HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

Vấn đề 1: Hàm số bậc nhất

Kiến thức cần nhớ:

1. **Định nghĩa:**

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức: $y = ax + b$ trong đó a và b là các số thực cho trước và $a \neq 0$.

+ Khi $b = 0$ thì hàm số bậc nhất trở thành hàm số $y = ax$, biểu thị tương quan tỉ lện thuận giữa y và x.

2. **Tính chất:**

a) Hàm số bậc nhất , xác định với mọi giá trị $x \in R$.

b) Trên tập số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

3. **Đồ thị hàm số $y = ax + b$ với $(a \neq 0)$.**

+ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{b}{a}$.

+ a gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

4. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$.

+ Vẽ hai điểm phân biệt của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua 2 điểm.

+ Thường vẽ đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ là $A\left(-\frac{b}{a};0\right), B(0;b)$.

+ Chú ý: Đường thẳng đi qua $M(m;0)$ song song với trục tung có phương trình: $x-m=0$, đường thẳng đi qua $N(0;n)$ song song với trục hoành có phương trình: $y-n=0$

5. Kiến thức bổ sung.

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ thì $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Điểm $M(x;y)$ là trung điểm của AB thì $x=\frac{x_1+x_2}{2};y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

6. Điều kiện để hai đường thẳng song song , hai đường thẳng vuông góc.

Cho hai đường thẳng $(d_1): y=ax+b$ và đường thẳng $(d_2): y=a'x+b'$ với $a,a'\neq 0$.

- $(d_1)//(d_2)\Leftrightarrow a=a'$ và $b\neq b'$.
- $(d_1)\equiv(d_2)\Leftrightarrow a=a'$ và $b=b'$.
- (d_1) cắt $(d_2)\Leftrightarrow a\neq a'$.
- $(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow a.a'=-1$

Chú ý: Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b$ và trục Ox, nếu $a>0$ thì $\tan\varphi=a$.

Một số bài toán trên mặt phẳng tọa độ:

Ví dụ 1) Cho đường thẳng $(d_1): y=x+2$ và đường thẳng $(d_2): y=(2m^2-m)x+m^2+m$.

a) Tìm m để $(d_1)//(d_2)$.

b) Gọi A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x = 2$. Viết phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với (d_1).

c) Khi $(d_1)//(d_2)$. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

d) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_1) và tính diện tích tam giác OMN với M,N lần lượt là giao điểm của (d_1) với các trục tọa độ Ox,Oy.

Lời giải:

a) Đường thẳng $(d_1)//(d_2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m^2 - m = 1 \\ m^2 + m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(2m+1) = 0 \\ (m-1)(m+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

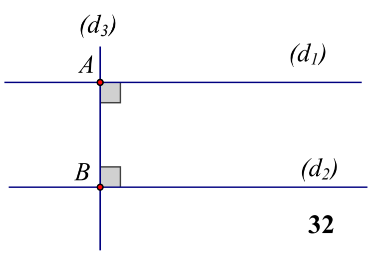
Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thì $(d_1)//(d_2)$.

b) Vì A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x = 2$ suy ra tung độ điểm A 1 $y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow A(2;4)$.

Đường thẳng (d_1) có hệ số góc là $a = 1$, đường thẳng (d_2) có hệ số góc là $a' \Rightarrow a'.1 = -1 \Rightarrow a' = -1$. Đường thẳng (d_3) có dạng $y = -x + b$. Vì (d_3) đi qua $A(2;4)$ suy ra $4 = -2 + b \Rightarrow b = 6$. Vậy đường thẳng (d_3) là $y = -x + 6$.

c)

Khi $(d_1)//(d_2)$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cũng chính là khoảng cách giữa hai điểm A,B lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) sao cho $AB \perp (d_1), AB \perp (d_2)$.



Hình vẽ: Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d_3) và (d_2). Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d_2\right)$ và $\left(d_3\right)$ là:

$$-x+6=x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{25}{8} \Rightarrow y=\frac{23}{8} \Rightarrow B\left(\frac{25}{8};\frac{23}{8}\right).$$

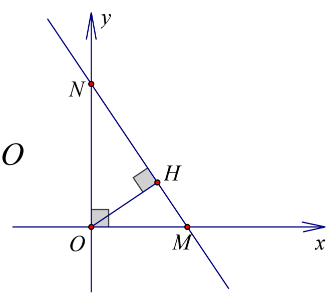
Vậy độ dài đoạn thẳng AB là: $AB=\sqrt{\left(\frac{25}{8}-2\right)^2+\left(\frac{23}{8}-4\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

d) Gọi M,N lần lượt là giao điểm của đường thẳng $\left(d_1\right)$ với các trục tọa độ Ox,Oy. Ta có:

Cho $y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A\left(-2;0\right)$, cho $y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow N\left(-2;0\right)$. Từ đó suy ra $OM=ON=2 \Rightarrow MN=2\sqrt{2}$ .Tam giác OMN vuông cân tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên MN ta có $OH=\frac{1}{2}MN=\sqrt{2}$ và

$S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=2$ (đvdt).

Chú ý 1: Nếu tam giác OMN không vuông cân tại O ta có thể tính OH theo cách:



Trong tam giác vuông OMN ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ (*). Từ đó để khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng (d) ta làm theo cách:

+ Tìm các giao điểm M,N của (d) với các trục tọa độ

+ Áp dụng công thức tính đường cao từ đỉnh góc vuông trong tam giác vuông OMN (công thức (*)) để tính đoạn OH .

Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được công thức sau:

Cho $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $ax+by+c=0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng là:

$d=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $mx+\left(2-3m\right)y+m-1=0\ \ (d)$.

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua.
b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.
c) Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải:

a) Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m khi đó

ta có:
$mx_0+\left(2-3m\right)y_0+m-1=0\forall m\Leftrightarrow m\left(x_0-3y_0+1\right)+2y_0-1=0\forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-3y_0+1=0\\2y_0-1=0\end{cases}$. Hay $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\y_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d). Ta có: $OH\le OI$ suy ra OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H\equiv I\Leftrightarrow OI\perp(d)$. Đường thẳng qua O có phương trình: $y=ax$ do

$I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\in OI\Rightarrow\dfrac{1}{2}=a.\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow OI:y=x$.

Đường thẳng (d) được viết lại như sau:
$mx+\left(2-3m\right)y+m-1=0\Leftrightarrow\left(2-3m\right)y=-mx+1-m$.

+ Để ý rằng với $m=\frac{2}{3}$ thì đường thẳng $(d): x-\frac{1}{2}=0$ song song với trục Oy nên khoảng cách từ O đến (d) là $\frac{1}{2}$.

+ Nếu $m\neq\frac{2}{3}$ đường thẳng (d) có thể viết lại: $y=\frac{m}{3m-2}x+\frac{m-1}{3m-2}$. Điều kiện để $(d)\perp OI$ là $\frac{m}{3m-2}.1=-1\Leftrightarrow m=2-3m\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$. Khi đó khoảng cách $OI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $m=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có thể giải bài toán theo 2 cách sau:

+ Cách 1: Dễ thấy $m=\frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện (Do (d) không cắt Oy). Xét $m\neq\frac{2}{3}$, đường thẳng (d) cắt Ox, Oy tại các điểm A, B tạo thành tam giác cân OAB , do góc $\widehat{AOB}=90^0\Rightarrow\Delta OAB$ vuông cân tại O. Suy ra hệ số góc của đường thẳng (d) phải bằng 1 hoặc -1 và đường thẳng (d) không đi qua gốc O.

$\left[\begin{array}{l}\frac{m}{3m-2}=1\\ \frac{m}{3m-2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Ta thấy chỉ có giá trị $m=\frac{1}{2}$ là thỏa mãn điều kiện bài toán.

Cách 2: Dễ thấy $m=\frac{2}{3}, m=0$ không thỏa mãn điều kiện

Xét $m\neq 0;\frac{2}{3}$, đường thẳng (d) có thể viết lại: $y=\frac{m}{3m-2}x+\frac{m-1}{3m-2}$.

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm A có tung độ bằng 0 nên $\frac{m}{3m-2}x+\frac{m-1}{3m-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1-m}{m}\Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m};0\right)\Rightarrow OA=\left|\frac{1-m}{m}\right|$, đường thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm có hoành độ bằng 0 nên

$y=\frac{m-1}{3m-2}\Rightarrow B\left(0;\frac{m-1}{3m-2}\right)\Rightarrow OB=\left|\frac{m-1}{3m-2}\right|$. Điều kiện để tam giác OAB

cân là $OA=OB\Leftrightarrow\left|\frac{1-m}{m}\right|=\left|\frac{m-1}{3m-2}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\|m|=|3m-2|\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Giá trị

$m=1$ không thỏa mãn , do đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

Kết luận: $m=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3) Cho hai đường thẳng
$(d_1): mx+(m-1)y-2m+1=0, (d_2): (1-m)x+my-4m+1=0$

a) Tìm các điểm cố định mà (d_1), (d_2) luôn đi qua.
b) Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất.
c) Chứng minh hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I .Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.
d) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB với A,B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1),(d_2)$ đi qua.

Lời giải:

a) Ta viết lại $(d_1): mx+(m-1)y-2m+1=0\Leftrightarrow m(x+y-2)+1-y=0$.
Từ đó dễ dàng suy ra đường thẳng $(d_{1)}$ luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$.

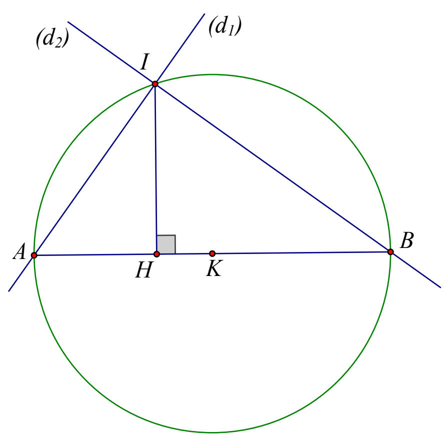
Tương tự viết lại $(d_2): (1-m)x+my-4m+1=0\Leftrightarrow m(y-x-4)+1+x=0$ suy ra (d_2) luôn đi qua điểm cố định: $B(-1;3)$.

b) Để ý rằng đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên (d_1) thì khoảng cách từ A đến (d_1) là $PH\le PA$. Suy ra khoảng cách lớn nhất là PA khi

$P \equiv H \Leftrightarrow PH \perp (d_1)$.Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua $P(0;4), A(1;1)$ ta có hệ : $\begin{cases} a.0 + b = 4 \\ a.1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \end{cases}$ suy ra phương trình đường thẳng $PA : y = -3x + 4$.

Xét đường thẳng $(d_1) : : mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$. Nếu $m = 1$ thì $(d_1) : x - 1 = 0$ không thỏa mãn điều kiện. Khi $m \neq 1$ thì:
$(d_1) : y = \dfrac{m}{1-m}x + \dfrac{2m-1}{m-1}$. Điều kiện để $(d_1) \perp PA$ là
$\dfrac{m}{1-m}(-3) = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$.

c) Nếu $m = 0$ thì $(d_1): y - 1 = 0$ và $(d_2): x + 1 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(-1;1)$. Nếu $m = 1$ thì $(d_1): x - 1 = 0$ và $(d_2): y - 3 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(1;3)$. Nếu $m \neq \{0;1\}$ thì ta viết lại
$(d_1): y = \dfrac{m}{1-m}x + \dfrac{2m-1}{m-1}$ và $(d_2): y = \dfrac{m-1}{m}x + \dfrac{4m-1}{m}$. Ta thấy
$\left(\dfrac{m}{1-m}\right)\left(\dfrac{m-1}{m}\right) = -1$ nên $(d_1) \perp (d_2)$.



Do đó hai đường thẳng này luôn cắt nhau tại 1 điểm I.

Tóm lại với mọi giá trị của m thì hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ luôn vuông góc và cắt nhau tại 1 điểm I. Mặt khác theo câu a) ta có $(d_1),(d_2)$ lần lượt đi qua 2 điểm cố định A, B suy ra tam giác IAB vuông tại A. Nên I nằm trên đường tròn đường kính AB.

d) Ta có $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$. Dựng $IH\perp AB$ thì $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH.AB\le\frac{1}{2}IK.AB=\frac{1}{2}\frac{AB}{2}.AB=\frac{AB^2}{4}=2$. Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB là 2 khi và chỉ khi $IH=IK$. Hay tam giác IAB vuông cân tại I.

