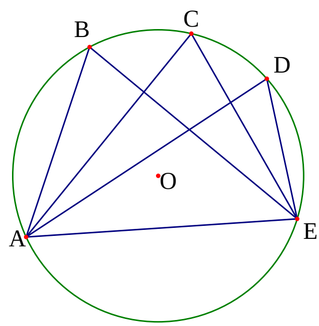
GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

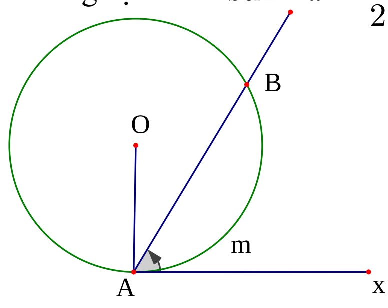
KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc ABE có đỉnh A nằm trên đường tròn O và các cạnh cắt đường tròn đó được gọi là góc nội tiếp (Hình). Trong trường hợp các góc nội tiếp có số đo không vượt quá 90^0 thì số đo của chúng bằng nửa số đo của góc ở tâm, cùng chắn một cung. Các góc nội tiếp đều có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Vì thế, nếu những góc này cùng chắn một cung (hoặc chắn những cung bằng nhau) thì chúng bằng nhau, nếu các góc nội tiếp này bằng nhau thì các cung bị chắn bằng nhau.



Trên hình vẽ ta có: $ABE = ADE = ADE = \frac{1}{2}\text{sđ}AE$

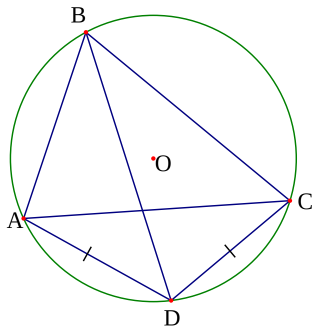
- Cho đường tròn O và dây cung AB. Từ điểm A ta kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn, khi đó BAx được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung AB (Hình). Cũng như góc nội tiếp, số đo góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn : $\text{sđ}BAx = \frac{1}{2}\text{sđ}AmB$.



<u>Chú ý:</u> Việc nắm chắc các khái niệm, định lý, hệ quả về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có thể giúp chúng ta so sánh số đo các góc, từ đó chứng minh được các đường thẳng song song với nhau, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau…

<u>I. Góc nội tiếp đường tròn</u>

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI



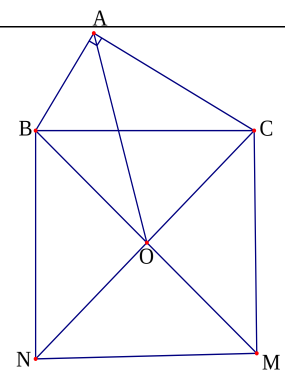
- Hai góc cùng chắn một cung thì bằng nhau và bằng nửa số đo cung bị chắn. Trên hình vẽ: $\text{sđ}ABD = \text{sđ}ACD = \frac{1}{2}\text{sđ}AD$.

- Các góc chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau. Trên hình vẽ:

$AD = CD \Leftrightarrow \text{sđ}AD = \text{sđ}CD \Leftrightarrow \text{sđ}ABD = \text{sđ}CAD$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc BAC.



Lời giải:

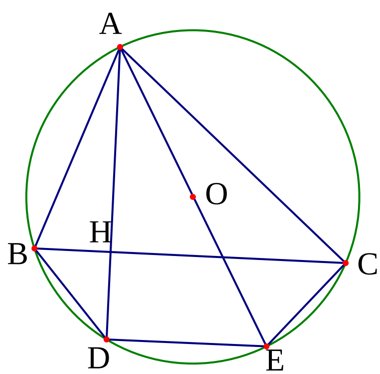
Vì O là tâm của hình vuông nên $BOC = 90^0$.

