng hình chiếu bằng được xoay xuống dưới 90° và mặt phẳng hình chiếu cạnh xoay sang phải 90° để các hình chiếu cùng nằm trên một mặt phẳng hình chiếu đứng (được gọi là mặt phẳng bản vẽ) (*Hình 2.19a* và *2.19b*).

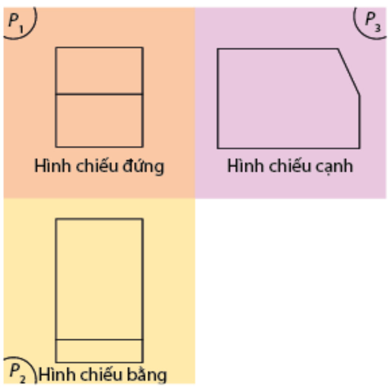



a) b)

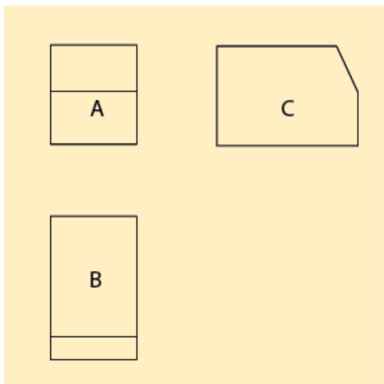
*Hình 2.19*

Kết quả, ta được vị trí các hình chiếu (*Hình 2.20*). Trên bản vẽ, các hình chiếu được sắp xếp có hệ thống theo hình chiếu đứng như *Hình 2.21*.

- Hình chiếu bằng B đặt dưới hình chiếu đứng A.
- Hình chiếu cạnh C đặt ở bên phải hình chiếu đứng A.



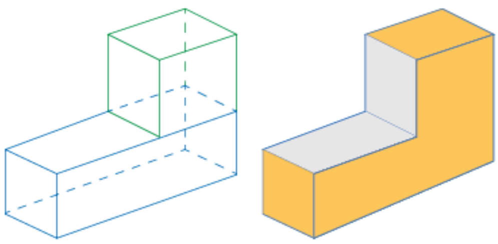

*Hình 2.20*




*Hình 2.21. Vị trí các hình chiếu theo PPCG*

**VÍ DỤ 4**

Một vật thể được cấu tạo từ hai hình hộp chữ nhật đặt chồng lên nhau (hình chữ L) như *Hình 2.22*. Vẽ hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh của vật thể đã cho.



*Hình 2.22*

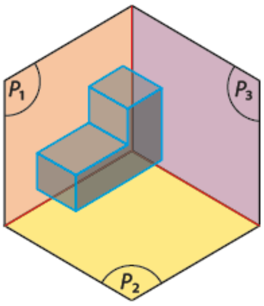
**Giải**

**Bước 1** Đặt vật thể trong góc tạo bởi ba mặt phẳng đôi một vuông góc $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ sao cho các cạnh của nó tương ứng song song với các mặt phẳng chiếu (*Hình 2.23*).

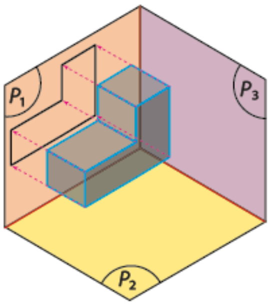
**Bước 2** Thiết lập hình chiếu đứng bằng cách xác định ảnh vật thể qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(P_1)$ (*Hình 2.24*).

**Bước 3** Thiết lập hình chiếu bằng bằng cách xác định ảnh vật thể qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(P_2)$ (*Hình 2.25*).

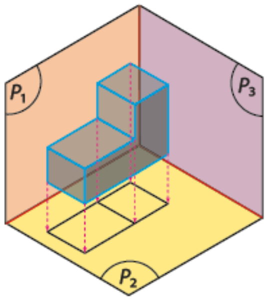
**Bước 4** Thiết lập hình chiếu cạnh bằng cách xác định ảnh vật thể qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(P_3)$ (*Hình 2.26*).



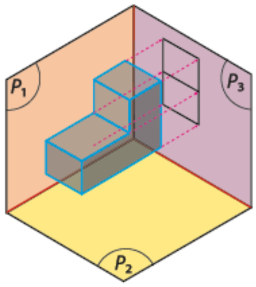
*Hình 2.23*



*Hình 2.24*



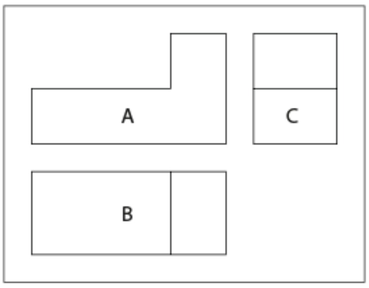
*Hình 2.25*



*Hình 2.26*

**Bước 5**

Mặt phẳng hình chiếu bằng được xoay xuống dưới 90° và mặt phẳng hình chiếu cạnh xoay sang phải 90° để các hình chiếu cùng nằm trên một mặt phẳng hình chiếu đứng. Ta được hình chiếu đứng A, hình chiếu bằng B và hình chiếu cạnh C của vật thể như *Hình 2.27*.



*Hình 2.27*

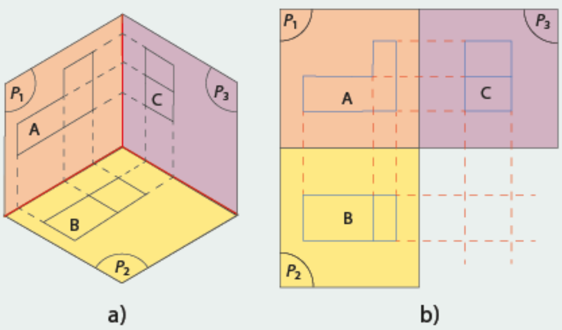
## LUYỆN TẬP 4

Một mô hình kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều. Hãy vẽ hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh của vật thể này.

### d) Mối quan hệ ba hình chiếu

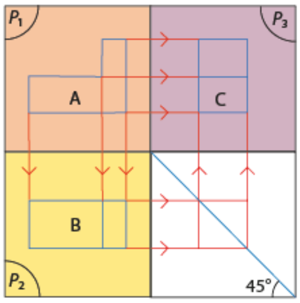
## HOẠT ĐỘNG 10

Quan sát ba hình chiếu A, B, C (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh) ở Ví dụ 4 (*Hình 2.28a*). Có nhận xét gì về các đường gióng nằm ngang và nằm dọc của các hình chiếu A, B so với C sau khi thực hiện xoay các mặt phẳng $(P_2)$, $(P_3)$ về cùng mặt phẳng với hình chiếu đứng (*Hình 2.28b*)?



*Hình 2.28*

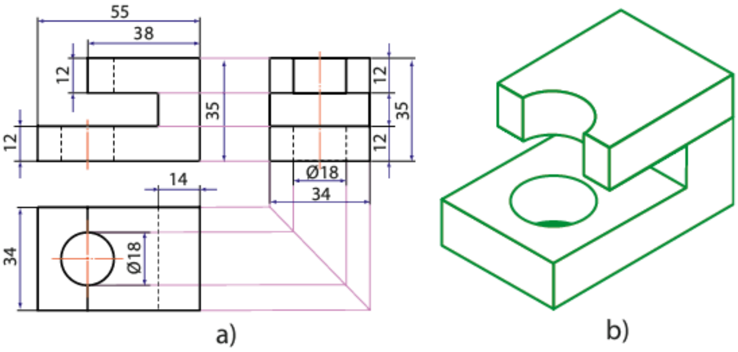
Trên bản vẽ, vị trí và kích thước của các hình chiếu phải thoả mãn tính chất "liên hệ gióng", nghĩa là các đường kẻ song song tương ứng với các đường gióng trên các hình chiếu phải trùng nhau, riêng đối với hình chiếu B và C, người ta sử dụng đường phân giác của góc phần tư thứ IV (*Hình 2.29*) để thuận lợi cho việc gióng các đường thẳng. Các đường gióng của hình chiếu B và C tương ứng sẽ cắt nhau tại điểm thuộc đường phân giác này.



*Hình 2.29*

## III Hình chiếu trục đo

*Hình 2.30a* và *2.30b* là hai hình biểu diễn cùng một vật thể. Hình nào giúp ta biết được thông tin về kích thước của vật? Hình nào giúp ta hình dung dễ dàng hình dạng của vật thể?



*Hình 2.30*

Phương pháp hình chiếu vuông góc thể hiện các kích thước của vật thể được biểu diễn. Tuy nhiên, phương pháp chiếu góc thường chỉ thể hiện được hai chiều của vật thể, làm cho người đọc khó hình dung hình dạng tổng quan của vật thể. Để khắc phục nhược điểm này, trên bản vẽ kĩ thuật, người ta thường dùng kết hợp với hình chiếu trục đo để bổ sung.

### 1. Khái niệm hình chiếu trục đo

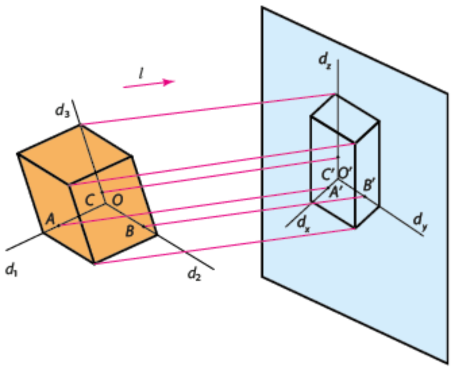
**HOẠT ĐỘNG 11**

Cho tứ diện *OABC* có *OA*, *OB*, *OC* đôi một vuông góc với nhau. Gọi *M* là điểm bất kì trên mặt phẳng (*ABC*).

a) Xác định ảnh của *O*, *A*, *B*, *C* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*ABC*) theo phương *OM*.

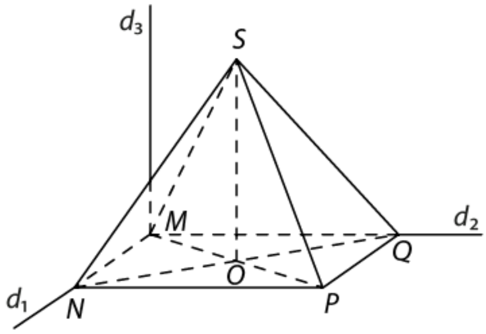
b) Ảnh của *OA*, *OB*, *OC* qua phép chiếu ở câu a có luôn đôi một vuông góc nhau không?

Cho mặt phẳng (*P*). Hình biểu diễn của hình (*H*) qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*P*) theo phương *l* (không song song với (*P*)) được gọi là hình chiếu trục đo của vật thể.



*Hình 2.31. Phương pháp xây dựng hình chiếu trục đo*

**Lưu ý:** Xét vật thể có dạng hình (*H*) trên đó ta đặt các đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ là phương ba chiều ngang, dọc, đứng của vật thể thoả mãn $d_1$, $d_2$, $d_3$ đôi một vuông góc với nhau tại một điểm. Chẳng hạn với hình chóp tứ giác đều *S.MNPQ*, đáy *MNPQ* là hình vuông tâm *O*, ta có $d_1$, $d_2$ có thể chọn lần lượt là đường thẳng *MN*, *MQ*; $d_3$ là đường thẳng đi qua *M* và song song với *SO*.




*Hình 2.32. Phương pháp xây dựng hình chiếu trục đo*

Với hình tứ diện *OABC* trong Hoạt động 11, ta chọn $d_1$, $d_2$, $d_3$ lần lượt là đường thẳng *OA*, *OB*, *OC*.
Ta gọi $d_1$, $d_2$, $d_3$ lần lượt là phương ngang, phương dọc và phương đứng của vật thể.

Để hình biểu diễn được rõ ràng hơn và đảm bảo tính "nổi", khi xét hình chiếu trục đo ta chọn phương $l$ không song song với các phương ngang, dọc, đứng của vật thể.

## 2. Thông số cơ bản của hình chiếu trục đo

### HOẠT ĐỘNG 12

Trong Hoạt động 11, giả sử $OA = OB = OC = 1$, hỏi độ dài ảnh của các đoạn thẳng *OA*, *OB*, *OC* qua phép chiếu song song này có luôn bằng nhau không?

### GÓC TRỤC ĐO

Trong phép chiếu trục đo, hình chiếu của phương ngang ($d_1$), phương dọc ($d_2$), phương đứng ($d_3$) là các đường thẳng tương ứng được kí hiệu là $d_x$, $d_y$, $d_z$ và được gọi là các trục đo. Các trục đo cắt nhau tại $O'$. Góc giữa các trục đo $(d_x, d_y)$, $(d_y, d_z)$, $(d_x, d_z)$ gọi là góc trục đo.

### HỆ SỐ BIẾN DẠNG

Hệ số biến dạng là tỉ số độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục đo với độ dài thực của đoạn thẳng đó.

Trên *Hình 2.31*:

$\dfrac{O'A'}{OA} = p$ là hệ số biến dạng theo trục đo $d_x$;

$\dfrac{O'B'}{OB} = q$ là hệ số biến dạng theo trục đo $d_y$;

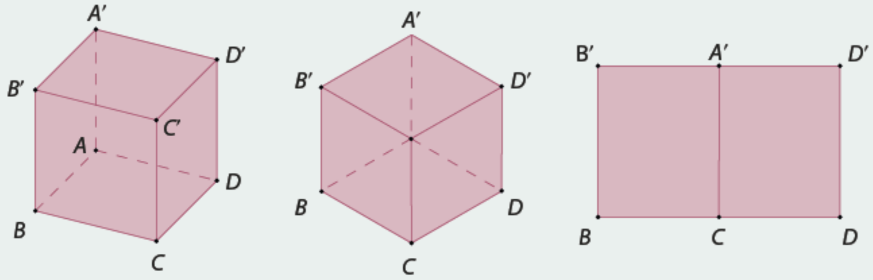
$\dfrac{O'C'}{OC} = r$ là hệ số biến dạng theo trục đo $d_z$.

Góc trục đo và hệ số biến dạng là hai thông số cơ bản của hình chiếu trục đo. Trên bản vẽ kĩ thuật, ta thường dùng hai loại hình chiếu trục đo vuông góc đều và hình chiếu trục đo xiên góc cân.

## 3. Hình chiếu trục đo vuông góc đều

### HOẠT ĐỘNG 13

Một khối rubik được dán các nhãn tên để tạo được khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Nhìn theo hướng từ $C'$ đến $A$, ta thấy được hình nào trong *Hình 2.33* (đường nét đứt là đường khuất)?




*Hình 2.33*

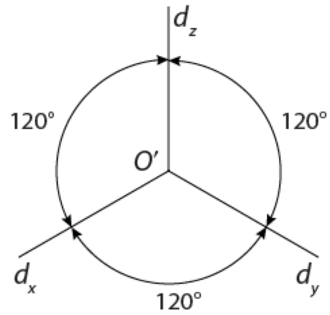
Trong hình chiếu trục đo vuông góc đều, phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu ($l \perp (P)$) và ba hệ số biến dạng bằng nhau ($p = q = r$).

### HOẠT ĐỘNG 14

Trong Hoạt động 13, gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $C'A$. Ta có hình đã chọn trong Hoạt động 13 chính là ảnh của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ qua phép chiếu song song lên $(P)$ theo phương $C'A$. Nói cách khác, nó là hình chiếu trục đo vuông góc đều của rubik hình lập phương. Hãy nhận xét về góc giữa các trục đo lúc này.

#### a) Góc trục đo

Góc tạo bởi các trục đo là 120°, nghĩa là
$(d_x, d_y) = (d_y, d_z) = (d_x, d_z) = 120°$.




$p : q : r = 1 : 1 : 1$

*Hình 2.34. Góc trục đo (hình chiếu trục đo vuông góc đều)*

#### b) Hệ số biến dạng: $p = q = r$

Người ta chứng minh được rằng hệ số biến dạng trong trường hợp này là $p = q = r = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$.

Để thuận tiện cho việc dựng hình, ta thường dùng hệ số biến dạng quy ước $p = q = r = 1$ và trục đo $d_z$ biểu thị chiều cao được đặt thẳng đứng.

### VÍ DỤ 5

Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của một vật thể có dạng hình hộp chữ nhật *ABCD.A′B′C′D′* có chiều dài *AB* = 40 mm, chiều rộng *AD* = 20 mm và chiều cao *AA′* = 24 mm với tỉ lệ 1 : 1.

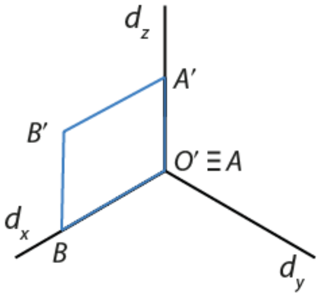
**Giải**

**Bước 1** Dựng các trục đo $d_x$, $d_y$, $d_z$ thoả mãn $(d_x, d_y) = (d_y, d_z) = (d_x, d_z) = 120°$. Điểm *O′* là điểm *A* của hình hộp chữ nhật.

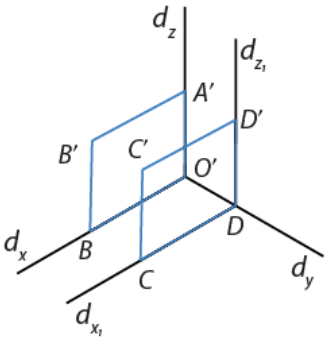
**Bước 2** Dựng trên hai trục đo $d_z$ và $d_x$ các đoạn *O′A′* và *O′B* có độ dài lần lượt là 24 mm và 40 mm. Sau đó, dựng điểm *B′* là đỉnh thứ tư hình bình hành *O′BB′A′* (*Hình 2.35*).

