PHẠM NGUYÊN
(Giáo viên chuyên luyện thi tại pne.edu.vn)

CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY ĐẠI SỐ

Tập 2

SOẠN THEO CẤU TRÚC CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

- ✓ Luyện thi vào lớp 10, chuyên
- ✓ Dành cho học sinh lớp 9
- ✓ Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên

Lưu hành nội bộ

PHẠM NGUYÊN

CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY

PHẠM NGUYÊN

(Giáo viên chuyên luyện thi tại pne.edu.vn)

CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY

Đại số

Tập 2

SOẠN THEO CẤU TRÚC CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

- Luyện thi vào lớp 10, chuyên
- Dành cho học sinh lớp 9
- Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên

LỜI NÓI ĐẦU

“**CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY**” **ĐẠI SỐ – TẬP 2** là cuốn sách tiếp theo trong Bộ “CHINH PHỤC TOÁN 9” được viết một cách đầy đủ, chi tiết, dễ hiểu và đặc biệt phụ vụ tốt cho nhiều nhu cầu học tập, tham khảo, giảng dạy, hoặc làm tư liệu nghiên cứu về Toán 9 cho học sinh, giáo viên,…

A. Tóm tắt kiến thức cần học

B. Phương pháp giải các dạng toán:

a. Phần này được trình bày theo các vấn đề:

- Mỗi vấn đề được khái quát bằng sơ đồ tư duy.

- Mỗi dạng toán đều có các phương pháp giải. Ví dụ minh hoạ và các BÀI TẬP TỰ LUYỆN đều có hướng dẫn giải chi tiết nhằm giúp người đọc tự triểm tra lại kết quả của mình.

- Các ĐỀ KIỂM TRA cuối mỗi chương sẽ giúp các em kiểm tra lại kiến thức đã học, tìm hiểu xem phần nào chưa tốt để có thể điều chỉnh các học.

- Các BÀI TẬP TỰ LUYỆN được chọn lọc và tổng hợp từ Sách giáo khoa, các đề thi vào 10 của các tỉnh trên cả nước, các đề thi học sinh giỏi,…

b. Đây là Bộ sách đang được đông đảo các em học sinh và giáo viên đón nhận, đặt mua. Nên tôi càng quyết tâm hơn trong việc tiến hành xuất bản Tập 3 CHINH PHỤC TOÁN 9 – HÌNH HỌC trong năm 2017. Rất mong tiếp tục nhận được sự quan tâm, ủng hộ của quý vị và các em học sinh.

Chúng tôi hy vọng cuốn sách sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp người đọc dễ dàng tiếp cận, nắm vững và trau dồi kiến thức môn Toán 9.

Dù đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song chắc khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi xin đón nhận những ý kiến phản hồi và chân thành cảm ơn mọi sự góp ý của quý độc giả để lần tái bản sau sách được hoàn thiện hơn.

Chương 3: HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

a. Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng : $ax+by=c$ (1) trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$), x và y là các ẩn.

+ Cặp $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 = c$ được gọi là **một nghiệm** của phương trình $ax+by=c$ (1).

+ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm $(x_0;y_0)$ của (1) được biểu diễn bởi một điểm $(x_0;y_0)$.

b. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

+ Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$ (1) ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$), luôn có **vô số nghiệm**. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax+by=c$ (d).

+ Nếu a ≠ 0 và b ≠ 0 thì đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

+ Nếu a ≠ 0, b = 0 và c ≠ 0 thì đường thẳng (d) song song với trục tung Oy và phương trình trở thành $ax=c \Leftrightarrow x=\frac{c}{a}$.

Nếu a ≠ 0, b = 0 và c = 0 thì đường thẳng (d) trùng với trục tung Oy và phương trình trở thành $ax=0 \Leftrightarrow x=0$.

+ Nếu a = 0; b ≠ 0 và c ≠ 0 thì đường thẳng (d) song song với trục hoành Ox và phương trình trở thành $by=c \Leftrightarrow y=\frac{c}{b}$.

Nếu a = 0; b ≠ 0 và c = 0 thì đường thẳng (d) trùng với trục hoành Ox và phương trình trở thành $by=0 \Leftrightarrow y=0$.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho các phương trình:

a) $2x+3y=6$ b) $4x+0y=4$ c) $0x-3y=9$

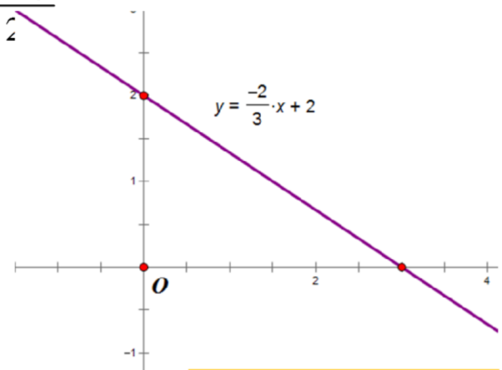
Tìm công thức nghiệm tổng quát của mỗi phương trình và biểu diễn hình học tập nghiệm của nó.

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $2x+3y=6 \Leftrightarrow 3y=6-2x \Leftrightarrow y=\dfrac{6-2x}{3}$

Hoặc

$2x+3y=6 \Leftrightarrow 2x=6-3y \Leftrightarrow x=\dfrac{6-3y}{2}$



Hình a.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{6-2x}{3} \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{6-3y}{2} \end{cases}$

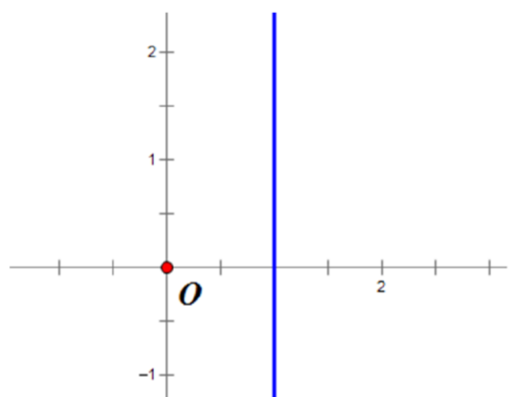
Hình a biểu diễn tập nghiệm của phương trình.

b. Phương trình

$4x+0y=4 \Leftrightarrow 4x=4-0y \Leftrightarrow x=1$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 1 \end{cases}$



Hình b.

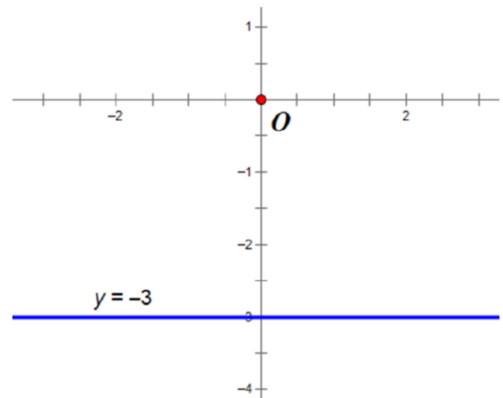
Hình biểu diễn tập nghiệm của phương trình.

c. Phương trình $0x - 3y = 9 \Leftrightarrow -3y = 9 \Leftrightarrow y = -3$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -3 \end{cases}$$

Hình biểu diễn tập nghiệm của phương trình.



Hình b.

2. Các dạng toán

BÀI TẬP

Bài 1. Trong các cặp số $(-1;\ 2)$, $(2;\ 2)$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};\ 0\right)$, $(3;\ -3)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

a. $4x + 3y = 2$

b. $3x - 5y = -4$

Bài 2. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

a. $3x - y = 1$

b. $x - 2y = 5$

c. $2x - 3y = 5$

d. $3y + x = 2$

Bài 3. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm giá trị của a để:

a. Điểm A $(0;-1)$ thuộc đường thẳng $x + ay = -5$;

b. Điểm B $(-3;0)$ thuộc đường thẳng $ax - 4y = 6$;

c. Điểm C $(-5;-2)$ thuộc đường thẳng $ax+6y=-3$;

d. Điểm D $\left(\frac{5}{2};0\right)$ thuộc đường thẳng $ax+0y=\frac{25}{2}$;

e. Điểm E $\left(2;-\frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng $0x+ay=-10$;

Bài 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $(m-1)x+(3m-4)y=-2m-5$.

Tìm *m* để:

a. (d) song song với trục hoành.

b. (d) song song với trục tung.

c. (d) đi qua gốc toạ độ.

d. (d) đi qua điểm A(2; –1).

Bài 5. Vẽ đồ thị của mỗi cặp phương trình sau trong cùng một hệ trục toạ độ, rồi tìm giao điểm của hai đường thẳng đó.

a. $2x-y=3$ và $3x-2y=5$

b. $x-2y=4$ và $3x+2y=10$

c. $x-y=1$ và $-3x+3y=-6$

d. $x-2y=4$ và $-2x+4y=-8$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Thay lần lượt mỗi cặp số đã cho vào từng phương trình, rồi so sánh giá trị tìm được ở hai vế để rút ra kết luận.

a. Các cặp số $(-1;\ 2)$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, là nghiệm của phương trình: $4x+3y=2$

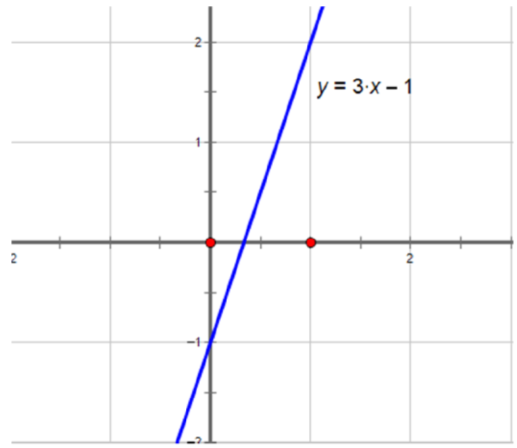
b. Các cặp số $(2;\ 2)$, $\left(-\frac{4}{3};\ 0\right)$, là nghiệm của phương trình: $3x-5y=-4$

Bài 2. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

a. Nghiệm tổng quát của phương trình $3x - y = 1$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Có đồ thị hàm số là:

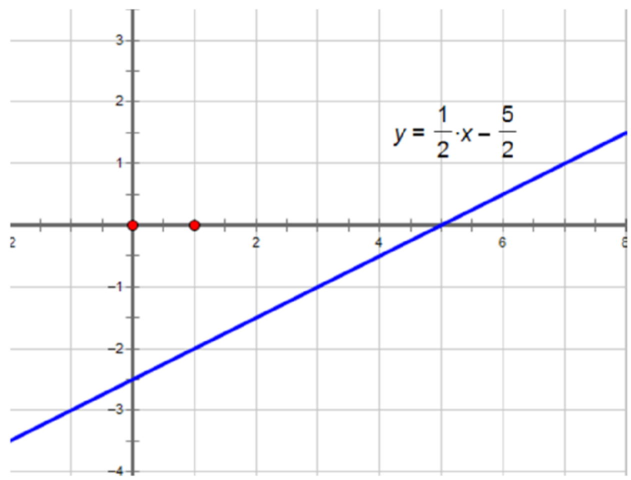


b. Nghiệm tổng quát của phương trình $x - 2y = 5$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2} \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 2y + 5 \end{cases}$

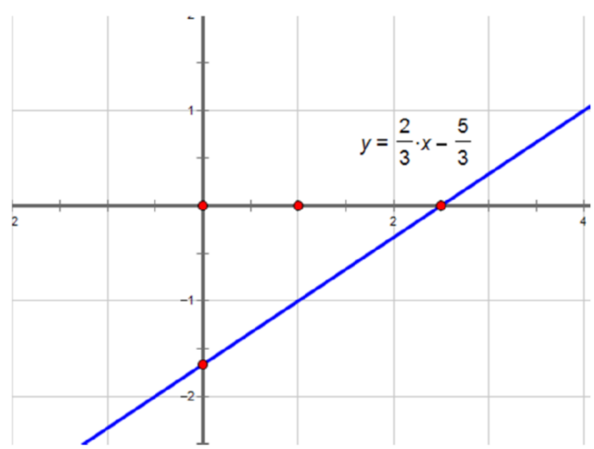
Có đồ thị hàm số là:



c. Nghiệm tổng quát của phương trình $2x - 3y = 5$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3} \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{3}{2}y + \dfrac{5}{2} \end{cases}$



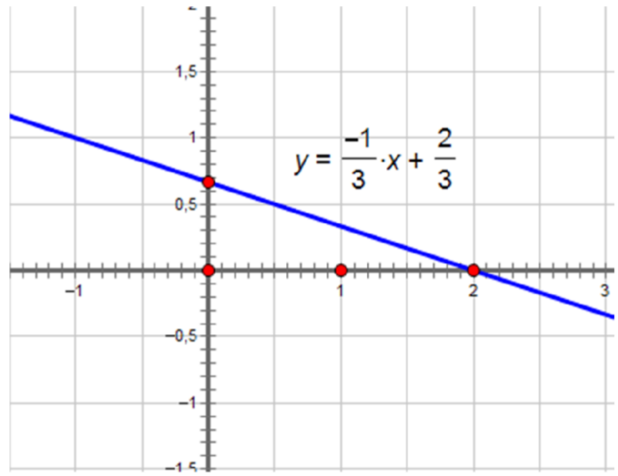
Có đồ thị hàm số là :

d. Nghiệm tổng quát của phương trình $3y+x=2$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$ hoặc

$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = -3y + 2 \end{cases}$$

Có đồ thị hàm số là :



Bài 3. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm giá trị của a để:

a. Điểm A $(0;-1)$ thuộc đường thẳng $x + ay = -5$, ta có:

$$0+a(-1)=-5 \Leftrightarrow a=5.$$

Vậy với $a = 5$ thì điểm A thuộc đồ thị hàm số đã cho.

b. Điểm B $(-3;0)$ thuộc đường thẳng $ax - 4y = 6$, ta có:

$$a(-3)-4.0=6 \Leftrightarrow -3a=6 \Leftrightarrow a=-2.$$

Vậy với $a = -2$ thì điểm B thuộc đồ thị hàm số đã cho.

c. Điểm C $(-5;-2)$ thuộc đường thẳng $ax + 6y = -3$, ta có:

$$a(-5)+6.(-2)=-3 \Leftrightarrow -5a=9 \Leftrightarrow a=-\frac{9}{5}.$$

Vậy với $a=-\frac{9}{5}$, thì điểm C thuộc đồ thị hàm số đã cho.

d. Điểm D $\left(\frac{5}{2};1\right)$ thuộc đường thẳng $ax+0y=\frac{25}{2}$, ta có :

$$a.\frac{5}{2}+0=\frac{25}{2} \Leftrightarrow a=5$$

Vậy với $a = 5$, thì điểm D thuộc đồ thị hàm số đã cho.

e. Điểm E $\left(2;-\frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng $0x+ay=-10$, ta có :

$$0.2+a\left(-\frac{9}{2}\right)=-10 \Leftrightarrow a=\frac{20}{9}$$

Vậy với $a=\frac{20}{9}$, thì điểm E thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $(m-1)x+(3m-4)y=-2m-5$.

