BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

I). SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC ĐƠN GIẢN.

1) Bất đẳng thức liên hệ giữa độ dài các cạnh một tam giác.

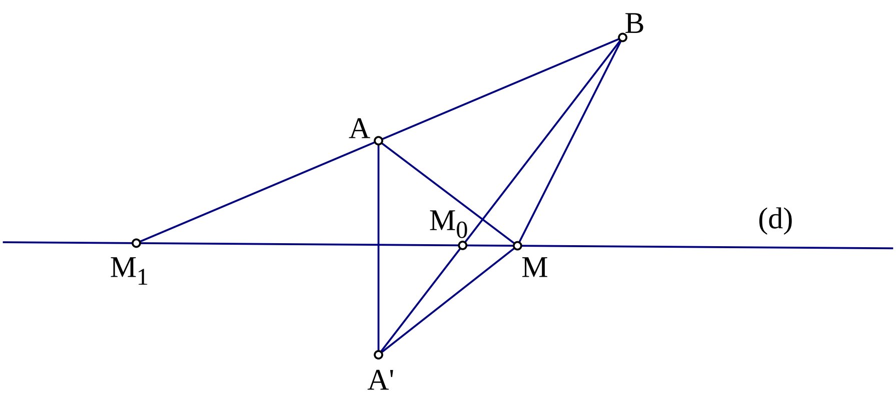
$$\left|AB - AC\right| < BC < AB + BC$$

Chú ý rằng:

a). Với 3 điểm A, B, C bất kỳ ta luôn có: $AB + BC \geq AC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C.

b) Với 3 điểm A, B, C bất kỳ ta luôn có: $\left|AB - AC\right| \leq BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C.

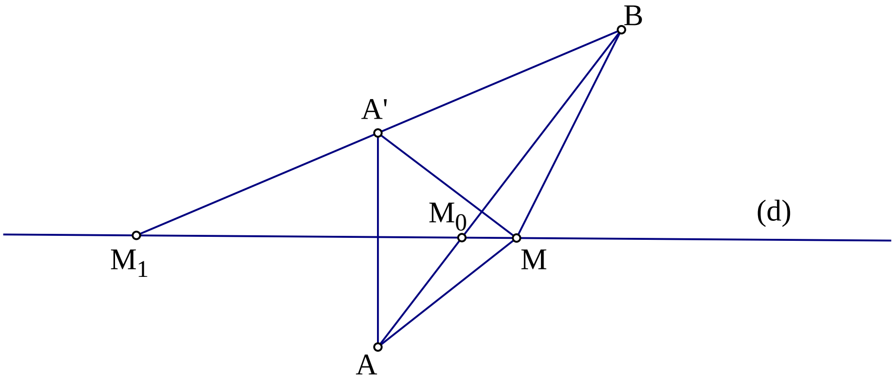
c) Cho hai điểm A, B nằm về một phía đường thẳng (d). Điểm M chuyển động trên đường thẳng (d). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (d). Ta có kết quả sau:



+ $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm cuả $A'B$ và đường thẳng (d).(M trùng với M_0)

+ $\left|MA-MB\right| \le AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm cuả AB và đường thẳng (d)(M trùng với M_1).

d) Cho hai điểm A, B nằm về hai phía đường thẳng (d). Điểm M chuyển động trên đường thẳng (d). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (d). Ta có kết quả sau:

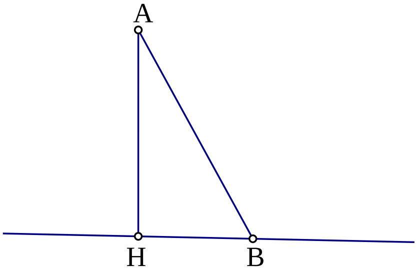


+ $MA + MB \ge AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm cuả AB và đường thẳng (d).(M trùng với M_0)

+ $\left|MA-MB\right| = \left|MA'-MB\right| \le A'B$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm cuả $A'B$ và đường thẳng (d)(M trùng với M_1).

e) Trong quá trình giải toán ta cần lưu ý tính chất: Đường vuông góc luôn nhỏ hơn hoặc bằng đường xiên.

Trong hình vẽ: $AH \le AB$



2) Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất

3) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A. Đường thẳng AO cắt đường tròn tại hai điểm M_1, M_2. Giả sử $AM_1 \le AM_2$. Khi đó với mọi điểm M nằm trên đường tròn ta luôn có: $AM_1 \le AM \le AM_2$

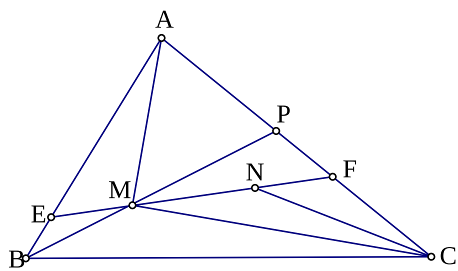
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác . Chứng minh rằng:

a) $MB+MC < AB+AC$

b) $\frac{1}{2}\ AB+BC+CA\ < MA+MB+MC < AB+BC+CA$

c) $BM+MN+NC < AB+AC$ trong đó điểm N nằm trong tam giác sao cho MN cắt hai cạnh AB, AC

Hướng dẫn giải:



a) Đường thẳng BM cắt AC ở P.

Áp dụng BĐT(1) ta có:

$MB+MC < MB+MP+PC$

$= BP+PC < AB+AP+PC = AB+AC$

b) Theo trên ta có:

$BC < MB+MC < AB+AC; CA < MC+MA < AB+BC;$

$AB < MA+MB < AC+BC$. Cộng theo từng vế các BĐT trên ta có điều phải chứng minh.

c) Áp dụng câu 1) ta có:
$BM + MN + NC < BE + EM + MN + NF + FC$

$= BE + EF + FC < BE + EA + AF + FC = AB + AC$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và 3 trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

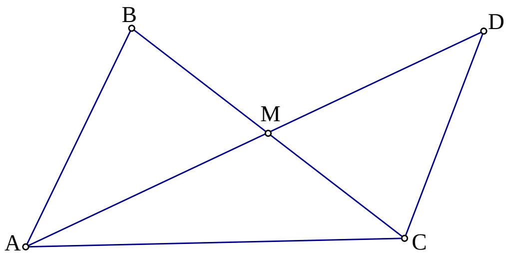
a) $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$

b) $\dfrac{3\ AB + BC + CA}{4} < AM + BN + CP < AB + BC + CA$

c) Giả sử $AB \geq AC$. Gọi AD, AM theo thứ tự là đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AD \leq AM < \frac{AB + AC}{2}$$

Hướng dẫn giải:



a). + Xét các tam giác MAB, MAC ta có:

$AM > AB - BM, AM > AC - MC$

Suy ra $2AM > AB + AC - (MC + MC)$

$\Leftrightarrow 2AM > AB + AC - BC$

+ Gọi D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AD = 2AM$. Trong tam giác ACD ta có:

$AD < AC + CD \Leftrightarrow 2AM < AB + AC$

Như vậy: $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

b). Áp dụng bất đẳng thức ở câu a) Cho 3 đường trung tuyến AM, BN, CP

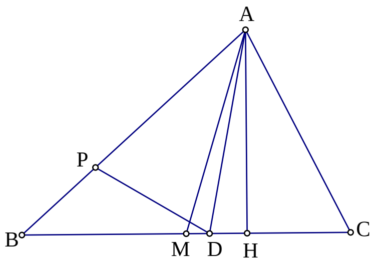
ta có: $\frac{AB+AC-BC}{2} < AM < \frac{AB+AC}{2}$,

$\frac{BC+AB-AC}{2} < BN < \frac{AC+BC}{2}$,

$\frac{BC+AC-AB}{2} < CP < \frac{AC+BC}{2}$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều

ta có: $\frac{3\ \ AB+BC+CA}{4} < AM+BN+CP < AB+BC+CA$.

c). Trong tam giác ABD, ADC có $AB < AD+BD$;



$AC < AD+DC$. Cộng theo từng vế hai BĐT

trên được: $AB+AC < 2AD+BC$.

$\Rightarrow \frac{AB+AC-BC}{2} < AD$

Kết quả này vẫn đúng với D là điểm

bất kỳ nằm bên trong đoạn BC.

