

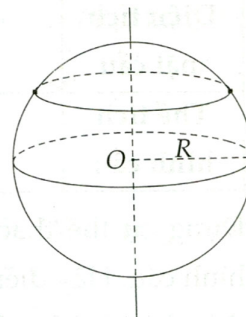
DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CẦU

A. TRỌNG TÂM CƠ BẢN CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hình cầu

- Khi quay nửa hình tròn tâm O , bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định ta thu được một hình cầu.
- Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo thành một mặt cầu.
- Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu đó.



Hình 1

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn, trong đó:
 - + Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là đường tròn lớn).

3. Diện tích, thể tích

Cho hình cầu bán kính R .

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức $S = 4\pi R^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ để tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan.

1.1. Điền vào các ô trống trong bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,4 mm	6dm	0,2 m	100 km	6hm	50 dam
Diện tích mặt cầu						

Thể tích hình cầu						
--------------------------	--	--	--	--	--	--

1.2. Dụng cụ thể thao các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7mm				6,1 cm
Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích			$1697 \pi \text{ cm}^2$		
Thể tích				36 nem^3	

2.1. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

2.1. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $1007 \pi \text{ m}^2$. Tính thể tích hình cầu đó.

Dạng 2. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng các công thức trên và các kiến thức đã học để tính các đại lượng chưa biết rồi từ đó tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.

3.1. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa đường tròn tại A và B. Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a) Chứng minh MON và APB là hai tam giác vuông đồng dạng.

b) Chứng minh $AM \cdot BN = R^2$.

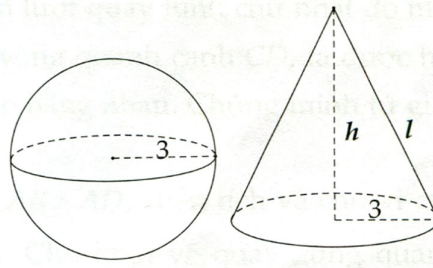
c) Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \frac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh AB sinh ra.

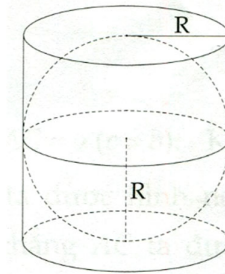
3.2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC.

III. BÀI TẬP CƠ BẢN VỀ NHÀ

4. Một hình cầu có bán kính 3cm. Một hình nón cũng có bán kính đáy bằng 3cm và có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu. Tính chiều cao của hình nón.



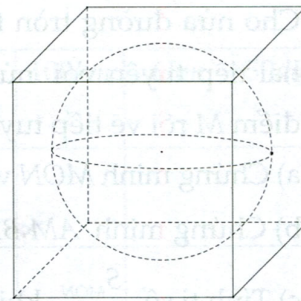
5. Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa:



a) Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ;

b) Thể tích hình cầu và thể tích hình trụ.

6. Cho một hình cầu và một hình lập phương ngoại tiếp nó. Tính tỉ số phần trăm giữa:



a) Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình lập phương;

b) Thể tích hình cầu và thể tích của hình lập phương.

7. a) Tìm diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu, biết bán kính của hình cầu là 4cm.

b) Thể tích của một hình cầu là $512\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích mặt cầu đó.

HƯỚNG DẪN

1.1. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,4mm	6dm	0,2m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu	$\frac{16}{25}\pi$ mm ²	144π dm ²	$\frac{4}{25}\pi$ m ²	40000π km ²	144π hm ²	10000π dam ²
Thể tích hình cầu	$\frac{32\pi}{375}$ mm ³	288π dm ³	$\frac{4}{375}\pi$ m ³	$\frac{4000000}{3}\pi$ km ³	288π hm ³	$\frac{500000}{3}\pi$ dam ³

1.2. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7mm	7,32cm	13cm	6cm	61cm
Độ dài đường tròn lớn	134,08 mm	23cm	13π	6π cm	61π mm
Diện tích	5728,03 mm ²	168,33 cm ²	169π cm ²	36π cm ²	3721π cm ²
Thể tích	40764,51 mm ³	205,36 cm ³	$\frac{2197}{6}\pi$ cm ³	36π cm ³	$\frac{226981}{6}\pi$ mm ³

2.1. Tính được $R = 3\text{cm}$

2.2. Tính được $V = \frac{500}{3}\pi m^3$

3.1. a), b) HS tự chứng minh.

c) $AM = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \frac{25}{16}$ d) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

3.2. Tính được $S = 2\pi a^2$

4.1. Tính được $h = 6\sqrt{2}\text{cm}$

5. a) Tính được $\frac{S}{S_{xq}} = 1$ b) Tính được $\frac{V_{hc}}{V_{ht}} = \frac{2}{3}$

6. a) Tính được $\frac{S}{S_{xq}} = 78,5\%$ b) Tính được $\frac{V_{hc}}{V_{hlp}} = 52,4\%$

7. a) Tính được $S = 64\pi\text{cm}^2$ và $V = \frac{256\pi}{3}\text{cm}^3$

b) Tính được $S = 211,32\pi\text{cm}^2$

B.NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY

• Tính diện tích

1. Mặt cắt chứa trục của một hình nón là một tam giác đều. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính bằng chiều cao của hình nón.

2. Cắt hình cầu tâm O bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn tâm K, đường kính AB. Biết $OK = 9\text{cm}$ và diện tích hình tròn tâm K bằng 16% diện tích mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu.

3. Người ta cắt một quả địa cầu cũ bằng một mặt phẳng theo một vĩ tuyến và được một phần có dạng hình chỏm, đường kính miệng chỏm là 24cm và độ sâu nhất của chỏm là 8cm. Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu.

• **Tính thể tích**

4. Một hình cầu nội tiếp một hình lập phương cạnh 12cm. Tính thể tích phần không gian bên ngoài hình cầu và bên trong hình lập phương.

5. Một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của một hình nón. Biết đường sinh của hình nón bằng 12cm và diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích mặt cầu. Tính thể tích hình cầu.

6. Một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Biết diện tích toàn phần hình trụ là $384\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hình cầu.

7. Một chiếc thuyền thúng có dạng nửa hình cầu, có khối lượng 45kg, người chèo thuyền khối lượng 65kg. Biết đường kính của thuyền là 1,2m và trên thuyền có thêm 2,4 tạ cá, hỏi nước có ngập đến mép thuyền không?

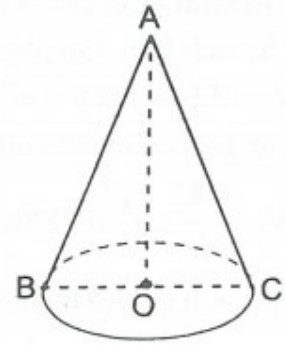
• **Tính độ dài, tính tỉ số**

8. Cho hình cầu tâm O, bán kính $OA = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. Cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng vuông góc với OA tại trung điểm M của OA ta được một đường tròn. Tính độ dài của đường tròn này.

9. Một hình cầu có số đo thể tích (tính bằng m^3) bằng số đo diện tích mặt cầu (tính bằng m^2). Tính độ dài của đường tròn lớn.