Phương trình đường thẳng (d) có các hệ số : $\mathrm{a}=\mathrm{m}-1;\ \mathrm{b}=3m-4;\ c=-2m-5$

a. (d) song song với trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}-1=0 \\ 3m-4\neq 0 \\ -2m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}=1 \\ 3m\neq 4 \\ 2m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}=1 \\ m\neq \frac{4}{3} \\ m\neq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

Vậy với m = 1 thì Phương trình đường thẳng (d) song song với trục hoành.

b. (d) song song với trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b=0 \\ c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}-1\neq 0 \\ 3m-4=0 \\ -2m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}\neq 1 \\ 3m=4 \\ 2m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}\neq 1 \\ m=\frac{4}{3} \\ m\neq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$$

Vậy với $m=\frac{4}{3}$ thì Phương trình đường thẳng (d) song song với trục tung.

c. (d) đi qua gốc toạ độ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}-1\neq 0 \\ 3m-4\neq 0 \\ -2m-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}\neq 1 \\ 3m\neq 4 \\ 2m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}\neq 1 \\ m\neq \frac{4}{3} \\ m=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$$

Vậy với $m = -\frac{5}{2}$ thì Phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ.

d. (d) đi qua điểm A(2; –1), suy ra toạ độ điểm A thoả mãn phương trình đường thẳng $(m-1)x+(3m-4)y=-2m-5$

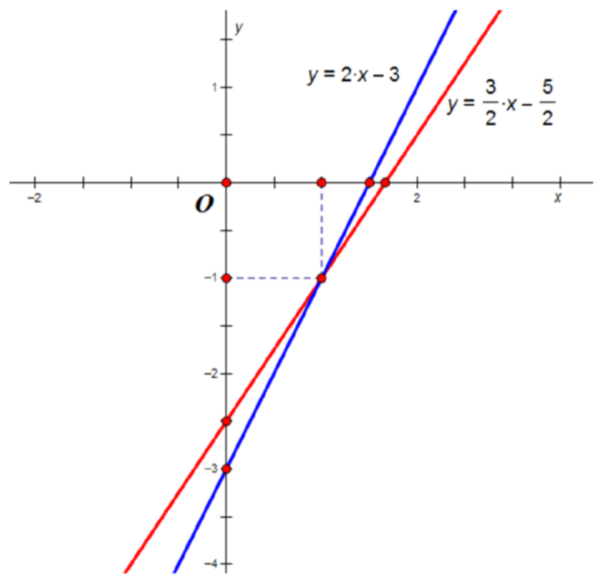
$\Leftrightarrow (m-1).2+(3m-4).(-1)=-2m-5$

$\Leftrightarrow 2m-2-3m+4=-2m-5$

$\Leftrightarrow m=-7$

Vậy với $m=-7$ thì Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A.

Bài 5. Vẽ đồ thị của mỗi cặp phương trình sau trong cùng một hệ trục toạ độ, rồi tìm giao điểm của hai đường thẳng đó.



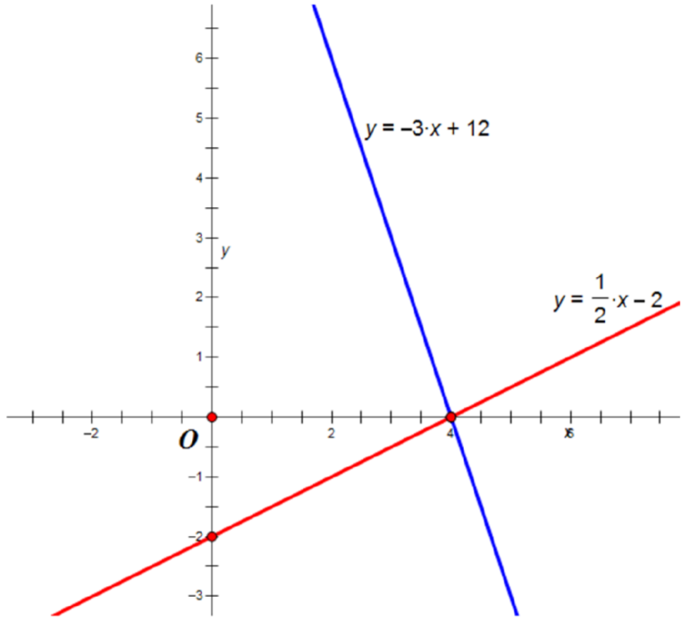
a. $(d_1): 2x-y=3$ và $(d_2): 3x-2y=5$

Đồ thị hàm số $(d_1): 2x-y=3$ là đường thẳng có phương trình là: $y=2x-3$

Đồ thị hàm số $(d_2): 3x-2y=5$ là đường thẳng có phương trình là: $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

Giao điểm của hai đồ thị hàm số (d_1) và (d_2) có toạ độ là: $(1;-1)$.

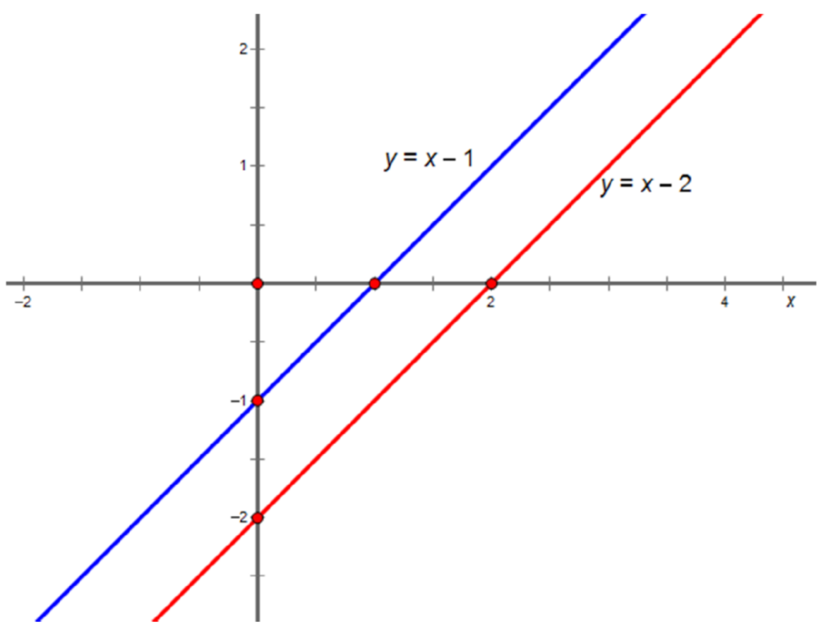
b. $\left(d_3\right)\ x-2y=4$ và $\left(d_4\right)\ 3x+y=12$



Giao điểm của hai đồ thị hàm số $\left(d_3\right)$ và $\left(d_4\right)$ có toạ độ là: $(4;\,0)$

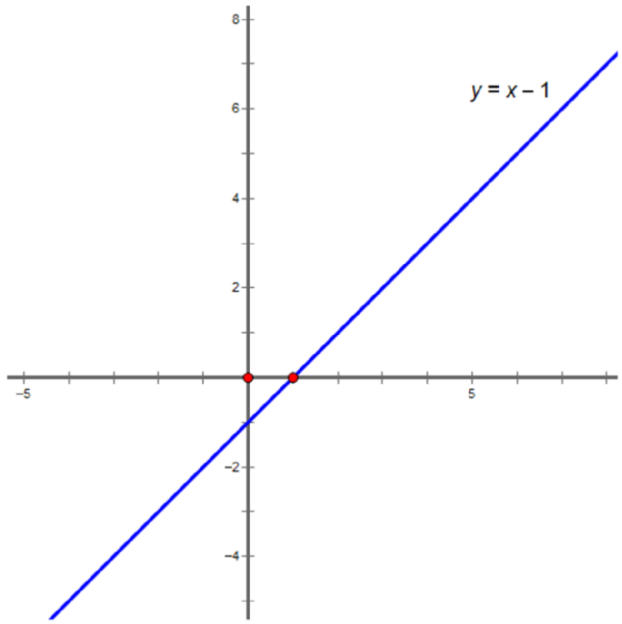
c. $\left(d_5\right):\ x-y=1$ và $\left(d_6\right):\ -3x+3y=-6$

Ta có : $\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-1}{3}\neq\dfrac{1}{-6}$. Hai đồ thị hàm số $\left(d_5\right)$ và $\left(d_6\right)$ song song với nhau.



d. $x - 2y = 4$ và $-2x + 4y = -8$

Ta có : $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{4}{-8}$. Hai đồ thị hàm số (d_5) và (d_6) trùng nhau.



II. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

a. Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$ **(I)**

+ Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0;y_0)$ thì $(x_0;y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).

+ Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

b. Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

+ Phương trình $a_1x+b_1y=c_1$ (1) có thể được viết lại như sau:

$y=\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x+\frac{c_1}{b_1}$ có đồ thị là đường thẳng (d_1), với hệ số góc là $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)$.

+ Phương trình $a_2x+b_2y=c_2$ (2) có thể được viết lại như sau:

$y=\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)x+\frac{c_2}{b_2}$ có đồ thị là đường thẳng (d_2), với hệ số góc là $\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)$.

Do đó, tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d_1): a_1x+b_1y=c_1$ và $(d_2): a_2x+b_2y=c_2$

+ Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.

+ Nếu (d_1) // (d_2) thì hệ (I) vô nghiệm.

+ Nếu $(d_1) \equiv (d_2)$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

* Tính nhanh số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

+ Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

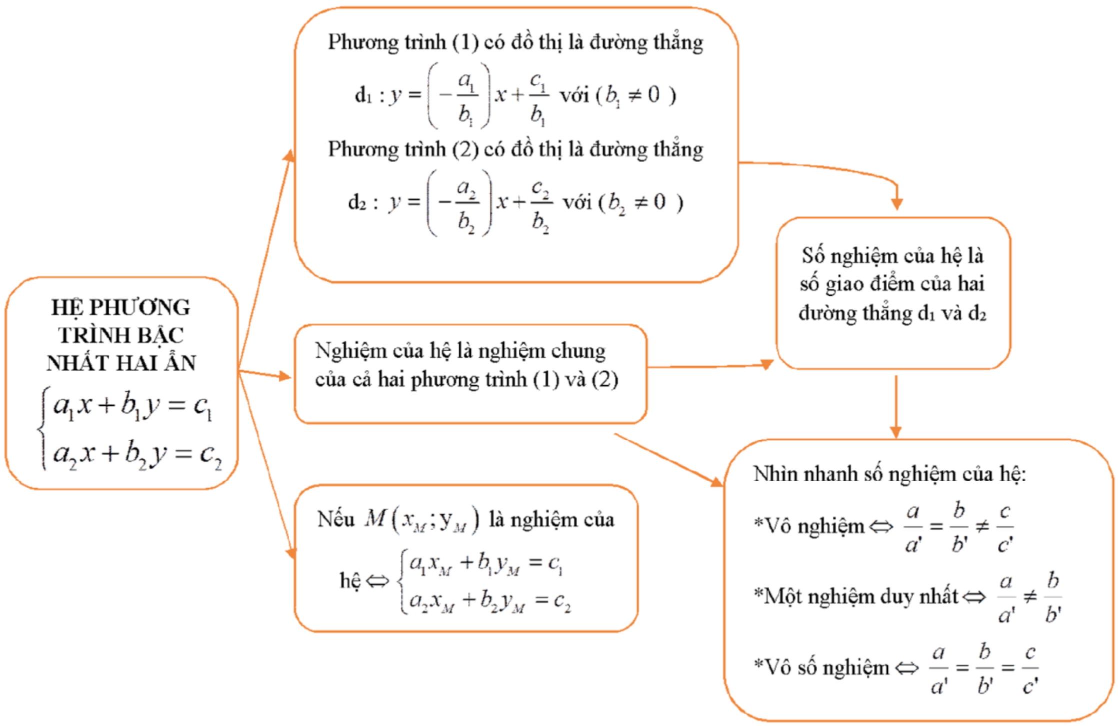
+ Hệ có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

+ Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

c. Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

SƠ ĐỒ



Ví dụ minh hoạ 1: Cho các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x=-5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x-2y=9 \\ -2x+4y=7 \end{cases}$

Hãy đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình trên (hãy giải thích rõ lý do), sau đó giải các hệ phương trình bằng phương pháp hình học.

Hướng dẫn giải :

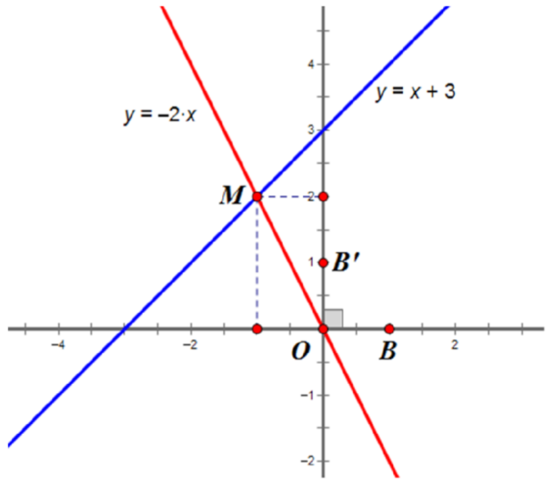
a. Biểu diễn y theo x ở mỗi phương trình của hệ ta có:

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ y=-2x \end{cases}$$

Vì hai đường thẳng có hệ số góc khác nhau: $1 \neq -2$ nên chúng cắt nhau tại một điểm duy nhất. Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Trên hình a, hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M có toạ độ $(-1;2)$.

Hình a.



Suy ra nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

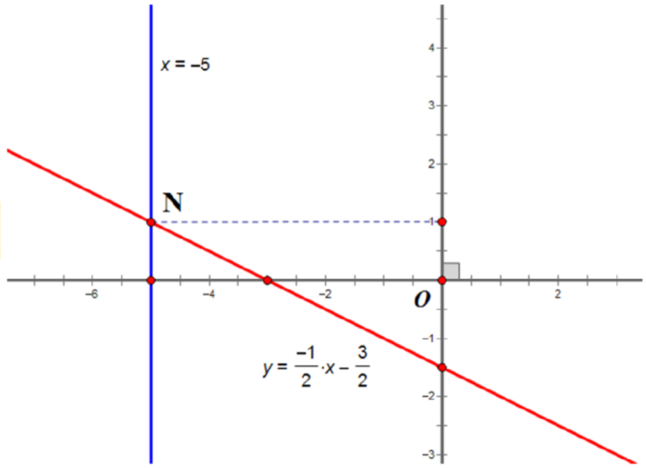
b. Biểu diễn y theo x ở phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\begin{cases} x=-5 \\ x+2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vì đường thẳng $x=-5$ song song với trục tung, còn đường thẳng $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ có hệ số góc là $-\frac{1}{2}$, cắt trục tung. Nên hai đường thẳng của hai phương trình đã cho sẽ cắt nhau tại một điểm duy nhất. Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Trên hình b, hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M có toạ độ $(-5;1)$.

Hình b.



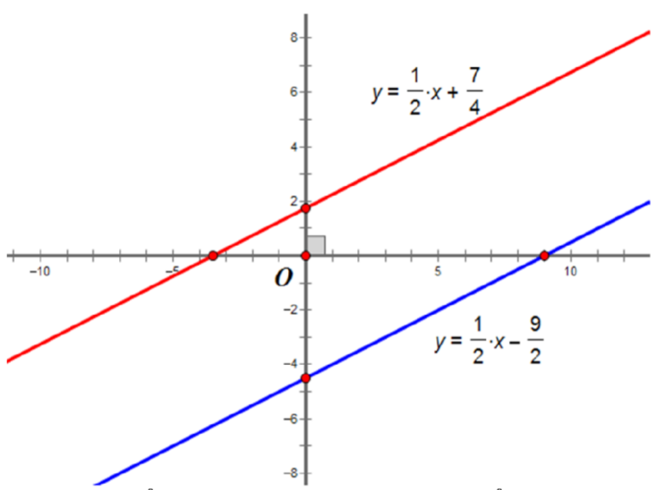
Suy ra nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$

c. Biểu diễn y theo x ở mỗi phương trình của hệ ta có:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Vì hai đường thẳng đã cho có hệ số góc bằng nhau $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Nên hai đường thẳng của hai phương trình đã cho song song với nhau.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.



