GV: NGUYỄN QUỐC BẢO
Zalo: 039.373.2038
Gmail:Tailieumontoan.com@Gmail.com
Website: Tailieumontoan.com
Facebook:www.facebook.com/baotoanthcs

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Chuyên đề

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

LƯU HÀNH NỘI BỘ

NGUYỄN QUỐC BẢO

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC & TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

- **Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 8,9**
- **Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán**

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Lời giới thiệu

Các em học sinh và thầy giáo, cô giáo thân mến !

Cuốn sách *Các dạng toán và phương pháp giải bài toán chứng minh đẳng thức & tính giá trị biểu thức* được tác giả biên soạn nhằm giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở THCS hiện nay và THPT sau này.

Tác giả cố gắng lựa chọn những bài tập thuộc các dạng điển hình, sắp xếp thành một hệ thống để bồi dưỡng học sinh khá giỏi các lớp THCS. Sách được viết theo các chủ đề tương ứng với các vấn đề quan trọng thường được ra trong các đề thi học sinh giỏi toán THCS, cũng như vào lớp 10 chuyên môn toán trên cả nước. Mỗi chủ đề được viết theo cấu trúc lý thuyết cần nhớ, các dạng toán thường gặp, bài tập rèn luyện và hướng dẫn giải giúp các em học sinh nắm vững kiến thức đồng thời rèn luyện được các kiến thức đã học.

Mỗi chủ đề có ba phần:

A. ***Kiến thức cần nhớ:*** Phần này tóm tắt những kiến thức cơ bản, những kiên thức bổ sung cần thiết để làm cơ sở giải các bài tập thuộc các dạng của chuyên đề.

B. ***Một số ví dụ:*** Phần này đưa ra những ví dụ chọn lọc, tiêu biểu chứa đựng những kĩ năng và phương pháp luận mà chương trình đòi hỏi.

Mỗi ví dụ thường có: Lời giải kèm theo những nhận xét, lưu ý, bình luận và phương pháp giải, về những sai lầm thường mắc nhằm giúp học sinh tích lũy thêm kinh nghiệm giải toán, học toán.

C. ***Bài tập vận dụng***: Phần này, các tác giả đưa ra một hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán, tăng dần độ khó cho học sinh khá giỏi. Có những bài tập được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán và đề vào lớp 10 chuyên Toán. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem hướng dẫn hoặc lời giải ở cuối sách.

Các tác giả hi vong cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em học sinh nâng cao trình độ và năng lực giải toán, góp phần đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi ở cấp THCS.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn song cuốn sách này vẫn khó tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc.

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Tailieumontoan.com@gmail.com

Facebook: www.facebook.com/baotoanthcs

Xin chân thành cảm ơn!

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG

Chương I

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Dạng 1: Sử dụng phép biến đổi tương đương

★**Thí dụ 1.** Cho x, y, z là số thực thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1+y+yz}=\frac{x}{x+xy+xyz}=\frac{x}{1+x+xy}$;

Mặt khác: $\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz}=\frac{xy}{1+x+xy}$

Do đó: $P=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$

$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1\,(\text{đpcm})$$

★**Thí dụ 2.** Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{1+x^2}=\frac{xyz}{yz+x.xyz}=\frac{xyz}{yz+x.(x+y+z)}=\frac{xyz}{x^2+xy+yz+zx}=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}$

Tương tự ta có: $\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}$; $\frac{3z}{1+z^2}=\frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

Do đó: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}+\frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

$$=\frac{xyz(y+z+2x+2z+3x+3y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Vậy: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

★**Thí dụ 3.** Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$. Chứng minh: $P=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0\Rightarrow\frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1)

Tương tự ta có: $\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c^2-bc+ba-a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (2); $\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{b^2-ac+cb-b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) Vế theo vế ta được điều phải chứng minh.

★**Thí dụ 4.** Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãi điều kiện: $x+y+z=0$ và $xyz\neq 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Lời giải

Ta có: $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x\Leftrightarrow(y+z)^2=(-x)^2$

Suy ra: $y^2+z^2-x^2=-2yz$. Do đó: $\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}=\frac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}=\frac{y^2}{-2xz}$; $\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\frac{z^2}{-2xy}$

Do đó: $P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\frac{x^2}{-2yz}+\frac{y^2}{-2xz}+\frac{z^2}{-2xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}$

$=\frac{(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz}=\frac{0-3.(-z).(-x).(-y)}{-2xyz}=\frac{3xyz}{-2xyz}=-\frac{3}{2}$

Vậy $P=-\frac{3}{2}$

🗁 Dạng 2: Sử dụng các hằng đẳng thức quen biết

★**Thí dụ 5.** Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$; $a+b+c=abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$

$$= 4 - 2.\frac{a+b+c}{abc} = 2.$$

★**Thí dụ 6.** Cho a + b + c = 0. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$

Lời giải

Từ: $a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -a \Rightarrow \left(b+c\right)^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2$

$\Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc \Rightarrow \left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 4b^2c^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$

$\Rightarrow 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$

Vậy: $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$

★**Thí dụ 7.** Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$. Tính: $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$

Lời giải

Do $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow \left(a+b+c\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) = 0$

Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b, đôi một khác nhau nên: a + b + c = 0

Suy ra: a + b + c = 0

Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + \left(b-c\right)\left(b+c\right)} = \frac{ab^2}{a^2 + \left(b-c\right)\left(-a\right)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$

Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}; \ \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}\left(a+b+c\right) = 0$$

Vậy *P = 0.*

★**Thí dụ 7.** Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $b \neq c; a + b \neq c$ và $a^2 + b^2 = \left(a+b-c\right)^2$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + \left(a-c\right)^2}{b^2 + \left(b-c\right)^2} = \frac{a-c}{b-c}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(a+b-c\right)^2 - b^2 = \left(a+b-c+b\right)\left(a+b-c-b\right) \\ &= \left(a+2b-c\right)\left(a-c\right) \end{aligned}$$

Tương tự: $b^2+(b-c)^2=(2a+b-c)(b-c)$

Do đó: $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(2a+b-c)(b-c)+(b-c)^2}=\dfrac{(2a+2b-2c)(a-c)}{(2a+2b-2c)(b-c)}=\dfrac{a-c}{b-c}$ (đpcm)

🗁 Dạng 3: Phương pháp đổi biến

★**Thí dụ 8.** Với a,b,c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a+3b+3c)^3=24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3$$

Chứng minh rằng: $(a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}3a+b-c=x\\3b+c-a=y\\3c+a-b=z\end{cases}$

Ta có:

$$(3a+3b+3c)^3=24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3=24+x^3+y^3+z^3$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3=24+(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 24-3(x+y)(y+z)(z+x)=0$$
$$\Leftrightarrow 24-3(2a+4b)(2b+4c)(2c+4a)=0$$
$$\Leftrightarrow 24-24(a+2b)(b+2c)(c+2a)=0$$
$$\Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a)=1 \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 9.** Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{b};z=\sqrt{c}\Rightarrow xy+yz+zx=1\Rightarrow a+1=(x+y)(x+z)$.

Tương tự: $b+1=(y+x)(y+z);c+1=(z+x)(z+y)$

Khi đó ta có:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

★**Thí dụ 10.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $ab+bc+ca=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = ab \\ y = bc \\ z = ca \end{cases}$ thì $a + b + c = 0$ và $abc = 0$. Ta có:

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3}{a^2b^2c^2} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

$$= \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}{xyz}$$

$$= \frac{3xyz}{xyz} = 3$$

🗁 Dạng 4: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

★Thí dụ 11. Cho a, b, c, z, y, z thỏa mãn $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Chứng minh rằng $x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 0$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2+b^2+c^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$ (do mỗi số hạng của tổng đều không âm)

Vì vậy: $x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = 0$.

★Thí dụ 12. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \le \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$ (đpcm).

Dạng 5: Phương pháp sử dụng lượng liên hợp

★Thí dụ 13. Cho x, y thỏa mãn:

$$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$$

Chứng minh: $x=y$

Lời giải

$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$ (1)

ĐKXĐ: $-2014\le x;y\le 2014$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2014}-\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015-y}+\sqrt{2014-y}-\sqrt{2014-x}=0$

Nếu x khác y và $-2014\le x;y\le 2014$ thì $\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}>0$;

$\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}>0;\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}>0$, do đó (1)

(2) $\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}+\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}\right)=0$

Khi đó dễ chứng tỏ $\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}>0$

Nếu $x-y\ne 0$ nên (2) vô lý vì VT(2) luôn khác 0

Nếu x = y dễ thấy (1) đúng. Vậy x = y.

★Thí dụ 14. Nếu a , b , c là các số không âm thoả mãn điều kiện: $b=\frac{a+c}{2}$ thì ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{b-c}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (1)

Tương tự $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{a-b}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (2)

Mà $b=\frac{a+c}{2}\Rightarrow a-b=b-c$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

hay $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

🗁 Dạng 6: Chứng minh có một số bằng hằng số cho trước

★Thí dụ 15. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=2019 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2019} \end{cases}$

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có một số bằng 2019

Phân tích:

Ta thấy việc chứng minh trong các số a, b, c có một số bằng 2019 sẽ tương đương với việc chứng minh hệ thức sau đúng: $(a-2019)(b-2019)(c-2019)=0$ $(*)$ khai triển (*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \left(ab-2019a-2019b+2019^2\right)(c-2019)=0$$

$$\Leftrightarrow abc-2019(ab+bc+ca)+2019^2(a+b+c)-2019^3=0 \quad (**)$$

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2019$ suy ra $abc-2019(ab+bc+ca)=0 \quad (2)$

Từ giả thiết $a+b+c=2019$ suy ra $2019^2(a+b+c)-2019^3=0. \quad (3)$

Cộng (2) và (3) theo vế ta được (**) từ đây ta dẫn đến lời giải sau:

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2019$ suy ra $abc-2019(ab+bc+ca)=0 \quad (2)$

Từ giả thiết $a+b+c=2019$ suy ra $2019^2(a+b+c)-2019^3=0. \quad (3)$

Cộng (2) và (3) theo vế suy ra:

$$abc-2019(ab+bc+ca)+2019^2(a+b+c)-2019^3=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2019)(b-2019)(c-2019)=0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra bài toán được chứng minh.

Nhận xét: Từ phân tích và cách giải bài toán trên ta thấy để giải đơn giản dạng toán này chúng ta cần suy luận ngược để tìm ra lời giải.

★Thí dụ 16. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \\ abc=1 \end{cases}$

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

Phân tích:

Ta thấy việc chứng minh trong các số a, b, c có một số bằng 1 sẽ tương đương với việc chứng minh hệ thức sau đúng: $(a-1)(b-1)(c-1)=0$ $(*)$ khai triển (*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow (ab-a-b+1)(c-1)=0$$

$$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0 \quad (**)$$

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ và abc = 1 ta được:

$$a+b+c=ab+bc+ca \text{ hay } (ab+bc+ca)-(a+b+c)=0 \quad (2)$$

Mặt khác $abc=1$ *hay* $abc-1=0$ (3)

Cộng (2) và (3) theo vế ta được (**) từ đây ta dẫn đến lời giải sau:

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ và abc = 1 ta được:

$$a+b+c=ab+bc+ca \text{ hay } (ab+bc+ca)-(a+b+c)=0 \quad (2)$$

Mặt khác $abc=1$ *hay* $abc-1=0$ (3)

Cộng (2) và (3) theo vế ta được:

$$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (ab-a-b+1)(c-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra bài toán được chứng minh

★**Thí dụ 17.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3} \\ \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}. \end{cases}$

Chứng minh trong 3 số có ít nhất một số bằng 27.

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3}$ suy ra $\sqrt[3]{abc}-3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)=0 \quad (1)$

Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{9-12\sqrt{5}+20}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{5}\right|=2\sqrt{5}-3$$

$$\Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\left(2\sqrt{5}-3\right)}=\sqrt{9}=3$$

Do đó $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}-3=0 \Rightarrow 9\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)-27=0. \quad (2)$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\sqrt[3]{abc}-3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)+9\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)-27=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}-3\right)\left(\sqrt[3]{b}-3\right)\left(\sqrt[3]{c}-3\right)=0 \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra bài toán được chứng minh

🗁 Dạng 7: Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

★**Thí dụ 18.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1. \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c} \end{cases}$

Chứng minh rằng xy + yz + zx = 0

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=(x+y+z)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2$$

Do đó:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0$$

★**Thí dụ 19.** Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2016}=\frac{b}{2015}=\frac{c}{2014}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$.

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2016}=\frac{b}{2015}=\frac{c}{2014}=\frac{a-b}{2016-2015}=\frac{a-c}{2016-2014}=\frac{b-c}{2015-2014}=\frac{a-b}{1}=\frac{a-c}{2}=\frac{b-c}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a-b)=a-c \\ 2(b-c)=a-c \end{cases} \Rightarrow 4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$$

★**Thí dụ 20.** Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2+y^2+c^2}{(ax+by+cz)^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

(Các mẫu đều khác 0)

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó:

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 21.** Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{bx-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{bx-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=\frac{bx-cy+cx-az+ay-bx}{a+b+c}=0$$

Do đó:

$$\begin{cases}bx=cy\\cx=az\\ay=bx\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 22.** Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-b+c}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}$.

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{2y}{4a+2b-2c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{x+y+z}{(a+2b+c)+(4a+2b-2c)+(4a-4b+c)}=\frac{x+2y+z}{9a}\quad(1)$$

$$\frac{2x}{2a+4b+2c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{2x+y+z}{(2a+4b+2c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)}=\frac{2x+y-z}{9b}\quad(2)$$

$$\frac{4x}{4a+8b+4c}=\frac{4y}{8a+4b-4c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{4x-4y+z}{(4a+8b+4c)-(8a+4b-4c)+(4a-4b+c)}=\frac{4x-4y+z}{9b}\quad(3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{x+2y+z}{9a}=\frac{2x+y-z}{9b}=\frac{4x-4y+z}{9c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}.$$

🗁 **Bài tập tự luyện:**

Câu 1. *(Chuyên Khánh Hòa 2018)*

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta luôn có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Câu 1. *(Chuyên Nam Định 2016)*

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=6$;

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{47}{60}$.

Tính giá trị của biểu thức $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Câu 2. *(Chuyên Thanh Hóa 2018)*

Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn biểu thức $\begin{cases} a^3-3a^2+5a-17=0 \\ b^3-3b^2+5b+11=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $a+b=2$

Câu 3. *(Chuyên Hải Dương 2018)*

Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$

Chứng minh $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8$

Câu 4. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2018)*

Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$.

Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 5. *(Chuyên Quảng Ngãi 2018)*

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Câu 6. *(Chuyên Lào Cai 2018)*

Cho 2 số dương a,b và số c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Câu 7. *(HSG Quận Hải An 2018)*

Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019$. Chứng minh: $x^{2019}+y^{2019}=0$

Câu 8. *(HSG Quận Lê Chân 2018)*

Cho ΔABC có $\widehat{A}=60^0$. Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$.

Câu 9. *(HSG Hải Dương 2017)*

Cho $x,y,z\neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx \quad (*)$$

Câu 10. *(HSG Hải Dương 2016)*

Cho *x, y* là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}=x+y-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Câu 11. *(HSG Phú Thọ 2016)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=5$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 12. *(HSG Nam Định 2015)*

Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Câu 13. *(HSG Phú Thọ 2015)*

Cho các số thực $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau thỏa mãn

$$x^3=3x-1,\ y^3=3y-1 \text{ và } z^3=3z-1.$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=6$.

Câu 14. *(HSG Bắc Ninh 2016)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0, a^2+b^2\neq c^2$, $b^2+c^2\neq a^2$, $c^2+a^2\neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\dfrac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\dfrac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$

Câu 15. *(HSG Đồng Nai 2016)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức $P=a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc$

Câu 16. *(HSG Phú Thọ 2016)*

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=0$$

Câu 17. *(Chuyên Phú Thọ 2017)*

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}$ với x, y, z là các số thỏa mãn $xyz=5$ và biểu thức P có nghĩa.

Câu 18. *(Chuyên Hải Dương 2015)*

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$.

Câu 19. *(Chuyên Hà Tĩnh 2016)*

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $c^2+2\left(ab-bc-ac\right)=0$, $b\neq c$ và $a+b\neq c$. Chứng minh rằng: $\frac{2a^2-2ac+c^2}{2b^2-2bc+c^2}=\frac{a-c}{b-c}$.

Câu 20. *(Chuyên KHTN 2010)*

Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là [a]. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có.

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n\left(n+1\right)}\right]=n$$

Câu 21. *(Chuyên Hải Dương 2010)*

Cho trước $a,b\in R$; gọi x,y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases}x+y=a+b\\x^3+y^3=a^3+b^3\end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$.

