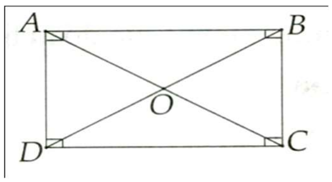
HÌNH CHỮ NHẬT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Định nghĩa:* Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.



Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^0$.

* *Nhận xét:* Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, một hình thang cân.

* *Tính chất:*

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.

- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

* *Dấu hiệu nhận biết:*

-Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

* *Áp dụng vào tam giác vuông:*

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A.CÁC DANG BÀI MINH HỌA CB-NC

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết đê chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật.

Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA.$

a) Chứng minh $EFGH$ là hình bình hành.

b) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC $(M \in AB)$.

a) Chứng minh $PM = CQ$.

b) Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.

Bài 3: Cho tam giác ABC, các trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Gọi P là điểm đối xứng của M qua G, gọi Q là điểm đối xứng của N qua G.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?

b) Nếu ΔABC cân ở A thì tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?

Dạng 2: Áp dụng tính chất hình chữ nhật để chứng minh các tính chất hình học.

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và AD tại H và K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AHFK$ là hình chữ nhật;

b) AF song song với BD;

c*) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Tứ giác $EAFH$ là hình gì?

b) Qua A kẻ đường vuông góc với EF, cắt BC ở I. Chứng minh I là trung điểm của BC.

Dạng 3: Vận dụng định lý thuận và định lý đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

Phương pháp giải: Sử dụng định lí về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền cả tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh tam giác vuông…

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

a) $\widehat{IHK} = 90^0$;

b) Chu vi ΔIHK bằng nửa chu vi ΔABC.

Bài 7: Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

a) Tứ giác $AMBQ$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

c) Chứng minh tam giác PIQ cân.

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật.

Bài 8: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật?

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

HƯỚNG DẪN

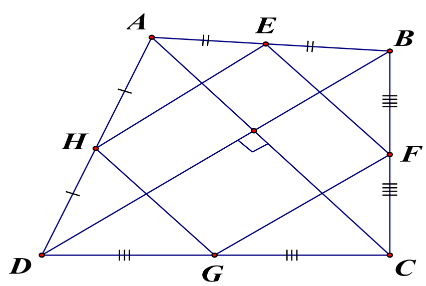
Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh $EFGH$ là hình bình hành.

b) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

Bài giải



a) Ta có: $\begin{cases} EA = EB(gt) \\ FB = FC(gt) \end{cases} \Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔBAC $\Rightarrow EF//AC$ và $EF = \dfrac{1}{2}AC$ (1)

Ta có: $\begin{cases} HA = HD(gt) \\ GC = GD(gt) \end{cases} \Rightarrow HG$ là đường trung bình của ΔDAC $\Rightarrow HG//AC$ và $HG = \dfrac{1}{2}AC$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $EF//HG$ và $EF = HG$

Vậy $EFGH$ là hình bình hành (3)

b) Ta có: $EFGH$ là hình bình hành.

Ta có: $\begin{cases} EA = EB(gt) \\ HA = HD(gt) \end{cases} \Rightarrow DE$ là đường trung bình của ΔABD $\Rightarrow HE//BD$

Ta có: $\begin{cases} EF//AC \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow EF \perp BD$

Ta có: $\begin{cases} EF \perp BD \\ HE//BD \end{cases} \Rightarrow EF \perp HE$ (4)

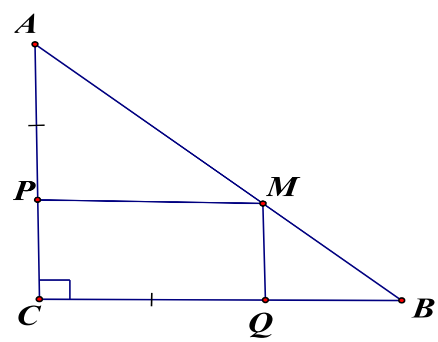
Từ $(3),(4)$, suy ra hình bình hành $EFGH$ có $\widehat{E} = 90^o$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC $(M \in AB)$.

a) Chứng minh $PM = CQ$.

b) Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.

Bài giải



a) Ta có: $\widehat{A} = \widehat{B}$ (vì ΔABC vuông cân tại C)(1)

Vì $PM // BC$ nên $\widehat{PMA} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị)(2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{A} = \widehat{PMA}$ (vì cùng bằng $\widehat{B}$)

$\Rightarrow \Delta APM$ cân tại P $\Rightarrow AP = PM$ (hai cạnh bên bằng nhau)

Ta có: $\begin{cases} AP = CQ(gt) \\ AP = PM \end{cases} \Rightarrow PM = CQ$

b) Ta có: $\begin{cases} PM // CQ \\ PM = CQ \end{cases} \Rightarrow PCQM$ là hình bình hành (tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

Lại có $\widehat{C} = 90^o$

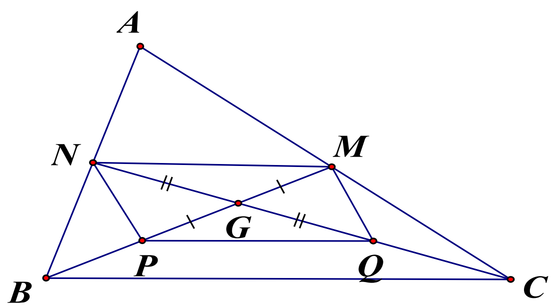
Vậy $PCQM$ là hình chữ nhật.

Bài 3: Cho tam giác ABC, các trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Gọi P là điểm đối xứng của M qua G, gọi Q là điểm đối xứng của N qua G.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?

b) Nếu ΔABC cân ở A thì tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?

Bài giải



a) Ta có:

$GM = GP$ (vì P là điểm đối xứng của M qua G) (1)

$GN = GQ$ (vì Q là điểm đối xứng của N qua G) (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MNPQ$ là hình bình hành (vì có G là trung điểm của hai đường chéo MP và NQ)

b) Nếu ΔABC cân tại A thì $AB = AC$, khi đó ta có $\Delta AMB = \Delta ANC(c.g.c)$

$\Rightarrow MB = NC$ vì thế ta lại có $MP = NQ$. Từ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Dạng 2: Áp dụng tính chất hình chữ nhật để chứng minh các tính chất hình học.