**Bước 3** Trên trục đo $d_y$ dựng đoạn *O′D* có độ dài bằng 20 mm. Dựng mặt phẳng qua *D* và song song với mặt phẳng $(d_x, d_z)$, cắt hai mặt phẳng $(d_x, d_y)$ và $(d_y, d_z)$ theo giao tuyến lần lượt là $d_{x_1}$ ) và $d_{z_1}$ (*Hình 2.36*). Vẽ hình bình hành *DCC′D′* tương tự ở Bước 2.

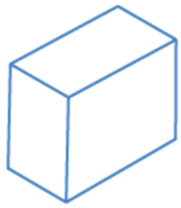
**Bước 4** Nối các đường *BC*, *B′C′*, *A′D′*, xoá đi các đường khuất *O′A′*, *O′B*, *O′D* và các trục đo, ta được hình chiếu trục đo của vật thể có dạng hình hộp chữ nhật (*Hình 2.37*).



*Hình 2.35*



*Hình 2.36*


*Hình 2.37. Hình chiếu trục đo vuông góc đều của hình hộp chữ nhật*

### LUYỆN TẬP 5

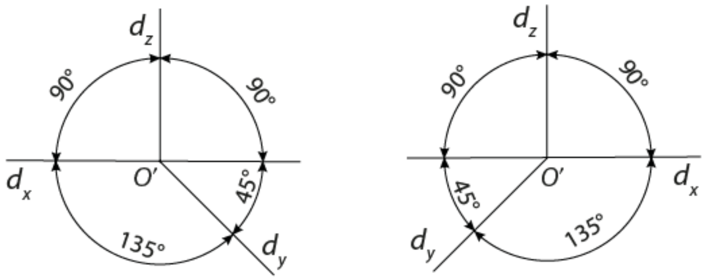
Hãy vẽ hình chiếu trục đo xiên góc cân của một vật thể có dạng hình chóp tam giác *S.ABC* với *ABC* là tam giác vuông tại *A*, *SA* vuông góc với (*ABC*), *SA* = 60 mm, *AB* = 30 mm, *AC* = 40 mm, tỉ lệ 1 : 1.

## 4. Hình chiếu trục đo xiên góc cân

Trong hình chiếu trục đo xiên góc cân, phương chiếu không vuông góc với mặt phẳng hình chiếu, mặt phẳng $(d_1, d_3)$ đặt song song với mặt phẳng hình chiếu (*P*). Ta sẽ tìm hiểu các thông số cơ bản của hình chiếu trục đo xiên góc cân.

### a) Góc trục đo

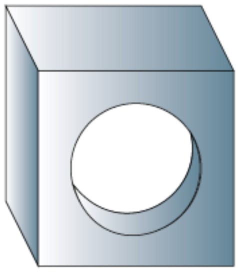
$(d_x, d_z) = 90°$; $(d_x, d_y) = (d_y, d_z) = 135°$ (*Hình 2.38*).



*Hình 2.38. Góc trục đo (hình chiếu trục đo xiên góc cân)*

### b) Hệ số biến dạng: $p = r = 1$ và $q = 0,5$

Trong hình chiếu trục đo xiên góc cân, các mặt của vật thể song song với mặt phẳng ($d_1$, $d_3$) không bị biến dạng. *Hình 2.39* là hình chiếu trục đo xiên góc cân của tấm đệm.



*Hình 2.39. Hình chiếu trục đo xiên góc cân của tấm đệm*

## VÍ DỤ 6

Vẽ hình chiếu trục đo xiên góc cân của một vật thể có dạng hình hộp chữ nhật *ABCD.A′B′C′D′* có chiều dài $AB = 40$ mm, chiều rộng $AD = 20$ mm và chiều cao $AA' = 30$ mm, tỉ lệ 1 : 1.

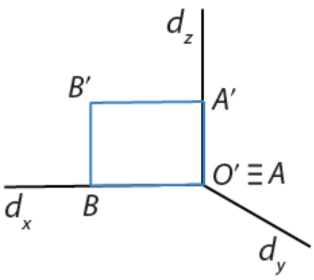
**Giải**

**Bước 1** Dựng các trục đo $d_x$, $d_y$, $d_z$ thoả mãn $(d_x, d_z) = 90°$; $(d_x, d_y) = (d_y, d_z) = 135°$. Điểm *O′* là điểm *A* của hình hộp chữ nhật.

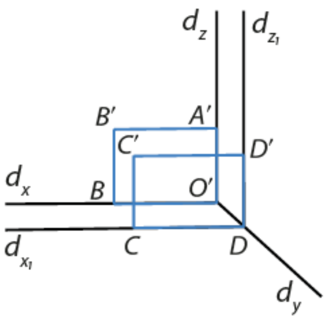
**Bước 2** Dựng trên hai trục đo $d_z$ và $d_x$ các đoạn *O′A′* và *O′B* có độ dài lần lượt là 30 mm và 40 mm. Sau đó, dựng điểm *B′* là đỉnh thứ tư của hình bình hành *O′BB′A′* (*Hình 2.40*).

**Bước 3** Trên trục đo $d_y$ dựng đoạn *O′D* có độ dài bằng 10 mm. Dựng mặt phẳng qua *D* và song song với mặt phẳng ($d_x$, $d_z$), cắt hai mặt phẳng ($d_x$, $d_y$) và ($d_y$, $d_z$) theo giao tuyến lần lượt là $d_{x_1}$ và $d_{z_1}$ (*Hình 2.41*). Vẽ hình bình hành *DCC′D′* tương tự ở Bước 2.

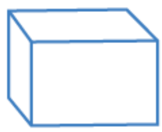
**Bước 4** Nối các đường *BC*, *B′C′*, *A′D′*, xoá đi các đường khuất *O′A′*, *O′B*, *O′D* và các trục đo, ta được hình chiếu trục đo của vật thể có dạng hình hộp chữ nhật (*Hình 2.42*).




*Hình 2.40*




*Hình 2.41*



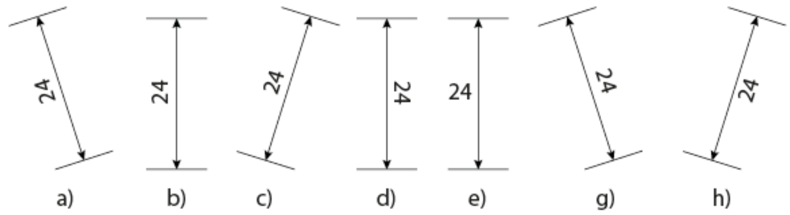
*Hình 2.42. Hình chiếu trục đo xiên góc cân của hình hộp chữ nhật*

## LUYỆN TẬP 6

Vẽ hình chiếu trục đo xiên góc cân của một vật thể có dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 40 mm và chiều cao bằng 50 mm, tỉ lệ 1 : 1.

BÀI TẬP

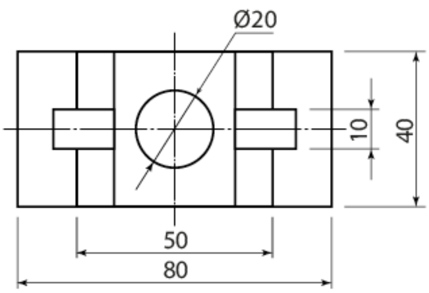
**2.1.** Trong một số kích thước ghi ở hình sau đây, cách ghi kích thước nào đúng? Cách ghi kích thước nào sai? Vì sao?




*Hình 2.43*

**2.2.** Trên tờ giấy A4, vẽ khung vẽ và khung tên theo đúng kích thước (*Hình 2.2b*). Sau đó ghi họ và tên vào ô số (5), ghi tên trường, lớp vào ô số (9) bằng kiểu chữ đứng (*Hình 2.6*).

**2.3.** *Hình 2.44* là một phần bản vẽ của một chi tiết máy. Hãy vẽ lại hình trên giấy với tỉ lệ 1 : 2, dùng đúng các đường nét vẽ, đường kích thước và ghi chữ số kích thước theo đúng quy định (*Bảng 2.2*, *Hình 2.10* và *2.11*).

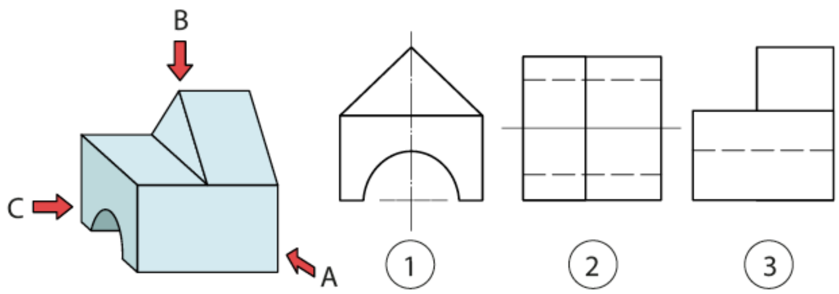



*Hình 2.44*

**2.4.** Cho vật thể có các hướng chiếu A, B, C và các hình chiếu 1, 2, 3 (*Hình 2.45*).

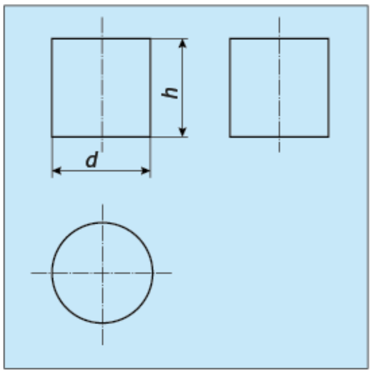
a) Chọn hướng chiếu từ trước (hướng nhìn) là A, hãy cho biết hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh của vật thể.

b) Chọn hướng chiếu từ trước (hướng nhìn) là B, hãy cho biết hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh của vật thể.



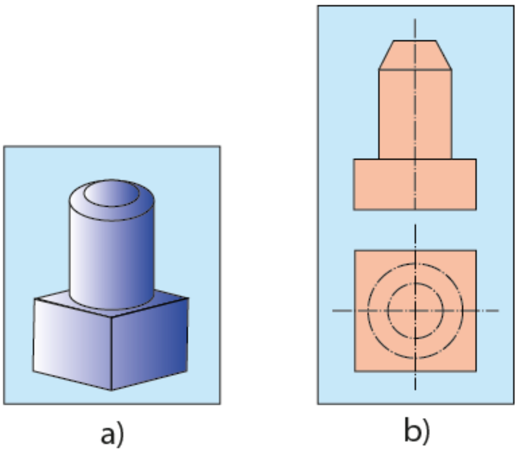

*Hình 2.45*

**2.5.** Cho ba hình biểu diễn (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh) của một vật thể trong *Hình 2.46*. Hãy cho biết vật thể có dạng hình học nào đã biết.



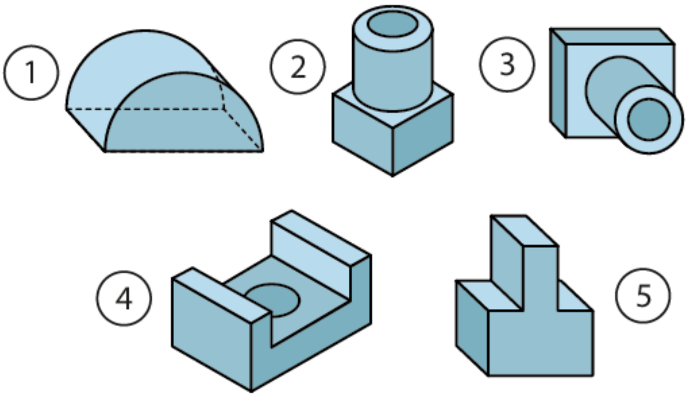

*Hình 2.46*

**2.6.** Một vật thể có dạng như *Hình 2.47a* và có các hình chiếu đứng, hình chiếu bằng lần lượt ở *Hình 2.47b*. Hãy vẽ hình chiếu cạnh của vật thể.




*Hình 2.47*

**2.7.** *Hình 2.48* là những hình biểu diễn các vật thể. Hỏi trong các hình này, hình nào là hình chiếu trục đo vuông góc đều, hình nào là hình chiếu trục đo xiên góc cân?




*Hình 2.48*

**2.8.** Hãy vẽ hình biểu diễn (theo hình chiếu trục đo vuông góc đều hoặc xiên góc cân) hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*, *AD* = 2*BC* = 2*AB*, *SA* vuông góc (*ABCD*) và *AB* = 30 mm, *SA* = 40 mm, tỉ lệ 1 : 1.

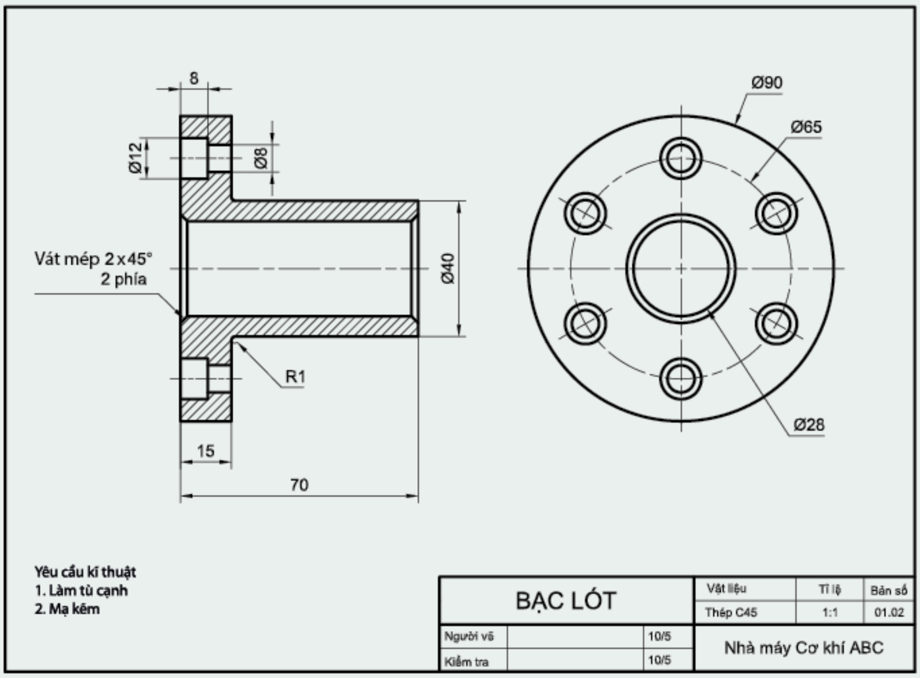
# ĐỌC VÀ VẼ BẢN VẼ KĨ THUẬT ĐƠN GIẢN

## I Một số bản vẽ kĩ thuật

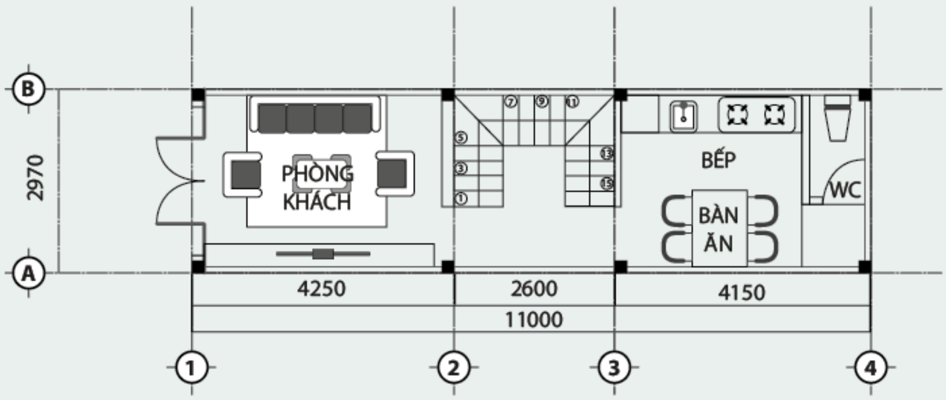
### 1. Các loại bản vẽ kĩ thuật

**HOẠT ĐỘNG 1**

*Hình 2.49a* và *2.49b* liên quan đến hai bản vẽ kĩ thuật ứng với hai lĩnh vực thường gặp trong cuộc sống. Hãy cho biết đó là những lĩnh vực nào?




a) Bản vẽ chi tiết bạc lót




b) Một phần bản vẽ mặt bằng tầng trệt nhà hộ gia đình

*Hình 2.49*

Bản vẽ kĩ thuật (gọi tắt là bản vẽ) là các thông tin kĩ thuật được trình bày dưới dạng đồ hoạ theo các quy tắc thống nhất.

Trong sản xuất thường có nhiều lĩnh vực kĩ thuật khác nhau. Bản vẽ kĩ thuật của mỗi lĩnh vực kĩ thuật có đặc thù riêng. Song, ta thường gặp hai loại bản vẽ kĩ thuật thuộc hai lĩnh vực quan trọng, đó là:

- Bản vẽ cơ khí gồm các bản vẽ liên quan đến thiết kế, chế tạo, lắp ráp, kiểm tra, sử dụng,… các máy móc và thiết bị.
- Bản vẽ xây dựng gồm các bản vẽ liên quan đến thiết kế, thi công, lắp ráp, kiểm tra, sử dụng,… các công trình kiến trúc và xây dựng.