10. Một bình thủy tinh hình trụ chứa nước. Trong bình có một vật rắn hình cầu ngập hoàn toàn trong nước. Khi người ta lấy vật rắn đó ra khỏi bình thì mực nước trong bình giảm đi 48,6mm. Biết đường kính bên trong của đáy bình là 50mm, tính bán kính của vật hình cầu.

11. Vĩ độ của Thanh Hoá là 20° Bắc. Tính độ dài vĩ tuyến qua Thanh Hoá biết bán kính Trái Đất là 6370km.



HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Vì mặt cắt chứa trục của hình nón là một tam giác đều nên nếu gọi bán kính đáy hình nón là R thì độ dài đường sinh là $l = 2R$ và chiều cao

$$\text{của hình nón là } h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{\text{tp}} = \pi R(1 + R) = \pi R(2R + R) = 3\pi R^2.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu là: } S = \pi d^2 = \pi(R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2.$$

Vậy diện tích toàn phần hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính bằng chiều cao của hình nón.

2.

Xét ΔAOB cân tại O có $KA = KB$ nên $OK \perp AB$.

Gọi R là bán kính hình cầu, r là bán kính hình tròn (K).

Xét ΔKOA vuông tại K ta có:

$$r^2 = R^2 - OK^2 = R^2 - 81.$$

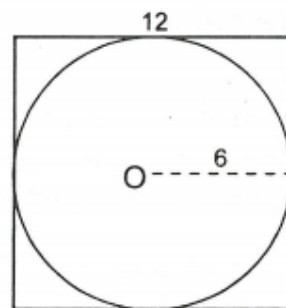
Diện tích hình tròn (K) là: $S_1 = \pi r^2 = \pi(R^2 - 81)$.

Diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi R^2$.

$$\text{Vì } S_1 = 16\%S_2 \text{ nên } \pi(R^2 - 81) = \frac{16}{100} \cdot 4\pi R^2$$

Thu gọn phương trình này ta được $36R^2 = 8100$. Suy ra $R^2 = 225$.

Do đó diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi$ (cm²).



3.

Mặt cắt qua tâm là hình tròn tâm O với AB là đường kính miệng chảo.

Vẽ bán kính $OC \perp AB$ tại K.

Ta có $KA = KB = 24 : 2 = 12$ (cm).

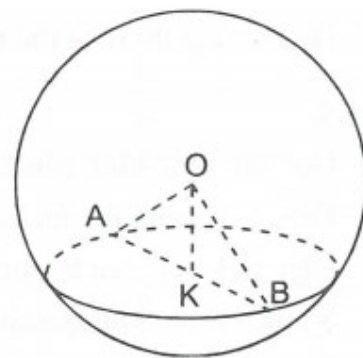
Gọi R là bán kính quả địa cầu.

Xét ΔKOA vuông tại K ta có:

$$OA^2 = OK^2 + AK^2 \Rightarrow R^2 = (R - 8)^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow R^2 = R^2 - 16R + 64 + 144 \Rightarrow 16R = 208 \Rightarrow R = 13(\text{cm})$$

Diện tích bề mặt quả địa cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 13^2 = 676\pi$ (cm²).



4.

Vì độ dài cạnh của hình lập phương là 12cm nên bán kính hình cầu nội tiếp là 6cm.

Thể tích hình lập phương là:

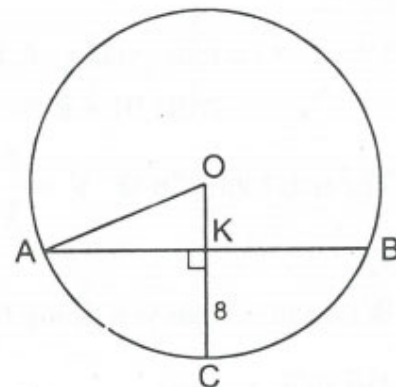
$$V_1 = 12^3 = 1728 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của hình cầu là:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích phần không gian bên ngoài hình cầu và bên trong hình lập phương là:

$$V = V_1 - V_2 = 1728 - 288\pi \approx 824 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Nhận xét: Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{288\pi}{1728} = \frac{\pi}{6}$.

Tổng quát, ta có thể chứng minh được rằng nếu một hình cầu nội tiếp một hình lập phương thì tỉ số thể tích của chúng là $\frac{\pi}{6}$.

5.

Gọi bán kính hình cầu cũng như bán kính đáy hình nón là R .

Diện tích xung quanh hình nón là: $\pi R l = 12\pi R$.

Diện tích mặt cầu là: $4\pi R^2$.

Vì diện tích xung quanh hình nón bằng diện tích mặt cầu nên

$$12\pi R = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3(\text{cm}).$$

Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi(\text{cm}^3)$.

6.

Gọi bán kính hình cầu là R thì bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao hình trụ là $2R$.

Vì diện tích toàn phần hình trụ là $384\pi \text{ cm}^2$ nên ta có:

$$2\pi R(2R + R) = 384\pi \Rightarrow 6\pi R^2 = 384\pi \Rightarrow R = 8(\text{cm}).$$

Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = \frac{2048\pi}{3}(\text{cm}^3)$

7.

Bán kính của thuyền thúng là: $1,2 : 2 = 0,6(\text{m}) = 6(\text{dm})$.

Thể tích của thuyền là: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 144\pi(\text{dm}^3) \approx 452\text{dm}^3$

Tổng Khối lượng của thuyền, người và cá là: $45 + 65 + 240 = 350(\text{kg})$

Khối lượng riêng của thuyền là: $350 : 452 = 0,8(\text{kg}/\text{dm}^3)$

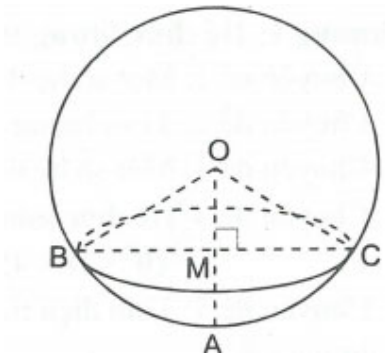
Khối lượng riêng của nước là: $1 \text{ kg}/\text{dm}^3$

Vậy khối lượng riêng của thuyền nhỏ hơn khối lượng riêng của nước nên nước không ngập đến mép thuyền.

8.

Xét ΔOBC có $OB = OC$ và $OM \perp BC$ nên $MB = MC$.

Ta có: $MC^2 = OC^2 - OM^2 = (10\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 225$.



Suy ra $MC = 15(\text{cm})$.

Độ dài của đường tròn (M) là: $2\pi.15 = 30\pi (\text{cm})$.

9.

Gọi bán kính của hình cầu là R.

Vì số đo thể tích bằng số đo diện tích mặt cầu nên ta có:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3(\text{m})$$

Độ dài của đường tròn lớn là: $C = 2\pi R = 2\pi.3 = 6\pi (\text{m})$.

10.

Gọi r là bán kính của vật hình cầu.

Thể tích của vật hình cầu là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Thể tích khối nước rút xuống là: $V_2 = \pi.50^2.48,6 = 121500\pi (\text{mm}^3)$.

Ta có phương trình: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 121500\pi \Rightarrow r^3 = 91125$

Do đó $r = \sqrt[3]{91125} = 45 (\text{mm})$.

11.