<u>Ứng dụng của hàm số bậc nhất trong chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLN, GTNN</u>

Ta có các kết quả quan trọng sau:

+ Xét hàm số $y=f(x)=ax+b$ với $m\le x\le n$ khi đó GTLN, GTNN của hàm số sẽ đạt được tại $x=m$ hoặc $x=n$. Nói cách khác: $\min\underbrace{f(x)}_{m\le x\le n}=\min\{f(m);f(n)\}$ và $\max\underbrace{f(x)}_{m\le x\le n}=\max\{f(m);f(n)\}$. Như vậy để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)=ax+b$ với $m\le x\le n$ ta chỉ cần tính các giá trị biên là $f(m),f(n)$ và so sánh hai giá trị đó để tìm GTLN, GTNN.

+ Cũng từ tính chất trên ta suy ra: Nếu hàm số bậc nhất $y=f(x)=ax+b$ có $f(m),f(n)\ge 0$ thì $f(x)\ge 0$ với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện: $m\le x\le n$.

Ví dụ 1: Cho các số thực $0\le x,y,z\le 2$. Chứng minh rằng: $2(x+y+z)-(xy+yz+zx)\le 4$.

Lời giải:

Ta coi y,z như là các tham số, x là ẩn số thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau: $f(x)=(2-y-z)x+2(y+z)-yz-4\le 0$.

Để chứng minh $f(x)\le 0$ ta chỉ cần chứng minh: $\begin{cases}f(0)\le 0\\ f(2)\le 0\end{cases}$. Thật vậy ta có:

+ $f\left(0\right)=2\left(y+z\right)-yz-4=\left(y-2\right)\left(2-z\right)\le 0$ với y,z thỏa mãn: $0\le y,z\le 2$.

+ $f\left(2\right)=2\left(2-y-z\right)+2\left(y+z\right)-yz-4=-yz\le 0$ với y,z thỏa mãn: $0\le y,z\le 2$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left(x;y;z\right)=\left(0;2;2\right)$ hoặc các hoán vị của bộ số trên.

Ví dụ 2: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=xy+yz+zx-2xyz$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z=\min\left(x,y,z\right)\Rightarrow z\le \frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}$. Ta có $0\le xy\le \frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{\left(1-z\right)^2}{4}$.

$P=xy\left(1-2z\right)+\left(x+y\right)z=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$. Ta coi z là tham số xy là ẩn số thì $f\left(xy\right)=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$ là hàm số bậc nhất của xy với $0\le xy\le \frac{\left(1-z\right)^2}{4}$. Để ý rằng: $1-2z>0$ suy ra hàm số $f\left(xy\right)=xy\left(1-2z\right)+z\left(1-z\right)$ luôn đồng biến . Từ đó suy ra

$f\left(xy\right)\le f\left(\frac{\left(1-z\right)^2}{4}\right)=\left(1-2z\right)\frac{\left(1-z\right)^2}{4}+z\left(1-2z\right)=\frac{-2z^3+z^2+1}{4}=$

$\frac{7}{27}-\left(\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{108}\right)=\frac{7}{27}-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{6}\right)\le \frac{7}{27}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $5\left(a^2+b^2+c^2\right)-6\left(a^3+b^3+c^3\right)\le 1$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử: $a=\min\{a,b,c\}$ suy ra $a\leq\frac{1}{3}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$5\left[a^2+(b+c)^2-2bc\right]\leq 6\left[a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right]+1$$

$$\Leftrightarrow 5\left[a^2+(1-a)^2-2bc\right]\leq 6\left[a^3+(1-a)^3-3bc(1-a)\right]+1\Leftrightarrow(9a-4)bc+(2a-1)^2\geq 0$$

. Đặt $t=bc$ thì $0<t\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$. Ta cần chứng minh:

$f(t)=(9a-4)t+(2a-1)^2\geq 0$ với mọi $t\in\left(0;\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]$. Do $9a-4<0$ suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến. Suy ra $f(t)\geq f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}a(3a-1)^2\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Vấn đề 2: HÀM SỐ BẬC HAI

Kiến thức cần nhớ.

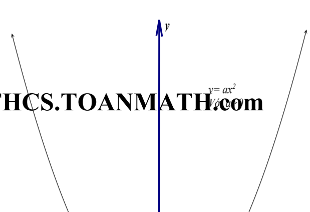
Hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$: Hàm số xác định với mọi số thực x

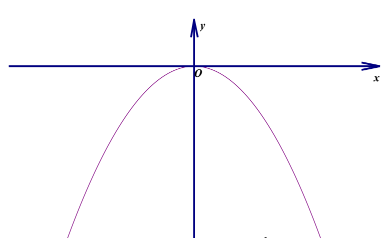
Tính chất biến thiên:

+) Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến khi $x>0$, nghịch biến khi $x<0$.

+) Nếu $a<0$ thì hàm đồng biến khi $x<0$, nghịch biến khi $x>0$.

Đồ thị hàm số là một đường Parabol nhận gốc tọa độ O làm đỉnh, nhận trục tung làm trục đối xứng. Khi $a>0$ thì Parabol có bề lõm quay lên trên, khi $a<0$ thì Parabol có bề lõm quay xuống dưới.





Ví dụ 1.

a) Hãy xác định hàm số $y = f\left(x\right) = ax^2$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A\left(2;4\right)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho

c) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

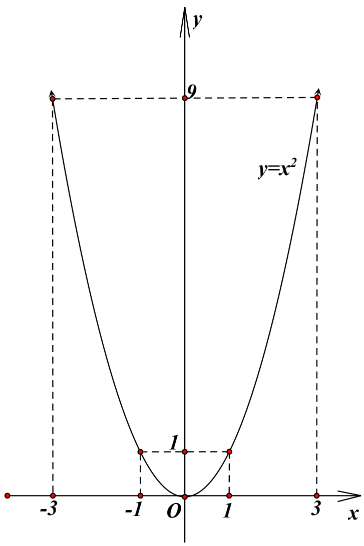
d) Tìm m sao cho $B\left(m;m^3\right)$ thuộc Parabol.

e) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải:

a) Ta có $A \in \left(P\right) \Leftrightarrow 4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1$

b) Đồ thị Parabol có đỉnh là gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$ quay bề lồi xuống dưới, có trục đối xứng là Oy đi qua các điểm $M\left(1;1\right), N\left(-1;1\right), E\left(3;9\right), F\left(-3;9\right)$



c) Gọi C là điểm thuộc $\left(P\right)$ có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_C = 16 \Leftrightarrow x^2{}_C = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$. Vậy $C\left(4;16\right)$ hoặc $C\left(-4;16\right)$.

d) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được:

$m^3 = m^2 \Leftrightarrow m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

e) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ. Ta có:

$d(D,Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D,Oy) = |x_D|$. Theo giả thiết ta có:

$x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0$ (loại) hoặc $|x_D| = 1$. Vậy $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.

Ví dụ 2: Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m(Bỏ qua độ dày của cổng).

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabo $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

2) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội 2015-2016)

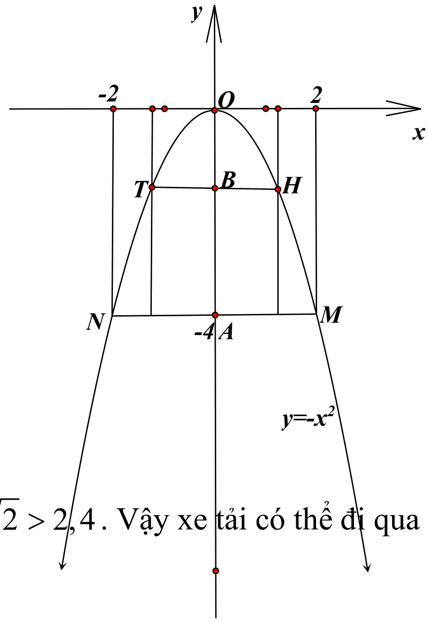
Lời giải:

1) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pitago ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2;-4), N(-2;-4)$. Do $M(2;-4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.

2) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.

Xét đường thẳng $(d): y = -\dfrac{3}{2}$

(ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

suy ra tọa độ hai giao điểm là

$T\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{3}{2}\right); H\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$. Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y = -1$ và điểm $F(0;1)$. Tìm tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến d bằng IF.

Lời giải:

Giả sử điểm $I(x;y)$. Khi đó khoảng cách từ I đến d bằng $|y+1|$ và $IF = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Như vậy $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$. Từ đây suy ra $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Do đó tập hợp tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến d bằng IF là đường Parabol $(P_1): y = \dfrac{1}{4}x^2$.

Ví dụ 4.

a) Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.

b) Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA.

Lời giải:

a) Giả sử điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ suy ra $M\left(m; m^2\right)$. Khi đó $IM^2 = m^2 + \left(m^2 - 1\right)^2 = m^4 - m^2 + 1$. Vậy $IM = \sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta thấy IM nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $M\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Giả sử điểm $A\left(a; a^2\right)$ thuộc $(P): y = x^2$. Gọi $I\left(x_1; y_1\right)$ là trung điểm đoạn OA.Suy ra $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} \\ y_1 = \dfrac{a^2}{2} = 2x_1^2 \end{cases}$. Vậy tập hợp các trung điểm I của đoạn OA là đường Parabol $\left(P_1\right): y = 2x^2$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A và B chạy trên parabol $(P): y = x^2$ sao cho $A, B \ne O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB.

a) Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB.

b) Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Giả sử $A\left(a; a^2\right)$ và $B\left(b; b^2\right)$ là hai điểm thuộc (P). Để $A, B \ne O(0;0)$ và $OA \perp OB$ ta cần điều kiện: $ab \ne 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $ab \ne 0$ và

$a^2+a^4+b^2+b^4=(a-b)^2+(a^2-b^2)^2$. Rút gọn hai vế ta được: $ab=-1$.

Gọi $I(x_1;y_1)$ là trung điểm đoạn AB. Khi đó:

$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+b}{2} \\ y_1=\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{2}=2x_1^2+1 \end{cases}$. Vậy tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình $y=2x^2+1$.

Ta cũng có thể tìm điều kiện để $OA\perp OB$ theo cách sử dụng hệ số góc: Đường thẳng OA có hệ số góc là $k_1=\dfrac{a^2}{a}=a$, đường thẳng OB có hệ số góc là $k_2=\dfrac{b^2}{b}=b$. Suy ra điều kiện để $OA\perp OB$ là $a.b=-1$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là $(AB):\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay $(AB): y=(a+b)x-ab=(a+b)x+1$. Từ đây ta dễ dàng suy ra đường thẳng $(AB): y=(a+b)x+1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0;1)$.

c) Vì $OA\perp OB$ nên $ab=-1$. Độ dài đoạn $AB=\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}$ hay

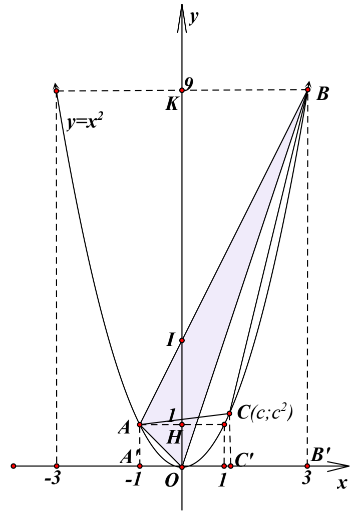
$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab+a^4+b^4-2a^2b^2}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|$, $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$. Ta có:

$AB\geq\sqrt{2|ab|+2+2a^2b^2-2a^2b^2}=2$. Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi $a^2=b^2, ab=-1$. Ta có thể chỉ ra cặp điểm đó là: $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y=x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$.

a) Tính diện tích tam giác OAB.

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.



Lời giải:

a) Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng AB.

Ta có $\begin{cases} a.(-1) + b = 1 \\ a.3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

suy ra phương trình đường thẳng AB $(d): y = 2x + 3$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm $I(0;3)$. Diện tích tam giác OAB là:

$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI$. Ta có $AH = 1; BK = 3, OI = 3$. Suy ra $S_{OAB} = 6$ (đvdt).

b) Giả sử $C(c;c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$. Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$. Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$S_{ABC} = \frac{1+9}{2}.4 - \frac{1+c^2}{2}.(c+1) - \frac{9+c^2}{2}.(3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \le 8$. Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.

Ví dụ 10) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội năm 2014)

Lời giải:

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2=-x+6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$. Ta có $y(2)=4; y(-3)=9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $B(2;4)$ và $A(-3;9)$.

2) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B xuống trục hoành.