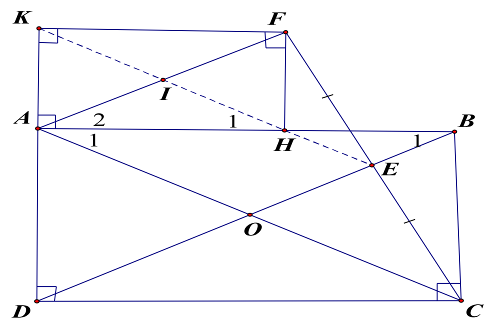
Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và AD tại H và K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AHFK$ là hình chữ nhật;

b) AF song song với BD;

c*) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Bài giải



a) $\widehat{FHA} = \widehat{FKA} = \widehat{HAK} = 90^o \Rightarrow AHFK$ là hình chữ nhật.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\begin{cases} EF = EC(gt) \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔCAF.

$\Rightarrow AF // OE$ hay $AF // BD$

c) Gọi I là giao điểm của AF và HK.

Ta có: $\widehat{H_1} = \widehat{A_1} \left(\widehat{H_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \right) \Rightarrow KH // AC$,

Mà KH đi qua trung điểm I của AF $\Rightarrow KH$ đi qua trung điểm của FC.

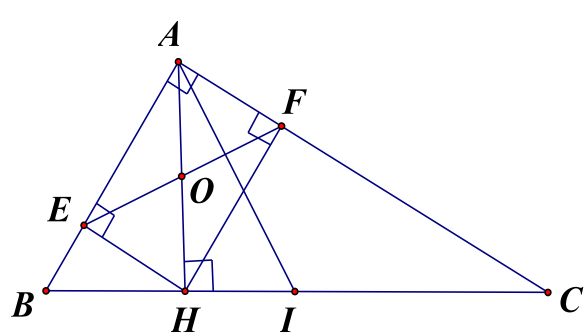
Mà E là trung điểm của FC $\Rightarrow K, H, E$ thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Tứ giác $EAFH$ là hình gì?

b) Qua A kẻ đường vuông góc với EF, cắt BC ở I. Chứng minh I là trung điểm của BC.

Bài giải



a) Ta có: $\begin{cases}\widehat{A}=90^o\\ \widehat{AFH}=90^o\,(gt)\\ \widehat{AEH}=90^o\,(gt)\end{cases}\Rightarrow EAFH$ là hình chữ nhật (vì tứ giác có ba góc vuông)

b) Trong tam giác AHB ta có $\widehat{B}+\widehat{BAH}=90^o$, mà $\widehat{BAH}+\widehat{HAF}=90^o$, suy ra $\widehat{B}=\widehat{HAF}\,(1)$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo EF và AH của hình chữ nhật $AEHF$ thì $OA=OF$, do đó ΔOAF cân ở O nên $\widehat{OAF}=\widehat{OFA}\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B}=\widehat{AFE}$

Mặt khác ta lại có $\widehat{B}+\widehat{C}=90^o$ và $\widehat{IAC}+\widehat{AFE}=90^o$, từ đó ta có $\widehat{IAC}=\widehat{ICA}$, do đó ΔAIC cân tại I nên $IA=IC$.

Tương tự $IB=IA$, do đó $IB=IC$.

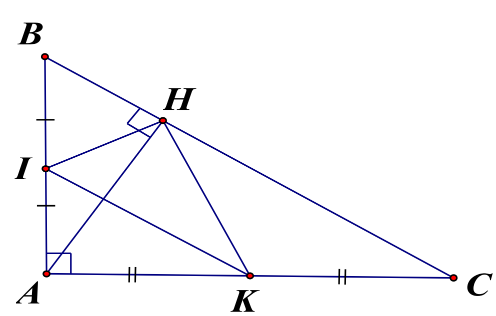
Dạng 3: Vận dụng định lý thuận và định lý đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

a) $\widehat{IHK}=90^0$;

b) Chu vi ΔIHK bằng nửa chu vi ΔABC.

Bài giải



a) Ta có ΔBHA vuông tại H (gt) $\Rightarrow IH=IA=IB$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB)

$\Rightarrow \Delta IAH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IHA}=\widehat{IAH}$ (hai góc ở đáy bằng nhau)(1)

Tương tự $\widehat{KHA}=\widehat{HAK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IHA}+\widehat{KHA}=\widehat{IAH}+\widehat{HAK}=90^o$ (gt)

Vậy $\widehat{IHK}=90^o$.

b) Ta có:

$HI=\dfrac{AB}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông AHB)(3)

$IK=\dfrac{AC}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông AHC)(4)

$IK=\dfrac{AC}{2}$ (đường trung bình của tam giác ABC)(5)

Từ (3), (4), (5) suy ra : $P_{IHK}=IH+HK+IK=\dfrac{AB}{2}+\dfrac{AC}{2}+\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{P_{ABC}}{2}$.

Vậy chu vi ΔIHK bằng nửa chu vi ΔABC.

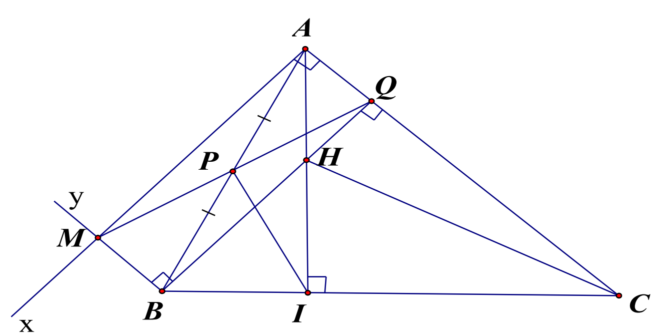
Bài 7: Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

a) Tứ giác $AMBQ$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng $CH\perp AB$.

c) Chứng minh tam giác PIQ cân.

Bài giải



a) Ta có: $\begin{cases} \widehat{AQB} = 90^o \\ \widehat{MAQ} = 90^o \\ \widehat{MBQ} = 90^o \end{cases} \Rightarrow AMBQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC(gt) \\ BQ \perp AC(gt) \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABC (vì H là giao điểm của hai đường cao)

Suy ra $CH \perp AB$.

c) Ta có:

$PQ = \dfrac{AB}{2}$ (vì PQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ABQ)

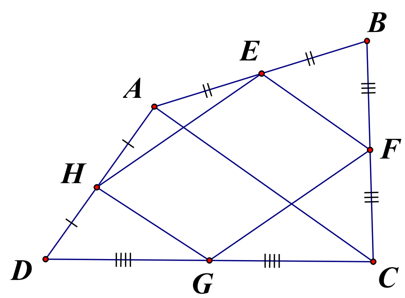
$PI = \dfrac{AB}{2}$ (vì PQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông AIB)

Từ (1) và (2) suy ra $PQ = PI \Leftarrow \Delta PIQ$ cân tại P.