Dựng $AH \perp BC$. Với $AB = AC$ thì $AM = AD$. Với $AB > AC$ thì $BH > CH$

$\Rightarrow BM < BH \Rightarrow M$ thuộc đoạn BH.

Hơn nữa $ADB > ADC \Rightarrow ADB$ tù. Do đó D thuộc đoạn BH.

Lấy điểm P trên AB sao cho $AP = AC \Rightarrow \Delta ADP = \Delta ADC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DP = DC, APD = ACD$.

+ Nếu $ACB \le 90^0$ (hình) thì

$APD = ACB \le 90^0 \Rightarrow BPD \ge 90^0 > ACB > PBD$

$\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$.

+ Nếu $ACB > 90^0$ (hình) thì $BPD = ACH > ADC > ABC$

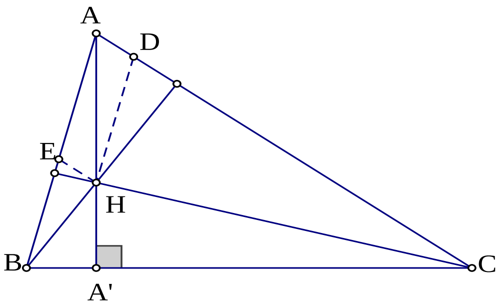
$\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$.

Ví dụ 3: a) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Chứng minh rằng: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}\ AB + BC + CA$

Hướng dẫn giải:

Dựng đường thẳng qua H song song với AB cắt AC tại D. Dựng đường thẳng qua H song song AC cắt AB tại E.

Tứ giác $AEHD$ là hình bình hành nên $AD = HE, AE = HD$



Xét tam giác AHD ta có: $HA < HD + AD \Leftrightarrow HA < AE + AD (1)$. Vì $HE // AC$ mà $AC \perp BH \Rightarrow HE \perp BH$. Trong tam giác vuông HBE ta có: $HB < BE$ (2) Tương tự ta có: $HC < DC$ (3). Cộng các bất đẳng thức cùng chiều $(1),(2),(3)$ ta suy ra

$HA + HB + HC < (AE + EB) + (AD + DC) = AB + AC$

Tương tự ta cũng có:

$HA + HB + HC < AC + BC, HA + HB + HC < AB + BC$

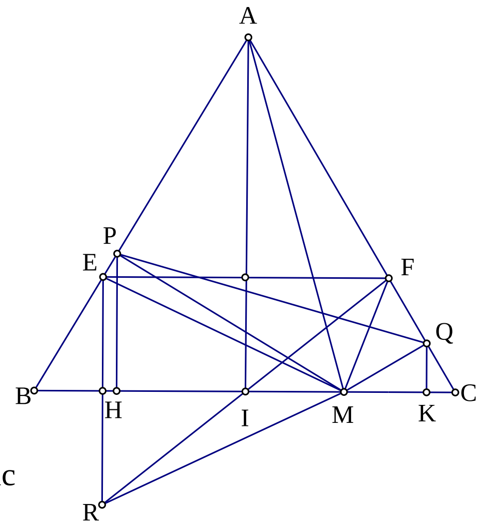
Suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}\ AB + BC + CA$.

Ví dụ 4) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. M là một điểm tùy ý trên cạnh BC, gọi P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB,AC. Tìm vị trí điểm M để:

a) PQ có độ dài nhỏ nhất

b) Dựng một đường thẳng song song với BC cắt AB,AC tại E,F sao cho $AE=2a$. Tìm vị trí điểm M sao cho $MA+ME+MF$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



a). Hạ $PH\perp BC, QK\perp BC$. Ta có

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta AMC}\Leftrightarrow$$

$$\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a}{2}\ MP+MQ$$

$$\Rightarrow MP+MQ=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông MPB,MQC ta tính được:

$$HM=\frac{MP\sqrt{3}}{2}, MK=\frac{MQ\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$HK=MH+MK=\frac{\sqrt{3}}{2}\ MP+MQ\ =\frac{9a}{4}.$$

Vì $PQ\geq HK$. Nên PQ nhỏ nhất bằng HK khi và chỉ khi $PQ\,/\,/HK\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC

b). Gọi R là điểm đối xứng với E qua BC, I là trung điểm của BC. Ta dễ chứng minh được R, I, F thẳng hàng.

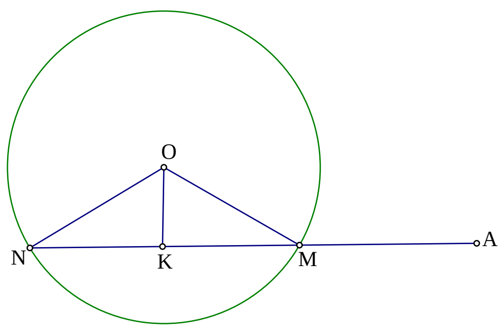
Ta tính đươc.: $RF = 2IF = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}a$. Ta có:

$ME + MF = MR + MF \geq RF = a\sqrt{7}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$. Ta cũng có $MA \geq AI = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$. Suy ra $ME + MF + MA \geq a\sqrt{7} + \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{2}\right)a$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$.

Ví dụ 5: Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Một đường thẳng Δ thay đổi quanh A cắt $(O;R)$ tại hai điểm M, N. Tìm vị trí Δ để $AM + AN$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi K là trung điểm của dây cung MN ta có:



$AM + AN = AM + (AM + MN)$

$= 2AM + 2MK = 2AK$

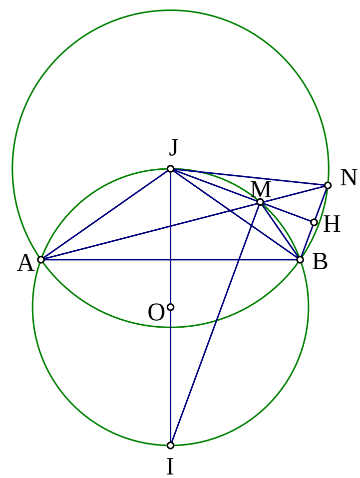
Xét tam giác vuông OKA

Ta có: $OK^2 + KA^2 = OA^2$ không đổi . Như vậy AK lớn nhất khi và chỉ khi OK nhỏ nhất $\Leftrightarrow OK = 0 \Leftrightarrow A, M, N, O$ nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định $(AB < 2R)$. Trên cung lớn AB lấy điểm M. Tìm vị trí điểm M để chu vi tam giác MAB lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Trên tia đối của AM lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Khi đó chu vi tam giác MAB Là $2p = MA + MB + AB = AN + AB$.



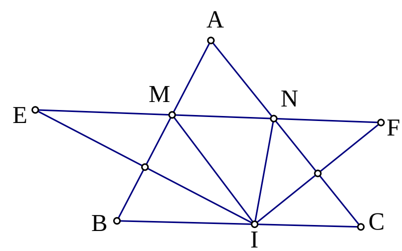
Do AB không đổi nên chu vi tam giác MAB lớn nhất khi và chỉ khi AN lớn nhất.Tam giác BMN cân tại M và MH là phân giác của góc BMN đồng thời cũng là phân giác ngoài của góc AMB. Phân giác trong của góc AMB là MI với I là trung điểm cung lớn AB. Suy ra $MI \perp MH$. Do đó MH cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm J và IJ là đường kính của $(O;R)$.

Tam giác MBN cân tại M nên MJ là đường trung trực của BN. Từ đó ta có: $JA = JB = JN$. Hay điểm N thuộc đường tròn tâm J cố định bán kính JA. Vì AN là dây cung của đường tròn J nên AN lớn nhất khi và chỉ khi AN là đường kính của J $\Leftrightarrow M \equiv J$. Như vậy chu vi tam giác MAB lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với trung điểm J của cung nhỏ AB.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có $A < 60^0$. Trên cạnh BC lấy điểm I cố định. Tìm trên cạnh AB, AC lấy hai điểm M, N để chu vi tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của I qua AB, AC. Do tam giác ABC cố



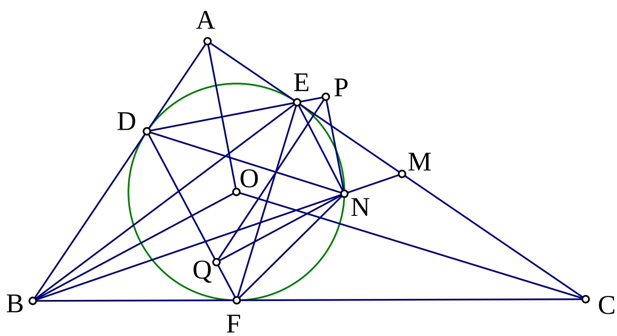
định nên E, F cố định:

Ta có: Chu vi tam giác IMN là

$2p = IM + IN + MN = ME + MN + NF \geq EF$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi E, M, N, F thẳng hàng. Hay M, N là các giao điểm của EF với các cạnh AB, AC

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC; M là điểm di chuyển trên đoạn CE. Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của O, P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Hướng dẫn giải:



Ta có tứ giác $PNQD$,

$EDFN$ nội tiếp

$\Rightarrow QPN = QDN = FEN$.