Hình c.

Trên hình c, hai đường thẳng song song không có điểm chung.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải hệ phương trình, em hãy đoán nhận số nghiệm của hệ và giải thích vì sao ?

a. $\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{5}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{5}x - 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + \dfrac{1}{3}y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 3y = -x \\ 4y = 2x \end{cases}$

Bài 2. Xác định các nghiệm của mỗi hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học:

a. $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

Bài 3. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, và giải thích tại sao?

a. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5x - 5y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 12x + 9y = -3 \end{cases}$

Bài 4. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 0x + y = 3 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình đã cho bằng đồ thị;
b. Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình $4x - 5y = -19$ hay không ?

Bài 5. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình đã cho bằng phương pháp đồ thị

b. Nghiệm của hệ phương trình đã cho có phải là nghiệm của phương trình $2x - 5y = 7$ hay không ?

Bài 6. Bằng đồ thị chứng tỏ các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất với bất kì giá trị nào của a :

a. $\begin{cases} x = a \\ x + y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - y = 3 \\ y = a \end{cases}$

Bài 7. Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$

a. Có nghiệm duy nhất với $a = -2$;

b. Vô nghiệm với $a = -6$.

Bài 8. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$

a. Có vô số nghiệm với $a = 1$

b. Vô nghiệm với $a \neq 1$.

Bài 9. Trong các câu sau, câu nào đúng, câu nào sai :

a. Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm, là hai hệ phương trìng tương đương với nhau ?

b. Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cùng vô số nghiệm là hai phương trình tương đương với nhau.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, hai hệ phương trình nào tương đương với nhau? Hai hệ phương trình nào không tương đương với nhau?

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a. Hai đường thẳng $y = 4x + 2$ và $y = 3x - 3$ có hệ số góc $a_1 = 4;\ a_2 = 3$ khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

b. Hai đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x + 3$ và $y = -\frac{1}{5}x - 1$ có hệ số góc $a_1 = a_2 = -\frac{1}{5}$ bằng nhau mà hệ số $b_1 = 3 \neq b_2 = -1$ khác nhau nên chúng song song với nhau và không có điểm chung.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 3 \\ \frac{1}{3}y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$

Hai đường thẳng có hệ số góc $a_1 = a_2 = -3$ và có tung độ gốc $b_1 = b_2 = 3$ nên chúng trùng nhau.

Vậy Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

d. Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} 3y = -x \\ 4y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$

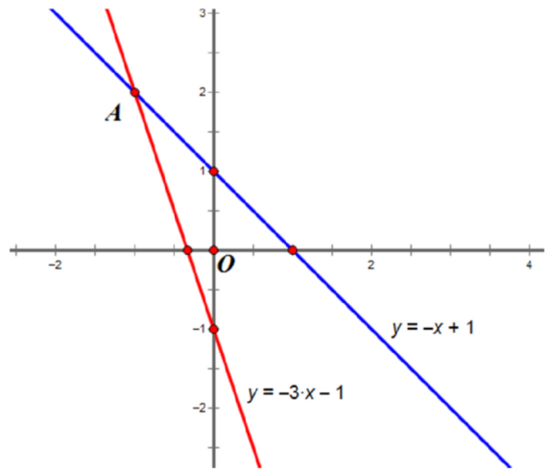
Hai đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x$ và $y = \frac{1}{2}x$ có hệ số góc $a_1 = -\frac{1}{3};\ a_2 = \frac{1}{2}$ khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 2.

Xác định các nghiệm của mỗi hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học:

a. Hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$



Đường thẳng $3x + y = -1$ (d_1) có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(0;-1)$ và điểm $(-1;2)$.

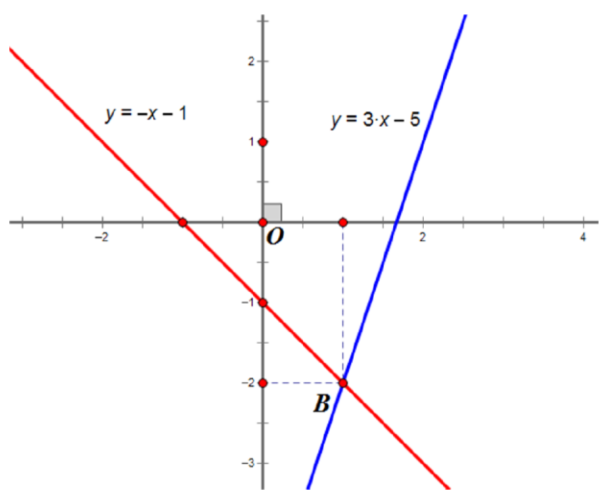
Đường thẳng $x + y = 1$ (d_2) có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(-1;2)$ và điểm $(1;0)$.

Hai đường thẳng $3x + y = -1$ (d_1) và $x + 2y = 1$ (d_2) có đồ thị như hình vẽ:

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hai đường thẳng cắt nhau tại $\mathrm{A}(-1;2)$, suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

b. Hệ phương trình :

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -x - y = 1 \end{cases}$



Đường thẳng $3x - y = 5$ (d_1) có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(0;\ 5)$ và điểm $(1;-2)$.

Đường thẳng $-x - y = 1$ (d_2) có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(0;-1)$ và điểm $(-1;0)$.

Hai đường thẳng $3x - y = 5$ (d_1) và $-x - y = 1$ (d_2) có đồ thị như hình vẽ:

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hai đường thẳng cắt nhau tại $B(1;-2)$, suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Bài 3. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, và giải thích tại sao?

a. Biến đổi hệ phương trình đã cho : $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5x - 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = x - \dfrac{3}{5} \end{cases}$

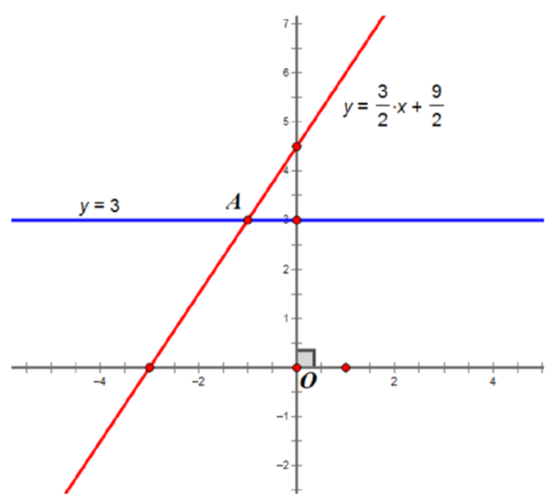
Hệ phương trình vô nghiệm, vì hai đường thẳng $y = x - 3$ và $y = x - \dfrac{3}{5}$ có hệ số góc $a_1 = a_2 = 1$ và tung độ gốc $b_1 \neq b_2$ vì $\left(-3 \neq -\dfrac{3}{5}\right)$ nên chúng song song với nhau.

b. Biến đổi hệ phương trình đã cho : $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 12x + 9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Hệ phương trình có vô số nghiệm, vì hai đường thẳng trùng nhau do có hệ số góc $a_1 = a_2 = -\dfrac{4}{3}$ và tung độ gốc $b_1 = b_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Bài 4. Hệ phương trình :

$\begin{cases} 0x + y = 3 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2} \end{cases}$



a. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, hai đường thẳng $y = 3$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ cắt nhau tại điểm A có toạ độ $(-1;3)$.

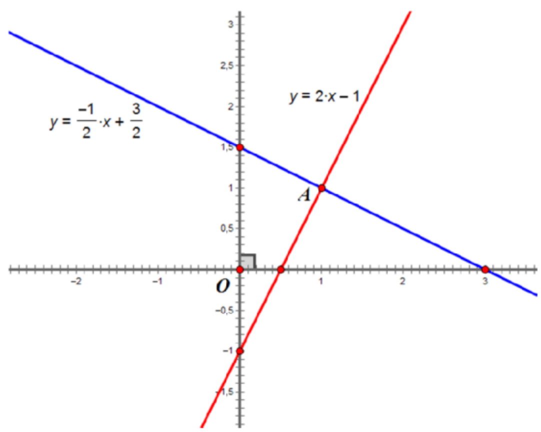
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

b. Với $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ thay vào phương trình $4x-5y=-19$ ta có :

$4.(-1)-5.3=-19 \Leftrightarrow -4-15=-19$ (VT=VP đúng) . Vậy điểm $(-1;3)$ là nghiệm của phương trình $4x-5y=-19$.

Bài 5. Biến đổi hệ phương trình : $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=2x-1 \end{cases}$

a . Đồ thị hai hàm số $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ và $y=2x-1$ được vẽ như hình:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, hai đường thẳng cắt nhau tại A có toạ độ $(1;1)$. Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

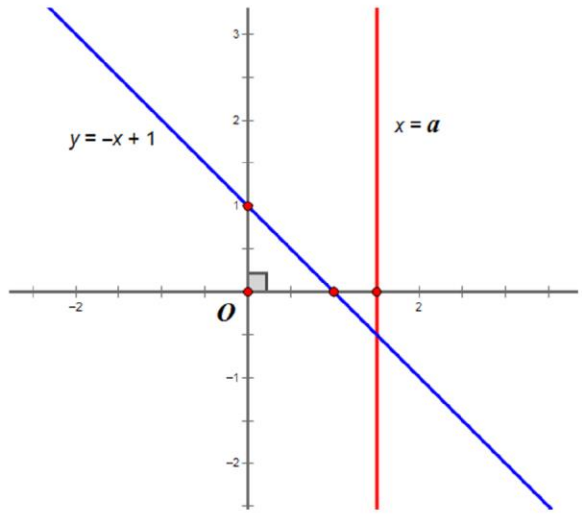
b. Với x = 1 và y = 1, thay vào phương trình $2x-5y=7$ ta có:

$2.1-5.1=2-5=-3\neq 7$ nên x = 1 và y = 1 không phải là nghiệm của phương trình $2x-5y=7$.

Bài 6. Bằng đồ thị chứng tỏ các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất với bất kì giá trị nào của a :

a. $\begin{cases} x = a \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = -x + 1 \end{cases}$

Ta có: đường thẳng $x = a$ song song $(a \neq 0)$ hoặc trùng $(a = 0)$ với trục Oy, mà đường thẳng $y = -x + 1$ là đường thẳng xiên $(a \neq 0)$, cắt Oy tại điểm $(0; 1)$ nên nó sẽ cắt đường thẳng $x = a$ với mọi a.

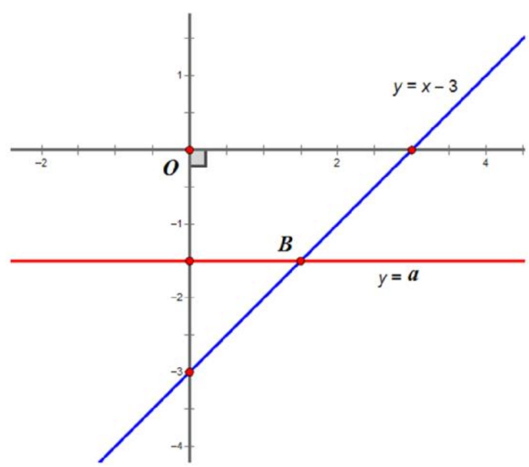


Do đó, hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

b. Biến đổi hệ phương trình :

$\begin{cases} x - y = 3 \\ y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = a \end{cases}$

Ta có: đường thẳng $y = a$ song song $(a \neq 0)$ hoặc trùng $(a = 0)$ với trục Ox, mà đường thẳng $y = x - 3$ là đường thẳng xiên $(a \neq 0)$, cắt Ox tại điểm $(3; 0)$ nên nó sẽ cắt đường thẳng $y = a$ với mọi a.



Do đó, hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

Bài 7. Biến đổi hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ ax + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -\dfrac{a}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

a. Khi $a = -2$; thay vào hệ phương trình ta có: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Đường thẳng $y = 3x - 1$ và đường thẳng $y = x + \dfrac{3}{2}$ có hệ số góc khác nhau $(3 \neq 1)$ nên cắt nhau.

Vì vậy, khi $a = -2$ thì hệ phương trình có nghiệm.

b. Khi $a = -6$, thay vào hệ phương trình ta có: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Đường thẳng $y = 3x - 1$ và đường thẳng $y = 3x + \dfrac{3}{2}$ là hai đường thẳng có hệ số góc bằng nhau $(a = a' = 3)$ và tung độ gốc khác nhau $\left(-1 \neq \dfrac{3}{2}\right)$

Nên chúng song song với nhau.

Vì vậy, khi $a = -6$, thì hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 8. Biến đổi hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

a. Khi $a = 1$, thay vào hệ phương trình, ta có: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đường thẳng $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ có hệ số góc, và tung độ gốc bằng nhau nên hai đường thẳng trùng nhau.

Do đó, hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm khi a = 1.

b. Khi $a\neq 1$, thay vào hệ phương trình, ta có: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-\frac{a}{2} \\ y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases}$

Hai đường thẳng $y=\frac{3}{2}x-\frac{a}{2}$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ có hệ số góc bằng nhau, nhưng tung độ gốc khác nhau nên hai đường thẳng này song song với nhau.

Vậy, hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi $a\neq 1$.

Bài 9. Trong các câu sau, câu nào đúng, câu nào sai :

a. Đúng. Vì hai hệ phương trình cùng vô nghiệm thì có cùng tập nghiệm rỗng.

b. Sai.

Ví dụ chứng minh: Cho hai hệ phương trình sau :

Hệ (I) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ và Hệ (II) $\begin{cases} x-y=-5 \\ -2x+2y=10 \end{cases}$

Cả hệ (I) và hệ (II) đề là hệ phương trình có vô số nghiệm. Nhưng tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi phương trình đường thẳng (d_1) $y=-x+3$; còn tập nghiệm của hệ phương trình (II) được biểu diễn bởi phương trình đường thẳng (d_2) $y=x+5$. Hai đường thẳng này khác nhau nên hai hệ phương trình đang xét không tương đương với nhau.

Bài 10. Giải các hệ phương trình nếu tập nghiệm của chúng bằng nhau ta kết luận hai hệ phương trình tương đương, còn nếu tập nghiệm của chúng không bằng nhau ta kết luận hai hệ phương trình không tương đương :

a. Hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=-6 \end{cases}$ vô nghiệm.

và hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy hai hệ phương trình đã cho tương đương với nhau.

b. Hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y-6=0 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

và hệ phương trình $\begin{cases} x=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ có nghiệm $\left(3;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Vì tập nghiệm của chúng khác nhau nên hai hệ phương trình đã cho không tương đương với nhau.

c. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+2y=7 \end{cases}$ có nghiệm là $(-17;12)$

và hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \end{cases}$ có nghiệm là $(1;2)$

Vì tập nghiệm của chúng khác nhau nên hai hệ phương trình đã cho không tương đương với nhau.

III. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn: (I) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$

a. Phương pháp thế:

+ Bước 1: Từ một phương trình của hệ, ta biểu thị ẩn x theo y (hoặc y theo x).

+ Bước 2: Thế biểu thức tìm được của x (hoặc của y) vào phương trình còn lại để được phương trình bậc nhất một ẩn. Giải phương trình bậc nhất vừa tìm được.

+ Bước 3: Thay giá trị vừa tìm được của ẩn vào biểu thức tìm được trong bước thứ nhất để tìm giá trị của ẩn còn lại

b. Phương pháp cộng đại số :

+ Bước 1: Chọn ẩn muốn khử, thường là x (hoặc y).

+ Bước 2:

- Xem xét hệ số của ẩn muốn khử.