Câu 22. *(HSG huyện Kinh Môn)*

Cho a + b + c + d = 0. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3+d^3=3\left(c+d\right)\left(ab-cd\right)$

Câu 23. Chứng minh rằng nếu có: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

Thì: $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Câu 24. Cho $\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}=\frac{1}{x+y}$ và $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng:

a) $bx^2 = ay^2$

b) $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Câu 25. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Câu 26. Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$

Thì: $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

Câu 27. Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$

Chứng minh rằng: $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Câu 28. Cho $m = \frac{a+b}{a-b}$; $n = \frac{c+d}{c-d}$; $p = \frac{ac-bd}{ad+bc}$. Chứng minh rằng: $m+n+p = m.n.p$

Câu 29. Cho *a* và *b* là các số thực thỏa mãn các điều kiện:

$$6a^2 + 20a + 15 = 0;\quad 15b^2 + 20b + 6 = 0;\quad ab \neq 1.$$

Chứng minh rằng: $\frac{b^3}{ab^2 - 9(ab+1)^3} = \frac{6}{2015}$.

Câu 30. Giả sử a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

a) Chứng minh rằng $a + b = -3$

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$

Câu 31. Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4$$

Chứng minh rằng: $5y = 4x$

Câu 32. Cho Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức:

i) $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$

ii) $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3$. Chứng minh: $abc = 0$

Câu 33. Cho trước $a, b \in R$; gọi x, y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases} x + y = a + b \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$.

Bài 34. Cho a, b ≠ 0 thỏa mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Câu 35. Cho 4 số a, b, c, d nguyên thỏa mãn: $\begin{cases} a+b=c+d \\ ab+1=cd \end{cases}$. Chứng minh: c = d.

Câu 36. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ và $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $(x-1)(y-1)(z-1)=0$

Câu 37. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 38. Cho a + b + c = 2009. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=2009$

Câu 39. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn a + b + c = 0. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Câu 40. Cho $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$

Câu 41. *(HSG Quận 9 TP. Hồ Chí Minh năm 2011)*

Chứng minh rằng: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$

Áp dụng tính: $A=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Câu 42. *(HSG Quận 1 TP. Hồ Chí Minh năm 2012)*

Giả sử 4 số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+(a+b)^2=c^2+d^2+(c+d)^2$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+(a+b)^4=c^4+d^4+(c+d)^4$.

Câu 43. Cho $x(m+n)=y(n+p)=z(p+m)$ trong đó x, y, z la các số khác nhau và khác 0,

Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)}=\frac{n-p}{y(z-x)}=\frac{p-m}{z(x-y)}$

Câu 44. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2+c(a-b)(a+b-c)^2=b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 45. Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

Câu 46. *(Trích đề Chuyên Lam Sơn năm 2017-2018)*

Cho các số thức m, n, p, x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x = ny + pz;\ y = mx + pz;\ z = mx + ny;\ x + y + z \neq 0.$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+p}=2.$

Câu 47. Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}+(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}=0.$$

Chứng minh rằng $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

Câu 48. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Nam Định năm 2019-2020)*

a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x(2-x)$.

b) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$ .Chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=0\ .$$

Câu 49. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Điện Biên năm 2019-2020)*

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Câu 50. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Phú Yên năm 2019-2020)*

Tồn tại hay không 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b^2-ca}=\frac{b}{c^2-ab}=\frac{c}{a^2-bc}=\frac{1}{2019}$

Câu 51. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2019-2020)*

Cho các số thực $x,\ y,\ a$ thoản mãn $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Câu 52. *(Trích đề HSG Vĩnh Phúc năm 2017-2028)*

Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$

và $y\neq z$. Chứng minh đẳng thức $\frac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Câu 53. *(Trích đề HSG Bình Định năm 2017-2018)*

Tính giá trị biểu thức $A = x^3+y^3-3(x+y)$, biết rằng

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\ ;\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

Câu 54. *(Trích đề HSG Đà Nẵng năm 2017-2018)*

Cho ba số x,y,z thỏa các hệ thức $(z-1)x-y=1$ và $x+zy=2$. Chứng minh rằng $(2x-y)(z^2-z+1)=7$ và tìm tất cả các số nguyên x,y,z thỏa hệ thức trên.

Câu 55. *(Trích đề HSG Thường Tín năm 2020)*

Cho a,b,c thỏa mãn $2a+b+c=0$. Chứng minh $2a^3+b^3+c^3=3a(a+b)(c-b)$

Câu 56. Cho $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}-\frac{z}{1+z^2}=\frac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}.$$

Câu 57. *(Trích đề Chuyên KHTN năm 2017-2018)*

Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}$$

Câu 58. *(Trích đề Chuyên KHTN năm 2009-2010)*

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{4+1^4}+\dfrac{3}{4+3^4}+...+\dfrac{2n-1}{4+(2n-1)^4}=\dfrac{n^2}{4n^2+1}$

Với mọi n nguyên dương

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$VT=\left(a+b+c\right)^2=\left(a+b+c\right)\left(a+b+c\right)$$
$$=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=VP$$

Câu 2.

$$\begin{cases}a^3-3a^2+5a-17=0\\ b^3-3b^2+5b+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a-1\right)^3+2a-16=0(1)\\ \left(b-1\right)^3+2b+12=0(2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(1\right)+\left(2\right)\Leftrightarrow\left(a-1\right)^3+2a-16+\left(b-1\right)^3+2b+12=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-1+b-1\right)\left[\left(a-1\right)^2-\left(a-1\right)\left(b-1\right)+\left(b-1\right)^2\right]+2\left(a+b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b-2\right)\left[\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-1\right)^2+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a+b=2\left(\text{do}\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-1\right)^2+2>0\forall a,b\right)$$

Câu 3.

Ta có: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4 \Leftrightarrow 4\left(x+y+z\right)+4\sqrt{xyz}=16$

Mặt khác:

$x\left(4-y\right)\left(4-z\right)=x\left[16-4\left(y+z\right)+yz\right]=x\left[4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}-4\left(y+z\right)+yz\right]$

$=x\left(4x+4\sqrt{xyz}+yz\right)=x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x\left(4-y\right)\left(4-z\right)}=\sqrt{x}.\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)=2x+\sqrt{xyz}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{y\left(4-x\right)\left(4-z\right)}=2y+\sqrt{xyz}\\ \sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}=2z+\sqrt{xyz}\end{cases}$$

Do vậy

$\sqrt{x\left(4-y\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{y\left(4-x\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}=\sqrt{xyz}$

$=2x+2y+2z+3\sqrt{xyz}-\sqrt{xyz}$

$=2\left(x+y+z+\sqrt{xyz}\right)=8$

Vậy $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y\left(4-x\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}-\sqrt{xyz}=8$

Câu 4.

Ta có: $a+b+c=0 \Leftrightarrow b=-a-c$

$\Rightarrow a^2=2\left(a+c+1\right)\left(a+b-1\right)$

$\Leftrightarrow a^2=2\left(a+c+1\right)\left(a-a-c-1\right)$

$\Leftrightarrow a^2=2\left(a+c+1\right)\left(-c-1\right)$

$\Leftrightarrow a^2+2\left(a+c+1\right)\left(c+1\right)=0$

$\Leftrightarrow a^2+2a\left(c+1\right)+2\left(c+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(a+c+1\right)^2+\left(c+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+c+1=0\\ c+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ c=-1\end{cases} \Rightarrow b=-a-c=1$

$\Rightarrow A=a^2+b^2+c^2=0^2+1^2+\left(-1\right)^2=2$

Vậy $A=2$

Câu 5.

Cộng theo vế ta được a + b + c = 0.

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$a+b=c^2-a^2=\left(c-a\right)\left(c+a\right)=\left(-b\right)\left(c-a\right) \text{ hay } -c=\left(-b\right)\left(c-a\right)$$

Tương tự ta có $-b=\left(-a\right)\left(b-c\right),-a=\left(-c\right)\left(a-b\right)$.

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta được $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Câu 6.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ \frac{ab+ac+bc}{abc}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c<0 \\ ab+ac+bc=0 \end{cases}$

$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

$\Leftrightarrow a+b=a+c+b+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow c+\sqrt{ab+ac+bc+c^2}=0$

$\Leftrightarrow c^2+\sqrt{c^2}=0$

$\Leftrightarrow c-c=0 (c<0)$

Vậy $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Câu 7.

Ta có:

$\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$

$-2019\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$

$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+2019}=\sqrt{x^2+2019}-x$

Tương tự: $x+\sqrt{x^2+2019}=\sqrt{y^2+2019}-y$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \Rightarrow x^{2019}+y^{2019}=0.$

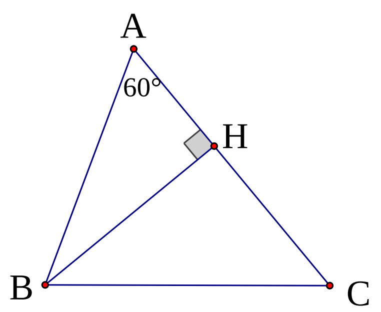
Câu 8.

1. Kẻ đường cao BH. ΔABH vuông tại H nên

$BH = AB.\sin 60^0 = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

$AH = AB.\cos 60^0 = \frac{AB}{2}$

Xét ΔBHC vuông tại H nên $BC^2 = BH^2 + HC^2$



$BC^2=\frac{3AB^2}{4}+\left(AC-\frac{AB}{2}\right)^2$

$BC^2=\frac{3AB^2}{4}+AC^2-AB.AC+\frac{AB^2}{4}$

$BC^2=AB^2+AC^2-AB.AC$

Hay $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (1)

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(a+b+c)=3(a+b)(a+c)$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2ab+2ac+ba+b^2+bc+ac+bc+c^2=3a^2+3ac+3ab+3bc$$
$$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc \text{ luôn đúng theo (1)}$$

Câu 9.

Từ giả thiết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow xy+yz+zx=0$

$$\Rightarrow x^2+2yz=x^2+yz-xy-zx=(x-y)(x-z)$$

Tương tự: $y^2+2zx=(y-x)(y-z); z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$$\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-x)(y-z)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{y-x+x-z+z-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=0$$

Suy ra đpcm.

Câu 10.

Ta có: $2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)=2\left[x^2+y^2-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+xy\right]$

$$=(x^2+y^2+2xy)-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

$$=(x+y)^2-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2=\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \quad (*)$$

Do $x>0$, $y>0$ nên $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy>x^2+y^2$

Suy ra : $x+y>\sqrt{x^2+y^2}$

Khai căn hai vế đẳng thức (*) ta được điều phải chứng minh.

Câu 11.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3 \Leftrightarrow a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=9 \Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$$

Do đó $a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$

$$b+2=b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$$

$$c+2=c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$$

Suy ra

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}+\frac{\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 12.

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=\left(x-1\right)\left(y-1\right)$

Tương tự $yz+x-1=\left(y-1\right)\left(z-1\right)$ và $zx+y-1=\left(z-1\right)\left(x-1\right)$

Suy ra $S=\frac{1}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}+\frac{1}{\left(y-1\right)\left(z-1\right)}+\frac{1}{\left(z-1\right)\left(x-1\right)}=\frac{x+y+z-3}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(z-1\right)}$

$$=\frac{-1}{xyz-\left(xy+yz+zx\right)+\left(x+y+z\right)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$

Suy ra $S=-\frac{1}{7}$

Câu 13.

Ta có $x^3=3x-1(1), y^3=3y-1\,(2), z^3=3z-1\,(3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\begin{cases} x^3-y^3=3\left(x-y\right) \\ y^3-z^3=3\left(y-z\right) \\ z^3-x^3=3\left(z-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3\,(4) \\ y^2+yz+z^2=3\,(5) \\ z^2+zx+x^2=3\,(6). \end{cases}$

Từ (4) và (5) suy ra

$x^2-z^2+xy-yz=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x+y+z\right)=0\Leftrightarrow x+y+z=0$, (vì x, y, z đôi một phân biệt).

Cộng (4), (5) và (6) theo vế với vế ta có

$$\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)^2=9\Rightarrow x^2+y^2+z^2=6.$$

Câu 14.

Từ giả thiết $a+b+c=0$ ta được

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$.

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$ do vậy ta được $P=\frac{3}{2}$

Câu 15.

Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}P&=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc\\&=a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}-abc\\&=a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{aligned}$$

Câu 16.

Ta có $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$1+b^2=ab+bc+ca+b^2=(b+a)(b+c)$$
$$1+c^2=ab+bc+ca+c^2=(c+a)(c+b)$$

Suy ra $\frac{a-b}{1+c^2}=\frac{a-b}{(c+a)(c+b)}=\frac{a+c-b-c}{(c+a)(c+b)}=\frac{1}{c+b}-\frac{1}{c+a}$.

$$\frac{b-c}{1+a^2}=\frac{b-c}{(a+b)(a+c)}=\frac{b+a-a-c}{(a+b)(a+c)}=\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}$$
$$\frac{c-a}{1+b^2}=\frac{c-a}{(b+c)(b+a)}=\frac{c+b-a-b}{(b+c)(b+a)}=\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b+c}$$

Vậy $\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=\frac{1}{c+b}-\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+a}-\frac{1}{b+c}=0$.

Câu 17.

Kết hợp $xyz=5$ ta biến đổi biểu thức P thành

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}\\&=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+2xyz}+\frac{xyz.2z}{2xyz.z+yz+2xyz}\\&=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2y}{1+2x+2xz}+\frac{2xz}{2xz+1+2x}=\frac{1+2y+2zx}{2x+2zx+1}=1\end{aligned}$$

Câu 18. Ta có:

$$xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2(1+y)^2}=1-xy$$
$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)=(1-xy)^2$$
$$\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2=1-2xy+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=0 \Leftrightarrow (x+y)^2=0 \Leftrightarrow y=-x$$
$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=0$$

Câu 19.

Ta có: $c^2+2\left(ab-bc-ac\right)=0 \;\Rightarrow a^2=a^2+c^2+2\left(ab-bc-ac\right)$

$=\left(a^2-2ac+c^2\right)+2\left(ab-bc\right)=\left(a-c\right)^2+2b\left(a-c\right)=\left(a-c\right)\left(a-c+2b\right)$.

$\Rightarrow\; 2a^2-2ac+c^2=\left(a^2-2ac+c^2\right)+a^2=\left(a-c\right)^2+a^2=\left(a-c\right)^2+\left(a-c\right)\left(a-c+2b\right)$

$=2\left(a-c\right)\left(a+b-c\right)$

Tương tự ta có: $2b^2-2bc+c^2 = 2\left(b-c\right)\left(a+b-c\right)$.

Do đó: $\dfrac{2a^2-2ac+c^2}{2b^2-2bc+c^2}=\dfrac{2\left(a-c\right)\left(a+b-c\right)}{2\left(b-c\right)\left(a+b-c\right)}=\dfrac{a-c}{b-c}$ (với $b\neq c,\; a+b\neq c$)

Câu 20.

Xét $\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\dfrac{k^2}{k(k+1)}+\dfrac{k+1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{(k+1)}+\dfrac{1}{k}=1-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k}(k\in N)$

Thay k lần lượt từ 1 đến n ta được:

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n\left(n+1\right)}\right]=\left[n+1-\frac{1}{n+1}\right]=\left[n+\frac{n}{n+1}\right]=n \text{ (đpcm)}$$

Câu 21.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b\\ \left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b & (1)\\ xy(a+b)=ab(a+b) & (2)\end{cases}\quad (*)$$

+/Nếu $a+b\neq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b\\ xy=ab\end{cases}$

=> x, y là 2 nghiệm của phương trình $X^2-(a+b)X+ab=0$

Giải ra ta có $\begin{cases}x=b\\ y=a\end{cases};\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$ => $x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$.

+/Nếu $a+b=0 \Rightarrow a=-b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=0 \\ x^3+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2011}+b^{2011}=0 \\ x^{2011}+y^{2011}=0 \end{cases} \Rightarrow x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$$

Câu 22.

Từ: $a+b+c+d=0$

$$\Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow (a+b)^3=-(c+d)^3 \Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3-d^3-3cd(c+d)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=-3ab(a+b)-3cd(c+d) \Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=3ab(c+d)-3cd(c+d)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=3(c+d)(ab-cd)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 23.