Ta có $S_{\Delta OAB}=S_{AA'B'B}-S_{\Delta OAA'}-S_{\Delta OBB'}$

Ta có $A'B'=\left|x_{B'}-x_{A'}\right|=x_{B'}-x_{A'}=5; AA'=y_A=9; BB'=y_B=4$

$S_{AA'BB'}=\dfrac{AA'+BB'}{2}.A'B'=\dfrac{9+4}{2}.5=\dfrac{65}{2}$ (đvdt), $S_{\Delta OAA'}=\dfrac{1}{2}A'A.A'O=\dfrac{27}{2}$

(đvdt) $\Rightarrow S_{\Delta OAB}=S_{AA'B'B}-S_{\Delta OAA'}-S_{\Delta OBB'}=\dfrac{65}{2}-\left(\dfrac{27}{2}+4\right)=15$ (đvdt).

Phương trình bậc hai và định lý Viet

Kiến thức cần nhớ:

Đối với phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có biệt thức $\Delta=b^2-4ac$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Công thức nghiệm thu gọn : Khi $b=2b'$, ta xét $\Delta'=b'^2-ac$. Khi đó:

+ Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}$;

$x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$.

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Để chứng minh một phương trình bậc 2 có nghiệm. Thông thường ta chứng minh: $\Delta \geq 0$ dựa trên các kỹ thuật như biến đổi tương đương để đưa về dạng $(Ax+B)^2 \geq 0$, kiến thức về bất đẳng thức , bất phương trình, trong một số bài toán khó ta cần nắm bắt được những tính chất đặc biệt của tam thức bậc 2 để vận dụng.

Ngoài các kiến thức cơ sở trong SGK ta cần nắm thêm một số kết quả, bổ đề quan trọng sau:

+ Mọi tam thức bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đều có thể phân tích thành dạng $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Để chứng minh một phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \,(a \neq 0)$ có nghiệm ngoài cách chứng minh $\Delta \geq 0$ ta còn có cách khác như sau:”Chỉ ra số thực α sao cho $a.f(\alpha) \leq 0$ hoặc hai số thực α, β sao cho: $f(\alpha).f(\beta) \leq 0$”.

Thật vậy ta có thể chứng minh điều này như sau:

+ Ta có $a.f(\alpha) = a^2\left[\left(\alpha + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] \leq 0 \Rightarrow$

$\left(\alpha + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta}{4a^2} \geq \left(\alpha + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$ suy ra phương trình có nghiệm.

+ Xét $\left(a.f\left(\alpha\right)\right)\left(a.f\left(\beta\right)\right)=a^2f\left(\alpha\right).f\left(\beta\right)\le 0\Rightarrow$ trong hai số $af\left(\alpha\right)$ và $af\left(\beta\right)$ có một số không dương, tức là $af\left(\alpha\right)\le 0$ hoặc $af\left(\beta\right)\le 0$ $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 1). Giải các phương trình sau:

1) $x^2-5x+6=0$
2) $-2x^2+3x+1=0$.
3) $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=0$
4) $x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m=0$.

Lời giải:

1) Ta có $\Delta=\left(-5\right)^2-4.1.6=1\Rightarrow\sqrt{\Delta}=1$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-1}{2.1}=2 \\ x_2=\dfrac{5+1}{2.1}=3 \end{array}\right.$

2) Ta có $-2x^2+3x+1=0\Delta=3^2-4\left(-2\right).1=17\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{17}$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2.\left(-2\right)}=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2.\left(-2\right)}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

3) Ta có:

$\Delta=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4.2\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2-\sqrt{3}$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{3} \end{array}\right.$,

4) $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2m+1+1}{2}=m+1 \\ x_2=\dfrac{2m+1-1}{2}=m \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Cho phương trình: $(m-1)x^2-2(m+1)x+(m-3)=0$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi $m=2$
2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép.
3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

1. Với $m=2$ ta có phương trình: $x^2-6x-1=0$. Ta có $\Delta'=(-3)^2+1=10$ nên phương trình có 2 nghiệm là: $x=3-\sqrt{10}$ và $x=3+\sqrt{10}$.

2. Phương trình (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}(m-1)\neq 0\\ \Delta'=(m+1)^2-(m-1).(m-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1\\ 6m-2=0\end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}.$$

3. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(m-1)\neq 0\\ \Delta'=(m+1)^2-(m-1).(m-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1\\ 6m-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{3}\\ m\neq 1\end{cases}.$$

Ví dụ 3. Cho $a+b\geq 0, b+c\geq 0, a+c\geq 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm: $(a+b+c)x^2-2\sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}x+(a^2+b^2+c^2)=0$.

Lời giải:

Nếu $a+b+c=0$ thì từ giả thiết ta suy ra $a=b=c=0$. Do vậy phương trình có vô số nghiệm.

Dưới đây ta xét trường hợp $a+b+c\neq 0$.

Ta có: $\Delta' = 3\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right).\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=2\left(a^3+b^3+c^3\right)-ab\left(a+b\right)-bc\left(b+c\right)-ac\left(a+c\right)$

$=\left(a^3+b^3-ab\left(a+b\right)\right)+\left(b^3+c^3-bc\left(b+c\right)\right)+\left(a^3+c^3-ac\left(a+c\right)\right)$

$=\left(a+b\right).\left(a-b\right)^2+\left(b+c\right).\left(b-c\right)^2+\left(a+c\right).\left(a-c\right)^2\geq 0$.

Do $a+b,b+c,a+c\geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $ax^2+bcx+b^3+c^3-4abc=0$ (1)

$\left(a\neq 0\right)$ vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có nghiệm: $ax^2+bx+c=0$ $\left(2\right)$ và $ax^2+cx+b=0$ (3).

Lời giải:

Vì (1) vô nghiệm nên ta có:

$\Delta_1=b^2c^2-4a\left(b^3+c^3-4abc\right)<0\Leftrightarrow\left(b^2-4ac\right)\left(c^2-4ab\right)<0(*)$

Phương trình(2) có: $\Delta_2=b^2-4ac$; Phương trình (3) có: $\Delta_3=c^2-4ab$

Nên $(*)\Leftrightarrow\Delta_2.\Delta_3<0\Rightarrow$ trong hai số Δ_2,Δ_3 luôn có một số dương và một số âm dẫn đến trong hai phương trình (2) và (3) luôn có một phương trình có nghiệm và một phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5)

a) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+2b+3c=1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$4x^2-4(2a+1)x+4a^2+192abc+1=0$ và

$4x^2-4(2b+1)x+4b^2+96abc+1=0$.

b) Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm : $x^2+ax+1=0;$ $x^2+bx+1=0; x^2+cx+1=0$

c) Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm: $ax^2+2bx+c=0$ (1) ; $bx^2+2cx+a=0$ (2) $cx^2+2ax+b=0$ (3).

Lời giải:

a) Hai phương trình trên lần lượt có

$\Delta'_1=16a(1-48bc), \Delta'_2=16b(1-24ac)$. Vì a,b là các số dương nên Δ'_1, Δ'_2 lần lượt cùng dấu với $1-48bc$ và $1-24ac$. Mặt khác ta lại có $1-48bc+1-24ac=2-24c(a+2b)=2-24c(1-3c)=2(6c-1)^2\geq 0$. Dẫn đến $\Delta'_1+\Delta'_2\geq 0$. Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

b). Ba phương trình đã cho lần lượt có $\Delta_1=a^2-4;\Delta_2=b^2-4;\Delta_3=c^2-4$.
Do đó $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=a^2+b^2+c^2-12$.
Lại có
$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq(a+b+c)^2$.Suy ra $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{6^2}{3}=12$. Do đó $a^2+b^2+c^2-12\geq 0$ hay $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\geq 0$. Vậy có ít nhất một trong ba phương trình đã cho có nghiệm.

c) Nếu Trong ba số a,b,c có một số bằng 0, chẳng hạn $a=0\Rightarrow(2)$ có nghiệm $x=0$.

Ta xét a,b,c là các số thực khác 0, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có : $\Delta'_1 = b^2 - ac; \Delta'_2 = c^2 - ab; \Delta'_3 = a^2 - bc$.

Xét tổng $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ ta có:

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \ge 0$$

Suy ra trong ba số $\Delta'_1; \Delta'_2; \Delta'_3$ có ít nhất một số không âm hây ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Ví dụ 6)

a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ trong đó b,c là các số nguyên. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên k để được $f(k) = f(2015).f(2016)$.

b) Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$. Giả sử phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm nếu: $(b+1)^2 > 4(b+c+1)$.

Giải:

a) Đây là bài toán khó: Để chứng minh sự tồn tại của số k ta cần chỉ ra tính chất:

Với mọi đa thức bậc 2 dạng $f(x) = x^2 + px + q$. Ta luôn có $f(f(x)+x) = f(x).f(x+1)$ với mọi x. Thật vậy ta có:

$$f(f(x)+x) = \left[f(x)+x\right]^2 + b\left[f(x)+x\right] + c$$
$$= f^2(x) + 2f(x).x + x^2 + b.f(x) + bx + c$$
$$= f^2(x) + 2f(x).x + b.f(x) + x^2 + bx + c$$
$$= f^2(x) + 2f(x).x + bf(x) + f(x)$$
$$= f(x)\left[f(x) + 2x + b + 1\right] = f(x)\left[x^2 + 2x + 1 + b(x+1) + c\right] = f(x).f(x+1)$$

Trở lại bài toán chọn $x = 2015$ ta có

$f\left(f\left(2015\right)+2015\right)=f\left(2015\right).f\left(2016\right)$. Ta suy ra số k cần tìm chính là: $k=f\left(2015\right)+2015$.

b) Ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)-x=f^2\left(x\right)+bf\left(x\right)+c-x$

$=f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-x\right]+x\left[f\left(x\right)-x\right]+b\left[f\left(x\right)-x\right]+x^2+bx+c-x$ hay

$f\left(f\left(x\right)\right)-x=\left[f\left(x\right)-x\right]\left[f\left(x\right)+x+b+1\right]=\left[f\left(x\right)-x\right]\left[x^2+\left(b+1\right)x+b+c+1\right]$

Để ý rằng phương trình $x^2+\left(b+1\right)x+b+c+1=0$ có

$\Delta=\left(b+1\right)^2-4\left(b+c+1\right)>0$ và $f\left(x\right)-x=0$ có 2 nghiệm phân biệt nên suy ra $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ có 4 nghiệm.

Chú ý:

+ Để chứng minh trong n số $a_1,a_2,...a_n$ có ít nhất một số không âm (hoặc một số dương) ta chỉ cần chứng minh tổng $k_1a_1+k_2a_2+....+k_na_n\ge 0$ trong đó $k_1,k_2...k_n\ge 0$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$a\left(x-a\right)\left(x-c\right)+b\left(x-c\right)\left(x-a\right)+c\left(x-a\right)\left(x-b\right)=0$ (1)

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)x^2-2\left(ab+bc+ca\right)x+3abc=0$ (2)

Vì $a+b+c\ne 0$ nên (2) là phương trình bậc hai, do đó để chứng minh phương trình có nghiệm ta chỉ cần chứng minh $\Delta'\ge 0$

Ta có:

$\Delta'=\left(ab+bc+ca\right)^2-3abc\left(a+b+c\right)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc\left(a+b+c\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(ab-bc\right)^2+\left(bc-ca\right)^2+\left(ca-ab\right)^2\right]\ge 0$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Cách 2: Gọi $f\left(x\right)$ là vế trái của phương trình (1). Ta có:

$f(0)=-3abc; f(a)=a(a-b)(a-c); f(b)=b(b-a)(b-c); f(c)=c(c-a)(c-b)$

$\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c)=-3\left[abc(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2 \leq 0 \Rightarrow$ trong bốn số $f(0), f(a), f(b), f(c)$ luôn tồn tại hai số có tích không dương. Dẫn đến phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Cho a,b,c thỏa mãn: $3a+4b+6c=0$. CHứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $f(x)=ax^2+bx+c=0$

Cách 1:

* Nếu $a=0 \Rightarrow 4b+6c=0 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}b \Rightarrow f(x)=b\left(x-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f(x)$ có nghiệm

* Nếu $a \neq 0$ ta có:

$$\Delta = b^2-4ac=\frac{(3a+6c)^2}{16}-4ac=\frac{(3a-6c)^2}{16} \geq 0 \Rightarrow f(x)=0 \text{ có nghiệm}$$

Cách 2: Ta có:

$$2f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)=2(a+b+c)+4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)=3a+4b+6c=0$$

$$\Rightarrow f(1)=-2f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(1).f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow f(x)=0 \text{ có nghiệm.}$$

Cách 3: Ta có

$$f(0)=c; f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}a+\frac{3}{4}b+c=\frac{9a+12b+16c}{16}=\frac{3(3a+4b+6c)-2c}{16}=-\frac{c^2}{8}$$

Suy ra $f(0).f\left(\frac{3}{4}\right) \leq 0$ suy ra phương trình luôn có nghiệm.