## 2. Bản vẽ cơ khí

### Bản vẽ chi tiết

Trong thiết kế và chế tạo, các bản vẽ cơ khí thường gặp là bản vẽ chi tiết và bản vẽ lắp. Ở đây, ta chỉ xem xét một số bản vẽ chi tiết đơn giản.

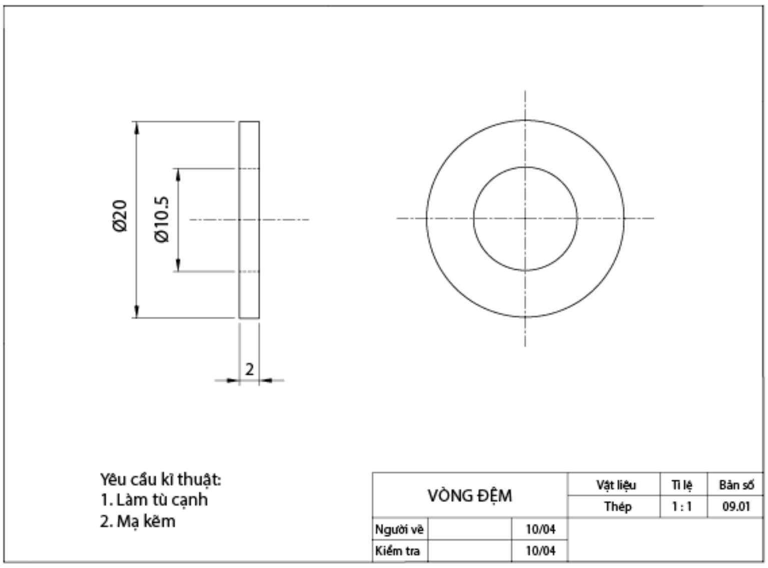
**HOẠT ĐỘNG 2**

*Hình 2.49a* là bản vẽ của một vật thể. Hãy cho biết chiều dài, chiều rộng và hình dạng phần thân của vật thể.

Đọc bản vẽ chi tiết là hiểu đầy đủ và chính xác nội dung của bản vẽ chi tiết, bao gồm:
- Hiểu rõ được tên gọi, công dụng, hình dáng, cấu tạo, kích thước và vật liệu của chi tiết;
- Hiểu rõ các yêu cầu kĩ thuật.

**VÍ DỤ 1**

Đọc bản vẽ chi tiết của một chi tiết máy ở *Hình 2.50*.




*Hình 2.50*

**Giải**

Bản vẽ này cho ta các nội dung sau đây:

- Khung tên:
  - – Tên gọi chi tiết: vòng đệm;
  - – Vật liệu: thép;
  - – Tỉ lệ: 1 : 1.
- Hình biểu diễn:
  - – Tên gọi hình chiếu: gồm hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh.
- Kích thước:
  - – Kích thước chung của chi tiết: ∅20, ∅10.5;
  - – Kích thước các phần của chi tiết: đường kính ngoài là ∅20, đường kính lỗ là ∅10.5, bề rộng là 2.
- Yêu cầu kĩ thuật:
  - – Gia công: làm tù cạnh;
  - – Xử lí bề mặt: mạ kẽm.
- Tổng hợp:
  - – Mô tả hình dạng và cấu tạo chi tiết: vòng đệm hình trụ tròn chiều cao chính là bề dày;
  - – Công dụng của chi tiết: dùng để đệm giữa các chi tiết.

**LUYỆN TẬP 1**

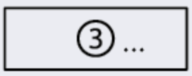
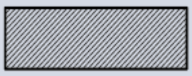
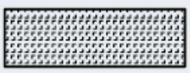
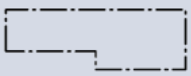
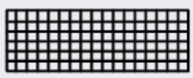
Đọc bản vẽ chi tiết của thiết bị có bản vẽ ở *Hình 2.49a*.

## 3. Bản vẽ xây dựng

Bản vẽ xây dựng bao gồm bản vẽ các công trình xây dựng như: nhà cửa, cầu đường, bến cảng,... Trong phần này, chúng ta chỉ tìm hiểu về bản vẽ công trình xây dựng thường gặp nhất, đó là bản vẽ nhà.

Bản vẽ mặt bằng tổng thể là bản vẽ hình chiếu bằng của các công trình trên khu đất xây dựng. Trên bản vẽ mặt bằng tổng thể thể hiện vị trí các công trình với hệ thống đường sá, cây xanh,... hiện có hoặc dự định xây dựng và quy hoạch của khu đất.

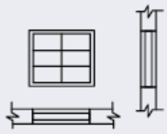
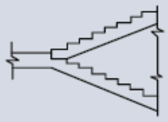
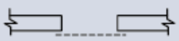
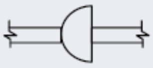
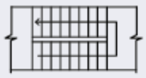
*Bảng 2.3. Một số kí hiệu quy ước trên bản vẽ mặt bằng tổng thể*

| Tên gọi | Kí hiệu | Tên gọi | Kí hiệu |
|---|---|---|---|
| 1. Nhà hay công trình mới thiết kế (số chấm thể hiện số tầng của công trình) |  | 5. Cây |  |
| 2. Nhà hay công trình hiện tại |  | | |
| 3. Nhà hay công trình cần sửa chữa |  | 6. Thảm cỏ |  |
| 4. Khu đất để mở rộng công trình. |  | 7. Quảng trường, sân |  |

Các hình biểu diễn ngôi nhà gồm:

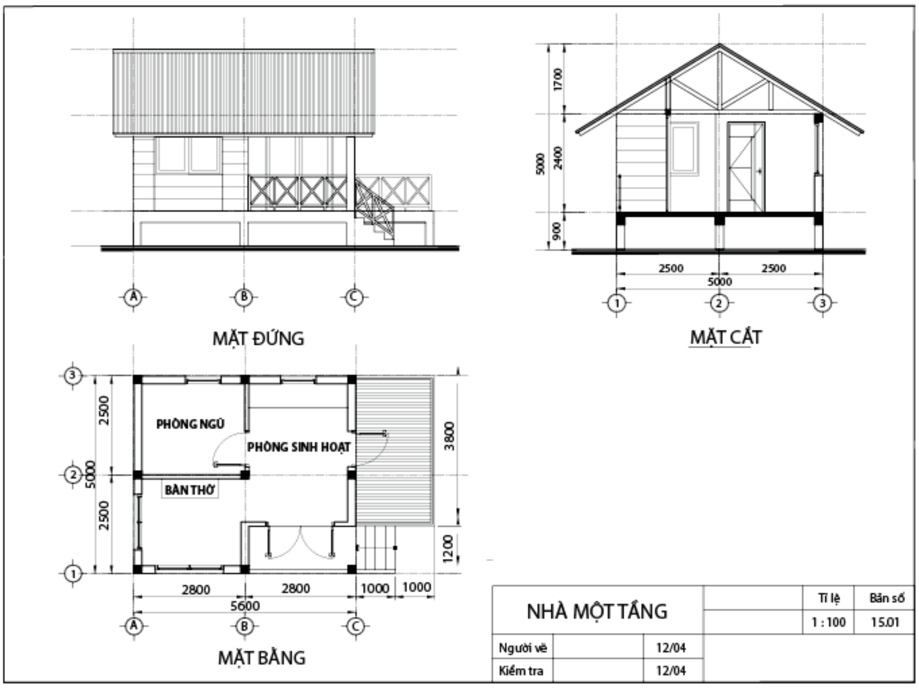
- Mặt bằng ngôi nhà là hình cắt bằng của ngôi nhà được cắt bởi một mặt phẳng nằm ngang đi qua cửa sổ. Mặt bằng thể hiện vị trí, kích thước của tường, vách ngăn, cửa đi, cửa sổ, cầu thang, cách bố trí các phòng, các thiết bị, đồ đạc,...;
  Đây là hình biểu diễn quan trọng nhất của ngôi nhà. Nếu ngôi nhà có nhiều tầng thì phải có bản vẽ mặt bằng riêng cho từng tầng.
- Mặt đứng là hình chiếu đứng (mặt chính) của ngôi nhà hoặc hình chiếu cạnh (mặt bên) của ngôi nhà;
- Hình cắt được tạo bởi mặt phẳng song song với mặt đứng của ngôi nhà.

*Bảng 2.4. Kí hiệu quy ước trong bản vẽ nhà*

| Tên gọi | Kí hiệu | Tên gọi | Kí hiệu |
|---|---|---|---|
| 1. Cửa đi đơn một cánh |  | 6. Cửa sổ kép cố định |  |
| 2. Cửa đi đơn hai cánh |  | | |
| 3. Cửa nâng hay cửa cuốn |  | 7. Cầu thang trên hình cắt |  |
| 4. Cửa lùa một cánh |  | | |
| 5. Cửa kép một cánh |  | 8. Cầu thang trên mặt bằng |  |

## VÍ DỤ 2

Đọc các thông tin về khung tên, các kích thước và các bộ phận của ngôi nhà có bản vẽ kĩ thuật sau đây (*Hình 2.51*):




*Hình 2.51*

**Giải**

Bản vẽ này cho ta các nội dung sau đây:

- Khung tên:
  - Tên gọi ngôi nhà: nhà một tầng;
  - Tỉ lệ bản vẽ: 1 : 100.
- Các kích thước:
  - Kích thước chung: 7600, 5000, 5000;
  - Kích thước bộ phận: phòng sinh hoạt chung: $2800 \times 3800$, phòng ngủ: $2800 \times 2500$, phòng thờ: $2800 \times 2500$; hiên rộng: $3800 \times 2000$, nền cao: 900, tường cao: 2400, mái cao: 1700.
- Các bộ phận:
  - Số phòng: 3 phòng;
  - Số cửa đi và số cửa sổ: 1 cửa đi 2 cánh, 2 cửa đi 1 cánh, 4 cửa sổ;
  - Các bộ phận khác: 1 hiên có lan can.

**LUYỆN TẬP 2**

Xem một phần bản vẽ mặt bằng tầng trệt nhà hộ gia đình *Hình 2.49b*. Hãy cho biết diện tích phòng khách, diện tích nhà bếp ($m^2$).

**VẬN DỤNG**

Hãy tìm hiểu bản vẽ của ngôi trường mình đang học, hoặc một bản vẽ mặt bằng của một trường học được giáo viên cung cấp. Đọc một số thông tin về khung tên, kích thước các dãy phòng học và một số khuôn viên khác của trường.

## II Thực hành vẽ bản vẽ kĩ thuật đơn giản

### 1. Mục tiêu

Lập bản vẽ trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh), hình chiếu trục đo và các kích thước của vật thể đơn giản từ mẫu vật hoặc từ hình biểu diễn ba chiều của vật thể.

### 2. Chuẩn bị

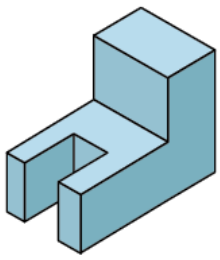
- Dụng cụ vẽ: thước, ê ke, com-pa, bút chì, tẩy,…;
- Vật liệu: giấy vẽ khổ A4, giấy kẻ ô li;
- Tài liệu: sách giáo khoa.

### 3. Nội dung thực hành

#### a) Yêu cầu

Lập bản vẽ trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh), hình chiếu trục đo và các kích thước của vật thể giá chữ L như hình với các thông số như sau:

- Khối chữ L: chiều dài 50, chiều cao 38, chiều rộng 28 và bề dày 18;
- Rãnh hình hộp: chiều rộng 14, chiều dài 20 và chiều cao 18.



*Hình 2.52. Giá chữ L*

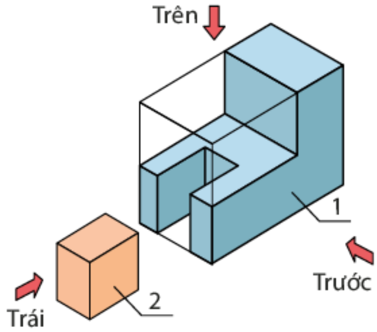
### b) Thực hiện

**Bước 1**

Quan sát vật thể, phân tích hình dạng và chọn các hướng chiếu vuông góc với các mặt của vật thể để biểu diễn hình dạng của vật thể.

Quan sát giá chữ L, ta nhận thấy giá có dạng chữ L nội tiếp trong khối hình hộp chữ nhật (1), phần nằm ngang có rãnh hình hộp chữ nhật (2) (*Hình 2.53*).

Chọn ba hướng chiếu lần lượt vuông góc với mặt trước, mặt trên, mặt bên trái của giá để vẽ ba hình chiếu: hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh.



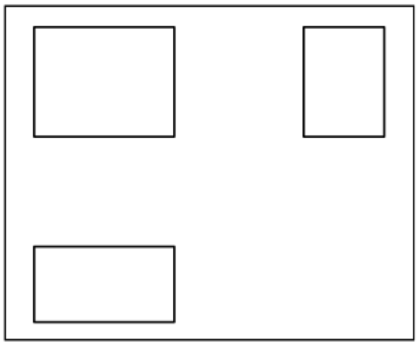

*Hình 2.53*

**Bước 2**

Chọn tỉ lệ thích hợp với khổ giấy A4 và kích thước của vật thể. Ở đây ta sẽ chọn tỉ lệ 1 : 2, nghĩa là trên giấy vẽ sẽ có các kích thước chính xác của vật thể như sau:

- Khối chữ L: chiều dài 25 mm, chiều cao 19 mm, chiều rộng 14 mm và bề dày 9 mm;
- Rãnh hình hộp: chiều rộng 7 mm, chiều dài 10 mm và chiều cao 9 mm.

Bố trí ba hình chiếu cân đối trên bản vẽ theo các hình chữ nhật bao ngoài các hình chiếu bằng nét liền mảnh (*Hình 2.54*).



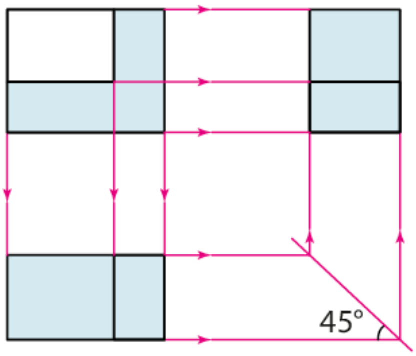
*Hình 2.54. Bố trí các hình chiếu*

**Bước 3**

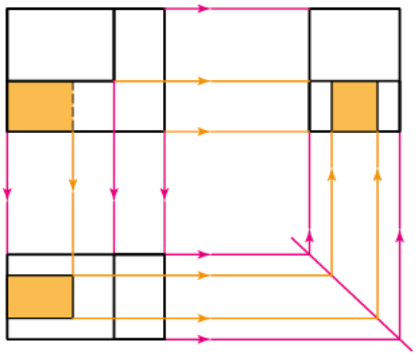
Thực hiện tương tự Ví dụ 4, mục II, Bài 1, ta lần lượt vẽ mờ bằng nét mảnh từng phần của vật thể với các đường gióng giữa các hình chiếu của từng phần.

a) Vẽ khối chữ L (*Hình 2.55*).

b) Vẽ rãnh hình hộp (*Hình 2.56*).




*Hình 2.55*

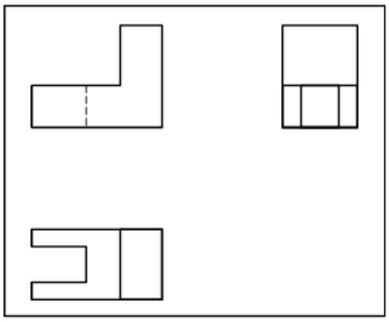


*Hình 2.56*

Sau khi vẽ xong các hình chiếu của vật thể bằng các nét mảnh, ta cần kiểm tra lại các hình vẽ để sửa chữa những chỗ sai sót, tẩy xoá những đường nét không cần thiết như một số trục hình chiếu, các đường gióng giữa các hình chiếu…

**Bước 4**

Dùng bút chì tô đậm các nét biểu diễn cạnh thấy, đường bao thấy của vật thể trên các hình chiếu. Dùng nét đứt biểu diễn cạnh khuất, đường bao khuất (*Hình 2.57*).



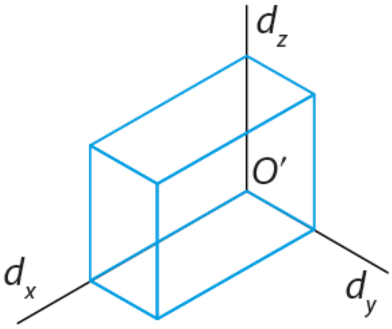
*Hình 2.57*

**Bước 5**

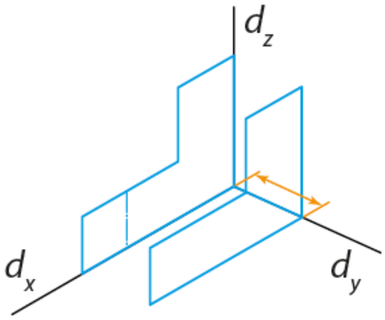
Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể.

a) Vẽ hình hộp chữ nhật ngoại tiếp theo đúng kích thước tỉ lệ trên các trục đo như sau: Chiều dài trên $d_x$ là 25 mm, chiều rộng trên $d_y$ là 14 mm, chiều cao trên $d_z$ là 19 mm (*Hình 2.58*).

b) Dựa vào hình hộp chữ nhật ở trên, vẽ hình chiếu đứng trên mặt phẳng ($d_x$, $d_z$). Trong mặt phẳng song song với mặt phẳng ($d_x$, $d_z$) và cách mặt phẳng ($d_x$, $d_z$) khoảng bằng 14 mm (chiều rộng), ta vẽ một hình bằng hình chiếu đứng (*Hình 2.59*).