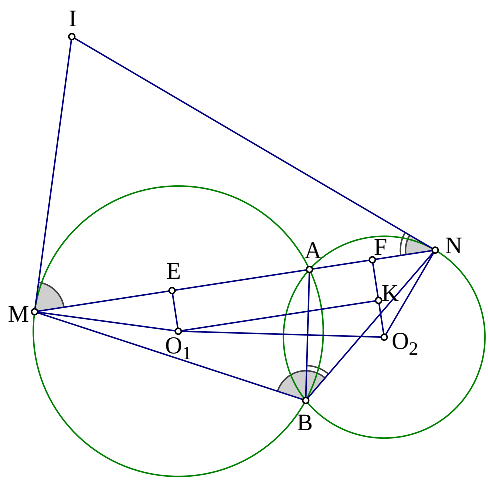
Tương tự có ta có:

$NQP = NDP = NFE$.

$\Rightarrow \Delta NEF \sim \Delta NPQ$ Suy ra $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NF}$. Trong tam giác vuông NQF ta có: $NQ \leq NF$ do đó $\dfrac{PQ}{EF} \leq 1$. Như vậy PQ lớn nhất bằng EF khi và chỉ khi $Q \equiv F$ khi đó $P \equiv E$, do P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF nên khi $Q \equiv F$, $P \equiv E$ thì DN là đường kính của (O). Từ đó suy ra cách xác định M như sau: Dựng đường kính DN cuả (O), M là giao điểm của BN và AC.

Ví dụ 9: Cho hai đường tròn $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ cắt nhau tại 2 điểm A,B. Một đường thẳng (d) bất kỳ qua A cắt $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ lần lượt tại M,N. Tiếp tuyến tại M của $(O_1;R_1)$ và tiếp tuyến tại N của $(O_2;R_2)$ cắt nhau tại I. Tìm giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN khi (d) quay quanh A.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $IMN = MBA$ (Tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

$INM = NAB$ (Tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

Xét tứ giác $IMBN$ ta có:

$MBN = MBA + NBA = IMN + INM$

$= 180^0 - MIN$. Suy ra tứ giác $IMBN$ nội tiếp.

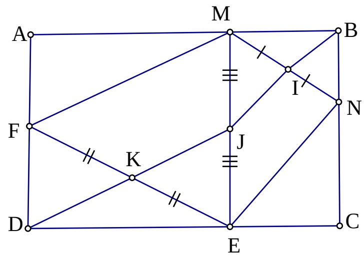
Các góc AMB, ANB là những góc nội tiếp chắn cung AB cố định của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ nên AMB, ANB không đổi. Suy ra MBN không đổi. Suy ra $MIN = 180^0 - MBN$ không đổi. Gọi R bán kính vòng tròn ngoại tiếp tam giác MIN thì $MN = 2R.\sin MIN \Rightarrow R = \dfrac{MN}{2\sin MIN}$. Do đó R lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất. Gọi E,F là hình chiếu vuông góc của O_1,O_2 lên (d), K là hình chiếu vuông góc của O_1 lên O_2F thì

$MN = 2\mathrm{EF} = 2O_1K \le 2O_1O_2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $EF\,/\,/O_1O_2 \Leftrightarrow (d)\,/\,/O_1O_2$.

Ví dụ 10) Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, E, F. Tìm vị trí bốn điểm đó để chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Ta chứng minh kết quả phụ sau:Cho điểm M cố định. Khi chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất ta có $MNEF$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật



$ABCD$. Thật vậy, gọi I, J, K lần lượt là trung điểm MN, ME, EF ta có:

$IB = \frac{1}{2}MN, IJ = \frac{1}{2}NE; JK = \frac{1}{2}MF; DK = \frac{1}{2}EF$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Vậy chu vi tứ giác $MNEF$: $2p = 2\ \ BI + IJ + JK + KD\ \ \ge 2BD$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B, I, J, K, D theo thứ tự nằm trên một đường thẳng $\Rightarrow MF\,/\,/NE\,/\,/BD$.

Tương tự ta có để chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $MNEF$ là hình bình hành có cạnh song song với đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ (kết quả phụ được chứng minh).

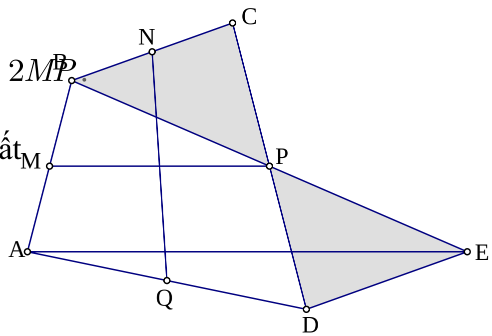
Từ chứng minh trên ta thấy, nếu tứ giác $MNEF$ có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ thì chu vi của nó là $p = 2BD = const$, không phụ thuộc vào cách lấy điểm M trên cạnh AB.

Vậy chu vi tứ giác $MNEF$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2BD$ khi $MNEF$ là hình bình hành có các cạnh song song với với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có bài toán tổng quát sau: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khi đó:

$AB + BC + CD + DA \geq 2 \; MP + NQ$ (*)

Thật vậy: Dựng E đối xứng với B qua P thì tứ giác $BCED$ là hình bình hành nên $BC = DE$.



Ta có: $BC + AD = DE + AD \geq AE = 2MP$.

Tương tự $AB + CD \geq 2NQ$. Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

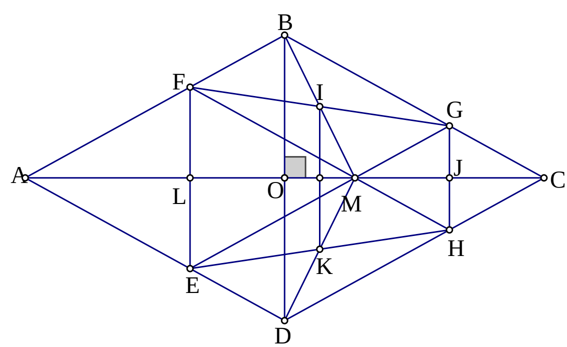
$AD / /BC, AB / /CD$ hay $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 11) Cho hình thoi $ABCD$. Đường chéo AC không nhỏ hơn đường chéo BD. M là một điểm tùy ý trên AC. Đường thẳng qua M song song với AB cắt AD tại E, cắt BC tại G Đường thẳng qua M song song với AD cắt AB tại F cắt CD tại H. Biết hình thoi $ABCD$ có độ dài hai đường chéo là d_1 và d_2. Xác định M sao cho chu vi tứ giác $EFGH$ là nhỏ nhất?Tính chu vi đó theo d_1, d_2.

Hướng dẫn giải:

Ta dễ dàng chứng minh được

$EFGH$ là hình thang cân,



$AFME$, $MGCH$ là hình thoi,

Các tứ giác $BFMG, EDHM$ là

hình bình hành. Do đó các đường chéo

AM,EF cắt nhau tại L, MC, GH cắt nhau tại J, BM, FG cắt nhau tại I, DM, EH cắt nhau tại K thì L, I, J, K lần lượt là trung điểm của EF, FG, GH, HE.

Áp dụng bài toán (*) ta có chu vi tứ giác $EFGH$ là

$2p = \text{EF} + GH + FG + EH = 2IK + 2FG \geq 2IK + 2LJ = BD + 2LJ$.