- Khi các hệ số của cùng một ẩn **đối nhau** thì ta **cộng vế theo vế** của hệ.

- Khi các hệ số của cùng một ẩn **bằng nhau** thì ta **trừ vế theo vế** của hệ.

- Nếu các hệ số đó **không bằng nhau** thì ta **nhân các vế** của hai phương trình **với số thích hợp** (nếu cần) sao cho các hệ số của x (hoặc y) trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau (*đồng nhất hệ số*). Rồi thực hiện các bước ở trên.

- Ta được một phương trình mới, trong đó ẩn muốn khử có hệ số bằng 0.

+ Bước 3: Giải hệ phương trình gồm một phương trình mới (một ẩn) và một phương trình đã cho.

Ta suy ra nghiệm của hệ.

* Đối với một số bài toán ta có thể kết hợp phương pháp **đặt ẩn phụ** để **biến đổi** hệ phương trình đã cho **thành hệ phương đơn giản hơn với ẩn mới**.
Sau khi tìm được nghiệm của hệ phương trình mới, ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

* Sử dụng máy tính CASIO/ VINACAL:

+ Nhấn Mode, chọn mục EQN, chọn số tương ứng với mục: anX+bnY=cn

+ Nếu hệ phương trình đúng theo thứ tự : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$

+ Ta nhập sối liệu tương ứng :

Hàng thứ nhất : a_1=; b_1 =; c_1 = và hàng thứ hai: a_2=; b_2 =; c_2 =

+ Nhấn =; = ta sẽ có kết quả nghiệm của hệ phương trình.

Các em có thể sử dụng máy tính casio để tính ra nghiệm đúng.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Ví dụ minh hoạ 1: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải :

a. Biến đổi hệ phương trình đã cho thành các hệ phương trình tương đương :

HTP: $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ 2(-2y-1)-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ -9y-2=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ -9y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2.(-1)-1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1;-1)$.

b. Hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases}$

Cách 1: Thu gọn vế trái của mỗi phương trình trong hệ, biến đổi hệ phương trình đã cho thành các hệ phương trình tương đương.

HPT: $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=9 \\ 2x+2y+x-y=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=9 \\ 2x+2y+x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=9 \\ 3x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5y+9 \\ 3(-5y+9)+y=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-5y+9 \\ -14y=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(-1;2)$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ: đặt $u=x+y;\quad v=x-y$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-2v=9 \\ 2u+v=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-2(-2u-1)=9 \\ v=-2u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u=7 \\ v=-2u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases}$, ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-3)=-2 \\ x=y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(-1;2)$.

b. Dạng 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ví dụ minh hoạ 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải :

a. Biến đổi hệ phương trình đã cho thành các hệ phương trình tương đương :

HTP: $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=-2 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$ (pt 1 được nhân 2 vế cho 2)

Lấy pt 1 trừ pt 2 vế theo vế, và giữ lại một phương trình:

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 0x+9y=-9 \\ 2x+4y=-2 \end{cases}$

Tìm được giá trị một ẩn, ta thay vào phương trình kia để tìm nghiệm còn lại.

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2x+4.(-1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1;-1)$.

b. Hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases}$

Cách 1: Thu gọn vế trái của mỗi phương trình trong hệ, biến đổi hệ phương trình đã cho thành các hệ phương trình tương đương.

HPT: $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=9 \\ 2x+2y+x-y=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=9 \\ 2x+2y+x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=9 \\ 3x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=9 \\ 15x+5y=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=9 \\ 15x+5y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x=-14 \\ x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(-1;2)$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ: đặt $u=x+y$; $v=x-y$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=9 \\ 2(x+y)+(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-2v=9 \\ 2u+v=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-2v=9 \\ 4u+2v=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u+0.v=7 \\ 2u+v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases}$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(-1;2)$.

c. Dạng 3. Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ minh hoạ 3: Bằng cách đặt ẩn phụ, hãy giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \dfrac{-5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10 \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=-18 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải :

Điều kiện để hệ phương trình xác định là : $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ y-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ y\neq 1 \end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{1}{x-1};\ v=\dfrac{1}{y-1}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{-5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10 \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5u+v=10 \\ u+3v=-18 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế :

Từ phương trình $-5u+v=10$, ta có : $v=5u+10$

Thế vào phương trình $u+3v=-18$, ta được :

$$u+3v=-18 \Leftrightarrow u+3\left(5u+10\right)=-18$$

$$\Leftrightarrow 16u+30=-18 \Leftrightarrow 16u=-48$$

$$\Leftrightarrow u=-3$$

Thay $u=-3$ vào phương trình $v=5u+10$, ta được $v=5\left(-3\right)+10=-5$

Vậy $\begin{cases} u=-3 \\ v=-5 \end{cases}$, nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=-3 \\ \dfrac{1}{y-1}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-3\left(x-1\right) \\ 1=-5\left(y-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-3x+3 \\ 1=-5y+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ 5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{5}\right)$.

d. Dạng 4. Một số bài toán liên quan

Ví dụ minh hoạ 4: Xác định phương trình đường thẳng $y=ax+b$ biết nó đi qua hai điểm $A(-1;\ 6)$ và điểm $B\ (2;\ -3)$.

Hướng dẫn giải :

Đường thẳng $y=ax+b$ đi qua điểm $A(-1;\ 6)$, nên ta có:

$6=a(-1)+b \Leftrightarrow -a+b=6 \qquad (1)$

Đường thẳng $y=ax+b$ đi qua điểm $B\ (2;\ -3)$, nên ta có:

$-3=a.2+b \Leftrightarrow 2a+b=-3 \qquad (2)$

Vì a, b phải nghiệm đúng cả hai phương trình (1) và (2) nên a, b là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}-a+b=6\\2a+b=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a=-9\\2a+b=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$

Vậy, phương trình đường thẳng cần tìm là: $y=-3x+3$.

Ví dụ minh hoạ 5: Cho hệ phương trình : $\begin{cases}mx+2y=1\\mx+my=m-1\end{cases}$

Giải hệ phương trình khi :

a. $m=3$; b. $m=2$; c. $m=0$

Hướng dẫn giải :

Cho hệ phương trình : $\begin{cases}mx+2y=1\\mx+my=m-1\end{cases}$

a. Khi $m=3$, ta có hệ phương trình : $\begin{cases}3x+2y=1\\3x+3y=3-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=1\\3x+3y=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=1\\3x+3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-y=-1\\3x+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\3x+2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=1\end{cases}$$

Vậy, khi m = 3, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

b. Khi $m = 2$, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

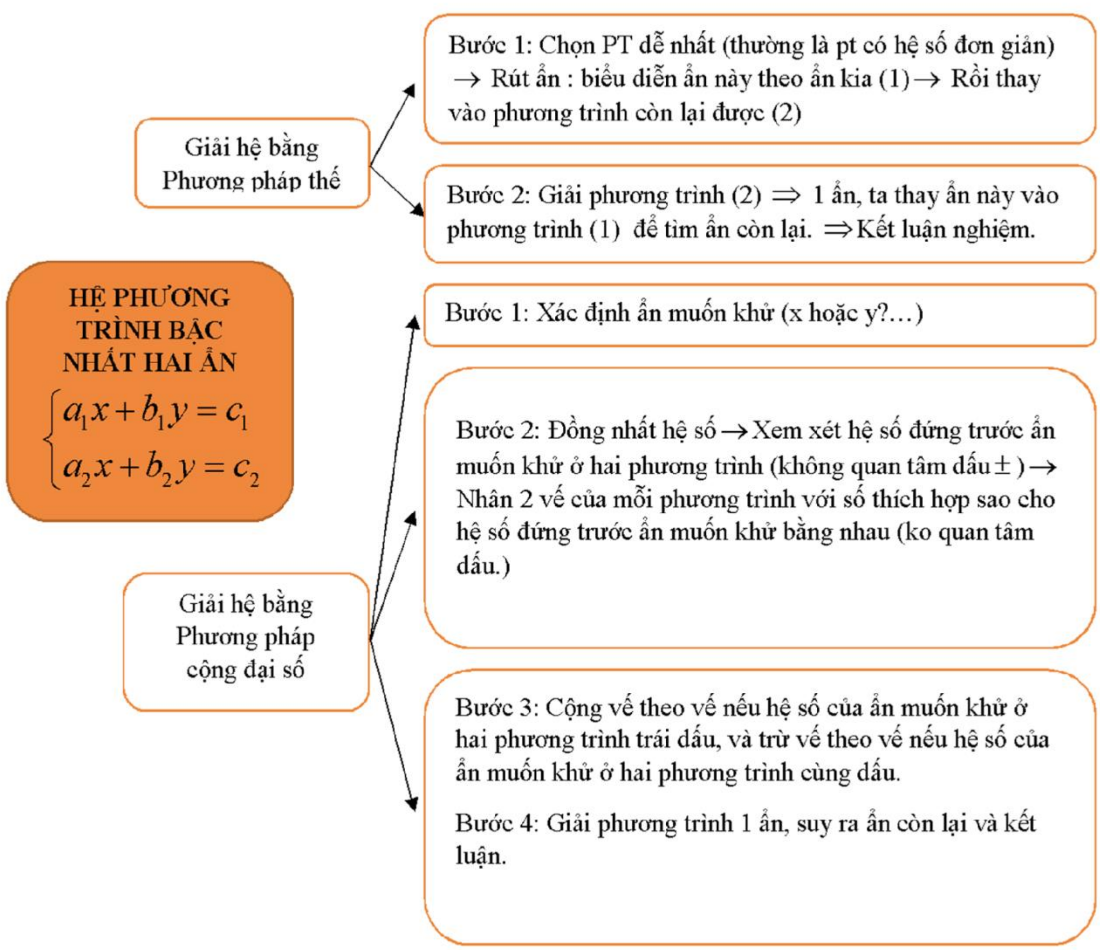
Hệ phương trình có vô số nghiệm. Công thức nghiệm tổng quát của hệ phương trình là: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-2x + 1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{-2y + 1}{2} \end{cases}$

c. Khi $m = 0$, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 0x + 2y = 1 & (1) \\ 0x + 0y = 0 - 1 & (2) \end{cases}$

Trong hệ phương trình này, ta thấy phương trình thứ (1) có nghiệm, còn phương trình thứ (2) vô nghiệm, nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy khi m = 0, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

SƠ ĐỒ TƯ DUY PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. $\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x-y=-8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-y=10 \\ x+y=8 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=14 \end{cases}$

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+y=1 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{y}{5}-\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=0 \\ \dfrac{4}{y+4}=\dfrac{9}{x+8} \end{cases}$ d. $\begin{cases} x-y=20 \\ x-\dfrac{x}{8}=y+\dfrac{x}{8} \end{cases}$

Bài 3. Giải phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. $\begin{cases} x-2\sqrt{2}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x+y=1-\sqrt{6} \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=0 \\ x\sqrt{3}+2y=1+\sqrt{3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{5}y=1 \\ x+\sqrt{5}y=\sqrt{2} \end{cases}$ d. $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{5}y=2 \\ x+\sqrt{5}y=2 \end{cases}$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} \left(3-\sqrt{5}\right)x-3y=3+5\sqrt{5} \\ 4x+y=4-2\sqrt{5} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3} \\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1 \end{cases}$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} 4x-3y+5\left(x-y\right)=1 \\ 2x-4\left(2y-1\right)=1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3\left(x-7\right)-6\left(x-y+1\right)=0 \\ 4\left(x-1\right)+2\left(x-2y+7\right)=0 \end{cases}$

Bài 6. Xác định giá trị của a, b để hệ phương trình : $\begin{cases} 3x+by=5 \\ ax+by=12 \end{cases}$

a. Có nghiệm $\left(1;2\right)$ b. Có nghiệm $\left(-2;2\right)$

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ :

a. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{7}{x-1}+\dfrac{5}{y+2}=1 \\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1 \\ \dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y+1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=3 \end{cases}$

Bài 8. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x-2y=a \\ 15x-10y=5 \end{cases}$

a. Có vô số nghiệm với $a=1$

b. Vô nghiệm với $a\neq 1$.

Bài 9. Giải các phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. $\begin{cases} -5x+y=10 \\ x+3y=-18 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x-3y=-10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{6}{5}y=\dfrac{27}{10} \\ x-\dfrac{9}{2}y=-\dfrac{15}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}y=2 \\ \dfrac{2}{5}x+y=18 \end{cases}$

Bài 10. Giải các phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. $\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 2x+9y=31 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 15x+8y=46 \\ x-\dfrac{3}{5}y=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ -6x+8y=-17 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x-4y=20 \\ \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{5}y=1 \end{cases}$

Bài 11. Giải phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. $\begin{cases} 5(x+2y)-3(x-y)=99 \\ x-3y=7x-17 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 7(x-4)+3(x+y-1)=14 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2(x+1)-5(y+1)=8 \\ 3(x+1)-2(y+1)=1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4(x-1)-2(3y+1)+5=0 \\ 8(x-1)-5(3y+1)=-9 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1\end{cases}$$

Bài 13. Xác định các hệ số a, b để đồ thị hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M và N trong mỗi trường hợp sau :

a. $M(1;3)$ và $N(-2;2)$

b. $M\left(-1;\sqrt{3}\right)$ và $N\left(2;\sqrt{3}\right)$

c. $M(0;0)$ và $N(3;3)$

d. $M(-1;4)$ và $N(4;-1)$

Bài 14. Xác định giá trị của các hệ số m, n sao cho :

a. Hệ phương trình $\begin{cases}2x+my=n\\ mx+ny=5\end{cases}$ có nghiệm là x = 2; y = 5 ?

b. Hệ phương trình $\begin{cases}x-y=m\\ 3x+2y-n=1\end{cases}$ có nghiệm là x = 1; y = 2 ?

Bài 15. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ :

a. $\begin{cases}\dfrac{10}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=1\\ \dfrac{25}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=2\end{cases}$

b. $\begin{cases}\dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7\\ \dfrac{45}{2x-y}-\dfrac{48}{x+3y}=-1\end{cases}$

c*. $\begin{cases}2|x-6|+3|y+1|=5\\ 5|x-6|-4|y+1|=1\end{cases}$

d*. $\begin{cases}4|x+y|+3|x-y|=8\\ 3|x+y|-5|x-y|=6\end{cases}$

Bài 16*. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases}3x+y-z=1\\ 2x-y+2z=5\\ x-2y-3z=0\end{cases}$

b. $\begin{cases}x+3y+2z=8\\ 2x+y+z=6\\ 3x+y+z=6\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-6 \\ 2(2y-6)-y=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-6 \\ 4y-12-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-6 \\ 3y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2.\left(\dfrac{16}{3}\right)-6 \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{16}{3}\right)$.

