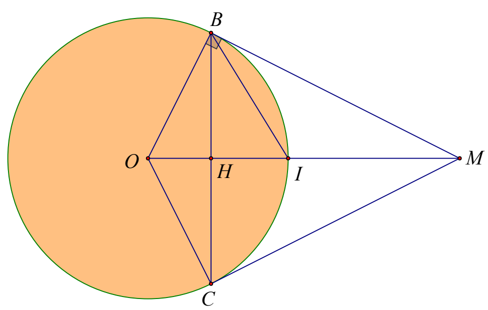
CHÙM BÀI TOÁN

TIẾP TUYẾN – CÁT TUYẾN

ÔN THI VÀO 10

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho $(O;R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn, dây BC vuông góc OM tại H.



1) Chứng minh $OH.OM = R^2$.

Vì MB là tiếp tuyến $(O) \Rightarrow BM \perp OB \Rightarrow$ ΔOBM vuông tại B, BH là đường cao .

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OBM : $OM.OH = OB^2 = R^2$

2) Chứng minh $MB = MC$, $HB = HC$.

Xét hai tam giác vuông ΔOHB và ΔOHC có $OB = OC = R$, OH chung.

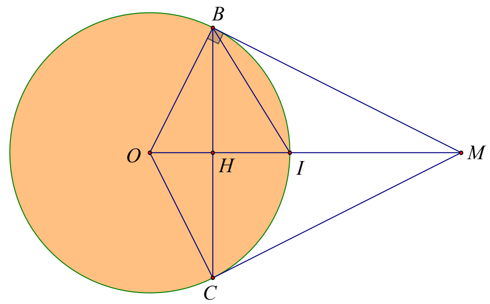
Từ đó chỉ ra $\Delta OHB = \Delta OHC\left(2cgv\right) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BOH} = \widehat{COH} \\ HB = HC \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\Delta OMB = \Delta OMC\left(c-g-c\right) \Rightarrow MB = MC$.

3) Chứng minh MC là tiếp tuyến đường tròn.

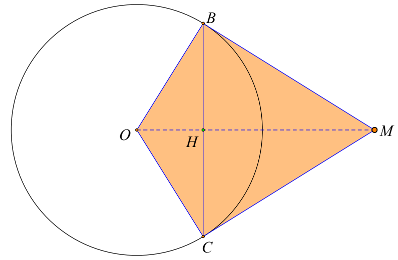
Do $\Delta OMB = \Delta OMC \Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OBM} = 90^0 \Rightarrow CM$ là tiếp tuyến của (O).

4) Chứng minh tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn, tìm tâm đường tròn đó.



Chỉ ra $\widehat{MBO}+\widehat{MCO}=180^0 \Rightarrow MBOC$ nội tiếp, tâm nằm ở trung điểm OM .

5) Bài có thể thay đổi lại đề bài, cho hai tiếp tuyến MB, MC . Chứng minh $BC \perp OM$.

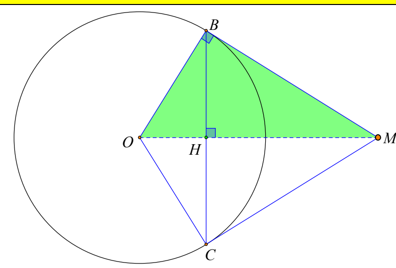


+ Lập luận vì $MB = MC \Rightarrow M$ nằm trên trung trực BC , $OB = OC \Rightarrow O$ nằm trên trung trực BC .

Vậy OM là trung trực $BC \Rightarrow OM \perp BC$.

+ Hoặc chỉ ra $MB = MC$ và MO là phân giác góc $\widehat{BMC}$ (tính chất tiếp tuyến) nên OM là đường cao $\Delta MBC \Rightarrow OM \perp BC$.

6) Tính OH , HM , MB, MC , góc $\widehat{BMC}$ biết $OM = 2R$.



Chỉ ra $OB^2 = OH.OM \Leftrightarrow R^2 = OH.2R \Leftrightarrow OH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow HM = OM - OH = 2R - \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$.

Tính $BM = \sqrt{OM^2 - OB^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow MC = MB = R\sqrt{3}$.

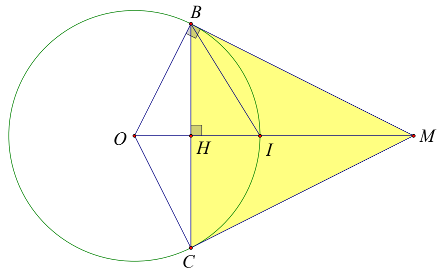
$\sin\widehat{BMO} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BMC} = 2.\widehat{BMO} = 60^0$.

7) Cho $CM = \dfrac{4}{3}R$. Tính diện tích $COBM$.

Vì $\Delta OBM = \Delta OCM \Rightarrow S_{OBMC} = 2S_{\Delta OCM} = 2.\dfrac{1}{2}.OC.CM = 2.\dfrac{1}{2}.R.\dfrac{4}{3}R = \dfrac{4R^2}{3}$ (đơn vị diện tích)

8) Gọi giao OM với (O) là I. Chứng minh BI là phân giác góc $\widehat{MBC}$ và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMBC.

(Đề bài có thể đổi thành: Chứng minh khi M thay đổi, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMBC luôn nằm trên một đường tròn cố định – hoặc chứng minh I cách đều 3 cạnh BM, CM, BC)



Cách 1: Do MC, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $M \Rightarrow MO$ là phân giác góc $\widehat{BMC}$ (1).

Ta có: $\begin{cases} \widehat{OBI} + \widehat{IBM} = 90^0 \\ \widehat{HBI} + \widehat{HIB} = 90^0 \\ \widehat{HIB} = \widehat{OBI}, (OI = OB = R) \end{cases} \Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{IBM} \Rightarrow BI$ là phân giác góc $\widehat{CBM}$ (2).

Từ $(1)(2) \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCM.

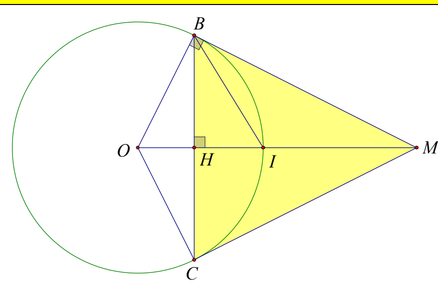
Cách 2: Do MC, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $M \Rightarrow MO$ là phân giác góc $\widehat{BMC}$ (1).

Ta có: $\widehat{BOM} = \widehat{COM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên cung $\overset{\frown}{CI} = \overset{\frown}{BI}$.

Mà $\begin{cases} \widehat{CBI} = \dfrac{1}{2} sd\overset{\frown}{CI} \\ \widehat{IBM} = \dfrac{1}{2} sd\overset{\frown}{BI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{IBM} \Rightarrow BI$ là phân giác góc $\widehat{CBM}$ (2).

Từ $(1)(2) \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCM.

9) Chứng minh $\dfrac{IH}{IM} = \dfrac{HB}{BM}$



Xét ΔBHM có BI là phân giác trong của góc $\widehat{HBM}$ $\Rightarrow \dfrac{HI}{IM} = \dfrac{BH}{BM}$ (tính chất phân giác) .

10) Tìm vị trí điểm M để $BI \perp MC$ (hoặc $CI \perp MB$).

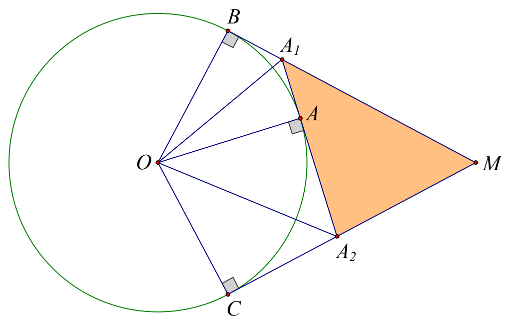
Vì BI là phân giác góc $\widehat{CBM}$, để $BI \perp CM \Rightarrow \Delta CBM$ cân tại $B \Rightarrow CB = BM$.

Mà $BM = CM \Rightarrow \Delta BCM$ là tam giác đều nên $\widehat{BMC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BOM} = 60^0$.

Ta có: $\cos\widehat{BOM} = \dfrac{OB}{OM} \Rightarrow OM = \dfrac{OB}{\cos\widehat{BOM}} = 2R$.

Vậy để $BI \perp CM$ thì $M \in (O;2R)$.

11) Từ điểm A trên cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O). Tiếp tuyến này cắt MB, MC tại A_1, A_2. Chứng minh chu vi ΔMA_1A_2 không đổi và độ lớn góc $\widehat{A_1OA_2}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A khi A di chuyển trên cung nhỏ BC.



Ta có: $\begin{cases} MB = MC \\ A_1B = A_1A \\ A_2A = A_2C \end{cases}$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) .

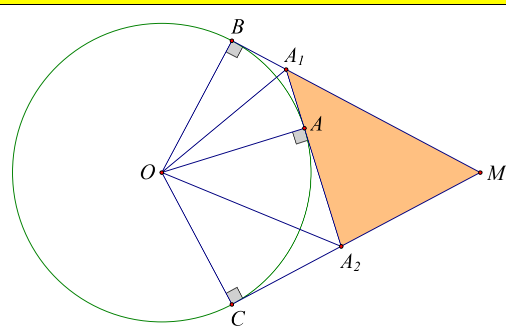
Chu vi ΔMA_1A_2 là: $MA_1 + MA_2 + A_1A_2 = MA_1 + MA_2 + (A_1A + AA_2) = (MA_1 + A_1A) + (MA_2 + AA_2)$

$= (MA_1 + A_1B) + (MA_2 + CA_2) = MB + MC = 2MB$ không đổi khi A di chuyển trên cung nhỏ BC.

Ta có: $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_1OA} + \widehat{AOA_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAO} + \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BMC}\right)$ không đổi.

Vậy chu vi tam giác MA_1A_2 và độ lớn góc $\widehat{A_1OA_2}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

12) Cho $R = 3cm, OM = 6cm$. Tính số đo góc $\widehat{A_1OA_2}$.

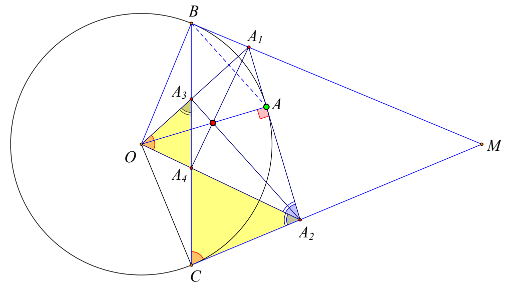


Ta có: $\widehat{A_1OA_2} = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BMC}\right)$. Trong tam giác vuông BMO ta có:

$\sin\widehat{BMO} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BMC} = 60^0$.

Do đó $\widehat{A_1OA_2}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{BMC}\right)=60^0$.

13) Gọi giao OA_1 và OA_2 với BC là A_3 và A_4. Chứng minh $A_2A_3\perp OA_1$ và $A_1A_4\perp OA_2$ (hoặc các câu hỏi liên quan đến ba đường cao của ΔOA_1A_2 hoặc chứng minh tứ giác OCA_2A_3 và OBA_1A_4 và $A_3A_4A_2A_1$ là tứ giác nội tiếp)



Ở trên các em đã chứng minh được $\widehat{A_1OA_2}=\frac{1}{2}.\widehat{BOC}$ mà $\widehat{BCA_2}=\frac{1}{2}.\widehat{BOC}$ (góc ở tâm và góc nt)

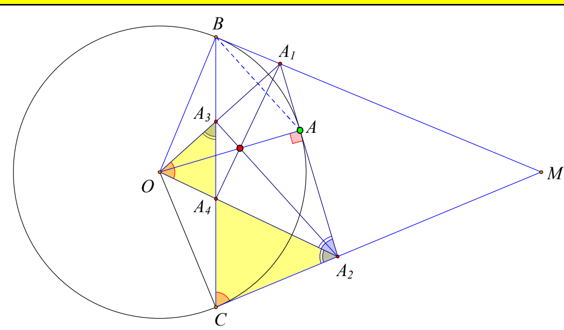
Suy ra $\widehat{A_1OA_2}=\widehat{BCA_2}$.

Từ đó suy ra tứ giác OCA_2A_3 là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OA_3A_2}=\widehat{OCA_2}=90^0$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{A_1OA_2}=\widehat{CBA_1}=\frac{1}{2}.\widehat{BOC}\Rightarrow$ tứ giác OBA_1A_4 nội tiếp nên

$\widehat{OA_4A_1}=\widehat{OBA_1}=90^0\Rightarrow A_1A_4\perp OA_2$.

14) Cho góc $\widehat{BMC}=60^0$, gọi giao OA_1 và OA_2 với BC là A_3 và A_4. Tính tỉ số $\frac{A_1A_2}{A_3A_4}$.



Đầu tiên các em tính góc $\widehat{BOC}=120^0$.

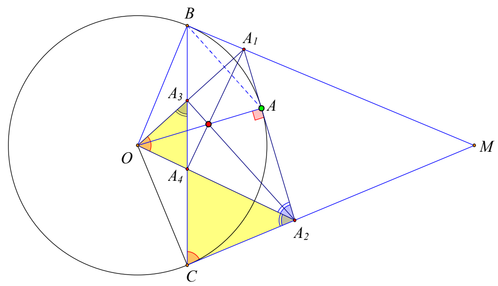
Ở bài trên các em đã chứng minh được tứ giác OCA_2A_3 nội tiếp nên $\widehat{OA_2C}=\widehat{OA_3C}\Rightarrow\widehat{OA_2A}=\widehat{OA_3C}$

(do $\widehat{OA_2C}=\widehat{OA_2A}$ tính chất tt cắt nhau) . Từ đó suy ra $\Delta OA_3A_4\backsim\Delta OA_2A_1\Rightarrow\frac{A_2A_1}{A_3A_4}=\frac{OA_3}{OA_2}$.

Do ΔOA_3A_2 vuông tại A_3 và $\widehat{A_3OA_2}=\frac{1}{2}.\widehat{BOC}=60^0$ nên $\cos\widehat{A_3OA_4}=\frac{OA_3}{OA_2}\Leftrightarrow\frac{OA_3}{OA_2}=\cos 60^0=\frac{1}{2}$.

Vậy $\dfrac{A_2A_1}{A_3A_4} = \dfrac{OA_3}{OA_2} = \dfrac{1}{2}$

15) Cho góc $\widehat{BMC} = 60^0$ và $\begin{cases} OA_1 \cap BC = A_3 \\ OA_2 \cap BC = A_4 \end{cases}$. Chứng minh $AA_1.AA_2 = BA_3.CA_4$.



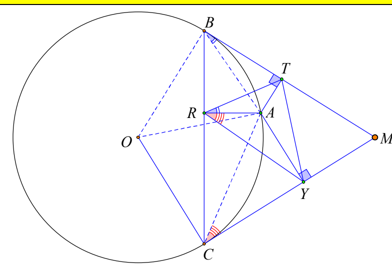
Chỉ ra $\widehat{A_1BA_3} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2CA_4} = 60^0$.

Chỉ ra $\begin{cases} \Delta A_1BA_3 \backsim \Delta A_4OA_3\,(g-g) \\ \Delta A_4OA_3 \backsim \Delta A_4CA_2\,(g-g) \end{cases} \Rightarrow \Delta A_1BA_3 \backsim \Delta A_4CA_2 \Rightarrow \dfrac{A_1B}{A_4C} = \dfrac{BA_3}{CA_2}$.

Mà $\begin{cases} A_1B = A_1A \\ CA_2 = AA_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{A_1A}{A_4C} = \dfrac{BA_3}{AA_2} \Leftrightarrow AA_1.AA_2 = BA_3.CA_4$

16) Từ điểm A trên cung nhỏ BC kẻ AR, AT, AY lần lượt vuông góc với CB, BM, CM tại R, T, Y.

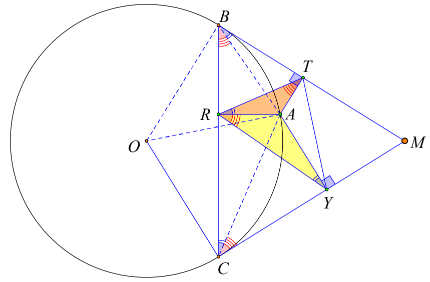
Cho góc $\widehat{BMC} = 60^0$. Tính góc $\widehat{TRY}$ (hoặc chứng minh góc $\widehat{TRY}$ không đổi hoặc chứng minh $\widehat{TRY} = \widehat{BMC}$)



Chỉ ra $ATBR$, $AYCR$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ART} = \widehat{ABT} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOA}$ (góc nt và góc ở tâm)

Và $\widehat{ARY} = \widehat{ACY} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{TRY} = \widehat{ART} + \widehat{ARY} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOA} + \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BMC}\right) = 60^0$.

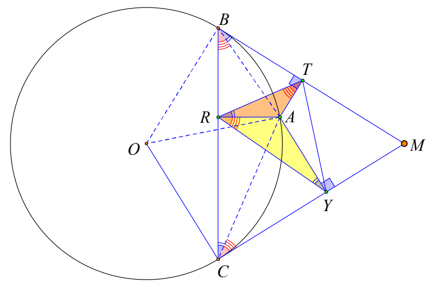
17) Chứng minh $AR^2 = AT.AY$



Chỉ ra góc $\begin{cases} \widehat{AYR} = \widehat{ACR} = \widehat{ABT} = \widehat{ART} \\ \widehat{ARY} = \widehat{ACT} = \widehat{ABC} = \widehat{ATR} \end{cases} \Rightarrow \Delta ARY \backsim \Delta ATR\left(g-g\right)$

Suy ra $\dfrac{AR}{AT} = \dfrac{AY}{AR} \Leftrightarrow AR^2 = AT.AY$.

18) Tìm vị trí điểm A để $AT.AR.AY$ đạt giá trị lớn nhất hoặc $AT.AY$ đạt giá trị lớn nhất.



+ Ta có: $AT.AY = AR^2$.

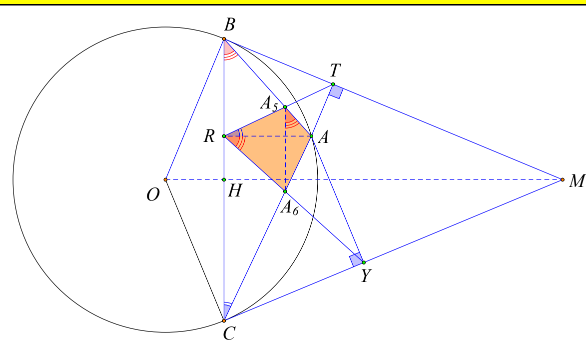
Do đó $AT.AY$ đạt giá trị lớn nhất khi AR lớn nhất, suy ra $AR_{\max} = AI \Leftrightarrow A \equiv I$.