Có: $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$

$$=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}\ (=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}\,)$$

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x}=\sqrt[3]{a};\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y}=\sqrt[3]{b};\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z}=\sqrt[3]{c}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x}+\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y}+\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

$$. \Rightarrow \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

Câu 24.

a) Từ $\dfrac{a^4}{x}+\dfrac{b^4}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ và $a^2+b^2=1$ suy ra: $\dfrac{a^4}{x}+\dfrac{b^4}{y}=\dfrac{(a^2+b^2)^2}{x+y}$

$$\Rightarrow (x+y)(a^4y+b^4x)=(x+y)(a^2+b^2)^2 \Rightarrow (ay^2-bx^2)^2=0 \Rightarrow bx^2=ay^2.$$

b) Từ câu a) $bx^2=ay^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000};\left(\frac{y^2}{b}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}$$

Do đó: $\dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1000}}$

Câu 25.

Ta có: $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$.

Cộng theo vế các phương trình của hệ ta được:

$\left(a+b+c\right)x+\left(a+b+c\right)y=a+b+c\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(x+y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y=1 \end{array}\right.$

Với $a+b+c=0$ thì: $\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (1)

Với x + y = 1 thay vào giả thiết ta được: $a=b=c\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 26. Ta có;

$1+x=1+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2a}{a+b};1+y=1+\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{2b}{b+c};1+z=1+\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{2c}{c+a}$

$\Rightarrow\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)=\dfrac{8abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$ (1)

Mặt khác:

$1-x=1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b};1-y=1-\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{2c}{b+c};1-z=1-\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{2a}{c+a}$

$\Rightarrow\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)=\dfrac{8abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)=\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)$

Câu 27.

Đặt $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}=k\Rightarrow k=\dfrac{cay-cby}{c^2}=\dfrac{bcx-baz}{b^2}=\dfrac{abz-acy}{a^2}$

$k=\dfrac{cay-cbx+bcx-abz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2}=0\Rightarrow ay-bx=cx-az=bz-cy=0$

$\Rightarrow\left(ay-bx\right)^2=\left(cx-az\right)^2=\left(bz-cy\right)^2=0$

$\Rightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(ax+by+cz\right)^2=0$

Suy ra: $\left(ax+by+cz\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Câu 28.

Ta có:

$$m+n+p=\frac{a+b}{a-b}+\frac{c+d}{c-d}+\frac{ac-bd}{ad+bc}=\frac{(a+b)(c-d)+(c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)}+\frac{ac-bd}{ad+bc}$$

$$=\frac{2(ac-bd)}{(a-b)(c-d)}+\frac{ac-bd}{ad+bc}=\frac{(ac-bd)\left(2(ad+bc)+(a-b)(c-d)\right)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)}$$

$$=\frac{(ac-bd)(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)}=m.n.p$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Câu 29.

Ta ký hiệu các điều kiện như sau:

$6a^2+20a+15=0$ (1); $15b^2+20b+6=0$ (2); $ab\neq 1$ (3).

Dễ thấy các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt.

Do (3) nên b khác 0. Chia hai vế của (2) cho b^2 ta được

$$6\left(\frac{1}{b}\right)^2+20\left(\frac{1}{b}\right)+15=0 \qquad (4)$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra a và $\frac{1}{b}$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình

$$6x^2+20x+15=0 \qquad (5)$$

Theo định lí Vi-ét: $a+\frac{1}{b}=-\frac{10}{3}$; $\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$.

Từ đó : $\dfrac{ab^2-9(ab+1)^3}{b^3}=\dfrac{a}{b}-9\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^3=\dfrac{5}{2}-9\left(-\dfrac{10}{3}\right)^3=\dfrac{2015}{6}$

Suy ra $\dfrac{b^3}{ab^2-9(ab+1)^3}=\dfrac{6}{2015}$, điều phải chứng minh.

Câu 30.

a) Giả sử a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\begin{cases}a^2+3b=2\\ b^2+3a=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+3(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)(a+b)+3(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-b=0\,(loai)\\ a+b=-3\end{array}\right.$

b) $(a+b)^3=-27$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27\Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$

vì $a^2+3a+b^2+3b=4\Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+3(a+b)=4\Leftrightarrow ab=-2$

Vậy $a^3+b^3=-45$

Câu 31. Ta có: $4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4\left(x^4-y^4\right)+8y^8}{\left(x^4+y^4\right)\left(x^4-y^4\right)}$

$$=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4-y^4}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2\left(x^2-y^2\right)+4y^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}$$

$$=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=\frac{y\left(x-y\right)+2y^2}{\left(x+y\right)\left(x-y\right)}=\frac{y}{x-y}$$

Do đó: $\frac{y}{x-y}=4\Leftrightarrow y=4x-4y\Leftrightarrow 5y=4x$

Vậy $5y=4x$ (đpcm)

Câu 32. Ta có: $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^3b^3c^3$

Mà: $(a+b)(b+c)(c+a)=abc$. Do đó:

$abc(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^3b^3c^3$

$\Leftrightarrow abc=0$ hoặc $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^2b^2c^2$

* Nếu $abc\neq 0$

Thì: $a^2-ab+b^2\geq |ab|$; $b^2-bc+c^2\geq |bc|$; $c^2-ca+a^2\geq |ca|$

Suy ra: $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geq a^2b^2c^2$

Mà: $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^2b^2c^2$

Do đó $a=b=c$ thay vào (i) $\Rightarrow 7a^3=0\Rightarrow a=0\Rightarrow abc=0$ (mâu thuẫn)

Vậy: $abc=0$ (đpcm)

Câu 33. Ta có:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b\\ \left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b & (1)\\ xy(a+b)=ab(a+b) & (2)\end{cases}\quad (*)$$

+/ Nếu $a+b\neq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b\\ xy=ab\end{cases}$

=> x, y là 2 nghiệm của phương trình $X^2-(a+b)X+ab=0$

Giải ra ta có $\begin{cases}x=b\\ y=a\end{cases};\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}\Rightarrow x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$.

+/Nếu $a+b=0\Rightarrow a=-b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=0 \\ x^3+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-y$.

$=>\begin{cases} a^{2011}+b^{2011}=0 \\ x^{2011}+y^{2011}=0 \end{cases} => x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$

Câu 34. $VT=\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{a}{(b-1)(b^2+b+1)}+\frac{b}{(a-1)(a^2+a+1)}$

$=\frac{a}{-a(b^2+b+1)}+\frac{b}{-b(a^2+a+1)}=\frac{-1}{b^2+b+1}+\frac{-1}{a^2+a+1}$

$=\frac{-(a^2+a+1)-(b^2+b+1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}=-\frac{\left[(a+b)^2-2ab+3\right]}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+2}$

$=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+(a^2+2ab+b^2)+2}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}=VP$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 35. Ta có: a + b = c + d suy ra: a = c + d – b thay vào ab + 1 = cd

Ta có: $(c+d-b).b+1=cd \Leftrightarrow b(d-b)+cd-cd+1=0 \Rightarrow (d-b)(b-c)=-1$

Vì b,c, d là số nguyên nên: d – b = -b + c = 1 hoặc –d + b = b – c = 1

Vậy $c=d$

Câu 36. Ta có: $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$ Suy ra: $xy+yz+zx=xyz$

Do đó: (x – 1)(y – 1)(z – 1) = xyz – (xy + yz + zx) + (x+y+z) -1 (*)

Thay xy + yz + zx = xyz và x + y + z =1 vào (*) ta được:

(x – 1)(y – 1)(z – 1) = xyz – (xy + yz + zx) + (x+y+z) -1

= (xy + yz + zx) – (xy + yz + zx) + 1 -1 = 0 (đpcm)

Câu 37. Ta có: $0=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}$. Suy ra: $ayz+byz+cxy=0$.

Do đó: $1=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ca}\right)$

$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{ayz+bxz+cxy}{abc}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{0}{abc}\right)$

Vậy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (đpcm)

Câu 38. Ta có hằng đẳng thức: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Do đó:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=a+b+c=2009$$

Lưu ý cần nhớ: Khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$

và ngược lại khi $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $a+b+c=0$

Câu 39. Ta có các hằng đẳng thức:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

Từ $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ và $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-(ab+bc+ca)$

Ta có:

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=3abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)=3abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5-abc(ab+bc+ca)=3abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+abc.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=3abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)\text{ (đpcm)}$$

Câu 40. Đặt $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=k\Rightarrow a=\dfrac{x^2-yz}{k},b=\dfrac{y^2-zx}{k},c=\dfrac{z^2-xy}{k}$

Sau đó tính: a^2-bc,b^2-ca,c^2-ab theo x, y,z, k từ đó suy ra: $\dfrac{a^2-bc}{x}=\dfrac{b^2-ca}{y}=\dfrac{c^2-ab}{z}$

Câu 41. Ta có:

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}\right)=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2-(m+n)=2\sqrt{mn}$$

Do đó: $\dfrac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$

Áp dụng: $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{2.5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2+5}}=\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$

Câu 42. Ta có:

$$\left[a^2+b^2+(a+b)^2\right]^2=(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)(a+b)^2+(a+b)^4$$

$$=(a^2+b^2)^2+\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right](a+b)^2+(a+b)^4$$

$$=(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2+2(a+b)^4$$

$= 2\left[a^4 + b^4 + (a+b)^4\right]$

Tương tự:

$\left[c^2 + d^2 + (c+a)^2\right]^2 = 2\left[c^4 + d^4 + (c+d)^4\right]$

Vậy $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$

Câu 43.

Vì $xyz \neq 0$ nên: $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$

$$\Rightarrow \frac{x(m+n)}{xyz} = \frac{y(n+p)}{xyz} = \frac{z(p+m)}{xyz}$$

$$\text{hay}: \frac{m+n}{yz} = \frac{n+p}{xz} = \frac{p+m}{xy} = \frac{(p+m)-(n+p)}{xy-yz} = \frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy} = \frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}$$

$$= \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Câu 44. Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0$ (1)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c = x \\ b+c-a = y \\ a+c-b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x+z}{2} \\ b = \dfrac{x+y}{2} \\ c = \dfrac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$VT = \frac{x+z}{2}.\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2}\right).y^2 + \frac{y+z}{2}.\left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2}\right)x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2$$

$$= \frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2 + \frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2 - \frac{1}{4}.(x^2-y^2)z^2$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2-y^2)x^2 - \frac{1}{4}.(x^2-y^2).z^2$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2 = 0 = VP \quad \text{(dpcm)}$$

Câu 45.

$$\text{Đặt } \frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z} (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right) (2)$$

Ta lại có: $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}$

$=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$

Tương tự ta có: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc};\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)$

Vì $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Do đó: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

Câu 46. Ta có:

$$\begin{cases} x=ny+pz \\ y=mx+pz \\ z=mx+ny \end{cases}\Rightarrow x+y+z=2(ny+pz+mx)=2(ny+y)=2y(n+1)\Rightarrow\frac{1}{n+1}=\frac{2y}{x+y+z}$$

Tương tự: $\frac{1}{p+1}=\frac{2z}{x+y+z};\ \frac{1}{m+1}=\frac{2x}{x+y+z}$

Do đó: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{2x}{x+y+z}+\frac{2z}{x+y+z}+\frac{2x}{x+y+z}=2$

Câu 47. *Chú ý đến kết quả sau: "Nếu a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$"*

Sử dụng kết quả này cho bài toán ta có

$(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)$

$=3(x-y)(y-z)(z-x)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$ (*).

Đặt $P=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$; $Q=(xy-zx)^3+(yz-xy)^3+(zx-yz)^3$.

Khi đó

$P=3(x-y)(y-z)(z-x)$ (do $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$).

$Q=3(xy-zx)(yz-xy)(zx-yz)=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$.

Suy ra $P-Q=3(x-y)(y-z)(z-x)(1-xyz)$. Mà $VT(*)$ chính là $P-Q$ cho nên

$$1-xyz=\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}.$$

Vậy $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$. ❒

Câu 48.

a) (1,0 điểm)

Có $x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2=6+2\sqrt{3^2-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

$= 6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

Do $x>0$ nên $x=\sqrt{3}+1$.

Suy ra $\left(x-1\right)^2=3$ hay $x^2-2x=2$, do đó $P=-2$.

b) (1,0 điểm)

Từ $ab+bc+ca=2019$ suy ra $a^2+2019=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$.

Tương tự có $b^2+2019=\left(b+c\right)\left(b+a\right)$,$c^2+2019=\left(c+a\right)\left(c+b\right)$.

Vế trái của đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2-bc}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}+\frac{b^2-ca}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}+\frac{c^2-ab}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}$$

$$=\frac{\left(a^2-bc\right)\left(b+c\right)+\left(b^2-ca\right)\left(c+a\right)+\left(c^2-ab\right)\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$$

Khai triển và làm gọn biểu thức trên tử ta được kết quả là 0 nên có đpcm.

Câu 49. Ta có:

$$VT=\frac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\left(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+\left(2+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{4}\left(1+\sqrt[3]{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}=VP$$

Câu 50. Giả sử tồn tại bộ số thực (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đề bài

rõ ràng ĐK a, b, c là: $a^2\neq bc, b^2\neq ca, c^2\neq ab.$

Nếu a = b = c thì $a^2-bc=a^2-a^2=0\Leftrightarrow a^2=bc$ (vô lý)

Vậy nên trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 2 số khác nhau. Khi đó:

$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2>0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b^2-ca}=\frac{b}{c^2-ab}=\frac{c}{a^2-bc}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]}=\frac{1}{2019}$$

=> a + b + c > 0. Khi đó nếu tồn tại 2 số bằng nhau, giả sử a = b thì:

$$\frac{a}{b^2-ca}=\frac{b}{c^2-ab}\Rightarrow b^2-ca-c^2+ab=0$$

$$=>(a+b+c)(b-c)=0=>b=c$$

=> a = b = c (Vô lý)

Từ dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b}{b^2-ca-c^2+ab}=\frac{b-c}{c^2-ab-a^2+bc}=\frac{c-a}{a^2-ab-b^2+ca}=\frac{1}{2019}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a-b}{(b-c)(a+b+c)}=\frac{b-c}{(c-a)(a+b+c)}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b+c)}=\frac{1}{2019}$$

Đặt: $\begin{cases}x^2=yz\\ y^2=zx\Rightarrow x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\\ z^2=xy\end{cases}$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0\Leftrightarrow x=y=z$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2c\\ c+b=2a\\ a+c=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2c\\ c+b=2a\\ a-b=2b-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2c\\ c+b=2a\\ 3(a-b)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$$

Kết quả cho thấy vô lý. Vậy không tồn tại bộ 3 số thỏa mãn theo yêu cầu.

Câu 51. Đặt $s=\sqrt[3]{x^2}$ và $t=\sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t}+\sqrt{t^3+t^2s}=a$.

Do $s,t\ge 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t}=s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s}=t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t}=a$ hay $(s+t)^3=a^2$.

Suy ra $s+t=\sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 52. Ta có: $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-y+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-x+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}.$$

Câu 53. Đặt $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}=a+b$ khi đó

$x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}.x$

$\Rightarrow\ x^3=6+3x\Leftrightarrow x^3-3x=6\ \ (1)$

Đặt $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}=c+d$ khi đó

$y^3=(c+d)^3=c^3+d^3+3cd(c+d)=17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}.y$

$\Rightarrow y^3=34+3y\Leftrightarrow y^3-3y=34\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra A = $x^3+y^3-3(x+y)=x^3+y^3-3x-3y=6+34=40$

Câu 54. Từ hai hệ thức đã cho, xem z là tham số giải hệ phương trình 2 ẩn x,y theo z ta được

$$x=\frac{z+2}{z^2-z+1}\ \text{ và }\ y=\frac{2z-3}{z^2-z+1}.$$

$\Rightarrow 2x-y=\dfrac{2z+4}{z^2-z+1}-\dfrac{2z-3}{z^2-z+1}=\dfrac{7}{z^2-z+1}\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Do $z^2-z+1=\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ nên từ hệ thức $(2x-y)\left(z^2-z+1\right)=7$ cho ta $2x-y>0$.

Mà $x,y,z\in\mathbb{Z}$ suy ra $z^2-z+1=7$ hoặc $z^2-z+1=1$.

Trường hợp 1: $z^2-z+1=7$

Ta có $z^2-z-6=0\Leftrightarrow(z-3)(z+2)=0\Rightarrow z=3;z=-2$.

Với $z=3\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$ (loại).

Với $z=-2\Rightarrow x=0$ và $y=-1$ (nhận).

Trường hợp 2: $z^2-z+1=1\Leftrightarrow z^2-z=0\Leftrightarrow z(z-1)=0\Rightarrow z=0;z=1$.

Với $z=0\Rightarrow x=2$ và $y=-3$ (nhận).

Với $z=1\Rightarrow x=3$ và $y=-1$ (nhận).