Nhưng $LJ = LM + MJ = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow 2p \geq AC + BD$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $FG//AC \Leftrightarrow FGHE$ là hình chữ nhật. Tức điểm $M \equiv O$ là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Ở cấp THCS, các em học sinh được làm quen với bất đẳng thức Cauchy dạng 2 số hoặc 3 số:

Để giải quyết tốt các bài toán hình học: Ta cần nắm chắc một số kết quả quan trọng sau:

Trước hết ta cần nắm được các kết quả cơ bản sau:

1). Cho các số thực dương a, b:

+ $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

$+\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}\ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge \frac{x+y^{\ \ 2}}{a+b}$

$+\, a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge \frac{3}{4}(a+b)^2$

$+\ a^2-ab+b^2=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2\ge \frac{1}{4}(a+b)^2$

2). Cho các số thực dương a,b,c:

$+\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

$+\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}\ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

4) $ab+bc+ca\le \frac{a+b+c^{\ \ 2}}{3}\le a^2+b^2+c^2$

5) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge \frac{x+y+z^{\ \ 2}}{a+b+c}$

Ngoài ra các em học sinh cần nắm chắc các công thức về diện tích tam giác ,liên hệ độ dài các cạnh và góc như:

$+\ S=\frac{1}{2}a.h$

$+\ S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$

$+\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$

+ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ ...

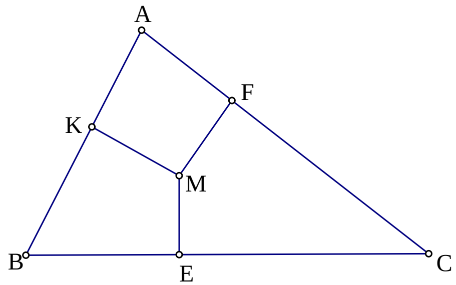
+ Diện tích hình chữ nhật: $S = ab$

+ Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}\left(a+b\right)h$.

+ Diện tích hình vuông: $S = a^2$.

Ví dụ 1) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là một điểm thuộc miền trong ΔABC. Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Xác định vị trí điểm M để tích $ME.MF.MK$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$$2S_{ABC} = 2\left(S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}\right).$$

$$= a.ME + b.MF + c.MK$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si

với bộ 3 số $a.ME, b.MF, c.MK$. Ta có:

$$a.b.c.ME.MF.MK = \left(a.ME\right).\left(b.MF\right).\left(c.MK\right) \le$$

$$\frac{1}{27}\left(a.ME + b.MF + c.MK\right)^3 = 8S_{ABC}^3 \Rightarrow ME.MF.MK \le \frac{8S_{ABC}^3}{abc}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a.ME = b.MF = c.MK$

$\Leftrightarrow S_{MBC} = S_{MCA} = S_{MAB} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $\max\left(ME.MF.MK\right) = \frac{8S_{ABC}^3}{abc}$ khi M là trọng tâm tam giác ABC.

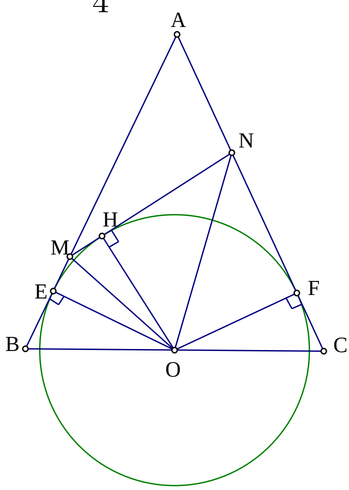
Ví dụ 2) Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi O là trung điểm của BC. Đường tròn O tiếp xúc với AB ở E tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy OM, ON lần lượt là phân giác EOM, FOH. Từ đó ta có:

$$MON = \frac{180^0 - BAC}{2} = ABC \Rightarrow \Delta MBO \sim \Delta OCN$$

(g.g)$\Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = OB.OC = \frac{BC^2}{4} = const$ (1)



Ta lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$

nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất

khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị

nhỏ nhất. Gọi R là bán kính

của đường tròn O, ta có:

$$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC}$$

$= \frac{1}{2}R\ BM + MN + NC\ = \frac{1}{2}R\left[BE + CF + 2\ EM + FN\ \right]$ Vì

$MN = EM + FN \quad = R\ BE + EM + FN$ vì $BE = CF$

$= R\ BE + BM + CN - 2BE\ = R\ BM + CN - BE$ (2)

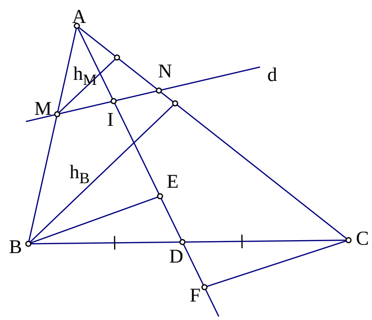
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, từ (1) và (2) suy ra:

$S_{BMNC} \geq R\left(\sqrt{BM.CN} - BE\right) = R\left(\frac{BC}{2} - BE\right)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN//BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O). Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

Ví dụ 3) Cho tam giác ABC trên trung tuyến AD lấy điểm I cố định. Đường thẳng d đi qua I lần lượt cắt cạnh AB, AC tại M, N. Tìm vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác AMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Từ B, C dựng các đường thẳng song song với d, lần lượt cắt tia AD tại E, F.



Dễ thấy $\Delta BED = \Delta CFD$

nên $DE = DF$ hay

$AE + AF = 2AD$.

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AE + AF}{AI} = 2\frac{AD}{AI}$$

Ta có: $\frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AI}; \frac{AC}{AN} = \frac{AF}{AI}$.

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AE + AF}{AI} = 2\frac{AD}{AI} = const$$

Gọi h_B, h_M là khoảng cách từ B, M đến AC. Áp dụng định lý Talet, ta có

$$\frac{h_B}{h_M} = \frac{AB}{AM}; \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}AC.h_B}{\frac{1}{2}AN.h_M} = \frac{AC}{AN}.\frac{AB}{AM} \le \left(\frac{\frac{AC}{AN}+\frac{AB}{AM}}{2}\right)^2 = \frac{AD^2}{AI^2}$$

$\Rightarrow S_{AMN} \ge S_{ABC}.\dfrac{AD^2}{AI^2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} \Leftrightarrow MN//BC$. Vậy min $S_{AMN} = S_{ABC}.\dfrac{AD^2}{AI^2}$ khi d là đường thẳng đi qua I và song song với BC.

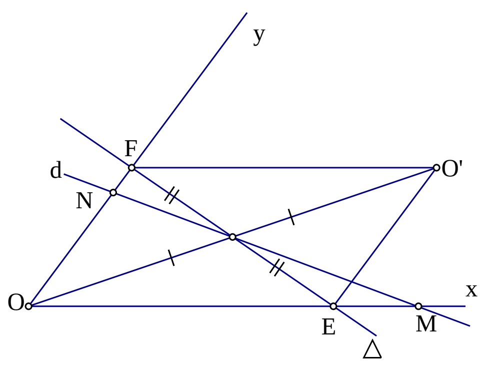
Ví dụ 4) Cho góc nhọn xOy và điểm I cố định nằm ở trong các góc đó. Đường thẳng d đi qua I và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Xác định đường thẳng d để diện tích tam giác OMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Trước hết ta dựng đường thẳng Δ đi qua I cắt Ox, Oy tại E, F sao cho $IE = IF$ (*).

Ta dựng đường thẳng Δ như sau:

Lấy O' là điểm đối xứng của O qua I. Từ O' kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại F, song song với Oy



cắt Ox tại E. Vì $OEO'F$ là hình bình hành nên $OO' \cap EF = I$ là trung điểm của E. Lấy Δ là đường thẳng EF, ta có Δ thỏa mãn điều kiện (*), Δ cố định.

