

BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Chương 1: Căn thức

1.1 CĂN THỨC BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là \sqrt{a} là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0, B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

1.2 CĂN THỨC BẬC 3, CĂN BẬC n.

1.2.1 CĂN THỨC BẬC 3.

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$
- Cho $a \in R; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ với mọi a, b .
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}$.
- $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{A \pm \sqrt[3]{B}}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}$ với $A \neq \pm B$.

1.2.2 CĂN THỨC BẬC n .

Cho số $a \in R, n \in N; n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a .

- Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k + 1, k \in N$

Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

$${}^{2k+1}\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a, \text{ nếu } a > 0 \text{ thì } {}^{2k+1}\sqrt{a} > 0, \text{ nếu } a < 0 \text{ thì } {}^{2k+1}\sqrt{a} < 0, \text{ nếu } a = 0 \text{ thì } {}^{2k+1}\sqrt{a} = 0$$

- Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in N$.

Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn

dương kí hiệu là ${}^{2k}\sqrt{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc

chẵn âm kí hiệu là $-{}^{2k}\sqrt{a}$, ${}^{2k}\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^{2k} = a$;

$$-{}^{2k}\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ và } x^{2k} = a.$$

Mọi số thực $a < 0$ đều không có căn bậc chẵn.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Phân tích các biểu thức sau thành tích:

a) $P = x^4 - 4$

b) $P = 8x^3 + 3\sqrt{3}$

c) $P = x^4 + x^2 + 1$

Lời giải:

a) $P = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2).$

b) $P = (2x)^3 + (\sqrt{3})^3 = (2x + \sqrt{3})(4x^2 - 2\sqrt{3}x + 3).$

c) $P = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

c) $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}}}$

Lời giải:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

b)

$$B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}} = \sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1} + \sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } B &= \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| \\ &= |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1} + 1 \end{aligned}$$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1$ suy

$$\text{ra } B = 2\sqrt{4x-1}.$$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ thì

$$|\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1 \text{ suy ra } B = 2.$$

c) Để ý rằng: $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

Suy ra

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}} = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}} \\ &= \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}}} \text{ .Hay} \end{aligned}$$

$$C = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}} = \sqrt{9-\sqrt{25}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$$

Ví dụ 3) Chứng minh:

a) $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên (Trích đề TS vào lớp

10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).

c) Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với
 $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d) Tính $x+y$ biết $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Lời giải:

a) Dễ thấy $A < 0$,

Ta có

$$A^2 = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} \right)^2 = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}}$$

$$= 14 - 2 \cdot 5 = 4$$

Suy ra $A = -2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right). \text{ Hay}$$

$$B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2 + B + 2) = 0 \text{ mà } B^2 + B + 2 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B = 1.$$

Vậy B là số nguyên.

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Ta có

$$x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

+ Khi $a = \frac{1}{8}$ ta có $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$.

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ là số tự nhiên.

d) Nhận xét:

$$\left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2015} - x\right) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015.$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2 + 2015} - x = \sqrt{y^2 + 2015} + y$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y + \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{x^2 + 2015} - x + \sqrt{y^2 + 2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Ví dụ 4)

a) Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}.$$

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942. \text{ (Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại Ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015-2016).}$$

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$$

Giải:

a) Ta có:

$$x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó ta suy ra } (x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$$

$$\text{Ta biến đổi: } P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$$

b) Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c) Đề ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Khi đó ta có:

$$(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi:

$$P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016$$

Ví dụ 5) Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a) Tính giá trị biểu thức:

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$

Lời giải:

a) Đề ý rằng: $1 + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$

Tương tự đối với $1 + y^2; 1 + z^2$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

b) Tương tự như câu a)

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} \end{aligned}$$

Ví dụ 6)

a) Tìm x_1, x_2, \dots, x_n thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

b) Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính

$$f(1) + f(2) + \dots + f(40).$$

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với:

$$\left(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{x_n^2 - n^2} - n\right)^2 = 0$$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, \dots, x_n = 2.n^2$

$$\text{b) Đặt } x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}).$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(40) &= \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})] \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364 \end{aligned}$$

Ví dụ 7)

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$. **Đề thi chuyên ĐHSP 2011**

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Lời giải:

a) Xét $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}}$,

$$B = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$$

Dễ thấy $A > B$.

Ta có $A + B = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$

Mặt khác ta có:
$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Suy ra $A + B = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) = \sqrt{81} - 1 = 8$. Do $A > B$ suy ra $2A > A + B = 8 \Leftrightarrow A > 4$.

b) Để ý rằng:
$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$$
 với mọi k nguyên dương.

Suy ra

$$VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có:
$$\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$
 với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \text{ hay}$$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right] < T$ và

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right].$$

Hay $2\sqrt{n} - 2 < T < 2\sqrt{n} - 1$.

