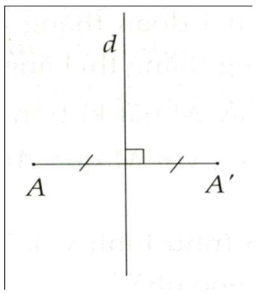
ĐỐI XỨNG TRỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng:* Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm ấy.



A đối xứng với A' qua d

$\Leftrightarrow$ d là trung trực của AA'.

Khi đó ta còn nói:

A' đối xứng với A qua d.

Hoặc

A và A' đối xứng nhau qua d.

* *Quy ước.* Một điểm nằm trên trục đối xứng thì điểm đối xứng với nó qua trục đối xứng là chính nó.

* *Hai hình đối xứng qua một đường thẳng:* Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu một điểm bất kì thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

* *Nhận xét:* Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

* *Hình có trục đối xứng:* Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xúng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H

* *Định lí:* Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A.CÁC DẠNG BÀI CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Dạng 1. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một đường thẳng

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xúng hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một đường thẳng.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH. Lấy các đi K theo thứ tự trên AB, AC sao cho AI = AK. Chứng minh hai điểm I, K đối xứng với nhau qua AH.

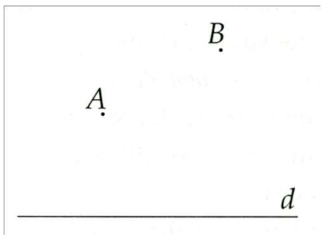
Bài 2. Cho tam giác cân ABC, có AM là trung tuyến ứng với BC. Chứng minh rằng cạnh AB đối xứng vói AC qua AM.

Dạng 2. Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán

Phương pháp giải: Sử dụng nhận xét hai đoạn thẳng (góc, giác) đối xứng vói nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác vuông ABC($\widehat{A} = 90°$). Lấy M bất kì trên cạnh Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB và AC. Chứng minh: A là trung điểm của EF.

Bài 4. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B (như hình vẽ). Tìm vị điểm C trên d để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.



Dạng 3.Tổng hợp

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB < AC, gọi d là đường trung trực của BC. Vẽ K đối xứng với A qua d.

a) Tìm đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AB qua đường thẳng d; tìm đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AC qua đường thẳng d.

b) Tứ giác AKCB là hình gì?

Bài 6. Cho tam giác ABC, có $\widehat{A} = 60°$, trực tâm H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh ΔBHC = ΔBMC.

b) Tính $\widehat{BMC}$.

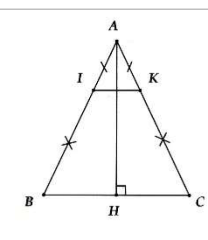
Bài 7. Cho tam giác *ABC*. Điểm M nằm trên đường phân giác của góc ngoài đỉnh *C*. Chứng minh *AC + CB < AM + MB*.

Bài 8. Cho tam giác nhọn *ABC*. Lấy M bất kì trên cạnh BC. Gọi *E, F* lần lượt là các điểm đối xứng với M qua *AB* và *AC*. Gọi *I, K* là giao điểm của *EF* với *AB* và *AC*.

a) Chứng minh rằng *MA* là tia phân giác của $\widehat{IMK}$.

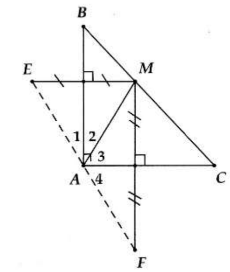
b) Khi M cố định, tìm vị trí điểm $P \in AB$ và $Q \in AC$ để chu vi tam giác *MPQ* đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

1. Sử dụng tính chất của tam giác cân chỉ ra được AH là phân giác của góc $\widehat{IAK}$. Tiếp tục chỉ ra được AH là đường trung trực của IK. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. **2.** Chứng minh được B đối xứng với C qua AM, A đối xứng với chính A qua AM. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. **3.** Sử dụng tính chất đối xứng trục ⇒ AE = AF (=AM) (1).	

Sử dụng tính chất của tam giác cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$. Từ đó chỉ ra được $\widehat{EAF} = 180^0 \Rightarrow A, E, F$ thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

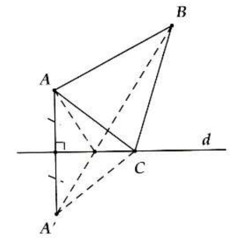


4. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d $\Rightarrow$ A' cố định.

Vì C $\in$ d $\Rightarrow$ CA = CA' (tính chất đối xứng trục). Ta có:

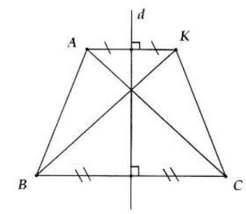
$P_{\Delta ABC}$ = AB + AC + BC

= AB + (CA' + CB) $\geq$ AB + BA' (không đổi. Dấu "=" xảy ra tức là chu vi tam giác nhỏ nhất khi C là giao điểm của d và BA'.



5. a) Đoạn thẳng đối xứng với AB, AC qua đường thẳng d lần lượt là KC, KB.