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+5 \\ 2(3y+5)-y=-8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+5 \\ 6y+10-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+5 \\ 5y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3.\left(-\dfrac{18}{5}\right)+5 \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{29}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $\left(-\dfrac{29}{5};-\dfrac{18}{5}\right)$

c. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} x-y=10 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+10 \\ (y+10)+y=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+10 \\ 2y+10=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+10 \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+10 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(9;-1)$

d. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ 5x+2(3x-5)=14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 5x + 6x - 10 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 11x = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{11} \\ y = 3.\left(\dfrac{24}{11}\right) - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{11} \\ y = \dfrac{17}{11} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $\left(\dfrac{24}{11}; \dfrac{17}{11}\right)$

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + y = 1 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ 3x + 2\left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) = 10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ 3x - x + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{1}{2}.4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $(4; -1)$

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y}{5} - \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{y}{2} - \dfrac{x + y}{5} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 5(x - y) = 1 \\ 5y - 2(x + y) = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 5x + 5y = 1 \\ 5y - 2x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7y = 1 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{1}{7} \\ -2x + 3\left(\dfrac{5}{7}x + \dfrac{1}{7}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{1}{7} \\ -2x + \dfrac{15}{7}x + \dfrac{3}{7} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{1}{7}x = \dfrac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $(11; 8)$

c. Hệ phương trình đã cho có điều kiện là: $x \neq -8;\ y \neq -4$

Khi đó, biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 0 \\ \dfrac{4}{y + 4} = \dfrac{9}{x + 8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4(x + 8) = 9(y + 4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 4(x+8)=9(y+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 4x+32=9y+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y \\ 4x-9y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y \\ 4x-9y=4 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y \\ 4.\left(\dfrac{2}{3}y\right)-9y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{19} \\ y=-\dfrac{12}{19} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(-\dfrac{8}{19};-\dfrac{12}{19}\right)$.

d. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} x-y=20 \\ x-\dfrac{x}{8}=y+\dfrac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ 8x-x=8y+x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ 8x-x=8y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ 6x-8y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ 6(y+20)-8y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+20 \\ -2y=-120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=80 \\ y=60 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $(80;60)$.

Bài 3. Giải phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. Biến đổi hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2\sqrt{2}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x+y=1-\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2}y+\sqrt{3} \\ \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}y+\sqrt{3}\right)+y=1-\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2}y+\sqrt{3} \\ 4y+\sqrt{6}+y=1-\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2}y+\sqrt{3} \\ 5y=1-2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5}\right)+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5}\right)+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}-4\sqrt{12}+5\sqrt{3}}{5} \\ y=\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5} \\ y = \dfrac{1 - 2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $\left(\dfrac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5}; \dfrac{1 - 2\sqrt{6}}{5} \right)$

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + 2y = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}y\right) + 2y = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ 3y + 2y = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}.\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{5}\right) \\ y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{5} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{5} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{5}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{5} \right)$

c. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 1 \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}y + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}y + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}y + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(-\sqrt{5}y + \sqrt{2}\right) - \sqrt{5}y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}y + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(-\sqrt{5}y + \sqrt{2}\right) - \sqrt{5}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}y + \sqrt{2} \\ -\sqrt{5}\left(\sqrt{2} + 1\right)y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right) + \sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là : $\left(1; \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}} \right)$

d. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{5}y=2\\ x+\sqrt{5}y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\left(-\sqrt{5}y+2\right)+\sqrt{5}y=2\\ x=-\sqrt{5}y+2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)y=2\left(1-\sqrt{2}\right)\\ x=-\sqrt{5}y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ x=-\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ x=0\end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(0; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases}\left(3-\sqrt{5}\right)x-3y=3+5\sqrt{5}\\ 4x+y=4-2\sqrt{5}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(3-\sqrt{5}\right)x-3\left(-4x+4-2\sqrt{5}\right)=3+5\sqrt{5}\\ y=-4x+4-2\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(15-\sqrt{5}\right)x=15-\sqrt{5}\\ y=-4x+4-2\sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-2\sqrt{5}\end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(1; -2\sqrt{5}\right)$.

b. $\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)\left[\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}\right]=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}\\ 3x=4+\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\right)-\sqrt{3}\\ x=\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{4\sqrt{3}-4+3-\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\\ x=\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{4+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{1}{3} \right)$.

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 4x-3y+5(x-y)=1 \\ 2x-4(2y-1)=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y+5(x-y)=1 \\ 2x-4(2y-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y+5x-5y=1 \\ 2x-8y+4=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x-8y=1 \\ 2x-8y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-8y=1 \\ x=4y-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(4y-\dfrac{3}{2}\right)-8y=1 \\ x=4y-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36y-\dfrac{27}{2}-8y=1 \\ x=4y-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28y=1+\dfrac{27}{2} \\ x=4y-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{29}{56} \\ x=4\left(\dfrac{29}{56}\right)-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{29}{56} \\ x=\dfrac{4}{7} \end{cases}$$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{29}{56}\right)$.

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 3(x-7)-6(x-y+1)=0 \\ 4(x-1)+2(x-2y+7)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-21-6x+6y-6=0 \\ 4x-4+2x-4y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6y=27 \\ 6x-4y=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-9 \\ 6x-4y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-9 \\ 6(2y-9)-4y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-9 \\ 8y=44 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{11}{2} \end{cases}$$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(2; \dfrac{11}{2}\right)$

Bài 6. Hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + by = 5 \\ ax + by = 12 \end{cases}$

a. Có nghiệm $(1;2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3.1 + b.2 = 5 \\ a.1 + b.2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2b = 5 \\ a + b = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+2b=5 \\ a+b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=2 \\ a+b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+1=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=11 \end{cases}$

Vậy, hệ số a = 11; b = 1.

b. Có nghiệm $(-2;2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3.(-2) + b.2 = 5 \\ a.(-2) + b.2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 2b = 5 \\ -2a + 2b = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=11 \\ -a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{11}{2} \\ a=\dfrac{11}{2}-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{11}{2} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy, hệ số a = $-\dfrac{1}{2}$; b = $\dfrac{11}{2}$.

Bài 7.

a. Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Đặt ẩn phụ: $\dfrac{1}{x}=a; \dfrac{1}{y}=b$

Khi đó, hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{3} \\ a-b=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(b+\dfrac{1}{12}\right)+b=\dfrac{1}{3} \\ a=b+\dfrac{1}{12} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12} \\ a=b+\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=\dfrac{1}{4} \\ a=b+\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{8} \\ a=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{8} \\ a=\dfrac{5}{24} \end{cases}$

Với $\begin{cases} b=\dfrac{1}{8} \\ a=\dfrac{5}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{24}{5} \\ y=8 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{24}{5};8\right)$

b. Điều kiện: $x \neq 1;\ y \neq -2$. Đặt ẩn phụ: $\dfrac{1}{x-1} = a;\ \dfrac{1}{y+2} = b$

Khi đó, hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{7}{x-1} + \dfrac{5}{y+2} = 1 \\ \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 5b = 1 \\ a - b = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 5b = 1 \\ a - b = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\left(b + \dfrac{1}{12}\right) + 5b = 1 \\ a = b + \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12b = \dfrac{5}{12} \\ a = b + \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{144} \\ a = \dfrac{17}{144} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} b = \dfrac{5}{144} \\ a = \dfrac{17}{144} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{5}{144} \\ \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{17}{144} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = \dfrac{144}{5} \\ x - 1 = \dfrac{144}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{144}{5} - 2 \\ x = \dfrac{144}{17} + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{134}{5} \\ x = \dfrac{161}{17} \end{cases}$ (thoả điều kiện).

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{161}{17};\ \dfrac{134}{5}\right)$

c. Điều kiện : $x \neq \pm 2y$. Đặt ẩn phụ: $\dfrac{1}{x+2y} = a;\ \dfrac{1}{x-2y} = b$

Khi đó, hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y} - \dfrac{1}{x-2y} = 1 \\ \dfrac{20}{x+2y} + \dfrac{3}{x-2y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 1 \\ 20a + 3b = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 1 \\ 20a + 3(4a - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 1 \\ 32a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+2y} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{x-2y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=8 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ (thoả điều kiện)

Kết luận, vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

d. Điều kiện : $\begin{cases} x+y \neq 3 \\ x-y \neq 1 \end{cases}$. Đặt ẩn phụ: $\dfrac{1}{x+y-3} = a; \dfrac{1}{x-y+1} = b$

Khi đó, hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3} - \dfrac{2}{x-y+1} = 8 \\ \dfrac{3}{x+y-3} + \dfrac{1}{x-y+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a-2b=8 \\ 3a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{14}{11} \\ b = -\dfrac{9}{11} \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = \dfrac{14}{11} \\ b = -\dfrac{9}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y-3} = \dfrac{14}{11} \\ \dfrac{1}{x-y+1} = -\dfrac{9}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3 = \dfrac{11}{14} \\ x-y+1 = -\dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{53}{14} \\ x-y = -\dfrac{19}{9} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{211}{252} \\ y = \dfrac{743}{252} \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = \dfrac{211}{252} \\ y = \dfrac{743}{252} \end{cases}$

Bài 8. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x-2y=a \\ 15x-10y=5 \end{cases}$

a. Với $a=1$, ta có : $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 15x-10y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Hệ phương trình với a = 1 là hệ gồm hai phương trình giống nhau (hai đường thẳng trùng nhau) nên chúng có vô số nghiệm.

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Cách 2 : Ta có thể nhìn nhanh số nghiệm của hệ phương trình khi lập tỉ số các hệ số của hai đường thẳng :

Vì $\dfrac{3}{5} = \dfrac{-2}{-10} = \dfrac{1}{5}$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm.

b. Với $a \neq 1$. Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$

Vì $a \neq 1$ nên $\dfrac{3}{5} = \dfrac{-2}{-10} \neq \dfrac{a}{5}$. Do đó, hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 9. Giải các phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} -5x + y = 10 \\ x + 3y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x + 3y = 30 \\ x + 3y = -18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x = -48 \\ x + 3y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(-3;-5)$.

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 26 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(2;-1)$

c. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{6}{5}y = \dfrac{27}{10} \\ x - \dfrac{9}{2}y = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 12y = 27 \\ 2x - 9y = -15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 12y = 27 \\ 2x - 9y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 24y = 54 \\ 10x - 45y = -75 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -21y = -21 \\ 2x - 9y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(-3;1)$.

d. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ \frac{2}{5}x + y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x - y = 8 \\ \frac{2}{5}x + y = 18 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{26}{15}x = 26 \\ \frac{2}{5}x + y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ \frac{2}{5}.15 + y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 12 \end{cases}$$

Bài 10. Giải các phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 2x + 9y = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 38 \\ 10x + 45y = 155 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 39y = 117 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 5x + 9 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(2;3)$

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 15x + 8y = 46 \\ x - \frac{3}{5}y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 8y = 46 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 8y = 46 \\ 15x - 9y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 34 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 5x - 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$

c. Hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ -6x + 8y = -17 \end{cases}$ có tỉ lệ giữa các hệ số là: $\frac{3}{-6} = \frac{-4}{8} \neq \frac{10}{-17}$

dạng $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \right)$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

d. Hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 4y = 20 \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{5}y = 1 \end{cases}$ có tỉ lệ giữa các hệ số là: $\dfrac{5}{\left(\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{-4}{\left(-\dfrac{1}{5}\right)} = \dfrac{20}{1}$

dạng $\left(\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}\right)$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm.

Với nghiệm tổng quát của phương trình là: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{5}{4}x - 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{4}{5}y + 4 \end{cases}$

Bài 11. Giải phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 5(x + 2y) - 3(x - y) = 99 \\ x - 3y = 7x - 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 3x + 3y = 99 \\ 6x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 13y = 99 \\ 6x + 3y = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 39y = 297 \\ 6x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36y = 280 \\ 6x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{70}{9} \\ 6x + 3\left(\dfrac{70}{9}\right) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{19}{18} \\ y = \dfrac{70}{9} \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(-\dfrac{19}{18}; \dfrac{70}{9}\right)$

b. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 7(x - 4) + 3(x + y - 1) = 14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 7x - 28 + 3x + 3y - 3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 10x + 3y = 45 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 24 \\ 3y = 21 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3y = 21 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $(3;5)$.

c. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+1)-5(y+1)=8 \\ 3(x+1)-2(y+1)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-5y-5=8 \\ 3x+3-2y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=11 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-15y=33 \\ 6x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-33 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ 3x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(-2;-3)$

**(Những bài khá đơn giản như thế này chúng ta không nên đặt ẩn phụ, bởi sẽ tạo ra nhiều bước thực hiện để hoàn thành bài toán. Cách tốt nhất là khai triển, rồi làm gọn hệ phương trình đã cho. Sau đó, giải theo phương pháp thầy đã nêu.)*

d. Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases} 4(x-1)-2(3y+1)+5=0 \\ 8(x-1)-5(3y+1)=-9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4-6y-2+5=0 \\ 8x-8-15y-5=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6y=1 \\ 8x-15y=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x-12y=2 \\ 8x-15y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=-2 \\ 4x=6y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3} \\ 4x=6\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{2}{3}\right)$

Bài 12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

Biến đổi hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)y=\sqrt{3}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=\sqrt{3}-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y=-1\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x-y=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x=y+\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{-\dfrac{1}{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{3\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(3+\sqrt{3}+1\right)}{3\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 13. Xác định các hệ số a, b để đồ thị hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M và N trong mỗi trường hợp sau :

a. Hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M$(1;3)$ và N $(-2;2)$:

Điểm M $(1;3)$thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $3=a+b$ (1)

Điểm N $(-2;2)$thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $2=-2a+b$ (2)

Suy ra : a, b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3=a+b\\2=-2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Vậy, $a=\dfrac{1}{3}$; và $b=\dfrac{8}{3}$.

b. Hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M$\left(-1;\sqrt{3}\right)$ và N $\left(2;\sqrt{3}\right)$:

Điểm M $\left(-1;\sqrt{3}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $\sqrt{3}=-a+b$ (1)

Điểm N $\left(2;\sqrt{3}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $\sqrt{3}=2a+b$ (2)

Suy ra : a, b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3}=-a+b\\\sqrt{3}=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\sqrt{3}\end{cases}$

Vậy, $\begin{cases}a=0\\b=\sqrt{3}\end{cases}$

c. Hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M$(0;0)$ và N $(3;3)$:

Điểm M $(0;0)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có: $b=0$ (1)

Điểm N $(3;3)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $3=3a+b$ (2)

Suy ra : a, b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}b=0\\3=3a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

Vậy, $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

d. Hàm số $y=ax+b$ đi qua hai điểm M$(-1;4)$ và N $(4;-1)$:

Điểm M $(-1;4)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có: $4=-a+b$ (1)

Điểm N $(4;-1)$ thuộc đồ thị hàm số nên ta có phương trình : $-1=4a+b$ (2)

Suy ra : a, b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}4=-a+b\\-1=4a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$

Vậy, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

Bài 14. Xác định giá trị của các hệ số m, n sao cho :

a. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = n \\ mx + ny = 5 \end{cases}$ có nghiệm là x = 2; y = 5

Thay giá trị x = 2; y = 5 vào hệ phương trình, ta có hệ :

$$\begin{cases} 4 + 5m = n \\ 2m + 5n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - n = -4 \\ 2m + 5n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{9} \\ n = \dfrac{11}{9} \end{cases}$$

Vậy, với $m = -\frac{5}{9}$ và $n = \frac{11}{9}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm x = 2; y = 5.

b. Hệ phương trình $\begin{cases} x - y = m \\ 3x + 2y - n = 1 \end{cases}$ có nghiệm là x = 1; y = 2

Thay giá trị x = 1; y = 2 vào hệ phương trình, ta có hệ :

$$\begin{cases} x - y = m \\ 3x + 2y - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 = m \\ 3 + 4 - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 6 \end{cases}$$

Vậy, với $m = -1$ và $n = 6$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm x = 1; y = 2.

Bài 15. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ :

a. Hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-1} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$ có điều kiện $x \neq 1; y \neq -2$

Với x thoả điều kiện.

Đặt ẩn phụ : $a = \dfrac{1}{x-1}$; $b = \dfrac{1}{y+2}$, ta có hệ phương trình mới :

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=1\\ \dfrac{25}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+b=1\\25a+3b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}30a+3b=3\\25a+3b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\text{a}=1\\10a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\b=-1\end{cases}$$

Từ kết quả $\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\b=-1\end{cases}$, suy ra : $\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{1}{y+2}=-1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=5\\y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-3\end{cases}\text{(thoả điều kiện)}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(6;-3)$

b. Hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7\\ \dfrac{45}{2x-y}-\dfrac{48}{x+3y}=-1\end{cases}$ có điều kiện $\begin{cases}2x-y\neq 0\\x+3y\neq 0\end{cases}$

Với x thoả điều kiện.