Ví dụ 8)

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

a) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3. \text{ (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Trường chuyên ĐHSP Hà Nội 2014)}$$

Lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}.$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6.$

Áp dụng bất đẳng thức : $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6$$

. Suy ra $VT \leq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=0; z=\sqrt{2}$$

Ví dụ 9) Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

- a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x\left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}\right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x\left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|\right)}{|x-4|} = \frac{x\left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|\right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8$$

(Theo bất đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in Z$ khi và chỉ khi

$\frac{16}{x-4} \in Z \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay

$x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. (Đề thi vào lớp 10 thành phố Hà Nội – năm học 2013-2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tính x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Câu 2. (Đề thi năm học 2012 -2013 thành phố Hà Nội)

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$. Tính giá trị của biểu thức A .

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 2}$ (với

$x \geq 0, x \neq 16$)

- 3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Câu 3. (Đề thi năm học 2011 -2012 thành phố Hà Nội).

Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 3) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Câu 4. (Đề thi năm học 2010 -2011 thành phố Hà Nội).

Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 5. (Đề thi năm học 2014 – 2015 Thành phố Hồ Chí Minh)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5} - 1} - \frac{3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{x}{x + 3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x + 3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0).$$

Câu 6. (Đề thi năm học 2013 – 2014 TPHCM)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{x+9} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

$$B = 21 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 - 6 \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15}.$$

Câu 7. (Đề thi năm 2014 – 2015 TP Đà Nẵng)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Câu 8. (Đề thi năm 2012 – 2013 tỉnh Bình Định)

Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và

$$B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Chứng minh rằng $B > A$.

Câu 9. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Ninh Thuận)

Cho biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2 - y^2}, x \neq y$.

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Câu 10. (Đề thi năm 2014 – 2015, ĐHSPTN)

Cho các số thực dương $a, b; a \neq b$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Câu 11. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Hùng Vương Phú Thọ)

$$A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}; x > 0, x \neq 9.$$

Câu 12. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Tây Ninh)

Cho biểu thức
$$A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} \quad (x \geq 0, x \neq 4).$$

Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Câu 13. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi).

- 1) Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 2$.
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 1$ (m là tham số). chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Câu 14. (Đề thi năm 2014 – 2014 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Cho biểu thức
$$C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}.$$

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 15. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Thái Bình tỉnh Thái Bình)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$

($x > 0, x \neq 4$).

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 16. (Đề năm 2014 – 2015 Thành Phố Hà Nội)

1) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Câu 17) Cho $a = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 18) Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Câu 19) Giả thiết $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = a$.

Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z)^2(a+x)^2}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Câu 20. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Câu 21. Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 22. Cho biểu thức $f(n) = \frac{2n+1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Tính tổng $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$.

Câu 23) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}.$$

Câu 24) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Câu 25) Chứng minh rằng:

$$\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$$

(Đề thi THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2001-2002)

Câu 26) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Câu 27) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 2$, ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}.$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN CHỦ ĐỀ 1

1). Lời giải:

1) Với $x = 64$ ta có $A = \frac{2 + \sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2 + 8}{8} = \frac{5}{4}$.

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

Với $x > 0$, ta có: $\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$ (do $x > 0$).

2. Lời giải:

1) Với $x = 36$, ta có $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Biểu thức $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$

$B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà

$U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị tương ứng:

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 16; 17\}$.

3). Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5 \cdot (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
&= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}. \text{ Với } x=9 \text{ ta có: } \sqrt{x}=3. \text{ Vậy} \\
A &= \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

4). Lời giải:

$$\begin{aligned}
1) \quad P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x - 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \\
2) \quad P &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow x=36 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \\
3) \quad \text{Với } x \geq 0, P &= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1 \text{ khi } x=0 \text{ (TM)}.
\end{aligned}$$

5. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
&= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\
&= 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}
\end{aligned}$$

$$= 3\sqrt{5} - 5 + 5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) (x > 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1. \end{aligned}$$

6. Lời giải:

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3. \\ B &= \frac{21}{2} \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} \right)^2 - 3 \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{21}{2} (\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1)^2 - 3(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{15}{2} (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60. \end{aligned}$$

7). **Lời giải:** Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1.$$

8. Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{(\sqrt{120}+\sqrt{121})(\sqrt{120}-\sqrt{121})} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1} \\
&= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-2 + \dots + \sqrt{121}-\sqrt{120} = -1 + \sqrt{121} = 10 \quad (1)
\end{aligned}$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Do đó $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$

$$\Rightarrow B > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{36} - \sqrt{35})$$

$$\Rightarrow B > 2(-\sqrt{1} + \sqrt{36}) = 2(-1 + 6) = 10 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } B > A.$$

9. Lời giải:

$$1) P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$2) \text{ Với } x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \text{ và } y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Thay vào } P \text{ ta được: } P = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

10. Lời giải:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } Q &= \frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} - \frac{3\sqrt{a}+(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = 0 \\
&= \frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
&= \frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} = 0 \quad (\text{ĐPCM}).
\end{aligned}$$

11. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} - \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4} \\
&= \frac{x+2\sqrt{x}-8+x-7\sqrt{x}+19-x+8\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}.
\end{aligned}$$

12. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}. \text{ Với} \\
A &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (nhận)}. \text{ Vậy } A = \frac{1}{3} \text{ khi } x = 16.
\end{aligned}$$