Nhận xét:

Với cách giải thứ hai thì việc khó nhất là phải chứng minh được đẳng thức: $2f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Tại sao ta xét $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ và nhân thêm các hệ số 2 và 4. Vậy ngoài hai giá trị $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ ta còn có những giá trị nào khác không? Câu trả lời là có, chẳng hạn ta xét $f(1), f\left(\frac{2}{3}\right), f(0)$. Ta cần xác định hệ số $m,n,p>0$ saocho: $mf(1)+nf\left(\frac{2}{3}\right)+pf(0)=3a+4b+6c$.

Đồng nhất các hệ số ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+\frac{4}{9}n=3 \\ m+\frac{2}{3}n=4 \\ m+n+p=6 \end{cases} \Leftrightarrow m=1, n=\frac{9}{2}, p=\frac{1}{2}$. Vậy ta có: $2f(1)+9f\left(\frac{2}{3}\right)+f(0)=0 \Rightarrow$ trong ba số $f(1), f\left(\frac{2}{3}\right), f(0)$ tồn tại một số không âm và một số không dương, dẫn đến tích hai số đó không dương hay phương trình có nghiệm.

Cách giải thứ 3: Tại sao ta chỉ ra được $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Điều này là hoàn toàn tự nhiên nếu ta cần tạo ra một tỷ lệ $3a:4b$ để tận dụng giả thiết: $3a+4b+6c=0$

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Ví dụ 9: Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n<m; mp<n^2$ và $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0$. Chứng minh rằng phương trình: $f(x)=ax^2+bx+c=0$ (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

Giải: Để chứng minh (1) có nghiệm $x \in (0;1)$, ta sẽ chỉ ra các số thực $\alpha, \beta \in (0;1)$ sao cho $f(\alpha).f(\beta) < 0$. Vì $\alpha, \beta \in (0;1)$ và có giả thiết $n < m \Leftrightarrow \frac{n}{m} < 1$ nên dẫn đến ta xét: $f\left(\frac{n}{m}\right) = a\frac{n^2}{m^2} + b\frac{n}{m} + c$. Mặt khác từ: $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0 \Rightarrow \frac{m}{n^2}\left(a.\frac{n^2}{m^2} + b\frac{n}{m} + c\right) + c\left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2} f\left(\frac{n}{m}\right) + c.\frac{n^2 - pm}{pn^2} = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{pm - n^2}{pm} c = \frac{pm - n^2}{pm} f(0)$$

* Xét $c = 0$

- Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$

- Nếu $a \neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{n}{m} < 1$ và

$f(x) = x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \in (0;1)$

* Xét $c \neq 0$ ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right).f(0) = \frac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x \in \left(0;\frac{n}{m}\right) \subset (0;1)$

VẬN DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC GTLN,GTNN (Phương pháp miền giá trị hàm số)

Bài toán 1: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ với $mx^2 + nx + p > 0 \forall x$.

Phương pháp:

Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức: Khi đó

$$y_0 = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \Leftrightarrow \left(y_0 m - a\right)x^2 + \left(y_0 n - b\right)x + y_0 p - c = 0 \text{. (*)}$$

Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $y_0 m - a = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{a}{m}$ thay vào $(*)$ ta tìm được x suy ra $y_0 = \frac{a}{m}$ là một giá trị của biểu thức.

+ Nếu $y_0 m - a \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq \frac{a}{m}$ thì $(*)$ là phương trình bậc 2 ẩn x. Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta \geq 0$. Từ đó ta suy ra điều kiện của y_0. Trên cơ sở đó ta tìm được GTLN, GTNN (nếu có) của biểu thức.

+ Ngoài ra trong quá trình chứng minh bất đẳng thức ta cần nắm kết quả sau: Ta có: $a.f\left(x\right) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$. Từ đó suy ra Nếu $\Delta \leq 0$ thì $a.f\left(x\right) \geq 0 \Leftrightarrow a, f\left(x\right)$ luôn cùng dấu. Một kết quả thường xuyên sử dụng trong giải toán là: "Nếu tam thức bậc 2 : $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow f\left(x\right) \geq 0, \forall x$."

Ví dụ 1: Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức:

a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$.

b) $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$.

c) $A = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$ với $y \neq 0$.

d) $A=\dfrac{2x^2+12xy}{1+2xy+2y^2}$ biết $x^2+y^2=1$ (Đề TS ĐH khối B- 2008)

Lời giải:

a) Do $x^2-5x+7=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, $\forall x$ suy ra biểu thức y luôn xác định với mọi x. Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức khi đó ta có:

$y_0=\dfrac{x^2}{x^2-5x+7}\Leftrightarrow (y_0-1)x^2-5y_0x+7y_0=0\ \ (*)$.

+ Nếu $y_0=1\Rightarrow -5x+7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{5}$ điều đó có nghĩa là $y_0=1$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $y_0\neq 1$ thì $(*)$ là một phương trình bậc 2 có

$\Delta=(5y_0)^2-4.(y_0-1).7y_0=y_0(28-3y_0)$. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0\Leftrightarrow 0\leq y_0\leq\dfrac{28}{3}$. Để ý rằng với mỗi giá trị $y_0=0$ hoặc

$y_0=\dfrac{28}{3}$ thì $\Delta=0$ nên

+ GTNN của y là 0 khi và chỉ khi $x=-\dfrac{5y_0}{2(y_0-1)}=0$.

+ GTLN của y là $\dfrac{28}{3}$ khi và chỉ khi $x=-\dfrac{5y_0}{2(y_0-1)}=\dfrac{5.\dfrac{28}{3}}{2\left(\dfrac{28}{3}-1\right)}=\dfrac{14}{5}$.

b) ĐKXĐ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $P=\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+1}\Leftrightarrow (P-1)x^2+8x+(P-7)=0\ \ (1)$. Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x.

Trường hợp 1: $P-1=0\Leftrightarrow P=1$ thì $x=\dfrac{3}{4}\ \ (*)$

Trường hợp 2: $P-1\neq 0 \Leftrightarrow P\neq 1$ phương trình (1) có nghiệm khi

$\Delta'\geq 0 \neq P^2-8P-9\leq 0 \Leftrightarrow \left(P+1\right)\left(P-9\right)\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq P\leq 9$ (**).

Kết hợp (*) và (**) ta có $\min P=-1; \max P=9$.

c) $A=\dfrac{2x^2-2xy+9y^2}{x^2+2xy+5y^2}$. Biểu thức A có dạng đẳng cấp bậc 2.

Ta chia tử số và mẫu số cho y^2 và đặt $t=\dfrac{x}{y}$ thì $A=\dfrac{2t^2-2t+9}{t^2+2t+5}$. Ta có $t^2+2t+5=\left(t+1\right)^2+4>0$ với mọi t. Gọi A_0 là một giá trị của biểu thức.

Khi đó ta có: $A_0=\dfrac{2t^2-2t+9}{t^2+2t+5} \Leftrightarrow \left(A_0-2\right)t^2+\left(2A_0+2\right)t+5A_0-9=0$ (*)

+ Nếu $A_0=2$ thì $t=-\dfrac{1}{6}$ suy ra $A_0=2$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $A_0\neq 2$ thì (*) là một phương trình bậc 2 có

$\Delta'=\left(A_0+1\right)^2-\left(A_0-2\right)\left(5A_0-9\right)=-4A_0^2+21A_0-17$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow -4A_0^2+21A_0-17\geq 0 \Leftrightarrow \left(1-A_0\right)\left(4A_0-17\right)\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq A_0\leq \dfrac{17}{4}$. Từ đó ta có GTNN của A là 1 khi và chỉ khi $t=-\dfrac{A_0+1}{A_0-2}=2 \Leftrightarrow x=2y$. GTLN của A là $\dfrac{17}{4}$ khi và chỉ khi $t=-\dfrac{A_0+1}{A_0-2}=-\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{3}y$.

d) Nếu $y=0$ thì $x^2=1 \Rightarrow P=2x^2=2$.

Xét $y\neq 0$ đặt $x=ty$ thì $A=\dfrac{2x^2+12xy}{1+2xy+2y^2}=\dfrac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{2\left(t^2+6t\right)}{t^2+2t+3}$.

Giải tương tự như câu b) Ta có $-6\leq A\leq 3$. Suy ra GTNN của A là -6 đạt được khi và chỉ khi $x=\frac{3}{\sqrt{13}};y=\frac{-2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{13}};y=\frac{2}{\sqrt{13}}$. GTLN của A là 3 đạt được khi và chỉ khi $x=\frac{3}{\sqrt{10}};y=\frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc

$x=-\frac{3}{\sqrt{10}};y=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ví dụ 2: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}xy+yz+zx=8\\x+y+z=5\end{cases}$. Tìm GTLN, GTNN của x.

Lời giải:

Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}yz=8-x\left(y+z\right)\\y+z=5-x\end{cases}$ (*) hay

$\begin{cases}yz=8-x\left(5-x\right)\\y+z=5-x\end{cases}$(*). Vì x,y,z là các số thực thỏa mãn $\left(*\right)$ nên suy ra y,z là hai nghiệm của phương trình: $t^2-\left(5-x\right)t+8-5x-x^2=0$ (**).

Điều kiện để phương trình (**) có nghiệm là:

$\Delta=\left(5-x\right)^2-4\left(8-5x+x^2\right)=-3x^2+10x-7\ge0\Leftrightarrow\left(7-3x\right)\left(1-x\right)\ge0$ hay $1\le x\le\frac{7}{3}$.

Khi $x=1\Rightarrow t=2\Rightarrow y=z=2$ nên GTNN của x là 1.

Khi $x=\frac{7}{3}\Rightarrow t=\frac{4}{3}\Rightarrow y=z=\frac{4}{3}$ suy ra GTLN của $x=\frac{7}{3}$.

Ví dụ 3) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=9xy+10yz+11zx$.

Lời giải:

Thay $z=1-x-y$ vào P ta có:

$P=9xy+z\left(10y+11x\right)=9xy+\left(1-x-y\right)\left(10y+11x\right)$

$=-11x^2+\left(11-12y\right)x-10y^2+10y$ hay

$11x^2+\left(12y-11\right)x+10y^2-10y+P=0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là $\Delta\ge 0\Leftrightarrow\left(12y-11\right)^2-4.11\left(10y^2-10y+P\right)\ge 0$ hay

$-296y^2+176y+121-44P\ge 0$

$\Leftrightarrow P\le-\frac{74}{11}\left(-y^2+\frac{22}{37}y-\frac{121}{296}\right)=-\frac{74}{11}\left(y-\frac{11}{27}\right)^2+\frac{495}{148}\le\frac{495}{148}$. Do đó

GTLN của P là $\frac{495}{148}$ đạt được khi $x=\frac{25}{74};y=\frac{11}{37};z=\frac{27}{74}$.

Ví dụ 4) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a+ab+2abc\le\frac{9}{2}$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $b=3-a-c$. Ta biến đổi bất đẳng thức thành:

$a+a\left(3-a-c\right)+2ac\left(3-a-c\right)-\frac{9}{2}\le 0\Leftrightarrow\left(2c+1\right)a^2+\left(2c^2-5c-4\right)a+\frac{9}{2}\ge 0$

coi đây là hàm số bậc 2 của a. Xét $f\left(a\right)=\left(2c+1\right)a^2+\left(2c^2-5c-4\right)a+\frac{9}{2}$

ta có hệ số của a^2 là $2c+1>0$ và ta có:

$\Delta=\left(2c^2-5c-4\right)^2-18\left(2c+1\right)=\left(2c-1\right)^2\left(c^2-4c-2\right)=$

$\left(2c-1\right)^2\left[c\left(c-3\right)-c-2\right]\le 0$ do $0<c<3$. Suy ra $f\left(a\right)\ge 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{3}{2},b=1,c=\frac{1}{2}$.

ĐỊNH LÝ VIET VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

Định lý Viet: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad (*)$$

Ghi chú: Trước khi sử dụng định lý Viet, chúng ta cần kiểm tra điều kiện phương trình có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$.

Một số ứng dụng cơ bản của định lý Viet

+ Nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai:

Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

+ Tính giá trị của biểu thức $g(x_1, x_2)$ trong đó $g(x_1, x_2)$ là biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (*):

Bước 1: Kiểm tra điều kiện $\Delta \geq 0$, sau đó áp dụng định lý Viet.