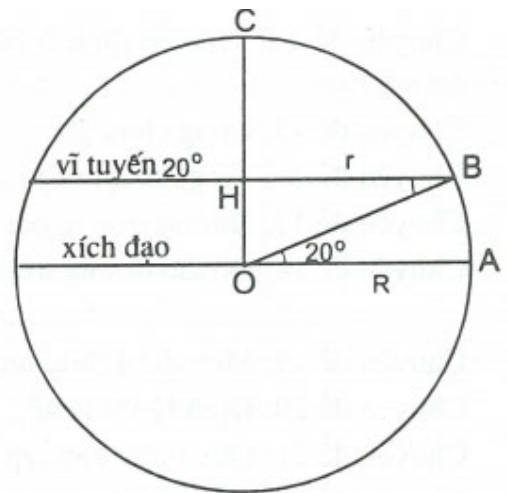
Gọi R là bán kính Trái Đất, gọi r là bán kính của vĩ tuyến 20° qua Thanh Hoá.

Ta có $\widehat{HBO} = \widehat{AOB} = 20^\circ$.

Xét ΔHBO vuông tại H có: $r = HB = OB \cos 20^\circ = R \cos 20^\circ$.

Do đó độ dài của vĩ tuyến 20° là:

$$2\pi r = 2\pi R \cos 20^\circ = 2\pi.6370.\cos 20^\circ \approx 37610 (\text{km}).$$



C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẦN XẠ

Câu 1. Cho hình cầu có đường kính $d = 6\text{cm}$. Diện tích mặt cầu là.

- A. $36\pi(\text{cm}^2)$. B. $9\pi(\text{cm}^2)$. C. $12\pi(\text{cm}^2)$. D. $36\pi(\text{cm})$.

Câu 2. Cho mặt cầu có thể tích $V = 288\pi(\text{cm}^3)$. Tính đường kính mặt cầu.

- A. 6cm . B. 12cm . C. 8cm . D. 16cm .

Câu 3. Cho mặt cầu có thể tích $V = 972\pi(\text{cm}^3)$. Tính đường kính mặt cầu.

- A. 18cm . B. 12cm . C. 9cm . D. 16cm .

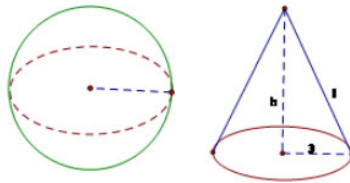
Câu 4. Cho mặt cầu có số đo diện tích bằng với số đo thể tích. Tính bán kính mặt cầu.

- A. 3. B. 6. C. 9. D. 12.

Câu 5. Cho mặt cầu có số đo diện tích bằng hai lần với số đo thể tích. Tính bán kính mặt cầu.

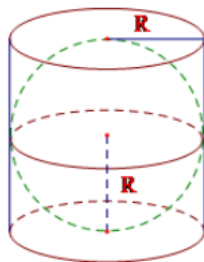
- A. 3. B. 6. C. 9. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho mặt cầu có bán kính 3cm . Một hình nón cũng có bán kính đáy bằng 3cm và có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu. Tính chiều cao của hình nón.



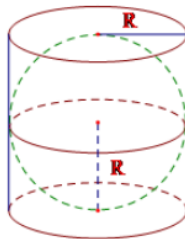
- A. 3. B. $6\sqrt{3}$. C. 72. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ.



- A. 3. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 8. Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ.



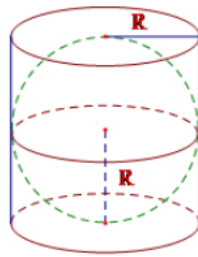
A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 2.

Câu 9. Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa thể tích hình cầu và thể tích hình trụ.



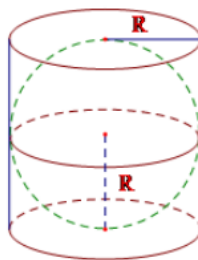
A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 10. Cho một hình cầu nội tiếp trong hình trụ. Biết rằng chiều cao của hình trụ bằng ba lần bán kính đáy và bán kính đáy của hình trụ bằng bán kính của hình cầu. Tính tỉ số giữa thể tích hình cầu và thể tích hình trụ.



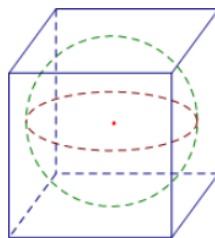
A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. 2.

Câu 11. Cho một hình cầu và một hình lập phương ngoại tiếp nó. Tính tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình lập phương.



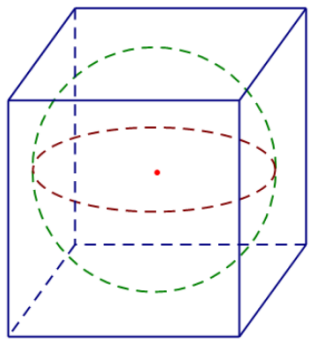
A. $\frac{6}{\pi}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 12. Cho một hình cầu và một hình lập phương ngoại tiếp nó. Nếu diện tích toàn phần của hình lập phương là $24cm^2$ thì diện tích mặt cầu là:



- A. 4π . B. 4. C. 2π . D. 2.

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại C có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC .

- A. $2\pi a^2$. B. $\frac{\pi a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{\pi a}{2}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông cân tại C có cạnh góc vuông bằng $6cm$. Tính diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC .

- A. $72(cm^2)$. B. $18\pi(cm^2)$. C. $36\pi(cm^2)$. D. $72\pi(cm^2)$.

Câu 15. Cho một tam giác ABC đều có cạnh $AB = 8cm$, đường cao AH . Khi đó thể tích hình cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn nội tiếp tam giác ABC một vòng quanh AH .

- A. $\frac{\pi a^3}{54}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{72}$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{54}$. D. $\frac{\pi a^3}{72}$.

Câu 16. Cho một tam giác ABC đều có cạnh $AB = 12cm$, đường cao AH . Khi đó thể tích hình cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn nội tiếp tam giác ABC một vòng quanh AH .

- A. $32\sqrt{3}$. B. $16\pi\sqrt{3}$. C. $8\pi\sqrt{3}$. D. $32\pi\sqrt{3}$.

Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4cm; AD = 3cm$. Tính diện tích mặt cầu thu được khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN với M là trung điểm AD, N là trung điểm BC

- A. 25π . B. $\frac{25\pi}{8}$. C. 25. D. $\frac{25\pi}{4}$.

Câu 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8cm; AD = 6cm$. Tính diện tích mặt cầu thu được khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN với M là trung điểm AD, N là trung điểm BC .

- A. $50\pi(cm^2)$. B. $100\pi(cm^2)$. C. $100(cm^2)$. D. $25\pi(cm^2)$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Vì đường kính $d = 6\text{cm}$ nên bán kính hình cầu $R = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 2. Đáp án B.

Ta có $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6\text{cm}$

Từ đó đường kính mặt cầu là $d = 2R = 2 \cdot 6 = 12\text{cm}$.

Câu 3. Đáp án A.

Ta có $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Rightarrow R^3 = 729 \Rightarrow R = 9\text{cm}$

Từ đó đường kính mặt cầu là $d = 2R = 2 \cdot 9 = 18\text{cm}$.

Câu 4. Đáp án A.

Từ giả thiết ta có $4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = 3R^2 \Rightarrow R = 3$.

Câu 5. Đáp án D.