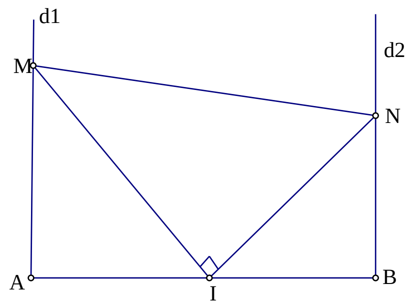
Giả sử d là đường thẳng bất kỳ qua I cắt Ox ở M, cắt Oy ở N. Ta dễ chứng minh được: $\frac{OE}{OM}+\frac{OF}{ON}=2\frac{OI}{OI}=2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\frac{OE}{OM}.\frac{OF}{ON}\le\frac{1}{2}\left(\frac{OE}{OM}+\frac{OF}{ON}\right)=1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{OE}{OM}=\frac{OF}{ON}=1\Leftrightarrow OE=OM,OF=ON$ hay $M\equiv E,N\equiv F$. Vậy đường thẳng d trùng với Δ thì diện tích ΔOMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 5). Cho ba điểm A,I,B thẳng hàng theo thứ tự. Gọi d_1,d_2 là hai nửa đường thẳng vuông góc với AB tại A,B và nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Góc vuông xIy quay xung quanh đỉnh I sao cho hai cạnh của góc tương ứng cắt d_1 ở M cắt d_2 ở N. Tìm vị trí của M,N để diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:



Ta có:

$AMI+AIM=90^0,BIN+AIM=90^0$

$\Rightarrow AMI=BIN\Rightarrow\Delta MAI\sim\Delta IBN$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{AI}{BN}=\frac{AM}{BI}$ (*)

$\Rightarrow AM.BN=AI.BI=const$ .Mặt khác,

$S_{IMN}=\frac{1}{2}IM.IN=\frac{1}{2}\sqrt{AI^2+AM^2\quad BI^2+BN^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$\left(AI^2+AM^2\right)\left(BI^2+BN^2\right) \geq \left(AI.BI+AM.BN\right)^2$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AI}{BI}=\frac{AM}{BN} \Leftrightarrow \frac{AI}{AM}=\frac{BI}{BN}$

Kết hợp với (*) suy ra diện tích ΔIMN đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BI}{BN}=\frac{BN}{BI}=\frac{AI}{AM}=1$ hay $BI=BN, AI=AM$.

Khi đó $\Delta AIM, \Delta BIN$ vuông cân tại các đỉnh $A, B \Rightarrow IM, IN$ hợp với AB các góc bằng 45^0. Vậy diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất khi IM, IN cùng hợp với AB các góc bằng 45^0.

Ví dụ 6) Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý trong tam giác đó. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự là m, n, p và các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C là h_a, h_b, h_c. Chứng minh:

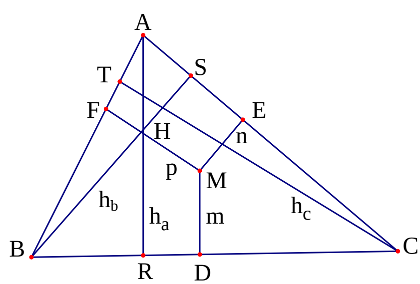
$\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p} \geq 9$

Hướng dẫn giải:

Trước hết ta chứng minh kết quả sau: $\frac{m}{h_a}+\frac{n}{h_b}+\frac{p}{h_c}=1$

Kí hiệu S_a, S_b, S_c, S lần lượt là diện tích

tam giác MBC, MAC, MAB, ABC



ta có: $\frac{S_a}{S}=\frac{m}{h_a}, \frac{S_b}{S}=\frac{n}{h_b}, \frac{S_c}{S}=\frac{p}{h_c}$ suy ra

$\frac{m}{h_a}+\frac{n}{h_b}+\frac{p}{h_c}=\frac{S_a+S_b+S_c}{S}=1$

Sử dụng bất đẳng thức Cô si ta dễ chứng minh được kết quả sau(với $(x, y, z > 0)$: $x + y + z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.

Áp dụng vào bài toán ta có: $\frac{h_a}{m} + \frac{h_b}{n} + \frac{h_c}{p} \geq \frac{9}{\frac{m}{h_a} + \frac{n}{h_b} + \frac{p}{h_c}} = 9$ .Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{h_a}{m} = \frac{h_b}{n} = \frac{h_c}{n} = 3$. Hay M là trọng tâm của tam giác ΔABC.

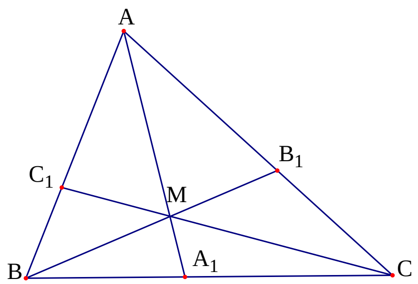
Ví dụ 7) Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý trong tam giác đó. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tại các giao điểm tương ứng là: A_1, B_1, C_1. Kí hiệu S_a, S_b, S_c, S lần lượt là diện tích tam giác MBC, MAC, MAB, ABC .

Chứng minh: $\frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} \geq 9$

Hướng dẫn giải:

Trước hết ta chứng minh : $\frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} = S\left(\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c}\right)$.

Ta có $\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{MBA_1}} = \frac{S_{ACA_1}}{S_{MCA_1}} = \frac{S_{ABA_1} + S_{ACA_1}}{S_{MBA_1} + S_{MCA_1}} = \frac{S}{S_a}$,



Tương tự ta có: $\frac{BB_1}{MB_1} = \frac{S}{S_b}, \frac{CC_1}{MC_1} = \frac{S}{S_c}$.

Cộng ba đẳng thức ta có:

$$\frac{AA_1}{MA_1}+\frac{BB_1}{MB_1}+\frac{CC_1}{MC_1}=S\left(\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức: $x+y+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ với $(x,y,z>0)$. Để ý rằng: $S_a+S_b+S_c=S$ ta có: $\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}\geq\frac{9}{S_a+S_b+S_c}=\frac{9}{S}$ ta có: $S\left(\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}\right)\geq 9$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$S_a=S_b=S_c=\frac{1}{3}S$. Hay M là trọng tâm của tam giác ΔABC.

Chú ý rằng: Từ bài toán trên ta cũng có:

$\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{S_{MBA_1}}{S_{ABA_1}}=\frac{S_{MCA_1}}{S_{ACA_1}}=\frac{S_{MBA_1}+S_{MCA_1}}{S_{ABA_1}+S_{ACA_1}}=\frac{S_a}{S}$. Tương tự ta có:

$\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_b}{S},\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_c}{S}$. Suy ra $\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_a+S_b+S_c}{S}=1$

Nếu ta thay:

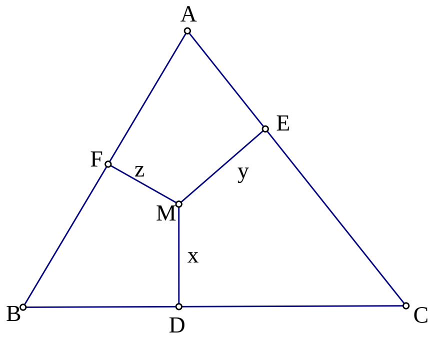
$\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{AA_1-MA}{AA_1}=1-\frac{MA}{AA_1},\frac{MB_1}{BB_1}=1-\frac{MB}{BB_1},\frac{MC_1}{CC_1}=1-\frac{MC}{CC_1}$, thì ta thu được đẳng thức: $\frac{MA}{AA_1}+\frac{MB}{BB_1}+\frac{MC}{CC_1}=2$.Qua đó ta cũng tạo ra được nhiều bất đẳng thức đẹp khác.

Ví dụ 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC,CA,AB lần lượt là MD,ME,MF. Xác định vị trí điểm M để:

a) $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\dfrac{1}{MD+ME}+\dfrac{1}{ME+MF}+\dfrac{1}{MF+MD}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải:



Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều ABC thì $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $MD=x, ME=y, MF=z$.

Ta có $S_{ABC}=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}$

$\Leftrightarrow ah=ax+ay+az \Leftrightarrow x+y+z=h$ không đổi.

Áp dụng BĐT : $x+y+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geq 9 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq \dfrac{9}{h}=\dfrac{6\sqrt{3}}{a}$.

b) Ta có:

$$x+y+y+z+z+x\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 9$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\geq \dfrac{9}{2h}=\dfrac{3\sqrt{3}}{a}$. Trong cả hai trường hợp đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, lúc đó M là tâm của tam giác đều ABC.