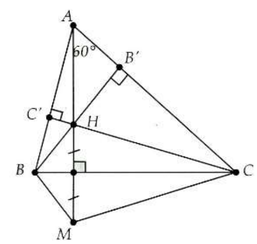
b) ta có AK//BC (vì cùng vuông góc với d) và AC = KB (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow$ tứ giác AKCB là hình thang cân.



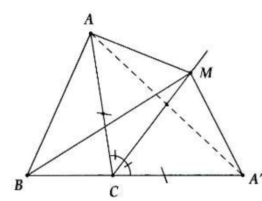
6. a) Chứng minh được ΔBHC = ΔBMC (c.c.c).

b) Gọi {C'} = CH $\cap$ AB. Sử dụng định lý tổng 4 góc trong tứ giác AB'HC' ta tính được $\widehat{B'HC'} = 120^0$

Ta có $\widehat{B'HC'} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BCH} = \widehat{BMC}$ $(do \, \Delta BHC = \Delta BMC) \Rightarrow \widehat{BMC} = 120^0$



7. Trên tia đối của tia CB lấy điểm A' sao cho CA' = CA. Sử dụng tính chất của tam giác cân ta có được CM là đường trung trực của AA' $\Rightarrow$ MA = MA'. Sử dụng bất đẳng thức trong tam giác A'MB ta có: CA + CB = CA' + CB = BA' <MA' + MB $\Rightarrow$ CA + CB < MA + MB.



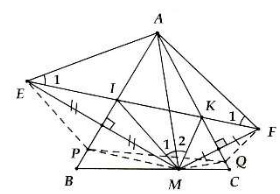
8. a) Sử dụng tính chất đối xứng trục kết hợp với chứng minh tam giác bằng nhau ta có được $\widehat{E_1} = \widehat{M_1}$ và $\widehat{F_1} = \widehat{M_2}$, mà $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ (Tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Sử dụng tính chất đối xứng trục ta có PM = PE; QM = QF. Theo bất đẳng thức trong tam giacs MPQ, ta có:

$P_{\Delta MPQ}$ = MP + PQ + QM= (PE + PQ) + QF $\geq$ EQ + QF $\geq$ EF.

Do M cố định, tam giác ABC cố định $\Rightarrow$ E, F, I, K cố định. Vậy $(P_{\Delta MPQ})_{min}$ = EF $\Leftrightarrow$ P $\equiv$ I, Q $\equiv$ K.



B.DẠNG BÀI NÂNG CAO-PHÁT TRIỂN TƯ DUY

• Đối xứng trục

Bài 1. Cho tam giác ABD. Vẽ điểm C đối xứng với A qua BD. Vẽ các đường phân giác ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác ABCD chúng cắt nhau tạo thành tứ giác EFGH.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH;

b) Chứng minh rằng BD là trục đối xứng của tứ giác EFGH.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D là điểm nằm giữa B và C. Vẽ các điểm M và N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC.

a) Chứng minh rằng góc MAN luôn có số đo không đổi;

b) Xác định vị trí của D để MN có độ dài ngắn nhất.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của D, E, F để chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

Bài 4. Cho hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ xy. Hãy tìm trên xy hai điểm C và D sao cho $CD = a$ cho trước và chu vi tứ giác ABCD là nhỏ nhất.

Bài 5. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và một điểm M ở trong tam giác. Vẽ các điểm N, P, A' đối xứng với M lần lượt qua AB, AC và AD.

a) Chứng minh rằng N và P đối xứng qua AA';

b) Gọi B', C' là các điểm đối xứng với M lần lượt qua các đường phân giác của góc B, góc C. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD và một điểm M nằm giữa A và B. Chứng minh rằng $MC + MD$ nhỏ hơn số lớn nhất trong hai tổng $AC + AD; BC + BD$.

- **Đối xứng tâm**

Bài 7. Cho tam giác ABC và O là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O qua D, E, F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Bài 8. Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm G ở trong góc đó. Dựng điểm $A \in Ox$, điểm $B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.

Bài .9. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua điểm B. Vẽ điểm E đối xứng với B qua C. Vẽ điểm F đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng một trọng tâm.

Bài 10. Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí trung điểm M của AB, trung điểm N của BC và trung điểm P của CD.

Hướng dẫn giải

Bài 1. (h.7.9)

a) Vì C đối xứng với A qua BD nên ΔABD đối xứng với ΔCBD qua BD.

Do đó $\Delta ABD = \Delta CBD$, suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$; $BA = BC$ và $DA = DC$.

Ta có BD và BE là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh B nên $BD \perp BE$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BD \perp DH$.

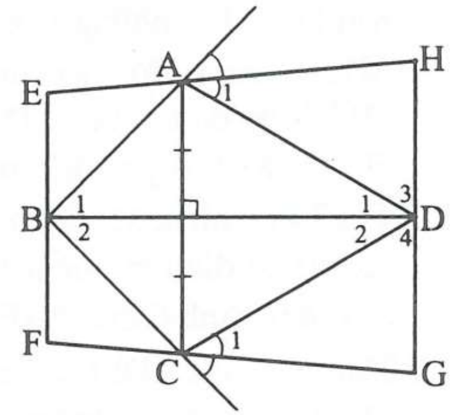
Suy ra EF // HG $\Rightarrow$ Tứ giác EFGH là hình thang.