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Bài 8: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật?

Bài giải



Ta có: $\begin{cases} EA = EB(gt) \\ FB = FC(gt) \end{cases} \Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔBAC $\Rightarrow EF // AC$ và $EF = \dfrac{1}{2}AC$ (1)

Ta có: $\begin{cases} HA = HD(gt) \\ GC = GD(gt) \end{cases} \Rightarrow HG$ là đường trung bình của ΔDAC $\Rightarrow HG // AC$ và $HG = \dfrac{1}{2}AC$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $EF // HG$ và $EF = HG$

Vậy $EFGH$ là hình bình hành (3)

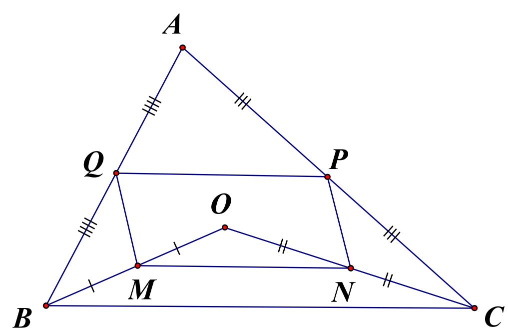
Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì $\widehat{HEF}=90^o \Rightarrow HE\perp EF \Rightarrow AC\perp BD$.

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài giải



a) Ta có:

PQ là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow PQ//BC, PQ=\frac{1}{2}BC$ (1)

MN là đường trung bình của tam giác OBC $\Rightarrow MN//BC, MN=\frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $QP//MN, QP=MN$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

b) Để $MNPQ$ là hình chữ nhật thì cần $\widehat{QMN}=90^o$

Mà $MN//BC \Rightarrow QM\perp BC$

Hơn nữa: $QM//AO$ nên $AO\perp BC$.

Vậy để $MNPQ$ là hình chữ nhật là O nằm trên đường cao xuất phát từ đỉnh A của ΔABC.

B.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

B.DẠNG BÀI NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY

*** Tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật**

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC. Vẽ $ME \perp AB, MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác DEF.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 8, BC = 6$. Điểm M nằm trong hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O là một giao điểm bất kì trong tam giác. Vẽ $OD \perp AB, OE \perp BC$ và $OF \perp CA$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = OD^2 + OE^2 + OF^2$

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$, đường chéo $AC = d$. Trên các cạnh AB, BC, CD và DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$

Bài 6. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = CE$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài DE.

*** Tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông**

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M. Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$ và $AH \perp BC$. Tính số đo của góc DHE.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AD. Vẽ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HB và HC.

a) Chứng minh rằng $EM \,//\, FN \,//\, AD$;

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì ba đường thẳng $EM, FN.AD$ là ba đường thẳng song song cách đều.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi M là trung điểm của BD. Chứng minh rằng tia HM là tia phân giác của góc AHC.

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 15, BC = 8$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$.

*** Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước**

Bài 11. Cho góc xOy có số đo bằng $30°$. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 2cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 2BA$. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm C di động trên đường nào?

Bài 12. Cho góc xOy có số đo bằng $45°$. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 3\sqrt{2}cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm G di động trên đường nào?

HƯỚNG DẪN

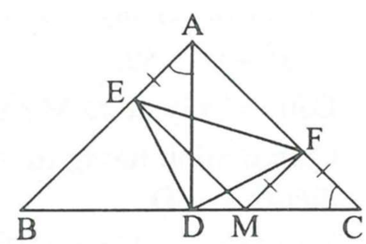
Bài 1. (h.5.10)

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật .

$\Rightarrow AE = MF$

Tam giác FMC vuông tại $F, \widehat{C} = 45°$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow CF = MF$. Do đó $AE = CF$.

Tam giác ABC vuông cân, AD là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác nên $AD = DC = \frac{1}{2}BC; \widehat{EAD} = \widehat{FCD} = 45°.$



Hình 5.10

$\Delta EDA = \Delta FDC(c.g.c) \Rightarrow DE = DF$ và $\widehat{EDA} = \widehat{FDC}$

Ta có: $\widehat{ADF} + \widehat{FDC} = 90° \Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{EDA} = 90°$ hay $\widehat{EDF} = 90°.$

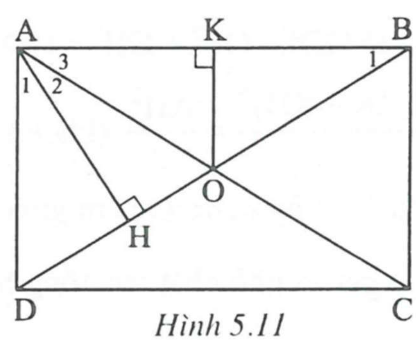
Do đó ΔDEF vuông cân $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} = 45°; \widehat{EDF} = 90°.$

Bài 2. (h.5.11)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OA = OC$

Vì $AD = \frac{1}{2}AC$ nên $AD = AO$

Vẽ $AH \perp OD, OK \perp AB.$



Hình 5.11

Xét ΔAOD cân tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, cũng là đường phân giác.

Do đó $HO = HD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$ nên $\widehat{A_3} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$.

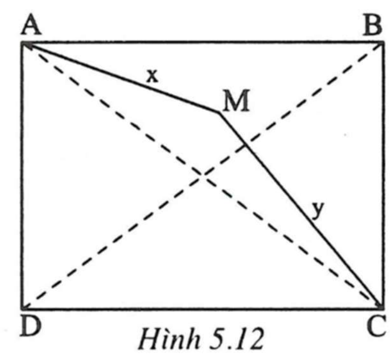
$\Delta AOK = \Delta AOH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \widehat{B_1} = 30°.$

Xét ΔABH vuông tại H có $\widehat{B_1} = 30°$ nên $\widehat{HAB} = 60°$ suy ra $\widehat{DAB} = 90°$.

Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Bài 3. (h.5.12)



Hình 5.12

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$

Ta đặt $MA = x, MC = y$.

Xét ba điểm M, A, C ta có: $MA + MC \geq AC$

do đó $x + y \geq 10 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 100$ hay $x^2 + y^2 + 2xy \geq 100.$ (1)

Mặt khác, $(x - y)^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2(x^2 + y^2) \geq 100$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 50.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa A và C và $MA = MC \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AC .