Câu 55. Ta có: $2a+b+c=0\Rightarrow a+b=-(a+c)$

$\Rightarrow(a+b)^3=-(a+c)^3$

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a(ac+c^2+ab+b^2)$

$$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a\left[c(a+c)+b(a+b)\right]$$

$$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a\left[-c(a+b)+b(a+b)\right] \text{ (Vì } a+b=-(a+c)\text{)}$$

$$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a(a+b)(b-c)$$

$$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=3a(a+b)(c-b).$$

Câu 56. Để ý rằng $1+x^2=x^2+xy+yz+zx=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

Ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}-\frac{z}{1+z^2}=\frac{x}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}-\frac{z}{\left(z+y\right)\left(z+x\right)}$$

$$=\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)-z\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2xy}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$$

Câu 57. Cách 1. Do $ab+a+b=1$ nên ta được

$$a^2+1=a^2+ab+a+b=\left(a+b\right)\left(a+1\right);b^2+1=b^2+ab+a+b=\left(a+b\right)\left(b+1\right)$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{\left(a+b\right)\left(a+1\right)}+\frac{b}{\left(a+b\right)\left(b+1\right)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(a+b\right)^2\left(a+1\right)\left(b+1\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\left(b+1\right)+b\left(a+1\right)}{\left(a+b\right)\left(a+1\right)\left(b+1\right)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(a+b\right)^2\left(a+1\right)\left(b+1\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(a+1\right)\left(b+1\right)=\sqrt{2\left(a+1\right)\left(b+1\right)} \Leftrightarrow \left(a+1\right)\left(b+1\right)=2 \Leftrightarrow ab+a+b=1$$

Do đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên đẳng thức cần chứng minh đúng.

Cách 2. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a\left(b^2+1\right)+b\left(a^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}=\frac{1+ab}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}}.$$

Mà ta có $a\left(b^2+1\right)+b\left(a^2+1\right)=\left(a+b\right)\left(ab+1\right)$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{a+b}{\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\left(a+b\right)^2=\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) \Leftrightarrow a^2+b^2+4ab=a^2b^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)^2=\left(ab-1\right)^2 \Leftrightarrow a+b=ab-1 \Leftrightarrow ab+a+b=1$$

Do đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên đẳng thức cần chứng minh đúng.

Câu 58. Dùng phương pháp quy nạp toán học

* Với n = 1 đúng giả sử đúng với n = k ta có

$S_k=\dfrac{k^2}{4k^2+1}$; ta phải chứng minh đúng với n = k + 1 nghĩa là $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}$

$$S_{k+1}=S_K+\frac{2(k+1)-1}{4+(2k+1)^4}\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}=\frac{k^2}{4k^2+1}+\frac{2(k+1)-1}{4+(2k+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}-\frac{k^2}{4k^2+1}=\frac{2(k+1)-1}{4+(2k+1)^4}$$

Ta có :

$$\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}-\frac{k^2}{4k^2+1}=\frac{(k+1)^2(4k^2+1)-k^2\left[4(k+1)^2+1\right]}{\left[4(k+1)^2+1\right](4k^2+1)}$$

$$=\frac{4k^4+8k^3+4k^2+k^2+2k+1-4k^4-8k^3-4k^2-k^2}{16k^4+32k^3+24k^2+8k+5}=\frac{2k+1}{4+(2k+1)^4};(DPCM)$$

<u>Cách khác:</u>

đặt a = 2n - 1(n$\in N^*$) xét tổng quát $\dfrac{a}{4+a^4}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a^2-2a+2}-\dfrac{1}{a^2+2a+2}\right)$ thay n lần lượt từ 1 ;2;3;4;…. Ta có a lần lượt 1;3;5;7;…..

Ta có $4S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{13}+..............-\dfrac{1}{(2n-1+1)^2+1}=1-\dfrac{1}{(2n-1+1)^2+1}=\dfrac{4n^2}{4n^2+1}$

Chương II

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC MỘT BIẾN

🗁 Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa đa thức

★**Thí dụ 1.** Tính giá trị biểu thức $F=\dfrac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}$ với $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1.$

Do đó:

$x^3=x.x^3=x\left(3x-1\right)=3x^2-x=3\left(3x-1\right)-x=8x-3;$

$x^4=x^3.x=\left(8x-3\right).x=8\left(3x-1\right)-3x=21-8;$

$x^5=x^4.x=\left(21-8\right)x=21x^2-8x=21\left(3x-1\right)-8x=55x-21.$

Từ đó ta có:

$x^5-3x^3-10x+12=55x-21-3\left(8x-3\right)-10x+12=21x;$

$x^4+7x^2+15=21x-8+7\left(3x-1\right)+15=42.$

Vậy: $F=\dfrac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}=\dfrac{21x}{42x}=\dfrac{1}{2}\left(\text{do } x\neq 0\right)$

★**Thí dụ 2.** Cho $t=\dfrac{x}{x^2-x+1}$. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ theo t.

Lời giải

1) Nếu $x=0$ thì $t=0$ và $A=0.$

2) Nếu $x\neq 0$ thì $\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)t=1\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{t}+1\Rightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}-1.$

Khi đó: $A=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}}=\dfrac{t^2}{1+2t}.$

Từ hai trường hợp trên suy ra $A=\dfrac{t^2}{1+2t}.$

🗁 Dạng 2: Tính giá trị biểu thức chứa căn thức

★**Thí dụ 3.** Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị biểu thức

$H=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2023$

Lời giải

Ta có:

$x+\sqrt{3}=2\Leftrightarrow 2-x=\sqrt{3}\Rightarrow(2-x)^2=3\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

$H=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2023$

$=x^5-4x^4+x^3+x^4-4x^3+x^2+5\left(x^2-4x+1\right)+2018$

$=x^3\left(x^2-4x+1\right)+x^2\left(x^2-4x+1\right)+5\left(x^2-4x+1\right)+2018$

$=\left(x^3+x^2+5\right)\left(x^2-4x+1\right)+2018=2018\quad(\text{do}\quad x^2-4x+1=0)$

Vậy $H=2018$ khi $x+\sqrt{3}=2$

★**Thí dụ 4.** Cho $x=\dfrac{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=(x^2+2x-1)^{2012}$.

Lời giải

Ta có: $x=\dfrac{\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}-1$

$\Rightarrow x^2+2x-1=1$

$\Rightarrow P=(x^2+2x-1)^{2012}=1$

★**Thí dụ 5.** Cho $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$. Tính $Q=x^3+12x+2009$.

Lời giải

Ta có : $x^3=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)^3$

$$=\left(1+\sqrt{65}\right)-\left(\sqrt{65}-1\right)-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{65}\right)\left(\sqrt{65}-1\right)}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)$$

$$=2-12\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)=2-12x.$$

Do đó: $Q = 2-12x+12x+2009=2011$.

🗁 Dạng 3: Tính giá trị biểu thức có biến là nghiệm của phương trình cho trước

★**Thí dụ 6.** Cho a là nghiệm của phương trình: $x^2-3x+1=0$. Không cần tính a hãy tính giá trị biểu thức: $Q=\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}$

Lời giải

Do a là nghiệm của phương trình: $x^2-3x+1=0$ nên $a^2-3a+1=0\Rightarrow a^2+1=3a$.

Suy ra: $Q=\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}=\dfrac{a^2}{\left(a^2+1\right)^2-a^2}=\dfrac{a^2}{\left(3a\right)^2-a^2}=\dfrac{a^2}{8a^2}=\dfrac{1}{8}$

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng phương trình $x^2+x-1=0$ có hai nghiệm trái dấu. Gọi x_1 là nghiệm âm của phương trình . Tính giá trị của biểu thức $D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1$.

Lời giải

Phương trình $x^2+x-1=0$ có ac = -1 < 0 nên có 2 nghiệm trái dấu.

Vì x_1 có là nghiệm của phương trình nên: $x_1^2+x_1-1=0\Rightarrow x_1^2=1-x_1$

Do đó:

$$x_1^4=\left(1-x_1\right)^2=1-2x_1+x_1^2=1-2x_1+1-x_1=2-3x_1;$$

$$x_1^8=\left(2-3x_1\right)^2=4-12x_1+9x_1^2=4-12x_1+8x_1^2+x_1^2$$

$$=4-12x_1+8\left(1-x_1\right)+x_1^2=12-20x_1+x_1^2;$$

$$x_1^8+10x_1+13=12-20x_1+x_1^2+10x_1+13=25-10x_1+x_1^2=\left(5-x_1\right)^2$$

Do đó:

$$D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1.=\sqrt{\left(5-x_1\right)^2}+x_1=\left|5-x_1\right|+x_1$$

Do x_1 là nghiệm âm của phương trình nên $x_1 < 0$ nên $5 - x_1 > 0$ do đó:

$$D=\left|5-x_1\right|+x_1=5-x_1+x_1=5$$

★**Thí dụ 8.** Gọi m là nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2+x-1=0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $A=\dfrac{2m-3}{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}+2m^2}$

Lời giải

Do m là nghiệm dương của phương trình $\sqrt{2}.x^2+x-1=0$ nên $\sqrt{2}.x^2=1-x\Rightarrow 0<x<1$ nên $4x^4=1-2x+x^2$. Do đó ta có:

$$A=\frac{2m-3}{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}+2m^2}=\frac{\left(2m-3\right)\left(\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2\right)}{4m^2-4m+6-4m^4}$$

$$=\frac{\left(2m-3\right)\left(\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2\right)}{-4m+6}=\frac{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2}{-2}$$

$$=\frac{\sqrt{2\left(2-m\right)^2}}{-2}+m^2=\frac{\sqrt{2}\left(2-m\right)}{-2}+\frac{1-m}{\sqrt{2}}=\frac{m-2}{\sqrt{2}}+\frac{1-m}{\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài tập luyện tập

Câu 1. Cho x, y thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+1.$$

Câu 2. (*Chuyên Hải Dương 2010*)

Cho $x=\dfrac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $M=\left(9x^3-9x^2-3\right)^2$.

Câu 3. Cho $m=\sqrt[3]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-1}$, $n=\sqrt[3]{\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}+2}$.

Tính giá trị biểu thức $T=2(20m+6n)^2-38$.

Câu 4. Tính giá trị của biểu thức

$B=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$ biết $a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$.

Câu 5. *(HSG Hải An 2018)*

Cho biểu thức $A=\left(x^2-x-1\right)^{2018}+2019$.

Tính giá trị biểu thức *A* khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

Câu 6. *(HSG Lê Chân 2018)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Chứng ming rằng: $x^4-16x^2+32=0$.

Câu 7. *(HSG Thanh Hóa 2017)*

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Câu 8. *(HSG TP. Hải Phòng 2018)*

Cho $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh $a^2-2a-2=0$.

Câu 9. *(HSG Hải Dương 2016)*

Cho biểu thức: $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1\le x\le 1$).

Tính giá trị của biểu thức *P* khi $x=-\dfrac{1}{2019}$

Câu 10. *(HSG Hải Phòng 2016)*

Cho $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P=\left(12x^2+4x-55\right)^{2017}$.

Câu 11. *(HSG Hải Dương 2015)*

Cho $x=3-\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$.

Câu 12. *(HSG Hưng Yên 2015)*

Cho $x=1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{x^3-3x^2-3x+2018}$.

Câu 13. *(HSG Phú Thọ 2015)*

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}$ với $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 14. *(HSG TP. Hải Phòng 2015)*

Tính giá trị của biểu thức $A=x^3-6x+1976$ với $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Câu 15. *(HSG Hưng Yên 2014)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}.$$

Câu 16. *(HSG Hải Dương 2014)*

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^3+3x^2-4x+2$

với $x=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$

Câu 17. *(HSG Hưng Yên 2013)*

Cho $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=(4x^5+4x^4-x^3+1)^{19}+\left(\sqrt{4x^5+4x^4-5x^3+5x+3}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x^2+2x}}\right)^{2014}.$$

Câu 18. *(HSG Phú Thọ 2013)*

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$, biết $a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$.

Câu 19. *(HSG Kinh Môn 2013)*

Không dùng máy tính. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = (4x^3 - 6x^2 - 1)^{2015} + 2014$

với $x=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)$.

Câu 20. *(HSG TP. Thanh Hóa)*

Với $x=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức: $B=\left(3x^3+8x^2-2\right)^{2015}$

Câu 21. *(Chuyên Lam Sơn 2015-2016)*

Cho $x^2-x-1=0$. Tính $P=\frac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2015}{x^4-x^3-3x^2-3x+2015}$

Câu 22. Cho $x>1, y<0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)}=-2019$.

Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

Câu 23. Cho $x, y>0$ sao cho $x+y=1-xy$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=2x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}+2y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Câu 24. Chứng minh rằng biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n

$$P=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}.$$

Câu 25. Chứng minh rằng số $x_0=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình $x^4-16x^2+32=0$.

Câu 26. Cho biểu thức $P=\dfrac{a}{a+1}+\sqrt{1+a^2+\dfrac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a\neq -1$. Rút gọn biểu thức P và tính giá trị của biểu thức P khi $a=2020$.

Câu 27. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Bình Dương 2019-2020)*

Tính giá trị biểu thức: $P=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2018}+2019$ tại $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

Câu 28. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Sơn La 2019-2020)*

Tính giá trị biểu thức $B=(x^2+4x-2)^{2019}$ tại $x=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$

Câu 29. *(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Tiền Giang 2019-2020)*

Cho $x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}-1$. Tính giá trị biểu thức $P=x^3\left(x^2+3x+9\right)^3$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Có $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$

$$\Rightarrow x^3=2y+3\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}.\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\left(\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\right)$$

$$\Rightarrow x^3+3x-2y=0$$

$$A=x^4+x^3y+3x^2-2xy+3xy-2y^2+1=(x^4+3x^2-2xy)+(x^3y+3xy-2y^2)+1$$

$$=x(x^3+3x-2y)+y(x^3+3x-2y)+1=1$$

Câu 2. Từ $x=\dfrac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$

$$\Rightarrow(3x-1)=\left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)^3$$

$$\Rightarrow (3x-1)^3 = 8 + 3(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 - 9x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow M = (-1)^2 = 1$$

Câu 3.

Ta có: $m = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} - 1} = 1$

$$n = \sqrt[3]{\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} + 2} = 2$$

Do đó: $T = 2(20+12)^2 - 38 = 2010$

Câu 4.

$$B = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2} = \frac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{a+2}{a-2}$$

Xét $a^3 = 55 + \sqrt{3024} + 55 - \sqrt{3024} + 3\sqrt[3]{\left(55+\sqrt{3024}\right)\left(55-\sqrt{3024}\right)}.a$

$$\Leftrightarrow a^3 = 110 + 3a$$

$$\Leftrightarrow (a-5)(a^2 + 5a + 22) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 5 \ (\text{do } a^2 + 5a + 22 > 0)$$

$$\Rightarrow B = \frac{a+2}{a-2} = \frac{7}{3}$$

Câu 5. Ta có

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1\right)}{\sqrt{3}+1-1}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1-\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}{1} = 2$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta được

$$A = \left(2^2 - 2 - 1\right)^{2018} + 2019 = 1 + 2019 = 2020$$

Câu 6.

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3}.\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow x^2-8=-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x^2-8\right)^2=\left[-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+64=4\left(2+\sqrt{3}\right)+12.\left(2-\sqrt{3}\right)+8\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+64=32$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+32=0$$

Vậy $x^4-16x^2+32=0$ (đpcm)

Câu 7.

Vì $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

nên $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $P=\dfrac{2x^{2017}\left(2x^2+2x-1\right)+2x+1}{\left(2x^2+2x-1\right)+x+1}=\dfrac{2x+1}{x+1}=3-\sqrt{3}.$

Câu 8.

$$a^2=3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}+3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}$$

$$=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

Vì $a>0$ nên $a=\sqrt{3}+1$. Do đó $\left(a-1\right)^2=3$ hay $a^2-2a-2=0$.

Câu 9.

$$P=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow P^2=\left(1-x\right)\left(2+2\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\right)=2\left(1-x\right)\left(1+|x|\right)$$

Mà $P=\sqrt{1-x+\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}\ge 0\Rightarrow P=\sqrt{2}\left(1-x\right)$

Với $x=-\dfrac{1}{2019}\Rightarrow P=\dfrac{2019}{2018}\sqrt{2}.$

Câu 10.

Ta có :

$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)$

$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}$

$$x=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}=\frac{3-1}{1}=2$$

Thay giá trị của x vào P ta được: $P=\left(12.2^2+4.\,2-55\right)^{2017}=1^{2017}=1$

Câu 11.