Từ giả thiết ta có $4\pi R^2 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3}{2}R^2 \Rightarrow R = \frac{3}{2}$

Câu 6. Đáp án D.

Gọi l là độ dài đường sinh của hình nón.

Vì bán kính hình cầu và bán kính đáy của hình nón bằng nhau nên từ giả thiết ta có

$$4\pi R^2 = \pi Rl + \pi R^2 \Leftrightarrow 4R^2 = Rl + R^2 \Leftrightarrow 3R^2 = Rl$$

$$\Rightarrow l = 3R = 3 \cdot 3 = 9\text{cm}$$

Sử dụng công thức liên hệ trong hình nón ta có $h^2 = l^2 - R^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \Rightarrow h = 6\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 7. Đáp án B.

Vì đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính hình cầu nên $h = 2R$ với R là bán kính hình cầu và cũng là bán kính đáy của hình trụ.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$, diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$

Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ là $\frac{S}{S_{xq}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2} = 1$.

Câu 8. Đáp án C.

Vì đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính hình cầu nên $h = 2R$ với R là bán kính hình cầu và cũng là bán kính đáy của hình trụ.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$, diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = S_{xq} + 2\pi R^2 = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ là $\frac{S}{S_{tp}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$.

Câu 9. Đáp án A.

Vì đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng nhau và bằng đường kính hình cầu nên $h = 2R$ với R là bán kính hình cầu và cũng là bán kính đáy của hình trụ.

Thể tích hình cầu $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$; thể tích khối trụ $V_t = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

Tỉ số thể tích hình cầu và thể tích hình trụ là $\frac{V_c}{V_t} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$.

Câu 10. Đáp án B.

Từ đề bài suy ra chiều cao hình trụ là $h = 3R$ với R là bán kính hình cầu và cũng là bán kính đáy của hình trụ.

Thể tích hình cầu $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$; thể tích khối trụ $V_t = \pi R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3$

Tỉ số thể tích hình cầu và thể tích hình trụ là $\frac{V_c}{V_t} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{3\pi R^3} = \frac{4}{9}$

Câu 11. Đáp án C.

Vì hình cầu nội tiếp hình lập phương nên bán kính hình cầu $R = \frac{a}{2}$ với a là cạnh hình lập phương.

Khi đó ta có diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2$

Diện tích toàn phần của hình lập phương $S_{tp} = 6a^2$

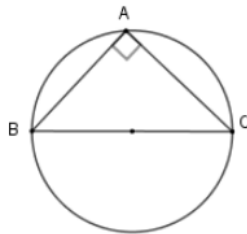
Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình lập phương là $\frac{S}{S_{tp}} = \frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 12. Đáp án A.

Vì hình cầu nội tiếp hình lập phương nên bán kính hình cầu $R = \frac{a}{2}$ với a là cạnh hình lập phương.

Diện tích toàn phần của hình lập phương $S_{tp} = 6a^2 = 24 \Leftrightarrow a = 2cm$

Suy ra $R = \frac{2}{2} = 1cm$

Câu 13. Đáp án A.

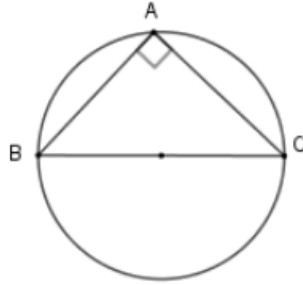
Vì tam giác ABC vuông tại A nên có đường tròn ngoại tiếp là đường tròn đường kính BC .

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \frac{BC}{2}$

Theo định lý Pytago ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC ta được hình cầu có bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 14. Đáp án A.



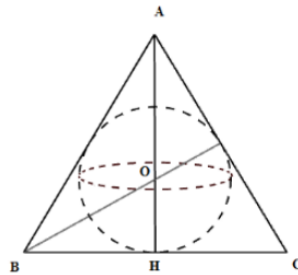
Vì tam giác ABC vuông tại A nên có đường tròn ngoại tiếp là đường tròn đường kính BC .

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \frac{BC}{2}$

Theo định lý Pytago ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2.6^2 \Rightarrow BC = 6\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC ta được hình cầu có bán kính $R = 3\sqrt{2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi (3\sqrt{2})^2 = 72\pi (cm^2)$.

Câu 15. Đáp án C.



Vì ΔABC là tam giác đều nên tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm O của tam giác.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp là $R = OH = \frac{AH}{3}$

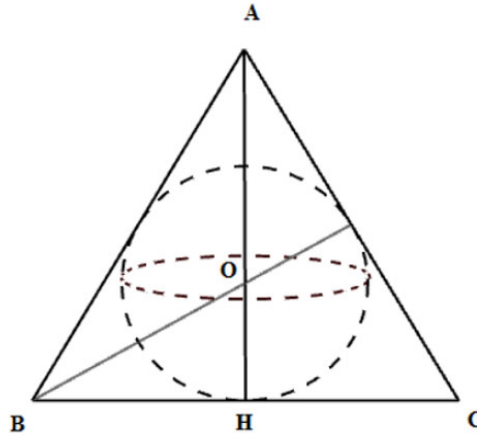
Xét tam giác vuông $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Khi quay nửa đường tròn nội tiếp tam giác ABC một vòng quanh AH ta được hình cầu bán

$$\text{kính } R = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{54}.$$

Câu 16. Đáp án D.



Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm O của tam giác.

$$\text{Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp là } R = OH = \frac{AH}{3}$$

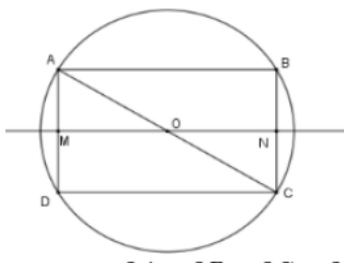
$$\text{Xét tam giác vuông } AH^2 = AB^2 - BH^2 = 12^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 108 \Rightarrow AH = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } R = \frac{AH}{3} = 2\sqrt{3}$$

Khi quay nửa đường tròn nội tiếp tam giác ABC một vòng quanh AH ta được hình cầu bán

$$\text{kính } R = 2\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3}(cm^3).$$

Câu 17. Đáp án A.



Gọi O là tâm của hình chữ nhật nên $OA = OB = OC = OD$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó bán kính đường tròn là $R = OA = \frac{AC}{2}$

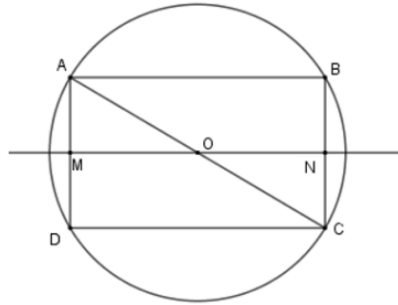
$$\text{Theo định lý Pytago ta có } AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$(\text{vì } AB = DC = 4cm) \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

Khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN với M là trung điểm AD , N là trung điểm BC ta được một hình cầu tâm O bán kính $R = \frac{5}{2}$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\pi(cm)$.

Câu 18. Đáp án B.



Gọi O là tâm của hình chữ nhật nên $OA = OB = OC = OD$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó bán kính đường tròn là $R = OA = \frac{AC}{2}$

Theo định lý Pytago ta có $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$ (vì $AB = DC = 8cm$)

$\Rightarrow R = 5cm$

Khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh đường thẳng MN với M là trung điểm AD , N là trung điểm BC ta được một hình cầu tâm O bán kính $R = 5cm$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi 5^2 = 100\pi(cm^2)$.