Lại có $BAC = 90^0$ suy ra bốn điểm A, B, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Đối với đường tròn này ta thấy $BAO = BCO$ (cùng chắn BO). Mà $BCO = 45^0 \Rightarrow BAO = 45^0$. Do $BAC = 90^0$, nên $CAO = BAC - BAO = 45^0$. Vậy $BAO = CAO$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông BAC (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $BAH = OAC$.

Lời giải:



Kẻ đường kính AE của đường tròn O. Ta thấy $ACE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $OAC + AEC = 90^0$ (1).

Theo giả thiết bài ra, ta có: $BAH + ABC = 90^0$ (2). Lại vì $AEC = ABC$ (cùng chắn AC) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $BAH = OAC$ (đpcm).

Lưu ý: Cũng có thể giải bài toán theo hướng sau: Gọi D là giao điểm của tia AH với đường tròn O, chứng tỏ tứ giác $BDEC$ là hình thang cân. Từ đó suy ra sđBD = sđCE, dẫn đến $BAD = CAE$, hay $BAH = OAC$.

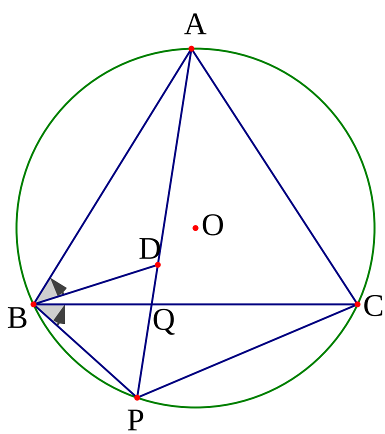
Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O . Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q .

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Lời giải:



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P . Mặt khác, $BPD = BPA = BCA = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn O). Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$. Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều). Lại vì $ABD + DBC = 60^0$, $PBC + DBC = 60^0$ nên $ABD = PBC$. Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $BPQ = 60^0$,

$APC = ABC = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) suy ra

$BPQ = APC, PBQ = PBC = PAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn PC).

Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$.

Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên

$PQ\ PB + PC\ = PB.PC$. Hệ thức này tương đương với

$\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

Ghi chú:

- Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB.CD = BC.AD$ (*) nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hòa. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.

- Nếu hệ thức (*) dưới dạng $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$ và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hòa.

- Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc BAD và BCD cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD.

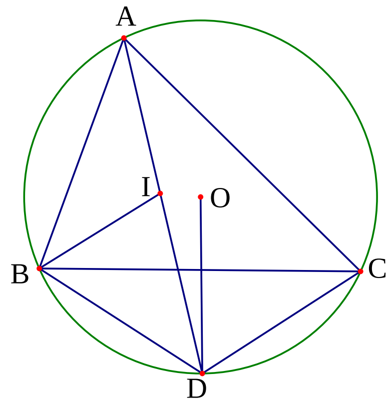
- Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi đường phân giác của góc ABC và ADC cắt nhau trên đường chéo AC.

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Giải:

Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $IBD = IBC + CBD$.



Mặt khác $CBD = CAD$

(Góc nội tiếp chắn cung CD) mà

$BAD = CAD$, $IBC = IBA$

(Tính chất phân giác) suy ra

$IBD = ABI + BAI$. Nhưng

$BID = ABI + BAI$ (Tính chất góc ngoài). Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

<u>Nhận xét:</u> Thông qua bài toán này ta có thêm tính chất: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là giao điểm của phân giác trong góc A với (O)

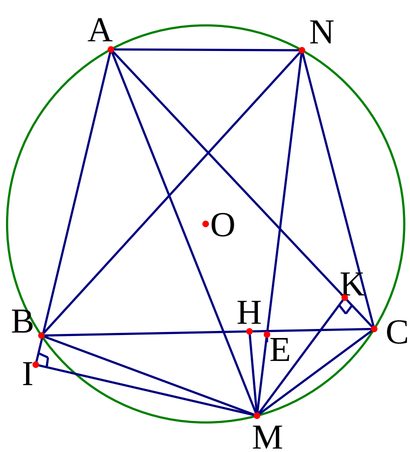
Ví dụ 5). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A. Vẽ MH, MK, MI lần lượt vuông góc với $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

Giải:

Trong bài toán có các tỷ số độ dài

ta nghỉ đến các tam giác đồng dạng

và định lý Thales.