*Hình 2.58*

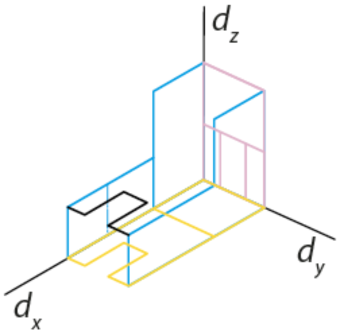



*Hình 2.59*

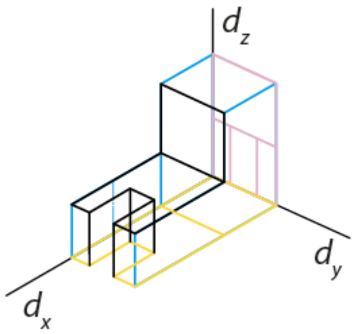
c) Vẽ hình chiếu bằng trên mặt phẳng ($d_x$, $d_y$) và hình chiếu cạnh trên ($d_y$, $d_z$) tương ứng với các kích thước vật thể (*Hình 2.60*).

d) Trong mặt phẳng song song với ($d_x$, $d_y$) và cách ($d_x$, $d_y$) một khoảng bằng 9 mm (bề dày), dựng các đường song song tương ứng hình chiếu bằng để được mặt trên vật thể.
Trong các mặt phẳng song song với ($d_y$, $d_z$), dựng các đường thẳng song song tương ứng với hình chiếu cạnh để được mặt còn lại của vật thể (*Hình 2.61*).

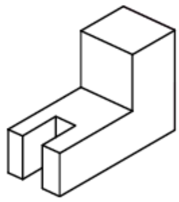
e) Sau khi vẽ xong bằng các nét mảnh cần kiểm tra lại các hình vẽ để sửa chữa những chỗ sai sót, tẩy xoá những đường nét không cần thiết như một số trục đo, các đường khuất và tô đậm các cạnh (một phần đoạn thẳng) nhìn thấy để được hình hoàn chỉnh (*Hình 2.62*).




*Hình 2.60*



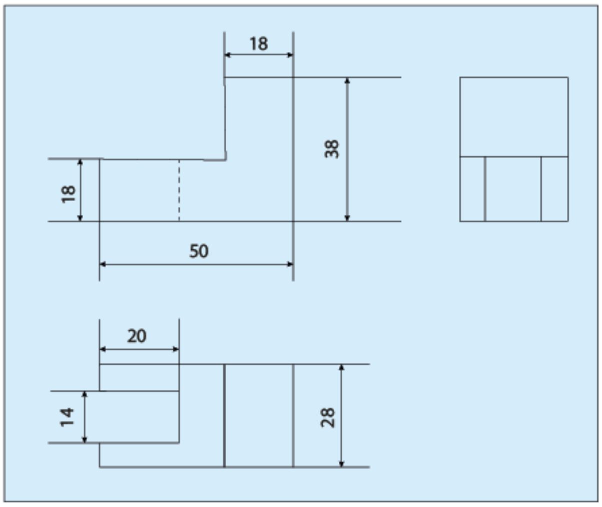

*Hình 2.61*



*Hình 2.62*

**Bước 6**

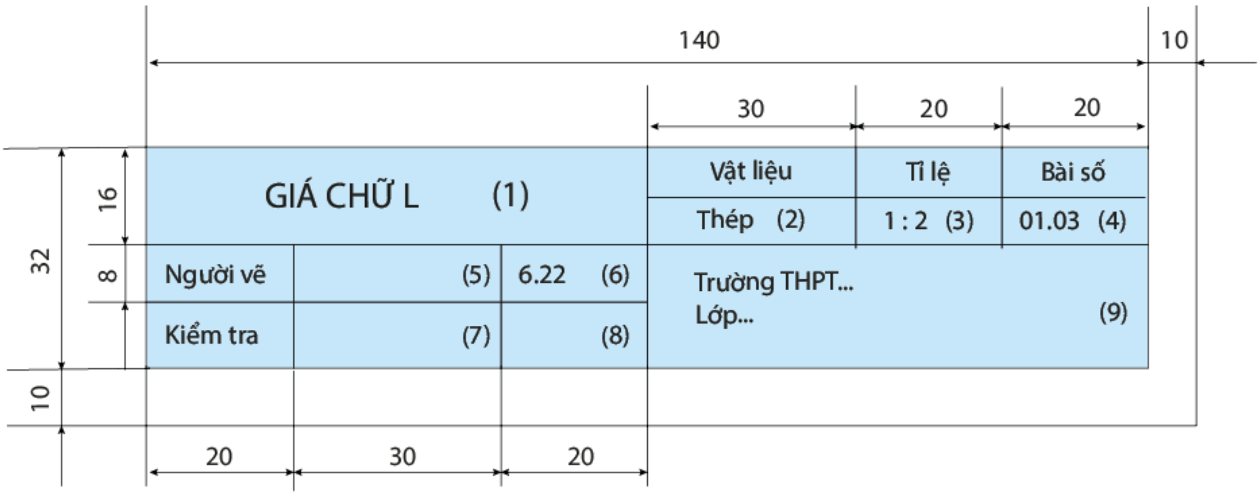
Trên tờ giấy bản vẽ, kẻ các đường gióng kích thước, đường kích thước và ghi các chữ số kích thước trên các hình chiếu (*Hình 2.63*).




*Hình 2.63*

**Bước 7**

Kẻ khung vẽ, khung tên, ghi các nội dung của khung tên và ghi các phần chú thích. Kích thước và nội dung khung tên làm theo mẫu (*Hình 2.64*).

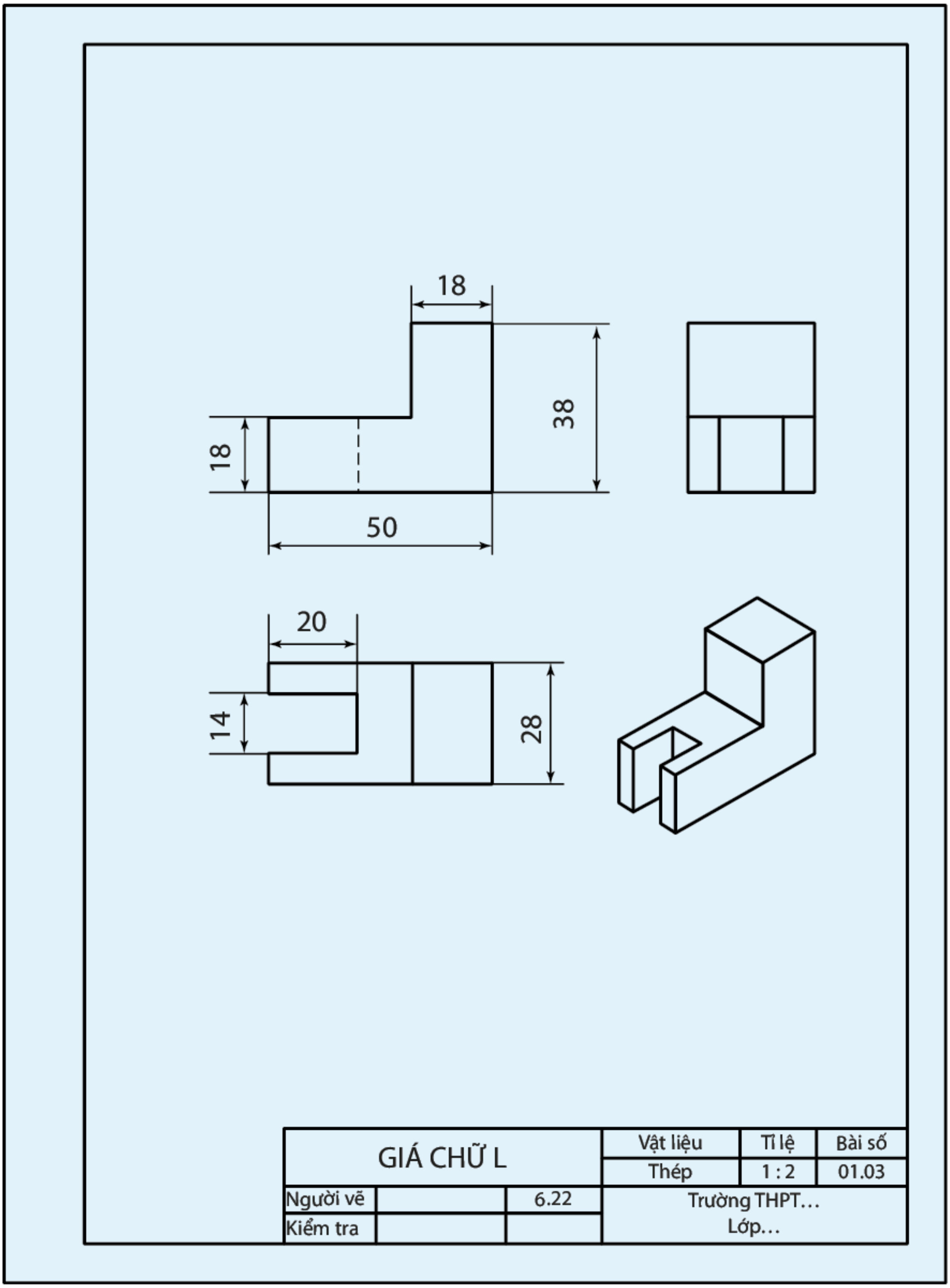



*Hình 2.64*

(1) Đề bài tập hay tên gọi của chi tiết;
(2) Vật liệu của chi tiết;
(3) Tỉ lệ bản vẽ;
(4) Kí hiệu số bài tập;
(5) Họ và tên người vẽ;
(6) Ngày lập bản vẽ;
(7) Chữ kí của người kiểm tra;
(8) Ngày kiểm tra;
(9) Tên trường, lớp.

**Bước 8**

Trình bày lên bản vẽ kết quả thu được như sau:



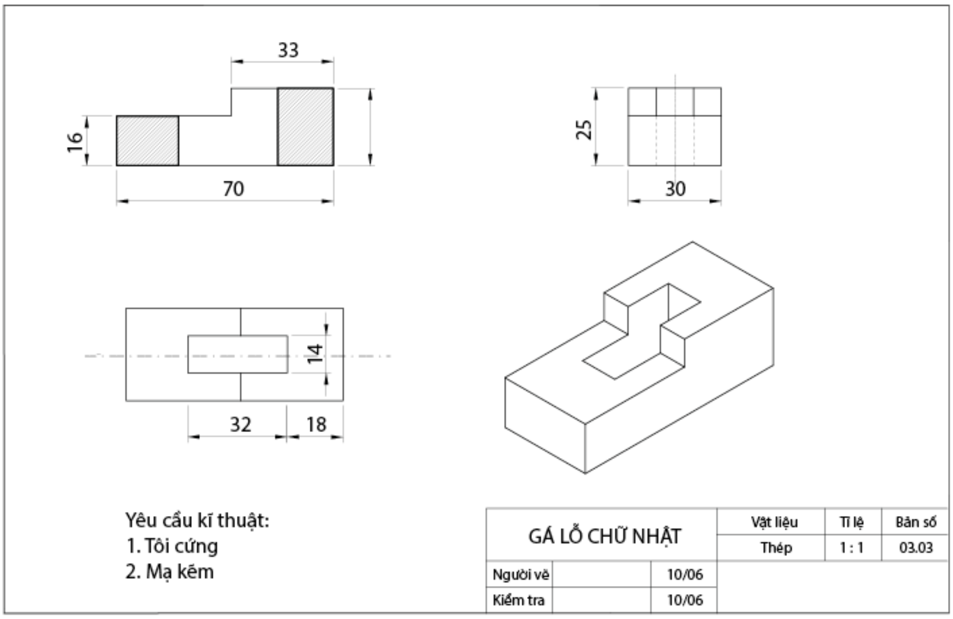

*Hình 2.65*

## 4. Đánh giá kết quả thực hành

- Học sinh tự đánh giá bài làm lẫn nhau.
- Giáo viên nhận xét và đánh giá bài làm của học sinh.

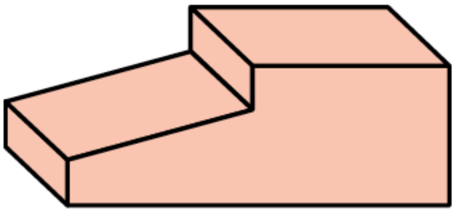
### BÀI TẬP

**2.9.** Đọc bản vẽ một chi tiết máy được cho trong *Hình 2.66*.



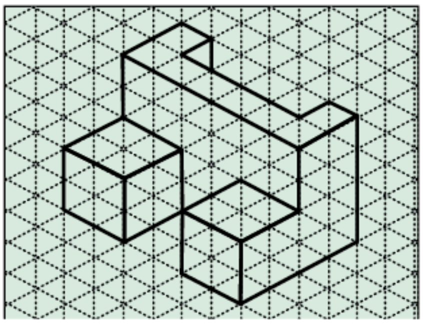

*Hình 2.66*

**2.10.** Cho một vật thể như *Hình 2.67*. Hãy vẽ một bản vẽ kĩ thuật gồm khung vẽ, khung tên, các hình chiếu (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh) và hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể đã cho.



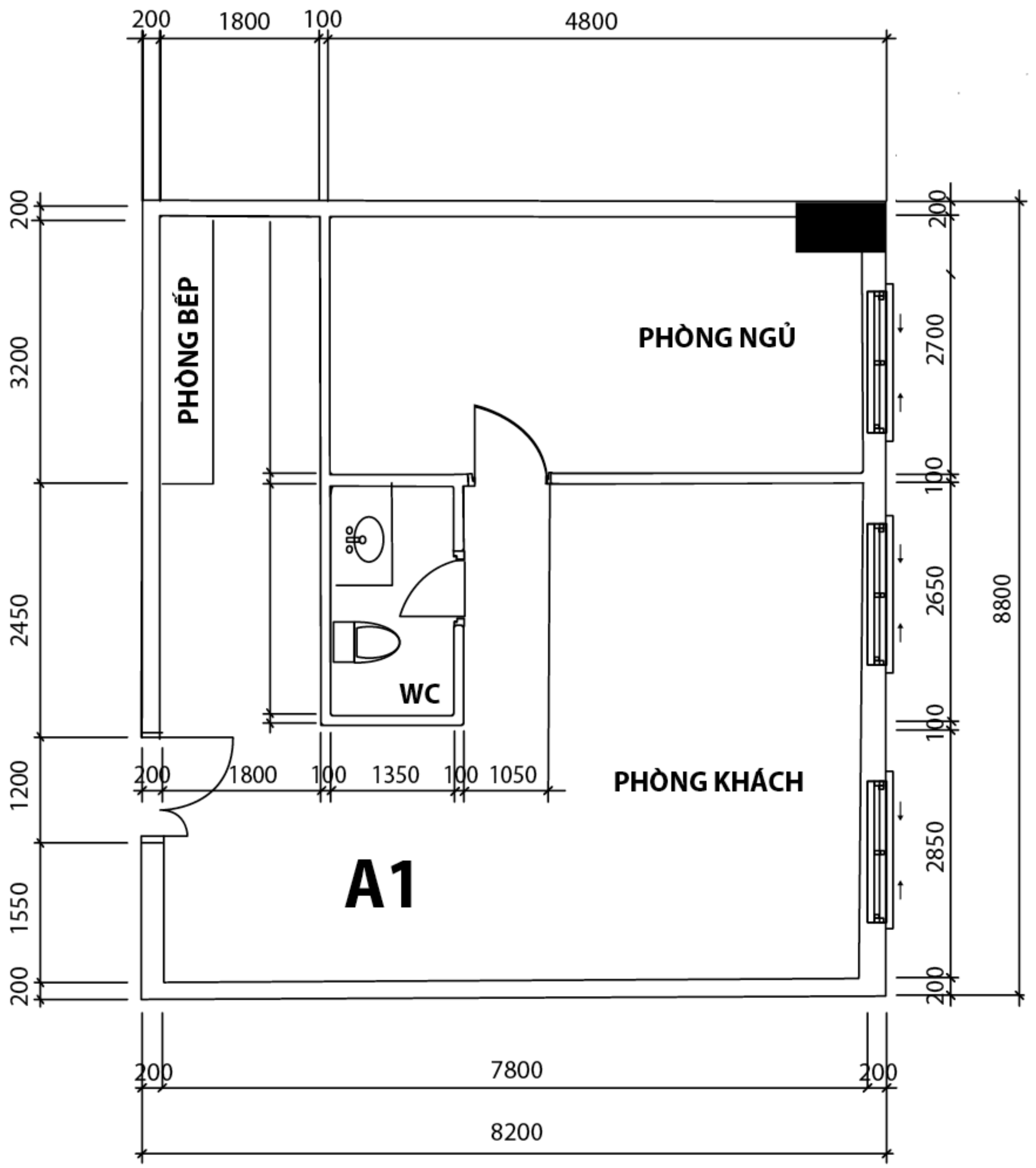
*Hình 2.67*

**2.11.** Một mẫu vật được cung cấp bằng hình ba chiều. Mỗi hình thoi biểu diễn một hình vuông cạnh 10 mm. Hãy vẽ các hình chiếu góc (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh) và hình chiếu trục đo của vật thể và hoàn thiện bản vẽ trên khổ giấy A4.