D.TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

PHIẾU SỐ 1

Bài 1. Điền vào các ô trống trong bảng sau

Bán kính hình cầu	0,4 mm	6 dm	0,2 m	100 km	6 hm	50 dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

Bài 2. Dụng cụ thể thao các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten nít	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7 mm		6,5 cm	40 mm	61 mm

Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích					
Thể tích					

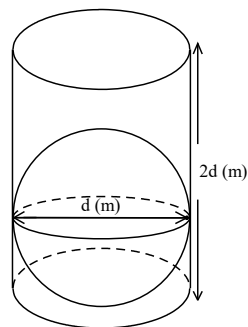
Bài 3. Một hình cầu có diện tích mặt cầu là $100\pi cm^2$.

Tính thể tích hình cầu.

Bài 4. Một hình cầu có thể tích là $228\pi(dm^3)$. Tính diện tích mặt cầu.

Bài 5. Hai hình cầu có bán kính tương ứng là a và $3a$ (cm). Tính tỉ số các thể tích của hai hình cầu này.

Bài 6. Một hình cầu đường kính d (m) được đặt trong một hình trụ có chiều cao $2d$ (m).



Tính tỉ số của $\frac{V_{cầu}}{V_{trụ}}$.

Bài 7. Hai hình cầu có hiệu các bán kính bằng 3cm và hiệu các thể tích bằng $1332\pi cm^3$. Tính hiệu các diện tích của hai mặt cầu.

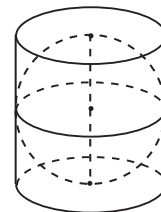
Bài 8. Một hình cầu nội tiếp một hình nón bán kính đáy bằng 6cm và đường sinh bằng 10cm. Chứng minh rằng diện tích đáy hình nón bằng diện tích mặt cầu.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn đường kính AD . Gọi H là giao điểm của AD và BC . Quay hình vẽ một vòng quanh đường kính AD cố định ta được hai hình nón nội tiếp một hình cầu. Biết $AH = 24cm$; $DH = 6cm$, hãy tính:

- Thể tích của hình cầu được tạo thành;
- Thể tích hình nón đỉnh A đáy là hình tròn đường kính BC .

Bài 10. Cho một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Chứng minh rằng:

- Thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ;
- Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần hình trụ.



Bài 11. Cho đoạn thẳng $AB = 24cm$. Lấy điểm C nằm giữa A và B . Vẽ về cùng một phía của AB ba nửa đường tròn đường kính AB, AC và BC . Quay toàn bộ hình vẽ một vòng quanh đường kính AB cố định ta được ba hình cầu. Tìm thể tích lớn nhất của phần không gian được giới hạn bởi ba hình cầu.

Bài 12. Một chiếc thuyền thúng có dạng nửa hình cầu, có khối lượng 45 kg , người chèo thuyền khối lượng 65kg. Biết đường kính của thuyền là 1,2 m và trên thuyền có thêm 2,4 tạ cá, hỏi nước có ngập đến mép thuyền không? Biết khối lượng riêng của nước là 1 kg/dm³.

HƯỚNG DẪN

Bài 1.

Bán kính hình cầu	0,4 <i>mm</i>	6 <i>dm</i>	0,2 <i>m</i>	100 <i>km</i>	6 <i>hm</i>	50 <i>dam</i>
Diện tích mặt cầu	$\frac{16}{25}\pi$ <i>mm</i> ²	144π <i>dm</i> ²	$\frac{4}{25}\pi$ <i>m</i> ²	40000π <i>km</i> ²	144π <i>hm</i> ²	10000π <i>dam</i> ²
Thể tích hình cầu	$\frac{32\pi}{375}$ <i>mm</i> ³	288π <i>mm</i> ³	$\frac{4}{375}\pi$ <i>m</i> ³	$\frac{4000000}{3}\pi$ <i>km</i> ³	288π <i>hm</i> ³	$\frac{500000}{3}\pi$ <i>dam</i> ³

Bài 2

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten nít	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7 <i>mm</i>	7,32 <i>cm</i>	6,5 <i>cm</i>	40 <i>mm</i>	61 <i>mm</i>
Độ dài đường tròn lớn	67,07 <i>mm</i>	23 <i>cm</i>	10,21 <i>cm</i>	62,83 <i>mm</i>	95,82 <i>mm</i>
Diện tích	5728,03 <i>mm</i> ²	168,33 <i>cm</i> ²	132,73 <i>cm</i> ²	5026,55 <i>mm</i> ²	11689,87 <i>mm</i> ²
Thể tích	40764,51 <i>mm</i> ³	205,36 <i>cm</i> ³	143,79 <i>cm</i> ³	33510,32 <i>mm</i> ³	118846,97 <i>mm</i> ³

Bài 3.

$$S = 4\pi R^2$$

$$4\pi R^2 = 100\pi$$

$$\Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5(\text{cm})$$

$$\text{Thể tích hình cầu: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}(\text{cm}^3).$$

Bài 4.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 228\pi$$

$$R^3 = 216$$

$$R = \sqrt[3]{216}$$

$$R = 6(\text{cm})$$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi(\text{cm}^2)$.

Bài 5.

Thể tích V_1, V_2 của hai hình cầu là

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{36\pi a^3} = \frac{1}{27}$$

Nhận xét: Nếu $\frac{R_1}{R_2} = k$ thì $\frac{V_1}{V_2} = k^3$.

Bài 6.

Thể tích hình cầu là: $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3(\text{m}^3)$

Thể tích hình trụ là: $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 2d = \frac{1}{2}\pi d^3(\text{m}^3)$

$$\text{Do đó: } \frac{V_{\text{cầu}}}{V_{\text{trụ}}} = \frac{1}{3}$$

Bài 7.

Gọi bán kính của hình cầu lớn là R và bán kính của hình cầu nhỏ là r .

Ta có $R - r = 3$ hay $R = r + 3$.

Thể tích hình cầu lớn là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ Thể tích hình cầu nhỏ là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Vì $V_1 - V_2 = 1332\pi(\text{cm}^3)$ nên $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = 1332\pi \Leftrightarrow R^3 - r^3 = 999$

Do đó $(r + 3)^3 - r^3 = 999 \Leftrightarrow r^2 + 3r - 108 = 0$.

Giải ra được $r_1 = -12$ (loại); $r_2 = 9$ (chọn).

Vậy bán kính hình cầu nhỏ là 9cm. Bán kính hình cầu lớn là 12cm.

Diện tích mặt cầu lớn là: $S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích mặt cầu nhỏ là: $S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Hiệu các diện tích của hai mặt cầu là: $S = S_1 - S_2 = 576\pi - 324\pi = 252\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 8.

Vì hình cầu nội tiếp hình nón nên $OH \perp BC, OD \perp AB$.

Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm})$

Gọi bán kính đáy hình nón là R bán kính hình cầu là r .

Ta có $BH = BD = R = 6\text{ cm}; OH = OD = r$.

$AD = AB - BD = 10 - 6 = 4\text{ cm}$.