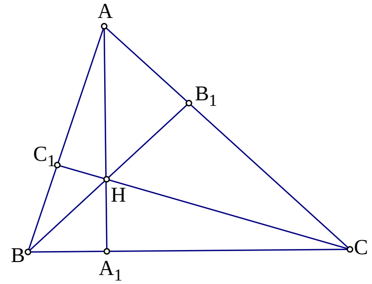
Ví dụ 9. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC có ba góc nhọn với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{AA_1}{HA_1}+\dfrac{BB_1}{HB_1}+\dfrac{CC_1}{HC_1}\geq 9$.

b) $\dfrac{HA_1}{HA}+\dfrac{HB_1}{HB}+\dfrac{HC_1}{HC}\geq \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi diện tích các tam giác ABC, HBC, HAC, HAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$. Dễ thấy $\frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_1}{S}; \frac{HB_1}{BB_1} = \frac{S_2}{S}; \frac{HC_1}{CC_1} = \frac{S_3}{S}$.



Do đó $\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1} = 1$.

Áp dụng BĐT $x + y + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.

Ta được: $\frac{AA_1}{HA_1} + \frac{BB_1}{HB_1} + \frac{CC_1}{HC_1} \geq 9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{HA_1}{AA_1} = \frac{HB_1}{BB_1} = \frac{HC_1}{CC_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$. Lúc đó H vừa là trực tâm, vừa là trọng tâm của tam giác ABC, nên ABC là tam giác đều.

b) Từ $\frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_1}{S}$ có $\frac{HA_1}{HA} = \frac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}$.

Tương tự $\frac{HB_1}{HB} = \frac{S_2}{S_1 + S_3}; \frac{HC_1}{HC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}$. Áp dụng BĐT $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (*). Ta có $\frac{HA_1}{HA} + \frac{HB_1}{HB} + \frac{HC_1}{HC} \geq \frac{3}{2}$.

Lập luận như trên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bất đẳng thức (*) có tên là bất đẳng thức Netbis là bất đẳng thức đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng. Ta có thể chứng minh nó như sau:
$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) \geq 9$. Nhưng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 2+2+2=6.$$

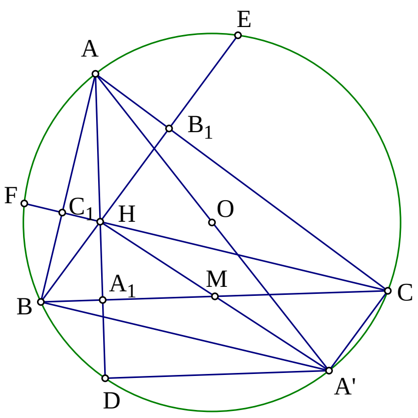
Suy ra $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 10. Xét tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt đường tròn O lần nữa tại D, E, F. Xác định dạng của tam giác ABC sao cho:

a) $\frac{AA_1}{DA_1}+\frac{BB_1}{EB_1}+\frac{CC_1}{FC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

b) $\frac{AA_1}{AD}+\frac{BB_1}{BE}+\frac{CC_1}{CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Dễ dàng chứng minh được

$HA_1=DA_1; HB_1=EB_1; HC_1=FC_1$.

(Xem phần đường thẳng Ơ le- Đường tròn Ơ le)

Áp dụng ví dụ 9. Tổng đang xét đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b) Từ $\frac{AD}{AA_1}+\frac{BE}{BB_1}+\frac{CF}{CC_1}=1+\frac{HA_1}{AA_1}+1+\frac{HB_1}{BB_1}+1+\frac{HC_1}{CC_1}=4$, áp dụng BĐT: $x+y+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ suy ra $\frac{AA_1}{AD}+\frac{BB_1}{BE}+\frac{CC_1}{CF}\geq\frac{4}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Ví dụ 11. Trong các tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính r hãy các định dạng của tam giác sao cho tổng độ dài ba đường cao đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải:

Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn O. Ta dễ chứng minh được:

$\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1$.Áp dụng bất đẳng thức $x + y + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ ta có $h_a + h_b + h_c = h_a + h_b + h_c\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)r \geq 9r$. Đẳng thức xảy ra khi $h_a = h_b = h_c = 3r, h_a + h_b + h_c = 9r$, lúc đó tam giác ABC đều.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác. Kẻ AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Xác định vị trí của điểm M để: $\frac{MA}{MA_1}.\frac{MB}{MB_1}.\frac{MC}{MC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:

Gọi diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$. Đặt $\frac{AA_1}{MA_1} = x, \frac{BB_1}{MB_1} = y, \frac{CC_1}{MC_1} = z$ thì

$\frac{MA}{MA_1} = \frac{AA_1}{MA_1} - 1 = x - 1; \frac{MB}{MB_1} = \frac{BB_1}{MB_1} - 1 = y - 1,$

$\frac{MC}{MC_1} = \frac{CC_1}{MC_1} - 1 = z - 1$.Theo ví dụ 7 ta có:

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow xy+yz+zx=xyz$$. Từ đó

suy ra $\frac{MA}{MA_1}.\frac{MB}{MB_1}.\frac{MC}{MC_1}=\ \ x-1\ \ \ y-1\ \ \ z-1$

$=xyz-\ \ xy+yz+zx\ \ +x+y+z-1=x+y+z-1$

$=\ \ x+y+z\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1\geq 9-1=8$. Đẳng thức xảy ra khi

$x=y=z$, lúc đó M là trọng tâm của tam giác ABC.

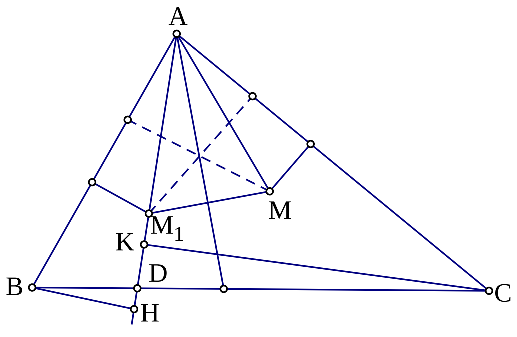
BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a,R_b,R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A,B,C. Còn d_a,d_b,d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC,CA,AB. Khi đó ta có bất đẳng thức $R_a+R_b+R_c\geq 2\ \ d_a+d_b+d_c$.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác.

Chứng minh bất đẳng thức:

Đặt $BC=a,CA=b,AB=c$.

Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường phân giác trong của BAC. Dựng $BH\perp AM_1$ và $CK\perp AM_1$.



Giả sử AM_1 cắt BC tại D. Khi đó $BD \geq BH, DC \geq CK$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD \perp BC$ hay $AM_1 \perp BC$. Từ đó ta có:

$a \geq BH + CK \Leftrightarrow aR_a \geq 2S_{ABM_1} + 2S_{ACM_1}$ (chú ý rằng $AM_1 = AM = R_a$)

hay $aR_a \geq cd_b + bd_c$. Từ đó $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1). Tương tự ta có

$R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3). Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2),(3) ta thu được:

$$R_a + R_b + R_c \geq d_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2\ d_a + d_b + d_c$$

(Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các biểu thức trong ngoặc).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác ABC. Nói cách khác, M_1 (và do đó cả M) là tâm của tam giác đều ABC. Từ cách chứng minh trên chúng ta còn có một số kết quả sau:

Hệ quả 1. (Bất đẳng thức Erdos –Mordell dạng tích).

Cho tam giác ABC và M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức $R_a.R_b.R_c \geq 8d_ad_bd_c$.

Chứng minh:

Từ cách chứng minh bất đẳng thức Erdos – Mordell, ta có:

$R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1); $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3)

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$R_a.R_b.R_c \ge \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}d_b.\frac{b}{a}d_c}.2\sqrt{\frac{a}{b}d_c.\frac{c}{b}d_a}.2\sqrt{\frac{a}{c}d_b.\frac{b}{c}d_a} = 8d_ad_bd_c \text{ (đpcm).}$$

Hệ quả 2. (Bất đẳng thức Erdos –Mordell dạng căn thức). Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \ge \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right).$$

Chứng minh:

Từ các bất đẳng thức (1),(2) và (3) theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{R_a} \ge \sqrt{\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c} \ge \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{d_c}}{\sqrt{2}} \quad (4).$$ Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{R_b} \ge \sqrt{\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a} \ge \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{d_c} + \sqrt{\frac{c}{b}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\sqrt{R_c} \ge \sqrt{\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a} \ge \frac{\sqrt{\frac{a}{c}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}} \quad (6).$$ Cộng theo vế các bất đẳng thức (4),(5) và (6) ta được:

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \ge$$

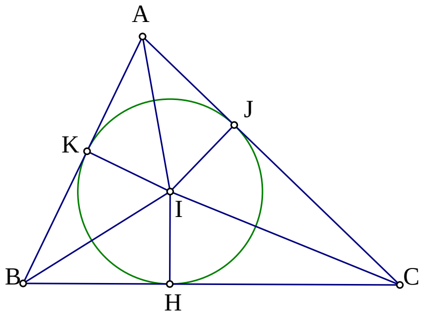
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}\right)\sqrt{d_a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)\sqrt{d_b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{d_c}$$

$\ge \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các biểu thức trong ngoặc của bất đẳng thức trên. Ta có điều cần chứng minh.