+ Ta có: $AT.AY = AR^2 \Rightarrow AT.AY.AR = AR^3$

Do đó $AT.AR.AY$ đạt giá trị lớn nhất khi AR lớn nhất, suy ra $AR_{\max} = AI \Leftrightarrow A \equiv I$.

(với $I = OM \cap \left(O\right)$).

19) Gọi $RT \cap AB = A_5$, $RY \cap AC = A_6$. Chứng minh tứ giác AA_5RA_6 nội tiếp và $A_5A_6 \perp RA$ (hoặc $A_5A_6 // BC$)



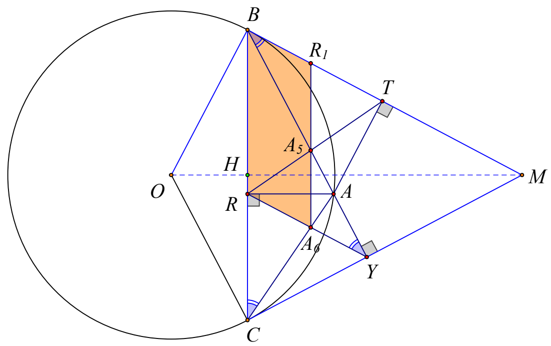
Chỉ ra $\begin{cases} \widehat{ARA_5} = \widehat{ABT} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ARA_6} = \widehat{ACY} = \widehat{ABC} \end{cases}$.

Suy ra $\widehat{A_5AA_6} + \widehat{A_5RA_6} = \widehat{A_5AA_6} + \widehat{A_5RA} + \widehat{ARA_6} = \widehat{A_5AA_6} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^0$.

Suy ra tứ giác AA_5RA_6 nội tiếp.

Vì tứ giác AA_5RA_6 nội tiếp nên $\widehat{A_6A_5A} = \widehat{A_6RA} = \widehat{ACY} = \widehat{CBA} \Rightarrow A_5A_6 // BC \Rightarrow A_5A_6 \perp AR$.

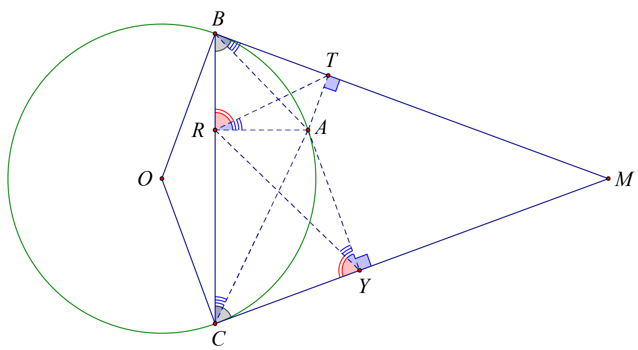
20) Cho A,B,Y thẳng hàng, kéo dài $A_5A_6 \cap BM = R_1$. Chứng minh BR_1A_6R là hình bình hành (hoặc khai thác các yếu tố của hình bình hành này)



Ở trên các em đã chỉ ra $A_5A_6 // BC$.

Mặt khác: $\widehat{ABT} = \widehat{ACB} = \widehat{AYR} \Rightarrow RY // BM$. Từ đó suy ra BR_1A_6R là hình bình hành.

21) Chứng minh rằng nếu $TR = TB$ thì $RY = RC$.

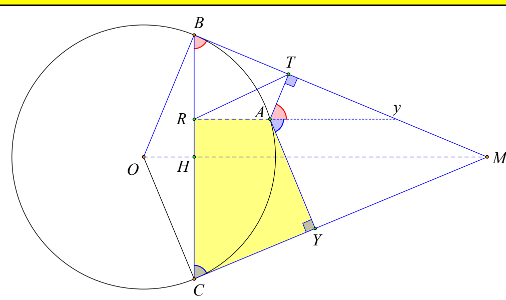


Chỉ ra $\widehat{AYR} = \widehat{ACR} = \widehat{ABT} = \widehat{ART} \Rightarrow \widehat{AYR} = \widehat{ART}$.

Mà $\begin{cases} \widehat{ART} + \widehat{TRB} = 90^0 \\ \widehat{AYR} + \widehat{RYC} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{TRB} = \widehat{RYC}$.

Mặt khác $TB = TR \Rightarrow \widehat{TRB} = \widehat{TBR} = \widehat{RCY} \Rightarrow \widehat{RCY} = \widehat{RYC} \Rightarrow RY = RC$.

22) Chứng minh rằng tia đối của tia AR là phân giác của góc $\widehat{TAY}$.



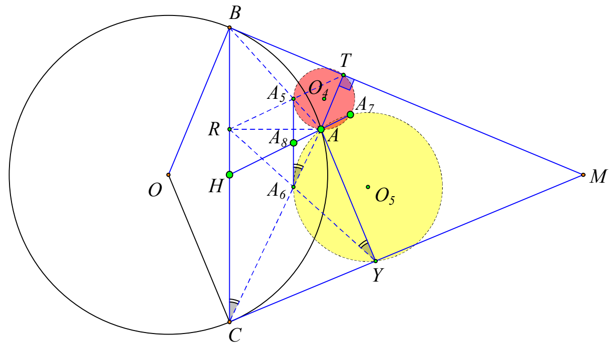
Gọi Ay là tia đối tia AR.

Chỉ ra tứ giác $BTAR$ nội tiếp nên $\widehat{CBT} = \widehat{TAy}$.

Chỉ ra tứ giác $CYAR$ nội tiếp nên $\widehat{BCY} = \widehat{YAy}$. Mà $\widehat{CBT} = \widehat{BCY} \Rightarrow Ay$ là phân giác của góc $\widehat{TAY}$.

Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

23) Gọi $\begin{cases} AB \cap RT = A_5 \\ AC \cap RY = A_6 \end{cases}$. Gọi (O_4) là đường tròn đi qua 3 điểm ATA_5, (O_5) là đường tròn đi qua 3 điểm AYA_6 và A_7 là giao điểm thứ hai của (O_4) và (O_5), H là trung điểm BC. Chứng minh A_7 , A, H thẳng hàng.



Gọi A_8 là giao A_7A với A_5A_6 và H' là giao A_7A với BC.

Chỉ ra $\widehat{A_5A_6A} = \widehat{BCA} = \widehat{A_6YA} \Rightarrow A_5A_6$ là tiếp tuyến của (O_5).

Từ đó chỉ ra được $A_8A_6^2 = A_8A \cdot A_8A_7$.

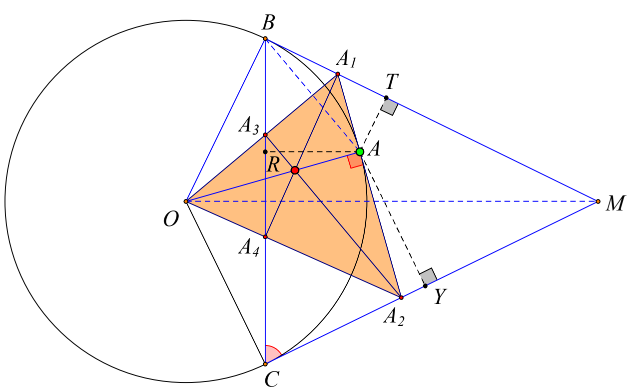
Chứng minh tương tự : $\widehat{A_8A_5A} = \widehat{BCT} = \widehat{A_5TA} \Rightarrow A_8A_5$ là tiếp tuyến của (O_4)

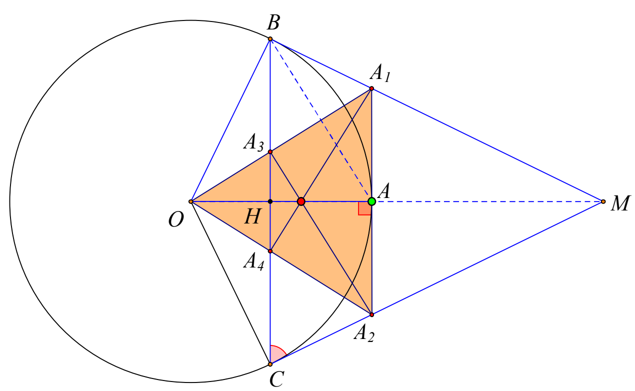
suy ra $A_8A_5^2 = A_8A \cdot A_8A_7$. Từ đó suy ra $A_8A_6^2 = A_8A_5^2 \Rightarrow A_8A_5 = A_8A_6 \Rightarrow A_8$ là trung điểm A_5A_6.

+ Do $A_5A_6 // BC \Rightarrow \dfrac{A_5A_8}{H'B} = \dfrac{A_6A_8}{H'C}\left(= \dfrac{AA_8}{AH'}\right) \Rightarrow H'B = H'C \Rightarrow H'$ là trung điểm $BC \Rightarrow H' \equiv H$.

Vậy A_7 , A, H thẳng hàng.

24) Cho góc $\widehat{BOC} = 120^0$. Gọi giao OA_1 và OA_2 với BC là A_3 và A_4. Tìm vị trí điểm A trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác OA_3A_4 bé nhất và tìm giá trị bé nhất đó (hoặc tìm vị trí điểm A để diện tích ΔOA_1A_2 bé nhất hoặc độ dài A_1A_2 bé nhất)





Ta có: $\Delta OA_3A_4 \backsim \Delta OA_2A_1$ theo tỉ số $K = \dfrac{OA_3}{OA_2} = \cos\widehat{A_3OA_2} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\dfrac{S_{\Delta OA_3A_4}}{S_{\Delta OA_2A_1}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta OA_3A_4} = \dfrac{S_{\Delta OA_2A_1}}{4}$.

Do đó $S_{\Delta OA_3A_4}$ nhỏ nhất khi $S_{\Delta OA_2A_1}$ nhỏ nhất.

Mà $S_{\Delta OA_2A_1} = \dfrac{1}{2}OA.A_1A_2 = \dfrac{R}{2}.A_1A_2$ nhỏ nhất khi A_1A_2 nhỏ nhất.

Mà A_1A_2 nhỏ nhất khi $A = OM \cap (O)$. Khi đó ΔOAB là tam giác đều nên $OH = HA = \dfrac{R}{2}$ và $OM = 2R$.

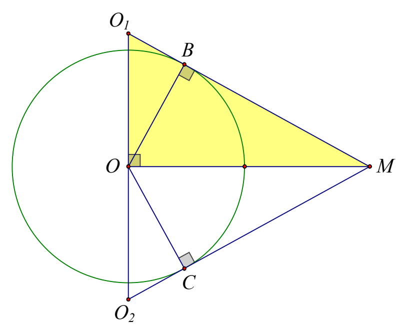
Các em tính được $BC = 2BH = R\sqrt{3}$ và $AM = OM - OA = R$.

Ta có: $\dfrac{A_1A_2}{BC} = \dfrac{AM}{MH} \Leftrightarrow \dfrac{A_1A_2}{R\sqrt{3}} = \dfrac{R}{\frac{3R}{2}} \Leftrightarrow A_1A_2 = \dfrac{2R.\sqrt{3}}{3}$

Khi đó $S_{\Delta OA_2A_1} = \dfrac{R}{2}.A_1A_2 = \dfrac{R}{2}.\dfrac{2R.\sqrt{3}}{3} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{3}$.

Nên $S_{\Delta OA_3A_4} = \dfrac{S_{\Delta OA_2A_1}}{4} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{12}$

25) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt MB, MC tại O_1 và O_2. Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MO_1O_2 bé nhất.



Xét ΔMO_1O_2 có: OM vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔMO_1O_2 cân tại M.

Suy ra $S_{\Delta MO_1O_2} = 2S_{\Delta MOO_1} = 2.\dfrac{1}{2}OB.O_1M = R.O_1M$.

Mặt khác $O_1M = O_1B + BM \geq 2\sqrt{O_1B.BM} = 2\sqrt{OB^2} = 2\sqrt{R^2} = 2R$.

Dấu bằng xảy ra khi $O_1B = BM \Rightarrow \Delta O_1OM$ vuông cân nên $OM = R\sqrt{2}$.

Vậy $\min S_{\Delta MO_1O_2} = 2R^2$ khi điểm M nằm cách O một khoảng $OM = R\sqrt{2}$.

26) Chứng minh ba tam giác $\Delta O_1A_1O \backsim \Delta A_1OA_2 \backsim \Delta O_2OA_2$ và $O_1A_1.O_2A_2 = O_2O.O_1O$.

Ta có: $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_1OA} + \widehat{AOA_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{POA} + \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{M}\right)$.

Do ΔMO_1O_2 cân tại M (vì OM vừa là đường cao, vừa là phân giác) nên

$$\widehat{O_1}=\widehat{O_2}=\frac{180^0-\widehat{M}}{2}\Rightarrow \widehat{O_1}=\widehat{O_2}=\widehat{A_1OA_2}.$$

Xét ΔO_1A_1O và $\Delta\ A_1OA_2$ có:

$\widehat{O_1A_1O}=\widehat{OA_1A_2}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

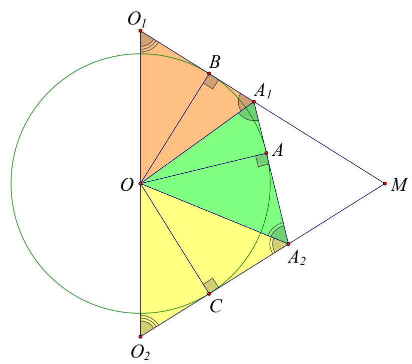
$\widehat{O_1}=\widehat{A_1OA_2}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta O_1A_1O \backsim \Delta\ A_1OA_2\left(g-g\right)$.

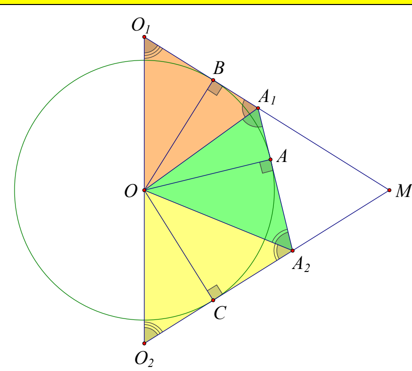
Chứng minh tương tự các em sẽ được $\Delta\ A_1OA_2 \backsim \Delta\ O_2OA_2$.

Vậy $\Delta O_1A_1O \backsim \Delta\ A_1OA_2 \backsim \Delta\ O_2OA_2$.

Chỉ ra $\Delta O_1A_1O \backsim \Delta\ O_2OA_2 \Rightarrow \dfrac{O_1A_1}{O_2O}=\dfrac{O_1O}{O_2A_2}\Leftrightarrow O_1A_1.O_2A_2=O_2O.O_1O$ (đpcm).



27) Chứng minh $O_1A_1+O_2A_2\geq O_1O_2$.

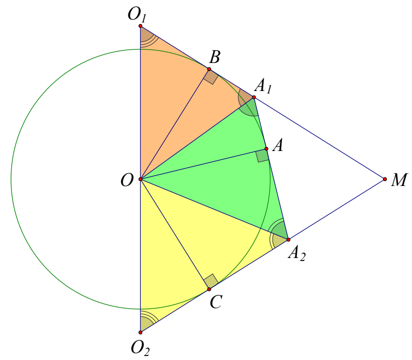


Sử dụng BĐT Cosi:

Ta có: $O_1A_1+O_2A_2\geq 2\sqrt{O_1A_1.O_2A_2}\Leftrightarrow O_1A_1+O_2A_2\geq 2\sqrt{O_1O.O_2O}$.

Mà $O_1O=O_2O=\dfrac{O_1O_2}{2}$ nên $O_1A_1+O_2A_2\geq 2\sqrt{\left(\dfrac{O_1O_2}{2}\right)^2}=O_1O_2$.

28) Cho $\left(O;R\right)$ và điểm M cố định. Tìm vị trí điểm A để $O_1A_1+O_2A_2$ nhỏ nhất.



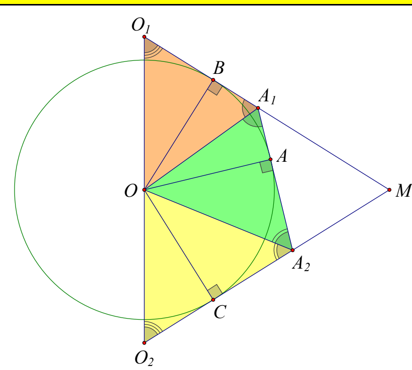
Vì $(O;R)$ và điểm M cố định nên O_1O_2 không đổi.

Ta có: $O_1A_1 + O_2A_2 \geq 2\sqrt{O_1A_1.O_2A_2} \Leftrightarrow O_1A_1 + O_2A_2 \geq 2\sqrt{O_1O.O_2O}$.

Mà $O_1O = O_2O = \dfrac{O_1O_2}{2}$ nên $O_1A_1 + O_2A_2 \geq 2\sqrt{\left(\dfrac{O_1O_2}{2}\right)^2} = O_1O_2$.

Dấu bằng xảy ra khi $O_1A_1 = O_2A_2 \Rightarrow A_1A_2 // O_1O_2 \Rightarrow A \equiv I$ (với $I = OM \cap (O)$)

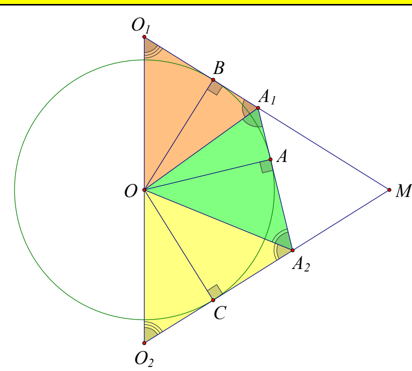
29) Cho (O) và M cố định, điểm A di chuyển trên cung nhỏ BC. Chứng minh chu vi tam giác MA_1A_2 không phụ thuộc vào vị trí điểm A.



Chỉ ra chu vi ΔMA_1A_2 là: $MA_1 + A_1A + AA_2 + A_2M = (MA_1 + A_1B) + (CA_2 + A_2M) = MB + MC = 2MB$ không đổi.

Vậy chu vi tam giác MA_1A_2 không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

30) Cho (O) và M cố định . Tìm vị trí điểm A trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác MA_1A_2 lớn nhất.