<u>Cách 1:</u> Dựng đường thẳng qua A

song song với BC cắt (O) tại N. Gọi

E là giao điểm của BC và MN

Ta có: $AB = NC$.

Ta có $BME \equiv BMN = \frac{1}{2} s\text{đ}\left(AB + AN\right) = \frac{1}{2} s\text{đ}\left(NC + AN\right) = AMC$,

$MBC = MAC \Rightarrow \Delta BME \sim \Delta AMC$ và MH, MK là hai đường cao

tương ứng nên: $\frac{AC}{MK} = \frac{BE}{MH}$, chứng minh tương tự ta cũng có:

$\frac{AB}{MI} = \frac{CE}{MH}$. Cộng hai đẳng thức trên ta có: $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

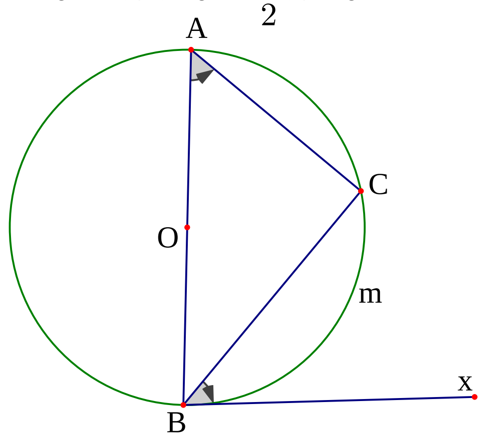
Cách 2: Ta thấy MH, MI là các đường cao của tam giác MBC, MAB nhưng hai tam giác này không đồng dạng với nhau. Điều này giúp ta nghỉ đến việc lấy một điểm E trên cạnh BC sao cho $BMA = DMC$ để tạo ra tam giác đồng dạng nhưng vẫn giữ được hai đường cao tương ứng. (Phần lời giải xin dành cho bạn đọc).

<u>2. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung</u>

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (tại một điểm trên đường tròn) bằng nửa số đo cung bị chắn.

- Trên hình vẽ: $\text{sđ}BAC = \text{sđ}xBC = \frac{1}{2}\text{sđ}BC$.

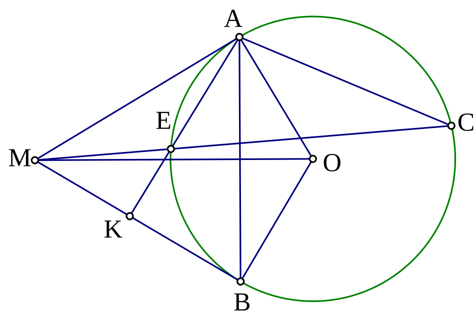


B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB

cắt đường tròn (O) tại C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = AK.EK$ và $MK = KB$.

Lời giải:



Do $MB//AC$ nên

$\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$ (1), ta lại có

$\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$

(cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2). Từ (1) và (2)

suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MK}{AK} = \dfrac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK.EK$

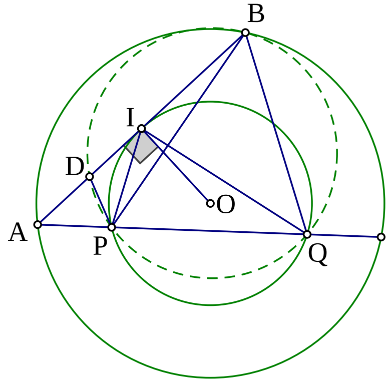
(3). Ta thấy $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$). Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK.EK$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là $MK = MB$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C) tâm O, AB là một dây cung của (C) không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn (C_1) tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP.AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Lời giải:

Ta có $\widehat{PQI} = \widehat{PIA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PI}$), nên $\Delta API \sim \Delta AIQ$ (g.g). Suy ra

$\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AI}{AQ} \Rightarrow AP.AQ = AI^2$ (không đổi). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại D $D \neq B$.