13. Lời giải:

1) ĐKXD: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3\sqrt{x-3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{x-3}-3\sqrt{x}}{(x-3)-x} + \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{6\sqrt{x-3}}{-3} + x = x - 2\sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vi } P > 2 \Rightarrow x - 2\sqrt{x-3} > 2 \Leftrightarrow (x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 4. \text{ Vậy } x \geq 3 \text{ và } x \neq 4.$$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 + mx - 1 = 0.$$

có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1 x_2 = -1$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = (-m)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = m^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2 = m^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4 \cdot (-1) = m^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = m^2 + 4 \geq 4 \text{ với mọi } m \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2 \text{ với mọi } m \text{ (ĐPCM).}$$

14. Lời giải:

$$1) \text{ Biểu thức } C \text{ có nghĩa khi: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a-16 \neq 0 \\ \sqrt{a}-4 \neq 0 \\ \sqrt{a}+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16.$$

Rút gọn

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}.$$

2) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Ta có:

$$a = a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$$

$$\text{Vậy } C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

15. Lời giải:

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x > 0, x \neq 4 \text{ thì } A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A$$

nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

16. Lời giải:

1) Với $x = 9$ ta có $A = \frac{3+1}{3-1} = 2$.

2) a)

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Theo câu a) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$$

$$2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

17. Giải:

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + 3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9 - (5 + 2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3} - 1) = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2. \text{ Do } a > 0 \text{ nên} \\ a &= \sqrt{3} + 1. \text{ Do đó } (a - 1)^2 = 3 \text{ hay } a^2 - 2a - 2 = 0. \end{aligned}$$

18. Giải:

$$\begin{aligned} a^2 &= 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\ &= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{5} + 1. \text{ Do đó } (a - 1)^2 = 5 \text{ hay} \end{aligned}$$

$$a^2 - 2a = 4. \text{ Biểu diễn } T = \frac{(a^2 - 2a)^2 - 3(a^2 - 2a) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{4 + 12} = \frac{1}{2}.$$

19. Giải:

Ta có: $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$. Tương tự ta có:

$$a + y^2 = (y + x)(y + z); a + z^2 = (z + x)(z + y).$$

Từ đó ta có:

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} = x\sqrt{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)(z + y)}{(x + y)(x + z)}} = x(x + y). \text{ Tương}$$

$$\text{tự: } y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} = y(z + x); z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = z(x + y). \text{ Vậy}$$

$$VT = x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 2a.$$

20. Giải:

$$\text{a) Vì } \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})^3} = 1 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{Từ đó } a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0.$$

b) Do $f(x) = (x^4 - 14x^2 + 9)(x + 2) + 1$ và $x^4 - 14a^2 + 9 = 0$ nên ta được $f(a) = 1$.

21. Giải:

$$\text{Vì } a^3 = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76 + 1940)^{2012} = 2016^{2016}.$$

22. Nhân cả tử và mẫu của $f(n)$ với $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ta được:

$f(n) = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}$. Cho n lần lượt từ 1 đến 2016, ta được:

$$f(1) = 2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}; f(2) = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}; \dots; f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 2016\sqrt{2016}$$

Từ đó suy ra: $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 1$.

23. Giải:

Vì n là số nguyên dương nên: $1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} = 1$ (1). Mặt

khác, với mọi $k \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right). \text{ Cho } k = 2, 3, 4, \dots, n \text{ ta có:}$$

$$\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4 \cdot 2^2} < \frac{4}{4 \cdot 2^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 2 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{4}{4 \cdot 3^2} < \frac{4}{4 \cdot 3^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 3 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4 \cdot 4^2} < \frac{4}{4 \cdot 4^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 4 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9}$$

.....

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

Cộng vế với vế ta được:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

điều phải chứng minh.

24. Giải:

Đặt $P = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái

bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3} < \frac{2}{k^3 - k} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}, \forall k > 1$$

Cho $k = 4, 5, \dots, n$ thì

$$\begin{aligned} 2P &< 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}\right) + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{n(n+1)} < \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} = \frac{65}{27}. \text{ Do đó } P < \frac{65}{64} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

25. Giải:

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

Đề ý rằng :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2 (k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k.$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng về với về ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Do đó } S_{2001} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}}$$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44 < \sqrt{2002} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2002 < 2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

26. Giải:

Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{Vi thể: } \frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}. \text{ Mà theo kết quả câu 25}$$

$$\text{thì: } \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \text{ Vậy bài}$$

toán được chứng minh.

Câu 27)

Giải:

Đề ý rằng các phân số có tử và mẫu hơn kém nhau 2 đơn vị, nên ta nghĩ đến đẳng thức

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n} \left(\Leftrightarrow n^2 < n^2 + n - 2 \Leftrightarrow n > 2 \right). \text{ Kí hiệu}$$

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}. \text{ Ta có:}$$

$$P^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right)$$

$$< \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right)$$

$$< \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}.$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Bất đẳng thức được chứng minh.