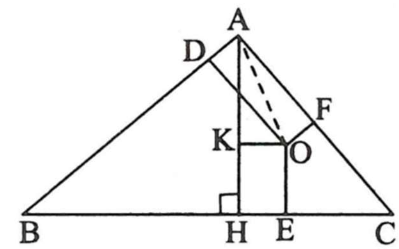
Chứng minh tương tự, ta được: $MB^2 + MD^2 \geq 50$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD .

Vậy $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 \geq 100.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của tổng S là 100 khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Bài 4. (h.5.13)

Vẽ $AH \perp BC, OK \perp AH$..



Hình 5.13

Tứ giác $ADOF$ và $KOEH$ là hình chữ nhật nên $OF = AD$ và $OE = KH$.

Xét ΔAOD vuông tại D, ta có

$OD^2 + AD^2 = OA^2 \geq AK^2$.

Do đó $OD^2 + OF^2 + OE^2 = OD^2 + AD^2 + OE^2 \geq AK^2 + KH^2$

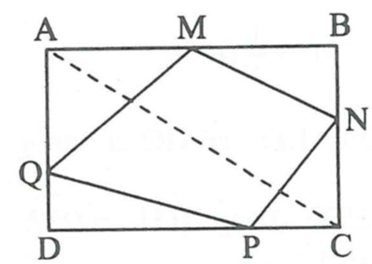
$\geq \dfrac{(AK + KH)^2}{2} = \dfrac{AH^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O$ nằm giữa A và H và $AK = KH \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là $\dfrac{AH^2}{2}$ khi O là trung điểm của AH.

Bài 5. (h.5.14)

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên



Hình 5.14

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:

$MN^2 = BM^2 + BN^2; NP^2 = CN^2 + CP^2;$

$PQ^2 = DP^2 + DQ^2; QM^2 = AQ^2 + AM^2$.

Do đó: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$

$$= \left(AM^2 + BM^2\right) + \left(BN^2 + CN^2\right) + \left(CP^2 + DP^2\right) + \left(DQ^2 + AQ^2\right)$$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b$), ta được:

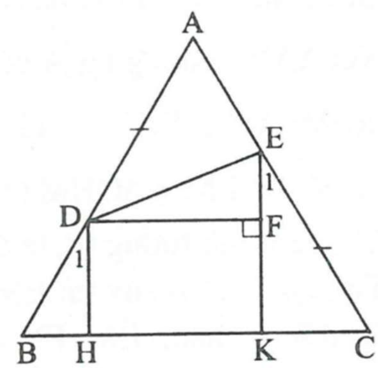
$$S \geq \frac{(AM + BM)^2}{2} + \frac{(BN + CN)^2}{2} + \frac{(CP + DP)^2}{2} + \frac{(DQ + AQ)^2}{2}$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + \frac{CD^2}{2} + \frac{AD^2}{2} = \frac{2\left(AB^2 + BC^2\right)}{2} = AC^2 = d^2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là d^2 khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh hình chữ nhật.

Bài 6. (h.5.15)

Vẽ $DH \perp BC, EK \perp BC$ và $DF \perp EK$



Hình 5.15

Tứ giác $DFKH$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Suy ra $DF = HK$.

ΔHBD vuông tại H có $\widehat{B} = 60°$ nên

$\widehat{D_1} = 30° \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BD.$

ΔKCE vuông tại K có $\widehat{C} = 60°$ nên $\widehat{E}_1 = 30° \Rightarrow CK = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}AD.$

Ta có: $DE \geq DF = HK = BC - (BH + KC) = BC - \left(\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AD\right) = BC - \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$

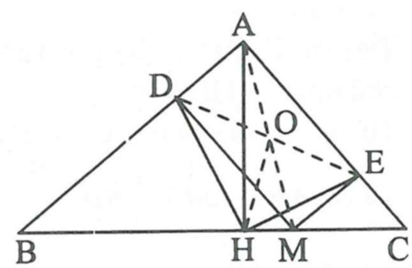
Vậy giá trị nhỏ nhất của DE là $\frac{a}{2}$ khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Bài 7. (h.5.16)

Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $AM = DE$.

Gọi O là giao điểm của AM và DE , ta có:

$OA = OM = OD = OE.$



Hình 5.16

Xét ΔAHM vuông tại H , ta có: $HO = \frac{1}{2}AM$

$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}DE.$

Xét ΔHDE có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE mà $HO = \frac{1}{2}DE$ nên ΔHDE vuông tại $H \Rightarrow \widehat{DHE} = 90°.$

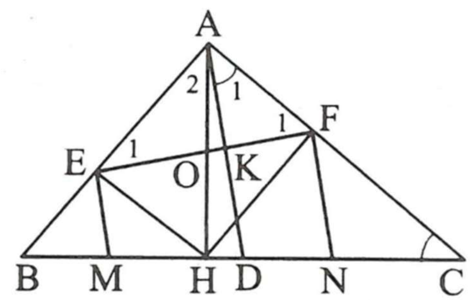
Bài 8. (h.5.17)

a) Tứ giác $AFHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow OA = OF = OH = OE.$

Xét ΔABC vuông tại A có AD là đường trung tuyến nên

$AD = DB = DC.$



Hình 5.17

ΔDAC cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}.$

Mặt khác, $\widehat{C} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$);

$\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân)

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}.$

Gọi K là giao điểm của AD và EF .

Xét ΔAEF vuông tại A có $\widehat{E_1} + \widehat{F_1} = 90° \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{F_1} = 90° \Rightarrow \widehat{K} = 90°$.

Do đó: $AD \perp EF$, (1)

Ta có: $\Delta OEM = \Delta OHM\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OHM} = 90° \Rightarrow EM \perp EF.$ (2)

Chứng minh tương tự, ta được: $FN \perp EF.$ (3)

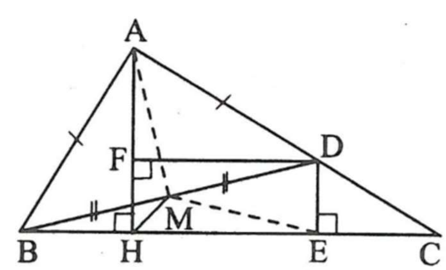
Từ (1), (2), (3) suy ra: $EM \mathbin{//} FN \mathbin{//} AD$ (vì cùng vuông góc với EF).

b) Ba đường thẳng EM, FN và AD là ba đường thẳng song song cách đều

$\Leftrightarrow KF = KE \Leftrightarrow K \equiv O \Leftrightarrow AD \equiv AH \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân.