Ta có $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Suy ra $\widehat{H} = \widehat{G}$

Hình thang EFGH có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.



Hình 7.9

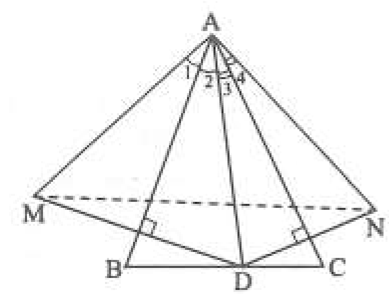
b) $\Delta ADH = \Delta CDG(g.c.g) \Rightarrow DH = DG$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BE = BF$.

Đường thẳng BD đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân nên là trục đối xứng của hình thang cân EFGH.

Bài 2. (h.7.10)

a) Các đoạn thẳng AM và AN đối xứng với AD lần lượt qua AB và AC nên:



Hình 7.10

$AM = AD; AN = AD; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

Ta có:

$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{NAD} = 2\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi).

b) Xét ΔAMN có $AM = AN$ (cùng bằng AD) nên là tam giác cân. Tam giác cân này có góc MAN không đổi nên cạnh đáy MN ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ cạnh bên AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AD ngắn nhất (vì $AM = AD$)

$\Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow$ D là hình chiếu của A trên BC.

Bài 3. (h.7.11)

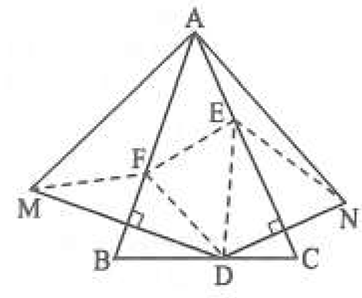
Vẽ điểm M đối xứng với D qua AB và vẽ điểm N đối xứng với D qua AC. Khi đó $MF = DF; EN = ED$.

Chu vi $\Delta DEF = DF + FE + ED = MF + FE + EN$

Chu vi ΔDEF nhỏ nhất khi độ dài đường gấp khúc MFEN ngắn nhất. Muốn vậy bốn điểm M, F, E, N phải thẳng hàng theo thứ tự đó.

Do đó ta phải tìm điểm D trên BC sao cho MN nhỏ nhất.

Theo kết quả bài 7.2, để MN nhỏ nhất thì D là hình chiếu của A trên BC. Khi đó E và F lần lượt là giao điểm của MN với AC và AB (h.7.12).



Hình 7.11

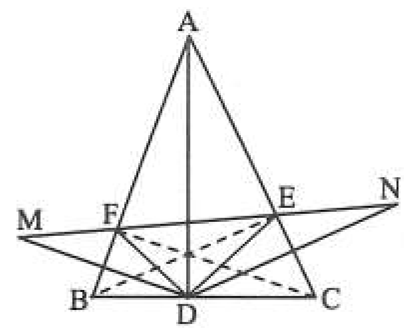
Ta chứng minh với cách xác định D, E, F như vậy thì chu vi ΔDEF nhỏ nhất.

Thật vậy, khi $AD \perp BC$ thì chu vi ΔDEF bằng MN và MN nhỏ nhất. (1)

Khi D, E, F ở những vị trí khác thì chu vi ΔDEF bằng độ dài đường gấp khúc MFEN do đó lớn hơn MN. (2)

Chú ý: Ta có nhận xét điểm E là chân đường cao vẽ từ đỉnh B, điểm F là chân đường cao vẽ từ đỉnh C của ΔABC.

Thật vậy, xét ΔDEF có các đường BF và CE lần lượt là các đường phân giác ngoài tại đỉnh F và E. Hai đường thẳng này cắt nhau tại A nên tia DA là tia phân giác của góc EDF.



Hình.7.12

Ta có: $DC \perp DA$ nên DC là tia phân giác ngoài tại đỉnh D của ΔDEF.

Mặt khác, EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E.

Điểm C là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên FC là đường phân giác trong. Kết hợp với FB là đường phân giác, suy ra $FC \perp FB$ hay $CF \perp AB$.

Chứng minh tương tự, ta được $BE \perp AC$.

Như vậy ba điểm D, E, F có thể xác định bởi chân của ba đường cao của tam giác.

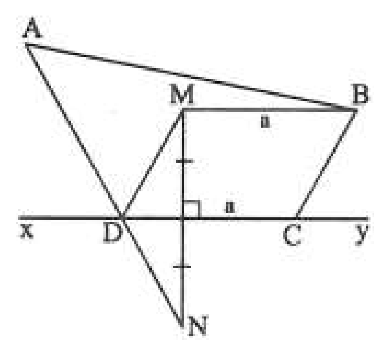
Bài 4. (h.7.13).

Giả sử đã dựng được hai điểm C và D $\in xy$ sao cho $CD = a$ và chu vi tứ giác ABCD nhỏ nhất.

Vẽ hình bình hành BMDC (điểm M ở phía gần A).