Đặt ẩn phụ : $a=\dfrac{1}{2x-y};\ b=\dfrac{1}{x+3y}$, ta có hệ phương trình mới :

$$\begin{cases}\dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7\\ \dfrac{45}{2x-y}-\dfrac{48}{x+3y}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27a+32b=7\\45a-48b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{9}\\b=\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

Từ kết quả $\begin{cases}a=\dfrac{1}{9}\\b=\dfrac{1}{8}\end{cases}$, suy ra : $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-y}=\dfrac{1}{9}\\ \dfrac{1}{x+3y}=\dfrac{1}{8}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thoả điều kiện)}$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là $(5;1)$

c*. $\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$. Đặt $a = |x-6|;\ b = |y+1|$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 5a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$, suy ra : $\begin{cases} |x-6| = 1 \\ |y+1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = 1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = -1 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = -1 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = 1 \end{cases} & (4) \end{array} \right.$

Giải (1) $\begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$

Giải (2) $\begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

Giải (3) $\begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$

Giải (4) $\begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có các nghiệm là : $(7;0)$; $(5;-2)$; $(7;-2)$; $(5;0)$

d*. $\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$. Đặt $a = |x+y|;\ b = |x-y|$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3b = 8 \\ 3a - 5b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$, suy ra : $\begin{cases} |x+y|=2 \\ |x-y|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=0 \end{cases} & (2) \end{array} \right.$

Giải (1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Giải (2) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có các nghiệm là : $(1;1)$; $(-1;-1)$

Bài 16*. Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=5 \\ x-2y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ 2x-y+2(3x+y-1)=5 \\ x-2y-3(3x+y-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ 2x-y+6x+2y-2=5 \\ x-2y-9x-3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ 8x+y=7 \\ -8x-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ -4y=4 \\ 8x+y=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ y=-1 \\ 8x-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x+y-1 \\ y=-1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=-1 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $(1;-1;1)$

b. $\begin{cases} x+3y+2z=8 \\ 2x+y+z=6 \\ 3x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2(-3x-y+6)=8 \\ 2x+y+(-3x-y+6)=6 \\ z=-3x-y+6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2(-3x-y+6)=8 \\ 2x+y+(-3x-y+6)=6 \\ z=-3x-y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-6x-2y+12=8 \\ 2x+y-3x-y+6=6 \\ z=-3x-y+6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + y = -4 \\ -x = 0 \\ z = -3x - y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \\ z = 10 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(0;-4;10)$.

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

+ **Bước 1**: Lập hệ phương trình:

+ Chọn ẩn, đơn vị cho ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

+ Biểu diễn các đại lượng chưa biết trong bài toán theo ẩn (chú ý đơn vị)

+ Dựa vào các dữ kiện, điều kiện của bài toán để lập hệ phương trình.

+ **Bước 2**: Giải hệ phương trình.

+ **Bước 3**: Nhận định, so sánh kết quả nghiệm của hệ phương trình với điều kiện bài toán. Kết luận, trả lời, nêu rõ đơn vị của đáp số.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Bài toán Chuyển động

+ Dựa vào các đại lượng: quãng đường (s), vận tốc (v), và thời gian (t) của vật trong công thức: $S = V.T$; $V = \dfrac{S}{T}$; $T = \dfrac{S}{V}$;

+ Chú ý xem vật chuyển động cùng chiều, ngược chiều, hay chuyển động xuôi ngược, xuất phát trước hay xuất phát sau, có thay đổi vận tốc trên đường đi hay không…

+ Cần chọn mốc thời gian, chọn chiều dương của chuyện động.

+ Dựa vào nguyên lý cộng vận tốc:

Ví dụ khi giải bài toán chuyển động của thuyền trên sông, đạp xe ngược gió, xuôi gió. Khi đó ta có:

$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{dòng nước}} + V_{\text{thực}}$ và $V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{thực}} - V_{\text{dòng nước}}$

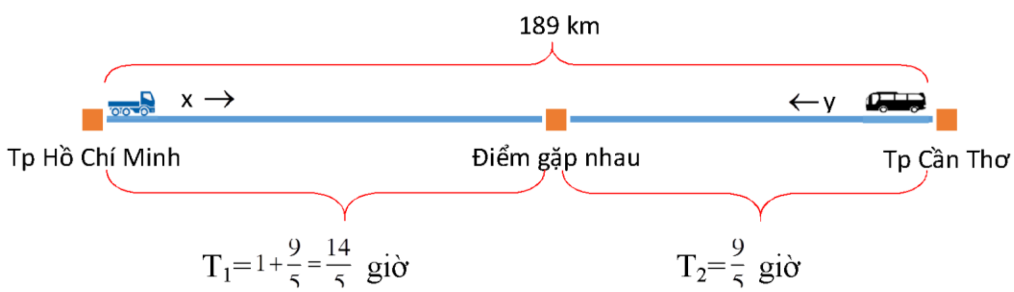
Ví dụ minh hoạ 1: Một chiếc xe tải đi từ Tp Hồ Chí Minh đến Tp Cần Thơ, biết quãng đường dài 189 km. Sau khi xe tải xuất phát được một giờ, một chiếc xe khách đ tiừ Tp Cần Thơ về Tp Hồ Chí Minh và gặp xe tải sau khi nó đi được 1 giờ 48 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 13 km.

Hướng dẫn giải :

Phân tích đề:

Đổi đơn vị: 1 giờ 48 phút = $\frac{9}{5}$ giờ.

Sơ đồ hoá thông tin bài toán:



	V (km/h)	T (h)	S (km)
Xe tải	x	$1+\frac{9}{5}=\frac{14}{5}$	$\frac{14}{5}x$
Xe khách	y	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}y$
Quan hệ	$y=x+13$		$\frac{14}{5}x+\frac{9}{5}y=189$

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe tải ($x>0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của xe khách ($y>13$)

Thời gian xe tải đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau là: $1+\frac{9}{5}=\frac{14}{5}$ giờ

Quãng đường xe tải đi được từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau là: $\frac{14}{5}x$ (km)

Thời gian xe khách đi từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau là : $\frac{9}{5}$ giờ

Quãng đường xe khách đi từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau là: $\frac{9}{5}y$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{14}{5}x+\frac{9}{5}y=189 \\ y=x+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{5}x+\frac{9}{5}y=189 \\ x-y=-13 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=36 \\ y=49 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vận tốc của xe tải là : 36 (km/h)

Vận tốc của xe khách là : 49 (km/h).

Ví dụ minh hoạ 2: Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A.

Hướng dẫn giải :

Phân tích đề: Trong đề này, chúng ta cần chú ý đến câu hỏi tính độ dài quãng đường và thời gian đi (thời điểm xuất phát). Do đó, ta sẽ đặt ẩn là hai đại lượng này.

Dựa vào mối tương quan vận tốc, thời gian đi, ta sẽ suy ra các phương trình cần tìm.

Bảng phân tích tóm tắt:

	V (km/h)	T (h)	S (km)
Dự định		x	y
Nếu xe chạy chậm	35	$x+2$	$35(x+2)$
Nếu xe chạy nhanh	50	$x-1$	$50(x-1)$

Giải:

Gọi y (km) là độ dài quãng đường AB ($y>0$)

Gọi x (h) là thời gian đi từ A đến B theo dự định ($x>1$)

Nếu xe chạy với vận tốc 35 (km/h), thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định nên ta có phương trình: $35(x+2)=y$ (1)

Nếu xe chạy với vận tốc 50 (km/h), thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định nên ta có phương trình: $50(x-1)=y$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}35(x+2)=y\\50(x-1)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}35x+70=y\\50x-50=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-35x=70\\y-50x=-50\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}y=350\\x=8\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Quãng đường AB dài : 350 (km)

Thời điểm ô tô xuất phát tại A là : 12 – 8 = 4 giờ sáng.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng chuyển động ngược chiều

Bài 1: Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6km khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trường hợp trên, nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài 2: Bác Tài đi xe đạp từ thị xã về làng, cô ba Ngân cũng đi xe đạp nhưng từ làng lên thị xã. Họ gặp nhau khi bác Tài đã đi được 1h 30 phút, còn cô ba Ngân đã đi được 2 giờ. Một lần khác, hai người cũng đi từ hai địa điểm như thế nhưng họ khởi hành đồng thời; sau 1 giờ 15 phút họ còn cách nhau 10,5km. Tính vận tốc của mỗi người, biết khoảng cách từ làng đến thị xã là 38km.

Bài 3: Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4km, đoạn xuống dốc dài 5km. Một người đi xe đạp từ A đến B mất 40 phút và đi từ B về A mất 41 phút. Biết vận tốc lên dốc và xuống dốc là không đổi. Tính vận tốc lúc lên dốc và vận tốc lúc xuống dốc.

Bài 4: Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A, B cách nhau 130km và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết xe đi từ B có vận tốc nhanh hơn xe đi từ A là 5 km/h.

Dạng chuyển động cùng chiều

Bài 5: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/h. Biết tổng chiều dài quãng đường AB và BC là 165km và thời gian ô tô đi quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên quãng đường AB và BC.

Dạng chuyển động cùng chiều và ngược chiều

Bài 6: Hai vật chuyển động trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau 1 lần. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.

Bài 7: Ga Huế cách ga Quảng Trị 65km. Một chiếc xe tải đi từ Quảng Trị vào Huế, và một chiếc xe khách đi từ Huế ra Quảng Trị. Biết xe khách khởi hành sau xe tải 36 phút và sau khi đi được 24 phút thì chúng gặp nhau. Nếu hai xe khởi hành đồng thời và cùng đi Hà Nội (đi cùng chiều) thì sau 13 giờ hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết xe khách đi nhanh hơn xe tải.

Bài 8: Một ca nô xuôi dòng một quãng sông dài 12km rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút. Nếu cũng trên quãng sông ấy, ca nô xuôi dòng 4km rồi ngược dòng 8km thì hết 1 giờ 20 phút. Tính vận tốc của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

Dạng toán thay đổi vận tốc trên đường đi

Bài 9: Một người đi xe đạp từ A đến B với thời gian định sẵn. Khi còn cách B 30km, người đó nhận thấy rằng sẽ đến B muộn nữa giờ nếu giữ nguyên vận tốc. Do đó, người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h và đến B sớm hơn nửa giờ so với dự định. Tính vận tốc lúc đầu của người đó.

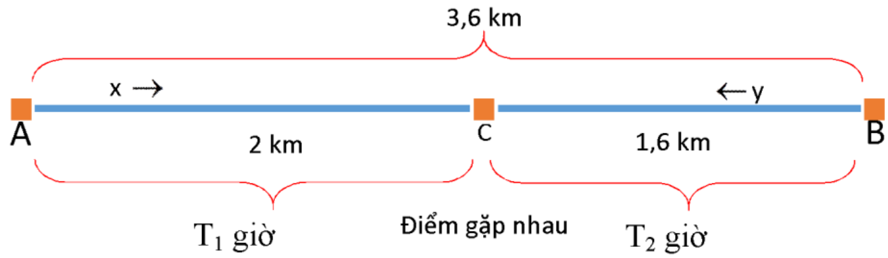
Bài 10: Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc xác định. Nếu vận tốc tăng thêm 30km/h thì thời gian giảm được 1 giờ. Nếu vận tốc giảm 15km/h thì thời gian tăng thêm 1 giờ. Tính vận tốc của ôtô.

HƯỚNG DẪN GIẢI

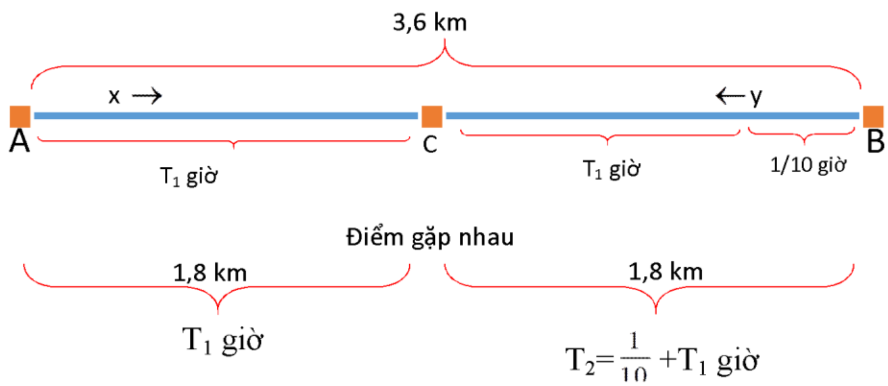
Bài 1: Phân tích đề:

Đổi đơn vị: 6 phút = $\frac{1}{10}$ giờ.

Khi khởi hành cùng lúc:



Khi người đi chậm hơn (B) xuất phát trước:



Bảng phân tích tóm tắt:

	V (km/h)	Quãng đường đi khi khởi hành cùng lúc $T_1=T_2$ (km)	Quãng đường đi khi khởi hành khác nhau $T_1+\frac{1}{10}=T_2$ (km)
Người xuất phát từ A	x	2	1,8
Người xuất phát từ B	y	1,6	1,8
Quan hệ		$\frac{2}{x}=\frac{1,6}{y}$	$\frac{1,8}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1,8}{y}$

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của người đi từ A ($x>0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của người đi từ B ($y>0$)

Khi hai người xuất phát cùng lúc, gặp nhau tại địa điểm cách A 2km, ta có:

Thời gian người A đi từ lúc 2 người xuất phát đến khi gặp nhau là : $\frac{2}{x}$ giờ

Thời gian người B đi từ lúc 2 người xuất phát đến khi gặp nhau là : $\frac{1,6}{y}$ giờ

Vì thời gian hai người đi là như nhau nên ta có phương trình: $\frac{2}{x}=\frac{1,6}{y}$ (1)

Vì xuất phát cùng lúc, nhưng người B đi quãng đường ngắn hơn nên suy ra vận tốc của B nhỏ hơn A: $x>y$.

Khi người đi từ B xuất phát trước 6 phút = $\frac{1}{10}$ giờ, thì hai người gặp nhau tại điểm chính giữa quãng đường cách A và B 1,8km, ta có:

Thời gian người B đi từ lúc B xuất phát đến khi gặp nhau là : $\frac{1,8}{y}$ giờ

Thời gian người A đi từ lúc A xuất phát đến khi gặp nhau là : $\frac{1,8}{x}$ giờ

Do B xuất phát trước 6 phút nên ta có phương trình: $\frac{1,8}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1,8}{y}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{x}=\frac{1,6}{y} \\ \frac{1,8}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1,8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{1,6}{y}=0 \\ \frac{1,8}{x}-\frac{1,8}{y}=-\frac{1}{10} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=4,5 \\ y=3,6 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vận tốc của người xuất phát từ A là : 4,5 (km/h)

Vận tốc của người xuất phát từ B là : 3,6 (km/h).

Bài 2: Đổi: 1 giờ 15 phút = $\frac{5}{4}$ giờ.