Bài 9. (h.5.18)

Vẽ $DE \perp BC, DF \perp AH$.



Hình 5.18

ΔHAB và ΔFDA có: $\widehat{H} = \widehat{F} = 90°$; $AB = AD$;

$\widehat{HAB} = \widehat{FDA}$ (cùng phụ với $\widehat{FAD}$).

Do đó $\Delta HAB = \Delta FDA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AH = FD.$ (1)

Tứ giác $FDEH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow HE = FD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = HE.$

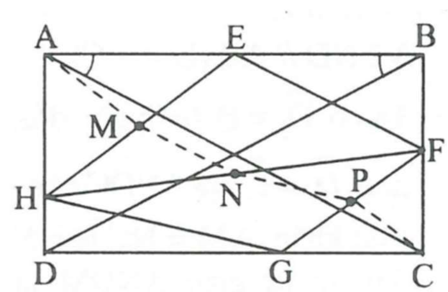
Ta có $AM = EM = \dfrac{1}{2}BD.$

$\Delta AHM = \Delta EHM\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{EHM}.$

Do đó tia HM là tia phân giác của góc AHC

Bài 10. (h.5.19)

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của HE, HF và FG



Hình 5.19

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$EF = 2MN; FG = 2CP; GH = 2NP; HE = 2AM.$

Do đó chu vi của hình tứ giác $EFGH$ là:

$EF + FG + GH + HE = 2\left(AM + MN + NP + PC\right).$

Xét các điểm $A, M, \mathrm{N}, \mathrm{P}, \mathrm{C}$, ta có: $\mathrm{AM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NP} + \mathrm{PC} \geq AC$ (không đổi).

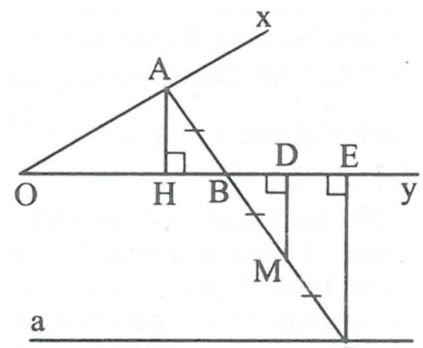
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AC = 17.$

Vậy chu vi của tứ giác $EFGH \geq 2.17 = 34$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M, N, P$ nằm trên AC theo thứ tự đó $\Leftrightarrow EF \,//\, AC \,//\, HG$ và $HE \,//\, BD \,//\, FG$).

Do đó giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$ là 34.

Bài 11. (h.5.20)

Gọi M là trung điểm của BC.



Hình 5.20

Vẽ $AH \perp Oy, MD \perp Oy$ và $CE \perp Oy$.

Xét ΔAOH vuông tại H, có $\widehat{O} = 30°$ nên

$$AH = \frac{1}{2}OA = 1cm.$$

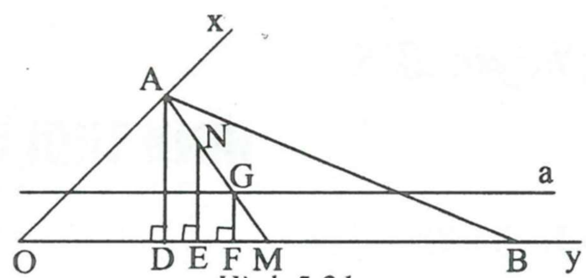
$$\Delta MDB = \Delta AHB \Rightarrow MD = AH = 1cm.$$

Xét ΔBCE, dễ thấy MD là đường trung bình nên $CE = 2MD = 2cm.$

Điểm C cách Oy một khoảng là $2cm$ nên C di động trên đường thẳng $a // Oy$ và cách Oy là $2cm$.

Bài 12. (h.5.21)

Gọi M là trung điểm của OB.



Hình 5.21

Khi đó $G \in AM$ và $AG = 2GM$.

Gọi N là trung điểm của AG, ta được $AN = NG = GM$.

Vẽ AD, NE, GF cùng vuông góc với Oy.

Ba đường thẳng AD, NE và GF là ba đường thẳng song song cách đều nên $DE = EF = FM$.

Ta đặt $FG = x$ thì $EN = 2x$ và $EN = \dfrac{FG + AD}{2}$. Do đó $2x = \dfrac{x + AD}{2} \Rightarrow AD = 3x$.

Xét ΔDOA vuông cân tại $D \Rightarrow OA^2 = 2DA^2$.

Do đó $2DA^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow DA = 3(cm) \Rightarrow FG = 1cm.$

Điểm G cách Oy một khoảng không đổi là $1cm$ nên điểm G di động trên đường thẳng $a // Oy$ và cách Oy là $1cm$.

C.PHIẾU TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

PHIẾU SỐ 1

Dạng 1. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ?

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho AP = CQ. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$). Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của hình chữ nhật để chứng minh các tính chất hình học

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho EF = EC. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và AD tại h và K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AHFK là hình chữ nhật;

b) AF song song với BD;

c) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh AB. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của EF, FD, BE, BD. Chứng minh IN = KM.

Dạng 3. Sử dụng định lí thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

a) $\widehat{IHK} = 90^0$.

b) Chu vi ΔIHK bằng nửa chu vi ΔABC.

Bài 6. Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia *Ax* vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

a) Tứ giác AMBQ là hình gì ?

b) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

c) Chứng minh tam giác PIQ cân.

Dạng 4. Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để tứ giác EFGH là hình chữ nhật ?

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm O để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Dạng 5 .Tổng hợp

Bài 9. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC. Lấy E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.

a) Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh HG = GK = KE.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB (DA = DB) và ACE (EA = EC). Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, và K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.

c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

Bài 11. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân.

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật.

Bài 12. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$) có các điểm E và F thuộc cạnh AD sao cho AE = DF và $\widehat{BFC} = 90^0$. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$.

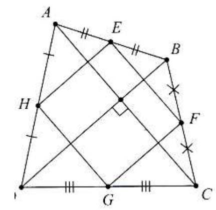
HƯỚNG DẪN

1.

Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác

Chứng minh: HEFG là hình bình hành và EF ⊥ HE

$\Rightarrow$ HEFG là hình chữ nhật.



2.