*Hình 2.68. Tấm trượt dọc*

**2.12.** *Hình 2.69* là bản vẽ mặt bằng của một căn hộ chung cư. Tính diện tích phòng ngủ và phòng khách của căn hộ.




*Hình 2.69*

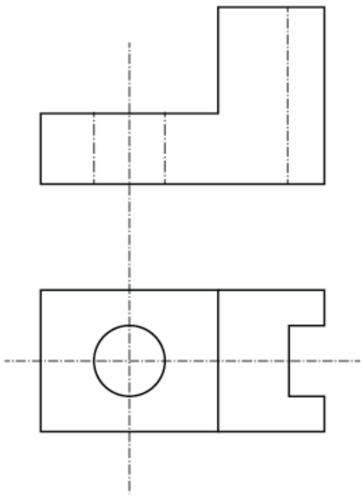
## ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 2

**2.13.** Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* vuông tại *A*, *AB* = 30 mm, *BC* = 50 mm. *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và *SA* = 30 mm. Hãy:

a) Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của hình chóp đã cho theo tỉ lệ 1 : 1;

b) Vẽ hình chiếu trục đo xiên góc cân của hình chóp đã cho theo tỉ lệ 1 : 1.

**2.14.** Một vật thể có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng như *Hình 2.70*. Hãy vẽ hình chiếu cạnh của vật thể này.

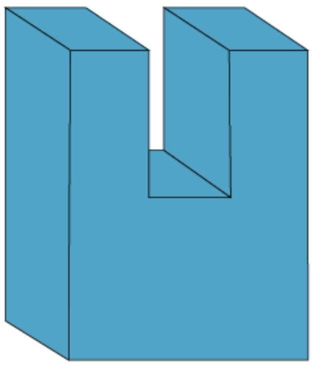


*Hình 2.70*

**2.15.** Vẽ các hình biểu diễn (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh) của một vật thể có dạng hình lăng trụ tam giác đều.

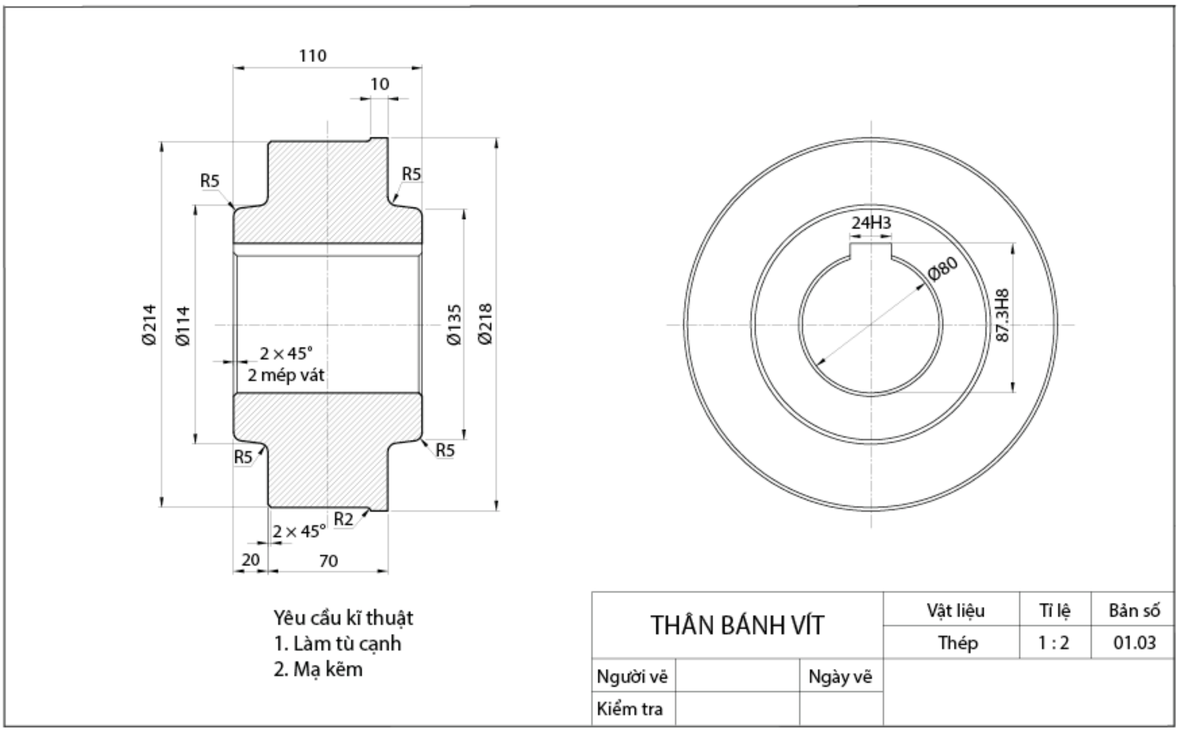
**2.16.** Hãy lập bản vẽ trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu (hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh), hình chiếu trục đo và các kích thước của vật thể chữ U như *Hình 2.71* với các thông số như sau:

- Khối chữ U: chiều dài 30 mm, chiều cao 40 mm, chiều rộng 20 mm;
- Rãnh hình hộp giữa hai nhánh chữ U: chiều dài 20 mm, chiều rộng 10 mm và chiều cao 18 mm.



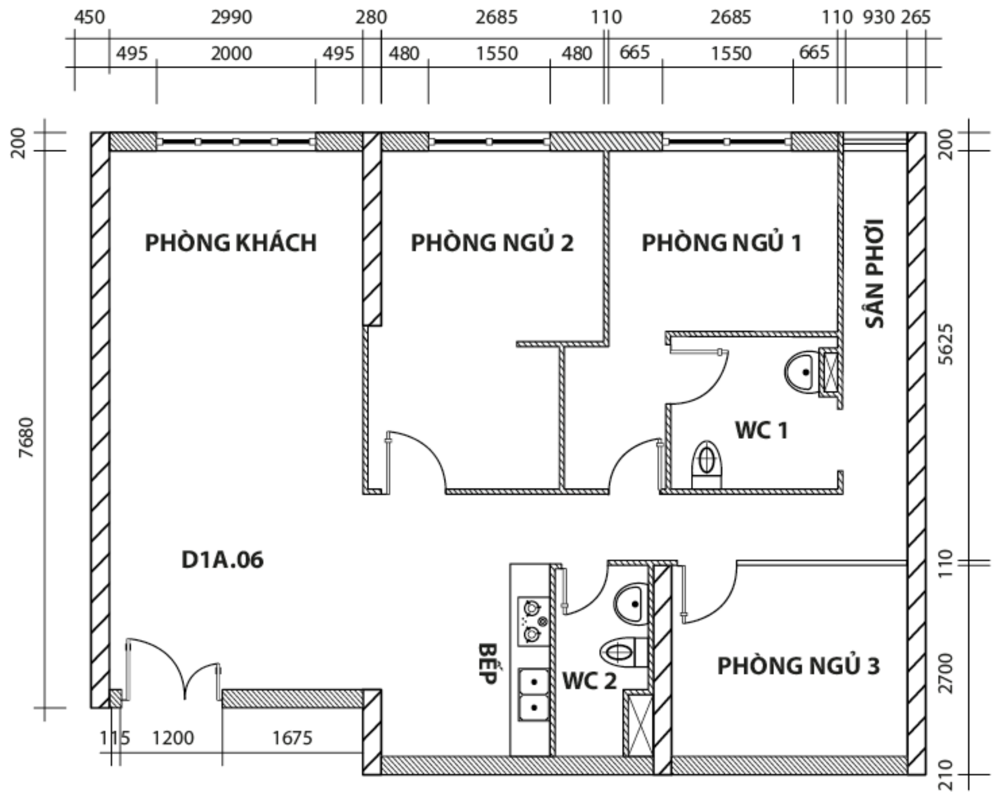
*Hình 2.71*

**2.17.** Đọc bản vẽ chi tiết của thân bánh vít trong *Hình 2.72* sau đây:




*Hình 2.72*

**2.18.** *Hình 2.73* là bản vẽ mặt bằng của một căn hộ chung cư. Hãy cho biết số phòng ngủ, số nhà vệ sinh (WC) và kích thước phòng khách của căn hộ này.




*Hình 2.73*


# CHUYÊN ĐỀ 3 Một số yếu tố của lí thuyết đồ thị

Lí thuyết đồ thị là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong khoa học, kĩ thuật hiện đại: vật lí, hoá học, sinh học,… Nhiều bài toán thực tế phức tạp có thể được giải một cách đơn giản và dễ dàng dựa vào ngôn ngữ của lí thuyết đồ thị. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỉ thứ XVIII bởi nhà toán học Thuỵ Sĩ Leonhard Euler, ông đã sử dụng mô hình đồ thị để giải bài toán về những cây cầu Königsberg nổi tiếng.

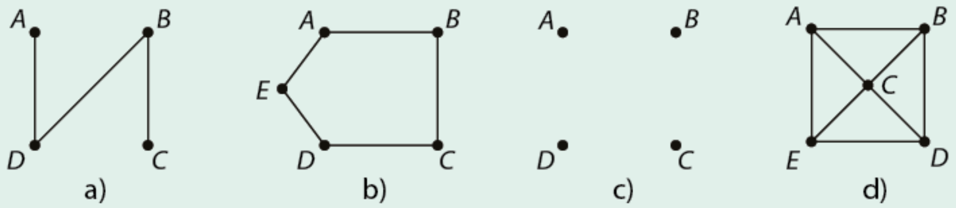
- Nhận biết được khái niệm đồ thị và các khái niệm liên quan: đường đi Euler, đường đi Hamilton;
- Nhận biết được một số thuật toán cơ bản về tìm đường đi tối ưu trong những trường hợp đơn giản;
- Sử dụng kiến thức về đồ thị để giải quyết một số tình huống liên quan đến thực tiễn.

# BÀI 1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ

## I Khái niệm về đồ thị

### HOẠT ĐỘNG 1

Liệt kê các điểm và các đoạn thẳng trong mỗi hình ở *Hình 3.1*:




*Hình 3.1*

Các hình cho trong Hoạt động 1 là các ví dụ về đồ thị.

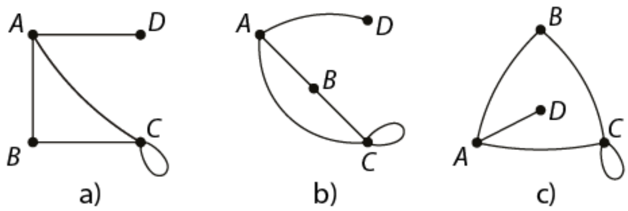
Một **đồ thị** *G* là một tập hợp gồm hữu hạn các điểm (được gọi là **đỉnh** của đồ thị) cùng với các đoạn cong hay thẳng (gọi là **cạnh** của đồ thị) có các đầu mút tại các đỉnh của đồ thị.

**Lưu ý:**

- Các đỉnh của đồ thị sẽ được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$ hoặc các chữ cái in thường $a, b, c, \ldots$
- Cạnh có đầu mút tại các đỉnh $A, B$ (hay hai đỉnh $a$ và $b$) được gọi là cạnh nối $A$ và $B$ (hay cạnh nối $a$ và $b$) kí hiệu là $AB$ hay $BA$ ($ab$ hay $ba$).
- Khi hai đầu mút của cạnh trùng nhau tại một đỉnh, ta gọi cạnh ấy là một **khuyên**. Nếu đỉnh này là đỉnh $C$ (hay $c$), khuyên ấy được kí hiệu là $CC$ (hay $cc$).

### VÍ DỤ 1

Viết ra tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh của các đồ thị trong *Hình 3.2*.




*Hình 3.2*

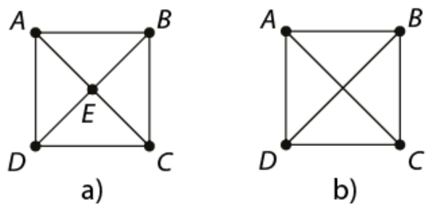
**Giải**

Các đồ thị đã cho có tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh là:

$$V = \{A; B; C; D\} \text{ và } E = \{AB; BC; CC; CA; AD\}.$$

### LUYỆN TẬP 1

Viết ra tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh của các đồ thị trong *Hình 3.3*.



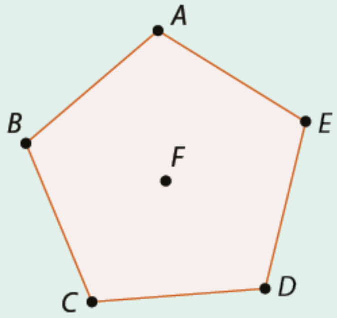

*Hình 3.3*

## HOẠT ĐỘNG 2

Cho đồ thị như *Hình 3.4*.

a) Chỉ ra các cặp đỉnh được nối với nhau bởi cạnh của đồ thị.

b) Bổ sung thêm các cạnh của đồ thị để mọi cặp đỉnh của đồ thị đều được nối với nhau.



*Hình 3.4*

Hai đỉnh của một đồ thị được gọi là **kề nhau** khi chúng là hai đầu mút của một cạnh. Một đỉnh không là đầu mút của một cạnh nào cả được gọi là **đỉnh cô lập**.

Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối với nhau bởi không quá một cạnh gọi là một **đơn đồ thị**.

Một đồ thị gọi là **đầy đủ** nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều là hai đầu mút của một cạnh.

**Lưu ý:**

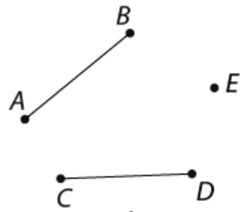
- Trong toàn bộ phần còn lại của chuyên đề ta chỉ xét đến các đơn đồ thị.
- Một đồ thị đầy đủ là đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó là kề nhau.

## VÍ DỤ 2

Cho đồ thị như *Hình 3.5*.

a) Chỉ ra các cặp đỉnh kề nhau và các đỉnh cô lập của đồ thị.

b) Vẽ thêm các cạnh của đồ thị để tạo đồ thị đầy đủ.

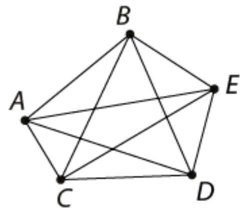


*Hình 3.5*

### Giải

a) Các cặp đỉnh kề nhau là: *A* và *B*, *C* và *D*. Đỉnh cô lập duy nhất là đỉnh *E*.

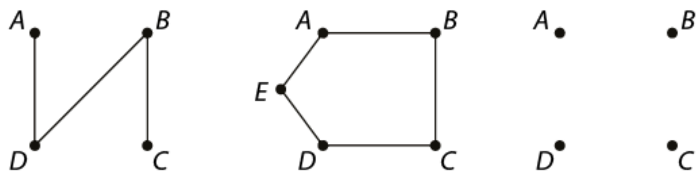
b) Nối các cặp đỉnh *A* và *B*, *A* và *C*, *A* và *D*, *A* và *E*, *B* và *C*, *B* và *D*, *B* và *E*, *C* và *D*, *C* và *E*, *D* và *E*, ta tạo được đồ thị đầy đủ như *Hình 3.6*.



*Hình 3.6*

## LUYỆN TẬP 2

Cho các đồ thị như *Hình 3.7*.



a) b) c)

*Hình 3.7*

a) Chỉ ra các cặp đỉnh kề nhau và các đỉnh cô lập của các đồ thị.

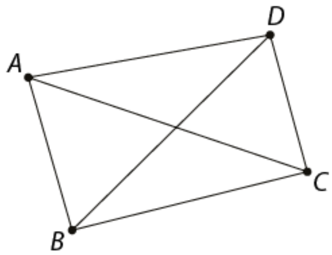
b) Vẽ thêm các cạnh của các đồ thị để tạo các đồ thị đầy đủ.

### VÍ DỤ 3

Trong một phòng họp có 4 người. Mỗi người đều bắt tay một lần với từng người còn lại. Hỏi có tất cả bao nhiêu cái bắt tay?

**Giải**

Ta xem mỗi người trong phòng họp là một đỉnh của đồ thị và mỗi cái bắt tay giữa hai người là một cạnh nối hai đỉnh của đồ thị. Ta có đồ thị như *Hình 3.8*.




*Hình 3.8*

Do đồ thị có 6 cạnh nên tổng số cái bắt tay là 6.

### LUYỆN TẬP 3

Tại một giải bóng đá giao hữu có 5 đội bóng tham gia. Biết rằng mỗi đội bóng đều thi đấu với tất cả các đội còn lại đúng một trận. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận bóng?

## II Bậc của đỉnh

### HOẠT ĐỘNG 3

Ứng với mỗi đỉnh của các đồ thị cho trong Hoạt động 1, đếm số cạnh nối với đỉnh đó.

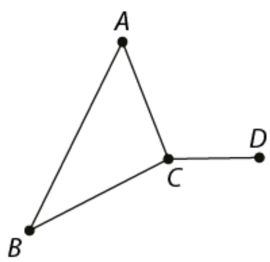
Một đỉnh của đồ thị được gọi là đỉnh **bậc** $n$ nếu nó là đầu mút của $n$ cạnh.