Như trên ta đã chứng minh: Chu vi ΔMA_1A_2 không đổi và bằng $2MB$.

Đặt $MB = a \Rightarrow$ nửa chu vi ΔMA_1A_2 là $p = a$ không đổi

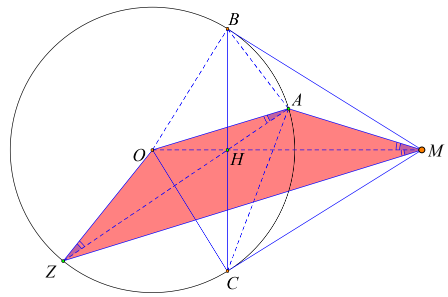
và $S_{\Delta MA_1A_2} = \sqrt{p(p-MA_1)(p-A_1A_2)(p-MA_2)} \le \left(\dfrac{p+p-MA_1+p-A_1A_2+p-MA_2}{4}\right)^4$

Ta có: $(p-MA_1)(p-A_1A_2)(p-MA_2) \le \left(\dfrac{p-MA_1+p-A_1A_2+p-MA_2}{3}\right)^3 = \dfrac{p^3}{27}$

Nên $p(p-MA_1)(p-A_1A_2)(p-MA_2) \le \dfrac{p^4}{27} \Rightarrow S_{\Delta MA_1A_2} = \sqrt{p(p-MA_1)(p-A_1A_2)(p-MA_2)} \le \dfrac{p^2.\sqrt{27}}{27}$

Dấu bằng xảy ra khi $MA_1 = MA_2 \Rightarrow A$ là giao điểm của OM với (O)

31) Kéo dài $AH \cap (O) = Z$. Chứng minh tứ giác $MAOZ$ là tứ giác nội tiếp và góc $\widehat{BMZ} = \widehat{AMC}$ (hoặc chứng minh $\widehat{BMA} = \widehat{CMZ}$ hoặc OM là phân giác góc $\widehat{AMZ}$).



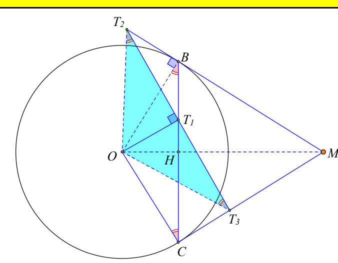
Chỉ ra $\begin{cases} HM.HO = HC^2 \\ HA.HZ = HB.HC = HC^2 \end{cases} \Rightarrow HM.HO = HA.HZ$.

Từ đó suy ra $\Delta HAM \backsim \Delta HOZ(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AZO} = \widehat{AMO} \Rightarrow$ tứ giác $MAOZ$ là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{AZO}$ (góc nt chắn cung OA) mà $\widehat{OAZ} = \widehat{AZO}$ (ΔOAZ cân tại O)

Và $\widehat{OAZ} = \widehat{OMZ}$ (góc nt chắn cung OZ) nên $\widehat{AMO} = \widehat{OMZ}$ mà $\widehat{BMO} = \widehat{CMO}$ nên $\widehat{BMA} = \widehat{CMZ}$ suy ra $\widehat{BMZ} = \widehat{AMC}$.

32) Lấy điểm T_1 bất kì trên BC, kẻ đường thẳng qua T_1 và vuông góc OT_1, cắt MB, MC tại T_2, T_3. Chứng minh ΔOT_2T_3 cân.

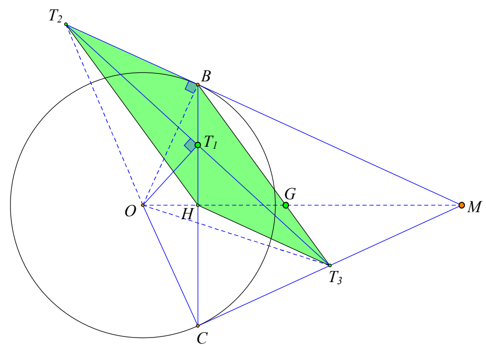


Chỉ ra tứ giác OT_1BT_2; OT_1T_3C nội tiếp nên $\begin{cases} \widehat{OBT_1} = \widehat{OT_2T_1} \\ \widehat{OT_3T_1} = \widehat{OCT_1} \end{cases}$ mà

$OB = OC \Rightarrow \widehat{OBT_1} = \widehat{OCT_2} \Rightarrow \widehat{OT_2T_1} = \widehat{OT_3T_1} \Rightarrow \Delta\Delta OT_2T_3$ cân tại O.

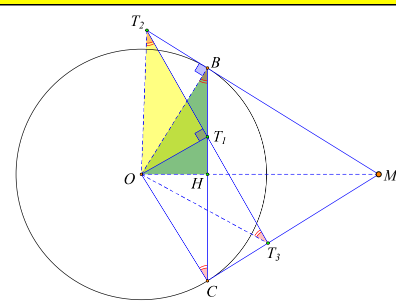
33) Chứng minh rằng nếu T_1 là trung điểm HB thì T_3 là trung điểm CM, hoặc HT_3BT_2 là hình bình hành

(hoặc cho T_1 là trung điểm HB, chứng minh BT_3 là trung tuyến ΔBMC, hoặc $MG = 2GH$ ….)



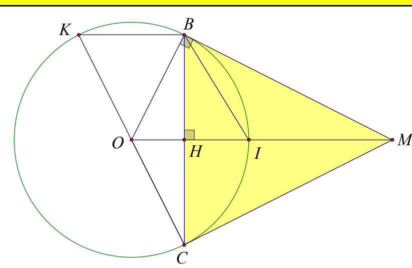
Chỉ ra ΔOT_2T_3 cân nên T_1 là trung điểm T_3T_2, mà T_1 là trung điểm $HB \Rightarrow HT_3BT_2$ là hình bình hành, do đó $HT_3 // BT_2$. Dựa vào ΔMBC có $HT_3 // BM$ mà H là trung điểm $BC \Rightarrow$ T_3 là trung điểm CM.

34) Chứng minh $OH.OT_2 = OB.OT_1$



Chỉ ra $\widehat{OT_2T_1} = \widehat{OBT_1} \Rightarrow \Delta OT_2T_1 \backsim \Delta OBH\left(g-g\right) \Rightarrow OH.OT_2 = OB.OT_1$

35) Vẽ đường kính CK của đường tròn (O). Chứng minh $BK // OM$.



Vì $OB = OC = OK = R \Rightarrow \Delta CKB$ vuông tại $B \Rightarrow BK \perp BC$ mà $OM \perp BC \Rightarrow BK // OM$.

36) Đường thẳng vuông góc KC tại O cắt BC tại E. Chứng minh $HE.HC + HO.HM = R^2$.

Chỉ ra $\Delta HOE \backsim \Delta HCO\left(g-g\right) \Rightarrow HE.HC = OH^2$.

Mà $HO.HM = BH^2 \Rightarrow HE.HC + HO.HM = OH^2 + HB^2 = OB^2 = R^2$.

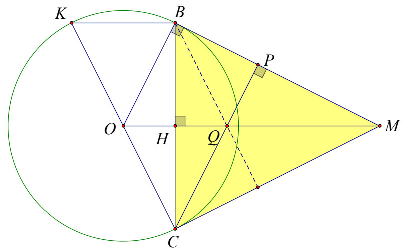
Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

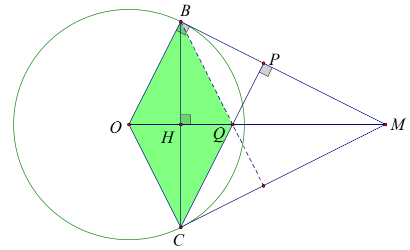
37) Cho $R = 3cm,\ OM = 5cm$. Tính độ dài các cạnh của tam giác MBC.

Ta có: $BM^2 = OM^2 - OB^2 = 16 \Rightarrow BM = MC = 4cm$.

$$BH.OM = OB.BM \Rightarrow BH = \frac{OM.BM}{OM} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}cm \Rightarrow BC = 2BH = 4,8cm.$$

38) Kẻ $CP \perp BM$ tại P, $CP \cap OM = Q$. Chứng minh Q là trực tâm ΔMBC và $BQ \perp MC$. Tính BQ.





Xét ΔMBC có MH, CP là đường cao nên Q là trực tâm ΔMBC và $BQ \perp MC$.

Chỉ ra $\begin{cases} OB // CQ\ (\perp MB) \\ OC // BQ\ (\perp MC) \\ BC \perp OQ \end{cases} \Rightarrow OBQC$ là hình thoi nên $BQ = OB = R$.

39) Giả sử (O) cố định và điểm M luôn chạy trên đường tròn $(O;3R)$. Chứng minh khi đó Q chạy trên một đường tròn cố định.

Các em tính được độ dài $OH = \frac{R}{3} \Rightarrow OQ = \frac{2R}{3} \Rightarrow Q$ luôn chạy trên đường tròn $\left(O;\frac{2R}{3}\right)$.

40) Chứng minh BC là phân giác của góc $\widehat{KCP}$.

Chỉ ra $\Delta BHQ = \Delta CHQ\,(2cgv) \Rightarrow \widehat{HBQ} = \widehat{HCQ}$

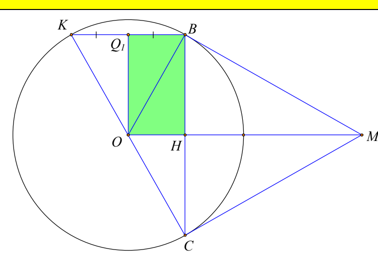
Do $QB // KC$ (cùng vuông góc CM) nên $\widehat{HBQ} = \widehat{KCB}$ (so le trong)

Suy ra $\widehat{KCB} = \widehat{BCQ} \Rightarrow BC$ là phân giác của góc $\widehat{KCP}$.

41) Tứ giác $OBQC$ là hình gì ? Vì sao?

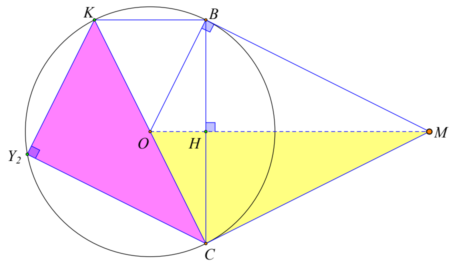
Chỉ ra $\begin{cases} OB // CQ,\ (\perp MB) \\ OC // BQ,\ (\perp CM) \\ OQ \perp BC \end{cases} \Rightarrow OBQC$ là hình thoi.

42) Gọi Q_1 là trung điểm BK. Chứng minh $OHBQ_1$ là hình chữ nhật.

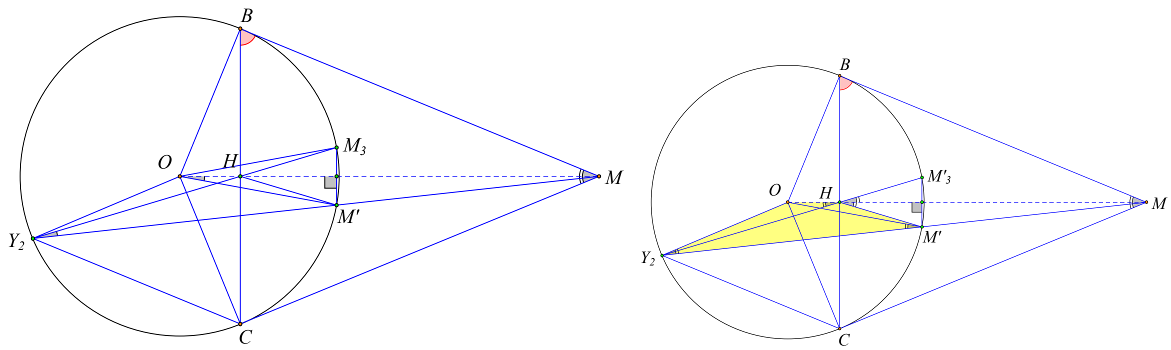


Chỉ ra $\widehat{OQ_1B} = \widehat{Q_1BH} = \widehat{BHO} = 90^0 \Rightarrow OHBQ_1$ là hình chữ nhật.

43) Từ C kẻ đường thẳng song song MB và cắt (O) tại Y_2. Chứng minh $KY_2.OM = 2R^2$



44) Từ C kẻ đường thẳng song song MB và cắt (O) tại Y_2. Tia MY_2 cắt đường tròn tại M', gọi M_3 là điểm đối xứng với M' qua OM. Chứng minh Y_2, H, M_3 thẳng hàng.



Cách 1:

Gọi M_3' là giao Y_2H với (O). Chỉ ra tứ giác $OHM'Y_2$ nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{MHM'} = \widehat{OY_2M'} = \widehat{OM'Y_2} = \widehat{OHY_2} = \widehat{M_3'HM}$.

Từ đó suy ra $\widehat{M_3'HM} = \widehat{MHM'} \Rightarrow M_3'$ và M' đối xứng nhau qua $OM \Rightarrow M_3' \equiv M_3$.

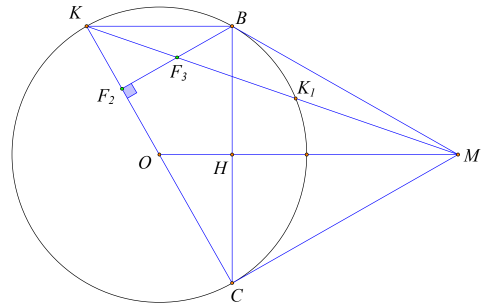
Cách 2:

Do M_3 đối xứng M' qua MO nên $\widehat{M_3OM} = \widehat{M'OM} = \dfrac{1}{2}.\widehat{M_3OM'} = \widehat{M_3Y_2M'}$.

Mặt khác tứ giác $OHM'Y_2$ nội tiếp nên $\widehat{M'OM} = \widehat{M'Y_2H} \Rightarrow \widehat{M'Y_2H} = \widehat{M'Y_2M_2}$.

Vậy Y_2, H, M_3 thẳng hàng.

45) Từ B kẻ $BF_2 \perp KC$ tại F_2, $BF_2 \cap KM = F_3$. Chứng minh F_3 là trung điểm F_2B và BC là phân giác góc $\widehat{MBF_2}$.



Chỉ ra $F_2F_3 // CM \Rightarrow \frac{F_2F_3}{KF_2} = \frac{CM}{KC} = \frac{CM}{2OC}$.

Chỉ ra $\widehat{F_2KB} = \widehat{HCM}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}\right) \Rightarrow \Delta F_2BK \backsim \Delta HMC\,(g-g) \Rightarrow \frac{F_2B}{KF_2} = \frac{HM}{HC}$.

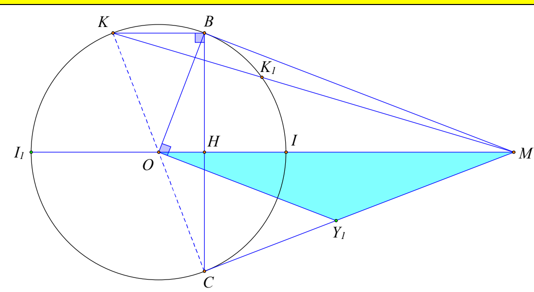
Chỉ ra $\Delta HOC \backsim \Delta HCM\,(g-g) \Rightarrow \frac{HM}{HC} = \frac{CM}{OC}$.

Từ 3 đẳng thức trên các em suy ra : $\frac{F_2F_3}{KF_2} = \frac{1}{2}.\frac{CM}{OC} = \frac{1}{2}.\frac{F_2B}{KF_2} \Rightarrow \frac{F_2F_3}{KF_2} = \frac{1}{2}.\frac{F_2B}{KF_2} \Rightarrow F_2F_3 = \frac{F_2B}{2} \Rightarrow F_3$ là trung điểm F_2B.

+ Chỉ ra $\widehat{F_2BC} = \widehat{CKB}$ (cùng phụ $\widehat{F_2BK}$) mà $\widehat{CKB} = \widehat{CBM}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}\right)$.

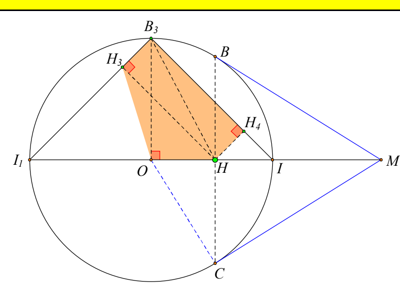
Suy ra $\widehat{F_2BC} = \widehat{CBM} \Rightarrow BC$ là phân giác góc $\widehat{MBF_2}$.

46) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc OB cắt MC tại Y_1. Chứng minh ΔOY_1M cân.



Chỉ ra $OY_1 // MB\ (\perp OB) \Rightarrow \widehat{Y_1OM} = \widehat{OMB}\,(slt) = \widehat{OMY_1} \Rightarrow \Delta OY_1M$ cân tại Y_1.

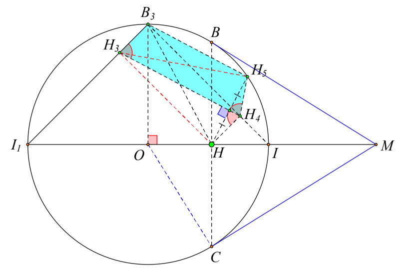
47) Gọi B_3 là điểm chính giữa cung $I I_1$. Từ H kẻ $HH_3 \perp B_3I_1$ tại H_3, kẻ $HH_4 \perp B_3I$ tại H_4. Chứng minh 5 điểm O, H, H_4, B_3, H_3 cùng thuộc một đường tròn.



Chỉ ra 5 điểm O, H, H_4, B_3, H_3 cùng nằm trên đường tròn đường kính HB_3.

Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

48) Gọi H_5 là điểm đối xứng với H qua H_3H_4. Chứng minh $H_4H_5B_3H_3$ là hình thang cân.



Chỉ ra $\begin{cases} H_4H = H_4H_5 \\ H_3H = H_3H_5 \end{cases}$ (tính chất đối xứng trục)

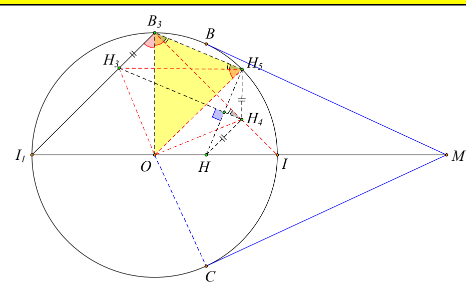
nên $\Delta H_3H_5H_4 = \Delta H_3HH_4\left(g-g-g\right) \Rightarrow \widehat{H_3H_5H_4} = \widehat{H_3HH_4} = 90^0 \Rightarrow H_4H_5B_3H_3$ là tứ giác nội tiếp.