Khi đó $\Delta ADP \sim \Delta AQB$, suy ra

$\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{AP}{AB}$ hay $AD.AB = AP.AQ = AI^2$

(không đổi). Do đó điểm D là điểm cố định (đpcm).

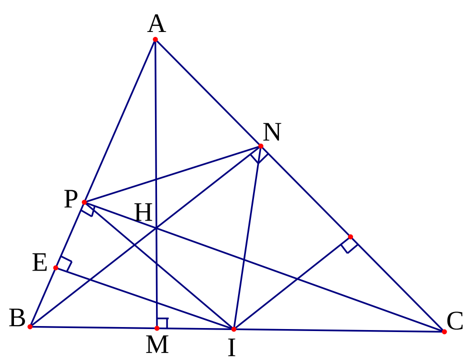
Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $BAC = 60^0$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của NIP. Tìm số đo BCP.

Lời giải:



a). Từ giả thiết ta có

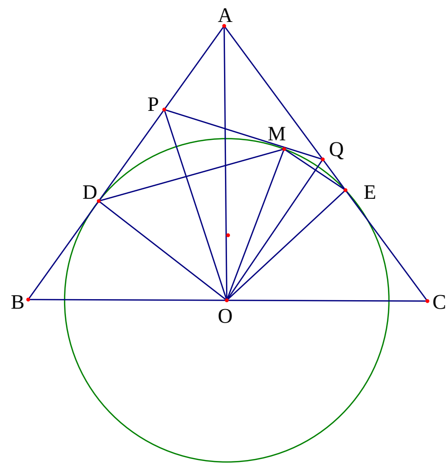
$IN = IP = \dfrac{1}{2}BC$ nên tam giác INP cân tại I. Lại vì B, P, N, C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta thấy $PIN = 2PBN = 60^0$. Vậy tam giác INP đều.

b) Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Từ điều kiện của bài toán ta thấy AI là tia phân giác của $BAC = 60^0$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Từ đó suy ra $BCP = 30^0$.

Ví dụ 4). Cho tam giác cân $ABC, (AB = AC)$. Gọi O là trung điểm của BC. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại D, E. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ DE tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh $BC^2 = 4BP.CQ$ và tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác APQ lớn nhất.

Lời giải:



Ta thấy $S_{\Delta ABC}$ không đổi nên $S_{\Delta APQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{BPQC} nhỏ nhất, đây là cơ sở để ta làm xuất hiện các biểu thức có liên quan đến BP, CQ. Ta có AB, PQ, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm D, M, E của (O) nên ta có: $AB \perp OD, PQ \perp OM, AC \perp OE, BD = CE$. Từ đó ta tính được:

$$S_{BPQC} = \frac{1}{2}R\ BP + PQ + CQ\ = \frac{1}{2}R\ BD + 2DP + 2EQ + CE$$

$$= R.\ BD + DP + EQ\ = R\ BP + CQ - BD\ .$$

Mặt khác ta cũng có: $POQ = \frac{1}{2}DOE = \frac{1}{2}\ 180^0 - A\ = B = C$ nên suy ra

$$BOP = 180^0 - POQ - QOC = 180^0 - QCO - QOC = CQO$$

$\Leftrightarrow \Delta BPO \sim \Delta COQ \Rightarrow \dfrac{BP}{CO} = \dfrac{BO}{CQ} \Leftrightarrow BP.CQ = BO.CO = \dfrac{BC^2}{4}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $BP + CQ \ge 2\sqrt{BP.CQ} = BC$

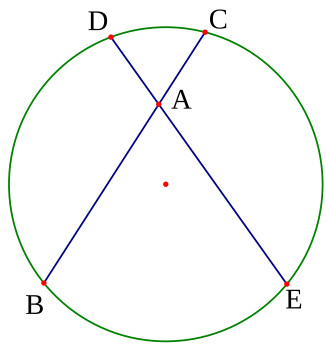
$\Rightarrow S_{BPQC} \ge R.\ BC - BD$. Vậy S_{BPQC} nhỏ nhất khi $BP = CQ \Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung DE .