Ta có: $x=3-\sqrt{5}\Leftrightarrow 3-x=\sqrt{5}\Rightarrow(3-x)^2=5\Rightarrow x^2-6x+4=0$

$A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$

$=(x^5-6x^4+4x^3)-2(x^4-6x^3+4x^2)+(x^3-6x^2+4x)+20(x^2-6x+4)+24$

$A=x^3(x^2-6x+4)-2x^2(x^2-6x+4)+x(x^2-6x+4)+20(x^2-6x+4)+24$

$A=24$

Câu 12.

Có $x+1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2=\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\sqrt[3]{2}x$.

$\Rightarrow\left(x+1\right)^3=2x^3\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x=1\Rightarrow A=2019$

Câu 13.

Ta có $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1$

Khi đó $x^3=x^2.x=\left(3x-1\right)x=3x^2-x=3\left(3x-1\right)-x=8x-3$

$x^4=x^3.x=\left(8x-3\right)x=8x^2-3x=8\left(3x-1\right)-3x=21x-8$

$x^5=x^4.x=\left(21x-8\right)x=21x^2-8x=21\left(3x-1\right)-8x=55x-21$

Suy ra $P=\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}=\dfrac{\left(55x-21\right)-4\left(8x-3\right)-17x+9}{\left(21x-8\right)+3\left(3x-1\right)+2x+11}$

$=\dfrac{6x}{32x}=\dfrac{3}{16}$ (do $x\neq 0$). Vậy $P=\dfrac{3}{16}$.

Câu 14.

+ Đặt $u=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$;$v=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Ta có $x=u+v$ và $u^3+v^3=40$

$u.v=\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}=2$

$x = u + v \Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 40 + 6x$

hay $x^3 - 6x = 40$. Vậy A = 2016.

Câu 15.

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Thay $x=\sqrt{2}$ vào A ta có

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}=\left(4+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1\right)^{2019}=1^{2019}=1$$

Câu 16.

Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$, $a>0$

$$a^2=4+2\sqrt{4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

$$x=\sqrt{2}-1\Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$B=2x^3+3x^2-4x+2=2x\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)+1=1$$

Câu 17. Ta có $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow 2x=\sqrt{2}-1\Rightarrow 2x+1=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4x^2+4x-1=0$ (a)

Do đó:

$$4x^5+4x^4-x^3+1=x^3(4x^2+4x-1)+1=1$$

$$4x^5+4x^4-5x^3+5x+3=x^3(4x^2+4x-1)-x(4x^2+4x-1)+(4x^2+4x-1)+4=4$$

Từ (a) $\Rightarrow 2x^2+2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2x^2+2x}=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2}-2x=1$

$$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}=\frac{1-\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-2x=1$$

Do đó $A=1^{19}+\left(\sqrt{4}\right)^3+1^{2014}=10$

Câu 18. Ta có $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}=\dfrac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a-2)}=\dfrac{a+2}{a-2}$;

mà $a^3=110+3\sqrt[3]{55^2-3024}\left(\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\right)$.

$\Rightarrow a^3=110+3a\Leftrightarrow a^3-3a-110=0$.

$\Leftrightarrow (a-5)(a^2+5a+22)=0\Leftrightarrow a=5$. Suy ra $P=\dfrac{7}{3}$.

Câu 19. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\\ b=\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=1\\ a^3+b^3=6\\ a+b=2x-1\end{cases}$

$\Rightarrow (2x - 1)^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 6 + 3(2x - 1)$

$\Rightarrow (2x-1)\left[(2x-1)^2-3\right]=6$

$\Rightarrow 4x^3 - 6x^2 - 1 = 1$

Vậy $P = (4x^3 – 6x^2 – 1)^{2015} + +2014 = 1+2014 = 2015$.

Câu 20.

Ta có $x=\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}$.

Do đó B = - 1.

Câu 21.

Ta có : $P=\dfrac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2015}{x^6-x^3-3x^2-3x+2015}=\dfrac{(x^4-2x^3+2x^2-x)(x^2-x-1)+2015}{(x^4+x^3+2x^2+2x+1)(x^2-x-1)+2015}=\dfrac{2015}{2015}=1.$

Câu 22. Do $x>1$ nên $\sqrt{4x-1}-1>0\Rightarrow\sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}=\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2}=\sqrt{4x-1}-1$.

Khi đó: $\dfrac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)}=-2019\Leftrightarrow\dfrac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y^2(x^2+xy+y^2)}=2019$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=2019y^2\Leftrightarrow x^2=2020y^2\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{y^2}=2020\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=\pm\sqrt{2020}$.

Do $x>1,y<0$ nên $\dfrac{x}{y}<0$. Vậy $\dfrac{x}{y}=-\sqrt{2020}$. ❒

Câu 23. Ta có

$1+x^2=xy+x+y+x^2=(x+y)(x+1)$

$1+y^2=xy+x+y+y^2=(x+y)(y+1)$

$x+y+xy=1\Leftrightarrow(x+1)(y+1)=2$.

Khi đó

$$P=2x\sqrt{\frac{y+1}{x+1}}+2y\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}+(x+y)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$=\frac{2x(y+1)}{\sqrt{2}}+\frac{2y(x+1)}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}(x+y)$$

$$=\sqrt{2}\left[x(y+1)+y(x+1)+x+y\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(xy+x+y\right)=2\sqrt{2}.\ \square$$

Câu 24. Với mọi n nguyên dương ta có

$$\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)^2$$

$$=2n^2+2n+1+2\sqrt{(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)}+2n^2-2n+1$$

$$=4n^2+2+2\sqrt{(2n^2+1)^2-(2n)^2}$$

$$=4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}.$$

Khi đó

$$P=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

$$=\sqrt{4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}}.\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

$$=\sqrt{(4n^2+2)^2-4(4n^4+1)}$$

$$=\sqrt{16n^2}=4n.\ \square$$

Câu 25. Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ và $b=\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Ta có $a^2+b^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $ab=\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Từ $x_0=a-b$ suy ra $x_0^2=a^2+b^2-2ab=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Khi đó

$2\sqrt{2+\sqrt{3}}+2\sqrt{6-3\sqrt{3}}=8-x_0^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 \le 8 \\ \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(2\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^2+8\sqrt{3}=(8-x_0^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 \le 8 \\ 2(2+\sqrt{3})+4(6-3\sqrt{3})+8\sqrt{3}=64-16x_0^2+x_0^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 \le 8 \\ x_0^4-16x_0^2+32=0 \end{cases}.$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình $x^4-16x^2+32=0$. ❒

Câu 26.

Với $x \ne -1$ ta có

$$P=\frac{a}{a+1}+\sqrt{(a+1)^2-2a+\frac{a^2}{a+1}}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\sqrt{(a+1)^2-2(a+1).\frac{a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^2}}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\sqrt{\left[(a+1)-\frac{a}{a+1}\right]^2}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\left|(a+1)-\frac{a}{a+1}\right|.$$

Để ý rằng

$(a+1)-\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{a^2+a+1}{a+1}$ dương nếu $a>-1$ và âm nếu $a<-1$ (do $a^2+a+1>0,\forall a$)

Suy ra

- Nếu $a>-1$ thì $P=\dfrac{a}{a+1}+(a+1)-\dfrac{a}{a+1}=a+1$.
- Nếu $a<-1$ thì $P=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a+1}-(a+1)=-\dfrac{a^2+1}{a+1}$.
- Nếu $a=2020$ thì $P=a+1=2021$. ❒

Câu 27. Ta có: $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}}=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{2}-1\right|=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

Đặt $A = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

Ta thấy:

$A = 4x^3\left(x^2 + x + 1\right) - x^3 + 5x - 2$

$= x^3\left(4x^2 + 4x - 1\right) - x\left(4x^2 + 4x - 1\right) + \left(4x^2 + 4x - 1\right) - 1$

$= \left(4x^2 + 4x - 1\right)\left(x^3 - x + 1\right) - 1$

Mà $4x^2 + 4x - 1 = 4\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) - 1 = 0$.

Thay $4x^2 + 4x - 1 = 0$ vào A, ta được $A = -1$.

Vậy $P = (-1)^{2018} + 2019 = 2020$

Câu 28. Ta có

$$x = \frac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(1+2\sqrt{5})^2}+3}$$

$$= \frac{2}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = -2+\sqrt{5}$$

Vậy

$$B = (x^2 + 4x - 2)^{2019} = \left[\left(-2+\sqrt{5}\right)^2 + 4\left(-2+\sqrt{5}\right) - 2\right]^{2019}$$

$$= \left(4 - 4\sqrt{5} + 5 - 8 + 4\sqrt{5} - 2\right)^{2019} = \left(-1\right)^{2019} = -1$$

Câu 29.

$$x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \left(x+1\right)^3 = 4 - 6\left(x+1\right) \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 9x = -3$$

$$P = x^3\left(x^2 + 3x + 9\right)^3 = \left(x^3 + 3x^2 + 9x\right)^3$$

$$P = -27$$

Chương III

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

🗁 Dạng 1: Sử dụng phương pháp phân tích

★Thí dụ 1. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$.

Tính giá trị biểu thức: $P=\left(a^{23}+b^{23}\right)\left(b^{3}+c^{3}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)$

Lời giải

Ta có: $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

$\left(a+b+c\right)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)=abc$

$\Leftrightarrow \left(a^2b+abc+ca^2\right)+\left(ab^2+b^2c+abc\right)+\left(abc+bc^2+c^2a\right)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+ca^2+b^2c+ab^2+c^2b+ac^2+2abc=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$

* Với a = - b thì: $a^{23}+b^{23}=\left(-b\right)^{23}+b^{23}=0$

Do đó: $P=\left(a^{23}+b^{23}\right)\left(b^{3}+c^{3}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)=0$

* Với b = - c thì: $b^{3}+c^{3}=\left(-c\right)^{3}+c^{3}=0$

Do đó: $P=\left(a^{23}+b^{23}\right)\left(b^{3}+c^{3}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)=0$

Với: c = - a thì: $c^{2019}+a^{2019}=\left(-a\right)^{2019}+a^{2019}=0$

Do đó: $P=\left(a^{23}+b^{23}\right)\left(b^{3}+c^{3}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)=0$

Vậy ta có: P = 0

★Thí dụ 2. Cho các số dương x, y thỏa mãn: $7x^2-13xy-2y^2=0$ (1)

Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{2x-6y}{7x+4y}$.

Lời giải

Từ (1) ta có: $(7x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x=2y$ (do x, y > 0)

Thay $x=2y$ vào A ta được: $A=\dfrac{2x-6y}{7x+4y}=\dfrac{4y-6y}{14y+4y}=\dfrac{-2y}{18y}=\dfrac{-1}{9}$

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{2010}{x}+1=\dfrac{2010}{y} \\ x+2y=2335 \end{cases}$ (2)

Tính giá trị biểu thức: $B=\dfrac{x}{y}$.

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{2010}{x}$, $b=\dfrac{2010}{y}$ với a, b > 0.

Từ (2) suy ra: $\begin{cases} a+1=b \\ \dfrac{2010}{a}+\dfrac{2.2010}{b}=2345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=b \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{7}{6}$

$\Leftrightarrow 7a^2-11a-6=0 \Leftrightarrow a=2$ (do a > 0) suy ra : b = 3.

Vậy: $B=\dfrac{x}{y}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$.

🗁 **Dạng 2: Sử dụng phương pháp hệ số bất định**

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} (x-y)(x+y)=z^2 \\ 4y^2=5+7z^2 \end{cases}$ (4)

Tính giá trị biểu thức $D=2x^2+10y^2-23z^2$.

Lời giải

Ta có: $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-x^2-y^2=0 \\ 4y^2-7z^2=5. \end{cases}$ (4)

Ta tìm các số thực a, b thỏa mãn: $a(z^2-x^2-y^2)+b(4y^2-7z^2)=2x^2+10y^2-23z^2$

$\Leftrightarrow ax^2+(4b-a)y^2-(7b+a)z^2=2x^2+10y^2-23z^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 4b-a=10 \\ 7b+a=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3. \end{cases}$

Vậy D = 2.0 + 3.5 = 15.

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{t}{x+2y+2z}=1 \\ \dfrac{t}{z-3x}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (5).

Tính giá trị biểu thức: $E=\dfrac{t}{x+8y+9z}$.

Lời giải.

Ta có: $(5)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{t}+2\dfrac{y}{t}+2\dfrac{z}{t}=1\\ \dfrac{z}{t}-3\dfrac{x}{t}=2\end{cases}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{E}=\dfrac{x}{t}+8\dfrac{y}{t}+9\dfrac{z}{t}$. Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn:

$$a\left(\frac{x}{t}+2.\frac{y}{t}+2.\frac{z}{t}\right)+b\left(-3.\frac{x}{t}+\frac{z}{t}\right)=\frac{x}{t}+8.\frac{y}{t}+9.\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow(a-3b)\frac{x}{t}+2a.\frac{y}{t}+(2a+b).\frac{z}{t}=\frac{x}{t}+8\frac{y}{t}+9\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b=1\\ 2a=8\\ 2a+b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{E}=4.1+1.2=6.$$

Vậy $E=6$

★**Thí dụ 6.** Cho số thực x, y, z, t thỏa mãn: $\begin{cases}5x=3y=\dfrac{5}{2}z & (1)\\ \dfrac{t}{x}-\dfrac{t}{y}+\dfrac{t}{z}=\dfrac{9}{10} & (2)\end{cases}$

Tính giá trị biểu thức: $C=\dfrac{t^2}{xy}+\dfrac{t^2}{yz}+\dfrac{t^2}{zx}$.

Lời giải.

Từ (1) ta có: $y=\dfrac{5}{3}x, z=2x$.

Thay $y=\dfrac{5}{3}x, z=2x.$ vào (2) ta được: $\dfrac{t}{x}-\dfrac{t}{\frac{5}{3}x}+\dfrac{t}{2x}=\dfrac{9}{10}\Rightarrow t=x.$

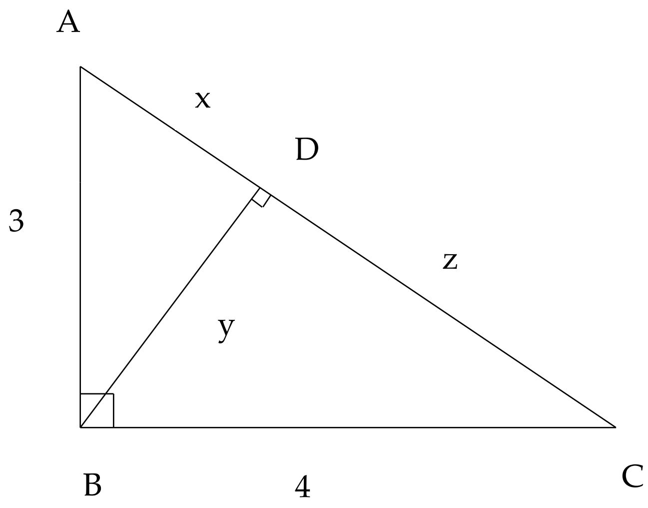
Vì thế: $C=\dfrac{t^2}{xy}+\dfrac{t^2}{yz}+\dfrac{t^2}{zx}=\dfrac{x^2}{xy}+\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{x^2}{zx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y}.\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{5}$.

🗁 Dạng 3: Sử dụng phương pháp hình học

★**Thí dụ 7**. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y^2+z^2=16\\ y^2=xz\end{cases}\quad(*)$

Tính giá trị biểu thức $G=xy+yz$

Lời giải



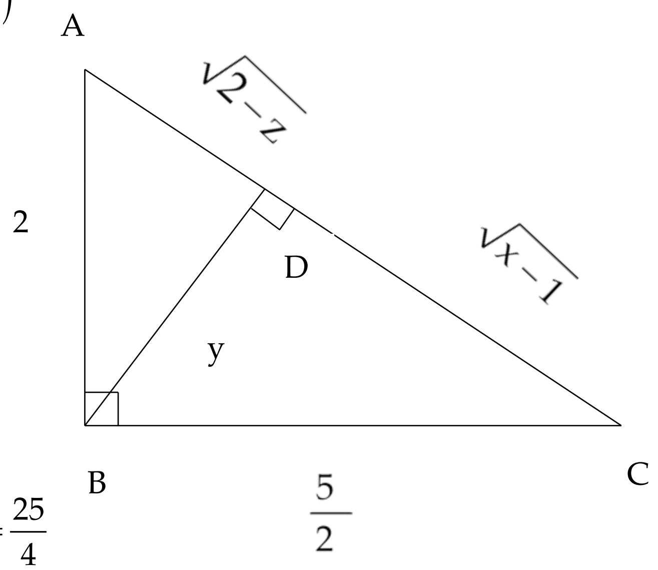
Xét tam giác ABC vuông tại B, có AB = 3, BC = 4 đường cao BD. Đặt AD = x, BD = y, DC = z, ta thấy x, y,z hoàn toàn thỏa mãn hệ thức (*). Khi đó:

$G = xy + yz = y(x+z) = 2.S_{ABC} = AB.BC = 3.4 = 12$

★**Thí dụ 8**. Cho 3 số thực x, y, z với y > 0 thỏa mãn: $\begin{cases} x + y^2 = \dfrac{29}{4} \\ y^2 - z = 2 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases} \quad (7)$

Tính giá trị biểu thức $H = y\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}\right)$

Lời giải



Từ (7) suy ra x > 1 và z < 2.