Khi đó $BM = CD = a$ và $DM = BC$

Vẽ điểm N đối xứng với điểm M qua xy, điểm N là một điểm cố định và $DN = DM$.



Hình 7.13

Ta có $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow BC + DA$ nhỏ nhất (vì AB và CD không đổi)

$\Leftrightarrow DM + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DN + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D nằm giữa A và N.

Từ đó ta xác định điểm D như sau:

- Qua B vẽ một đường thẳng song song với xy và trên đó lấy điểm M sao cho $BM = a$ (điểm M ở phía gần A);

- Vẽ điểm N đối xứng với M qua xy;

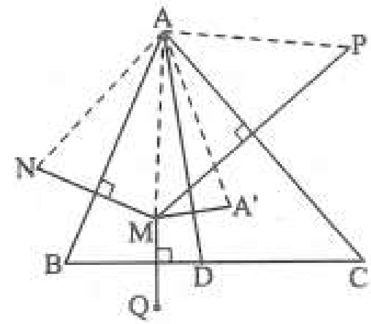
- Lấy giao điểm D của AN với xy;

- Lấy điểm $C \in xy$ sao cho $DC = MB = a$ (DC và MB cùng chiều).

Khi đó tổng $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

Bài 5. (h.7.14)



Hình 7.14

a) • AN đối xứng với AM qua AB

$\Rightarrow AN = AM$ và $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$. (1)

• AP đối xứng với AM qua AC

$\Rightarrow AP = AM$ và $\widehat{MAC} = \widehat{PAC}$. (2)

• AA' đối xứng với AM qua AD nên $\widehat{MAD} = \widehat{A'AD}$.

Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$.

Ta có $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AC} + \widehat{PAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{A'AN} = \widehat{BAC}$, suy ra: $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AN}$.

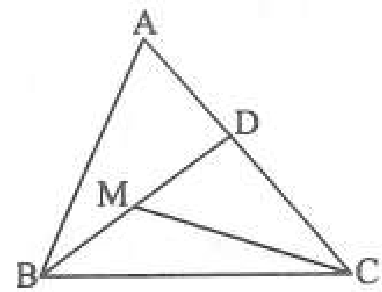
ΔANP cân tại A có AA' là đường phân giác nên AA' cũng là đường trung trực của NP $\Rightarrow$ N và P đối xứng qua AA'.

b) Gọi Q là điểm đối xứng của M qua BC.

Chứng minh tương tự như trên ta được BB' là đường trung trực của NQ và CC' là đường trung trực của PQ.

Vậy AA', BB', CC' là ba đường trung trực của ΔNPQ nên chúng đồng quy.

Bài 6. Trước hết ta chứng minh bài toán phụ:



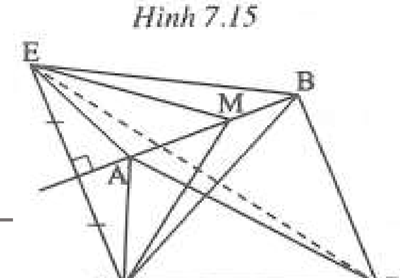
Hình 7.15

Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác (hoặc ở trên một cạnh nhưng không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $MB + MC < AB + AC$ (h.7.15).

Thật vậy, xét ΔABD, ta có $BD < AB + AD$ hay $MB + MD < AB + AD$. (1)

Xét ΔMCD có $MC < DC + MD$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được:



$MB+MD+MC<AB+AD+DC+MD \Rightarrow MB+MC<AB+AC$

Bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu điểm M nằm trên một cạnh nhưng không trùng với đỉnh của tam giác.

Bây giờ ta vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho.

Vẽ điểm E đối xứng với D qua đường thẳng AB (h.7.16).

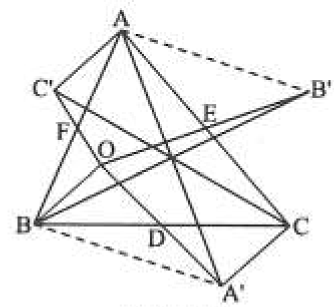
Khi đó $AE=AD; ME=MD$ và $BE=BD$.

Vì điểm M nằm giữa A và B nên hoặc điểm M nằm trong ΔBEC hoặc điểm M nằm trong ΔAEC hoặc điểm M nằm trên cạnh EC.

Ta có $\left[\begin{array}{l} ME+MC<AE+AC \\ ME+MC<BE+BC \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} MD+MC<AD+AC \\ MD+MC<BD+BC \end{array}\right.$.

Do đó $MD+MC<\max\left\{AD+AC; BD+BC\right\}$.

Bài 7. (h.7.17)



Hình 7.17

Ta có AC' và BO đối xứng nhau qua F nên $AC'=BO$ và AC' // BO. (1)

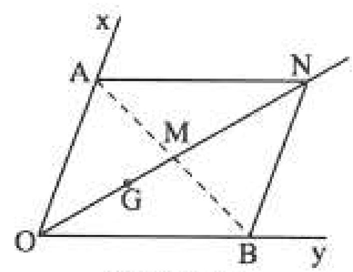
BO và CA' đối xứng nhau qua D nên $BO=CA'$ và BO // CA' (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AC'=CA'$ và AC' // CA', do đó tứ giác $ACA'C'$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $ABA'B'$ là hình bình hành.