Chủ đề . Góc có đỉnh ở trong hoặc ngoài đường tròn.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

*) Với đỉnh A nằm trong đường tròn O ta có góc với đỉnh ở trong đường tròn (hình)

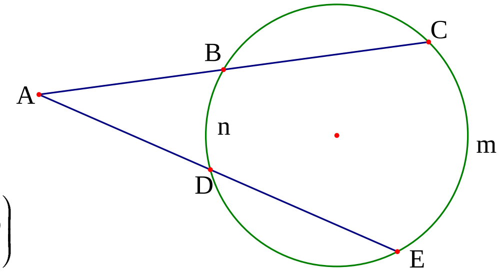
Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.



+ sđ$BAE = \dfrac{\text{sđ}BE + \text{sđ}CD}{2}$.

+ sđ$BAD = \dfrac{\text{sđ}BD + \text{sđ}CE}{2}$

*) Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn O ta có số đo góc nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

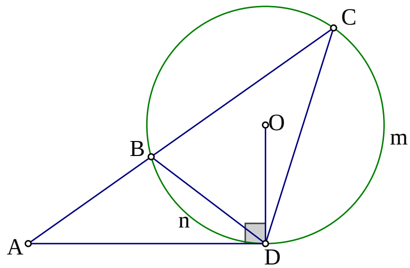


+ Trên hình vẽ ta có:

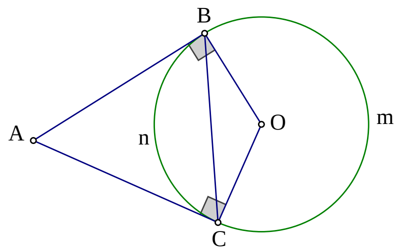
sđ$CAE = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}EmC - \text{sđ}BnD\right)$

Cần lưu ý đến các trường hợp sau:

+ Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AD là tếp tuyến của (O), qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn tại B, C thì $CAD = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}CmD - \text{sđ}BnD\right)$



+ Với Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AB, AC là 2 tếp tuyến của (O), (A, B là các tiếp điểm) thì



$$BAC = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}BmC - \text{sđ}BnC\right)$$

3. Áp dụng góc có đỉnh ở trong hoặc ngoài đường tròn.

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cũng như phần góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, các định lý và hệ quả của góc có đỉnh nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn giúp chúng ta tìm mối quan hệ giữa các số đo các góc, chứng minh các đường song song, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau, hai đường thẳng vuông góc với nhau.

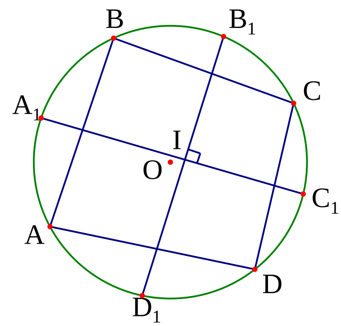
B. VÍ DỤ

Ví dụ). Trên đường tròn O cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau

Lời giải:

Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các cung AB, BC, CD, DA. Khi đó $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0$.