Ta viết lại hệ (7) dưới dạng:

Ta viết lại hệ (7) dưới dạng: $\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4} \\ y^2 + \left(\sqrt{2-z}\right)^2 = 4 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases}$

Xét tam giác ABC vuông tại B, đường cao BD với $AB = \dfrac{5}{2}, BC = 2.$

Đặt $BD = y, AD = \sqrt{x-1}, CD = \sqrt{2-z}$

Rõ ràng x, y, z thỏa mãn hệ. Từ đó ta có:

$$H = y\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}\right) = 2.S_{ABC} = 2.\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.2 = 5.$$

Vậy $H = 5$.

Dạng 4: Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

★**Thí dụ 9**. Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$

Tính $A = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Lời giải

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-c = c \\ a+c-b = b \\ b+c-a = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2c \\ a+c = 2b \\ b+c = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2c.2a.2b}{abc} = 8$$

Bài tập vận dụng

Câu 1. *(Chuyên Khánh Hòa 2018)*

Cho 3 số x, y, z khác 0 thỏa mãn : $x+y+z = \frac{1}{2}; \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xyz} = 4; \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > 0$

Tính $Q = \left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)$

Câu 2. *(Chuyên Nam Định 2016)*

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c = 6$;

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} = \frac{47}{60}.$$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Câu 3. *(Chuyên Bình Dương 2018)*

Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right) = 2018$. Tính giá trị của biểu thức $Q = x^{2019}+y^{2019}+2018(x+y)+2020$

Câu 4. *(Chuyên Hải Dương 2016)*

Tính giá trị biểu thức $P=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$ biết:

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}},\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Câu 5. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2018)*

Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2\left(a+c+1\right)\left(a+b-1\right)$.

Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 6. *(Chuyên Phú Thọ 2018)*

a) Cho a,b,c là 3 số thực đôi một khác nhau: $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$. Tính $P=x.abc$

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+z=9;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$

Câu 7. *(Chuyên Lào Cai 2018)*

Cho: $\begin{cases}x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\end{cases}$.

Tính giá trị biểu thức $M=\left(x-y\right)^3+3\left(x-y\right)\left(xy+1\right)$

Câu 8. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2015)*

Cho hai số thực a , b thỏa điều kiện $ab=1,\ a+b\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Câu 9. *(HSG huyện Thủy Nguyên 2018)*

Cho các số thực $x,\ y,\ z\neq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$. Tính giá trị biểu thức $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}$.

Câu 10. *(HSG huyện Vĩnh Bảo 2018)*

Cho ba số $x,y,z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=x\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+z^2}}.$$

Câu 11. *(HSG Nam Định 2015)*

Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$.

Câu 12. *(HSG TP. Hải Phòng 2015)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$.

Rút gọn biểu thức: $B=\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}$.

Bài 13. *(HSG Hải Dương 2013)*

Cho *a* và *b* là các số thỏa mãn $a>b>0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Bài 14. *(HSG huyện Yên Định 2012)*

Cho $a+b+c=0$, tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{a^2+c^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$

Bài 15. *(HSG huyện Kinh Môn 2012)*

Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = x^2(x+1) - y^2(y-1) + xy - 3xy(x - y + 1) + 1974$$

Biết $x - y = \sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$

Bài 16. *(Chọn HSG tỉnh năm 2014)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}$

Tính giá trị biểu thức với: $x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right); y=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right); a,b\ge 1$

Bài 17. *(HSG Đăk Lăk năm 2014)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

Bài 18. *(HSG Vĩnh Long năm 2015)*

Cho $x+y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^4+y^4.

Bài 19. *(HSG TP. Hồ Chí Minh năm 2015)*

Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab=a-b$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab.$$

Bài 20. *(HSG Bắc Ninh năm 2016)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0; a^2+b^2\ne c^2; b^2+c^2\ne a^2; c^2+a^2\ne b^2$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$.

Bài 21. *(HSG Đồng Nai năm 2016)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức

$$P=a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc$$

Bài 22. *(HSG Hưng Yên năm 2016)*

Cho $a=\frac{\sqrt{2}-1}{2};b=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính a^7+b^7.

Bài 23. *(HSG TP Hồ Chí Minh năm 2016)*

Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện sau $a-b=7;b-c=3$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2-c^2-2ab+2bc}$

Bài 24. *(Chuyên Phú Thọ năm 2016)*

Cho các số a, b thoả mãn $2a^2+11ab-3b^2=0;b\neq 2a;b\neq -2a$ .Tính giá trị biểu thức:

$$T=\frac{a-2b}{2a-b}+\frac{2a-3b}{2a+b}$$

Bài 25. *(Chuyên Phú Thọ năm 2016)*

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}$ với x, y, z là các số thỏa mãn $xyz=5$ và biểu thức P có nghĩa.

Bài 26. *(Chuyên TP. Hà Nội năm 2016)*

Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc\neq 0$.

Tính: $P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

Bài 27. *(Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2017)*

Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$

Bài 28. *(Chuyên Phú Thọ năm 2017)*

Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Tính giá trị của biểu thức $T=\left(a+b-1\right)\left(b+c-1\right)\left(c+a-1\right)$.

Bài 29. Cho x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 30. Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ và $\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=4$.

Tính giá trị của biểu thức $P = (x + 2y + z)^{2012}$.

Bài 31. Cho $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2018}+b^{2018}+c^{2018}$

Câu 32. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: ab + bc +ca = 1. Tính giá trị biểu thức:

a) $A=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ b) $B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

Câu 33. Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^{100}+b^{100}=a^{101}+b^{101}=a^{102}+b^{102}$

Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2010}+b^{2010}$

Câu 34. Cho số $x\,(x\in R; x>0)$ thoả mãn điều kiện: $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

Tính giá trị các biểu thức: $A=x^3+\frac{1}{x^3}$ và $B=x^5+\frac{1}{x^5}$

Câu 35. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = a + 2b + 3c = 14$.

Tính giá trị của biểu thức T = abc.

Câu 36. Cho a, b, c đôi một khác nhau. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}$$

Câu 37. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$ Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Câu 38. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị biểu thức: $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Câu 39. Cho a, b,c là các số thực thỏa mãn: $a+b+c=6; \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=8$

Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$

Câu 40. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}$

Câu 41. *(HSG Vĩnh Phúc 2011)*

Cho $f(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị biểu thức sau:

$$A=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+...+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

Câu 42. Cho a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=2013$

Tính giá trị biểu thức: $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}$.

Câu 43. Cho a,b,c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

Câu 44. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2-2y^2=xy\left(x+y\neq 0; y\neq 0\right)$

Câu 45. Tính giá trị của biểu thức sau: $\dfrac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x=2011$

Câu 46. Tìm 3 số dương a,b,c thỏa mãn : $\dfrac{a^2+7}{4}=\dfrac{b^2+6}{5}=\dfrac{c^2+3}{6}$ và $a^2+2c^2=3c^2+19$

Câu 47. Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=210$. Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

Câu 48. Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z=7;\quad x^2+y^2+z^2=23;\qquad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H=\dfrac{1}{xy+z-6}+\dfrac{1}{yz+x-6}+\dfrac{1}{zx+y-6}$

Câu 49. Biết $a^3-3ab^2=5$ và $b^3-3a^2b=10$. Tính $M=\dfrac{a^2+b^2}{2018}$

Câu 50. *(Chuyên Lam Sơn năm 2019-2020)*

Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $2ab+bc+2ca=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{bc}{8a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$.

Câu 51. *(Chuyên Lam Sơn năm 2018-2019)*

Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn biểu thức $\begin{cases}a^3-3a^2+5a-17=0\\ b^3-3b^2+5b+11=0\end{cases}$

Chứng minh rằng $a+b=2$

Câu 52. *(Chuyên Lam Sơn năm 2016-2017)*

Với $a>\dfrac{8}{3}$, chứng minh rằng: $\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}=1$

Câu 53. *(Chuyên Lam Sơn năm 2012-2013)*

Cho $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y},\ c = xy + \frac{1}{xy}$, với các số thực x, y thỏa mãn $xy \neq 0$.

Chứng minh $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$ không phụ thuộc vào x, y.

Câu 54. Cho $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b} = a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$.

Câu 55. *(Chuyên Hưng Yên năm 2019-2020)*

Cho *a, b* là hai số thực thỏa mãn $0 < a < 1,\ 0 < b < 1,\ a \neq b$ và $a - b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}$

Tìm giá trị của biểu thức $Q = \sqrt{a^2 + b^2} + 2019$.

Câu 56. *(Chuyên Thừa Thiên Huế năm 2019-2020)*

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$.

Câu 57. *(Chuyên Thừa Quảng Ngãi năm 2019-2020)*

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + 4ab - 7b^2 = 0$ ($a \neq b$ và $a \neq -b$). Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{a-b} + \frac{3a-2b}{a+b}$

Câu 58. *(Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2019-2020)*

Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a + b + c = 1$. Tính giá trị của biểu thức:
$A = a^3 + b^3 + c^3 - 3(ab + c)(c - 1)$.

Câu 59. *(Chọn HSG trường Amsterdam năm 2017-2018)*

Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$
Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a-b} + \frac{b^5 - c^5}{b-c} + \frac{c^5 - a^5}{c-a}$$

Câu 60. Cho a, b, c thỏa $\begin{cases} (a+b+c)(ab+bc+ca) = 2018 \\ abc = 2018 \end{cases}$

Tính giá trị biểu thức: $P = \left(b^2c + 2018\right)\left(c^2a + 2018\right)\left(a^2b + 2018\right)$

Câu 61. Cho x, y thỏa mãn điều kiện $x \geq 7, y \geq 2$ và $\begin{cases} \sqrt{x-7} - 4\sqrt{y+1} = -6 & (1) \\ \sqrt{x+5} - \sqrt{y-2} = 3 & (2) \end{cases}$.

Tính giá trị biểu thức: $S = x - 4y + 2017$

Câu 62. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x + 2xy + 1}{x + xy + xz + 1} + \frac{y + 2yz + 1}{y + yz + yx + 1} + \frac{z + 2zx + 1}{z + zx + zy + 1}$$

Câu 63. *(Trích đề thi HSG lớp 9 thành phố Hồ Chí Minh năm 2017-2018)*

Cho hai số a , b thỏa điều kiện: $a^2+b^2=1, a^4+b^4=\frac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a^{2018}+b^{2018}$.

Câu 64. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Hà Nội năm 2017-2018)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=2018$ và $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Câu 65. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Hà Tĩnh năm 2017-2018)*

a) Cho $4a^2+b^2=5ab$ với $b>2a>0$. Tính giá trị của $p=\frac{5ab}{3a^2+2b^2}$.

b) Cho các số a,b thỏa mãn $a^3+8b^3=1-6ab$. Tính $a+2b$.

Câu 66. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Hải Dương năm 2017-2018)*

Cho $x,y,z\neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Chứng minh

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx\,.$$

Câu 66. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Hưng Yên năm 2017-2018)*

a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$.

Câu 67. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Phú Thọ năm 2017-2018)*

Cho $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2018$ với a,b,c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

Câu 68. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Nam Định 2018-2019)*

Xét ba số thực dương x,y,z thoả mãn $\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{xy+x\sqrt{yz}+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+\sqrt{y}+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+\sqrt{z}+1}}=1$.

Câu 69. *(Trích đề thi HSG lớp 9 TP Hồ Chí Minh 2018-2019)*

Cho x, y là các số thực sao cho $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$.

Câu 70. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Bà Rịa Vũng Tàu 2018-2019)*

Tính tổng : $B=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{2018^2}+\dfrac{1}{2019^2}}$

Câu 71. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Quảng Trị 2018-2019)*

Cho a thỏa mãn $a^2-2a-4=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$.

Câu 72. Cho $a=\dfrac{2b^2}{1+b^2}; b=\dfrac{2c^2}{1+c^2}; c=\dfrac{2a^2}{1+a^2}$. Tính P = a + b + c.

Câu 73. *(Trích đề thi HSG lớp 9 Chương Mỹ năm 2020)*

Cho các số a,b,c,x,y,z dương thỏa mãn: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1$ và $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+2019$.

Câu 74. *(Trích chuyên KHTN Hà Nội năm 2015-2016)*

Giả sử $a; b$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$.

a). Chứng minh rằng $a+b=-3$.

b). Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

Câu 75. *(Trích chuyên Đại học Vinh năm 2015-2016)*

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a+b=3$, $ab=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a^2-b^2\right)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}.$$

Câu 76. *(Trích chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2018-2019)*

Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện

$$(x+1)(y+1)=2.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+2}+xy.$

Câu 77. *(Trích chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2017-2018)*

Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$.

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$

Câu 78. *(Trích chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2015-2016)*

Cho x, y thỏa mãn 0< x <1, 0 < y <1 và

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}=1$$

Tính giá trị của biểu thức $P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}$

Câu 79. *(Trích chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2009-2010)*

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1\\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1\end{cases}$$

Hãy tính giá trị của A = x + y + z

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có: $x+y+z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{2xyz}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{xyz}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

Từ đó

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow(xy+yz+xz)(x+y+z)=xyz$$

$$\Leftrightarrow(x+y)(x+z)(y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y\\ y=-z\\ z=-x\end{array}\right.$$

Hơn nữa các mũ của Q đều lẻ nên có ít nhất 1 thừa số bằng 0. Vậy $Q=0$

Câu 2. Do $a+b+c=6$ nên $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{6-(b+c)}{b+c}+\frac{6-(c+a)}{c+a}+\frac{6-(a+b)}{a+b}$

$$=\frac{6}{b+c}+\frac{6}{c+a}+\frac{6}{a+b}-3$$

$$=6\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$= 6.\frac{47}{60} - 3 = \frac{47}{10} - 3 = \frac{17}{10}.$$

Câu 3. Ta có:

$$\left(x + \sqrt{2018 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{2018 + y^2}\right) = 2018$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{2018 + x^2} = \frac{2018}{y + \sqrt{2018 + y^2}}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{2018 + x^2} = \frac{2018\left(\sqrt{2018 + y^2} - y\right)}{2018 + y^2 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{2018 + x^2} = \sqrt{2018 + y^2} - y \quad (1)$$

Biến đổi tương tự ta có:

$$\sqrt{2018 + x^2} - x = \sqrt{2018 + y^2} + y \qquad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{2018 + x^2} = \sqrt{2018 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2018 + x^2 = 2018 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$$

+)Với $x = y$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{2018 + x^2} = \sqrt{2018 + x^2} - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{2019} + y^{2019} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = x^{2019} + y^{2019} + 2018(x + y) + 2020 = 2020$$

+)Với $x = -y$, ta có: $\begin{cases} x^{2019} + y^{2019} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q = 2020$

Vậy $Q = 2020$

Câu 4. Ta có:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2} \ (1).$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\right)$$

Tương tự: $y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$ (2).