Bước 2: Biểu diễn biểu thức $g(x_1, x_2)$ theo $S = x_1 + x_2, P = x_1.x_2$ từ đó tính được $g(x_1, x_2)$.

Một số biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm thường gặp:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$;

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$;

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P) - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$;

$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P},...$

+ Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là x_1, x_2 cho trước:

Bước 1: Tính $S = x_1 + x_2; P = x_1x_2$.

Bước 2: Phương trình bậc hai nhận hai nghiệm x_1, x_2 là $X^2 - S.X + P = 0$.

+ Tìm điều kiện để phương trình bậc hai (*) (a, b, c phụ thuộc vào tham số m), có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn một điều kiện cho trước $h\left(x_1, x_2\right) = 0$ (1)

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình (*) có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$. Sau đó áp dụng định lý Viet để tính $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ (2) và $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$ (3) theo m.

Bước 2: Giải hệ phương trình (1),(2),(3) (thường sử dụng phương pháp thế) để tìm m, sau đó chú ý kiểm tra điều kiện của tham số m ở bước 1.

+ Phân tích đa thức bậc hai thành nhân tử: Nếu phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right)$.

+ Chứng minh bất đẳng thức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc 2 ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

Nếu: $x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow \left(x_1 - m\right)\left(x_2 - m\right) \leq 0$.

Nếu $m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ \left(x_1 - m\right)\left(x_2 - m\right) \geq 0 \end{cases}$

Nếu $x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ \left(x_1 - m\right)\left(x_2 - m\right) \geq 0 \end{cases}$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Không giải phương trình, cho biết dấu các nghiệm

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$ c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 20 > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 13 > 0 \end{cases}$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu dương.

b) Ta có: $P = x_1.x_1 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{2}{3} < 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

c) Ta có: $\begin{cases} P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{5} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-7}{5} < 0 \end{cases}$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S < 0$ nên hai nghiệm cùng dấu âm.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ b) $g(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $P(x;y) = 6x^2 - 11xy + 3y^2$ d) $Q(x;y) = 2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y$.

Lời giải:

a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{2}{3}$

Suy ra $f(x) = 3(x-1)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = (3x-2)(x-1)$.

b) Phương trình $-x^4+5x^2-4=0 \Leftrightarrow -\left(x^2\right)^2+5x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=1$ hoặc $x^2=4$ .Suy ra $g\left(x\right)=-\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=-\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)$.

c) Ta coi phương trình $6x^2-11xy+3y^2=0$ là phương trình bậc hai ẩn x.

Ta có $\Delta_x=\left(11y\right)^2-4.18y^2=49y^2\geq 0$. Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{11y\pm 7y}{12}\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{3}$ hoặc $x=\dfrac{3y}{2}$. Do đó

$$P\left(x;y\right)=6\left(x-\frac{y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right)=\left(3x-y\right)\left(2x-3y\right)$$

d) Ta có $2x^2-2y^2-3xy+x-2y=0 \Leftrightarrow 2x^2+\left(1-3y\right)x-2y^2-2y=0$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x và có:

$$\Delta_x=\left(1-3y\right)^2-8\left(-2y^2-2y\right)=25y^2+10y+1=\left(5y+1\right)^2\geq 0$$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3y-1\pm\left(5y+1\right)}{4}\Leftrightarrow x=2y$ hoặc

$x=\dfrac{-y-1}{2}$. Do đó $Q\left(x;y\right)=2\left(x-2y\right)\left(x-\dfrac{-y-1}{2}\right)=\left(x-2y\right)\left(2x+y+1\right)$

Ví dụ 3: Phân tích đa thức $f\left(x\right)=x^4-2mx^2-x+m^2-m$ thành tích của hai tam thức bậc hai ẩn x.

Lời giải:

Ta có $x^4-2mx^2-x+m^2-m=0 \Leftrightarrow m^2-\left(2x^2+1\right)m+x^4-x=0$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn m và có:

$$\Delta_m=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)=4x^2+4x+1=\left(2x+1\right)^2\geq 0$$

Suy ra $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1$ hoặc

$m=\dfrac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x$ .Do đó $f\left(x\right)=\left(m-x^2-x-1\right)\left(m-x^2+x\right)$.

Ví dụ 4:

a) Cho phương trình $2x^2 - mx + 5 = 0$, với m la tham số. Biết phương trình có một nghiệm là 2, tìm m và tìm nghiệm còn lại.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

c) Cho phương trình $x^2 - 4x = 2|x-2| - m - 5$, với m là tham số. Xác định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải:

a) Vì $x = 2$ là nghiệm của phương trình nên thay $x = 2$ vào phương trình ta được $8 - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2}$. Theo hệ thức Viet ta có: $x_1x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$.Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{2}$.

b) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m + 2 \geq 0 \\ S = 2m + 1 > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > 1 \vee m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thỏa mãn bài toán.

c) Ta có $x^2 - 4x = 2|x-2| - m - 5 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 2|x-2| = -m - 1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2|x-2| = -m - 1 \quad (1)$

Đặt $t = |x-2| \geq 0$. Khi đó (1) thành: $t^2 - 2t + 1 + m = 0 \quad (2)$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m > 0 \\ 1 + m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5)

a) Tìm m để phương trình $3x^2+4(m-1)x+m^2-4m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

b) Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ (1) có hai nghiệm phân biệt và nghiệm này gấp $k\,(k\neq -1)$ lần nghiệm kia khi và chỉ khi $(1+k)^2ac=kb^2$.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2-mx+m^2-m-3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC, biết độ dài cạnh huyền $BC=2$.

Lời giải:

a) Trước hết phương trình phải có hai nghiệm khác 0 nên:

$\begin{cases}\Delta'=m^2+4m+1>0\\ \frac{c}{a}=\frac{m^2-4m+1}{3}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m+1>0\\ m^2-4m+1\neq 0\end{cases}$ (*)**.** Khi đó theo định lý Viet ta có: $S=x_1+x_2=\frac{4(1-m)}{3};P=x_1x_2=\frac{m^2-4m+1}{3}$

Ta có: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1x_2-2)=0$

(do $x_1x_2\neq 0$) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\ x_1x_2-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m^2-4m-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1;m=-1;m=5$

Thay vào (*) ta thấy $m=-1$ không thỏa mãn.

Vậy $m=1;m=5$ là giá trị cần tìm.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm x_1,x_2 và nghiệm này gấp k lần nghiệm kia thì ta có:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(x_1 - kx_2\right)\left(x_2 - kx_1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+k^2\right)x_1x_2 - k\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1+k^2\right)x_1x_2 - k\left[\left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+k^2\right)\frac{c}{a} - k\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(1+k^2\right)ac = k\left(b^2 - 2ac\right) \Leftrightarrow \left(1+k\right)^2 ac = kb^2$$

Giả sử $\left(1+k\right)^2 ac = kb^2$ ta chỉ cần chứng minh (1) có nghiệm là được. Ta có:

$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - \dfrac{4k}{\left(k+1\right)^2}b^2 = b^2\dfrac{\left(k-1\right)^2}{\left(k+1\right)^2} \geq 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

c) Vì độ dài cạnh của tam giác vuông là số dương nên $x_1, x_2 > 0$.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1.x_2 = m^2 - m - 3 > 0 \end{cases}$ (1). Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta = m^2 - 4\left(m^2 - m - 3\right) \geq 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 12 \leq 0$ (2).

Từ giả thiết suy ra $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1.x_2 = 4$. Do đó

$m^2 - 2\left(m^2 - m - 3\right) = 4 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$

Thay $m = 1 \pm \sqrt{3}$ vào (1) và (2) ta thấy $m = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1 + \sqrt{3}$.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^4 - mx^3 + \left(m+1\right)x^2 - m\left(m+1\right)x + \left(m+1\right)^2 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = -2$.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình có bốn nghiệm đôi một phân biệt.

Lời giải:

a) Khi $m = -2$, ta có phương trình: $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

Kiểm tra ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) - 1 = 0$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Thay vào phương trình trên ta được:

$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Với $t = -1$ ta được

$x - \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy với $m = -2$ phương tình có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Nếu $x = 0$ phương trình đã cho thành: $(m+1)^2 = 0$

Khi $m \neq -1$ phương trình vô nghiệm.

Khi $m = -1$ thì $x = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho và khi đó phương trình đã cho có dạng $x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Trong trường hợp này phương trình chỉ có hai nghiệm nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $x \neq 0$ và $m \neq -1$. Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ và đặt $t = x + \frac{(m+1)}{x}$. Ta thu được phương trình: $t^2 - mt - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = m+1 \end{array}\right.$

Với $t = -1$ ta được $x^2 + x + (m+1) = 0 \quad (1)$

Với $t = m+1$ ta được $x^2 - (m+1)x + (m+1) = 0 \quad (2)$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi mỗi một trong các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt, đồng thời chúng không có nghiệm chung.

Để (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1 - 4(m+1) > 0 \\ (m+1)^2 - 4(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \qquad (*)$$

Khi đó nếu x_0 là một nghiệm chung của (1) và (2) thì:

$\begin{cases} (m+1) = -x_0^2 - x_0 \\ (m+1) = -x_0^2 + (m+1)x_0 \end{cases}$. Suy ra $(m+2)x_0 = 0$ điều này tương đương với hoặc $m = -2$ hoặc $x_0 = 0$.

Nếu $x_0 = 0$ thì $m = -1$ (không thỏa mãn). Nếu $m = -2$ thì (1) và (2) cùng có hai nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Do đó kết hợp với (*), suy ra phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 \neq m < -1$.

Ví dụ 8) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình:

a) $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

b) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

c) $x^2 - 3x - m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1) = 19$.

d) $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Lời giải:

a) Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho thành: $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (không thỏa mãn)

Nếu $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m.3(m-2) = -2m^2 + 4m + 1$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ (*). Với điều kiện (*) giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Từ yêu cầu bài toán và áp dụng Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \dfrac{2-m}{m}$

Thay $x=\dfrac{2-m}{m}$ vào phương trình ta được $(m-2(6m-4)=0 \Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có: $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+2)=4m-7$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{7}{4}$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1x_2=m^2+2 \\ x_1+x_2=2m+1 \end{cases}$ thay vào hệ thức

$3x_1x_2-5(x_1+x_2)+7=0$, ta được $3m^2-10m+8=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$ hoặc $m=2$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có: $\Delta=9-4.1(-m)=9+4m$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{4}{9}$

Ta có: $x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_1)=19 \Leftrightarrow x_1^2-x_2^2.x_2+x_2^2-x_2^2.x_1=19$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-x_1^2.x_2-x_2^2.x_1=19 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-x_1.x_2(x_1+x_2)=19$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2(x_1+x_2)=19$. Theo định lý Viet ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1.x_2=-m \end{cases}$. Thay vào hệ thức $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1.x_2(x_1+x_2)=19$ ta được: $3^2-2(-m)-(-m).3=19 \Leftrightarrow 5m=10 \Leftrightarrow m=2$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Ta có: $\Delta'=4(m-1)^2-3(m^2-4m+1)=m^2+4m+1$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m<-2-\sqrt{3}$ hoặc $m>-2+\sqrt{3}$. Ta có: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. Theo định lý

Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-4(m-1)}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-(m^2-4m+1)}{3} \end{cases}$. Thay vào hệ thức $\dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, ta

được: $-\dfrac{4(m-1)}{3}.\dfrac{3}{m^2-4m+1}=-\dfrac{4(m-1)}{6}\Leftrightarrow \dfrac{2(m-1)(m^2-4m-5)}{3(m^2-4m+1)}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1)(m^2-4m-5) \\ m^2-4m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1\vee m=1\vee m=5 \\ m\neq 2\pm\sqrt{3} \end{cases}$. Đối chiếu điều kiện

ta được $m=1$ hoặc $m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 9) Cho phương trình $x^2-(m-1)-m^2+m-2=0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m.
b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1,x_2. Tìm m để biểu thức $A=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3-\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) Xét $a.c=-m^2+m-2=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0,\forall m\in\mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1,x_2.

Theo câu a) thì $x_1x_2\neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1,x_2.

Do x_1,x_2 trái dấu nên $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$ với $t>0$, suy ra $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3<0$, suy ra $A<0$

Đặt $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3=-t$, với $t>0$, suy ra $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3=-\dfrac{1}{t}$. Khi đó $A=-t-\dfrac{1}{t}$ mang giá trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất. Ta có

$-A = t + \frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$. Với $t = 1$, ta có

$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy với $m = 1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2.