### VÍ DỤ 4

Vẽ một đồ thị có bốn đỉnh trong đó một đỉnh bậc 1, hai đỉnh bậc 2 và một đỉnh bậc 3.

**Giải**

Ta có thể vẽ một đồ thị thoả mãn các điều kiện đã nêu như *Hình 3.9*: $A$ và $B$ là các đỉnh bậc 2, $C$ là đỉnh bậc 3 và $D$ là đỉnh bậc 1.




*Hình 3.9*

### LUYỆN TẬP 4

Hãy vẽ một đồ thị có bốn đỉnh và có:

a) Đúng hai đỉnh bậc 1;

b) Đúng hai đỉnh bậc 2.

## HOẠT ĐỘNG 4

Xét các đồ thị cho trong Hoạt động 1.

a) Tìm số $d$ là tổng các bậc của tất cả các đỉnh của mỗi đồ thị.

b) Tìm số $e$ là tổng số cạnh của mỗi đồ thị.

c) So sánh $d$ và $e$ trong mỗi trường hợp.

Kết quả của Hoạt động 4 có thể được mở rộng thành định lí sau:

Trong mỗi đồ thị, tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần tổng số cạnh của đồ thị đó.

**Lưu ý:**

- Tổng tất cả các bậc của các đỉnh của một đồ thị bất kì luôn là số chẵn.
- Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị luôn là số chẵn.

### VÍ DỤ 5

a) Biết một đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc là 6. Hỏi đồ thị đó có bao nhiêu cạnh?

b) Biết một đồ thị có số cạnh là số chẵn. Chứng minh rằng tổng tất cả các bậc của các đỉnh là một số chia hết cho 4.

**Giải**

a) Gọi $d$ là tổng tất cả các bậc của các đỉnh và $e$ là tổng số cạnh trong đồ thị. Theo đề bài, ta có: $d = 10.6 = 60$. Do $d = 2e$ nên $2e = 60$. Vậy $e = 30$.

b) Gọi $d$ là tổng tất cả các bậc của các đỉnh và $e$ là tổng số cạnh trong đồ thị. Khi đó $d = 2e$. Do tổng số cạnh của đồ thị là số chẵn nên $e = 2k$ với $k$ là số tự nhiên. Suy ra $d = 4k$. Vậy $d$ chia hết cho 4.

### LUYỆN TẬP 5

a) Biết một đồ thị có 10 cạnh và các đỉnh của đồ thị đều có bậc bằng 4. Tính số đỉnh của đồ thị.

b) Chứng minh rằng số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị bất kì luôn là số chẵn. Kết quả này có đúng cho số đỉnh bậc chẵn không?

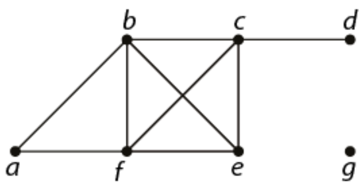
## BÀI TẬP

**3.1.** Cho đồ thị như *Hình 3.10*.

a) Viết tập hợp các đỉnh và các cạnh.

b) Chỉ ra bậc của các đỉnh.

c) Chỉ ra các cặp đỉnh kề nhau và đỉnh cô lập.




*Hình 3.10*

**3.2.** Tính số cạnh của đồ thị đầy đủ:

a) Có 4 cạnh; b) Có 5 cạnh.

**3.3.** Có hay không một đồ thị gồm 15 đỉnh và mỗi đỉnh đều có bậc 5?

**3.4.** Chứng minh rằng trong một đồ thị, có ít nhất hai đỉnh bao giờ cũng có số bậc bằng nhau.

**3.5.** Sử dụng bài tập 3.4, chứng minh rằng trong một nhóm 10 người, bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

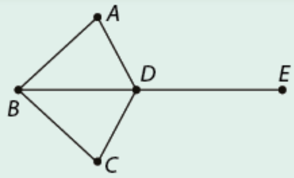
BÀI 2

# ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

## I Khái niệm về đường đi và chu trình

### HOẠT ĐỘNG 1

Cho đồ thị như *Hình 3.11*. Đọc tên các đường gấp khúc nối *A* và *E*.




*Hình 3.11*

Trong một đồ thị, một dãy các cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp có chung đầu mút) nối hai đỉnh với nhau được gọi là một **đường đi** nối hai đỉnh đó.
Một đường đi khép kín (điểm đầu và điểm cuối đường đi trùng nhau) gọi là một **chu trình**.

### VÍ DỤ 1

Xét đồ thị cho trong Hoạt động 1.

a) Liệt kê hai đường đi từ đỉnh *A* đến đỉnh *B*.

b) Liệt kê hai chu trình.

**Giải**

a) Hai đường đi từ đỉnh *A* đến đỉnh *B* của đồ thị cho trong Hoạt động 1 là:
- Đường đi *ADB* gồm các cạnh nối tiếp là *AD* và *DB*;
- Đường đi *ADCB* gồm các cạnh nối tiếp là *AD*, *DC* và *CB*.

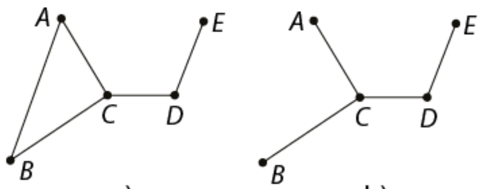
b) Hai chu trình của đồ thị cho trong Hoạt động 1 là:
- Chu trình *ABDA* xuất phát từ đỉnh *A*, đi qua lần lượt các đỉnh *B* và *D* rồi về lại *A*;
- Chu trình *ADBCDBA* đi qua các đỉnh *A*, *D*, *B*, *C* về lại *D*, *B* và cuối cùng là *A*.

### LUYỆN TẬP 1

Xét các đồ thị cho trong *Hình 3.12*.

a) Liệt kê hai đường đi từ *A* đến *E* trong mỗi đồ thị.

b) Liệt kê hai chu trình trong mỗi đồ thị.




*Hình 3.12*

Một đường đi gọi là **đường đi sơ cấp** nếu nó không đi qua một đỉnh quá một lần.
Một chu trình không đi qua một đỉnh quá một lần trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối được gọi là **chu trình sơ cấp**.
Một đường đi gọi là **đường đi đơn giản** nếu nó không đi qua một cạnh nào quá một lần.
Một chu trình không đi qua một cạnh nào quá một lần gọi là **chu trình đơn giản**.

### VÍ DỤ 2

Xét đồ thị cho trong Hoạt động 1.

a) Đường đi *BDABCDE* là đường đi từ đỉnh nào đến đỉnh nào? Đường đi này có là sơ cấp hay đơn giản không?

b) Chỉ ra hai chu trình sơ cấp và đơn giản trong đồ thị.

**Giải**

a) *BDABCDE* là đường đi từ đỉnh *B* đến đỉnh *E*. Đây là đường đi đơn giản vì không đi qua cạnh nào quá một lần. Đường đi này không sơ cấp vì đi qua đỉnh *B* hai lần.

b) Hai chu trình sơ cấp và đơn giản trong hình là: *ABDA*, *BCDAB*.

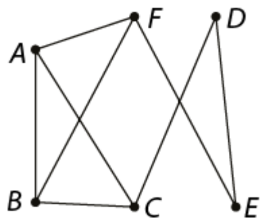
### LUYỆN TẬP 2

Cho đồ thị như *Hình 3.13*.

a) Liệt kê hai đường đi sơ cấp từ *A* đến *E*.

b) Liệt kê hai đường đi đơn giản từ *A* đến *E*.

c) Liệt kê hai chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị. Chu trình nào là chu trình sơ cấp, chu trình nào là chu trình đơn giản?



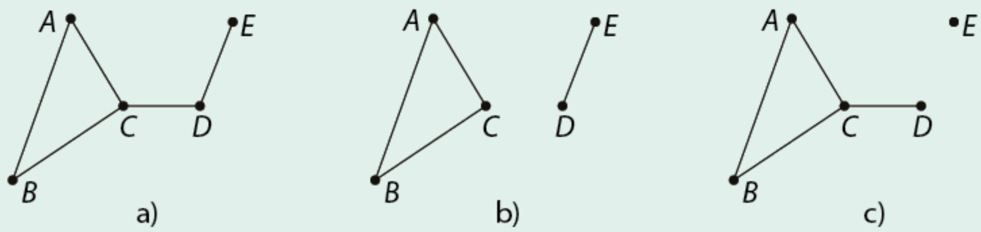
*Hình 3.13*

## II Tính liên thông của đồ thị

### HOẠT ĐỘNG 2

Điền vào ô trống nội dung thích hợp.

| Đường đi | A đến C | A đến D | A đến E |
|---|---|---|---|
| Hình a) | ? | ? | ? |
| Hình b) | ? | ? | ? |
| Hình c) | ? | ? | ? |



*Hình 3.14*

Hoạt động 2 dẫn đến khái niệm liên thông của đồ thị:

Hai đỉnh của một đồ thị gọi là liên thông nếu có một đường đi nối hai đỉnh đó.
Một đồ thị gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh của đồ thị đều liên thông.

**Lưu ý:**

- Một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi mọi cặp đỉnh của đồ thị đều có một đường đi nối cặp đỉnh đó.
- Sự liên thông có tính chất bắc cầu. Nghĩa là, nếu hai đỉnh *A* và *B* liên thông với nhau và hai đỉnh *B* và *C* liên thông với nhau thì hai đỉnh *A* và *C* liên thông với nhau.
- Một đồ thị là liên thông nếu có một đỉnh liên thông với mọi đỉnh khác trong đồ thị.

### VÍ DỤ 3

Xét tính liên thông của các đồ thị cho trong Hoạt động 2.

**Giải**

Đồ thị ở hình *a* là liên thông vì:

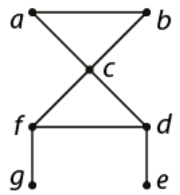
- Cặp đỉnh *A* và *B* có đường đi *AB* đi qua;
- Cặp đỉnh *A* và *C* có đường đi *AC* đi qua;
- Cặp đỉnh *A* và *D* có đường đi *ACD* đi qua;
- Cặp đỉnh *A* và *E* có đường đi *ACDE* đi qua.

Đồ thị ở hình *b* không liên thông vì hai đỉnh *C* và *D* không liên thông, nghĩa là không có đường đi nối hai đỉnh *C* và *D*.

Đồ thị ở hình *c* không liên thông vì hai đỉnh *D* và *E* không liên thông, nghĩa là không có đường đi nối hai đỉnh *D* và *E*.

### LUYỆN TẬP 3

Xét tính liên thông của đồ thị cho trong *Hình 3.15*.



*Hình 3.15*

### HOẠT ĐỘNG 3

Vẽ các đồ thị thoả mãn yêu cầu sau:

- Đồ thị có 4 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn 2;
- Đồ thị có 6 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn 3.

Xét tính liên thông của các đồ thị vừa vẽ.

Hoạt động 3 có thể được tổng quát thành định lí sau:

Nếu một đồ thị có $2n$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ít nhất bằng $n$, thì nó là **đồ thị liên thông**.

### VÍ DỤ 4

Một nhóm gồm 30 bạn học sinh tham gia trò chơi truyền tin. Biết rằng mỗi bạn có thể truyền tin cho ít nhất 15 bạn và nếu bạn A có thể truyền tin cho bạn B, thì bạn B cũng có thể truyền tin cho bạn A. Chứng minh rằng bất kì hai bạn nào trong nhóm cũng có thể truyền tin cho nhau.

**Giải**

Ta cho tương ứng mỗi bạn với một đỉnh của một đồ thị gồm 30 đỉnh. Hai bạn có thể truyền tin cho nhau được xem như hai đỉnh tương ứng của đồ thị, được nối với nhau bằng một cạnh. Do mỗi bạn có thể truyền tin cho ít nhất 15 bạn nên mỗi đỉnh của đồ thị có bậc ít nhất là 15. Theo định lí trên, đồ thị đang xét là liên thông. Vậy hai đỉnh bất kì của đồ thị đều có một đường đi nối hai đỉnh đó. Điều này chứng tỏ hai bạn bất kì đều có thể truyền tin cho nhau.

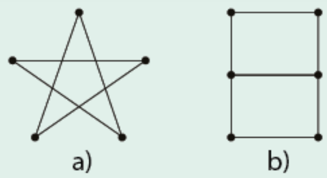
### LUYỆN TẬP 4

Một khu dân cư mới xây dựng có 20 ngôi nhà. Biết rằng từ mỗi ngôi nhà bất kì đều có đường đi đến ít nhất 10 ngôi nhà khác. Chứng minh rằng luôn có đường đi giữa hai ngôi nhà bất kì trong khu dân cư.

## III Đường đi và chu trình Euler

### HOẠT ĐỘNG 4

Vẽ các hình trong *Hình 3.16* bằng một nét bút liền và mỗi cạnh chỉ vẽ một lần (không tô lại).




*Hình 3.16*

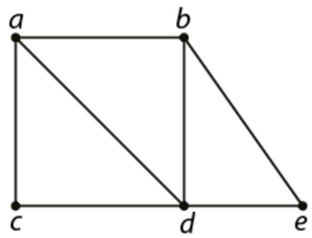
Một đường đi đơn giản chứa mọi cạnh của đồ thị được gọi là đường đi Euler của đồ thị.
Một chu trình đơn giản chứa mọi cạnh của đồ thị được gọi là chu trình Euler của đồ thị.

**Lưu ý:**

- Đường đi (chu trình) Euler của một đồ thị là đường đi (chu trình) chứa mọi cạnh của đồ thị và không đi qua cạnh nào quá một lần.
- Chu trình Euler là đường đi Euler có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- Nếu đồ thị có đường đi Euler với điểm đầu và điểm cuối không trùng nhau thì đồ thị không có chu trình Euler.

### VÍ DỤ 5

Tìm hai đường đi Euler từ đỉnh *a* đến đỉnh *b* cho đồ thị ở *Hình 3.17*.




*Hình 3.17*

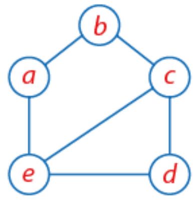
**Giải**

Hai đường đi Euler từ đỉnh *a* đến đỉnh *b* là:

- *abdacdeb* đi qua các cạnh *ab, bd, da, ac, cd, de, eb*;
- *acdabdeb* đi qua các cạnh *ac, cd, da, ab, bd, de, eb*.

### LUYỆN TẬP 5

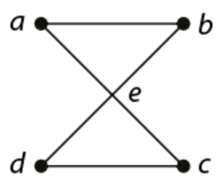
Tìm hai đường đi Euler từ đỉnh *c* đến đỉnh *e* của đồ thị cho trong *Hình 3.18*.




*Hình 3.18*

### VÍ DỤ 6

Tìm hai chu trình Euler trong đồ thị ở *Hình 3.19*.




*Hình 3.19*

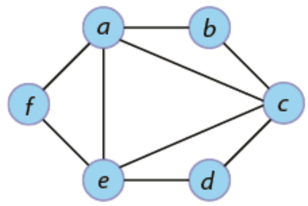
**Giải**

Hai chu trình Euler của đồ thị đã cho là:

- *abedcea* lần lượt qua các cạnh *ab, be, ed, dc, ce, ea*;
- *eabedce* lần lượt qua các cạnh *ea, ab, be, ed, dc, ce*.

### LUYỆN TẬP 6

Tìm hai chu trình Euler trong đồ thị ở *Hình 3.20*.




*Hình 3.20*

## HOẠT ĐỘNG 5

Xét các đồ thị cho trong Luyện tập 5 và Luyện tập 6.

a) Mỗi đồ thị có bao nhiêu đỉnh bậc lẻ?

b) Đồ thị nào có đường đi Euler?

c) Đồ thị nào có chu trình Euler?

## ĐỊNH LÍ 1

a) Một đồ thị liên thông có đường đi Euler khi và chỉ khi các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn, trừ điểm đầu, điểm cuối.

b) Một đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi bậc của mỗi đỉnh đồ thị là chẵn.

## VÍ DỤ 7

Sử dụng Định lí 1 chứng minh:

a) Đồ thị cho trong Ví dụ 5 có đường đi Euler;

b) Đồ thị cho trong Ví dụ 6 có chu trình Euler.

**Giải**

a) Đồ thị trong Ví dụ 5 là liên thông do có đường đi *abcde* qua tất cả các đỉnh của đồ thị. Các đỉnh *a*, *b*, *c*, *d*, *e* của đồ thị trong Ví dụ 5 có bậc lần lượt là 3, 3, 2, 4, 2. Do số đỉnh bậc lẻ của đồ thị không vượt quá hai nên đồ thị đã cho có đường đi Euler từ đỉnh *a* đến đỉnh *b* và ngược lại.

b) Các đỉnh *a*, *b*, *c*, *d*, *e* của đồ thị trong Ví dụ 6 có bậc lần lượt là 2, 2, 2, 2, 4. Do tất cả các đỉnh của đồ thị đều là bậc chẵn nên đồ thị có chu trình Euler.