Hai hình bình hành $ACA'C'$ và $ABA'B'$ có chung đường chéo AA' nên các đường chéo AA', BB', CC' đồng quy.

Bài 8. (h.7.18)



Hình 7.18

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm $A \in Ox$ và $B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của ΔAOB.

Tia OG cắt AB tại trung điểm M của AB và $OM=\dfrac{3}{2}OG$.

Vẽ điểm N đối xứng với O qua điểm M. Tứ giác ANBO là hình bình hành $\Rightarrow$ NA // Oy; NB // Ox, từ đó xác định được A và B.

b) Cách dựng

- Trên tia OG lấy điểm M sao cho $OM=\dfrac{3}{2}OG$.

- Dựng điểm N đối xứng với điểm O qua M.

- Từ N dựng một tia song song với Oy cắt Ox tại A.

- Từ N dựng một tia song song với Ox cắt Oy tại B.

Khi đó G là trọng tâm của tam giác AOB.

c) Chứng minh

Tứ giác ANBO là hình bình hành, suy ra AB và ON cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, M là trung điểm của ON nên M là trung điểm của AB.

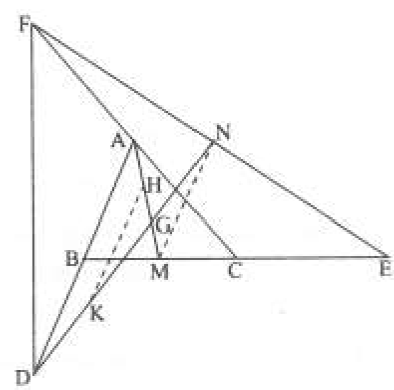
Vậy OM là đường trung tuyến của tam giác AOB.

Ta có $OM = \frac{3}{2}OG$ nên G là trọng tâm của ΔAOB.

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 9. (h.7.19)

Vẽ đường trung tuyến AM của tam giác ABC và đường trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi G là giao điểm của hai đường trung tuyến này. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của GA và GD.



Hình 7.19

Xét ΔFCE có AN là đường trung bình $\Rightarrow$ AN // CE và $AN = \frac{1}{2}CE$ do đó AN // BM và $AN = BM$, dẫn tới

ANMB là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // AB và $MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, HK là đường trung bình của ΔGAD nên HK // AD và $HK = \frac{1}{2}AD$.

Từ đó MN // HK và $MN = HK$.

Suy ra MNHK là hình bình hành, hai đường chéo HM và NK cắt nhau tại G nên G là trung điểm của mỗi đường.

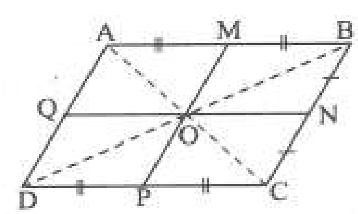
Do đó $GM = GH = HA \Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔABC.

$GN = GK = KD \Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔDEF.

Vậy ΔABC và ΔDEF có cùng một trọng tâm.

Bài 10. (h.7.20)

a) Phân tích



Hình 7.20

Giả sử đã dựng được hình bình hành ABCD thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có M và P đối xứng qua O.

Gọi Q là giao điểm của NO với AD thì Q và N đối xứng qua O.

Vậy điểm Q xác định được, từ đó xác định được hình bình hành ABCD.

b) Cách dựng

- Dựng trung điểm O của MP;

- Dựng điểm Q đối xứng với N qua O;

- Qua M và P dựng những đường thẳng song song với NQ; qua N và Q dựng những đường thẳng song song với MP ta được các giao điểm A, B, C, D.

Khi đó tứ giác ABCD là hình bình hành phải dựng.

Các phần còn lại, bạn đọc tự giải.

C.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

ĐỐI XỨNG TRỤC

Dạng 1: Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua 1 đường thẳng

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E, trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AE$. CMR: hai điểm D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng AM.

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A, có AM là đường trung tuyến ứng với BC. CMR: cạnh AB đối xứng với AC qua AM.

Dạng 2: Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Tìm hệ thức liên hệ giữa số đo các góc BAC, BKC.

Bài 4. Cho ΔABC, gọi m là đường trung trực của BC. Vẽ D đối xứng với A qua m.

a) Tìm các đoạn thẳng đối xứng với AB, AC qua m.
b) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 5. Cho hình thang vuông $ABCD(\hat{A} = \hat{D} = 90^0)$. Gọi K là điểm đối xứng với C qua AD.

CMR: $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$.

Bài 6. Cho ΔABC, gọi d là đường phân giác ngoài ở đỉnh A. Trên đường thẳng d lấy điểm $M(M \neq A)$. CMR: $BA + AC < BM + MC$.

Bài 7. Cho ΔABC vuông tại A. Lấy M bất kì trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB, AC. Chứng minh A là trung điểm của EF.