Ví dụ 10) Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Lời giải:

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$, với mọi m.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$

a) Thay $m = x_1 + x_2$ vào $x_1x_2 = m - 1$, ta được $x_1x_2 = x_1 + x_1 - 1$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1x_2 = x_1 + x_1 - 1$.

b) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m+1}{m^2+2}$. Vì

$$A - 1 = \frac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \frac{2m + 1 - m^2 - 2}{m^2+2} = -\frac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra $A \leq 1, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu "=" xảy ta khi và chỉ khi $m = 1$

Và $A + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{m^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{2(m+1) + m^2 + 2}{2(m^2+2)} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Suy ra $A \ge -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$. Vậy GTLN của A bằng 1 khi $m = 1$ và GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$ khi $m = -2$.

Ví dụ 11) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng:
$|x_1 + x_2 + x_1x_2| \le \frac{9}{8}$.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m = m(1-m)$. Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$. Theo định lý Viet ta có:
$x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1$. Ta có

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| = |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1|$$

$$= |2m^2 - m - 1| = 2\left|m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right| = 2\left|\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right|$$

Vì $0 \le m \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4}$ suy ra $\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \le 0$

Do đó

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| = 2\left|\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right| = 2\left|\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4}\right)^2\right| = \frac{9}{8} - 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 13) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải:

Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+1)=4m-3$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m>\frac{3}{4}$. Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2m+1$ và $x_1x_2=m^2+1$. Do đó $P=\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{m^2+1}{2m+1}=\frac{2m-1}{4}=\frac{5}{4(2m+1)}$. Suy ra $4P=2m-1+\frac{5}{2m+1}$. Do $m>\frac{3}{4}$ nên $2m+1>1$

Để $P\in\mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m+1=5 \Leftrightarrow m=2$

Thử lại với $m=2$, ta được $P=1$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 14)

a) Tìm m để phương trình $x^2+x+m=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 và biểu thức: $Q=x_1^2(x_1+1)+x_2^2(x_2+1)$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho $P=x_1x_2-2(x_1+x_2)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2-(3a-1)x-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{3}{2}(x_1-x_2)^2+2\left(\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2$

Lời giải:

a) Phương trình có nghiệm khi $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 1-4m\ge 0 \Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$ (*).

Khi đó theo định lý Viet: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -1 \\ P = x_1x_2 = m \end{cases}$. Ta có:

$Q = S\left(S^2 - 3P\right) + S^2 - 2P = m \le \frac{1}{4}$(do (*)) $\Rightarrow \max Q = \frac{1}{4}$ đạt được khi $m = \frac{1}{4}$. Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $\Delta' = \left(m+1\right)^2 - \left(m^2 + 2\right) = 2m - 1$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$ (*). Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 2$ và $x_1x_2 = m^2 + 2$. Ta có

$P = x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) - 6 = m^2 + 2 - 2\left(2m + 2\right) - 6$

$= m^2 - 4m - 8 = \left(m - 2\right)^2 - 12 \ge -12$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy với $m = 2$ thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -12.

c) Ta có: $\Delta = \left(3a - 1\right)^2 + 16 > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo định lý Viet thì: $x_1 + x_2 = \frac{3a-1}{2}; x_1x_2 = -1$. Ta có

$$P = \frac{3}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 + 2\left[\frac{x_1x_2\left(x_1 - x_2\right) - 2\left(x_1 - x_2\right)}{2x_1x_2}\right]^2 = 6\left(x_1 - x_2\right)^2$$

$$= 6\left[\left(x_1 - x_2\right)^2 - 4x_1x_2\right] = 6\left[\frac{\left(3a-1\right)^2}{4} + 4\right] \ge 24$$. Đẳng thức xảy ra khi

$3a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$. Vậy minP=24.

Ví dụ 14: Giả sử phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm lớn hơn 1.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - a - 2b}{b - a + 1} \ge \frac{2\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}$.

Lời giải:

Theo định lý Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1.x_2 = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng : $\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}}$. Hay $\frac{x_1}{1+x_2} + 1 + \frac{x_2}{1+x_1} + 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}} + 2$

$(x_1 + x_2 + 1)\left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2}\right) \geq \frac{2\left(1+2\sqrt{x_1x_2}\right)}{1+\sqrt{x_1x_2}}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $x_1 + x_2 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 1$. Để chứng minh $(*)$ ta quy về chứng minh:

$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$ với $x_1, x_2 > 1$. Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức trên tương đương với $\left(\sqrt{x_1x_2} - 1\right)\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$ (Điều này là hiển nhiên đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^2 = 4b$.

Ví dụ 15: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$$

Lời giải:

Vì phương trình bậc 2 có 2 nghiệm nên $a \neq 0$. Biểu thức Q có dạng đẳng cấp bậc 2 ta chia cả tử và mẫu của Q cho a^2 thì $Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Vậy : $Q = \dfrac{18 - 9\dfrac{b}{a} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{9 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}} = \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2}$

* Ta GTLN của Q: Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1, x_2 \in [0;3]$.

Giảsử $0 \le x_1 \le x_2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \le x_1x_2 \\ x_2^2 \le 9 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \le 9 + 3x_1x_2$

$\Rightarrow Q \le \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 + 9}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3$.

Ta cũng có thể đánh giá theo cách:

$0 \le x_1; x_2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1(x_1 - 3) \le 0 \\ x_2(x_2 - 3) \le 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 3(x_1 + x_2) \\ x_1x_2 + 9 \ge 3(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \le x_1x_2 + 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \le 3x_1x_2 + 9$. Suy ra

$Q = \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \le \dfrac{18 + 9(x_1 + x_2) + 9 + 3x_1x_2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3$. Đẳng thức

xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{array}\right.$ hay $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 6 \\ \dfrac{c}{a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 3 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}$

Ta có $Q - 2 = \dfrac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \ge 0 \Rightarrow Q \ge 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$. Vậy GTLN của Q là 3 và GTNN của Q là 2.

Ví dụ 16: Cho phương trình $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=0$, trong đó a,b,c là các số nguyên và $a>0$, có hai nghiệm phân biệt trong khoảng (0;1). Tìm giá trị nhỏ nhất của a.

Giải: Gọi $x_1,x_2\in\left(0;1\right)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình đã cho $\Rightarrow f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$. Vì a,b,c là các số nguyên và $a>0\Rightarrow f\left(0\right)=c=ax_1x_2, f\left(1\right)=a+b+c=a\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)$ là các số nguyên dương.

Áp dụng BĐT Cauchy

tacó: $x_1\left(1-x_1\right)\le\frac{1}{4};x_2\left(1-x_2\right)\le\frac{1}{4}\Rightarrow x_1x_2\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)<\frac{1}{16}(2)$ (Vì do $x_1\ne x_2$ nên không có đẳng thức). Từ (1) và (2)$\Rightarrow\frac{a^2}{16}>1\Rightarrow a^2>16$

$\Rightarrow a\ge5$ (a là số nguyên dương). Xét đa thức $f\left(x\right)=5x\left(x-1\right)+1,$ ta thấy $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy giá trị nhỏ nhất của a bằng 5.

Ví dụ 17: Chứng minh: $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên lẻ.

Lời giải:

Ta có $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)^2$.

Xét dãy $S_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, ta chứng minh b_n là một số nguyên.

Xét $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1.x_2=1\end{cases}$ suy ra x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-x-1=0$.

Ta có $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = \left(x_1^n + x_2^n\right)\left(x_1 + x_2\right) - x_1x_2\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)$ hay $S_{n+1} = S_n - S_{n-1}$. Ta có $S_1 = 1, S_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 3, S_3 = S_2 - S_1 = 2$. Từ đó bằng phép quy nạp ta dễ dàng chứng minh được S_n là số nguyên . Suy ra $a_n = \left(S_n\right)^2$ là số chính phương.

CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

Kiến thức cần nhớ: Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol $(P): y = ax^2$ ta cần chú ý:

a) Nếu đường thẳng (d) là $y = m$ (song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$.

b) Nếu đường thẳng $(d): y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ.

Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì $A\left(x_1; mx_1 + n\right), B\left(x_2; mx_2 + n\right)$ khi đó ta có:

$AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + m^2\left(x_2 - x_1\right)^2} = \sqrt{\left(m^2 + 1\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2\right]}$. Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet.

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a đi qua điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ thì có dạng: $y = a\left(x - x_0\right) + y_0$

Ví dụ 1) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0;1)$ và cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt M và N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$.

(Trích đề thi THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHQGHN năm học 2000-2001).

Lời giải:

Đường thẳng (d) qua I với hệ số góc a có dạng: $y = ax + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax - 1 = 0$ (1). Vì $\Delta = a^2 + 4 > 0$ với mọi a, (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ hay $M(x_1; ax_1 + 1), N(x_2; ax_2 + 1)$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = a, x_1x_2 = -1$.

$MN = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + 1 - ax_1 - 1)^2 = 40$

$\Leftrightarrow (a^2 + 1)(x_2 - x_1)^2 = 40 \Leftrightarrow (a^2 + 1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 40$

$\Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^2 + 4) = 40 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$.

Ví dụ 2: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$.

a) Với $m = 1$, xác định tọa độ giao điểm A, B và (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$. (Trích đề tuyển sinh lớp 10 – thành phố Hà Nội năm 2014).

Lời giải:

a) Với $m = 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$ (do $a + b + c = 0$)

Ta có $y(-1) = \frac{1}{2}; y(3) = \frac{9}{2}$. Vậy tọa độ các giao điểm là $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (*)$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $\Delta' = m^2 - m^2 + 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Cách 1:

Khi $m > -1$ ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Cách 2:

Khi $m > -1$ ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a'}\right| = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2m+2}$

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$2\sqrt{2m+2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+2} = 2 \Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$, điểm $M(m;0)$ với m là tham số khác 0 và điểm $I(0;-2)$.Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn $AB > 4$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng $(d): y = \frac{2}{m}x - 2$. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol là: $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{m}x - 2$

$\Leftrightarrow mx^2 + 4x - 4m = 0$. Ta có $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0, \forall m$ suy ra (d) luôn cắt (P)

tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;\frac{-x_1^2}{2}\right), B\left(x_2;\frac{-x_2^2}{2}\right)$

$AB^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2\right)=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]\left[1+\frac{1}{4}\left(x_1+x_2\right)^2\right]$

Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=\frac{-4}{m}, x_1x_2=-4$.

Vậy $AB^2=\left(\frac{16}{m^2}+16\right)\left(1+\frac{4}{m^2}\right)>16$ nên $AB>4$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=\frac{-x^2}{2}$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0;-2)$ và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A,B khi k thay đổi.

b) Gọi H,K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A,B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I.

Trích đề thi THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHQGHN năm học 2006-2007

Lời giải:

a) Đường thẳng $(d): y=kx-2$

Xét phương trình $\frac{-x^2}{2}=kx-2 \Leftrightarrow x^2+2kx-4=0$ (1). Ta có: $\Delta'=k^2+4>0$ với mọi k, suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Suy ra $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thì $H(x_1;0), K(x_2;0)$. Khi đó

$IH^2=x_1^2+4, IK^2=x_2^2+4, KH^2=\left(x_1-x_2\right)^2$. Theo định lý Viet thì $x_1x_2=-4$ nên $IH^2+IK^2=x_1^2+x_2^2+8=KH^2$. Vậy tam giác IHK vuông tại I.

Ví dụ 4: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B .Gọi x_1, x_2 là hoành độ của các điểm A, B . Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \dfrac{2\left(x_1 + x_2\right) + 7}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$.

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8 .

Lời giải:

a). Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ là:

$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$ ta có

$Q = \dfrac{2m + 7}{m^2 + 8}$. (dùng phương pháp miền giá trị hàm số- Xem thêm phần ứng dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất của Q là 1 và GTNN của Q là $-\dfrac{1}{8}$ đạt được khi $m = 1$ và $m = -8$.

b) Để ý rằng đường thẳng $\left(d\right)$ luôn đi qua điểm cố định $I\left(0;4\right)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ thì $x_1.x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có:

$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \dfrac{1}{2}AH.OI + \dfrac{1}{2}BK.OI$ với H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A, B trên trục Oy. Ta có

$OI = 4, AH = \left|x_1\right| = -x_1, BK = \left|x_2\right| = x_2$. Suy ra $S_{OAB} = 2\left(x_2 - x_1\right)$

$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4\left(x_1 - x_2\right)^2 = 4\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2\right]$. Theo định lý Viet ta có:

$x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -4$. Thay vào ta có: $S_{OAB}^2 = 4\left(m^2 + 16\right) = 64 \Leftrightarrow m = 0$.