Vì $H_4H_5 = HH_4 = B_3H_3 \Rightarrow \widehat{B_3H_5H_3} = \widehat{H_4H_3H_5}$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra $B_3H_5 // H_3H_4 \Rightarrow H_4H_5B_3H_3$ là hình thang.

Vì hình thang $H_4H_5B_3H_3$ là tứ giác nội tiếp nên $H_4H_5B_3H_3$ là hình thang cân.

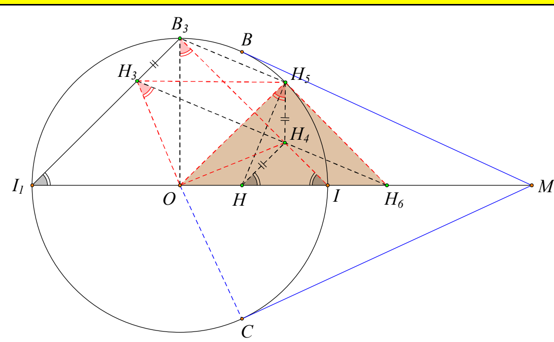
49) Chứng minh rằng $H_5 \in \left(O\right)$.



Chỉ ra $\begin{cases} \widehat{OH_5H_3} = \widehat{OB_3H_3} = 45^0 \\ \widehat{OB_3I} = 45^0 \end{cases}$, mà $H_4H_5B_3H_3$ là tứ giác nội tiếp và $H_4H_5 = B_3H_3$ nên góc

$\widehat{H_4B_3H_5} = \widehat{B_3H_5H_3} \Rightarrow \widehat{OB_3H_5} = \widehat{OH_5B_3} \Rightarrow \Delta OH_5B_3$ cân tại $O \Rightarrow OH_5 = OB_3 = R \Rightarrow H_5 \in \left(O\right)$.

50) Tiếp tuyến tại H_5 cắt OM tại H_6. Chứng minh H_3, H_4, H_6 thẳng hàng.



Tứ giác OHH_4H_3 nội tiếp nên $\begin{cases} IHH_4 = OH_3H_4 = OB_3I = 45^0 \\ OH_5H_4 = \widehat{OB_3H_4} = 45^0 \\ \widehat{OH_5H_6} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{H_4HI} = \widehat{H_4H_5H_6} = 45^0$

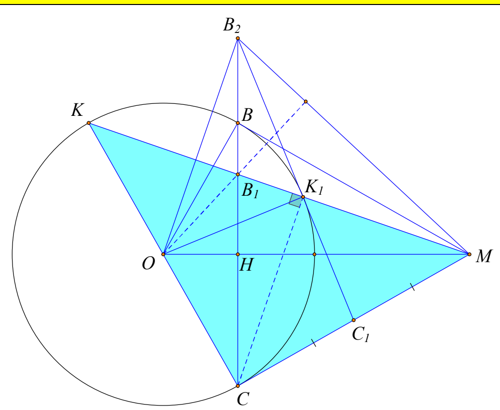
Mà $\widehat{H_4H_5H} = \widehat{H_4HH_5} \Rightarrow \widehat{HH_5H_6} = \widehat{H_5HH_6} \Rightarrow H_6H_5 = H_6H \Rightarrow H_6$ nằm trên trung trực HH_5

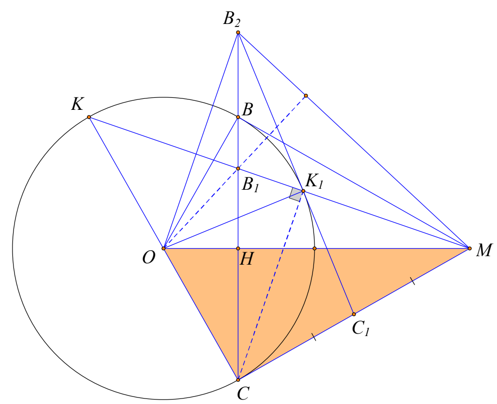
Mà H_3H_4 là trung trực HH_5 nên H_3, H_4, H_6 thẳng hàng.

51) Giả sử B cố định và M thay đổi sao cho MB là tiếp tuyến của (O). Tìm quỹ tích điểm Q khi M thay đổi.

Do $OBQC$ là hình thoi nên $BQ = OB = R$ mà B cố định nên $Q \in (B;R)$.

52) Gọi C_1 là trung điểm CM, $\begin{cases} MK \cap (O) = K_1 \\ MK \cap BC = B_1 \\ C_1K_1 \cap BC = B_2 \end{cases}$. Chứng minh $MK_1.MK = MH.MO$.



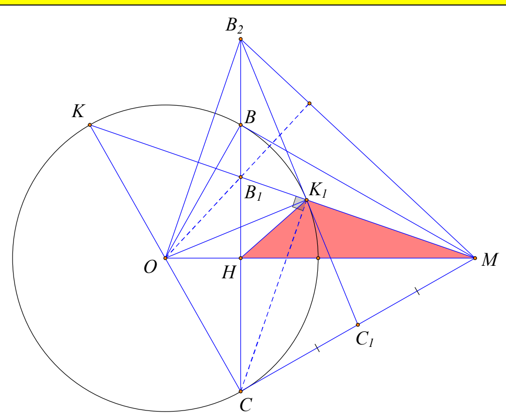


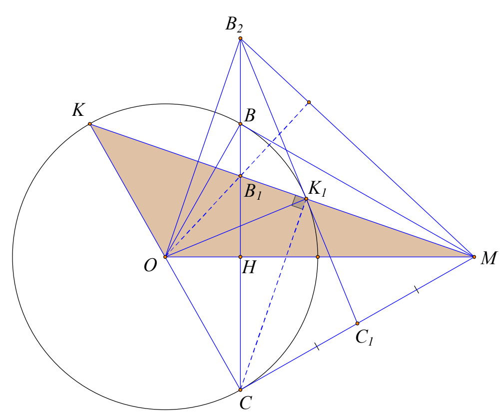
Chỉ ra ΔCKM vuông tại C và có CK_1 là đường cao nên $MK_1.MK = CM^2$.

Chỉ ra ΔOCM vuông tại C có CH là đường cao nên $MH.MO = CH^2$.

Từ đó suy ra $MK_1.MK = MH.MO$

53) Chứng minh $\Delta MK_1H \backsim \Delta MOK$ và góc $\begin{cases} \widehat{MHK_1} = \widehat{MKO} \\ \widehat{MK_1O} = \widehat{MOK} \end{cases}$. Từ đó suy ra OKK_1H nội tiếp.





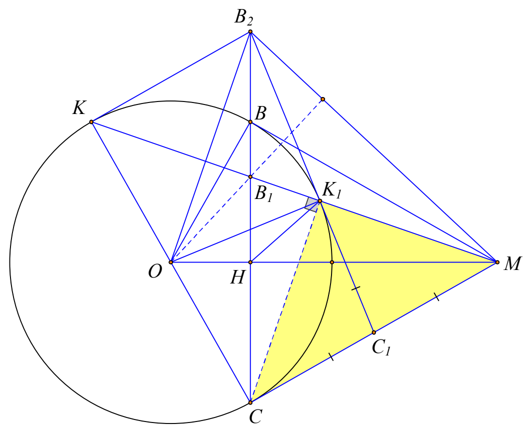
Xét ΔMK_1H và ΔMOK có: góc $\widehat{KMO}$ chung và $\dfrac{MK_1}{MO} = \dfrac{MH}{MK}$

Từ đó suy ra $\Delta MK_1H \backsim \Delta MOK$.

Vì $\Delta MK_1H \backsim \Delta MOK$ nên $\begin{cases} \widehat{MHK_1} = \widehat{MKO} \\ \widehat{MK_1O} = \widehat{MOK} \end{cases}$.

Xét tứ giác OKK_1H có $\widehat{OKK_1} + \widehat{OHK_1} = \widehat{K_1HM} + \widehat{OHK_1} = 180^0$, mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác OKK_1H là tứ giác nội tiếp.

54) Chứng minh C_1K_1 là tiếp tuyến của (O).

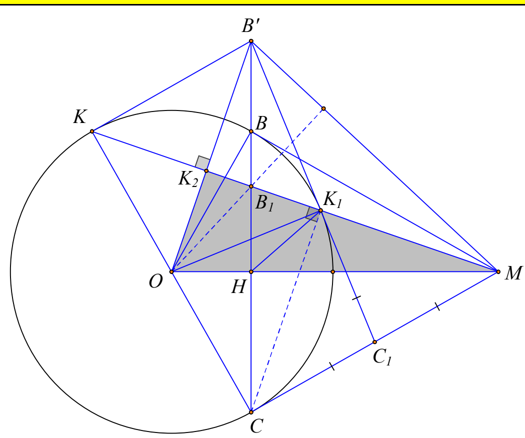


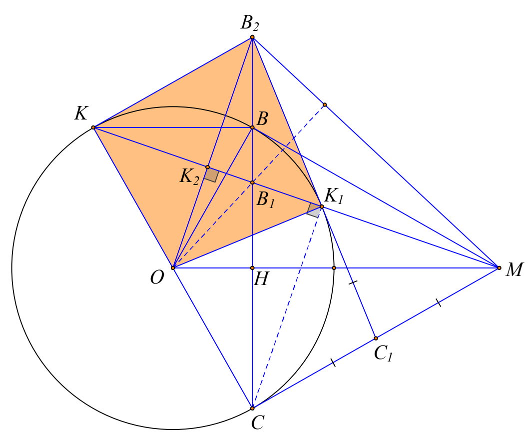
Chỉ ra ΔCMK_1 vuông tại $K_1 \Rightarrow K_1C_1 = C_1C = C_1M \Rightarrow \Delta C_1K_1C$ cân tại C_1.

Chỉ ra $\Delta OC_1K_1 = \Delta OC_1C\left(c-c-c\right) \Rightarrow \widehat{OK_1C_1} = \widehat{OCC_1} = 90^0$.

Từ đó suy ra C_1K_1 là tiếp tuyến của (O).

55) Gọi K_2 là trung điểm KK_1 . Chứng minh B_2K là tiếp tuyến của (O).





Vì K_2 là trung điểm $KK_1 \Rightarrow \begin{cases} OK_2 \perp KK_1 \\ \widehat{KOK_2} = \widehat{K_1OK_2} \end{cases}$.

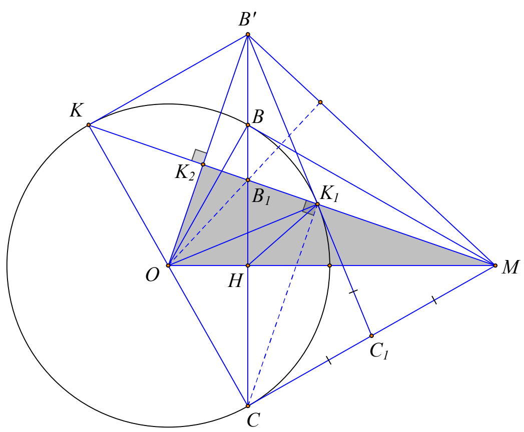
giả sử $OK_2 \cap BC = B'$. Ta sẽ chứng minh $B' \equiv B_2$, tức là chứng minh $B'K_1$ là tiếp tuyến (O).

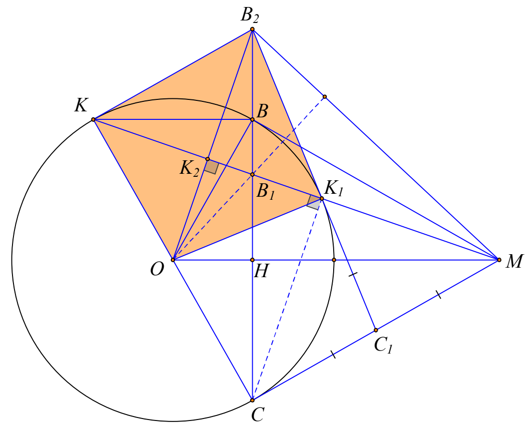
Ta có: $\Delta OK_2M \backsim \Delta OHB'(g-g) \Rightarrow OK_2.OB' = OH.OM = OB^2 = R^2 = OK_1^2$

$\Rightarrow OK_2.OB' = OK_1^2 \Rightarrow \Delta OK_2K_1 \backsim \Delta OK_1B'(c-g-c) \Rightarrow \widehat{OK_1B'} = \widehat{OK_2K_1} = 90^0 \Rightarrow B'K_1$ là tiếp tuyến của (O), suy ra $B' \equiv B_2$.

Từ $\Delta OKB_2 = \Delta OK_1B_2(c-g-c) \Rightarrow \widehat{OKB_2} = \widehat{OK_1B_2} = 90^0$ nên B_2K là tiếp tuyến của (O).

56) Chứng minh $\Delta MHB_1 \backsim \Delta B_2HO$. Từ đó suy ra $HO.HM = HB_2.HB_1 = BH^2$.



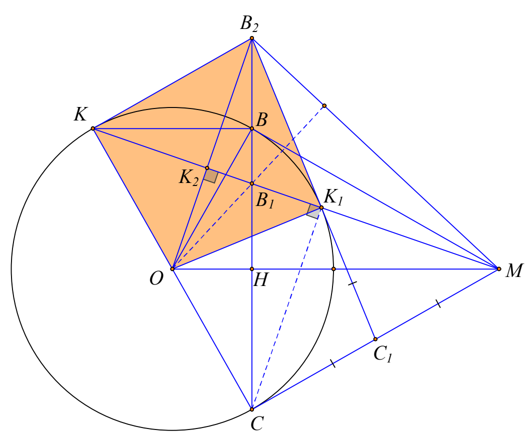


Các em chỉ ra $\widehat{HMB_1} = \widehat{HB_2O}$ (cùng phụ $\widehat{HPB_2}$).

Từ đó suy ra $\Delta MHB_1 \backsim \Delta B_2HO(g-g) \Rightarrow HO.HM = HB_2.HB_1$ và $HO.HM = BH^2$.

57) Chứng minh $BC^2 = 4HB_1.HB_2$.

Chỉ ra $BH^2 = HO.HM = HB_2.HB_1$ mà $BH = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = HB_2.HB_1 \Leftrightarrow BC^2 = 4HB_1.HB_2$.



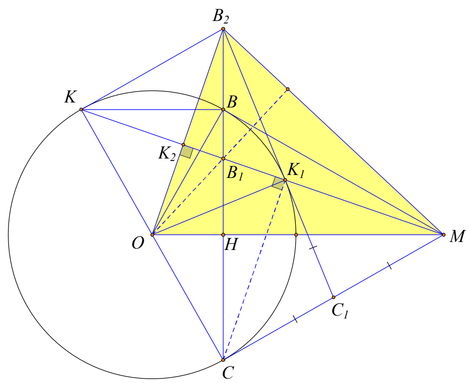
58) Chứng minh $OH.OM = OK_2.OB_2 = R^2 = OB^2$ (hoặc chứng minh $OK_2.OB_2$ không đổi)

Chỉ ra $\widehat{K_2MO} = \widehat{HB_2O}$ (cùng phụ $\widehat{HOB_2}$) .

Từ đó suy ra $\Delta K_2MO \backsim \Delta HB_2O(g-g) \Rightarrow OH.OM = OK_2.OB_2$.

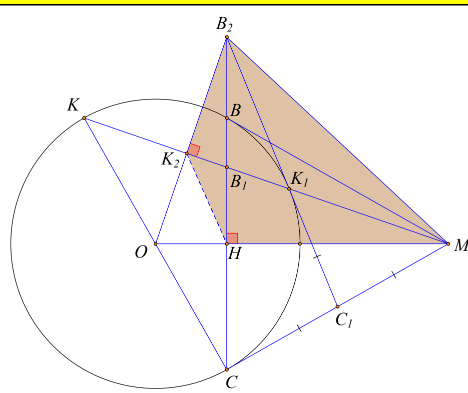
Mà $OH.OM = OB^2 = R^2$ nên $OH.OM = OK_2.OB_2 = R^2 = OB^2$

59) Chứng minh $OB_1 \perp B_2M$



Chỉ ra B_1 là trực tâm $\Delta OMB_2 \Rightarrow OB_1 \perp MB_2$.

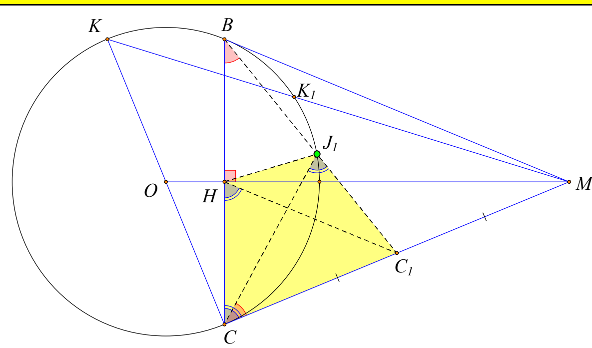
60) Chứng minh tứ giác MHK_2B_2 nội tiếp từ đó suy ra $OK_2.OB_2$ không đổi.



Xét tứ giác MHK_2B_2 có: $\widehat{MHB_2} = \widehat{MK_2B_2} = 90^0$, mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh MB_2, suy ra tứ giác MHK_2B_2 là tứ giác nội tiếp.

Chỉ ra $OK_2.OB_2 = OH.OM = OB^2 = R^2$ không đổi.

61) Gọi $BC_1 \cap (O) = J_1$. Chứng minh $\Delta C_1J_1C \backsim \Delta C_1CB$, $\Delta C_1MJ_1 \backsim \Delta C_1BM$; $CH\,J_1C_1$ là tứ giác nội tiếp. (hoặc bài có thể khai thác từ các yếu tố trên như chứng minh các góc, tỉ số đoạn thẳng…)



Chỉ ra $C_1H = C_1C$ (trung tuyến tam giác vuông) nên $\widehat{C_1CH} = \widehat{C_1HC}$.

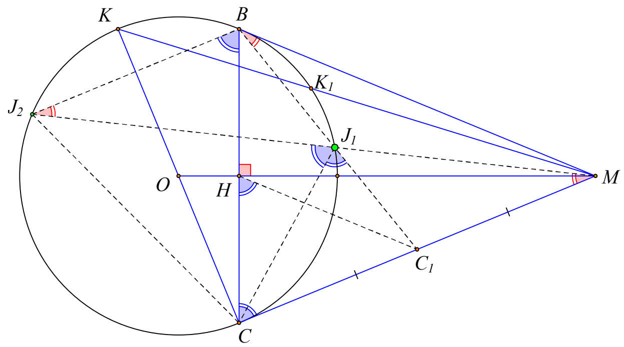
Mặt khác $\widehat{C_1CJ_1} = \widehat{C_1BC}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{CJ_1}\right) \Rightarrow \Delta C_1J_1C \backsim \Delta C_1CB\,(g-g) \Rightarrow \widehat{C_1J_1C} = \widehat{C_1CB} = \widehat{C_1HC}$.