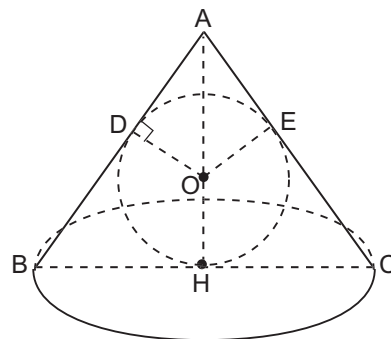
$\triangle AOD \sim \triangle ABH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OD}{BH} = \frac{AD}{AH}$.

Do đó $\frac{r}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow r = 3(\text{cm})$ $\frac{r}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow r = 3(\text{cm})$.

Diện tích đáy hình nón là: $S_1 = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Vậy diện tích đáy hình nón bằng diện tích mặt cầu.



Bài 9.

a) Tam giác ABC cân tại A , AD là đường kính nên $AD \perp BC$.

Ta có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (vì AD là đường kính).

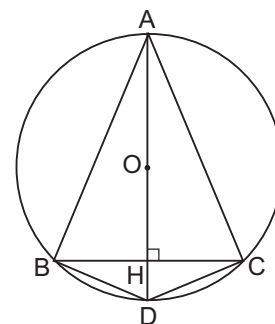
Xét $\triangle ABD$ vuông tại B ta có:

$BH^2 = HA \cdot HD = 24 \cdot 6 = 144$. Suy ra $BH = 12(\text{cm})$.

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R = (24 + 6) : 2 = 15(\text{cm})$.

Thể tích của hình cầu tạo thành là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 15^3 = 4500\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

b) Thể tích của hình nón đỉnh A là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 12^2 \cdot 24 = 1152\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.



Bài 10.

Gọi bán kính hình cầu là R thì bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao của hình trụ là $2R$.

a) Thể tích hình cầu là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích hình trụ là: $V_2 = \pi R^2 h = 2\pi R^3$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$.

b) Diện tích mặt cầu là: $S_1 = 4\pi R^2$.

Diện tích hình trụ là: $S_2 = 2\pi R(h + R) = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2$.

Ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$.

Bài 11.

Đặt $AC = 2x$ thì $BC = 24 - 2x$.

Bán kính của nửa đường tròn đường kính AB là 12 cm .

Bán kính của nửa đường tròn đường kính AC là x .

Bán kính của nửa đường tròn đường kính BC là $12 - x$.

Thể tích của ba hình cầu đường kính AB, AC và BC lần lượt là:

$$\frac{4}{3}\pi 12^3; \quad \frac{4}{3}\pi x^3 \quad \text{và} \quad \frac{4}{3}\pi (12 - x)^3$$

Thể tích phần không gian giới hạn bởi ba hình cầu là:

$$\begin{aligned} V &= 2304\pi - \frac{4}{3}\pi [x^3 + (12 - x)^3] \\ &= 2304\pi - \frac{4}{3}\pi (x^3 + 1728 - 432x + 36x^2 - x^3) = 2304\pi - 48\pi (x^2 - 12x + 48) \end{aligned}$$

$$V_{\max} \Leftrightarrow (x^2 - 12x + 48) \min \Leftrightarrow (x - 6)^2 + 12 \min \Leftrightarrow x = 6.$$

Khi đó $\max V = 1728\pi \text{ cm}^3$ khi $AC = 12\text{ cm}$ hay khi C là trung điểm của AB .

Bài 12.

Bán kính của thuyền thúng là: $1,2 : 2 = 0,6 \text{ (m)} = 6 \text{ (dm)}$.

Thể tích của thuyền là: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 144\pi \text{ (dm}^3) \approx 425 \text{ dm}^3$.

Tổng khối lượng của thuyền, người và cá là: $45 + 65 + 240 = 350 \text{ (kg)}$

Khối lượng riêng của thuyền là : $350 : 452 = 0,8 (kg / dm^3)$

Khối lượng riêng của nước là : $1 kg / dm^3$

Vậy khối lượng riêng của thuyền nhỏ hơn khối lượng riêng của nước nên nước không ngập đến mép thuyền.

Nhận xét: Học sinh cần ghi nhớ công thức $d = \frac{m}{V}$ (d là khối lượng riêng, m khối lượng, V là thể tích).

PHIẾU SỐ 2

Dạng 1: Tính Diện tích, thể tích hoặc bán kính hình cầu

Bài 1: Cho thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}cm^3$. Khi đó hãy tính bán kính của hình cầu (cho số $\pi \approx \frac{22}{7}$)

Bài 2: Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,3 mm	6,21 dm	0,283 m	100 km	6 hm	50 dam
Thể tích hình cầu						
Diện tích mặt cầu						

Bài 3: Một hình cầu có thể tích là $3052,08 cm^3$. Tính diện tích mặt cầu đó.

Bài 4: Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (Tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó. Tính bán kính của hình cầu đó.

Bài 5: Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi m^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

Bài 6: Một hình nón có đường sinh bằng đường kính. Một hình cầu có đường kính bằng chiều cao của hình nón đó. Chứng minh diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu.

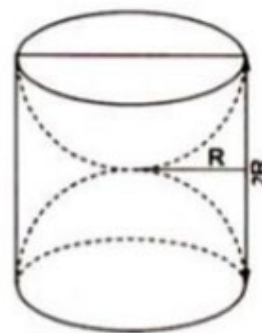
Dạng 2: Tính diện tích, thể tích của những hình hỗn hợp bao gồm nhiều hình

Bài 7: Cho hình vẽ có bán kính đường tròn đáy là R ,

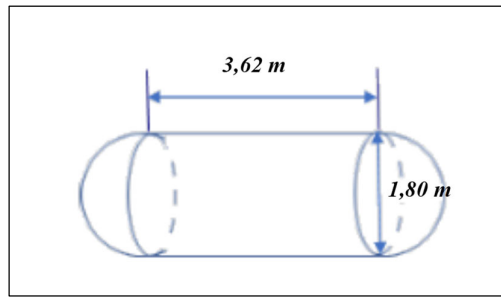
chiều cao $2R$. Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu

nghư hình vẽ bên. Hãy tính diện tích bề mặt

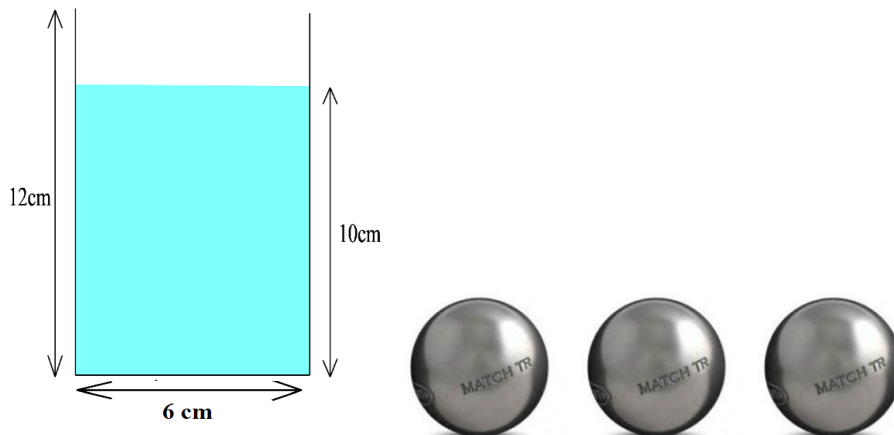
của khối gỗ còn lại.