Nếu thay điều kiện $S = 8$ thành diện tích tam giác OAB nhỏ nhất ta cũng có kết quả như trên. Vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow S^2 \geq 4\left(m^2 + 16\right) \geq 64$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x - y - a^2 = 0$ và parabol $(P): y = ax^2 \ (a > 0)$.

a) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng A và B nằm bên phải trục tung.

b) Gọi x_A, x_B là hoành độ của A và B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{4}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{x_A.x_B}$. (Trích Đề thi vòng 1 THPT chuyên – TP Hà Nội năm học 2005-2006)

Lời giải:

a) Xét phương trình $ax^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0 \quad (1)$

(d) cắt (P) .tại hai điểm phân biệt A, B khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a < 1$. Kết hợp với điều kiện ta có $0 < a < 1$ khi đó (1) có hai nghiệm dương nên A, B nằm ở bên phải trục Oy.

b) Theo định lý Vi et ta có:

$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{2}{a} > 0 \\ x_A.x_B = a > 0 \end{cases}$.Ta có: $T = 2a + \dfrac{1}{a}$ theo bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương ta có: $2a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$. Vậy $\min T = 2\sqrt{2}$ khi $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 6) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$.

(Trích đề TS lớp 10 Trường THPT chuyên ĐH sư phạm Hà Nội năm 2009)

Lời giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và Parabol là:

$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

b) Theo định lý Viet, ta có: $x_1+x_2=m; x_1x_2=-1$

$M=(y_1-1)(y_2-1)=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=x_1^2x_2^2+2x_1x_2-(x_1+x_2)^2+1=-m^2\le 0$

Vậy $\max M=0$ khi $m=0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-m-8=0$ có nghiệm $x=2$. Tìm các giá trị của m và tìm nghiệm còn lại của phương trình.

2) Cho phương trình $x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi các nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Không tính giá trị của x_1, x_2, hãy tính các giá trị của biểu thức sau:

$A=x_1^2+x_2^2$ $\qquad$ $B=x_1^3+x_2^3$

$C=\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$

3) Cho phương trình bậc hai $x_2-2(m+2)x+1+m^2=0$, m là tham số.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức P sau theo m:

$P=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(x_1x_2+1)}$. Từ đó tìm các giá trị của m để P đạt giá trị lớn nhất và tìm các giá trị của m để P đạt giá trị nhỏ nhất.

4) Cho phương trình $x^2-2(2m+1)x+4m^2+4m-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

5) Cho phương trình $x^2-2x+m=0$, m là tham số. tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

6) Cho phương trình $x^2-2mx+(5m-4)=0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có:

a) Nghiệm bằng 0.
b) Hai nghiệm phân biệt trái dấu.
c) Hai nghiệm phân biệt cùng dương.

7) Cho phương trình $x^2-x+3m=0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2$.

8) Cho các phương trình $x^2+ax+b=0$ (1); $x^2+cx+d=0$ (2), trong đó các hệ số a,b,c,d đều khác 0. Biết a,b là nghiệm của phương trình (2) và c,d là nghiệm của phương trình (1). Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2=10$.

9)

a) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$ Chứng minh rằng $ac(a+c-3b)+b^3=0$.
b) Giả sử p,q là hai số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm $x^2+px+q=0; x^2+qx+p=0$.

10) Tìm các số a,b thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

a) Hai phương trình $x^2+ax+11=0$ và $x^2+bx+7=0$ có nghiệm chung;
b) $|a|+|b|$ bé nhất.

11)

a) Cho các số a,b,c thỏa mãn $a>0, bc=4a^2, 2a+b+c=abc$. Chứng minh rằng $a\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Cho a,b,c là ba số khác nhau và $c\ne 0$. Chứng minh rằng nếu các phương trình $x^2+ax+bc=0$ và $x^2+bx+ac=0$ có đúng một nghiệm chung thì các nghiệm còn lại của chúng là nghiệm của phương trình $x^2+cx+ab=0$.

12)

a) Cho $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$, biết rằng phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm. chứng minh rằng phương trình $af^2(x)+bf(x)+c=x$ vô nghiệm.

b) Cho các số a_1,a_2,b_1,b_2 sao cho các phương trình sau vô nghiệm: $x^2+a_1x+b_1=0$ và $x^2+a_2x+b_2=0$. Hỏi phương trình $x^2+\frac{1}{2}(a_1+a_2)x+\frac{1}{2}(b_1+b_2)=0$ có nghiệm hay không? Vì sao?

13) Cho phương trình $x^2-2mx+m-2=0\quad(x$ là ẩn số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M=\frac{-24}{x_1^2+x_2^2-6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

14) Cho phương trình $x^2+2(m-2)x-m^2=0$, với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m=0$.

2) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với $x_1<x_2$, tìm tất cả các nghiệm của m sao cho $|x_1|-|x_2|=6$.

15) Cho phương trình $x^2-2x-3m^2=0$, với m là tham số

1) Giải phương trình khi $m=1$.
2) Tìm tất các các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1,x_2\neq 0$ và thỏa điều kiện $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}=\frac{8}{3}$.

16) Cho phương trình bậc hai: $x^2-2mx+m^2-m+1=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m=2$.
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2=3x_1x_2-1$.

17) Cho phương trình: $x^2+2(m+1)x-2m^4+m^2=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m=1$.
b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

18) Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+4=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m=2$.
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+2(m+1)x_2\leq 3m^2+16$.

19) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=mx-3$ tham số m và parabol $(P): y=x^2$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$.
b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=2$.

20) Cho phương trình: $x^2+x+m-5=0$ (1) (m là tham số, x là ẩn)

1) Giải phương trình (1) với $m=4$.

2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ thỏa mãn:
$\dfrac{6-m-x_1}{x_2}+\dfrac{6-m-x_2}{x_1}=\dfrac{10}{3}$.

21) Cho phương trình: $x^2-2x+m+3=0$ (m là tham số).

1) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=3$. Tìm nghiệm còn lại.
2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=8$.

22) Chứng minh rằng phương trình: $x^2-2(m+1)x+m-4=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và biểu thức $M=x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m.

23) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+3m+2=0$ (1) (m là tham số).

1) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=12$.

24) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-\dfrac{2}{3}(m+1)x+\dfrac{1}{3}$ (m là tham số).

1) Chứng minh rằng mỗi giá trị của m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm (P) và (d), đặt
$f(x)=x^3+(m+1)x^2-x$.
Chứng minh rằng: $f(x_1)-f(x_2)=-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)^3$.(Trích đề thi vào lớp 10 trường chuyên ĐHSP Hà Nội 2013)

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Vì $x=2$ là nghiệm của phương trình nên ta có:
$4-2(2m+1)+m^2-m-8=0 \Leftrightarrow m^2-5m-6=0 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=6$.

Với $m=-1$ ta có phương trình: $x^2+x-6=0$. Phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=2$, nghiệm còn lại là $x=-3$ (vì tích hai nghiệm bằng (-6))

Với $m=6$, ta có phương trình $x^2-13x+22=0$, phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$, nghiệm còn lại là $x=11$ (vì tích hai nghiệm bằng 22)

2) Xét $\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4.\left(-\sqrt{2}\right)=3+4\sqrt{2}>0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

Chú ý: Có thể nhận xét $ac<0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu

b) Áp dụng định lý Vi ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\sqrt{3} \\ x_1.x_2=-\sqrt{2} \end{cases}$

$$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-\sqrt{2}\right)=3+2\sqrt{2}$$

$$B=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\left(-\sqrt{3}\right)^2-3\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}-3\sqrt{6}$$

$$C=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=\frac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{-\sqrt{3}-2}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$$

3) a) Ta có $\Delta=(-m)^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m\neq 2$. Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=m-1 \end{cases}$. Khi đó $P=\dfrac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2+2}=\dfrac{2m+1}{m^2+2}$

Ta có $P=\dfrac{2m+1}{m^2+2}=\dfrac{m^2+2-(m-1)^2}{m^2+2}=1-\dfrac{(m-1)^2}{m^2+2}\le 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $m=1$ nên giá trị lớn nhất $\max P=1$. Tương tự ta có giá trị nhỏ nhất

$\min P = -\frac{1}{2}$, đạt được khi $m = -2$.(Xem thêm phần phương pháp miền giá trị hàm số)

4)

Cách 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow \left[-(2m+1)^2\right] - \left(4m^2 + 4m - 3\right) = 4 > 0, \forall m$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m. Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m+1) (1) \\ x_1.x_2 = 4m^2 + 4m - 3 (2) \end{cases}$.

Có thể giả sử $x_1 = 2x_2$ (3). Khi đó từ (1) và (3)có $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2(2m+1)}{3} \\ x_1 = \dfrac{4(2m+1)}{3} \end{cases}$. Thay

vào (2) ta có phương trình $8.\dfrac{(2m+1)^2}{9} = 4m^2 + 4m - 3 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 35 = 0$

Giải phương trình ta được $m = \frac{5}{2}$ hoặc $m = -\frac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2: Từ yêu cầu đề bài suy ra $x_1 = 2x_2$ hoặc $x_2 = 2x_1$,

tức là: $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$

áp dụng hệ thức Viet ta được phương trình $4m^2 + 4m - 35 = 0$.

5)

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Theo hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \,(1) \\ x_1.x_2 = m \,(2) \end{cases}$. Ta có $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2x_2$ (3). Từ (1) và (3) ta có được $\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$. Thay vào (2) ta có được $m = -3$ thảo mãn điều kiện

6)

a) Phương trình có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow 5m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow 1.(5m-4) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{5}$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - (5m-4) > 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-4) > 0 \Leftrightarrow m > 4$ hoặc $m < 1$.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 5m - 4 \end{cases}$

Hai nghiệm của phương trình cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ 5m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$

Kết hợp với điều kiện ta có $\frac{4}{5} < m < 1$ hoặc $m > 4$.

7) **Cách 1.** Đặt $x - 1 = t$, ta có
$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow t_1 < 0 < t_2$

Phương trình ẩn x là $x^2 - x + 3m = 0$ được đưa về phương trình ẩn t:

$(t+1)^2 - (t+1) + 3m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 3m = 0$. Phương trình ẩn t phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Vậy $m<0$

Cách 2: Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1-12m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{12}$. Khi đó theo hệ thức Viet ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1.x_2=3m \end{cases}$ (1). Hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn

$x_1<1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<0<x_2-1 \Leftrightarrow x_1-1$ và x_2-1 trái dấu

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$ (2). Thay (1) vào (2) ta có:

$3m-1+1<0 \Leftrightarrow m<0$.

Kết hợp với điều kiện ta có $m<0$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý:

Nếu hai nghiệm $x_1,x_2<1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số âm.

Nếu hai nghiệm $x_1,x_2>1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số dương.

8) Giải:

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $a+b=-c; ab=d; c+d=-a; cd=b$.

Ta có: $\begin{cases} c+d=-a \\ a+b=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-d \\ a+b=-c \end{cases} \Rightarrow b=d$

Kết hợp với $ab=d$ và $cd=b$ suy ra $a=1, c=1$

Do $a+b=-c$ và $c+d=-a$ suy ra $b=-2, d=-2$

Do đó $a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+(-2)^2+1^2+(-2)^2=10$.

9)

a) Vì $a \neq 0$ nên

$ac\left(a+c-3b\right)+b^3 = ac^2 + a^2c + b^3 - 3abc = a^3\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 3\frac{bc}{a^2}\right]$(*). Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Khi đó (*) thành:

$a^3\left[x_1^2x_2^2 + x_1x_2 - \left(x_1+x_2\right)^3 + 3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)\right]$

$= a^3\left[x_1^2x_2^2 + x_1x_2 - \left(x_1^3 + x_2^3\right)\right] = a^3\left(x_1^2 - x_2\right)\left(x_2^2 - x_1\right)$

$\Rightarrow ac\left(a+c-3b\right)+b^3 = a^3\left(x_1^2 - x_2\right)\left(x_2^2 - x_1\right)$

Mà theo giả thiết ta có $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ và $ax_1 + bx_2 + c = 0\left(a \neq 0\right)$

Suy ra $bx_2 + c = -ax_2^2 = -ax_1 \Rightarrow x_2^2 - x_1 = 0$. Do đó $ac\left(a+c-3b\right)+b^3 = 0$

b) Vì p,q nguyên dương khác nhau nên xảy ra hai trường hợp là $p > q$ hoặc $p < q$.