Từ đó suy ra $CH\,J_1C_1$ là tứ giác nội tiếp.

+ Chỉ ra $\Delta C_1J_1C \backsim \Delta C_1CB \Rightarrow CC_1^2 = C_1J_1.C_1B$ mà

$C_1C = C_1M \Rightarrow C_1M^2 = C_1J_1.C_1B \Rightarrow \Delta C_1MJ_1 \backsim \Delta C_1BM\,(c-g-c)$

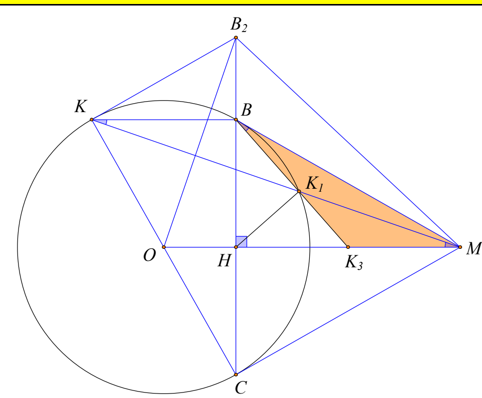
62) Kéo dài MJ_1 cắt (O) tại J_2. Chứng minh J_1C là phân giác góc $\widehat{C_1J_1J_2}$



Do $\Delta C_1MJ_1 \backsim \Delta C_1BM \Rightarrow \widehat{C_1MJ_1} = \widehat{C_1BM} = \widehat{MJ_2B} \Rightarrow J_2B//CM$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{J_2BC} = \widehat{BCM} = \widehat{CJ_1C_1} \\ \widehat{J_2BC} = \widehat{J_2J_1C} \end{cases} \Rightarrow \widehat{J_2J_1C} = \widehat{CJ_1C_1} \Rightarrow J_1C$ là phân giác góc $\widehat{C_1J_1J_2}$.

63) Kéo dài $BK_1 \cap OM = K_3$. Chứng minh $\begin{cases} K_3M^2 = K_3K_1.K_3B \\ K_3H^2 = K_3K_1.K_3B \end{cases}$ từ đó suy ra K_3 là trung điểm HM và $HK_1 \perp BK_1$.



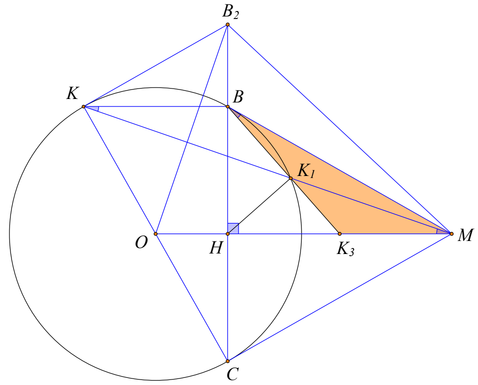
Chỉ ra $\widehat{K_3MK} = \widehat{MKB}$ (sole trong) mà $\widehat{MKB} = \widehat{K_3BM}$ (tính chất góc nt và góc tạo bởi tt và dây cung)

Nên $\widehat{K_3MK} = \widehat{K_3BM}$. Từ đó suy ra $\Delta K_3MK_1 \backsim \Delta K_3BM\,(g-g) \Rightarrow K_3M^2 = K_3K_1.K_3B$.

+ Do $\Delta MK_1H \backsim \Delta MOK$ nên $\widehat{MHK_1} = \widehat{MKO}$ mà $\widehat{MKO} = \widehat{HBK_3}$ (góc nt chắn cung $\overset{\frown}{CK_1}$)

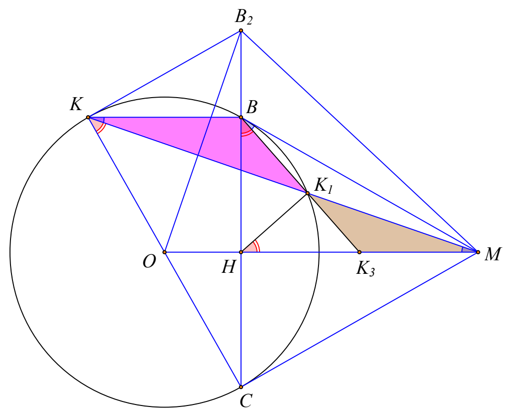
Từ đó suy ra $\Delta K_3HK_1 \backsim \Delta\Delta K_3BH\,(g-g) \Rightarrow K_3H^2 = K_3K_1.K_3B$.

Vì $\begin{cases} K_3M^2 = K_3K_1.K_3B \\ K_3H^2 = K_3K_1.K_3B \end{cases} \Rightarrow K_3M = K_3H \Rightarrow K_3$ là trung điểm MH.



+ Ta có: $\widehat{K_1BH}+\widehat{K_1HB}=\widehat{K_1HK_3}+\widehat{K_1HB}=\widehat{K_3HB}=90^0$. Từ đó suy ra $HK_1\perp BK_1$.

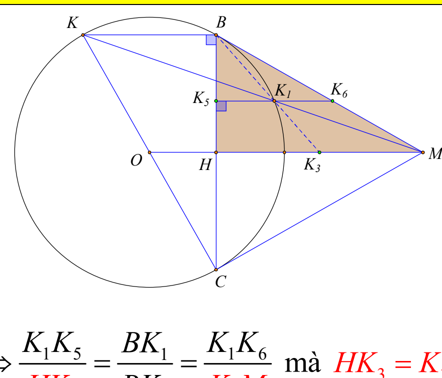
64) Chứng minh $\dfrac{HC^2}{HK_1^2}-\dfrac{KK_1}{MK_1}=1$.



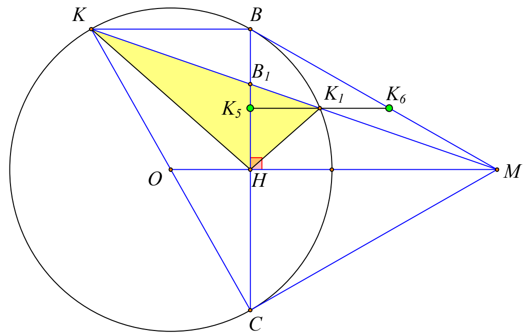
Chỉ ra $\begin{cases} BH^2=BK_1.BK_3\\ HK_1^2=BK_1.K_1K_3\\ BH=CH\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} CH^2=BK_1.BK_3\\ HK_1^2=BK_1.K_1K_3\end{cases}$. Suy ra $\dfrac{HC^2}{HK_1^2}=\dfrac{BK_3}{K_1K_3}=\dfrac{BK_1+K_1K_3}{K_1K_3}=\dfrac{BK_1}{K_1K_3}+1$.

+ Ta có: $BK//OM\Rightarrow\dfrac{KK_1}{MK_1}=\dfrac{BK_1}{K_1K_3}$ suy ra $\dfrac{HC^2}{HK_1^2}-\dfrac{KK_1}{MK_1}=\dfrac{BK_1}{K_1K_3}+1-\dfrac{KK_1}{MK_1}=1$.

65) Từ K_1 kẻ đường thẳng song song KB cắt BC,BM tại K_5,K_6. Chứng minh K_1 là trung điểm K_5K_6.

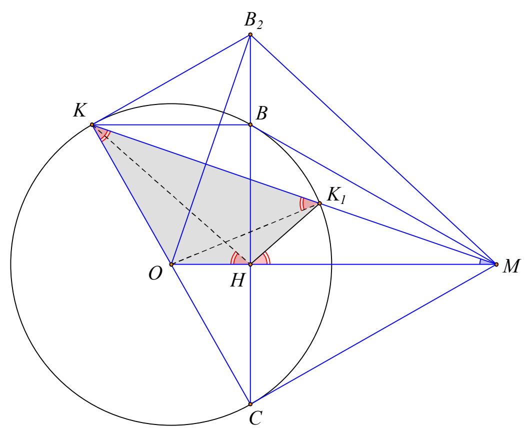


Vì $\begin{cases} KB//OM\\ K_5K_6//KB\end{cases}\Rightarrow K_5K_6//HM\Rightarrow\dfrac{K_1K_5}{HK_3}=\dfrac{BK_1}{BK_3}=\dfrac{K_1K_6}{K_3M}$ mà $HK_3=K_3M\Rightarrow K_1K_5=K_1K_6\Rightarrow K_1$ là trung điểm K_5K_6.



Cách khác: Các em có thể thấy, HB_1 là phân giác trong $\widehat{KHK_1}$ và $HM \perp HB \Rightarrow HM$ là phân giác ngoài góc $\widehat{KHK_1}$ $\Rightarrow \dfrac{K_1B_1}{B_1K} = \dfrac{MK_1}{MK}$ (tính chất phân giác) . Mà $\begin{cases} \dfrac{K_1B_1}{B_1K} = \dfrac{K_1K_5}{KB} \\ \dfrac{MK_1}{MK} = \dfrac{K_1K_6}{KB} \end{cases} \Rightarrow K_1K_5 = K_1K_6$.

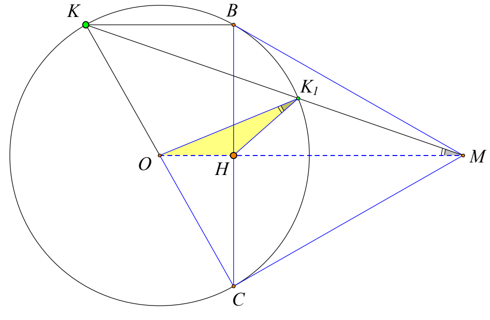
66) Chứng minh HB là phân giác góc $\widehat{KHK_1}$.



Chỉ ra tứ giác OKK_1H là tứ giác nội tiếp nên $\begin{cases} \widehat{OKK_1} = \widehat{K_1HM} \\ \widehat{OHK} = \widehat{OK_1K} \end{cases}$ mà $\widehat{OKK_1} = \widehat{OK_1K}$ (do ΔOKK_1 cân)

Nên $\widehat{K_1HM} = \widehat{OHK}$ mà $\begin{cases} \widehat{BHK} + \widehat{OHK} = 90^0 \\ \widehat{BHK_1} + \widehat{K_1HM} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{BHK_1} = \widehat{BHK} \Rightarrow HB$ là phân giác góc $\widehat{KHK_1}$.

67) Chứng minh $OK_1^2 = OH.OM$ từ đó chứng minh OK_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔHMK_1

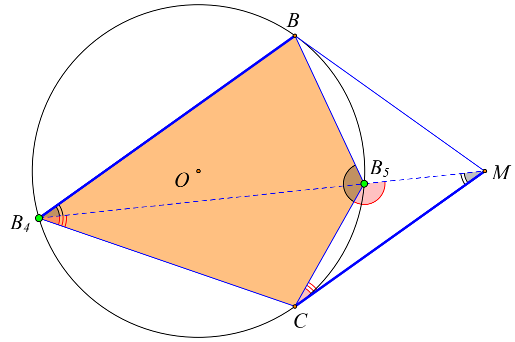


Chỉ ra $\begin{cases} OB^2 = OH.OM \\ OB = OK_1 \end{cases} \Rightarrow OK_1^2 = OH.OM$.

+ Chỉ ra $OK_1^2 = OH.OM \Rightarrow \dfrac{OK_1}{OH} = \dfrac{OM}{OK_1} \Rightarrow \Delta OHK_1 \backsim \Delta OK_1M\,(c-g-c)$.

Từ đó suy ra góc $\widehat{OK_1H} = \widehat{OMK_1} \Rightarrow OK_1$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔHMK_1.

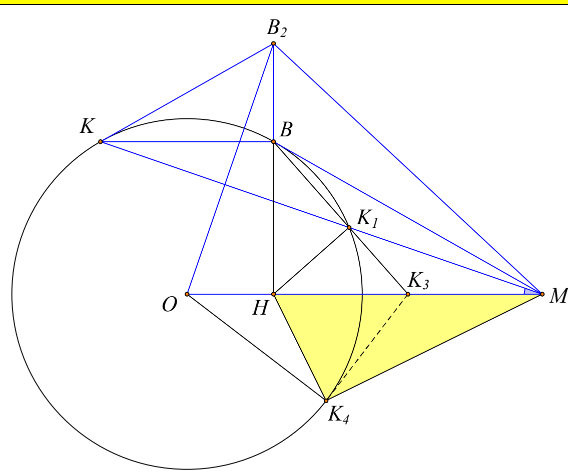
68) Từ B kẻ đường thẳng song song MC cắt (O) tại B_4, nối $MB_4 \cap (O) = B_5$. Chứng minh góc $\widehat{BB_5C} = \widehat{MB_5C}$



Vì tứ giác BB_4CB_5 nội tiếp nên $\widehat{BB_4C} + \widehat{BB_5C} = 180^0$.

Chỉ ra $\begin{cases} \widehat{BB_4B_5} = \widehat{B_4MC}\,(slt) \\ \widehat{MB_4C} = \widehat{B_5CM} \\ \widehat{BB_4B_5} + \widehat{MB_4C} + \widehat{BB_5C} = 180^0 \\ \widehat{B_4MC} + \widehat{B_5CM} + \widehat{CB_5M} = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{BB_5C} = \widehat{CB_5M}$.

69) Từ K_3 kẻ tiếp tuyến K_3K_4 với (O), K_4 là tiếp điểm . Chứng minh ΔHK_4M vuông.



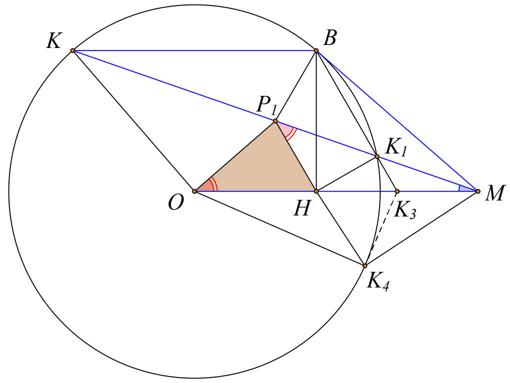
Ta có: ΔOK_4K_3 vuông tại $K_4 \Rightarrow OK_4^2 + K_3K_4^2 = OK_3^2 = (OH + HK_3)^2$

$= OH^2 + HK_3^2 + 2.OH.HK_3 = OH^2 + HK_3^2 + OH.HM = OH^2 + HK_3^2 + BH^2 = HK_3^2 + OB^2$

Mà $OK_4 = OB = R \Rightarrow K_3K_4 = HK_3 \Rightarrow K_3K_4 = HK_3 = K_3M \Rightarrow \Delta HK_4M$ vuông tại K_4 (tính chất trung tuyến của tam giác vuông).

Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

70) Giả sử $KK_1 = 3K_1M$ và P_1 là trung điểm KM. Chứng minh KM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOHP_1.



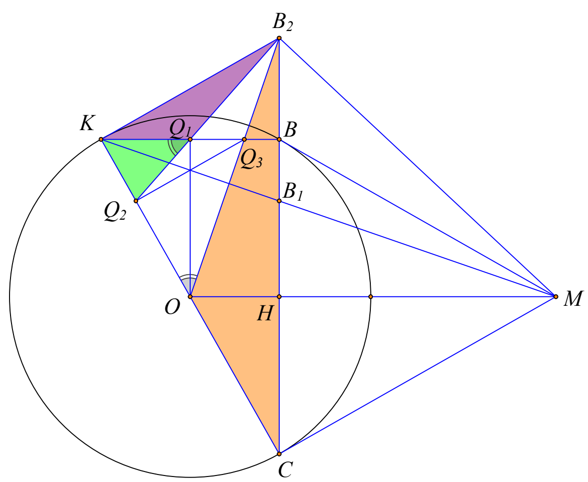
Ta có: $BM^2 = MK_1.MK = MK_1.4MK_1 = 4MK_1^2 \Rightarrow BM = 2MK_1$ mà $MP_1 = 2MK_1 \Rightarrow PM = MP_1$.

Mặt khác: $BM^2 = MH.MO \Rightarrow MP_1^2 = MH.MO$.

Từ đó các em chứng minh $\Delta MHP_1 \backsim \Delta MP_1O\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{MP_1H} = \widehat{MOP_1}$.

Suy ra MK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOHP_1.

71) Gọi trung điểm BK là Q_1, $\begin{cases} B_2Q_1 \cap KO = Q_2 \\ B_2O \cap KB = Q_3 \end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{CB_2}{OC} = \dfrac{KB_2}{KQ_1}$ và $Q_2Q_3 // KB_2$.



Chỉ ra $KB_2.KC = KB.CB_2 \Leftrightarrow KB_2.2OC = 2KQ_1.CB_2 \Leftrightarrow KB_2.OC = KQ_1.CB_2 \Rightarrow \dfrac{CB_2}{OC} = \dfrac{KB_2}{KQ_1}$.

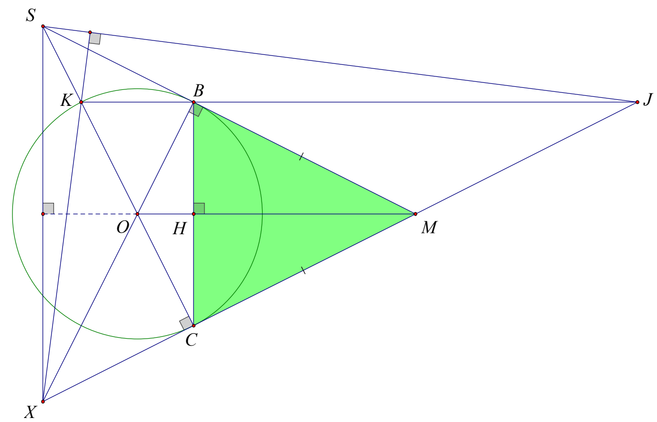
+ Từ $\dfrac{CB_2}{OC} = \dfrac{KB_2}{KQ_1} \Rightarrow \Delta B_2Q_1K \backsim \Delta B_2OC\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{B_2Q_1K} = \widehat{B_2OC} \Rightarrow \widehat{Q_2Q_1K} = \widehat{KOB_2}$.

Nên $\Delta Q_2Q_1K \backsim \Delta Q_3OK\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{Q_1K}{OK} = \dfrac{Q_2K}{Q_3K}$.