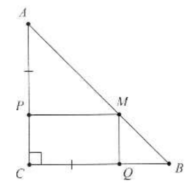
Chứng minh: PM = CQ

Mà PM//CQ

$\Rightarrow$ PCQM là hình bình hành

Lại có: $\widehat{C} = 90^0$

$\Rightarrow$ PCQM là hình chữ nhật



3.

a) $\widehat{FHA} = \widehat{HAK} = \widehat{AKF} = 90^0$

$\Rightarrow$ AHFK là hình chữ nhật.

b) Gọi là giao điểm của AC và BD. Chứng minh OE là đường trung bình của ΔACF

$\Rightarrow$ AF//OE

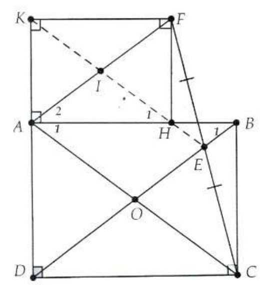
$\Rightarrow$ AF/BD

c) Gọi I là giao điểm của AF và HK.

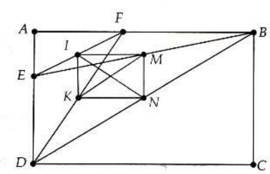
Chứng minh

$\widehat{H_1} = \widehat{A}_1 (\widehat{H_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_1} = \widehat{A_1}) \Rightarrow KH // AC$ mà KH đi qua trung điểm I của AF $\Rightarrow$ KH đi qua trung điểm của FC.

Mà E là trung điểm của FC $\Rightarrow$ K, H, E thẳng hàng.



4. HS chứng minh IMNK là hình chữ nhật $\Rightarrow$ IN = KM

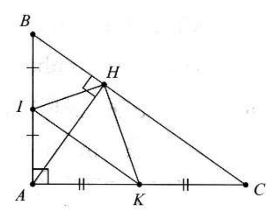


5. a) Chứng minh:

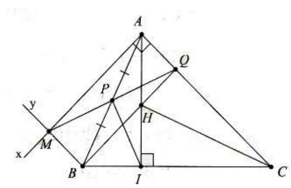
$\widehat{IAH} = \widehat{IHA}, \widehat{HAK} = \widehat{AHK}$

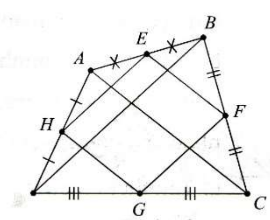
$\Rightarrow \widehat{IHA} + \widehat{AHK} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{IHK} = 90^0$



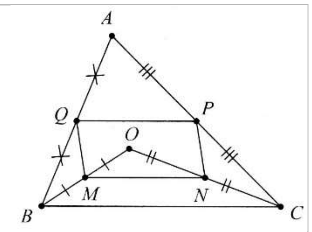
b) Chú ý: Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác và sử dụng.





c) HS tự chứng minh

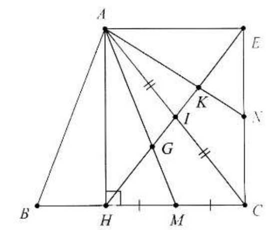
6.



a) HS tự chứng minh AMBQ là hình chữ nhật (ahi đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và bằng nhau)

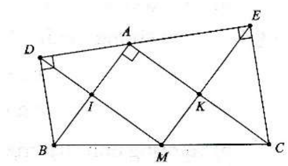
b) Sử dụng tính chất trực tâm tam giác.

c) Sử dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh



$PI = PQ = \frac{1}{2}AB.$

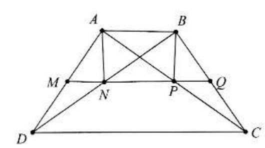
7. Chứng minh EFGH là hình bình hành. Để EFGH là hình chữ nhật thì



$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^0 \Rightarrow HE \perp EF$

$\Rightarrow$ AC $\perp$BD.

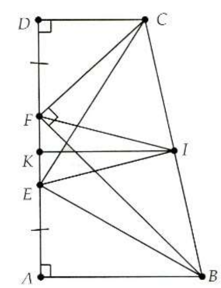
8.



a) HS tự chứng minh

b) O nằm trên đường cao xuất phát từ đỉnh A của ΔABC

9.



a) Chứng minh: AHCE là hình bình hành; $\widehat{AHC} = 90^0$

$\Rightarrow$ AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh G, K lần lượt là các trọng tâm của tam giác AHC, AEC và sử dụng tính chất 2 đường chéo của hình chữ nhật.

10.

a) Chứng minh $\widehat{DEA} = 180^0$

b) Chứng minh

$\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = \widehat{IAK} = 90^0$

c) Chứng minh ΔDME có $\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^0$

$\Rightarrow$ ΔDME vuông cân ở M.

11.

a) HS tự chứng minh hình thang ABPN có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

c) Cần thêm điều kiện NP = AB suy ra DC = 3AB.

12.

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, AD. Chú ý ΔFEI cân ở I. Chứng minh: UIE =IB = IC $\Rightarrow \Delta$EBC vuông tại E $\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$	

PHIẾU SỐ 2

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật.

Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc tại O. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng:

a) $OE + \text{OF} + OH + OG$ bằng nửa chu vi tứ giác $ABCD$.

b) Tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

Bài 2: Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng của H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, EC. Các đường thẳng AM, AN cắt HE lần lượt tại G và K.

a) Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $HG = GK = KE$.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB $(DA = DB)$ và $ACE(EA = EC)$. Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật.

c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

Dạng 2: Áp dụng tính chất hình chữ nhật để chứng minh các tính chất hình học.

Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Nối C với một điểm E bất kì trên đường chéo BD.Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH, FK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB, AD tại H và K. Chứng minh:

a) Tứ giác $AHFK$ là hình chữ nhật.

b) AF song song với BD.

c) Ba điểm E,H,K thẳng hàng.

Bài 5: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh AB. Gọi I,K,M,N theo thứ tự là trung điểm của EF, FD, BE, BD. Chứng minh $IN = KM$.

Bài 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC, I là trung điểm của AE, M là trung điểm của CD, H là trung điểm của BE.

a. Chứng minh rằng $CH // IM$

b. Tính góc $\widehat{BIM}$.

Dạng 3: Vận dụng định lý thuận và định lý đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I,K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

a) $\widehat{IHK} = 90^o$

b) Chu vi ΔIHK bằng nửa chu vi ΔABC.

Bài 8: Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường thẳng MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

a) Tứ giác $AMBQ$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

c) Chứng minh rằng tam giác PIQ cân.

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật.