Gọi x (km/h) là vận tốc của bác Tài ($x>0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của cô Ba Ngân ($y>0$)

Lần thứ nhất:

Quãng đường bác Tài đi được là: 1,5x (km)

Quãng đường cô Ba Ngân đi được là: 2y (km)

Hai người gặp nhau, nên tổng quãng đường hai người đi được bằng độ dài quãng đường từ làng đến thị xã, ta có: $1,5x+2y=38$ (1)

Lần thứ hai:

Quãng đường bác Tài đi được là : $\frac{5}{4}x$ (km)

Quãng đường cô Ba Ngân đi được là : $\frac{5}{4}y$ (km)

Hai người sau khi đi được 1 giờ 15 phút thì còn cách nhau 10,5 km nên ta có phương trình: $\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}y+10,5=38$ (2)

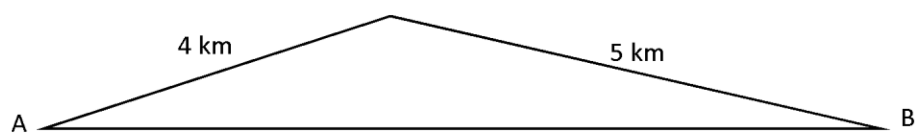
Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1,5x + 2y = 38 \\ \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{4}y + 10,5 = 38 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vận tốc của bác Tài là : 12 (km/h)

Vận tốc của cô Ba Ngân là : 10 (km/h).

Bài 3:



Đổi: 40 phút = $\dfrac{40}{60}$ giờ, và 41 phút = $\dfrac{41}{60}$ giờ.

Gọi x (km/h) là vận tốc lên dốc của xe ($x > 0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc xuống dốc của xe ($y > 0$)

Khi đi từ A đến B: đoạn lên dốc dài 4 km, xuống dốc dài 5 km.

Thời gian đi đoạn lên dốc là : $\dfrac{4}{x}$ giờ

Thời gian đi đoạn xuống dốc là : $\dfrac{5}{y}$ giờ

Tổng thời gian đi từ A đến B là 40 phút, ta có: $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{40}{60}$ (1)

Khi đi từ B về A: đoạn lên dốc dài 5 km, xuống dốc dài 4 km.

Thời gian đi đoạn lên dốc là : $\dfrac{5}{x}$ giờ

Thời gian đi đoạn xuống dốc là : $\dfrac{4}{y}$ giờ

Tổng thời gian đi từ B về A là 41 phút, ta có: $\dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{41}{60}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{40}{60} \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{41}{60} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=12 \\ y=15 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vận tốc của xe khi lên dốc là : 12 (km/h)

Vận tốc của xe khi xuống dốc là : 15 (km/h).

Bài 4:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe khởi hành từ A ($x>0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của xe khởi hành từ B ($y>5$)

Hai xe khởi hành cùng lúc, sau 2 giờ thì gặp nhau nên :

Quãng đường xe đi từ A đi được là : 2x (km)

Quãng đường xe đi từ A đi được là : 2y (km)

Hai xe gặp nhau nên tổng độ dài quãng đường hai xe đi được bằng 130km, ta có: $2x+2y=130$ (1)

Xe đi từ B có vận tốc nhanh hơn xe đi từ A là 5km/h, suy ra: $y=x+5$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+2y=130 \\ y=x+5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=35 \\ y=30 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vận tốc của xe đi từ A là : 35 (km/h)

Vận tốc của xe đi từ B là : 30 (km/h).

Dạng chuyển động cùng chiều

Bài 5:

Gọi x (h) là thời gian ô tô đi quãng đường AB ($x>0$)

Gọi y (h) là thời gian ô tô đi quãng đường BC ($y>0$)

Quãng đường AB có độ dài : 50x (km)

Quãng đường BC có độ dài : 45y (km)

Theo đề bài, ta có tổng quãng đường AB và BC dài 165 km, nên ta có phương trình : $50x + 45y = 165$ (1)

Thời gian ô tô đi quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi quãng đường BC là 30 phút, ta có: $x + \frac{1}{2} = y$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ x + \frac{1}{2} = y \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2 \end{cases}$

KL: Thời gian để ô tô đi hết quãng đường AB là : 1,5 giờ

Thời gian để ô tô đi hết quãng đường BC là : 2 giờ

Dạng chuyển động cùng chiều và ngược chiều

Bài 6: Phân tích đề:

- Nếu hai vật xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm, chuyển động cùng chiều với quỹ đạo tròn thì khi hai vật gặp nhau thì quãng đường đi được của vật chuyển động nhanh hơn sẽ nhiều hơn quãng đường đi được của vật kia đúng 1 vòng.
- Nếu hai vật chuyển động ngược chiều, xuất phát cùng lúc từ cùng một điểm, với quỹ đạo chuyển động là quỹ đạo tròn khi chúng gặp nhau thì tổng quãng đường của chúng là đúng 1 vòng.

Bảng thông tin:

	Vận tốc	Quãng đường đi được khi chuyển động cùng chiều	Quãng đường đi được khi chuyển động ngược chiều
Vật 1	x (m/s) (x > y > 0)	20x (cm)	4x (cm)
Vật 2	y (m/s)	20y (cm)	4y (cm)
Phương trình		$20x-20y=Chu\ vi$	$4x+4y=Chu\ vi$

Lời giải :

Gọi x (m/s) là vận tốc của vật chạy nhanh hơn ($x>y>0$)

Gọi y (m/s) là vận tốc của vật chạy chậm hơn ($y>0$)

Chu vi của quỹ đạo tròn, có đường kính là 20cm là: $C=20\pi$ (cm)

Khi hai vật chạy cùng chiều:

Tính theo chu kì 20 giây thì chúng gặp nhau:

Vật thứ nhất đi được: 20x (cm), vật thứ hai đi được 20y (cm) thì chúng lại gặp nhau. Do đó, ta có phương trình: $20x-20y=20\pi$ (1)

Khi hai vật chạy ngược chiều:

Tính theo chu kì 4 giây thì chúng gặp nhau:

Vật thứ nhất đi được: 4x (cm), vật thứ hai đi được 4y (cm) thì chúng lại gặp nhau. Do đó, ta có phương trình: $4x+4y=20\pi$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}20x-20y=20\pi\\4x+4y=20\pi\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases}x=3\pi\\y=2\pi\end{cases}$

KL: Vận tốc của vật thứ nhất là : 3π (cm/s)

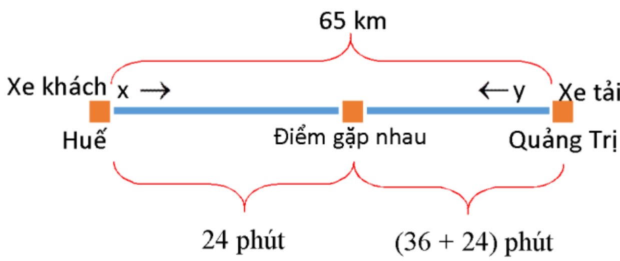
Vận tốc của vật thứ hai là : 2π (cm/s)

Bài 7:

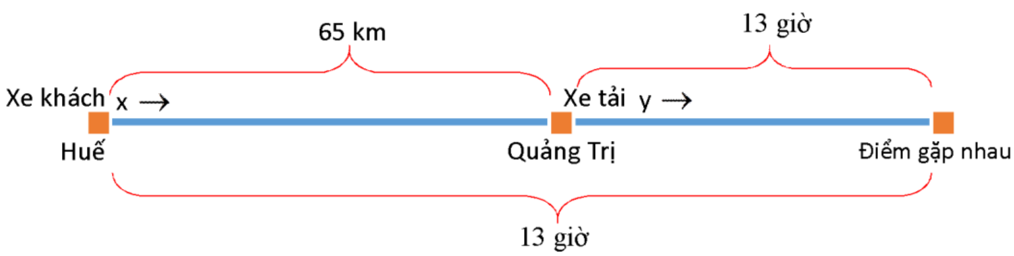
Phân tích đề:

Đổi đơn vị: 24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ.

Khi hai xe đi ngược chiều, được mô tả bằng sơ đồ :



Khi hai xe đi cùng chiều:



Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe khách ($x > y > 0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của xe tải

* Khi hai xe đi ngược chiều:

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau của xe tải là 1 giờ, nên quãng đường xe tải đi được là: y (km)

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau của xe khách là 24 phút $= \frac{2}{5}$ giờ, nên quãng đường xe khách đi được là: $\frac{2}{5}x$ (km)

Vì hai xe đi ngược chiều, nên tổng độ dài quãng đường đúng bằng độ dài quãng đường từ Huế đi Quãng Trị là 65 km. Nên ta có phương trình: $\frac{2}{5}x + y = 65$ (1)

* Khi hai xe đi cùng chiều:

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau của xe tải là 13 giờ, nên quãng đường xe tải đi được là: 13y (km)

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau của xe khách là 1giờ, nên quãng đường xe khách đi được là: 13 x (km)

Vì hai xe đi cùng chiều, nên độ dài quãng đường mà xe khách đi được lớn hơn, và bằng tổng độ dài quãng đường của xe tải đi được cộng với quãng đường Huế - Quãng Trị. Nên ta có phương trình: $13x - 13y = 65$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{5}x + y = 65 \\ 13x - 13y = 65 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 50 \\ y = 45 \end{cases}$

KL: Vận tốc của xe khách là : 50 km/h

Vận tốc của xe tải là : 45 km/h

Bài 8:

Gọi x (km/h) là vận tốc thực của canô ($x > y > 0$)

Gọi y (km/h) là vận tốc của dòng nước.

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là: $x + y$ (km/h)

Vận tốc của canô khi ngược dòng là: $x - y$ (km/h)

Đổi đơn vị: 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ giờ và 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ.

* Khi canô xuôi dòng một quãng sông dài 12km rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút:

Canô xuôi dòng 12 km nên thời gian xuôi dòng là: $\frac{12}{x+y}$ giờ

Canô ngược dòng 12 km nên thời gian ngược dòng là: $\frac{12}{x-y}$ giờ

Nên ta có phương trình: $\frac{12}{x+y} + \frac{12}{x-y} = \frac{5}{2}$ (1)

* Khi ca nô xuôi dòng 4km rồi ngược dòng 8km thì hết 1 giờ 20 phút:

Canô xuôi dòng 4 km nên thời gian xuôi dòng là: $\dfrac{4}{x+y}$ giờ

Canô ngược dòng 8 km nên thời gian ngược dòng là: $\dfrac{8}{x-y}$ giờ

Nên ta có phương trình: $\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{4}{3}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{12}{x+y}+\dfrac{12}{x-y}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

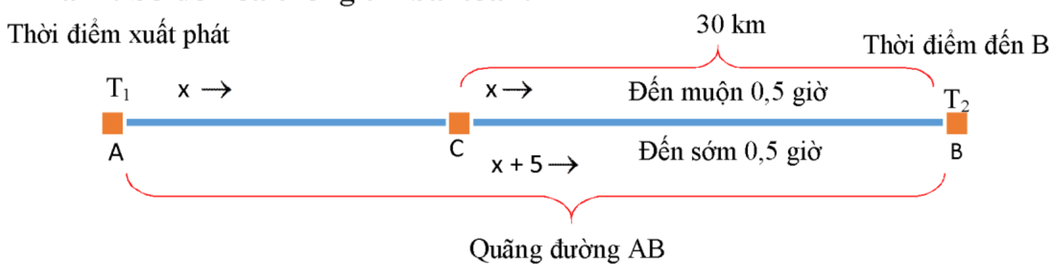
Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases}$

KL: Vận tốc thực của canô là 10 km/h

Vận tốc thực của dòng nước là 2 km/h

Dạng toán thay đổi vận tốc trên đường đi

Bài 9: Sơ đồ hoá thông tin bài toán:



Biểu diễn bài toán qua sơ đồ như trên, ta thấy:

Trên đoạn đi từ A đến C không có gì thay đổi.

Trên đoạn CB dài 30 km, nếu giữ nguyên vận tốc x (km/h) thì sẽ đến B muộn 30 phút so với dự định, và nếu tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm 30 phút so với dự định.

Do đó, chúng ta chỉ xét trên đoạn CB dài 30 km:

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của người đi xe đạp ($x>0$)

T_2 là thời điểm người đi xe đạp đến B theo dự định.

* Khi giữ nguyên vận tốc x (km/h) thì thời gian đi đoạn CB là: $\dfrac{30}{x}$

Do đến B muộn 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{30}{x} = T_2 + \frac{1}{2}$ (1)

* Khi tăng vận tốc thêm 5 (km/h) thì thời gian đi đoạn CB là: $\frac{30}{x+5}$

Do đến B sớm 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{30}{x+5} = T_2 - \frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{30}{x} = T_2 + \frac{1}{2} \\ \frac{30}{x+5} = T_2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{x} - \frac{1}{2} = T_2 \\ \frac{30}{x+5} + \frac{1}{2} = T_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $x = 10$ (thoả mãn điều kiện) và $x = -15$ (không thoả điều kiện).

KL: Vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là: 10 (km/h)

*Chú ý: *Trong bài này, chúng ta gọi T_1; T_2 là thời điểm, và không có đủ dữ kiện để tìm ra thời điểm người đó bắt đầu xuất phát (T_1); cũng như thời điểm người đó đến B là (T_2). Bởi thế, không thể sử dụng kết quả của x để thay vào phương trình (1) hoặc phương trình (2) để tìm ra T_2.*

Bài 10:

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của ô tô ($x > 15$)

Gọi y (giờ) là thời gian đi đoạn đường AB theo dự định.

Độ dài quãng đường AB là: xy (km)

* Khi vận tốc tăng thêm 30 (km/h) thì đến B sớm hơn 1 giờ, nên ta có phương trình :

$$\begin{aligned} &(x+30)(y-1) = xy \\ &\Leftrightarrow xy - x + 30y - 30 = xy \quad (1) \\ &\Leftrightarrow -x + 30y = 30 \end{aligned}$$

* Khi vận tốc giảm 15 (km/h) thì đến B muộn hơn 1 giờ, nên ta có phương

trình : $\begin{aligned}&(x-15)(y+1)=xy\\ &\Leftrightarrow xy+x-15y-15=xy \quad (2)\\ &\Leftrightarrow x-15y=15\end{aligned}$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-x+30y=30\\ x-15y=15\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là: $\begin{cases}x=60\\ y=3\end{cases}$

KL: Vận tốc ban đầu của ô tô là: 60 (km/h)

b. Dạng 2. Bài toán liên quan đến Số học

+ Dựa vào mối liên hệ giữa các hàng (đơn vị) trong một số.

Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab}=10a+b$ với $(0<a\le 9;\ 0\le b\le 9; a,b\in N)$

Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc}=100a+10b+c$ với $(0<a\le 9;\ 0\le b,c\le 9; a,b,c\in N)$

+ Tổng hai số x, y là : x + y

+ Tổng bình phương hai số x, y là : x^2+y^2

+ Bình phương của tổng hai số x, y là : $(x+y)^2$

+ Tổng nghịch đảo hai số x, y là : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Ví dụ minh hoạ 3: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hai lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục một đơn vị, và nếu biết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số cũ 27 đơn vị.

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Hàng chục	Đơn vị	Số cần tìm
Số ban đầu	x	y	$10x+y$
Số mới	y	x	$10y+x$
Quan hệ	$2y-x=1$		$(10x+y)-(10y+x)=27$

Giải:

Gọi x là chữ số hàng chục của số ban đầu ($x \in N; 0 < x \leq 9$)

Gọi y là chữ số hàng đơn vị của số ban đầu ($y \in N;\ 0 < y \leq 9$)

Số ban đầu có dạng là: $\overline{xy} = 10x + y$

Khi đổi chỗ hai chữ số, ta có số mới : $\overline{yx} = 10y + x$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = 1 \\ (10x + y) - (10y + x) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x = 1 \\ 9x - 9y = 27 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy số cần tìm ban đầu là: 74.