Xét góc A_1IB_1 là góc có đỉnh nằm



trong đường tròn O. Ta có

$$A_1IB_1=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1BB_1+\text{sđ}C_1DD_1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1B+\text{sđ}BB_1+\text{sđ}C_1D+\text{sđ}DD_1\right)$$

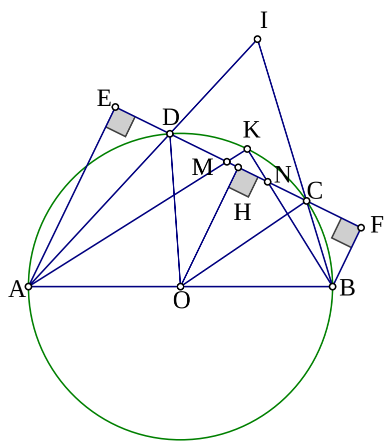
$=\frac{1}{4}\ \alpha+\beta+\gamma+\delta\ =90^0$. Nghĩa là $A_1C_1\perp B_1D_1$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, D, C, B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (C và D nằm về cùng một phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE+BF=R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo AIB.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA, KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

Lời giải:



a). Kẻ $OH\perp CD\ \ H\in CD$,

ta thấy OH là đường trung bình

của hình thang $ABFE$,

suy ra $OH=\frac{1}{2}\ AE+BF\ =\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó tam giác OCD đều,

suy ra sđ$COD =$ sđ$KCD = 60^0$.Ta thấy AIB có đỉnh nằm ngoài đường tròn O nên sđ$AIB = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AmB - \text{sđ}KCD\right) = \frac{1}{2}\ 180^0 - 60^0\ = 60^0$.

b) Ta thấy $\Delta AEM \sim \Delta NFB$ suy ra $EM.NF = AE.BF$ (không đổi) do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM + NF$ nhỏ nhất. Theo trên, $EM.NF$ không đổi nên $EM + NF$ nhỏ nhất khi $EM = FN = \sqrt{AE.BF}$.

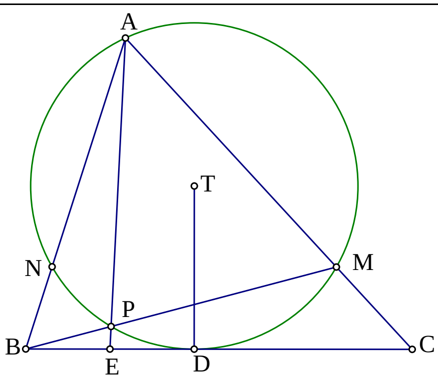
Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE.BF}$.

Ví dụ 3. Trong tam giác ABC, đường phân giác của BAC cắt cạnh BC tại D. Giả sử T là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của T và AC, P là giao điểm thứ hai của T và BM, E là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh rằng $EAB = MBC$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2 = EP.EA$.

Lời giải:



a). Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn T.

Do AD là phân giác của BAC nên sđ$DM =$ sđDN. Ta có

$$MBC = MBD = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DM - \text{sđ}DP\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DN - \text{sđ}DP\right)$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}NP = NAP = EAB \text{ (đpcm).}$$

b) Từ kết quả câu a, ta thấy $EBP = EAB$. Từ đó $\Delta EBP \sim \Delta EAB$ (g.g), suy ra $\dfrac{BE}{EP} = \dfrac{EA}{BE}$ hay $BE^2 = EP.EA$ (đpcm).

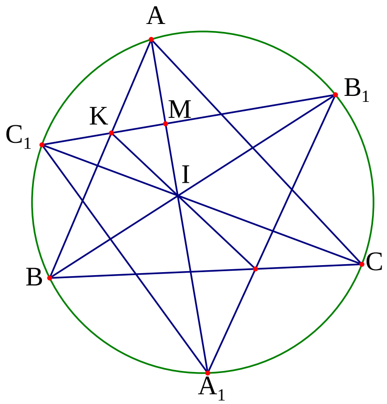
Ví dụ 4. Trên đường tròn O ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) CHứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là đường phân giác trong của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử T_1 và T_2 là hai tam giác nội tiếp đường tròn O, đồng thời các đỉnh của tam giác T_2 là các điểm chính giữa của các cung đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1. Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác T_1 và T_2 các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác T_1 và đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