## LUYỆN TẬP 7

Sử dụng Định lí 1 chứng minh đồ thị cho trong Luyện tập 6 có:

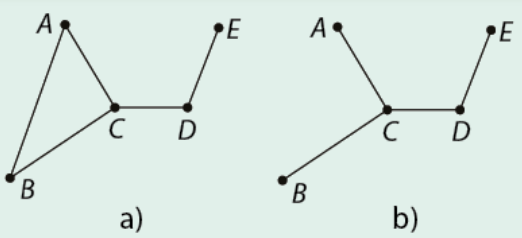
a) Đường đi Euler;

b) Chu trình Euler.

# IV Đường đi và chu trình Hamilton

## HOẠT ĐỘNG 6

Đồ thị nào trong *Hình 3.21* có đường đi sơ cấp đi qua mọi đỉnh của đồ thị?




*Hình 3.21*

Một đường đi sơ cấp chứa mọi đỉnh của đồ thị được gọi là đường đi Hamilton của đồ thị.
Một chu trình sơ cấp chứa mọi đỉnh của đồ thị được gọi là một chu trình Hamilton của đồ thị.

**Lưu ý:**

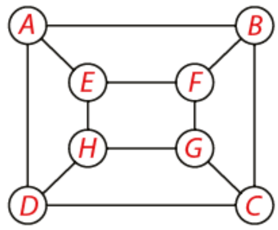
- Đường đi (chu trình) Hamilton của một đồ thị là đường đi (chu trình) chứa mọi đỉnh của đồ thị và không đi qua đỉnh nào quá một lần.
- Một đồ thị có thể chứa cả đường đi và chu trình Hamilton.

### VÍ DỤ 8

Cho đồ thị như *Hình 3.22*.

a) Tìm một đường đi Hamilton từ đỉnh $A$ đến đỉnh $E$.

b) Tìm một chu trình Hamilton của đồ thị.



*Hình 3.22*

**Giải**

a) Đường đi Hamilton từ đỉnh $A$ đến đỉnh $E$ là $ABCDHGFE$.

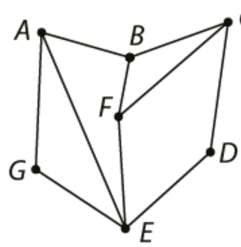
b) Một chu trình Hamilton của đồ thị là: $ABCDHGFEA$.

### LUYỆN TẬP 8

Cho đồ thị như *Hình 3.23*.

a) Tìm một đường đi Hamilton từ đỉnh $A$ đến đỉnh $G$.

b) Tìm một chu trình Hamilton của đồ thị.



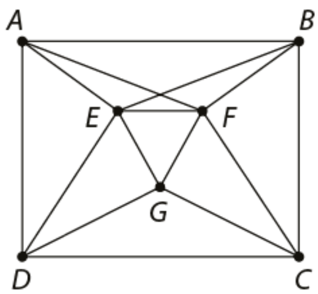
*Hình 3.23*

### ĐỊNH LÍ 2 – ĐỊNH LÍ DIRAC

Một đồ thị có $n$ đỉnh ($n \geq 3$) có chu trình Hamilton nếu bậc của mỗi đỉnh lớn hơn hay bằng $\frac{n}{2}$.

### VÍ DỤ 9

Sử dụng Định lí Dirac chứng minh đồ thị như *Hình 3.24* có chu trình Hamilton. Chỉ ra một chu trình Hamilton của đồ thị.



*Hình 3.24*

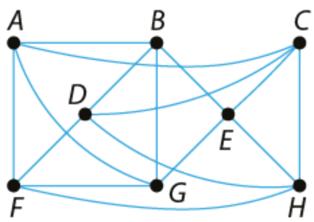
**Giải**

Đồ thị đã cho có số đỉnh là 7. Bậc của các đỉnh $A, B, C, D, E, F, G$ đều là 4 và lớn hơn $\frac{7}{2} = 3,5$. Do đó đồ thị có chu trình Hamilton.

Một chu trình Hamilton của đồ thị là: $ABCDGEFA$.

### LUYỆN TẬP 9

Sử dụng Định lí Dirac chứng minh đồ thị như *Hình 3.25* có chu trình Hamilton. Chỉ ra một chu trình Hamilton của đồ thị.



*Hình 3.25*

## BÀI TẬP

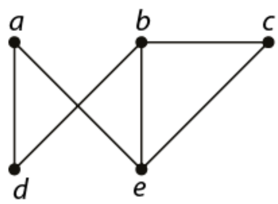
**3.6.** Cho đồ thị như *Hình 3.26*.

a) Viết một đường đi từ đỉnh $a$ đến đỉnh $b$ và đi qua bốn đỉnh.

b) Viết một đường đi Euler của đồ thị.

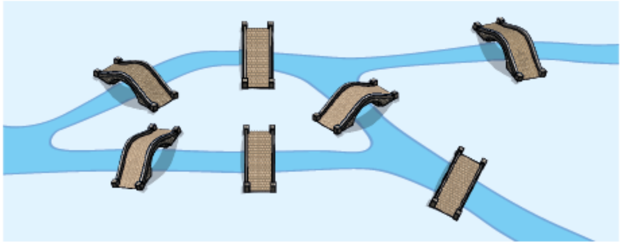
c) Đồ thị có chu trình Euler không?

d) Viết một đường đi và một chu trình Hamilton của đồ thị.



*Hình 3.26*

**3.7.** Königsberg là một thành phố nay thuộc nước Nga (sau này đổi tên là Kaliningrad). Ở nơi này có 7 cây cầu, mỗi cây cầu sẽ nối liền hai bờ sông, hoặc là một bờ sông với một trong hai cù lao, hoặc nối hai cù lao với nhau như *Hình 3.27*.

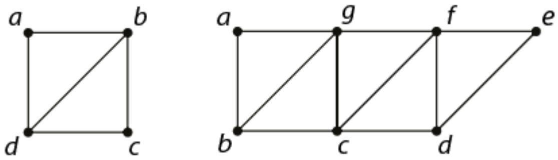


*Hình 3.27*

Người dân ở Königsberg đã đặt ra một câu đố: "Liệu có thể đi một lần qua tất cả 7 chiếc cầu mà không phải lặp lại hay không (hay mỗi cây cầu chỉ được đi qua một lần duy nhất)?" (nguồn: *https://soha.vn/lam-the-nao-de-di-qua-ca-7-cay-cau-ma-khong-lap-lai-1-cai-nao-20170223091648886.htm*). Hãy sử dụng kiến thức về đồ thị trả lời câu đố trên.

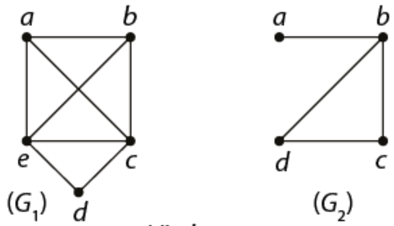
**3.8.** Sử dụng kiến thức về đồ thị đã học, giải thích vì sao các hình *a* và *b* trong Hoạt động 4 đều có thể vẽ bằng một nét bút liền và mỗi nét chỉ được vẽ đúng một lần.

**3.9.** Đồ thị nào trong *Hình 3.28* có đường đi Euler, chu trình Euler?




*Hình 3.28*

**3.10.** Đồ thị nào trong *Hình 3.29* có đường đi Hamilton, chu trình Hamilton?




*Hình 3.29*

**3.11.** Trong một bàn cờ vua, quân mã di chuyển theo hình chữ L, mỗi nước đi gồm tổng cộng 3 ô: Tiến 1 ô rồi rẽ trái hoặc rẽ phải 2 ô và ngược lại; tiến 2 ô rồi rẽ trái hoặc rẽ phải 1 ô và ngược lại (*Hình 3.30*). Chứng minh rằng trong một phần bàn cờ vua có kích thước $3 \times 4$ thì từ bất kì ô nào của bàn cờ, quân mã cũng có thể di chuyển được đến tất cả các ô của bàn cờ đúng một lần.

*Hình 3.30*

**EM CÓ BIẾT**

Leonhard Euler (1707 – 1783) là một nhà toán học, nhà vật lí học, nhà thiên văn học, nhà lí luận và kĩ sư người Thụy Sĩ. Euler là một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất của thế kỉ XVIII và được xem là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất trong lịch sử. Ông là người đầu tiên đã giải bài toán 3.7 một cách chặt chẽ vào năm 1726, vì vậy 3.7 thường được gọi là *Bài toán Euler về các cây cầu ở Königsberg*.

(Nguồn: *Bách khoa toàn thư mở Wikipedia)*

# BÀI 3 ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ VÀ ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

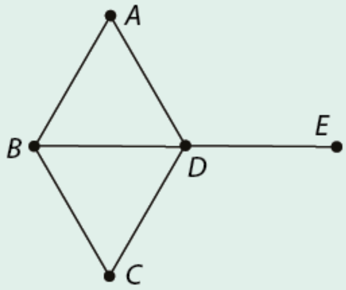
## I Đồ thị có trọng số

### HOẠT ĐỘNG 1

Cho đồ thị như *Hình 3.31* và độ dài các đoạn thẳng

$$AB = AD = BD = BC = CD = DE = 2 \text{ cm}.$$

Viết tất cả các đường đi sơ cấp đi từ đỉnh $E$ đến đỉnh $B$ và tính độ dài của đường gấp khúc tạo bởi mỗi đường đi đó.




*Hình 3.31*

Hoạt động 1 cho ta khái niệm về đồ thị có trọng số và độ dài đường đi:

Một đồ thị $G$ gọi là **đồ thị có trọng số** nếu mỗi cạnh của đồ thị được gán một số thực (được gọi là trọng số).
**Độ dài của một đường đi** trong đồ thị $G$ là tổng của tất cả các số trên mỗi cạnh của đường đi đó.

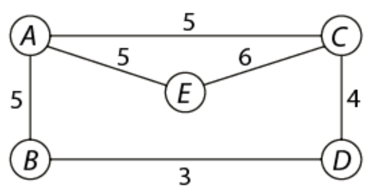
**Lưu ý:** Trong toàn bài, ta chỉ xét đồ thị có trọng số dương, nghĩa là các số được gán trên các cạnh của đồ thị đều là số dương. Các đường đi trong đồ thị được xét đều là các đường đi sơ cấp.

### VÍ DỤ 1

Cho đồ thị có trọng số như *Hình 3.32*.

a) Viết một đường đi từ đỉnh $A$ đến đỉnh $D$ có độ dài bằng 9. Chỉ ra các đỉnh của đồ thị mà đường đi vừa viết đi qua.

b) Tìm một đường đi Hamilton của đồ thị và tính độ dài của đường đi đó.




*Hình 3.32*

**Giải**

a) Các đường đi từ $A$ đến $D$ và độ dài tương ứng là:

- Đường đi $ABD$ chứa các cạnh $AB$, $BD$ có độ dài là: $5 + 3 = 8$;
- Đường đi $ACD$ chứa các cạnh $AC$, $CD$ có độ dài là: $5 + 4 = 9$;
- Đường đi $AECD$ chứa các cạnh $AE$, $EC$, $CD$ có độ dài là: $5 + 6 + 4 = 15$.

Đường đi xuất phát từ $A$ có độ dài bằng 9 là $ACD$. Đường đi này đi qua các đỉnh $A$, $C$ và $D$ của đồ thị.

b) Đường đi $BAECD$ là đường đi Hamilton trong đồ thị. Đường đi này có độ dài là:

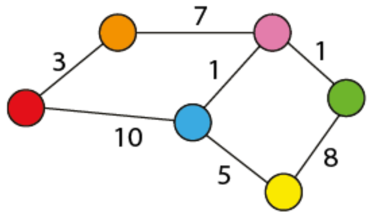
$$5 + 5 + 6 + 4 = 20.$$

## LUYỆN TẬP 1

Cho đồ thị có trọng số như *Hình 3.33*.

a) Tìm một đường đi có độ dài bằng 20 xuất phát từ đỉnh màu hồng của đồ thị.

b) Tìm một đường đi Hamilton của đồ thị và tính độ dài của đường đi đó.

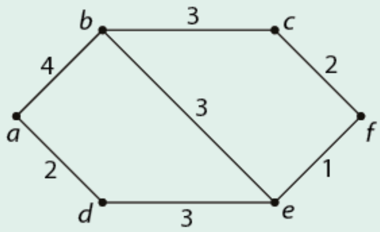


*Hình 3.33*

## II Bài toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số dương

### HOẠT ĐỘNG 2

Viết tất cả các đường đi sơ cấp từ đỉnh *a* đến đỉnh *f* và chọn ra đường đi có độ dài ngắn nhất.



*Hình 3.34*

Việc tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị bằng cách xét tất cả các đường đi như trong Hoạt động 2 là không hữu hiệu với đồ thị có số đỉnh và số cạnh lớn. Thuật toán Dijkstra giúp giải quyết vấn đề này. Thuật toán giúp ta tìm được đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị, trong đó đỉnh xuất phát được gọi là đỉnh nguồn và đỉnh kết thúc gọi là đỉnh đích. Ý tưởng chính của thuật toán gồm các bước sau:

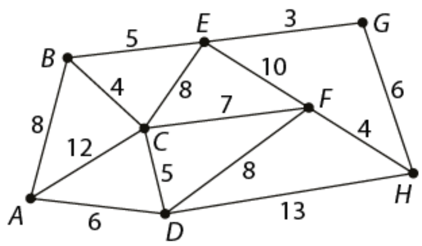
**Bước 1** Khởi tạo tập hợp *S* là tập chứa duy nhất đỉnh nguồn. Xét các đỉnh kề với đỉnh nguồn và chọn ra những đỉnh gần đỉnh nguồn nhất và đưa vào tập hợp *S*.

**Bước 2** Xét các đỉnh kề với các đỉnh có trong *S* và chọn ra đường đi ngắn nhất xuất phát từ đỉnh nguồn và đi qua các đỉnh trong *S* và các đỉnh vừa xét. Các đỉnh nằm trên đường đi ngắn nhất sẽ được bổ sung vào tập hợp *S*.

**Bước 3** Lặp lại Bước 2 cho đến khi di chuyển đến điểm đích và chọn được đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích.

### VÍ DỤ 2

Dựa vào ý tưởng chính của thuật toán Dijkstra, chỉ ra cách tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *A* đến đỉnh *H* của đồ thị trong *Hình 3.35*.

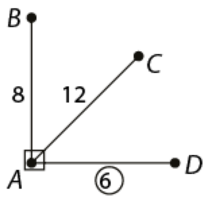


*Hình 3.35*

**Giải**

Xét tập hợp *S* chỉ chứa đỉnh *A*. Từ đỉnh *A* có ba đỉnh kề với nó là *B*, *C* và *D*. Do $AD < AB < AC$ ($6 < 8 < 12$) nên ta chọn đỉnh *D* là đỉnh đưa vào tập hợp *S* và ta có:

$$S = \{A; D\}.$$

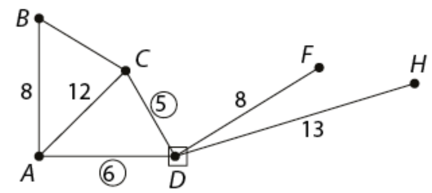


Có bốn đỉnh kề với các đỉnh trong tập $S$ là $B$, $C$, $F$ và $H$. Do

$$AD + CD < AB + BC = AC < AD + DF < AD + DH$$
$$(5 + 6 < 8 + 4 = 12 < 6 + 8 < 6 + 13)$$

nên ta chọn $C$ là đỉnh đưa vào tập hợp $S$ và ta có:

$$S = \{A; D; C\}.$$

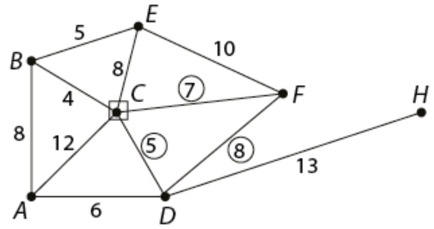



Có bốn đỉnh kề với các đỉnh trong $S$ là $B$, $E$, $F$ và $H$. Do

$$AD + DF < AD + DC + CF < AC + CF = AD + DH < AB + BE + EF$$
$$(6 + 8 < 6 + 5 + 7 < 12 + 7 = 6 + 13 < 8 + 5 + 10)$$

nên ta chọn đỉnh $F$ là đỉnh đưa vào tập hợp $S$ và ta có:

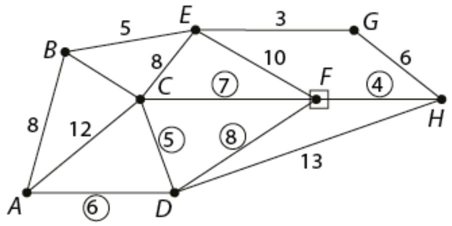
$$S = \{A; D; C; F\}.$$




Có bốn đỉnh kề với các đỉnh trong $S$ là $B$, $E$, $G$ và $H$. Do

$$AD + DF + FH < AD + DH < AB + BE + EG + GH < AC + CE + EG + GH$$
$$(6 + 8 + 4 < 6 + 13 < 8 + 5 + 3 + 6 < 12 + 8 + 3 + 6)$$

nên ta chọn đỉnh $H$ là đỉnh đưa vào tập $S$. Hơn nữa, do $H$ là đỉnh đích nên ta có đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $H$ là $ADFH$ có độ dài $6 + 8 + 4 = 18$.