Xét ΔOQ_1K và ΔQ_3Q_2K có $\widehat{OKB}$ chung và $\dfrac{Q_1K}{OK}=\dfrac{Q_2K}{Q_3K}$ nên

$\Delta OQ_1K \backsim \Delta Q_3Q_2K\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{Q_3Q_2K}=\widehat{OQ_1K}=90^0$ mà $\Rightarrow B_2K \perp KC \Rightarrow Q_2Q_3\,//\,B_2K$.

72) Cho $\begin{cases} BM \cap KC = S \\ CM \cap KB = J \end{cases}$. Chứng minh M là trung điểm JC.



Vì $MB=MC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{MBC}=\widehat{MCB}$ mà $\begin{cases} \widehat{MCB}+\widehat{MJB}=90^0 \\ \widehat{MBC}+\widehat{MBJ}=90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{MJB}=\widehat{MBJ} \Rightarrow \Delta MBJ$ cân tại M

$\Rightarrow MB=MJ$. Vì $MB=MC=MJ \Rightarrow M$ là trung điểm CJ.

73) $OB \cap CM = X$. Chứng minh $SX\,//\,BC$.

Xét ΔMSX có hai đường cao SC và XP nên O là trực tâm $\Delta MSX \Rightarrow MO \perp SX$.

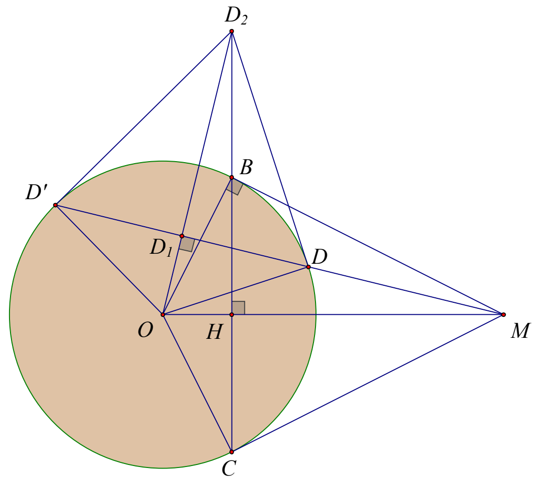
Vì $MO \perp BC \Rightarrow SX\,//\,BC$.

74) Chứng minh $XK \perp SJ$.

Do $BK\,//\,MO \Rightarrow BK \perp SX$.

Xét ΔSJX có SC và KJ là đường cao nên K là trực tâm $\Delta SJX \Rightarrow XK \perp SJ$.

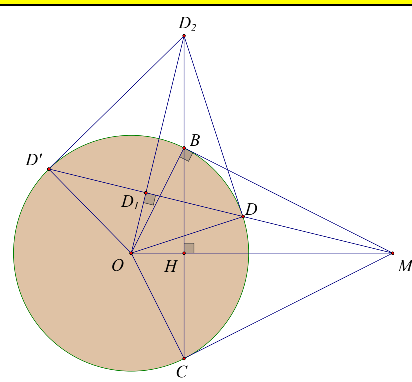
75) Từ M kẻ cát tuyến MDD' (tia MD nằm giữa tia MB và MO), gọi D_1 là trung điểm DD', $OD_1 \cap BC = D_2$. Chứng minh các điểm O, C, M, B, D_1 cùng nằm trên một đường tròn, các điểm M, H, D_1, D_2 cùng nằm trên một đường tròn.



Chỉ ra các điểm O, C, M, B, D_1 đều cách đều trung điểm của OM (dựa vào tính chất trung tuyến tam giác vuông) hoặc các đỉnh C, B, D_1 đều nhìn MO dưới một góc vuông.

Chỉ ra các điểm M, H, D_1, D_2 đều cách đều trung điểm của D_2M (dựa vào tính chất trung tuyến tam giác vuông) hoặc $\widehat{MHD_2} = \widehat{MD_1D_2} = 90^0$.

76) Cho (O) và điểm M cố định. Khi cát tuyến MDD' thay đổi, tìm quỹ tích điểm D_1.



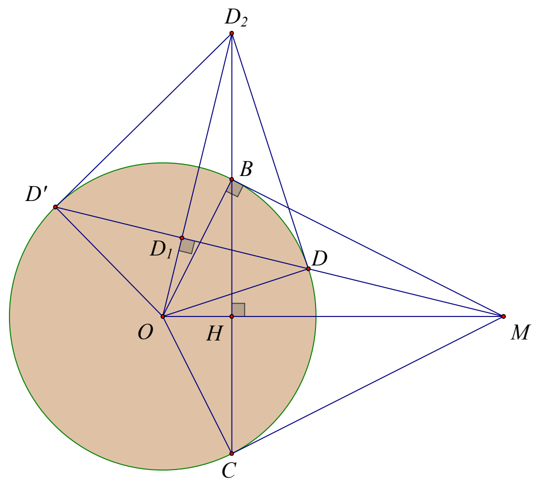
Vì $\widehat{OD_1M} = 90^0$ nên điểm D_1 nằm trên đường tròn đường kính OM. Do đó khi cát tuyến MDD' thay đổi, thì quỹ tích điểm D_1 chạy trên đường tròn đường kính OM.

77) Chứng minh $OH.OM = OD_1.OD_2 = OB^2 = R^2 = OD^2$.

Chỉ ra $\Delta OHD_2 \backsim \Delta OD_1M\,(g-g) \Rightarrow OH.OM = OD_1.OD_2$.

Chỉ ra $OH.OM = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng)

Suy ra $OH.OM = OD_1.OD_2 = OB^2 = OD^2 = R^2$.



78) Chứng minh $CM^2 = MD.MD' = MH.MO$.

Cách 1: Ta có: $MD.MD' = (MD_1 - D_1D)(MD_1 + D_1D') = (MD_1 - D_1D)(MD_1 + D_1D)$

$= D_1M^2 - D_1D^2 = (OM^2 - D_1O^2) - (OD^2 - D_1O^2) = OM^2 - OD^2 = OM^2 - OC^2 = CM^2$ (đpcm)

+ Trong tam giác vuông OCM, đường cao $CH \Rightarrow CM^2 = MH.MO$.

Cách 2:

Chỉ ra $\widehat{MBD} = \widehat{MD'B}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BD}\right) \Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MD'B(g-g) \Rightarrow BM^2 = MD.MD' \Rightarrow CM^2 = MD.MD'$

79) Chứng minh $OH.OM + MD.MD' = MO^2$.

$\begin{cases} OH.OM = OB^2 \\ MD.MD' = MB^2 \end{cases} \Rightarrow OH.OM + MD.MD' = OB^2 + BM^2 = MO^2$.

80) Chứng minh $\Delta MBD \backsim \Delta MD'B$ và góc $\widehat{MBD} = \widehat{MD'B}$.

Cách 1: Ta có: $CM^2 = MD.MD' \Rightarrow BM^2 = MD.MD'$.

Từ đó suy ra $\Delta MBD \backsim \Delta MD'B(c-g-c) \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MD'B}$ (hai góc tương ứng) .

Cách 2: $\widehat{MBD} = \widehat{MD'B}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BD}\right) \Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MD'B(g-g)$.

81) Chứng minh $\Delta MDH \backsim \Delta MOD'$ và góc $\widehat{MHD} = \widehat{MD'O}$.

Do $\begin{cases} MB^2 = MD.MD' \\ MB^2 = MH.MO \end{cases} \Rightarrow MD.MD' = MH.MO$.

Từ đó suy ra $\Delta MDH \backsim \Delta MOD'(c-g-c) \Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MD'O}$ (hai góc tương ứng) .

82) Giả sử độ dài dây cung DD' không đổi. Chứng minh BC luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi.

Do DD' nên khoảng cách từ O đến DD' là OD_1 không đổi.

Mặt khác $OD_1.OD_2 = R^2 \Rightarrow OD_2 = \dfrac{R^2}{OD_1}$ không đổi nên D_2 cố định.

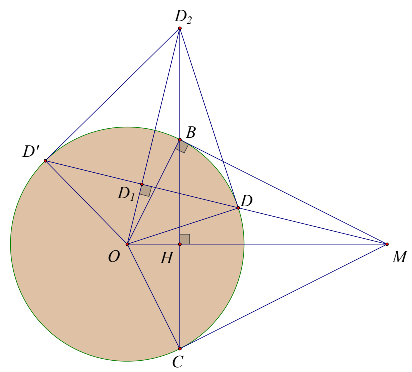
Suy ra BC luôn đi qua điểm cố định là D_2.

83) Chứng minh D_2D' là tiếp tuyến của (O) (hoặc chứng minh $OD' \perp D'D_2$)

Ta có: $OD_1.OD_2 = R^2 = OD'^2 \Rightarrow \dfrac{OD_1}{OD'} = \dfrac{OD'}{OD_2}$.

Xét $\Delta OD_1D'$ và $\Delta OD'D_2$ có $\widehat{D'OD_1}$ chung và $\dfrac{OD_1}{OD'} = \dfrac{OD'}{OD_2}$ nên $\Delta OD_1D' \backsim \Delta OD'D_2\,(c-g-c)$

Suy ra $\widehat{OD'D_2} = \widehat{OD_1D'} = 90^0 \Rightarrow D_2D'$ là tiếp tuyến của (O).



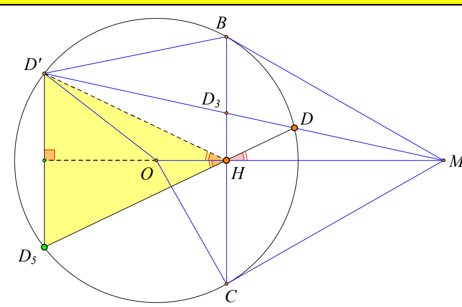
84) Nếu đề bài đổi thành tiếp tuyến tại D và D' cắt nhau tại D_2, chứng minh B,C,D_2 thẳng hàng.

Chỉ ra $\begin{cases} OH.OM = OB^2 = R^2 \\ OD_1.OD_2 = D'O^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow OH.OM = OD_1.OD_2 \Rightarrow \Delta OHD_2 \backsim \Delta OD_1M\,(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{OHD_2} = \widehat{OD_1M} = 90^0 \Rightarrow HD_2 \perp OM$ mà $BC \perp OM \Rightarrow B,C,D_2$ thẳng hàng.

Cách khác: Các em có thể chỉ ra hai tứ giác $OD'D_2D$ và $OD'DH$ nội tiếp nên 5 điểm O,D',D,H,D_2 cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\widehat{OHD_2} = \widehat{ODD_2} = 90^0 \Rightarrow HD_2 \perp OH$ mà $BC \perp OH \Rightarrow B,C,D_2$ thẳng hàng.

85) Từ D' kẻ đường thẳng song song BC cắt (O) tại D_5. Chứng minh D_5,H,D thẳng hàng.



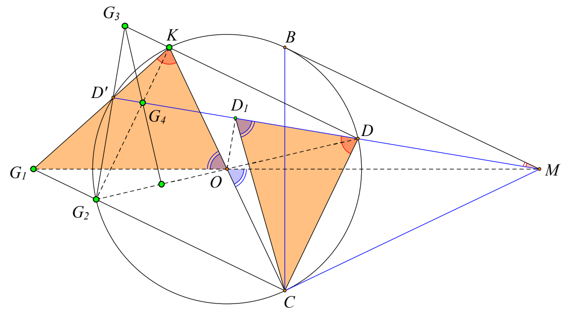
Vì BH là phân giác góc $\widehat{D'HD}$ (đã chứng minh ở các câu khác)

Mà $\widehat{OHB} = \widehat{MHB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OHD'} = \widehat{DHM}$.

Vì $D'D_5 // BC \Rightarrow OH$ là trung trực $D'D_5 \Rightarrow \widehat{OHD'} = \widehat{OHD_5} \Rightarrow \widehat{OHD_5} = \widehat{DHM}$.

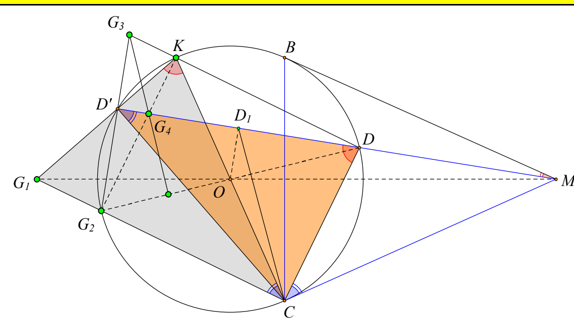
Ta có: $\widehat{OHD_5} + \widehat{OHD} = \widehat{DHM} + \widehat{OHD} = 180^0 \Rightarrow D_5, H, D$ thẳng hàng.

86) Gọi $MO \cap KD' = G_1$, $CG_1 \cap (O) = G_2$, $D'G_2 \cap DK = G_3$, $G_2K \cap D'D = G_4$. Chứng minh $\widehat{CD_1D} = \widehat{KOG_1}$ từ đó cứng minh $\Delta OKG_1 \backsim \Delta D_1DC$ (hoặc các tỉ số từ tam giác đồng dạng)



Chỉ ra $\widehat{CD_1D} = \widehat{MOC} = \widehat{KOG_1}$ và $\widehat{G_1KO} = \widehat{D_1DC}$ (góc nt chắn cung $\widehat{D'C}$).

87) Chứng minh G_2, O, D thẳng hàng và $G_3G_4 \perp G_2D$.

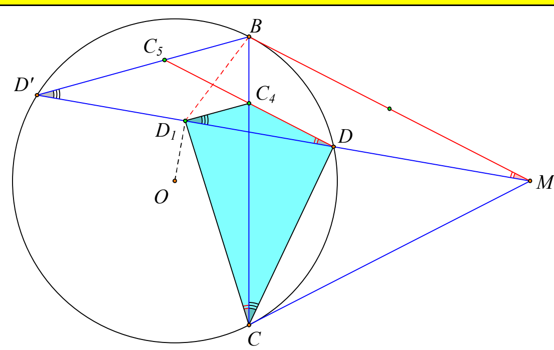


Vì $\Delta OKG_1 \backsim \Delta D_1DC \Rightarrow \dfrac{OK}{KG_1} = \dfrac{DD_1}{DC} \Leftrightarrow \dfrac{2OK}{KG_1} = \dfrac{2DD_1}{DC} \Leftrightarrow \dfrac{KC}{KG_1} = \dfrac{DD'}{DC} \Rightarrow \Delta DCD' \backsim \Delta KG_1C\left(c-g-c\right)$

Suy ra $\widehat{KCG_1} = \widehat{DD'C} = \widehat{DCM} \Rightarrow \widehat{G_2CD} = \widehat{G_1CO} + \widehat{COD} = \widehat{DCM} + \widehat{COD} = 90^0 \Rightarrow G_2D$ là đường kính của đường tròn $O \Rightarrow G_2, D, O$ thẳng hàng và $\widehat{G_2D'D} = \widehat{G_2KD} = 90^0 \Rightarrow G_4$ là trực tâm

$\Delta G_2DG_3 \Rightarrow G_3G_4 \perp G_2D$

88) Từ D kẻ đường thẳng song song BM cắt BC, BD' tại C_4, C_5. Chứng minh tứ giác CDC_4D_1 nội tiếp và C_4 là trung điểm DC_5.



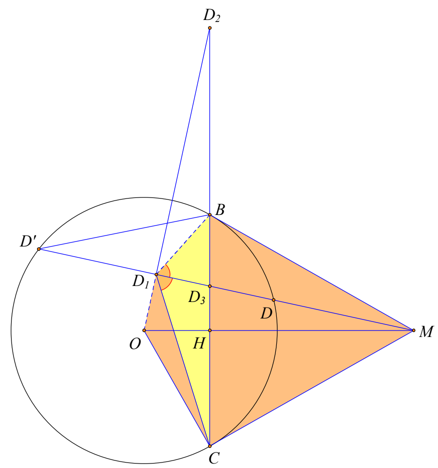
Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

Vì CD_1BM nội tiếp nên $\widehat{D_1CB}=\widehat{D_1MB}=\widehat{D_1DC_4}\left(slt\right)\Rightarrow CDC_4D_1$ là tứ giác nội tiếp.

Vì CDC_4D_1 nội tiếp nên $\widehat{DD_1C_4}=\widehat{DCC_4}$ mà $\widehat{DCC_4}=\widehat{DD'B}\Rightarrow \widehat{DD'B}=\widehat{DD_1C_4}\Rightarrow D'B//D_1C_4$.

Mà D_1 là trung điểm $D'D\Rightarrow C_4$ là trung điểm DC_5.

89) Gọi $MD'\cap BC=D_3$. Chứng minh MD_1 và D_1D_2 là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{CD_1B}$ và $BD_2.CD_3=BD_3.CD_2$.



+ Chỉ ra tứ giác OD_1BM là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MD_1B}=\widehat{MOB}$ (góc nt cùng chắn cung BM)

+ Chỉ ra tứ giác OD_1MC nội tiếp nên $\widehat{MD_1C}=\widehat{MOC}$ (góc nt cùng chắn cung MC).

Mà $\widehat{MOC}=\widehat{MOB}\Rightarrow \widehat{MD_1B}=\widehat{MD_1C}\Rightarrow MD_1$ là phân giác góc $\widehat{CD_1B}$.

Hoặc các em chỉ ra : 5 điểm M,C,O,D_1,B cùng thuộc một đường tròn,

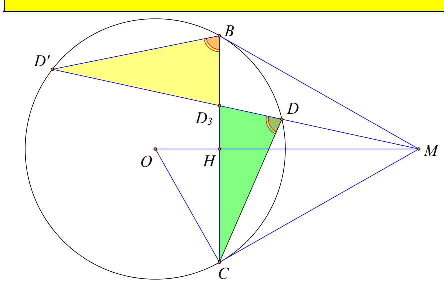
mà $MB=MC\Rightarrow \widehat{MD_1B}=\widehat{MD_1C}$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow MD_1$ là phân giác góc $\widehat{CD_1B}$.

+ Vì $D_1D_2\perp D_1M\Rightarrow D_1D_2$ là phân giác ngoài của góc $\widehat{CD_1B}$.