Dạng 3: Tìm trục đối xứng của một hình, hình có trục đối xứng

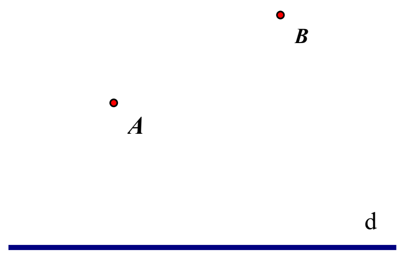
Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại B

a) Tìm trục đối xứng của tam giác đó,
b) Gọi trục đối xứng đó là d. Kể trên hình đối xứng qua d của: đỉnh A, đỉnh B, đỉnh C, cạnh AB, cạnh AC.

Dạng 4: Dựng hình có sử dụng đối xứng trục

Bài 9. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài 10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B (như hình vẽ). Tìm vị trí điểm C trên d để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.



Dạng 5.Tổng hợp

Bài 11. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE cắt nhau ở O. Qua A vẽ các đường vuông góc với BD và với CE, chúng cắt BC theo thứ tự ở N và M. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC. Chứng minh rằng:

a) M đối xứng với A qua CE, N đối xứng với A qua BD;

b) M đối xứng với N qua OH.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông ở A, lấy D là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB, F là điểm đối xứng với D qua AC.

a) Chứng minh rằng A là trung điểm của EF.

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC. Chứng minh rằng:

a) A là trung điểm của đoạn DE

b) Tứ giác BDEC là hình thang vuông.

c) Cho BH = 2cm, Ch = 8cm. Tính AH và chu vi hình thang BDEC.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 70°$, B và C là các góc nhọn. M là một điểm thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đỗi ứng với M qua AC. Gọi I, K là giao điểm của DE với AB, AC.

a) Tính các góc của tam giác ADE.

b) Chứng minh rằng MA là tia phân giác của góc IMK.

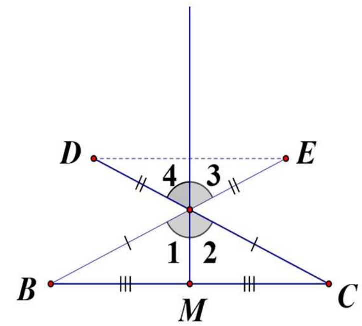
c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì DE có độ dài ngắn nhất?

Bài 15. Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài CA + CB là ngắn nhất.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1

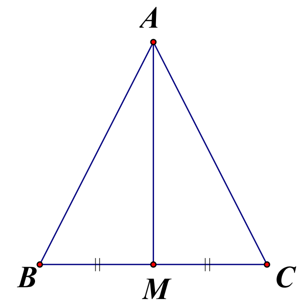
Bài 1



Chứng minh $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ và

AM là đường trung trực của DE.

Bài 2



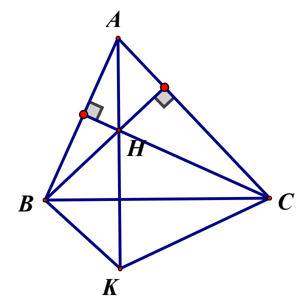
Chứng minh B đối xứng với C qua AM

A đối xứng với A qua AM

$\Rightarrow$ đpcm.

Dạng 2

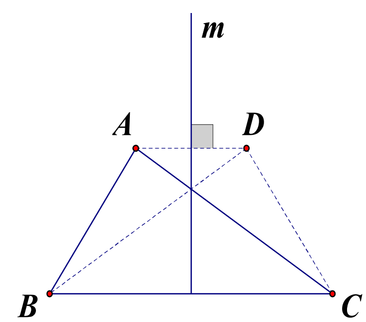
Bài 3



$$\Delta BHC = \Delta BKC (c-c-c) \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BKC}$$

Ta lại có $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$ nên $\widehat{BAC} + \widehat{BKC} = 180^0$

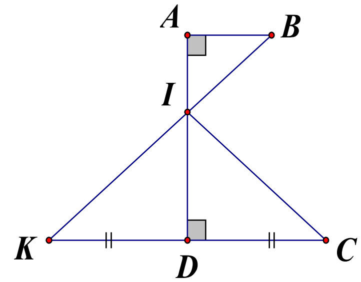
Bài 4



a) DC đối xứng với AB qua m, DB đối xứng với AC qua m.

b) Tứ giác ABCD là hình thang có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Bài 5



$$CM: \widehat{AIB} = \widehat{KID}; \widehat{CID} = \widehat{KID}$$

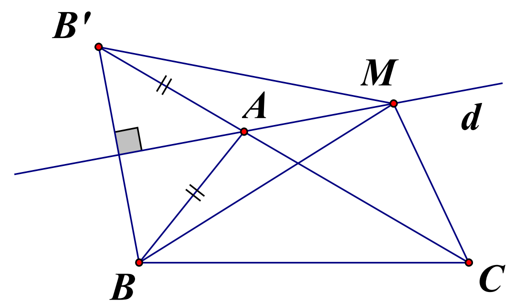
$$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{CID}$$

Bài 6

Trên tia đối của tia AC lấy điểm B' sao cho $AB' = AB$.