Bài 9: Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 10: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

Bài 11: Cho hình thang cân $ABCD\left(AB // CD, AB < CD\right)$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

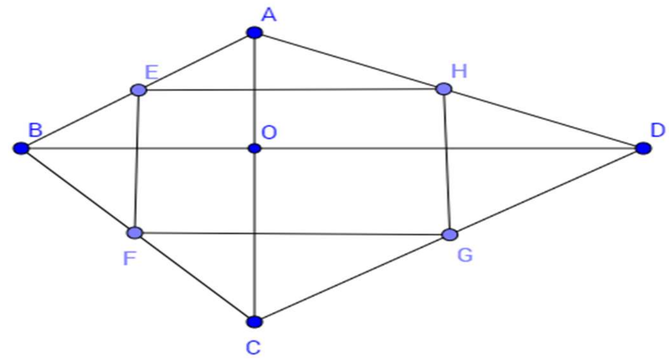
a) Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác $ABPN$ là hình thang cân.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa AB, CD để $ABPN$ là hình chữ nhật.

HƯỚNG DẪN

Bài 1:



a) $OE + \mathrm{OF} + OH + OG = \frac{1}{2}\left(AB + BC + CD + DA\right) = \frac{1}{2}P_{ABCD}$

b) Dựa vào tính chất đường trung bình ta chứng minh:

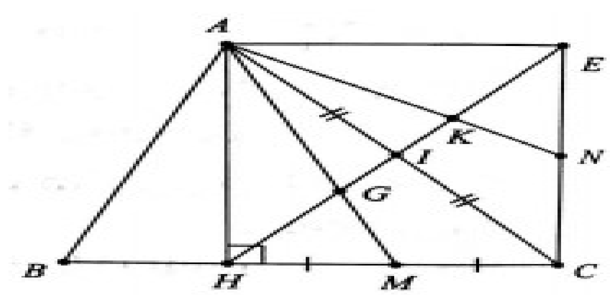
$\begin{cases} EF = HG\left(=\frac{1}{2}AC\right) \\ EF // HG\left(//AC\right) \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.(*)

Dễ có

$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC // EF \end{cases} \Rightarrow EF \perp BD$ mà $BD // EH$ nên $EF \perp EH$ suy ra $\widehat{FEH} = 90^o$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra Tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật (DHNB).

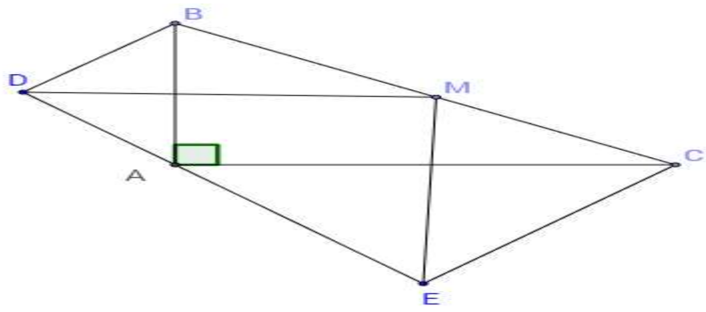
Bài 2:



a) Chứng minh: $AHCE$ là hình bình hành; $\widehat{AHC} = 90^o$, suy ra $AHCE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh G, K lần lượt là trọng tâm của $\Delta AHC, \Delta AEC$ và sử dụng tính chất hai đường chéo hình chữ nhật suy ra dpcm.

Bài 3:



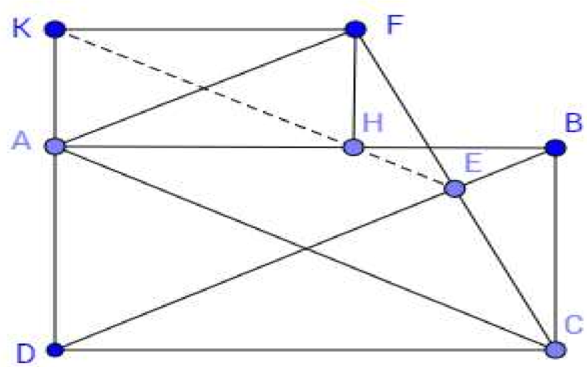
a) Chứng minh $\widehat{DAE} = 180^o$

b) Chứng minh

$\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = \widehat{IAK} = 90^o$

c) Chứng minh ΔDME có $\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^o$

Bài 4:



a) $\widehat{FHA} = \widehat{HAK} = \widehat{AKF} = 90^o$ suy ra $AHFK$ là hình chữ nhật.

b) Gọi $\{O\} = AC \cap BD$

Chứng minh OE là đường trung bình của tam giác $ACF \Rightarrow$ $AF // OE \Rightarrow AF // BD.$

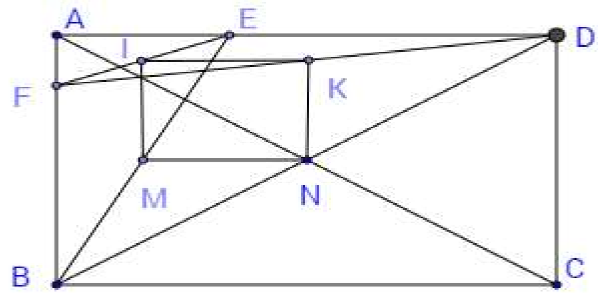
c) Gọi I là giao điểm của AF và HK

Chứng minh $\widehat{H_1} = \widehat{A_1}\left(= \widehat{A_2} = \widehat{B_1}\right)$ Suy ra

$KH // AC,$ mà KH đi qua trung điểm I của AF nên sẽ đi qua trung điểm của FC.

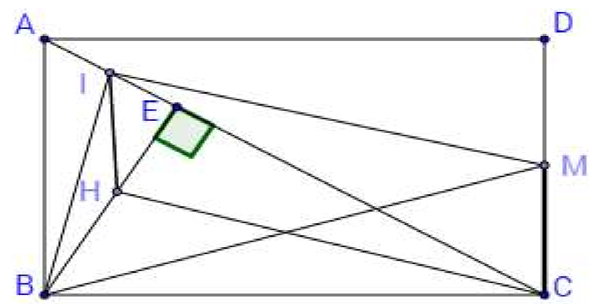
Mà E là trung điểm của FC $\Rightarrow K, H, E$ thẳng hàng.

Bài 5:



Dễ có dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác ta chứng minh $IMNK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IN = KM$.