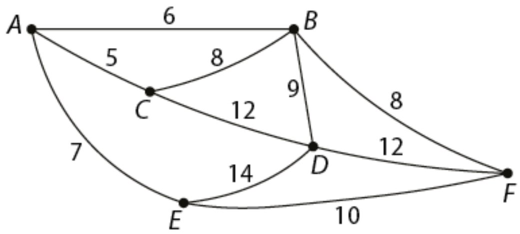



## LUYỆN TẬP 2

Cho đồ thị như *Hình 3.36*. Tìm các đường đi ngắn nhất:

a) Từ đỉnh $A$ đến đỉnh $F$;

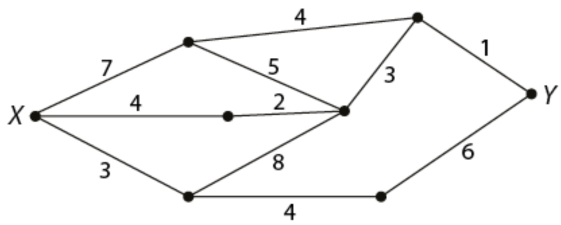
b) Từ đỉnh $E$ đến đỉnh $B$.




*Hình 3.36*

## BÀI TẬP

**3.12.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $X$ đến đỉnh $Y$ của đồ thị cho trong *Hình 3.37*.




*Hình 3.37*

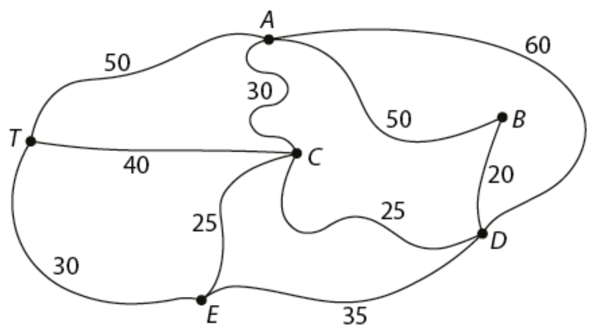
**3.13.** Một tour du lịch gồm 5 địa điểm $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$. Điểm bắt đầu là vị trí $T$ và các khoảng cách trên *Hình 3.38* có đơn vị là kilômét. Thiết kế các đường đi ngắn nhất đi qua được tất cả các điểm tham quan:

a) Từ điểm bắt đầu $T$ đến điểm kết thúc $A$;

b) Từ điểm bắt đầu $T$ đến điểm kết thúc $C$;

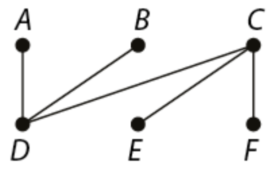
c) Từ điểm bắt đầu $T$ đến điểm kết thúc $E$;

d) Từ điểm bắt đầu $T$ rồi về lại vị trí ban đầu.




*Hình 3.38*

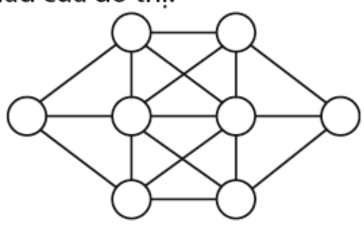
## ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 3



*Hình 3.39*

**3.14.** Viết ra số đỉnh, số cạnh và bậc của mỗi đỉnh của đồ thị trong *Hình 3.39*.

**3.15.** Hãy tìm vị trí thích hợp cho các chữ cái *A, B, C, D, E, F, G, H* tương ứng với 8 hình tròn cho trong *Hình 3.40*, sao cho hai chữ cái đứng cạnh nhau trong bảng chữ cái tiếng Anh không được là hai đỉnh kề nhau của đồ thị.


*Hình 3.40*

**3.16.** Chứng minh rằng trong một nhóm bất kì có 6 người, luôn có 3 người đều biết lẫn nhau hoặc 3 người đều không biết lẫn nhau.

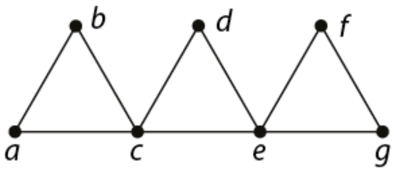
**3.17.** Một đồ thị có chứa chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler. Với mỗi phát biểu bên dưới, vẽ một đồ thị Euler thoả điều kiện trong phát biểu hoặc chứng minh rằng không có đồ thị Euler thoả điều kiện:

a) Số đỉnh và số cạnh là số chẵn;

b) Số đỉnh là số chẵn và số cạnh là số lẻ;

c) Số đỉnh là số lẻ và số cạnh là số chẵn;

d) Số đỉnh và số cạnh đều là số lẻ.



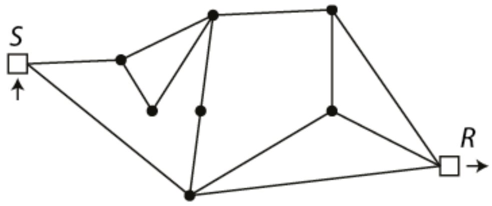
*Hình 3.41*

**3.18.** Đồ thị cho trong *Hình 3.41* có chu trình Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra chu trình đó.

**3.19.** Cho đồ thị *H* như *Hình 3.42*.

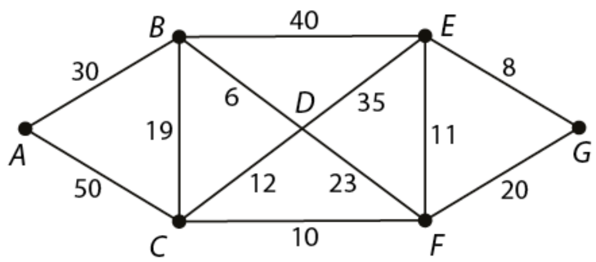
a) Tìm đường đi Hamilton từ *S* đến *R*.

b) Chứng minh rằng trong *H* không có chu trình Hamilton.



*Hình 3.42*

**3.20.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *A* đến đỉnh *G* của đồ thị cho trong *Hình 3.43*.



*Hình 3.43*

# BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ


| | |
|---|---|
| Bậc của đỉnh | 67 |
| Bản vẽ cơ khí | 52 |
| Bản vẽ kĩ thuật | 51 |
| Bản vẽ mặt bằng tổng thể | 53 |
| Bản vẽ xây dựng | 53 |
| Chữ số kích thước | 39 |
| Chu trình | 69 |
| Chu trình đơn giản | 69 |
| Chu trình Euler | 72 |
| Chu trình Hamilton | 73 |
| Chu trình sơ cấp | 69 |
| Đỉnh cô lập | 66 |
| Đỉnh kề nhau | 66 |
| Đỉnh liên thông | 70 |
| Độ dài của một đường đi | 76 |
| Đồ thị | 65 |
| Đồ thị có trọng số | 76 |
| Đồ thị đầy đủ | 66 |
| Đồ thị liên thông | 70 |
| Đọc bản vẽ chi tiết | 52 |
| Đơn đồ thị | 66 |
| Đường đi | 69 |
| Đường đi đơn giản | 69 |
| Đường đi Euler | 72 |
| Đường đi Hamilton | 73 |
| Đường đi sơ cấp | 69 |

| | |
|---|---|
| Đường gióng kích thước | 39 |
| Đường kích thước | 38 |
| Góc trục đo | 47 |
| Hai hình bằng nhau | 5 |
| Hai hình đồng dạng | 29 |
| Hệ số biến dạng | 45 |
| Hình chiếu bằng | 42 |
| Hình chiếu cạnh | 42 |
| Hình chiếu đứng | 42 |
| Hình chiếu trục đo | 44 |
| Hình chiếu trục đo vuông góc đều | 46 |
| Hình chiếu trục đo xiên góc cân | 47 |
| Khuyên | 65 |
| Phép biến hình | 2 |
| Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng | 40 |
| Phép dời hình | 3 |
| Phép đối xứng tâm | 11 |
| Phép đối xứng trục | 6 |
| Phép đồng dạng | 27 |
| Phép đồng nhất | 5 |
| Phép quay | 21 |
| Phép tịnh tiến | 16 |
| Phép vị tự | 24 |
| Tỉ lệ | 35 |
| Tính liên thông | 70 |
| Trục đo | 45 |

# BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

| Thuật ngữ | Giải thích |
|---|---|
| Bậc của đỉnh | Một đỉnh của đồ thị được gọi là đỉnh bậc *n* nếu nó là đầu mút của *n* cạnh. |
| Bản vẽ cơ khí | Gồm các bản vẽ liên quan đến thiết kế, chế tạo, lắp ráp, kiểm tra, sử dụng,... các máy móc và thiết bị. |
| Bản vẽ kĩ thuật | Là các thông tin kĩ thuật được trình bày dưới dạng đồ họa theo các quy tắc thống nhất. |
| Bản vẽ mặt bằng tổng thể | Là bản vẽ hình chiếu bằng của các công trình trên khu đất xây dựng. |
| Bản vẽ xây dựng | Gồm các bản vẽ liên quan đến thiết kế, thi công, lắp ráp, kiểm tra, sử dụng,... các công trình kiến trúc và xây dựng. |
| Chữ số kích thước | Là giá trị chỉ số kích thước thực, không phụ thuộc vào tỉ lệ bản vẽ và thường được ghi trên đường kích thước. |
| Chu trình | Là một đường đi khép kín (điểm đầu và điểm cuối đường đi trùng nhau). |
| Chu trình đơn giản | Là một chu trình không đi qua một cạnh nào quá một lần. |
| Chu trình Euler | Là một chu trình đơn giản chứa mọi cạnh của đồ thị. |
| Chu trình Hamilton | Là một chu trình sơ cấp chứa mọi đỉnh của đồ thị. |
| Chu trình sơ cấp | Là một chu trình không chứa cùng một đỉnh quá một lần trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối. |
| Đỉnh cô lập | Một đỉnh không là đầu mút của một cạnh nào cả được gọi là đỉnh cô lập. |
| Đỉnh kề nhau | Hai đỉnh của một đồ thị được gọi là kề nhau khi chúng là hai đầu mút của một cạnh. |
| Đỉnh liên thông | Hai đỉnh của một đồ thị gọi là liên thông nếu có một đường đi nối hai đỉnh đó. |
| Độ dài của một đường đi | Độ dài của một đường đi trong đồ thị *G* là tổng của tất cả các số trên mỗi cạnh của đường đi đó. |
| Đồ thị | Một đồ thị *G* là một tập hợp gồm hữu hạn các điểm (được gọi là đỉnh của đồ thị) cùng với các đoạn cong hay thẳng (gọi là cạnh của đồ thị) có các đầu mút tại các đỉnh của đồ thị. |
| Đồ thị có trọng số | Một đồ thị *G* gọi là đồ thị có trọng số nếu mỗi cạnh của đồ thị được gán một số thực. |
| Đồ thị đầy đủ | Một đồ thị gọi là đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều là đầu mút của một cạnh. |
| Đồ thị liên thông | Một đồ thị gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh của đồ thị đều liên thông. |

| | |
|---|---|
| Đọc bản vẽ chi tiết | Là hiểu đầy đủ và chính xác nội dung của bản vẽ chi tiết, bao gồm: tên gọi, công dụng, hình dáng, cấu tạo, kích thước và vật liệu, các yêu cầu kĩ thuật của chi tiết. |
| Đơn đồ thị | Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối với nhau bởi không quá một cạnh gọi là một đơn đồ thị. |
| Đường đi | Trong một đồ thị, một dãy các cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp có chung đầu mút) nối hai đỉnh với nhau được gọi là một đường đi nối hai đỉnh đó. |
| Đường đi đơn giản | Một đường đi gọi là đường đi đơn giản nếu nó không đi qua một cạnh nào quá một lần. |
| Đường đi Euler | Là một đường đi đơn giản chứa mọi cạnh của đồ thị. |
| Đường đi Hamilton | Là một đường đi sơ cấp chứa mọi đỉnh của đồ thị. |
| Đường đi sơ cấp | Một đường đi gọi là đường đi sơ cấp nếu nó không đi qua một đỉnh quá một lần. |
| Đường gióng kích thước | Là đường nét liền mảnh, thường kẻ vuông góc với đường kích thước và vượt quá đường kích thước khoảng 2 – 4 mm. |
| Đường kích thước | Là đường nét liền mảnh, song song với phần tử được ghi kích thước, ở đầu mút đường kích thước có vẽ mũi tên hoặc dấu gạch chéo. |
| Góc trục đo | Góc giữa các trục đo bao gồm $(d_x, d_y)$, $(d_y, d_z)$, $(d_x, d_z)$ gọi là góc trục đo. |
| Hai hình bằng nhau | Hai hình được gọi là bằng nhau nếu tồn tại một phép dời hình biến hình này thành hình kia. |
| Hai hình đồng dạng | Hai hình được gọi là đồng dạng nếu tồn tại một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia. |
| Hệ số biến dạng | Là tỉ số độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục đo với độ dài thực của đoạn thẳng đó. |
| Hình chiếu bằng | Là ảnh của vật qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng hình chiếu bằng. |
| Hình chiếu cạnh | Là ảnh của vật qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng hình chiếu cạnh. |
| Hình chiếu đứng | Là ảnh của vật qua phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng hình chiếu đứng. |
| Hình chiếu trục đo | Là hình biểu diễn ba chiều của vật thể được xây dựng bằng phép chiếu song song. |
| Hình chiếu trục đo vuông góc đều | Là hình chiếu trục đo với phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu, các góc trục đo bằng nhau (bằng 120°) và ba hệ số biến dạng theo các trục là bằng nhau. |

| | |
|---|---|
| Hình chiếu trục đo xiên góc cân | Là hình chiếu trục đo với phương chiếu không vuông góc với mặt phẳng chiếu, mặt phẳng ($d_1$, $d_3$) đặt song song với mặt phẳng hình chiếu ($P$), góc trục đo ($d_x$, $d_z$) = 90°, ($d_x$, $d_y$) = ($d_y$, $d_z$) = 135° và hệ số biến dạng theo trục đo $d_x$, $d_z$ là bằng nhau. |
| Khuyên | Khi hai đầu mút của cạnh trùng nhau tại một đỉnh ta gọi cạnh ấy là một khuyên. |
| Phép biến hình | Là quy tắc cho tương ứng mỗi điểm $M$ một điểm $M'$ duy nhất. |
| Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng | Là phép chiếu song song lên một mặt phẳng theo phương là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó. |
| Phép dời hình | Là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì. |
| Phép đối xứng tâm | Phép biến hình biến điểm $I$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ khác $I$ thành $M'$ sao cho $I$ là trung điểm của $MM'$ được gọi là phép đối xứng tâm $I$. |
| Phép đối xứng trục | Phép biến hình biến điểm $M$ thuộc $d$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ không thuộc $d$ thành điểm $M'$ sao cho $d$ là đường trung trực của $MM'$ được gọi là phép đối xứng trục $d$. |
| Phép đồng dạng | Phép biến hình $F$ được gọi là phép đồng dạng tỉ số $k$ ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì $M$, $N$ và $M' = F(M)$, $N' = F(N)$ ta luôn có $MN' = kMN$. |
| Phép đồng nhất | Phép biến hình biến một điểm $M$ bất kì thành chính nó. |
| Phép quay | Phép biến hình biến $O$ thành chính nó, biến mỗi điểm $M$ khác $O$ thành $M'$ sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM, OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm $O$ góc quay $\alpha$. |
| Phép tịnh tiến | Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. |
| Phép vị tự | Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k$. |
| Tỉ lệ | Là tỉ số giữa kích thước đo được trên hình biểu diễn của vật thể và kích thước thực tương ứng trên vật thể đó. |
| Tính liên thông | Hai đỉnh của một đồ thị gọi là liên thông nếu có một đường đi nối hai đỉnh đó. |
| Trục đo | Trong hình chiếu trục đo, hình chiếu của phương ngang ($d_1$), phương dọc ($d_2$), phương đứng ($d_3$) là các đường thẳng tương ứng được kí hiệu là $d_x$, $d_y$, $d_z$ và được gọi là các trục đo. |

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ**
Số 07 đường Hà Nội, phường Vĩnh Ninh, thành phố Huế
Điện thoại: 0234.3834486
Email: nxbdhhue@hue.uni.edu.vn - Website: htth://huph.hueuni.edu.vn

---

**TOÁN 11_Chuyên đề**

**LÊ THỊ HOÀI CHÂU** (Tổng chủ biên)
**TRẦN ANH DŨNG** (Chủ biên)
**TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC**
**PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN**

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*
**Giám đốc: TRẦN BÌNH TUYÊN**

*Chịu trách nhiệm nội dung:*
**Quyền Tổng biên tập: NGUYỄN CHÍ BẢO**

*Biên tập:*
**TRƯƠNG THỊ MỸ VÂN**

*Trình bày bìa, minh hoạ:*
**NGUYỄN DIỄM QUỲNH**

*Trình bày sách, sửa bản in:*
**NGUYỄN ĐỖ MINH QUÂN, TRỊNH THÁI PHƯỢNG**
**TRẦN NGỌC BẢO KIM, LẠI THỊ KIỀU VI, ĐÀM HUỲNH PHƯƠNG THẢO**
**NGUYỄN ĐOAN TRANG, NGUYỄN VĂN VĨNH**
**NGUYỄN VŨ KHÁNH LINH, TRẦN THỊ THU NGUYỆT**

*Liên kết xuất bản:*
**Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam**
**Tầng 1, Toà nhà Vietphone Building**
**Số 64 Nguyễn Đình Chiểu, Phường Đa Kao, Quận 1, Tp.HCM**

---



---