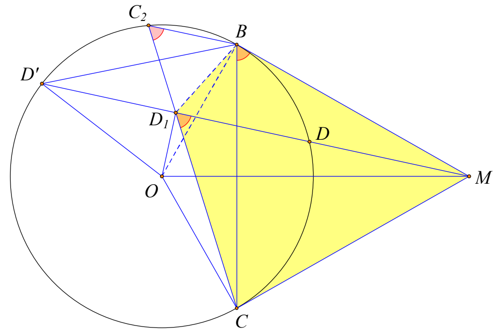
Áp dụng tính chất phân giác ta có: $\dfrac{BD_3}{CD_3}=\dfrac{BD_2}{CD_2}\Leftrightarrow BD_2.CD_3=BD_3.CD_2$

90) Chứng minh $D'D_3.D_3D=D_3B.D_3C$



Chỉ ra $\Delta D_3BD'\backsim\Delta D_3DC\left(g-g\right)\Rightarrow D'D_3.D_3D=D_3B.D_3C$.

91) $D_1C \cap (O) = C_2$. Chứng minh $C_2B // D'D$.

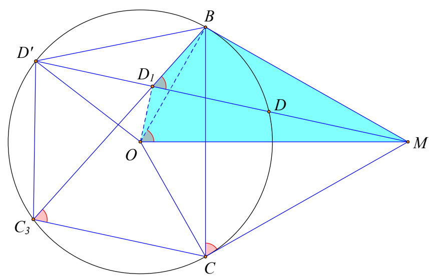


Chỉ ra tứ giác $BMCD_1$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CD_1M} = \widehat{CBM}$ (góc nt cùng chắn cung CM)

Mà $\widehat{CC_2B} = \widehat{CBM}$ (góc nt cùng chắn cung BC)

Suy ra $\widehat{CD_1M} = \widehat{CC_2B}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $C_2B // D'D$.

92) Kéo dài $BD_1 \cap (O) = C_3$. Chứng minh $CC_3 // D'D$.



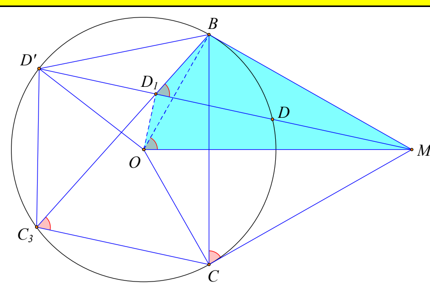
Chỉ ra tứ giác OD_1BM là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MD_1B} = \widehat{MOB}$ (góc nt cùng chắn cung BM)

Mặt khác $\widehat{CC_2B} = \frac{1}{2}.\widehat{COB} = \widehat{MOB}$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm)

Suy ra $\widehat{CC_2B} = \widehat{MD_1B}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $CC_2 // D'D$.

Các em cũng có thể chỉ ra $\widehat{CC_2B} = \widehat{MCB}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC} \right) = \widehat{MD_1B}$ (góc nt chắn cung BM)

93) Đề bài có thể thay đổi, kẻ dây $CC_3 // D'D$. Chứng minh góc $\widehat{C_3BO} = \widehat{D'MO}$ hoặc chứng minh C_3, D_1, B thẳng hàng, hoặc $C_3B \cap D'D = D_1$ chứng minh D_1 là trung điểm $D'D$.



Gọi $BC_4 \cap MD' = D_4$. Vì $CC_3 // D'D \Rightarrow \widehat{C_3D_4D'} = \widehat{BC_3C} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}$

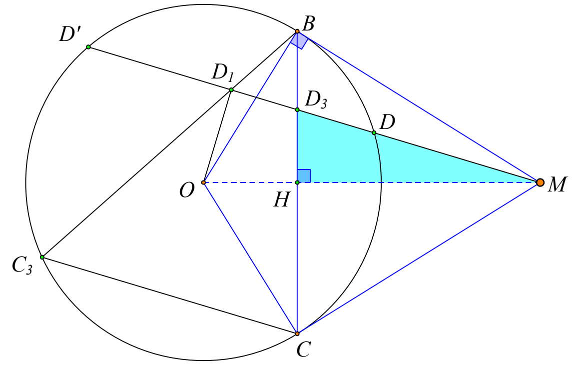
$\Rightarrow \widehat{CD_4O} = 90^0 - \widehat{C_3D_4D'} = 90^0 - sd\,\widehat{BC}$

Mà $\widehat{BMO} = \dfrac{1}{2}\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BOC}\right) = 90^0 - sd\,\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{CD_4O} \Rightarrow OMBD_4$ nội tiếp

nên $\widehat{OD_4M} = \widehat{OBM} = 90^0 \Rightarrow OD_4 \perp D'D \Rightarrow D_4 \equiv D_1$.

Vì $OMBD_1$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{C_3BO} = \widehat{D'MO}$.

94) Gọi $MD' \cap BC = D_3$. Chứng minh $MD.MD' = MD_3.MD_1$ và $\dfrac{2}{MD_3} = \dfrac{1}{MD} + \dfrac{1}{MD'}$



Chỉ ra $\begin{cases} MD.MD' = BM^2 \\ MD_3.MD_1 = MH.MO = MB^2 \end{cases} \Rightarrow MD.MD' = MD_3.MD_1$.

+ Ta có: $MD_3.MD_1 = MD.MD' \Leftrightarrow MD_3.MD_1 + MD_3.MD_1 = 2MD.MD'$

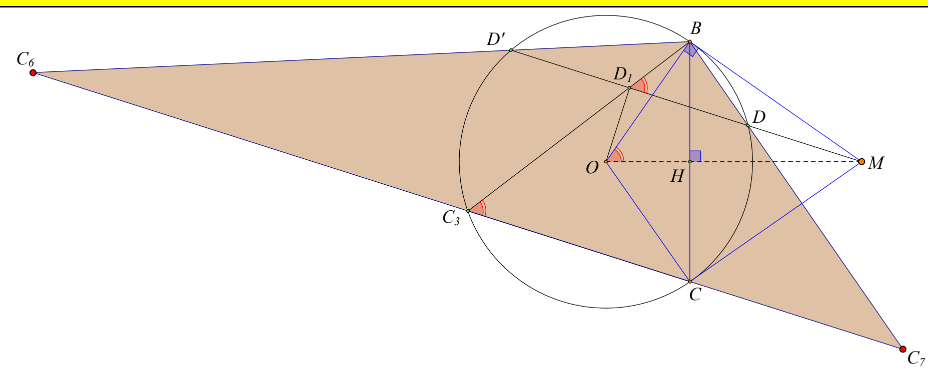
$\Leftrightarrow MD_3.(MD + DD_1) + MD_3.(MD' - DD_1) = 2MD.MD'$

$\Leftrightarrow MD_3.MD + MD_3.DD_1 + MD_3.MD' - MD_3.DD_1 = 2MD.MD'$

$\Leftrightarrow MD_3.MD + MD_3.MD' = 2MD.MD'$

$\Leftrightarrow MD_3\left(MD + MD'\right) = 2MD.MD' \Leftrightarrow \dfrac{2}{MD_3} = \dfrac{MD + MD'}{MD.MD'} \Leftrightarrow \dfrac{2}{MD_3} = \dfrac{1}{MD} + \dfrac{1}{MD'}$

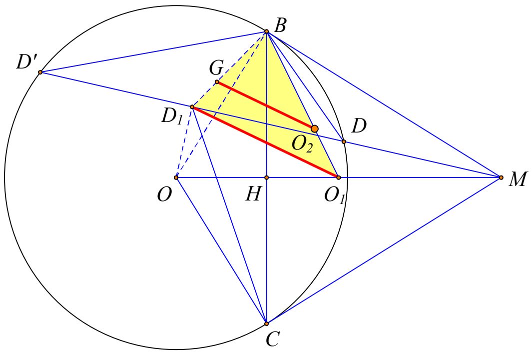
95) Kéo dài BD' và BD cắt C_3C tại C_6, C_7. Chứng minh rằng C_3 là trung điểm C_6C_7.

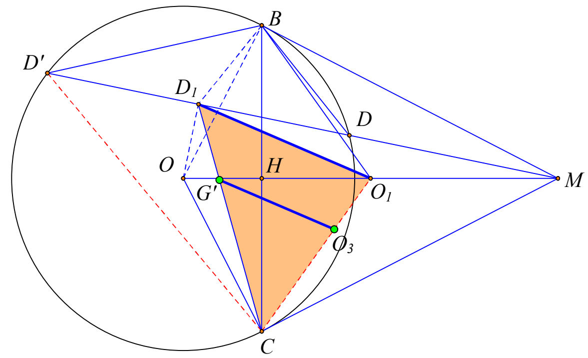


Chỉ ra $D'D // C_6C_7$ (đã chứng minh trên)

Áp dụng định lí Talet: $\frac{D'D_1}{C_3C_6}=\frac{BD_1}{BC_3}=\frac{DD_1}{C_3C_7}$, mà $DD_1=D'D_1$ nên $C_3C_6=C_3C_7$.

96) Cho (O), M và B cố định. Chứng minh trọng tâm $\Delta BD'D$ và $\Delta CD'D$ luôn chạy trên một đường tròn cố định (hoặc chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta BD'D$ và $\Delta CD'D$ có cùng bán kính).





Gọi O_1 là trung điểm $OM \Rightarrow O_1$ cố định và $O_1D_1=\frac{1}{2}OM$ không đổi.

+ Trên BO_1 lấy điểm O_2 sao cho $BO_2=2O_1O_2 \Rightarrow O_2$ cố định (do B,O_1 cố định)

Gọi G là trọng tâm $\Delta BD'D$. Ta có: $\frac{BG}{GD_1}=\frac{BO_2}{O_1O_2}=2 \Rightarrow GO_2//D_1O_1$ và $GO_2=\frac{2}{3}D_1O_1=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}OM=\frac{OM}{3}$ không đổi.

Vì O_2 cố định và $GO_2=\frac{OM}{3}$ không đổi nên $G\in\left(O_2;\frac{OM}{3}\right)$.

Vậy trọng tâm $\Delta BD'D$ luôn chạy trên một đường tròn $\left(O_2;\frac{OM}{3}\right)$ cố định.

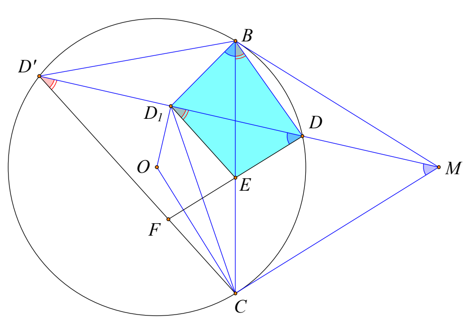
+ Trên CO_1 lấy điểm O_3 sao cho $CO_3=2O_1O_3 \Rightarrow O_3$ cố định (do C,O_1 cố định)

Gọi G' là trọng tâm $\Delta CD'D \Rightarrow \frac{CG'}{CD_1}=\frac{CO_3}{CO_1}=\frac{2}{3} \Rightarrow G'O_3//D_1O_1$ và $G'O_3=\frac{2}{3}D_1O_1=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}OM=\frac{1}{3}OM$.

Do đó $G'\in\left(O_3;\frac{OM}{3}\right)$ cố định.

97) Từ D kẻ đường thẳng song song CM cắt BC, CD' tại E, F. Chứng minh $BDED_1$ là tứ giác nội tiếp và E là trung điểm FD.

(Bài có thể thay đổi qua D_1 kẻ đường thẳng song song CD' cắt BC tại E)



Chỉ ra tứ giác D_1BMC nội tiếp nên góc $\widehat{D_1BC}=\widehat{D_1MC}$ (góc nt chắn cung D_1C)

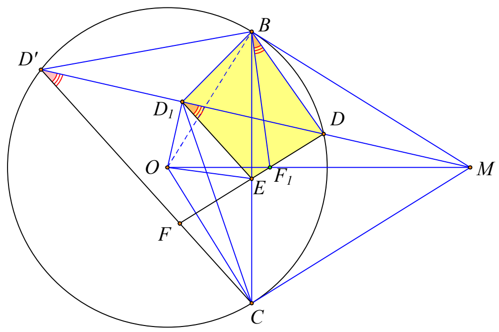
Mà $\widehat{D_1MC}=\widehat{D_1DE}$ (đồng vị) nên $\widehat{D_1BC}=\widehat{D_1DE}\Rightarrow\widehat{D_1BE}=\widehat{D_1DE}$. Từ đó suy ra $BDED_1$ là tứ giác nội tiếp.

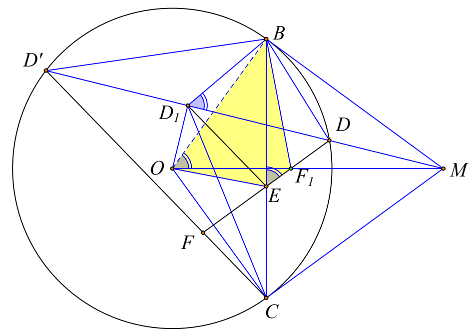
+ Vì $BDED_1$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ED_1D}=\widehat{EBD}$ (góc nt chắn cung ED)

Mà $\widehat{EBD}=\widehat{CD'D}$ (góc nt chắn cung DC).

Suy ra $\widehat{ED_1D}=\widehat{CD'D}$, suy ra $ED_1//CD'$ mà D_1 là trung điểm $D'D\Rightarrow E$ là trung điểm DF (tính chất đường trung bình) .

98) ED cắt OM tại F_1. Chứng minh ED_1BD và OEF_1B là tứ giác nội tiếp.





+ Chỉ ra $\widehat{ED_1D}=\widehat{CD'D}(slt)=\widehat{CBD}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{CD}\right)\Rightarrow\widehat{ED_1D}=\widehat{EBD}$.

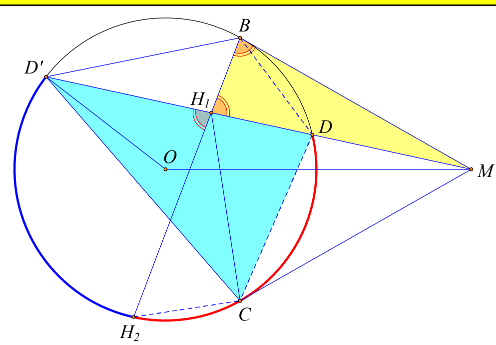
Từ đó suy ra ED_1BD là tứ giác nội tiếp.

+ Vì ED_1BD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EDB}=\widehat{DD_1B}$ (góc nt chắn cung BD)

Mà tứ giác $OMBD_1$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{DD_1B}=\widehat{BOM}$ (góc nt chắn cung BM)

Suy ra $\widehat{F_1EB}=\widehat{F_1OB}\Rightarrow OEF_1B$ là tứ giác nội tiếp.

99) Phân giác góc $\widehat{DBD'}$ cắt MD' tại H_1. Chứng minh rằng : $\begin{cases}\dfrac{BD}{D'B}=\dfrac{CD}{D'C}\\ BM=MH_1=CM\end{cases}$ và CH_1 là phân giác góc $\widehat{D'CD}$.



+ Vì $\Delta MDB \backsim \Delta MBD' \Rightarrow \frac{BD}{D'B} = \frac{MB}{MD'}$.

+ Tương tự: $\Delta MDC \backsim \Delta MCD' \Rightarrow \frac{DC}{D'C} = \frac{MC}{MD'}$ mà $MC = MB \Rightarrow \frac{BD}{D'B} = \frac{CD}{D'C}$.

+ Ta có: $\frac{BD}{D'B} = \frac{H_1D}{H_1D'}$ (tính chất phân giác) mà $\frac{BD}{D'B} = \frac{CD}{D'C}$ nên $\frac{CD}{D'C} = \frac{H_1D}{H_1D'}$

Suy ra CH_1 là phân giác góc $\widehat{D'CD}$.

+ Gọi $BH_1 \cap (O) = H_2$. Vì $\widehat{H_2BD'} = \widehat{H_2BD} \Rightarrow \overset{\frown}{D'H_2} = \overset{\frown}{DH_2}$.

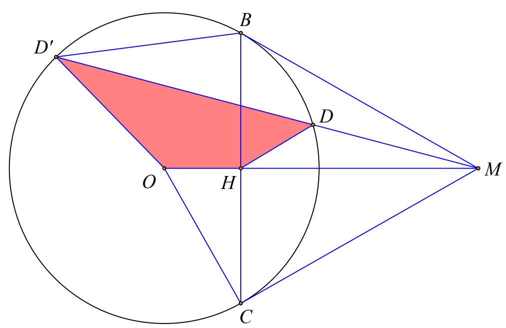
Mà $\widehat{H_1BM} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BH_2} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{BD} + sd\,\overset{\frown}{DH_2}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{BD} + sd\,\overset{\frown}{D'H_2}\right) = \widehat{BH_1M}$.

Do đó ΔBH_1M cân tại $M \Rightarrow MB = MH_1$ mà $MB = MC$ nên $BM = MH_1 = CM$

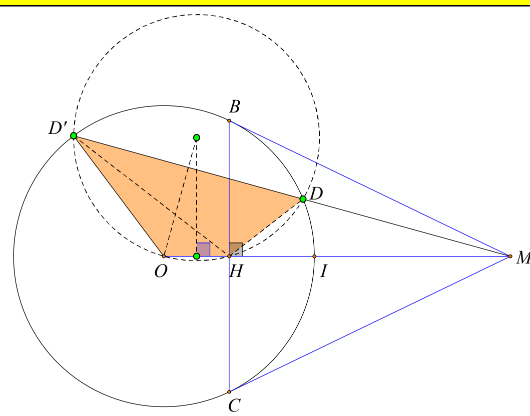
100) Chứng minh tứ giác $D'OHD$ nội tiếp.

Vì $\Delta MD'O \backsim \Delta MHD \Rightarrow \widehat{MD'O} = \widehat{MHD} \Rightarrow \widehat{OD'D} + \widehat{OHD} = \widehat{DHM} + \widehat{OHD} = 180^0$.

Xét tứ giác $D'OHD$ có $\widehat{DHM} + \widehat{OHD} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên $D'OHD$ là tứ giác nội tiếp.



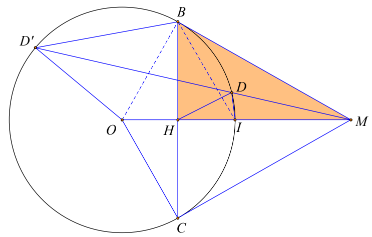
101) Đề bài có thể thay đổi thành: Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta HD'D$ hoặc $\Delta D'OD$ luôn đi qua một điểm cố định, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta HD'D$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định….



+ Các em sẽ thấy, tứ giác $OHDD'$ là tứ giác nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $HD'D$ luôn đi qua điểm cố định O và đường tròn ngoại tiếp tam giác $OD'D$ luôn đi qua điểm cố định H.

+ Vì $OHDD'$ là tứ giác nội tiếp nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta HD'D$ luôn nằm trên đường trung trực đoạn OH.