Bài 8: Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ. Hãy tính diện tích của bồn chứa theo các kích thức cho ở hình vẽ.

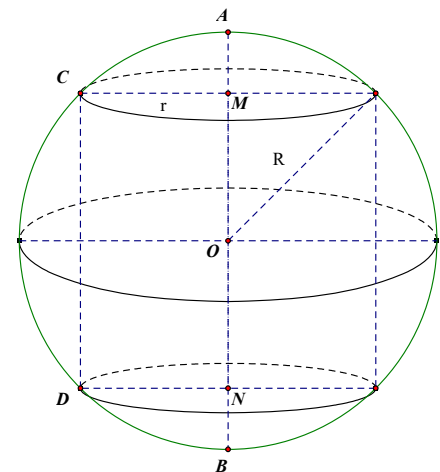


Bài 9: Một cốc nước có dạng hình trụ có đường kính đáy bằng 6 cm , chiều cao 12 cm và chứa một lượng nước cao 10 cm . Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có đường kính bằng 2 cm vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?



Bài 10:

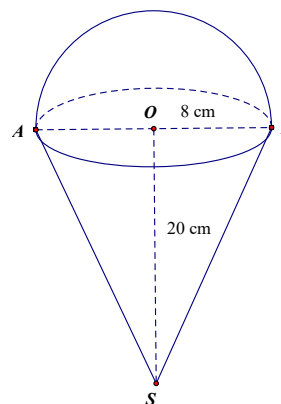
Cho hình chữ nhật $MNDC$ nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O , đường kính AB (M, N thuộc đoạn thẳng AB và C, D ở trên nửa đường tròn). Khi cho nửa hình tròn đường kính AB và hình chữ nhật $MNDC$ quay một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình trụ đặt khít vào trong hình cầu đường kính AB . Biết hình cầu có tâm O , bán kính $R = 10\text{ cm}$ và hình trụ có bán kính đáy



$r = 8\text{ cm}$ đặt khít vào trong hình cầu đó. Tính thể tích phần hình cầu nằm ngoài hình trụ đã cho. (Trích đề thi vào 10 tỉnh Thừa Thiên Huế)

Bài 11:

Người ta gắn một hình nón có bán kính đáy $R = 8\text{ cm}$, độ dài đường cao $h = 20\text{ cm}$ vào một nửa hình cầu có bán kính bằng bán kính hình nón (theo hình bên dưới). Tính giá trị gần đúng thể tích của hình tạo thành (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Tính Diện tích, thể tích hoặc bán kính hình cầu

Bài 1: Cho thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}\text{ cm}^3$. Khi đó hãy tính bán kính của hình cầu (cho số $\pi \approx \frac{22}{7}$)

Giải:

Áp dụng công thức tính thể tích hình cầu ta có:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 3\text{ cm}$$

Bài 2: Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,3 mm	6,21 dm	0,283 m	100 km	6 hm	50 dam
Thể tích hình cầu						
Diện tích mặt cầu						

Giải:

Áp dụng các công thức:

+ Diện tích hình cầu: $S = 4\pi R^2$

+ Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thay Bán kính trong từng trường hợp để điền vào ô trống

Bán kính hình cầu	0,3 mm	6,21 dm	0,283 m	100 km	6 hm	50 dam
-------------------	--------	---------	---------	--------	------	--------

Thể tích hình cầu	$0,36\pi \text{ mm}^2$	$154,26\pi \text{ dm}^2$	$0,32\pi \text{ m}^2$	$40000\pi \text{ km}^2$	$144\pi \text{ hm}^2$	$10000\pi \text{ dam}^2$
Diện tích mặt cầu	$0,036\pi \text{ mm}^3$	$319,31\pi \text{ dm}^3$	$0,03\pi \text{ m}^3$	$1333333\pi \text{ km}^3$	$288\pi \text{ hm}^3$	$166667\pi \text{ dam}^3$

Bài 3: Một hình cầu có thể tích là $3052,08 \text{ cm}^3$. Tính diện tích mặt cầu đó.

Giải:

Áp dụng công thức tính thể tích hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3052,08}{4 \cdot 3,14}} \approx 9(\text{cm})$$

Vậy diện tích mặt cầu đó là:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi(\text{cm}^2)$$

Bài 4: Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

Giải:

Vì số đo diện tích mặt cầu đúng bằng số đo thể tích hình cầu nên:

$$4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}R \Rightarrow R = 3(\text{cm})$$

Bài 5: Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi \text{ m}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

Giải:

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{4\pi}{S}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi}{100\pi}} = \frac{1}{5} \text{ m}$$

Từ đó thể tích hình cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4}{375}\pi(\text{m}^3)$$

Bài 6: Một hình nón có đường sinh bằng đường kính. Một hình cầu có đường kính bằng chiều cao của hình nón đó. Chứng minh diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu.

Giải:

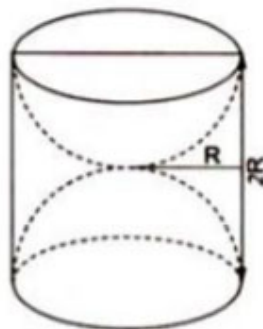
$$\text{Diện tích toàn phần của hình nón : } \pi r l + \pi r^2 = \pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2 \quad (1)$$

$$\text{Diện tích mặt cầu : } 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{l^2 - r^2}{4} = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu.

Dạng 2: Tính diện tích, thể tích của những hình hỗn hợp bao gồm nhiều hình

Bài 7: Cho hình vẽ có bán kính đường tròn đáy là R , chiều cao $2R$. Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình vẽ bên. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại.



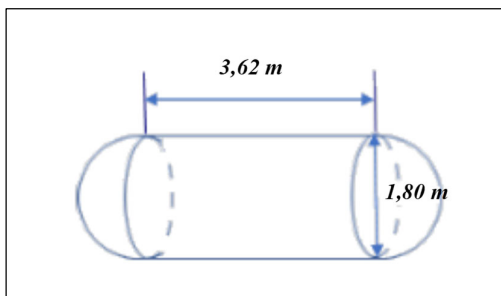
Giải:

Diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại bao gồm:

- Diện tích ngoài là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao $h = 2R$ có diện tích $S_1 = 2\pi \cdot R \cdot 2R$.
- Diện tích trong là diện tích hai nửa mặt cầu bán kính R . Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = 2\pi R \cdot 2R + 4\pi R^2 = 8\pi R^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 8: Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ. Hãy tính diện tích của bồn chứa theo các kích thước cho ở hình vẽ.