Dễ thấy B' đối xứng với B qua d, do $B'M = BM$

$$\Rightarrow BA + AC = B'A + AC$$
$$= B'C < B'M + MC$$
$$= BM + MC.$$



Bài 7

Sử dụng tính chất đối xứng trục

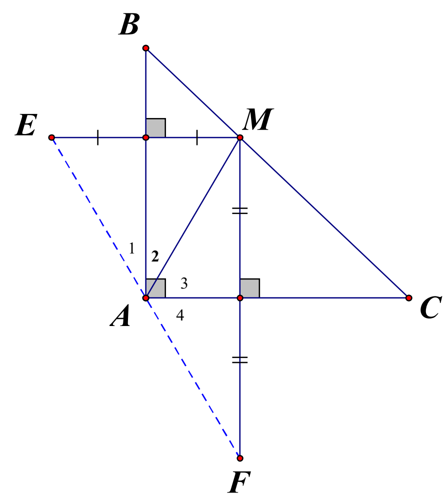
$\Rightarrow AE = AF(= AM)$ (1)

Sử dụng tính chất của tam giác cân

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$

Từ đó chỉ ra được $\widehat{AEF} = 180^0 \Rightarrow A, E, F$ thẳng hàng (2)

(1)(2)$\Rightarrow$ đpcm.

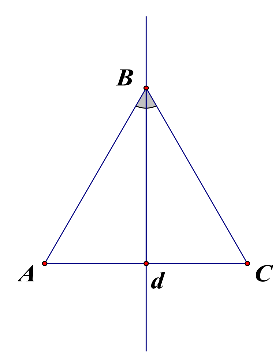


Dạng 3

Bài 8

a) Trục đối xứng của ΔABC là đường phân giác của $\widehat{B}$
b) Hình đối xứng qua d của đỉnh A là C, của đỉnh B là B,

của đỉnh C là A, của cạnh AB là cạnh CB, của cạnh AC là AC.



Dạng 4

Bài 9

* Cách dựng:

- Dựng D đối xứng với A qua Ox

- Dựng E đối xứng với A qua Oy

- Ox, Oy cắt DE tại B và C.

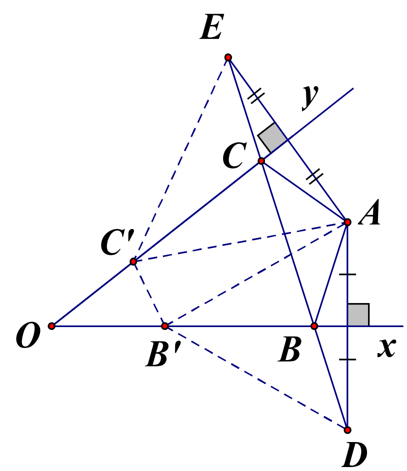
* Chứng minh:

Gọi B', C' là các điểm bất kì thuộc Ox, Oy. Ta có:

$AC + CB + BA = EC + CB + BD = ED$ (1)

$AC' + C'B' + B'A' = EC' + C'B' + B'D'$ (2)

Do $ED \le EC' + C'B' + B'D'$ nên chu vi $ABC \le$ chu vi $A'B'C'$ (viết vậy có ổn k?)



Bài 10

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d

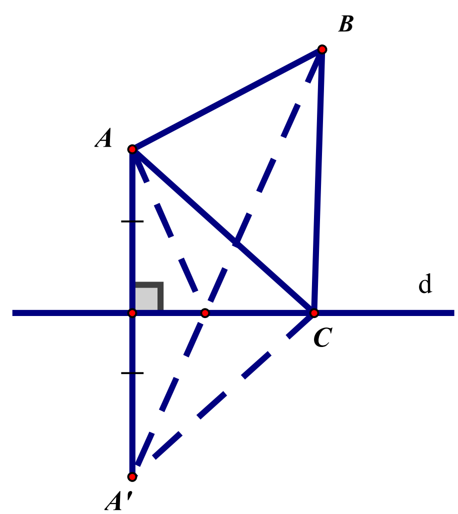
$\Rightarrow A'$ cố định.

Vì $C \in d \Rightarrow CA = CA'$ (tc đối xứng trục)

Ta có: $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC$

$= AB + (CA' + CB) \ge AB + BA'$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra tức chu vi tam giác nhỏ nhất khi C là giao điểm của d và BA'.

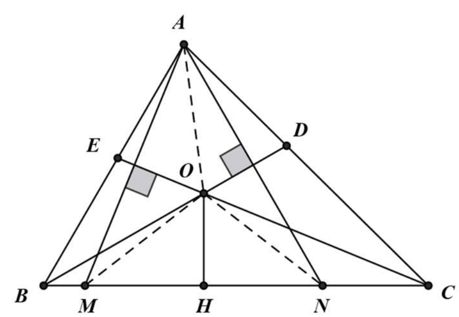


Dạng 5.Tổng hợp

Bài 11

a) Tam giác ACM có đường phân giác CE cũng là đường cao nên là tam giác cân, suy ra CE là đường trung trực của AM. Vậy M đối xứng với A qua CE. Tương tự N đối xứng với A qua BD.