Một số ứng dụng của bất đẳng thức Erdos – Mordell

Ví dụ 1. Gọi I là tâm r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều và $IA+IB+IC=6r$.

Giải:

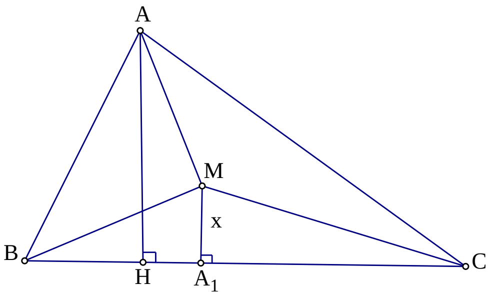


Kẻ IH, IJ, IK theo thứ tự vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Ta có $IH=IJ=IK=r$. Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm I trong tam giác ABC, ta thấy $IA+IB+IC\geq 2\left(IH+IJ+IK\right)=6r$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $IA+IB+IC=6r$ (đpcm)

Ví dụ 2. Giả sử M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $MA+MB+MC\geq 6r$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:



Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

Kẻ AH vuông góc với BC, MA_1 vuông góc với BC. Khi đó ta có

$AM + MA_1 \geq AH$. Từ đó $AM \geq \dfrac{2S_{ABC}}{BC} - x$.

Tương tự, $BM \geq \dfrac{2S_{ABC}}{CA} - y; CM \geq \dfrac{2S_{ABC}}{AB} - z$. Cộng theo vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$MA + MB + MC \geq 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) - \ x + y + z$$

$$= r \ \ BC + CA + AB \ \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) - \ x + y + z \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$BC + CA + AB \ \left(\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{AB}\right) \geq 9$ (2). Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm M đối với tam giác ABC ta có:

$MA + MB + MC \geq 2 \ \ x + y + z$ (3).

Từ (1),(2), (3) suy ra $MA + MB + MC \geq 9r - \left(\dfrac{MA + MB + MC}{2}\right)$ hay $MA + MB + MC \geq 6r$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều (đpcm).

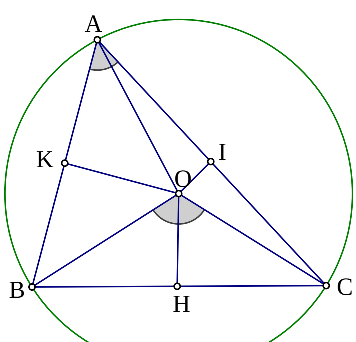
Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC nhọn ta có các bất đẳng thức:

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

b) $\cos A . \cos B . \cos C \leq \dfrac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

a). Gọi $O; R$ theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;



thứ tự là hình chiếu vuông góc kẻ từ O đến

các cạnh BC, CA, AB. Từ giả thiết tam giác

ABC nhọn, ta nhận thấy $BAC = \frac{1}{2}BOC$

(góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn

một cung) hay $BAC = HOC$. Tương tự có $ABC = AOI; ACB = BOK$.

Từ đó

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos HOC + \cos AOI + \cos BOK$$

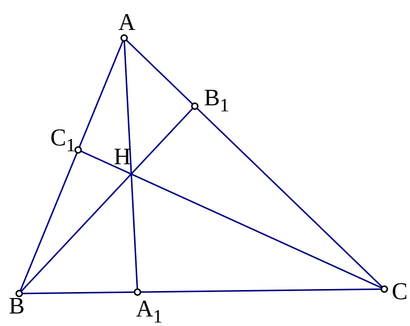
$= \frac{OH}{OC} + \frac{OI}{OA} + \frac{OK}{OB} = \frac{OH + OI + OK}{R}$ (1). Nhưng theo bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có

$OH + OI + OK \le \frac{OA + OB + OC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b). Dựng $AA_1 \perp BC; BB_1 \perp AC; CC_1 \perp AB$.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.



Do đó tứ giác BC_1HA_1 nội tiếp nên

$ABC = A_1HC$. Tứ giác CA_1HB_1 nội

tiếp nên $ACB = B_1HA$. Tứ giác

AC_1HB_1 nội tiếp nên $BAC = C_1HB$. Do đó

$$\cos A.\cos B.\cos C = \cos A_1HC.\cos B_1HA.\cos C_1HB = \frac{HA_1.HB_1.HC_1}{HA.HB.HC} \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích ta có:

$HA.HB.HC \geq 8HA_1.HB_1.HC_1$. Từ (3) suy ra $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Do tam giác ABC nhọn nên $\cos \mathrm{A}, \cos \mathrm{B}, \cos \mathrm{C} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \geq 3\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C}$. Theo chứng minh trên ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ suy ra

$$3\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn, gọi I, I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác đó; r là bán kính của đường tròn I. Chứng minh rằng:

a) $IA.IB.IC \geq 8r^3$.

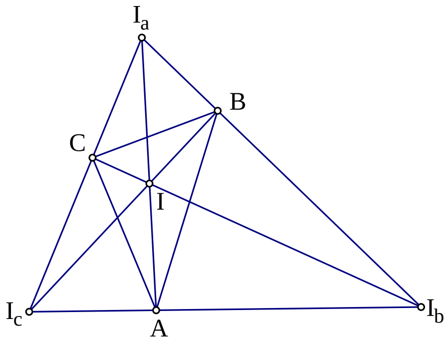
b) $II_a + II_b + II_c \geq 12r$.

c) $II_a.II_b.II_c \geq 64r^3$.

d) $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq 6\sqrt{r}$.

Hướng dẫn giải:

a). Gọi H, J, K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn I với các cạnh BC, CA, AB. Sử dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích ta có:



$IA.IB.IC \ge 8IH.IJ.IK$,

hay $IA.IB.IC \ge 8r^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Lưu ý: Bất đẳng thức ở câu a) cũng đúng cho tam giác ABC bất kỳ.

b) Nhận xét rằng điểm I là trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$. Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm I đối với tam giác $I_aI_bI_c$ ta nhận được: $II_a + II_b + II_c \ge 2\ \ IA + IB + IC\ \ \ge 12r$ (theo kết quả của ví dụ 1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c) Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích cho điểm I đối với tam giác $I_aI_bI_c$ ta nhận được $II_a.II_b.II_c \ge 8IA.IB.IC \ge 64r^3$ (theo kết quả câu a). đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d) Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I trong tam giác $I_aI_bI_c$ ta có $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \ge \sqrt{2}\ \ \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC}$ (1).

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I đối với tam giác ABC ta được:

$$\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \ge \sqrt{2}\ \ \sqrt{IH} + \sqrt{IJ} + \sqrt{IK}\ \ = 3\sqrt{2}.\sqrt{r} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \ge 6\sqrt{r}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA, b, AB = c$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh bất đẳng thức $abc \ge 24\sqrt{3}r^3$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải:

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Từ công thức Heron

$S_{ABC}^2 = p\ \ p-a\ \ \ p-b\ \ \ p-c$ và $S_{ABC} = p.r$. (1)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo định lý Pythagore và từ (1) ta có:

$$IA^2.IB^2.IC^2 = \left(r^2 + \ p-a\ ^2\right)\left(r^2 + \ p-b\ ^2\right)\left(r^2 + \ p-c\ ^2\right)$$

$$= \left(\frac{p-a\ \ bc}{p}\right)\left(\frac{p-b\ \ ac}{p}\right)\left(\frac{p-c\ \ ab}{p}\right) \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\dfrac{p}{3} = \dfrac{p-a\ + \ p-b\ + \ p-c}{3} \geq \sqrt[3]{p-a\ \ \ p-b\ \ \ p-c}$ hay

$p-a\ \ \ p-b\ \ \ p-c\ \leq \dfrac{p^3}{27}$ (3). Từ (2) và (3) suy ra

$IA^2.IB^2.IC^2 \leq \dfrac{a^2b^2c^2}{27} \Leftrightarrow IA.IB.IC \leq \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ (4). Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích ta có $IA.IB.IC \geq 8r^3$ (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra $abc \geq 24\sqrt{3}r^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Các bạn nếu đã quen làm với định lí sin trong tam giác ABC thì thấy $a = 2R\sin A; b = 2R\sin B; c = 2R\sin C$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Khi đó từ bất đẳng thức $abc \geq 24\sqrt{3}r^3$ ta nhận được bất đẳng thức: $8R^3\sin A.\sin B.\sin C \geq 24\sqrt{3}r^3$ ta nhận được bất đẳng thức.