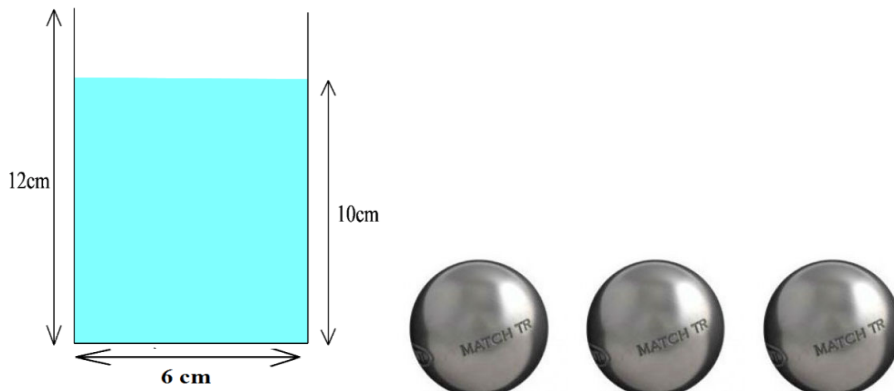
Giải:

Thể tích của bồn chứa xăng gồm thể tích của hai nửa hình cầu có bán kính $0,9m$ nên có thể tích

$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 0,9^3$ và thể tích của một hình trụ có bán kính đáy $R = 0,9m$ và chiều cao $h = 3,62m$ nên có thể tích $V_2 = \pi(0,9)^2 \cdot 3,62$.

Vậy thể tích của bồn chứa là: $V = V_1 + V_2 = \pi \cdot 0,9^2 \cdot 3,62 + \frac{4}{3}\pi \cdot 0,9^3 \approx 12,26 \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 9: Một cốc nước có dạng hình trụ có đường kính đáy bằng $6cm$, chiều cao $12cm$ và chứa một lượng nước cao $10cm$. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có đường kính bằng $2cm$ vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?



Giải:

Bán kính của viên bi là: $R = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

Thể tích của một viên bi là: $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Do ba viên bi có cùng đường kính nên tổng thể tích của 3 viên bi là:

$$V = 3 \cdot V_1 = 3 \cdot 4\pi = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Diện tích của đáy cốc nước (hình tròn $r = 3 \text{ cm}$):

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Chiều cao của phần cốc mà không chứa nước:

$$h = 12 - 10 = 2 \text{ cm}$$

Thể tích phần cốc không chứa nước (cốc hình trụ, diện tích phần đáy cũng là diện tích phần mặt phân cách giữa phần có nước và phần không có nước)

$$V' = S \cdot h = 9\pi \cdot 2 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Do: $V' > V$ nên khi thả 3 viên bi vào li nước thì nước không bị tràn ra ngoài.

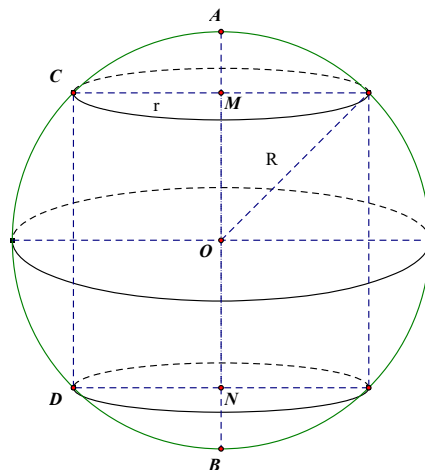
Gọi x là chiều cao mực nước dâng lên sau khi thả 3 viên bi vào cốc, thể tích của 3 viên bi cũng là thể tích phần nước dâng lên nên ta có phương trình:

$$V = S \cdot x \Leftrightarrow 9\pi \cdot x = 12\pi \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

Vậy: Chiều cao của mực nước trong ống sau khi thả 3 viên bi là: $10 + \frac{4}{3} = \frac{34}{3} \text{ cm}$

Bài 10:

Cho hình chữ nhật $MNDC$ nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O , đường kính AB (M, N thuộc đoạn thẳng AB và C, D ở trên nửa đường tròn). Khi cho nửa hình tròn đường kính AB và hình chữ nhật $MNDC$ quay một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình trụ đặt khít vào trong hình cầu đường kính AB . Biết hình cầu có tâm O , bán kính $R = 10\text{cm}$ và hình trụ có bán kính đáy $r = 8\text{cm}$ đặt khít vào trong hình cầu đó. Tính thể tích phần hình cầu nằm ngoài hình trụ đã cho. (Trích đề thi vào 10 tỉnh Thừa Thiên Huế)

**Giải:**

Từ O ta vẽ OI vuông góc với dây CD tại I

$\Rightarrow I$ là trung điểm của dây CD (tính chất đường kính vuông góc với dây)

$\Rightarrow OI \parallel MC \parallel ND$ (quan hệ vuông góc, song song) . Do đó OI là đường trung bình của hình chữ nhật $MNDC \Rightarrow O$ là trung điểm của MN

Khi cho nửa hình tròn đường kính AB và hình chữ nhật $MNDC$ quay một vòng quanh đường kính AB ta được một hình trụ đặt khít trong hình cầu.

Bán kính của hình cầu là: $R = \frac{AB}{2} = OC = 10\text{cm}$.

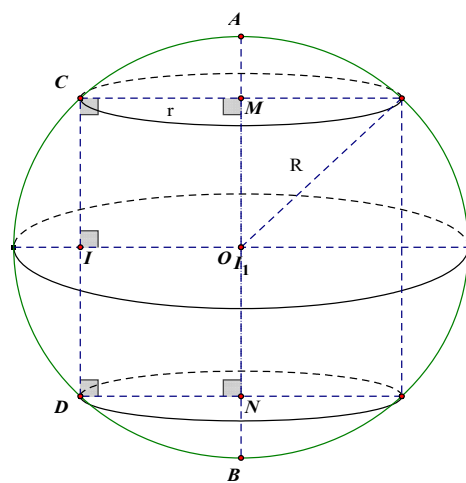
Hình trụ có bán kính đáy: $r = MC = 8\text{cm}$ và chiều cao $h = 2OM$ Xét tam giác vuông OMC , vuông tại M , áp dụng định lý pitago, ta có:

$$OM^2 = OC^2 - MC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow OM = 6\text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 2OM = 2.6 = 12\text{ cm}$$

Thể tích hình cầu là:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.10^3 = \frac{4000\pi}{3} (\text{cm}^3)$$



Thể tích hình trụ đặt khít trong hình cầu là:

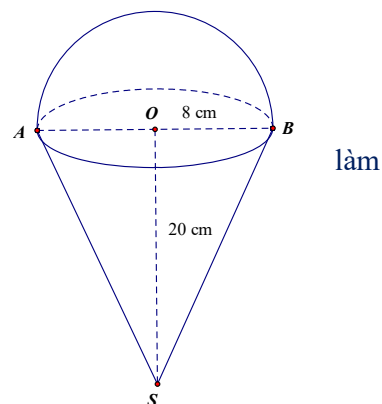
$$V_2 = \pi.r^2.h = \pi.8^2.12 = 768\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần hình cầu ở ngoài hình trụ đặt vừa khít nó là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4000\pi}{3} - 768\pi = \frac{1696\pi}{3} \approx 1776,047 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 11:

Người ta gắn một hình nón có bán kính đáy $R = 8 \text{ cm}$, độ dài đường cao $h = 20 \text{ cm}$ vào một nửa hình cầu có bán kính bằng bán kính hình nón (theo hình bên dưới). Tính giá trị gần đúng thể tích của hình tạo thành (kết quả tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Giải:

Thể tích của một nửa hình cầu là:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 8^3 = \frac{1024}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của hình nón là:

$$V_2 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = \frac{1280}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của hình tạo thành là: $V = V_1 + V_2 = \frac{1024}{3} \pi + \frac{1280}{3} \pi = 768\pi = 2413 \text{ (cm}^3\text{)}$.

----- HẾT -----