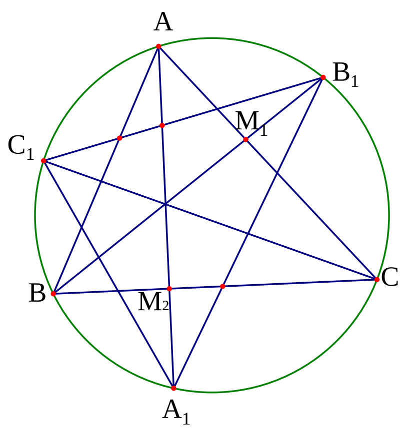
a) Ta chứng minh $AA_1 \perp B_1C_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, khi đó:

$$AMB_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1BC_1\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1B + \text{sđ}BC_1\right)$$

$$= ABB_1 + A_1AB + BCC_1 = \frac{1}{2}\ ABC + CAB + BCA\ = 90^0 \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1; CC_1 \perp A_1B_1$.

b)



Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC. Ta có

$$BM_1A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + \text{sđ}A_1C\right) = BCA + A_1C_1C \quad (1)$$

Lại có $BM_2A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + B_1C\right) = BCA + B_1C_1C$ (2). Vì

$BM_1A = BM_2A = 90^0$, nên từ (1) và (2) suy ra $A_1C_1A = B_1C_1C$. Tức là

CC_1 chứa đường phân giác của $A_1C_1B_1$.

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được AA_1 chứa đường phân giác của

$B_1A_1C_1$, BB_1 chứa đường phân giác của $A_1B_1C_1$.

c) Kí hiệu các đỉnh của tam giác T_1 là A, B và C ; A_1, B_1 và C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA và AB tương ứng. Khi đó T_2 là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác T_1 nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1. Ta chỉ cần chứng minh rằng $IK // AC$.

Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AKI cân tại K.

Từ đó $KIA = KAI = IAC$, dẫn đến $IK // AC$ (đpcm).

Dạng 4. Áp dụng giải các bài toán về quỹ tích và dựng hình

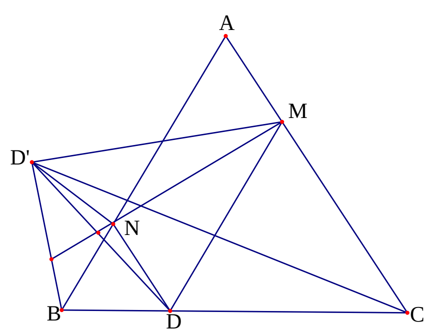
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Khái niệm cung chứa góc giúp chúng ta giải được nhiều bài toán quỹ tích, dựng hình, chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC $AB = AC$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM // AB$ ($M \in AC$), $DN // AC$ $N \in AB$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Lời giải:



Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB = ND = ND'$,(1) do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó $BD'D = \frac{1}{2} DMC$ (2).

Lại có $BND = DMC = BAC$, nên từ (1) và (2) suy ra $BD'C = BAC$(không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc BAC không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc BAC vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lưu ý: Quy trình để giải một bài toán quỹ tích như sau:

Để tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn một tính chất T nào đó ta tiến hành các bước

***Phần thuận:** Chỉ ra mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

***Phần đảo:** Chứng tỏ rằng mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

***Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

Chú ý rằng trong một số bài toán, sau phần thuận, trước phần đảo ta có thể thêm phần giới hạn quỹ tích.

(Bạn đọc tham khảo thêm phần quỹ tích ở cuối cuốn sách này)

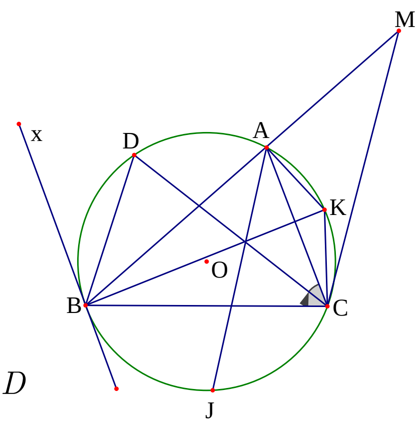
Ví dụ 2. Cho đường tròn O và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn O (A khác B, A khác C). Tia phân giác của ACB cắt đường tròn O tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn O tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn O.