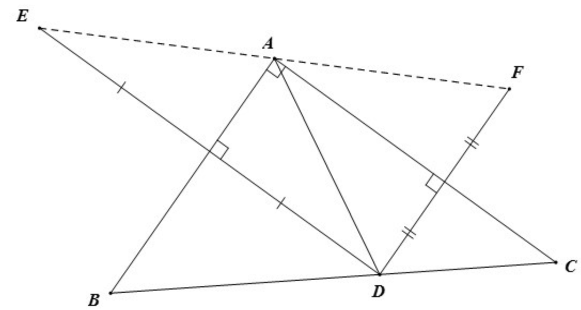
b) Tam giác AMN có O là giao điểm các đường trung trực của AM và AN nên OH là đường trung trực của MN. Suy ra M đối xứng với N qua OH.



Bài 12

a) E là điểm đối xứng với D qua AB

$\Rightarrow AE = AD \quad (1)$; $\widehat{BAE} = \widehat{BAD} \quad (2)$



F là điểm đối xứng với D qua AC

$\Rightarrow AF = AD \quad (3)$; $\widehat{CAF} = \widehat{CAD} \quad (4)$

Từ (1) và (3) suy ra $AE = AF \ (5)$.

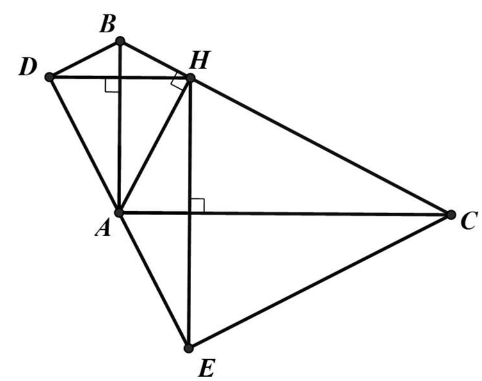
Từ (2) và (4) suy ra

$\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2\left(\widehat{BAD} + \widehat{CAD}\right) = 2\widehat{BAC} = 180^0$ do đó $\widehat{EAF} = 180^0$ nên A, E, F thẳng hàng (6)

Từ (5) và (6) suy ra A là trung điểm của EF,

b) Ta có $EF = 2AD$ nên: EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

Bài 13



a) Chứng minh tương tự bài 2 ý a.

b) Chỉ ra $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90°$; $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90°$

Từ đó suy ra $DB//EC \Rightarrow DBCE$ là hình thang có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90°$, do vậy BDEC là hình thang vuông tại D và E.

c) BH = 2cm, CH = 8cm.

Trong tam giác ABH vuông tại H, theo định lý Pitago: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 4$

Trong tam giác ACH vuông tại H, theo định lý Pitago $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - 64$

Suy ra: $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - 68$

Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$, suy ra $2AH^2 = 100 - 68 = 32 \Rightarrow AH^2 = 16$

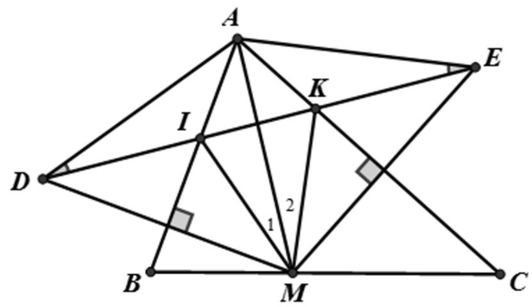
Vậy $AH = 4$

Đặt $\mathbb{C}$ là chu vi hình thang BDEC.

Ta có $BD = BH, DE = 2DA = 2HA, EC = HC$. Do đó:

$\mathbb{C} = BD + DE + EC + CB = BH + 2AH + CH + CB = 2 + 8 + 8 + 10 = 28(cm)$.

Bài 14



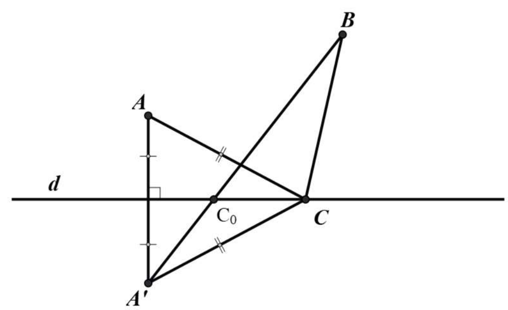
a) Tam giác ADE cân tại A, $\widehat{DAE}=140°$. $\widehat{D_1}=\widehat{E_1}=20°$.

b) $\widehat{M_1}=\widehat{D_1}=\widehat{E_1}=\widehat{M_2}$.

c) Các tam giác ADE cân tại A, có góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ cạnh bên AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC (Do $\widehat{B},\widehat{C}$ nhọn nên chân đường vuông góc đó nằm trên cạnh BC).

Bài 15

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d. Với mỗi điểm C trên đường thẳng d, ta có $CA=CA'$. Do đó: $CA+CB=CA'+CB\geq A'B$.



$CA+CB$ nhỏ nhất khi $CA'+CB=A'B$, hay C thuộc đoạn $A'B$. Vậy điểm C thỏa đề bài là giao điểm của đoạn BA' với đường thẳng d.

========== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ ==========