Trừ vế với vế (1) và (2) ta được: $x^3 - y^3 + 3(x - y) = -20\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1) = -20\sqrt{2}$. Vậy $P = -20\sqrt{2}$

Câu 5. Ta có: $a+b+c=0 \Leftrightarrow b=-a-c$

$\Rightarrow a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$

$\Leftrightarrow a^2=2(a+c+1)(a-a-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2=2(a+c+1)(-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2+2(a+c+1)(c+1)=0$

$\Leftrightarrow a^2+2a(c+1)+2(c+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (a+c+1)^2+(c+1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c+1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-a-c=1$

$\Rightarrow A=a^2+b^2+c^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$

Vậy $A=2$

Câu 6.

a) Ta có: $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow a-b=\dfrac{b-c}{bc}$

Tương tự ta có: $b-c=\dfrac{c-a}{ac}; c-a=\dfrac{a-b}{ab}$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=\dfrac{b-c}{bc}.\dfrac{c-a}{ac}.\dfrac{a-b}{ab}$

$\Leftrightarrow (abc)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} abc=1 \\ abc=-1 \end{array}\right.$

Nếu $abc=1 \Rightarrow P=x$ thì giả thiết tương đương với

$a+ac=b+ba=c+cb=x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=(a+ac)(b+ba)(c+cb)=abc(a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)(c+1) \\ a+b+c+ab+ac+cb=3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^3=abc+ab+ac+bc+1+a+b+c=ab+ac+bc+a+b+c+2$

$\Leftrightarrow x^3=3x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=2 \\ P=-1 \end{array}\right.$

Nếu $abc=-1$, biến đổi hoàn toàn tương tự

$a-ac=b-ba=c-cb=x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=(a-ac)(b-ba)(c-cb)=abc(a-1)(b-1)(c-1)=(a-1)(b-1)(c-1) \\ a+b+c-ac-ba-cb=3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^3=abc-ab-ac-bc-1+a+b+c=-ab-ac-bc+a+b+c-2$

$\Leftrightarrow x^3=3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=2 \\ P=-1 \end{array}\right.$

Vậy giá trị của P là $P=2$ hoặc $P=-1$

b) Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=1$. Do đó dấu bằng phải xảy ra thì mới xảy ra giả thiết hay $x=y=z=3$

Thay vào T ta được $T=162$

Vậy giá trị nhỏ nhất hay cũng là giá trị duy nhất của T là 162.

Câu 7. Ta có:

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 \\ y^3=\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=3+2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)-3+2\sqrt{2} \\ y^3=17+12\sqrt{2}-3\sqrt[3]{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right)-17+12\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=4\sqrt{2}-3x \\ y^3=24\sqrt{2}-3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow M=\left(x-y\right)^3+3\left(x-y\right)\left(xy+1\right)$$

$$=x^3-3xy\left(x-y\right)-y^3+3xy\left(x-y\right)+3\left(x-y\right)$$

$$=x^3-y^3+3\left(x-y\right)$$

$$=4\sqrt{2}-3x-24\sqrt{2}+3y+3x-3y=-20\sqrt{2}$$

Câu 8. Với $ab=1$, $a+b\neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4(ab)^2}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5}$$

$$=\frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}$$
$$=1$$

Vậy $P=1$, với $ab=1$, $a+b\neq 0$.

Câu 9.

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=0\\ y-\dfrac{1}{y}=0\\ z-\dfrac{1}{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=-1\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Do đó $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=3$ khi $x=y=z=1$

Hoặc $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=1$ khi $x=y=z=-1$

Câu 10. Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=y(x+z)+x(x+z)=(x+y)(x+z)$

Tương tự: $1+y^2=(x+y)(y+z)$; $1+z^2=(x+z)(z+y)$

Do đó: $P=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

$$=x\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)(x+z)(z+y)}{(x+y)(x+z)}}+y\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)(x+y)(x+z)}{(x+y)(y+z)}}+z\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$
$$=x\sqrt{(y+z)^2}+y\sqrt{(z+x)^2}+z\sqrt{(x+y)^2}$$
$$=xy+xz+yz+xy+xz+zy$$
$$=2(xy+yz+zx)$$
$$=2$$

Câu 11.

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$

Suy ra $S=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$

Suy ra $S=-\dfrac{1}{7}$

Câu 12.

Ta có $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Leftrightarrow 4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}=16$

Khi đó ta có: $\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x(16-4y-4z+yz)}$

$=\sqrt{x(yz+4\sqrt{xyz}+4x)}$

$=\sqrt{x}.\sqrt{(\sqrt{yz}+2\sqrt{x})^2}=\sqrt{xyz}+2x$ (1)

Tương tự $\sqrt{y(4-z)(4-x)}=\sqrt{xyz}+2y$ (2)

$\sqrt{z(4-x)(4-y)}=\sqrt{xyz}+2z$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B=2(x+y+z+\sqrt{xyz})=2.4=8$.

Câu 13.

Ta có: $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0\Leftrightarrow(a-2b)(a^2+ab+3b^2)=0$ (*)

Vì $a>b>0\Rightarrow a^2+ab+3b^2>0$ nên từ (*) ta có $a=2b$

Biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}=\dfrac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$. Vậy: $B=\dfrac{12b^4}{-63b^4}=\dfrac{-4}{21}$

Câu 14.

Ta có: $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x\Leftrightarrow(y+z)^2=(-x)^2$

Suy ra: $y^2+z^2-x^2=-2yz$. Do đó: $\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}=\dfrac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}=\dfrac{y^2}{-2xz}$; $\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\dfrac{z^2}{-2xy}$

Do đó:

$$P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\frac{x^2}{-2yz}+\frac{y^2}{-2xz}+\frac{z^2}{-2xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}$$

$$=\frac{(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz}=\frac{0-3.(-z).(-x).(-y)}{-2xyz}=\frac{3xyz}{-2xyz}=-\frac{3}{2}$$

Vậy $P=-\frac{3}{2}$

Câu 15.

Ta có $x-y=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}=\sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5}=3$

Nên : $A=X^3+X^2-Y^3+Y^2+XY-3X^2Y+3XY^2-3XY+1974.$

$=(X-Y)^3+(X-Y)^2+1974$

$=3^3+3^2+1974$

$=2010$

Câu 16.

Có:

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\Rightarrow x^2-1=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\Rightarrow y^2=\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\Rightarrow y^2-1=\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$$

Do $a,b\ge 1$; nên: $\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$

$$p=\frac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)}$$

$$p=\frac{2(a^2+b^2)}{ab}:\frac{2(a^2b^2+1)}{ab}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$$

Câu 17.

Từ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$ ta có

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

Từ đó ta được $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Khi đó

$$\begin{cases} x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \\ y+1=y+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \\ z+1=z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{z}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \end{cases}$$

Thay vào biểu thức P ta được

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2$$

Câu 18.

Ta có $x+y=-5$ nên ta được $(x+y)^2=25\Rightarrow x^2+y^2+2xy=25$.

Mà ta có $x^2+y^2=11$, do đó suy ra $2xy=14$ hay $xy=7$.

Ta có $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2=11^2-2.7^2=121-98=23$.

Câu 19.

Từ giả thiết $ab=a-b$ ta được $(ab)^2=(a-b)^2$. Ta có

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2$$

Câu 20.

Từ giả thiết $a+b+c=0$ ta được

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0$.

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$ do vậy ta được $P=\frac{3}{2}$

Câu 21.

Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$P=a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc$$

$$=a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}-abc$$

$$=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}-abc$$

$$=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}-abc$$

$$=a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1$$

Câu 22.

Từ giả thiết ta có $a+b=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\sqrt{2}; ab=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$. Lại có

$$a^7+b^7=\left(a^4+b^4\right)\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3\left(a+b\right)$$
$$=\left\{\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2\right\}\left[\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\right]-a^3b^3\left(a+b\right)$$

Từ đó ta được

$$a^7+b^7=\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]\left[2\sqrt{2}-\frac{3}{4}.\sqrt{2}\right]-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{17}{8}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{170\sqrt{2}}{64}-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{169\sqrt{2}}{64}$$

Vậy $a^7+b^7=\frac{169\sqrt{2}}{64}$.

Câu 23.

Nhìn vào tử số của P ta có biến đổi quen thuộc

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2}$$

Từ đây phải biến đổi giả thiết để xuất hiện thêm $c-a$.

Ta có $c-a=-\left(b-c\right)-\left(a-b\right)=-3-7=-10$. Đặt T là tử của của P ta được $T=79$.

Đặt M là mẫu của P, khi đó M cũng có thể phân tích thành tích được thành

$$M=\left(a-c\right)\left(a+c-2b\right)=\left(a-c\right)\left(a-b+c-b\right)=40$$

Vậy ta được $P=\frac{79}{40}$.

Câu 24.

Với $2a^2+11ab-3b^2=0; b\neq 2a; b\neq -2a$ ta có

$$T=\frac{a-2b}{2a-b}+\frac{2a-3b}{2a+b}=\frac{\left(a-2b\right)\left(2a+b\right)+\left(2a-3b\right)\left(2a-b\right)}{\left(2a-b\right)\left(2a+b\right)}$$

$$=\frac{6a^2-11ab+b^2}{4a^2-b^2}=\frac{-\left(2a^2-11ab+3b^2+8a^2-2b^2\right)}{4a^2-b^2}=\frac{-\left(8a^2-2b^2\right)}{4a^2-b^2}=4$$

Câu 25.

Kết hợp $xyz=5$ ta biến đổibiểu thức P thành

$$P=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}$$
$$=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+2xyz}+\frac{xyz.2z}{2xyz.z+yz+2xyz}$$

$$= \frac{1}{2x + 2xz + 1} + \frac{2y}{1 + 2x + 2xz} + \frac{2xz}{2xz + 1 + 2x} = \frac{1 + 2y + 2zx}{2x + 2zx + 1} = 1$$

Câu 26.

Do $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b, đôi một khác nhau nên: a + b + c = 0

Suy ra: a + b + c = 0

Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + (b - c)(b + c)} = \frac{ab^2}{a^2 + (b - c)(-a)} = \frac{b^2}{a + c - b} = \frac{b^2}{-b - b} = \frac{b}{-2}$

Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}$; $\frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a + b + c) = 0$$

Vậy $P = 0$.

Câu 27.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{2}{xy + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy - y^2}{(x^2 + 1)(xy + 1)} + \frac{xy - x^2}{(y^2 + 1)(xy + 1)} = 0 \Rightarrow (xy - y^2)(y^2 + 1) + (xy - x^2)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 (xy - 1) = 0 \Leftrightarrow xy = 1 \,(\text{vì } x \neq y) \Rightarrow S = 2$$

Câu 28.

Biến đổi giả thiết $a^2 + b = b^2 + c$ ta được

$a^2 - b^2 = c - b \Leftrightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = c - b - (a - b) \Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = c - a$

Do a , b khác nhau nên ta có $a + b - 1 = \frac{c - a}{a - b}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $b + c - 1 = \frac{a - b}{b - c}; c + a - 1 = \frac{b - c}{c - a}$.

Do đó ta có $T = (a + b - 1)(b + c - 1)(c + a - 1) = \frac{c - a}{a - b} \cdot \frac{a - b}{b - c} \cdot \frac{b - c}{c - a} = 1$

Câu 29. Ta có: $0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} \Rightarrow xy + yz + zx = 0$

Do đó: $x^2 + 2xy = x^2 + 2xy - (xy + yz + xz) = (x^2 - xz) + (xy - yz)$

Suy ra: $x^2 + 2xy = (x-y)(x-z)$

Do đó: $\frac{yz}{y^2+2zx}=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}$

Tương tự ta có: $\frac{zx}{y^2+2zx}=\frac{zx}{(y-x)(y-z)};\frac{xy}{z^2+2xy}=\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$

Do đó:

$$P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$$

Vậy $P=1$.

Câu 30. +) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4$

+) Do đó $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{z^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2=0\\\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{-1}{z}\\\frac{1}{y}=\frac{-1}{z}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-z$$

Thay vào $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ta được $x=y=\frac{1}{2};z=\frac{-1}{2}$

Khi đó $P=\left(\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\right)^{2012}=1^{2012}=1$

Câu 31.

Ta có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$$
$$\Rightarrow1+2(ab+bc+ca)=1\Rightarrow ab+bc+ca=0$$

Mặt khác:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\Leftrightarrow1-3abc=1.(1-0)$$
$$\Rightarrow abc=0\Rightarrow a=0\vee b=0\vee c=0$$

Xét $a=0$ thì $\begin{cases}b+c=1\\b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+2bc+c^2=1\\b^2+c^2=1\end{cases}\Rightarrow bc=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\c=0\end{array}\right.$

Do đó: a = 0 , b = 0, c = 1 hoặc a = 0 , b = 1, c = 0

Khi đó: P = 1

Lập luận tương tự với các trường hợp b = 0 và c = 0.

Vậy P = 1.

Câu 32.

a) Ta có: $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a + b)(a + c)$

Tương tự: $1 + b^2 = (a + b)(b + c)$; $1 + c^2 = (c + a)(b + c)$

Do đó: $A = \dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = \dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = 1$

b) Ta có: $a^2 + 2bc - 1 = a^2 + 2bc - ab - bc - ca = (a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2 + 2ca - 1 = (b - c)(b - a)$; $c^2 + 2ab - 1 = (c - a)(c - b)$

Do đó: $B = \dfrac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} = \dfrac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} = 1$

Câu 33.

Ta có:

$0 = a^{100} + b^{100} - (a^{101} + b^{101}) = a^{101} + b^{101} - (a^{102} + b^{102})$

$\Leftrightarrow a^{100}(1-a) + b^{100}(1-b) = a^{101}(1-a) + b^{101}(1-b)$

$\Leftrightarrow a^{100}.(1-a)^2 + b^{100}.(1-b)^2 = 0$

Do đó a = b = 1 (do a, b dương)

Vậy $P = a^{2010} + b^{2010} = 1 + 1 = 2$

Câu 34.

Từ giả thiết suy ra: $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$)

$\Rightarrow 21 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow A = x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18$

$\Rightarrow 7.18 = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = \left(x^5 + \dfrac{1}{x^5}\right) + \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow B = x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 7.18 - 3 = 123$

Câu 35.

Ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + 2b + 3c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ 2a + 4b + 6c = 28 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c = -14$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 3$

$T = abc = 6.$

Câu 36.

$$P=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Bằng cách tách: $a-c=-\left[(c-b)+(b-a)\right]$ ta phân tích được:

$$P=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

Câu 37.

Ta có: $a+b+c\neq 0$ do nếu $a+b+c=0$ thì:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=-1-1-1=-3 \text{ (trái với giả thiết)}$$

Do đó $a+b+c\neq 0$. Khi đó:

$$a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{a^2}{b+c}+\frac{(b+c)a}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{(c+a)b}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{(a+b)c}{a+b}$$

$$=a+b+c+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

$$\Rightarrow P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

Câu 38.

Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+b^3=3abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)=3abc+3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3=3c(a+b)(a+b+c)+3ab(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3=3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$$

Với $a+b+c=0$ thì: $P=\frac{a+b}{a}.\frac{c+b}{b}.\frac{a+c}{a}=\frac{-c}{a}.\frac{-a}{b}.\frac{-b}{a}=-1$

Với $a=b=c$ thì $P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$

Câu 39. Ta có:

$$6.8=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}$$

$$=1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}=3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}$$

Vậy: $P=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=6.8-3=39$

Câu 40.

Ta dễ dàng chứng minh được khi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

Do đó: $P=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}=\frac{abc}{c^3}+\frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3}=abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=abc.\frac{3}{abc}=3$

Câu 41. Ta có: $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$.

Với $x+y=1$ ta có: $f(x)=f(1-y)=\frac{(1-x)^3}{(1-x)^3+x^3}\Rightarrow f(x)+f(y)=1$. Từ đó:

$$2A=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+...+f\left(\frac{2011}{2012}\right)+f\left(\frac{1}{2012}\right)=2011\Rightarrow A=\frac{2011}{2}$$

Câu 42.

Ta có:

$$2013=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-a)-(b-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$

$$=2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2013}{2}$$

Câu 43.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow ab+ac+bc=0$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b^2+2ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$; $\dfrac{c^2}{c^2+2ac}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$
$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

Câu 44.

$x^2-2y^2=xy \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0$

Vì $x+y\neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

Khi đó $P=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{y}{3y}=\dfrac{1}{3}$

Câu 45.

$x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$$\Rightarrow \frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=x-1$$

Câu 46.

a) Từ giả thiết $a^2+2c^2=3b^2+19 \Rightarrow a^2+2c^2-3b^2=19$

Ta có: $\dfrac{a^2+7}{4}=\dfrac{b^2+6}{5}=\dfrac{c^2+3}{6}=\dfrac{3b^2+18}{15}=\dfrac{2c^2+6}{12}=\dfrac{a^2+7+2c^2+6-3b^2-18}{4+12-15}=\dfrac{14}{1}=14$

Suy ra : $a^2=49 \Rightarrow a=7$; $b^2=64 \Rightarrow b=8$; $c^2=81 \Rightarrow c=9$

Câu 47.

Đặt $a-b=x; b-c=y; c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210 \Leftrightarrow xyz=70$

Do x,y,z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên

$x,y,z\in\{-2;-5;7\} \Rightarrow A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14$

Câu 48.

Vì $x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=...=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1);zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\frac{4}{9-(xy+yz+xz)}$ Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

Vậy $H=\frac{4}{9-13}=-1$

Câu 49.