102) Chứng minh DI là phân giác góc HDM (với $I = MO \cap (O)$)



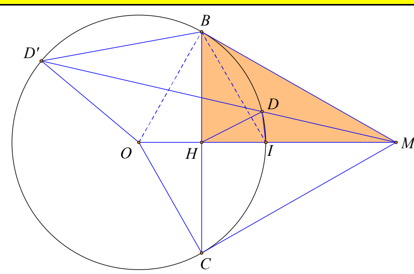
Vì $\Delta MD'O \backsim \Delta MHD \Rightarrow \dfrac{MD}{HD} = \dfrac{MO}{OD'} = \dfrac{MO}{OB}$ (1).

Mà BI là phân giác góc $\widehat{HBM} \Rightarrow \dfrac{MI}{IH} = \dfrac{MB}{BH}$ (2)

Chỉ ra $\Delta MHB \backsim \Delta MBO(g-g) \Rightarrow \dfrac{MO}{BO} = \dfrac{MB}{HB} = \dfrac{MI}{HI}$ (3).

Từ $(1)(2)(3) \Rightarrow \dfrac{MD}{HD} = \dfrac{MI}{HI} \Rightarrow DI$ là phân giác góc $\widehat{HDM}$.

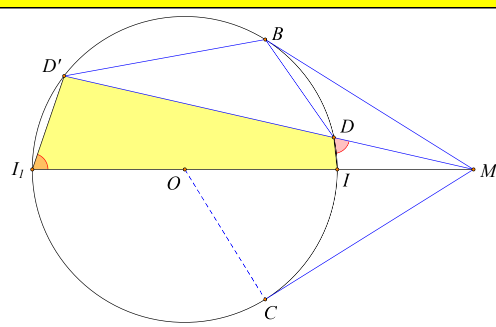
103) Chứng minh $\widehat{MOD'} = 2\widehat{MDI}$



Vì tứ giác $HODD'$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HOD'} = \widehat{HDM}$.

Mà DI là phân giác góc $\widehat{HDM} \Rightarrow \widehat{HOD'} = 2.\widehat{MDI}$.

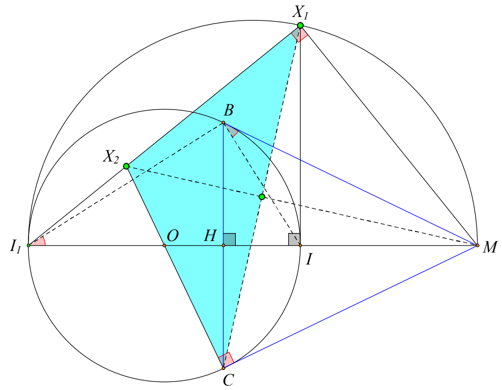
104) Kéo dài OM cắt (O) tại điểm thứ hai là I_1. Chứng minh $MD.MD' = MI.MI_1$



Vì $IDD'I_1$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{D'I_1I} = \widehat{IDM}$.

Từ đó suy ra $\Delta MID \backsim \Delta MD'I_1(g-g) \Rightarrow MD.MD' = MI.MI_1$.

105) Tiếp tuyến tại I cắt nửa đường tròn đường kính MI_1 tại X_1, $CO \cap X_1I_1 = X_2$. Chứng minh $MX_2 \perp CX_1$



Chỉ ra $\Delta MBI \backsim \Delta MI_1B\left(g-g\right) \Rightarrow BM^2 = MI.MI_1$.

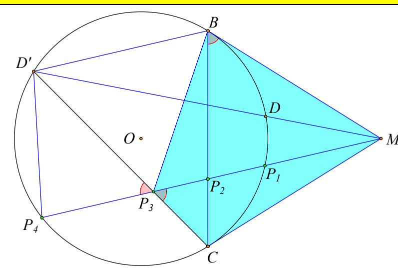
Mà $MX_1^2 = MI.MI_1$ (hệ thức lượng) suy ra $MX_1 = BM = MC \Rightarrow \Delta MX_1C$ cân.

Do đó M nằm trên đường trung trực CX_1.

ΔMX_1C cân$\Rightarrow \widehat{MX_1C} = \widehat{MCX_1}$ mà $\begin{cases} \widehat{MX_1C} + \widehat{CX_1X_2} = 90^0 \\ \widehat{MCX_1} + \widehat{X_1CX_2} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{CX_1X_2} = \widehat{X_1CX_2} \Rightarrow \Delta X_2X_1C$ cân nên X_2 nằm trên đường trung trực CX_1.

Vậy MX_2 là trung trực CX_1 nên $MX_2 \perp CX_1$.

106) Từ M kẻ cát tuyến MP_1P_4 song song BD', cát tuyến này cắt CB, CD' tại P_2, P_3. Chứng minh tứ giác MCP_3B là tứ giác nội tiếp và P_3 là trung điểm P_4P_1 (hoặc $OP_3 \perp P_1P_4$)

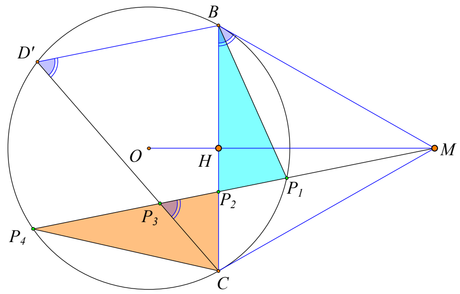


Chỉ ra $\widehat{MBC} = \widehat{MD'C}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BC}\right) = \widehat{MP_3C}$ (đồng vị) nên $\widehat{MBC} = \widehat{MP_3C}$.

Từ đó suy ra MCP_3B là tứ giác nội tiếp.

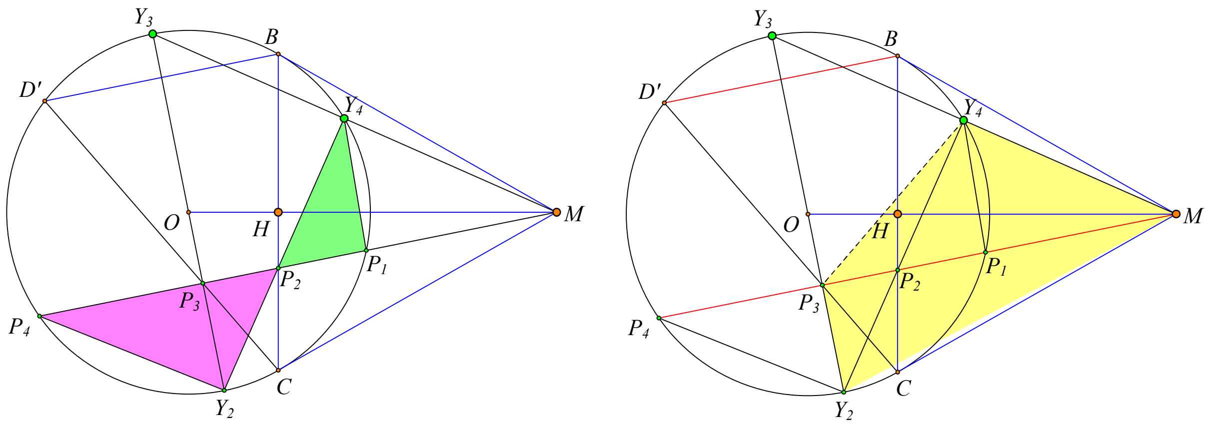
+ Do M, C, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính $OM \Rightarrow$ 5 điểm M, C, O, B, P_3 cùng thuộc đường tròn đường kính $OM \Rightarrow \widehat{OP_3M} = 90^0 \Rightarrow OP_3 \perp P_1P_4 \Rightarrow P_3$ là trung điểm P_4P_1.

107) Chứng minh $P_2P_3.P_2M = P_2P_1.P_2P_4$



Chỉ ra $\begin{cases} P_2P_3.P_2M = P_2C_1.P_2B \\ P_2P_1.P_2P_4 = P_2C_1.P_2B \end{cases} \Rightarrow P_2P_3.P_2M = P_2P_1.P_2P_4$

108) Đường thẳng OP_3 cắt (O) tại Y_2, Y_3 (Y_3 nằm trên cung nhỏ $D'B$). $Y_2P_2 \cap (O) = Y_4$. Chứng minh Y_3, Y_4, M thẳng hàng hoặc chứng minh tứ giác $Y_2P_3Y_4M$ nội tiếp.



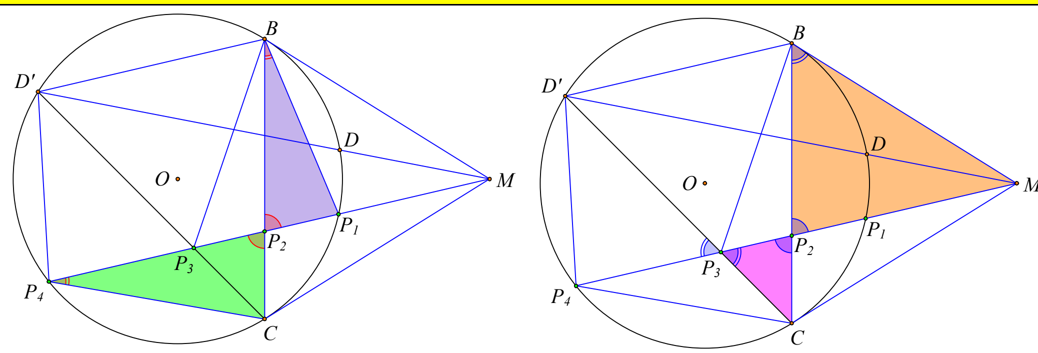
Chỉ ra $P_2P_1.P_2P_4 = P_2Y_4.P_2Y_2$ mà $P_2P_3.P_2M = P_2P_1.P_2P_4$ nên $P_2P_3.P_2M = P_2Y_4.P_2Y_2$

Từ đó chứng minh $\Delta P_2P_3Y_2 \backsim \Delta P_2Y_4M\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{Y_2Y_4M} = \widehat{Y_2P_3M} = 90^0 \Rightarrow Y_2Y_4 \perp Y_4M$.

Vì Y_2Y_3 là đường kính $(O) \Rightarrow Y_2Y_4 \perp Y_3Y_4$.

Từ đó suy ra Y_3, Y_4, M thẳng hàng.

109) Chứng minh $P_3P_2.P_2M = P_1P_2.P_2P_4$

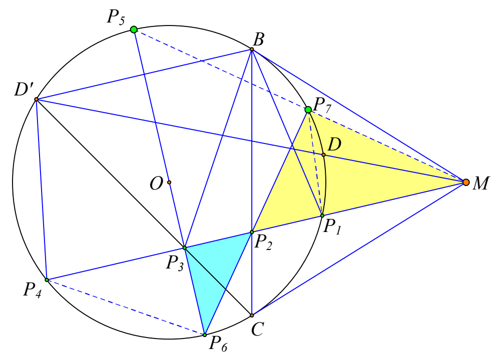


Chỉ ra $\Delta P_2P_4C \backsim \Delta P_2BP_1\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{P_2P_4}{P_2B} = \dfrac{P_2C}{P_2P_1} \Leftrightarrow P_2P_4.P_2P_1 = P_2C.P_2B$.

Chỉ ra $\Delta P_2CP_3 \backsim \Delta P_2MB(g-g) \Rightarrow \frac{P_2C}{P_2M} = \frac{P_2P_3}{P_2B} \Leftrightarrow P_2C.P_2B = P_2P_3.P_2M$.

Từ đó suy ra $P_3P_2.P_2M = P_1P_2.P_2P_4$.

110) Kéo dài OP_3 cắt đường tròn (O) tại P_5, P_6 (P_5 thuộc cung nhỏ BD'). Nối P_6P_2 cắt đường tròn (O) tại P_7. Chứng minh M, P_5, P_7 thẳng hàng.



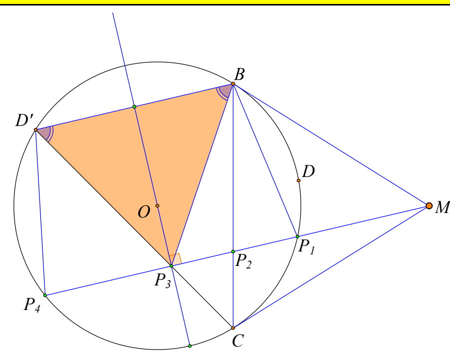
Vì P_5P_6 là đường kính $(O) \Rightarrow P_6P_7 \perp P_5P_7$ (1).

Ta có: $P_3P_2.P_2M = P_1P_2.P_2P_4 = P_2P_7.P_2P_6 \Rightarrow P_3P_2.P_2M = P_2P_7.P_2P_6 \Rightarrow \frac{P_3P_2}{P_2P_6} = \frac{P_2P_7}{P_2M}$.

Từ đó suy ra $\Delta P_2P_7M \backsim \Delta P_2P_3P_6(c-g-c) \Rightarrow \widehat{P_2P_7M} = \widehat{P_2P_3P_6} = 90^0 \Rightarrow P_2P_7 \perp MP_7$ (2).

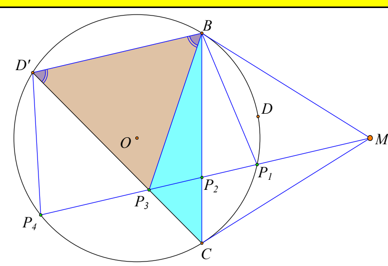
Từ $(1)(2) \Rightarrow M, P_5, P_7$ thẳng hàng.

111) Chứng minh $\Delta D'BP_3$ là tam giác cân.



Vì $\begin{cases} OP_3 \perp P_1P_4 \\ P_1P_4 // BD' \end{cases} \Rightarrow OP_3 \perp BD' \Rightarrow OP_3$ là trung trực BD' nên $BP_3 = P_3D' \Rightarrow \Delta BP_3D'$ cân tại P_3.

112) Cho B, C và (O) cố định. Tìm vị trí cát tuyến MDD' để diện tích ΔP_3BC lớn nhất.



Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

Ta có: $\widehat{BP_3C} = \widehat{CD'B} + \widehat{P_3BD'} = 2.\widehat{CD'B}$ (tính chất góc trong – góc ngoài tam giác)

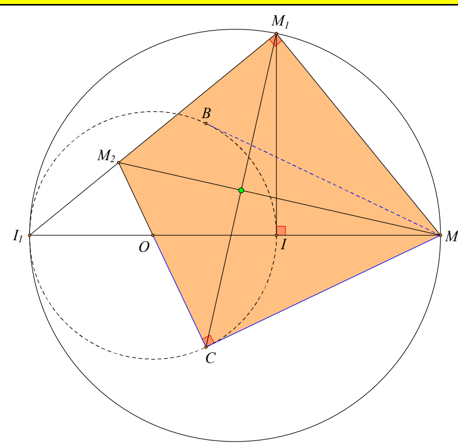
Mà $B, C, (O)$ cố định nên góc $\widehat{CD'B}$ không đổi, suy ra $\widehat{BP_3C} = 2.\widehat{CD'B}$ không đổi.

Mà $S_{\Delta P_3BC} = \dfrac{1}{2}.P_3C.P_3B.\sin\widehat{BP_3C} \Rightarrow S_{\Delta P_3BC}$ lớn nhất khi $P_3C.P_3B$ lớn nhất.

Ta có: $P_3C.P_3B = P_3C.P_3D' \le \left(\dfrac{P_3C + P_3D'}{2}\right) = \dfrac{D'C^2}{4}$ mà $CD' \le 2R \Rightarrow P_3C.P_3B \le \dfrac{D'C^2}{4} \le \dfrac{4R^2}{4} = R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi CD' là đường kính của (O).

113) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại I cắt đường tròn đường kính MI_1 tại M_1, $M_1I_1 \cap OC = M_2$. Chứng minh tứ giác MCM_2M_1 là tứ giác nội tiếp, $MM_1 = MC$; $CM_1 \perp MM_2$.

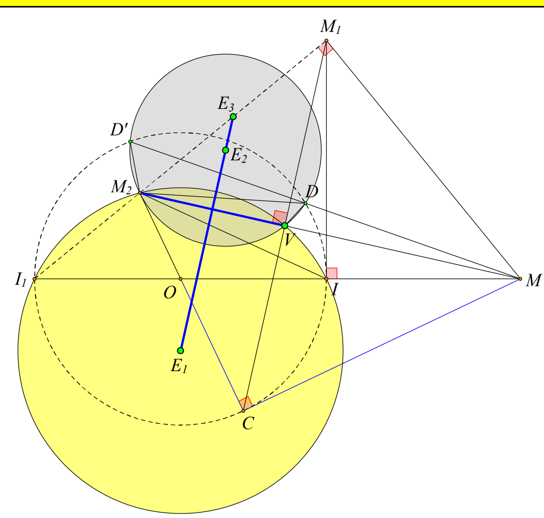


Vì MI_1 là đường kính nên $\widehat{M_2M_1M} = 90^0 = \widehat{M_2CM} \Rightarrow MCM_2M_1$ là tứ giác nội tiếp.

+ Chỉ ra $MM_1^2 = MI.MI_1 = MC^2 \Rightarrow MM_1 = MC$.

+ Vì tứ giác MCM_2M_1 nội tiếp đường tròn đường kính MM_2 mà $MM_1 = MC \Rightarrow MM_2$ là đường trung trực $CM_1 \Rightarrow CM_1 \perp MM_2$.

114) Gọi E_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIMI_1, E_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta M_2D'D$, E_3 là trung điểm của M_1M_2. Chứng minh E_1, E_2, E_3 thẳng hàng.



Giáo viên: Nguyễn Chí Thành

+ Gọi $MM_2 \cap CM_1 = V$. Ta có: $MV.MM_2 = MM_1^2 = MC^2 = MI.MI_1 = MD.MD'$.

Từ đẳng thức $MV.MM_2 = MD.MD' \Rightarrow D'DVM_2$ nội tiếp nên $V \in \left(E_2\right)$.

Từ đẳng thức $MV.MM_2 = MI.MI_1 \Rightarrow IVM_2I_1$ là tứ giác nội tiếp nên $V \in \left(E_1\right)$.

Suy ra $\left(E_1\right),\left(E_2\right)$ cắt nhau tại hai điểm $M_2, V \Rightarrow E_1E_2$ là trung trực VM_2.

Vì $E_1E_2 // CM_1$ và E_1E_2 đi qua trung điểm VM_2 nên E_1E_2 đi qua trung điểm M_1M_2.

Vậy E_1, E_2, E_3 thẳng hàng.