Lời giải:



a). Ta có

$$DBK = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DA + \text{sđ}AK\right);$$

$$\text{sđ}DIB = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}BD + \text{sđ}KC\right)$$

Vì $\text{sđ}BD + \text{sđ}DA$ và ΔDBI cân tại D

nên $\text{sđ}KC + \text{sđ}AK$. Suy ra $AK = CK$

hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung BC không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

c) Phần thuận: Do ΔAMC cân tại A, nên $BMC = \frac{1}{2}BAC$. Giả sử số đo BAC là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

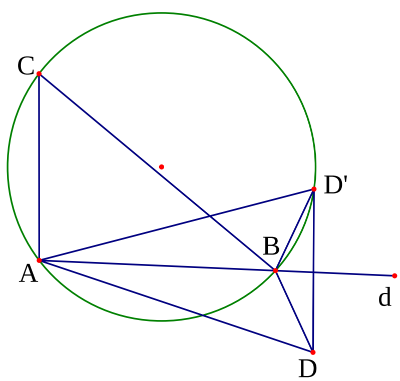
Phần đảo: Tiếp tuyến Bx với đường tròn O cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X. Lấy điểm M bất kỳ trên Cx (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn BC $M \neq X; M \neq C$. Nếu MB cắt đường tròn O tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn O .

Vì $BAC = 2\alpha; AMC = \alpha$ suy ra ΔAMC cân tại A hay $AC = AM$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung Cx, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và X.

Ví dụ 3. Cho trước điểm A nằm trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nủa mặt phẳng đối nhau bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $ACB = ADB$.

Lời giải:



***Phân tích:** Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $ACB = ADB$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d. Khi đó $ADB = AD'B$, vậy $ACB = AD'B$. Suy ra C và D' cùng nằm trên một nửa cung chứa góc dựng trên đoạn AB. Từ đó ta thấy B là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD'$.

***Cách dựng:** Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD'.

Dựng giao điểm của B của đường thẳng d với đường tròn ACD'.

***Chứng minh:** Rõ ràng với cách dựng trên, ta có $ACB = AD'B = ADB$.

***Biện luận:** Nếu ba điểm A, C, D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.

+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình.

+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng, $d \perp CD$ nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Lưu ý: Khái niệm cung chứa góc được áp dụng để chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn. Ví dụ để chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn, ta có thể chứng minh hai điểm A và B cùng nhìn CD dưới hai góc bằng nhau. Nói cách khác, nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác đó cùng thuộc một đường tròn.

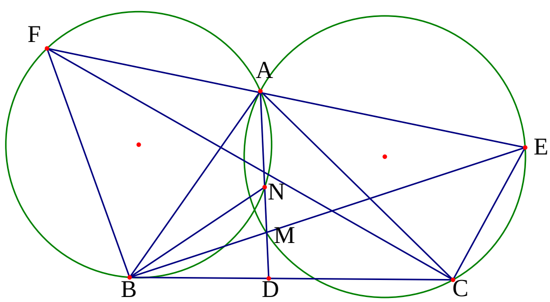
Ví dụ 4. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC ($D \in BC$). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $ABN = CBM$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $BCF = ACM$, từ đó suy ra $ACN = BCM$.

Lời giải:



a) Ta có $BFC = BAN$ (cùng chắn cung BN); $BEC = CAN$ (cùng chắn CM), mà $BAN = CAN$, suy ra $BFC = BEC$.

Từ đó bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả trên, ta có $CFE = NFA$. Do đó hai tia FA và FE trùng nhau nghĩa là ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).

c) Vì $BCF = BEF$ và do $ACM = BEF$ nên $BEF = ACM$. Từ đó suy ra $ACM = BCF$, dẫn đến $ACN = BCM$ (đpcm).