Hệ quả. Với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

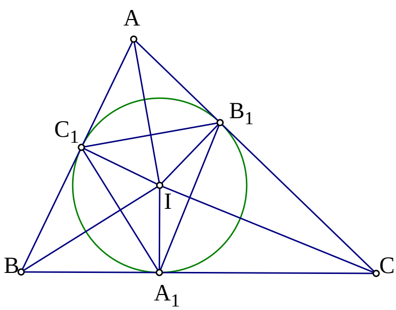
$\sin A.\sin B.\sin C \geq 3\sqrt{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 6. Giả sử đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh bất đẳng thức $AB.BC.CA \geq 8A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải:

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ và p là nửa chu vi tam giác ABC. Sử dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp $IC_1AB_1; IC_1BA_1; IA_1CB_1$ ta thấy

$IA.B_1C_1 = IB_1.AC_1 + IC_1.AB_1$



hay $IA.B_1C_1 = 2r(p-a)$ (1)

Tương tự $IB.A_1C_1 = 2r(p-b)$ (2);

$IC.A_1B_1 = 2r(p-c)$ (3)

Nhân các đẳng thức (1),(2) và (3)

theo vế ta được: $IA.IB.IC = \dfrac{8r^3(p-a)(p-b)(p-c)}{B_1C_1.C_1A_1.A_1B_1}$ (4). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$p-a \quad p-b \leq \left(\frac{p-a \;+\; p-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4};$$

$$p-b \quad p-c \leq \left(\frac{p-b \;+\; p-c}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$p-c \quad p-a \leq \left(\frac{p-c \;+\; p-a}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$. Nhân ba bất đẳng thức theo vế

ta thu được $p-a \quad p-b \quad p-c \leq \dfrac{abc}{8}$ (5). Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích ta có $IA.IB.IC \geq 8r^3$ (6). Từ (4),(5),(6) suy ra $AB.BC.CA \geq 8A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Từ (1),(2) và (3) suy ra $PA+PB+PC < 2\ \ d_a + d_b + d_c$. Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức Erdos – Mordell. Từ đây ta có đpcm.

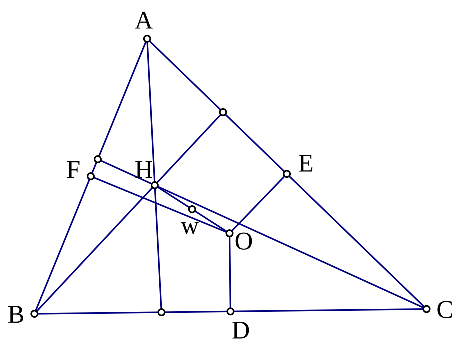
Ví dụ 7. Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức $HD+HE+HF \geq \dfrac{3}{2}R$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ω là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta có các kết quả sau:

+) ω là trung điểm của OH.

+) Bán kính đường tròn Euler của tam giác ABC bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam



giác đó.(Xem them phần đường
thẳng Ơle, đường tròn Ơ le).

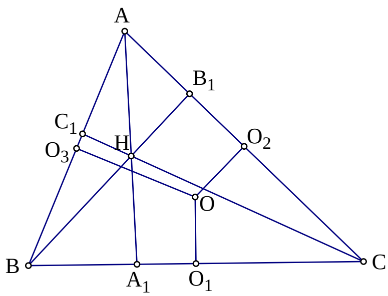
Sử dụng hai kết quả trên ta có: $HD+OD \geq 2\omega D = R$;
$HE+OE \geq 2\omega E = R$; $HF+OF \geq 2\omega F = R$. Cộng theo vế ba bất đẳng thức ta được: $HD+HE+HF \geq 3R - \ OD+OE+OF$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có: $OD+OE+OF \leq \dfrac{OA+OB+OC}{2} = \dfrac{3R}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $HD+HE+HF \geq \dfrac{3}{2}R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O bán kính R. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Kẻ OO_1 vuông góc với BC, OO_2 vuông góc với AC, OO_3 vuông góc với AB. Chứng minh rằng: $HA_1+HB_1+HC_1 \leq OO_1+OO_2+OO_3 \leq \dfrac{3R}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét rằng $HA = 2OO_1; HB = 2OO_2; HC = 2OO_3$



Xem thêm phần đường tròn

Ơ le- Đường thẳng Ơ le

(Áp dụng đẳng thức Erdos – Mordell

cho điểm H trong tam giác ABC, ta có:

$$HA_1+HB_1+HC_1 \leq \frac{HA+HB+HC}{2} = OO_1+OO_2+OO_3.$$

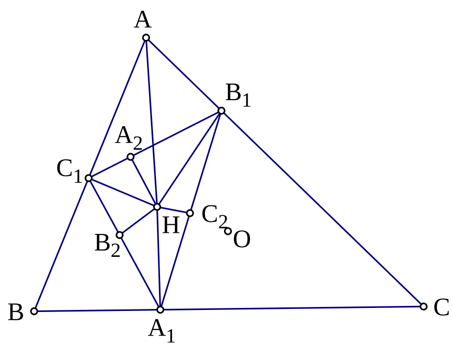
Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm O trong tam giác ABC ta có: $OO_1 + OO_2 + OO_3 \le \dfrac{OA + OB + OC}{2} = \dfrac{3R}{2}$ (đpcm)

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ điểm M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh bất đẳng thức

$$d_a + d_b + d_c \ge 2\left(\frac{d_a d_c}{R_a} + \frac{d_c d_a}{R_b} + \frac{d_a d_b}{R_c}\right).$$

Giải:

Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M lên các cạnh BC, CA, AB.



Ta có $B_1C_1 = MA.\sin A = R_a.\sin A$;

$C_1A_1 = MB.\sin B = R_b.\sin B$

$A_1B_1 = MC.\sin C = R_c.\sin C$. Kẻ MA_2 vuông góc với B_1C_1; MB_2 vuông góc với C_1A_1; MC_2 vuông góc với A_1B_1. Khi đó

$$MA_2 = MB_1.\sin MB_1A_2 = MB_1.\sin MAC_1 = \frac{MB_1.MC_1}{MA} = \frac{d_b.d_c}{R_a} \quad (1)$$

$$MB_2 = MC_1.\sin MC_1B_2 = MC_1.\sin MBA_1 = \frac{MA_1.MC_1}{MB} = \frac{d_a d_c}{R_b} \quad (2)$$

$$MC_2 = MA_1.\sin MA_1C_2 = MA_1.\sin MCB_1 = \frac{MB_1.MA_1}{MC} = \frac{d_b.d_a}{R_c} \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Merdell cho điểm M trong tam giác $A_1B_1C_1$ ta có: $MA_1 + MB_1 + MC_1 \geq 2\ \ MA_2 + MB_2 + MC_2$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) ta suy ra: $d_a + d_b + d_c \geq 2\left(\frac{d_a d_c}{R_a} + \frac{d_c d_a}{R_b} + \frac{d_a d_b}{R_c}\right)$ (đpcm).

Chọn $x = \sqrt{R_a}, y = \sqrt{R_b}, z = \sqrt{R_c}$ ta nhận được:

$$R_a + R_b + R_c \geq \left(\sqrt{\frac{R_c}{R_b}} + \sqrt{\frac{R_b}{R_c}}\right)d_a + \left(\sqrt{\frac{R_c}{R_a}} + \sqrt{\frac{R_a}{R_c}}\right)d_b + \left(\sqrt{\frac{R_a}{R_b}} + \sqrt{\frac{R_b}{R_a}}\right)d_c$$

$$\geq 2\ \ d_a + d_b + d_c$$