Bài 6:

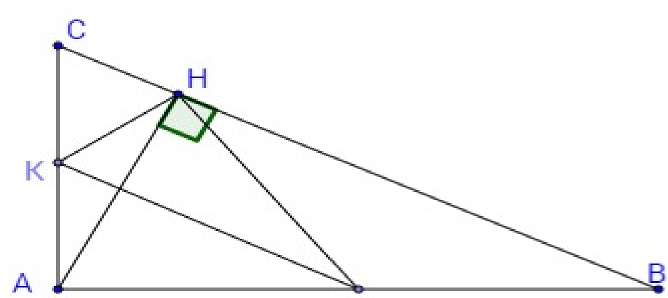


a) Dựa vào tính chất đường trung bình ta có $\begin{cases} IH // AB \\ IH = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}; \begin{cases} CM // AB \\ CM = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH // \text{CM} \\ IH = CM \end{cases} \Rightarrow IMCH$ là hình bình hành (dhnb)

b) Dễ có H là trực tâm của tam giác ΔIBC nên $CH \perp IB$

Theo câu a) ta có $CH // IM$ suy ra $IM \perp IB \Rightarrow \widehat{BIM} = 90^o$

Bài 7:



I

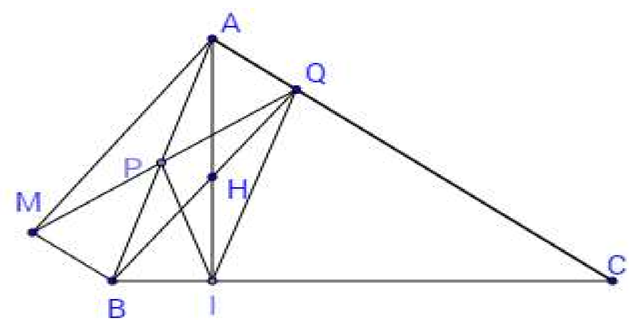
a) Dựa vào tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông đối với hai tam giác $\triangle HCA; \triangle HAB$

ta có: $HK = KC = KA; HI = IB = IA \Rightarrow \triangle IHA; \triangle KHA$ lần lượt cân tại I, K

Do vậy $\widehat{KHI} = \widehat{KHA} + \widehat{AHI} = \widehat{KAH} + \widehat{HAI} = \widehat{CAB} = 90^{o?}$

b) $P_{IHK} = IH + IK + KH = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(AB + AC + CB) = \frac{1}{2}P_{ABC}$

Bài 8:

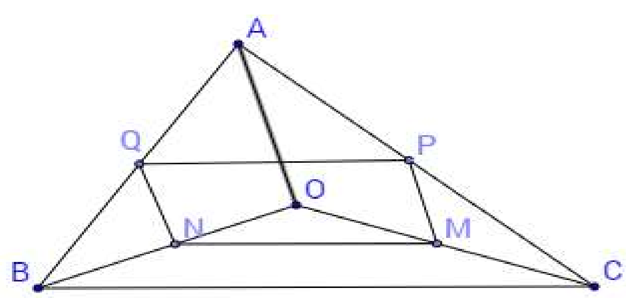


a) Ta chứng minh tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và bằng nhau)

b) Tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AQB} = 90^o \Rightarrow BQ \perp AC$ mà $AI \perp BC$ nên H là trực tâm tam giác ABC.

c) Ta chứng minh $PI = \frac{1}{2}AB; PQ = \frac{1}{2}MQ = \frac{1}{2}AB$.

Bài 9:

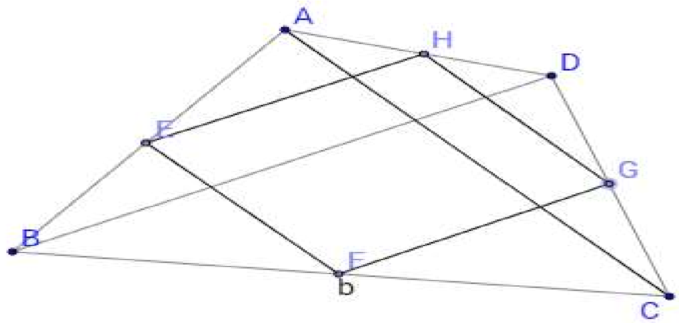


a) Dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác ta suy ra $\begin{cases} QN \mathbin{//} AO \\ PM \mathbin{//} AO \\ QN = PM = \frac{1}{2}AO \end{cases}$

nên tứ giác $QNMP$ là hình bình hành.

b) Để hình bình hành $QNMP$ thành hình chữ nhật khi $\widehat{NQP}=90^o \Leftrightarrow NQ\perp QP$ mà $\begin{cases} NQ // AO \\ QP // BC \end{cases} \Rightarrow AO\perp BC \Rightarrow O$ thuộc đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC .

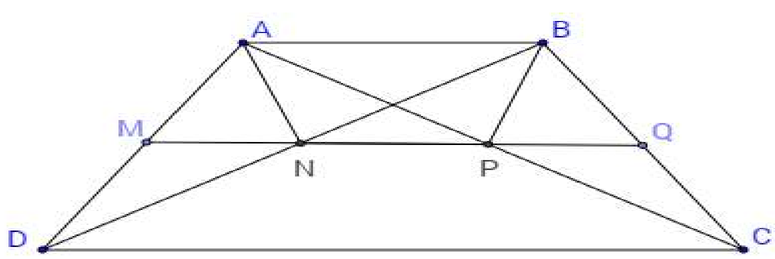
Bài 10:



Dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác ta có tứ giác $HGFE$ là hình bình hành.

Do vậy, tứ giác đó muốn trở thành hình chữ nhật thì $\widehat{EHG}=90^o \Rightarrow HC\perp EH$ mà $HC // AC; EH // BD \Rightarrow AC\perp BD$ .Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc thì tứ giác $HGFE$ là hình chữ nhật.

Bài 11:



a) Ta chứng minh qua điểm M nằm ngoài đường thẳn DC có $\begin{cases} MN // DC \\ MP // DC \\ MQ // DC \end{cases} \Rightarrow M, N, P, Q$ thẳng hàng.

b) Ta có $\begin{cases} NP // \text{AB} \\ \text{AP=NB=}\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}DB \end{cases} \Rightarrow ABPN$ là hình thang cân.

c) $ABPN$ là hình chữ nhật khi $AB=NP$

ta có $DC=2MQ-AB=2(MN+NP+PQ)-AB=2\left(\frac{1}{2}AB+AB+\frac{1}{2}AB\right)-AB=3AB$.