$a^3-3ab^2=5\Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=25$

$b^3-3a^2b=10\Rightarrow b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=100$

$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^3=5^3\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2018}=\frac{5}{2018}$

Câu 50. Đặt x = 2 a, y = b, z = c ta được $xy+yz+zx=0\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Khi đó $2A=\frac{bc}{4a^2}+\frac{2ac}{b^2}+\frac{2ab}{c^2}=\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)$

Mặt khác từ hằng đẳng thức $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}-\frac{3}{xyz}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}-\frac{1}{2x}\right)=0$

ta có $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}\Rightarrow 2A=xyz\cdot\frac{3}{xyz}=3$. Vậy $A=\frac{3}{2}$.

Câu 51.

$$\begin{cases}a^3-3a^2+5a-17=0\\ b^3-3b^2+5b+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^3+2a-16=0(1)\\ (b-1)^3+2b+12=0(2)\end{cases}$$

$\Rightarrow (1)+(2)\Leftrightarrow (a-1)^3+2a-16+(b-1)^3+2b+12=0$

$\Leftrightarrow (a-1+b-1)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2\right]+2(a+b-2)=0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2\right]=0$

$\Leftrightarrow a+b=2\left(do\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2>0\forall a,b\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 52. Đặt: $A=\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}$

$$A^3=\left(\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}\right)^3$$
$$=\left(3a-1+a\sqrt{8a-3}\right)+\left(3a-1-a\sqrt{8a-3}\right)$$
$$+3\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}.\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}\left(\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}\right)$$
$$=6a-2+3\sqrt[3]{(3a-1)^2-a^2.(8a-3)}.A$$
$$=6a-2+3\sqrt[3]{9a^2-6a+1-8a^3+3a^2}.A$$
$$=6a-2+3\sqrt[3]{(-2a+1)^3}.A$$
$$=2(3a-1)-3(2a-1).A$$
$$\Rightarrow A^3-A+2(3a-1).A-2(3a-1)=0$$
$$\Rightarrow A(A-1)(A+1)+2(3a-1)(A-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (A-1)\left[A^2+A+2(3a-1)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow A=1\left(Do\ A^2+A+2(3a-1)>0\right)$$

Câu 53. Ta có:

$$a^2+b^2+c^2-abc=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right).\left(y+\frac{1}{y}\right).\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$$
$$=6+x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}-\left(xy+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$$
$$=6+x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}-\left(x^2y^2+x^2+y^2+1+1+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2y^2}\right)$$
$$=4$$

Câu 54.

Để ý rằng $a^2=b^3=2$ và $a+1=\dfrac{1}{a-1}$.

Ta có

$$a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1+\frac{1}{b}=\frac{a^2b+ab^2+a^2+b^2+ab+a}{ab}=\frac{(a+1)(b^2+ab+a)}{ab}$$
$$=\frac{(a+1)(ab^2+a^2b+a^2)}{a^2b}=\frac{(a+1)(ab^2+b^4+b^3)}{b^4}=\frac{(a+1)(a+b^2+b)}{b^2}$$
$$=\frac{a+b^2+b}{b^2(a-1)}=\frac{b^3+b^2+ab}{b^3(a-1)}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab^3-b^3}=\frac{a^2+b^2+ab}{a^3-b^3}=\frac{1}{a-b}.$$

Vậy $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$. ❐

Câu 55. $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow a-b=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}} \Leftrightarrow a+b=\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2} \\ a+b=\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2} \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{1-b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow Q=2020$.

Câu 56. Ta có $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$

$$\Rightarrow (2-Q)^2=\left[xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$$

$$\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Ta lại có $Q^2=x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$

$$\Rightarrow Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Do đó $4-4Q=1 \Rightarrow Q=\frac{3}{4}\cdot$

Câu 57. Ta có:

$$Q=\frac{2a-b}{a-b}+\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{2a^2+ab-b^2+3a^2-5ab+2b^2}{a^2-b^2}=\frac{5a^2-4ab+b^2}{a^2-b^2}$$

Vì $a^2+4ab-7b^2=0$ nên ta có

$$Q=\frac{6\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2+4ab-7b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{6\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}=6$$

Câu 58. Ta có: $ab+c=ab+c(a+b+c)=(a+c)(b+c)$

và $c-1=-(a+b)$.

Do đó: $A=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3=1$.

Câu 59. Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$2x^3-9x^2+6x-1=0$

Khi phân tích đa thức $2x^3-9x^2+6x-1$ ra thừa số ta được:

$2x^3-9x^2+6x-1=2(x-a)(x-b)(x-c)$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-2.3=\frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

Tính $a^3+b^3+c^3$:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=\frac{9}{2}\left(\frac{57}{4}-3\right)+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\dfrac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3=\dfrac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

$$\Leftrightarrow S=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4)$$
$$+(c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4)$$

$$\Leftrightarrow S=2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+a^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow S=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)+(a^4+a^3b+a^3c)+(b^4+b^3a+b^3c)$$
$$+(c^4+c^3a+c^3b)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow S=(a^2+b^2+c^2)^2+a^3(a+b+c)+b^3(a+b+c)+c^3(a+b+c)$$
$$-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow S=(a^2+b^2+c^2)^2+(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\frac{57}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{417}{8}-\frac{9}{2}=\frac{3465}{8}$$

Câu 60. Ta có:

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc\\
&\Leftrightarrow a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2b+ca^2+2abc=0\\
&\Leftrightarrow ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)+2abc=0\\
&\Leftrightarrow ab(a+b+c)+ac(a+b+c)+bc(b+c)=0\\
&\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac)+bc(b+c)=0\\
&\Leftrightarrow a(b+c)(a+b+c)+bc(b+c)=0\\
&\Leftrightarrow (b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0\\
&\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Thay abc = 2018 vào biểu thức ta có:

$$P=(b^2c+abc)(c^2a+abc)(a^2b+abc)=a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

Câu 61. Ta có: $\begin{cases}\sqrt{x-7}-4\sqrt{y+1}=-6\\ \sqrt{x+5}-\sqrt{y-1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-7}-4\sqrt{y+1}=-6\\ 2\sqrt{x+5}-2\sqrt{y-1}=6\end{cases}$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-7}-4\sqrt{y+1}+2\sqrt{x+5}-2\sqrt{y-1}=0\\
&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-7}-2\sqrt{y-1}\right)+2\left(\sqrt{x+5}-2\sqrt{y+1}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\frac{x-4y+1}{\sqrt{x+7}+2\sqrt{y+1}}+2.\frac{x-4y+1}{\sqrt{x+5}+2\sqrt{y+1}}=0\\
&\Leftrightarrow(x-4y+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+2\sqrt{y+1}}+2.\frac{1}{\sqrt{x+5}+2\sqrt{y+1}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow x-4y+1=0
\end{aligned}$$

Do đó: $S=(x-4y+1)+2016=2016.$

Câu 62. Từ $xyz=1$ suy ra $z=\frac{1}{xy}.$

$$P=\frac{x+2xy+1}{x+xy+x.\frac{1}{xy}+1}+\frac{y+2y\frac{1}{xy}+1}{y+y.\frac{1}{xy}+yx+1}+\frac{\frac{1}{xy}+2\frac{1}{xy}x+1}{\frac{1}{xy}+\frac{1}{xy}x+\frac{1}{xy}y+1}$$

$$=\frac{xy+2xy^2+y}{xy+xy^2+1+y}+\frac{xy+2+x}{xy+1+x^2y+x}+\frac{1+2x+xy}{1+y+x+xy}$$

$$= \frac{xy(1+y)+y(xy+1)}{(1+y)(xy+1)} + \frac{(xy+1)+(x+1)}{(1+x)(xy+1)} + \frac{(x+1)+x(y+1)}{(y+1)(x+1)}$$

$$= \frac{xy}{xy+1} + \frac{y}{1+y} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{x}{x+1}$$

$$= \left(\frac{xy}{xy+1} + \frac{1}{xy+1}\right) + \left(\frac{y}{1+y} + \frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1}\right)$$

$$= 1+1+1$$

$$= 3$$

Câu 63. Ta có $a^4 + b^4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2 - 2a^2b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2\left(1-a^2\right) = \frac{1}{4}$

$$4a^4 - 4a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2a^2-1\right)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}$$

Do đó $P = \left(a^2\right)^{1009} + \left(b^2\right)^{1009} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} = \frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 64. Từ giả thiết, ta có

$$P = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = 2018.\frac{2017}{2018} - 3 = 2014.$$

Câu 65.

a) Ta có $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0$. Do $b > 2a > 0$ nên $b = 4a$. Suy ra

$P = \frac{20a^2}{3a^2+32a^2} = \frac{4}{7}$.

b) Ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{array}\right.$

Do đó $a^3 + 8b^3 = 1 - 6ab \Leftrightarrow a^3 + (2b)^3 + (-1)^3 = 3a(2b)(-1)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b-1=0 \\ a=2b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+2b=-2 \end{array}\right..$$

Câu 66. Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow yz + xz + xy = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2yz = x^2 + yz + yz = x^2 + yz - xz - xy = x(x-z) - y(x-z) = (x-z)(z-y)$$

Tương tự $\Rightarrow y^2 + 2zx = (y-z)(y-x); z^2 + 2xy = (z-x)(z-y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2xz} + \frac{1}{z^2+2yx}$$

$$=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-y)(z-x)}$$

$$=\frac{-y+z-z+x-x+y}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2yx}\right)(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018})=0\,.$$

Câu 66.

a) Từ giả thiết

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}\Rightarrow 2018=\frac{ab}{a+b}\Rightarrow\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}=\sqrt{a-\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\frac{ab}{a+b}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+b}}=\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}\quad (\text{Vì } a,b>0).$$

b) Ta có a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$ nên $6a^2+\sqrt{3}a-\sqrt{3}=0$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-6a^2}{\sqrt{3}}=1-2\sqrt{3}a^2>0\Rightarrow a^2<\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-\sqrt{3}<0\,.$$

Do đó $A=\dfrac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}=\dfrac{(a+2).\left(\sqrt{a^4+a+2}+a^2\right)}{a^4+a+2-a^4}=\sqrt{a^4+1-2\sqrt{3}a^2+2}+a^2$

$$=\sqrt{\left(a^2-\sqrt{3}\right)^2}+a^2=\left|a^2-\sqrt{3}\right|+a^2=\sqrt{3}-a^2+a^2=\sqrt{3}\,.$$

Câu 67. Ta có $a^2(b+c)=b^2(c+a)\Leftrightarrow\dfrac{a}{bc+ab}=\dfrac{b}{ab+ca}=\dfrac{a-b}{c(b-a)}=-\dfrac{1}{c}.$

Suy ra $ab+bc+ca=0\Leftrightarrow bc=-a(b+c)\Leftrightarrow -abc=a^2(b+c)=2018.(1)$

$ab+bc+ca=0\Leftrightarrow ab=-c(a+b)\Leftrightarrow -abc=c^2(a+b).(2)$

Từ (1) và (2) ta được $c^2(a+b)=2018.$

Câu 68. Ta có:

$$\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}\Leftrightarrow\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}=\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{y}\Leftrightarrow xyz=\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)\Leftrightarrow xyz=1.$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}\sqrt{xyz}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xyz}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}$$

Và $\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1\right)}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2yz}+\sqrt{xyz}+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+1+\sqrt{xy}}$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+1+\sqrt{xy}}=1$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=1$ khi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}$.

Câu 69. ĐKXĐ: $x;y\neq 0$; $y\neq -2x$

Từ giả thiết:

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y}\Leftrightarrow\frac{2y-x}{xy}=\frac{1}{2x+y}\Leftrightarrow(2y-x)(2x+y)=xy$$

`

$$\Leftrightarrow 4xy+2y^2-2x^2-xy=xy\Leftrightarrow 2xy+2y^2-2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow xy+y^2-x^2=0\ (*)$$

Vì $x;y\neq 0$ nên chia cả hai vế của phương trình (*) cho xy, ta được:

$$1+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=0\Leftrightarrow\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1\Rightarrow\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=3$$

Câu 70. Với x > 0, ta có:

$$1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-2.\frac{x+1}{x}.\frac{1}{x+1}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\left|1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right|$$

Vì x > 0 $\Rightarrow 0<x<x+1\Rightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{x+1}\Rightarrow 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}>0$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} \ (*)$$

Áp dụng công thức (*), ta có:

$$B=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)$$

$$\Rightarrow B=2019-\frac{1}{2019}$$

Câu 71. Ta có $T=\dfrac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}=\dfrac{a^4-2a^3-4a^2-2a^3+4a^2+8a+a^2-2a-4+8}{a^2-2a-4+16}$

$$=\frac{a^2(a^2-2a-4)-2a(a^2-2a-4)+a^2-2a-4+8}{a^2-2a-4+16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \text{ (vì } a^2-2a-4=0\text{)}$$

Câu 72.

Trường hợp 1. Nếu một trong 3 số a, b, c bằng 0 thì các số còn lại bằng 0. Do vậy $a=b=c=0$

Khi đó: P = 0

Trường hợp 2. Xét a, b, c khác 0:

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1+b^2}{2b^2}+\frac{1+c^2}{2^2}+\frac{1+a^2}{2a^2}=\frac{(1-b)^2}{2b^2}+\frac{1}{b}+\frac{(1-c)^2}{2c^2}+\frac{1}{c}+\frac{(1-a)^2}{2a^2}+\frac{1}{a}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $1-b=1-c=1-a=0 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Khi đó P = 3.

Câu 73. Từ $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1\Rightarrow\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{ab}}+\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{bc}}+\dfrac{2\sqrt{xz}}{\sqrt{ac}}=1$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2.\frac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{abc}}=1 \ (1)$$

Mà $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0\Rightarrow\dfrac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{xyz}}=0$

$$\Rightarrow\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}=0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do đó $M=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+2019=1+2019=2020$.

Câu 74. Giả sử $a; b$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn

a). $\begin{cases}a^2+3b=2\\ b^2+3a=2\end{cases}\Rightarrow a^2-b^2+3(a-b)=0$.

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)+3(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0\ (l) \\ a+b=-3 \end{array}\right.$.

b). Với $a+b=-3 \Rightarrow (a+b)^3=-27$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27 \Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$

$\Leftrightarrow a^2+3a+b^2+3b=4 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+3(a+b)=4 \Leftrightarrow ab=-2$.

Vậy $a^3+b^3=-45$.

Câu 75.

Ta có

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)(a-b)(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$$

$$=3\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}$$

$$=3\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}=3\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-\sqrt{ab}+b}=3\frac{3-2}{3-1}=\frac{3}{2}.$$

Câu 76. Đặt S = x + y và T = xy. Từ giả thiết, ta có S + T = 1, suy ra

$$x^2+y^2-\sqrt{2\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+2=S^2-2T+2-\sqrt{2\left[(1-T)^2+S^2\right]}$$

$$=S^2-2(1-S)+2-\sqrt{2\left(S^2+S^2\right)}$$

$$=S^2.$$

Từ đó ta có: $P=S+T=1.$

Vậy giá trị của biểu thức P cần tính là 1.

Câu 77. Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$$

Thực hiện biến đổi giả thiết của bài toán ta có

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{xy+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-y^2}{\left(x^2+1\right)\left(xy+1\right)}+\frac{xy-x^2}{\left(y^2+1\right)\left(xy+1\right)}=0 \Leftrightarrow \left(xy-y^2\right)\left(y^2+1\right)+\left(xy-x^2\right)\left(x^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y\left(x-y\right)\left(y^2+1\right)+x\left(y-x\right)\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left(xy-1\right)=0$$

Do $x \neq y$ nên ta được $xy = 1$. Kết hợp với giả thiết $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ ta có

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{2}{xy+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{4}{xy+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

Vậy ta được $P = 2$.

Câu 78. Ta có

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}=1 \Leftrightarrow 2\left(x+y\right)=1+3xy$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{1+3xy}{2}$$

Thay $x+y=\frac{1+3xy}{2}$ Ta có

$$P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}=x+y+\sqrt{\left(x+y\right)^2-3xy}$$

$$=\frac{1+3xy}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+3xy}{2}\right)^2-3xy}=\frac{1+3xy}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-3xy}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1+3xy}{2}+\left|\frac{1-3xy}{2}\right|$$

Nếu $xy > \frac{1}{3}$ Thì P = 2

Nếu $xy < \frac{1}{3}$ thì P = 3xy

Câu 79.

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{12}-\frac{z}{4}=1\\ \frac{x}{10}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+y-3z=12\\ 3x+6y+10z=30\end{cases} \Leftrightarrow 7(x+y+z)=42 \Leftrightarrow A=6$$

Mục lục

TỦ SÁCH TOÁN CẤP 2

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Tailieumontoan.com@gmail.com

Website: www.facebook.com/baotoanthcs