Nếu $p > q$ suy ra $p \geq q+1$.Khi đó $\Delta = p^2 - 4q \geq \left(q+1\right)^2 - 4q = \left(q-1\right)^2 \geq 0$.

Vậy trong trường hợp này phương trình $x^2 + px + q = 0$ có nghiệm.

Tương tự trường hợp $p < q$ thì phương trình $x^2 + qx + p = 0$ có nghiệm (đpcm).

10)

a) Theo điều kiện đầu bài thì ta gọi x_0 là nghiệm chung hai phương trình, ta có:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 11 = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2 + \left(a+b\right)x_0 + 18 = 0$$

Do đó phương trình $2x^2 + \left(a+b\right)x + 18 = 0$ có nghiệm (*)

Khi đó $\Delta = \left(a+b\right)^2 - 144 \geq 0$ hay $\left|a+b\right| \geq 12$.

Mặt khác, ta có $\left|a\right| + \left|b\right| \geq \left|a+b\right| \geq 12$. Vậy $\left|a\right| + \left|b\right|$ bé nhất bằng 12 khi và chỉ khi a và b cùng dấu.

Với $a+b=-12$, thay vào (*) ta được: $2x^2-12x+18=0$. Phương trình trên có nghiệm kép $x=3$.

Thay $x=3$ vào các phương trình đã cho ta được $a=-\frac{20}{3};b=-\frac{16}{3}$.

Với $a+b=12$ thay vào (*) ta được: $2x^2+12x+18=0$. Phương trình trên có nghiệm kép $x=-3$

Thay $x=-3$ vào phương tình ta được: $a=\frac{20}{3};b=\frac{16}{3}$. Vậy các cặp số sau thỏa mãn điều kiện bài toán: $(a;b)=\left(-\frac{20}{3};-\frac{16}{3}\right),\left(\frac{20}{3};\frac{16}{3}\right)$.

11)

a) Từ giả thiết ta có: $bc=4a^2$ và $b+c=abc-2a=4a^3-2a=2a\left(2a^2-1\right)$. Suy ra b,c là nghiệm của phương trình $x^2-\left(4a^3-2a\right)x+4a^2=0$. Khi đó

$$\Delta'=a^2\left(2a^2-1\right)^2-4a^2\geq 0\Leftrightarrow\left(2a^2-1\right)^2\geq 4\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ (vì $a>0$).

b) Giả sử x_0 là nghiệm chung, tức là $\begin{cases}x_0^2+ax_0+bc=0\\x_0^2+bx_0+ca=0\end{cases}$

$\Rightarrow(a-b)x_0-c(a-b)\Leftrightarrow(a-b)(x_0-c)=0$. Vì $a\neq b$ nên $x_0=c$. Khi đó ta có: $c^2+bc+ca=0\Leftrightarrow c(a+b+c)=0,$ Do $c\neq 0$ nên $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c$. Mặt khác theo định lý Viet, phương trình $x^2+ax+bc=0$ còn có nghiệm $x=b;$ phương trình $x^2+bx+ac=0$ còn có nghiệm $x=a$.Theo định lý đảo của định lý Viet, hai số a và b là nghiệm của phương trình: $x^2-(a+b)x+ab=0$ hay $x^2+cx+ab=0$ (đpcm).

12)

a) Vì phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm, nên suy ra $f(x)>x$ hoặc $f(x)<x,\forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó $af^2(x)+bf(x)+c>f(x)>x,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $af^2(x)+bf(x)+c<f(x)<x,\forall x\in\mathbb{R}$.Tức là phương trình $af^2(x)+bf(x)+c=x$ vô nghiệm.

b) Từ giả thiết suy ra $a_1^2 - 4b_1 < 0$ và $a_2^2 - 4b_2 < 0$. Do đó

$x^2 + a_1x + b_1 = \left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2 - 4b_1}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. và

$x^2 + a_2x + b_2 = \left(x + \frac{a_2}{2}\right) - \frac{a_2^2 - 4b_2}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$x^2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}\left[\left(x^2 + a_1x + b_1\right) + \left(x^2 + a_2x + b_2\right)\right] > 0$.

Do vậy phương trình $x^2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = 0$ vô nghiệm.

13)

a) $\Delta' = m^2 - m + 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi m Vậy phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

b) Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = m - 2$

$$M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_2} = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2}$$

$= \frac{-24}{(2m)^2 - 8(m-2)} = \frac{-24}{4m^2 - 8m + 16} = \frac{-6}{(m-1)^2 + 3} \geq -2$. Dấu “=” xảy ra khi $m = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = -2$ khi $m = 1$.

14)

1) Khi $m = 0$ phương trình thành: $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

2) $\Delta' = (m-2)^2 + m^2 = 2m^2 - 4m + 4 = 2(m^2 - 2m + 1) + 2$

$= 2(m-1)^2 + 2 > 0, \forall m$ .Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .Ta có $S = x_1 + x_2 = 2(2-m); P = x_1x_2 = -m^2 \leq 0$

Ta có $|x_1| - |x_2| = 6 \Rightarrow x_1^2 - 2|x_1x_2| + x_2^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 = 36 \Leftrightarrow 4(2-m)^2 = 36 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow m = -1 \vee m = 5$.

15)

1) Khi $m=1$ phương trình thành: $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (do $a-b+c=0$).

2) Với $x_1, x_2 \neq 0$ ta có: $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\left(x_1^2-x_2^2\right)=8x_1x_2$

$\Leftrightarrow 3\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)=8x_1x_2$. Ta có $a.c=-3m^2 \leq 0$ nên $\Delta \geq 0, \forall m$

Khi $\Delta \geq 0$, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2$ và $x_1.x_2=\frac{c}{a}=-3m^2 \leq 0$

Phương trình có hai nghiệm $\neq 0$ do đó $m \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0$ và $x_1x_2<0$. Giả sử $x_1>x_2$

Với $a=1 \Rightarrow x_1=-b'-\sqrt{\Delta'}$ và $x_2=-b'+\sqrt{\Delta'} \Rightarrow x_1-x_2=2\sqrt{\Delta'}=2\sqrt{1+3m^2}$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3.2\left(-2\sqrt{1+3m^2}\right)=8.\left(-3m^2\right)$ và $m \neq 0$

$\Leftrightarrow 4m^4-3m^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=1 \\ m^2=-\frac{1}{4}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\pm 1$.

16)

a) Khi $m=2$ ta có phương trình:

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x^2-x-3x+3=0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)-3\left(x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Phương trình có tập nghiệm là: $S=\{1;3\}$

b) Ta có $\Delta'=m^2-\left(m^2-m+1\right)=m-1$.

Để phương trình bậc hai đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta'>0 \Rightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.Khi đó theo hệ thức Viet ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m^2-m+1 \end{cases}$. Theo bài ra:

$x_1^2+x_2^2=3x_1x_2-1 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3x_1x_2-1$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-5x_1x_2+1=0 \Rightarrow 4m^2-5\left(m^2-m+1\right)+1=0$

$\Leftrightarrow m^2-5m+4=0 \Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(m-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $m>1$ ta có $m=4$ thỏa mãn bài toán.

17)

a) Khi $m=1$ phương trình thành: $x^2+4x-1=0$ có $\Delta'=2^2+1=5>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-2-\sqrt{5};x_2=-2+\sqrt{5}$

b) Ta có: $\Delta'=2m^4+2m+1=2m^4-2m^2+\frac{1}{2}+2m^2+2m+\frac{1}{2}$

$=2\left(m^2-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, $\forall m$. Nếu $\Delta'=0\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-\frac{1}{2}=0\\m+\frac{1}{2}=0\end{cases}$ (vô nghiệm). Do đó $\Delta'>0,\forall m$. Vậy phương trình luôn có hai nghiêm phân biệt với mọi m.

18)

a) Với $m=2$, ta có phương tình: $x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$.

b) Xét phương trình (1) ta có: $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+4)=2m-3$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,x_2\Leftrightarrow m\geq\frac{3}{2}$.Theo hệ thức Viet:

$\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\x_1x_2=m^2+4\end{cases}$. Theo giả thiết: $x_1^2+(x_1+x_2)x_2\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow x_1^2+(x_1+x_2)^2x_2\leq 3m^2+16\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_1x_2\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1x_2\leq 3m^2+16\Leftrightarrow 4(m+1)^2-(m^2-4)\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow 8m\leq 16\Leftrightarrow m\leq 2$. Vậy $\frac{3}{2}\leq m\leq 2$.

19)

1) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$ nên có: $0=m.1-3\Rightarrow m=3$

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P):

$x^2-mx+3=0$. Có $\Delta=m^2-12$, nên (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1,x_2 khi

$\Delta = m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 12 \Leftrightarrow |m| > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{3} \\ m < -2\sqrt{3} \end{array}\right.$. Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$. Theo bài ra ta có:

$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow m^2 - 4.3 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (TM). Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

20)

1) Thay $m = 4$ vào phương trình ta có: $x^2 + x - 1 = 0$

Có $\Delta = 1^2 + 4.1.1 = 5$. Vậy phương trình có 2 nghiệm:

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì:

$\Delta = 1 - 4(m-5) > 0 \Rightarrow m < \dfrac{21}{4}$. Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = -1 \quad (1)$;

$x_1x_2 = m - 5 \quad (2)$

Xét:

$$\frac{6-m-x_1}{x_2} + \frac{6-m-x_2}{x_1} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(6-m)x_1 + (6-m)x_2 - x_1^2 - x_2^2}{x_1.x_2} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6-m)(x_1+x_2) - (x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{10}{3}$$

Thay (1),(2) vào ta có: $\dfrac{-1(6-m) - 1 + 2(m-5)}{m-5} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3m-17}{m-5} = \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).Vậy với $m = -1$ thì bài toán thỏa mãn.

21)

1) Phương trình có nghiệm $x = 3$

$\Leftrightarrow 3^2 = 2.3 + m + 3 = 0 \Leftrightarrow 6 + m = 0 \Leftrightarrow m = -6$

Ta có: $x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow 3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$.Vậy nghiệm còn lại là $x = -1$.

2) $\Delta' = 1 - (m+3) = -m - 2$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow -m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m < -2$

Khi đó: $x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = 8$

Áp dụng hệ thức Viet ta được: $2\left[2^2-3(m+3)\right]=8 \Leftrightarrow 2(4-3m-9)=8$

$\Leftrightarrow 8-6m-18=8 \Leftrightarrow -6m-18=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn). Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

22)

a) Phương trình: $x^2-2(m+1)x+4m-3=0 \quad (1)$

có $\Delta'=(m+1)^2-(4m-3)=m^2+2m+1-4m+3$

$=(m^2-2m+1)+3=(m-1)^2+3>0$ với mọi m. Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b). Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1,x_2

Theo hệ thức Viet ta có: $S=x_1+x_2=2m+2 \Rightarrow m=\dfrac{S-2}{2} \quad (2)$

$P=x_1x_2=4m-3 \Rightarrow m=\dfrac{P+3}{4} \Rightarrow \dfrac{S-2}{2}=\dfrac{P+3}{4} \Rightarrow 2S-4=P+3$.

$\Rightarrow 2S-P=7 \Rightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2-x_1x_2=7$

23) Phương trình $x^2+2(m+1)x+2m^2+2m+1=0$

Có $\Delta'=(m+1)^2-2m^2-2m-1=m^2+2m+1-2m^2-2m-1=-m^2$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\neq 0$.

Theo định lý Vi et ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2(m+1) \\ x_1.x_2=2m^2+2m+1 \end{cases} \Rightarrow x_1{}^2+x_2{}^2=12 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-12=0$$

Hay $4(m+1)^2-2(2m^2+2m+1)=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

24)

a) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\dfrac{-2(m+1)}{3}+\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x^2+2(m+1)x-1=10 \quad (1) \end{cases}$$

(1) Có hệ số a và c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Theo hệ thức Viet: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2(m+1)}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=\dfrac{-3(x_1+x_2)}{2} \\ 3x_1x_2=-1 \end{cases}$

Ta có: $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3+(m+1)\left(x_1^2-x_2^2\right)-x_1+x_2$

$\Rightarrow 2\left(f(x_1)-f(x_2)\right)=2x_1^3-2x_2^3-3(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_2^2\right)-2x_1+2x_2$

$=-x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_2-x_1)-2(x_1-x_2)=-x_1^3+x_2^3+(x_1-x_2)-2(x_1-x_2)$

$=-\left(x_1^3-x_2^3-3x_1x_2(x_1-x_2)\right)=\left[(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)\right]=-(x_1-x_2)^3$.

Nên $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{-1}{2}(x_1-x_2)^3$.