Ví dụ minh hoạ 4: Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

Hướng dẫn giải :

Phân tích đề: Trong đề này, các em cần nắm được cách biểu diễn hai số thông qua phép chia có dư: $\frac{A}{B} = C$ dư D suy ra $A = B.C + D$

Giải:

Gọi x là số tự nhiên thứ nhất ($x \in N; x > 124$)

Gọi y là số tự nhiên thứ hai ($y \in N; y > 0; y > x$)

Tổng của hai số bằng 1006, ta có phương trình: $x + y = 1006$ (1)

Và y chia x được thương là 2 và dư 124, ta có phương trình: $y = 2x + 124$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1006 \\ y = 2x + 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1006 \\ 2x - y = -124 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 294 \\ y = 712 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Số lớn là : 712

Số bé là : 294

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng số có hai chữ số

Bài 1: Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ 2 chữ số của nó thì được một số lớn hơn chữ số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới là 99. Tìm số đã cho.

Bài 2: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 36. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành là 110. Tìm số đã cho.

Bài 3: Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số là 16. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được một số mới, lớn hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Dạng hai số

Bài 4: Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số bé thì được thương là 2 và số dư là 124.

Bài 5: Tổng của hai số bằng 59. Hai lần của số này bé hơn 3 lần của số kia là 7. Tìm hai số đó.

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên, biết rằng hiệu của chúng bằng 1275 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 3 và số dư là 125.

Dạng tỷ số tuổi

Bài 7: Số tiền mua 9 quả cam và 8 quả táo rừng là 107 nghìn. Số tiền mua 7 quả cam và 7 quả táo rừng là 91 nghìn. Hỏi giá mỗi quả cam và mỗi quả táo rừng là bao nhiêu?

Bài 8: Bảy năm trước tuổi mẹ bằng 5 lần tuổi con cộng thêm 4. Năm nay tuổi mẹ vừa đúng gấp 3 lần tuổi con. Hỏi năm nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Bài 9: Hôm qua mẹ của Hằng đi chợ mua 5 quả trứng gà và 5 quả trứng vịt hết 37.500đ. Hôm nay đi chợ, mẹ của Hằng mua 3 quả trứng gà và 7 quả trứng vịt hết 36.500đ. Hỏi giá mỗi quả trứng mỗi loại bao nhiêu tiền, biết giá trứng hôm qua và hôm nay chưa thay đổi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng số có hai chữ số

Bài 1: Cách 1.

Do khi đổi chỗ 2 chữ số của số cần tìm ta được số mới lớn hơn, nên:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$; số mới khi đổi chỗ hai chữ số là $\overline{ba}$ với $\left(0<a<b\le 9\right)$

Khi đó: $\overline{ab}=10a+b$ và $\overline{ba}=10b+a$

Số mới lớn hơn số ban đầu là 63 đơn vị nên ta có phương trình:

$$\left(10b+a\right)-\left(10a+b\right)=63 \Leftrightarrow -9a+9b=63 \quad (1)$$

Tổng của số đã cho và số mới là 99:

$$\left(10b+a\right)+\left(10a+b\right)=99 \Leftrightarrow 11a+11b=99 \quad (2)$$

Suy ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-9a+9b=63\\ 11a+11b=99\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có nghiệm: $\begin{cases}a=1\\ b=8\end{cases}$

Vậy số ban đầu cần tìm là : 18.

Cách 2:

Gọi số cần tìm là x, và y là số mới sau khi đổi chỗ (x;y>0 và x; y không chứa chữ số 0)

Số mới lớn hơn số ban đầu 63 đơn vị: $y=x+63$ (1)

Tổng của hai số là 99 : $x+y=99$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases}y=x+63\\ x+y=99\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=-63\\ x+y=99\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=18\\ y=81\end{cases}$

Vậy, số cần tìm là 18.

Bài 2: Cách 1.

Do khi đổi chổ 2 chữ số của số cần tìm ta được số mới lớn hơn, nên:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$; số mới khi đổi chổ hai chữ số là $\overline{ba}$ với $\left(0<a<b\le 9\right)$

Khi đó: $\overline{ab}=10a+b$ và $\overline{ba}=10b+a$

Số mới lớn hơn số ban đầu là 36 đơn vị nên ta có phương trình:

$$\left(10b+a\right)-\left(10a+b\right)=36\Leftrightarrow -9a+9b=36 \quad (1)$$

Tổng của số đã cho và số mới là 110:
$\left(10b+a\right)+\left(10a+b\right)=110\Leftrightarrow 11a+11b=110$ (2)

Suy ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-9a+9b=36\\ 11a+11b=110\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có nghiệm: $\begin{cases}a=3\\ b=7\end{cases}$

Vậy số ban đầu cần tìm là : 37.

Cách 2:

Gọi số cần tìm là x, và y là số mới sau khi đổi chỗ (x;y>0 và x; y không chứa chữ số 0)

Số mới lớn hơn số ban đầu 36 đơn vị: $y=x+36$ (1)

Tổng của hai số là 99 : $x+y=110$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases}y=x+36\\ x+y=110\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-36\\ x+y=110\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=37\\ y=73\end{cases}$

Vậy, số cần tìm là 37.

Bài 3:

Do khi đổi chỗ 2 chữ số của số cần tìm ta được số mới lớn hơn, nên:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$; số mới khi đổi chỗ hai chữ số là $\overline{ba}$ với $(0 < a < b \le 9)$

Khi đó: $\overline{ab} = 10a + b$ và $\overline{ba} = 10b + a$

Tổng của hai chữ số của số ban đầu bằng 16: $a + b = 16$ (1)

Số mới lớn hơn số ban đầu là 18 đơn vị nên ta có phương trình:

$(10b + a) - (10a + b) = 18 \Leftrightarrow -9a + 9b = 18$ (2)

Suy ra, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 16 \\ -9a + 9b = 18 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có nghiệm: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 9 \end{cases}$

Vậy số ban đầu cần tìm là : 79.

Dạng hai số

Bài 4:

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm ($x > y > 0$)

Tổng của chúng bằng 1006: $x + y = 1006$ (1)

Số lớn chia cho số bé thì được thương là 2 và số dư là 124: $x = 2y + 124$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 712 \\ y = 294 \end{cases}$

Vậy, hai số cần tìm là 712 và 294.

Bài 5:

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm.

Tổng của chúng bằng 59: $x + y = 59$ (1)

Hai lần của số này bé hơn 3 lần của số kia là 7: $2x = 3y - 7$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 59 \\ 2x = 3y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 59 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34 \\ y = 25 \end{cases}$

Vậy, hai số cần tìm là 34 và 25

Bài 6:

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm ($x > y > 0$)

Hiệu của hai số bằng 1275: $x - y = 1275$ (1)

Số lớn chia cho số bé thì được thương là 3 và số dư là 125: $x = 3y + 125$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 1275 \\ x = 3y + 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1275 \\ x - 3y = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1850 \\ y = 575 \end{cases}$

Vậy, hai số cần tìm là 1850 và 575.

Dạng tỷ số tuổi

Bài 7:

Gọi x (nghìn) là giá tiền của một quả cam và y (nghìn) là giá tiền của một quả táo rừng ($x, y > 0$).

Mua 9 quả cam và 8 quả táo rừng hết 107 nghìn: $9x + 8y = 107$ (1)

Mua 7 quả cam và 7 quả táo rừng là 91 nghìn: $7x + 7y = 91$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 9x + 8y = 107 \\ 7\text{x} + 7y = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \end{cases}$ (thoả điều kiện)

Vậy, giá của mỗi quả cam là 3 nghìn một quả, giá của mỗi quả táo rừng là 10 nghìn một quả.

Bài 8:

Gọi x (tuổi) là số tuổi của mẹ trong năm nay, và y là số tuổi của con trong năm nay ($x, y > 7$).

Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con: $x = 3y$ (1)

7 năm trước tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con cộng thêm 4: $x - 7 = 5(y - 7) + 4$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x = 3y \\ x - 7 = 5(y - 7) + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 12 \end{cases}$ (thoả điều kiện)

Vậy, năm nay tuổi của mẹ là 36 tuổi, tuổi của con là 12 tuổi.

Bài 9:

Vì giá tiền trong hai lần đi chợ không thay đổi nên:

Gọi x (vnđ) là giá tiền một quả trứng gà, và y (vnđ) là giá tiền một quả trứng vịt ($x, y > 0$).

Mua 5 quả trứng gà và 5 quả trứng vịt hết 37.500đ: $5x + 5y = 37500$ (1)

Mua 3 quả trứng gà và 7 quả trứng vịt hết 36.500đ: $3x + 7y = 36500$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 5x + 5y = 37500 \\ 3x + 7y = 36500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4000 \\ y = 3500 \end{cases}$ (thoả điều kiện)

Vậy, giá một quả trứng gà 4.000đ/quả, giá một quả trứng vịt 3.500đ/quả.

c. Dạng 3. Bài toán về Dân số – Lãi suất ngân hàng, tăng trưởng

+ Tỉ lệ phần trăm: $x\% = \dfrac{x}{100}$

+ Tỉ lệ tăng dân số: Nếu A là số dân ban đầu, tỉ lệ gia tăng dân số là x%.

- Sau 1 năm số dân là: $A + A.x = A(1 + x)$

- Sau *n* năm số dân là : $A(1 + x)^n$

+ Lãi suất ngân hàng: Nếu ban đầu bạn vay (hoặc mượn) số tiền A với lãi suất x%.

- Sau 1 chu kỳ (thường là năm/tháng) số tiền cả gốc lẫn lãi là : $A + A.x = A(1 + x)$

- Sau n chu kỳ (thường là năm/tháng) số tiền cả gốc lẫn lãi là : $A(1 + x)^n$

Ví dụ minh hoạ 5:

Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 720 sản phẩm. Tuy nhiên xí nghiệp I đã vượt mức kế hoạch 15%, xí nghiệp II đã vượt mức kế hoạch 12% do đó hai xí nghiệp đã làm tổng cộng 819 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Hướng dẫn giải :

Gọi x, y là số sản phẩm lần lượt của xí nghiệp I và xí nghiệp II phải làm theo kế hoạch $(x > 0, y > 0)$

Theo giả thiết: x + y = 720 và $\frac{15}{100}x + \frac{12}{100}y + 720 = 819 \Leftrightarrow 5x + 4y = 3300$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720 \\ 5x + 4y = 3300 \end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$

Vậy theo kế hoạch, xí nghiệp I phải làm 420 sản phẩn, xí nghiệp II phải làm 300 sản phẩm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng.

Bài 2: Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó cả 2 đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi năm ngoái mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc.

Bài 3: Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 công cụ. Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch. Do đó cả xí nghiệp đã làm được 400 công cụ. Tính số công cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài 4: Dân số của thành phố Hà Nội sau hai năm từ 2.000.000 thành 2.048.288 người. Tính xem hằng năm dân số trung bình tăng bao nhiêu phần trăm? Biết tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm không thay đổi.

Bài 5: Bác An vay 10.000.000vnđ của ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác An phải trả là 11881000vnđ. Hỏi lãi suất cho vay một năm là bao nhiêu phần trăm ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Gọi x, y là số tiền phải trả cho mỗi loại hàng khi chưa tính thuế VAT $(x>0, y>0)$

* Khi tính thuế 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai người đó phải trả 2,17 triệu đồng:

+ Số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất là: $x+0,1x=1,1x$

+ Số tiền phải trả cho loại hàng thứ hai là: $y+0,08y=1,08y$

+ Tổng số tiền phải trả là 2,17 triệu đồng: $1,1x+1,08y=2,17 \quad (1)$

* Khi tính thuế là 9% đối với cả hai loại hàng người đó phải trả 2,18 triệu đồng:

+ Số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất là: $x+0,09x=1,09x$

+ Số tiền phải trả cho loại hàng thứ hai là: $y+0,09y=1,09y$

+ Tổng số tiền phải trả là 2,18 triệu đồng: $1,09x+1,09y=2,18 \quad (1)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1,1x+1,08y=2,17 \\ 1,09x+1,09y=2,18 \end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy khi chưa tính thêm tiền thuế VAT thì giá của loại hàng thứ nhất là 0,5 triệu đồng, và giá của loại hàng thứ hai là 1,5 triệu đồng.

Bài 2:

Gọi x (tấn) là số thóc thu hoạch được của đơn vị thứ nhất trong năm ngoái, và y (tấn) là số thóc thu hoạch được của đơn vị thứ hai trong năm ngoái $(x > 0, y > 0)$

* Năm ngoái hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch 720 tấn thóc, nên ta có phương trình: $x + y = 720$ (1)

* Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái:

+ Số thóc thu hoạch được của đội thứ nhất là: $x + 0,15x = 1,15x$

+ Số tiền phải trả cho loại hàng thứ hai là: $y + 0,12y = 1,12y$

+ Tổng số thóc thu được là 819: $1,15x + 1,12y = 819$ (2)

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720 \\ 1,15x + 1,12y = 819 \end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy, năm ngoái đội thứ nhất thu hoạch được 420 tấn thóc, đội thứ hai thu hoạch được 300 tấn thóc.

Bài 3:

Gọi x là số công cụ mà xí nghiệp I phải làm theo kế hoạch, và y là số công cụ xí nghiệp II phải làm theo kế hoạch $(x > 0, y > 0)$

* Theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 công cụ, nên ta có phương trình: $x + y = 360$ (1)

* Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch. Do đó cả xí nghiệp đã làm được 400 công cụ:

+ Số công cụ xí nghiệp I làm được : $x+0,12x=1,12x$

+ Số công cụ xí nghiệm II làm được: $y+0,1y=1,1y$

+ Tổng số công cụ làm được: $1,12x+1,1y=400$ (2)

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=360 \\ 1,12x+1,1y=400 \end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x=200 \\ y=160 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy, theo kế hoạch xí nghiệp I cần phải làm 200 công cụ, xí nghiệp II cần phải làm 160 công cụ.

Bài 4*(Chương 4 – ĐS 9):

Chú ý: Vì đã biết số người của năm đầu và 2 năm sau, nên học sinh dễ nhầm lẫn lấy số liệu sau rồi trừ đi số liệu trước đó để chia cho 2 lấy trung bình cộng, từ đó tính phần trăm dẫn đến kết quả sai. Do đó, trong bài này, các em chú ý kiến thức ở phần "Lãi suất ngân hàng, gia tăng dân số".

Gọi x (%) là số phần trăm của sự gia tăng dân số thủ đô Hà Nội trong mỗi năm $(x>0)$.

Số dân ban đầu của Hà Nội là 2.000.000 người.

Nên sau năm thứ nhất dân số tăng là:

$$2.000.000+2.000.000x=2.000.000(1+x)$$

Sau năm thứ hai dân số tăng là :

$$\begin{aligned} &2.000.000(1+x)+2.000.000(1+x).x \\ &=2.000.000(1+x)(1+x) \\ &=2.000.000(1+x)^2 \end{aligned}$$

Theo đề, sau hai năm, dân số Hà Nội là 2.048.288 người, nên ta có phương trình : $2.000.000(1+x)^2=2.048.288$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-\frac{2.048.288}{2.000.000}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{250} \\ x_2=\dfrac{-503}{250} \end{array}\right.$$

Nhận nghiệm $x_1=\dfrac{3}{250}=0,012=1,2\%$ và loại nghiệm $x_2=\dfrac{-503}{250}$.

Vậy, tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm của Hà Nội là 1,2 %.

Bài 5*: Bác An vay 10.000.000vnđ của ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác An phải trả là 11881000vnđ. Hỏi lãi suất cho vay một năm là bao nhiêu phần trăm ?

Gọi x (%) là số phần trăm lãi suất trong một năm ($x>0$).

Số tiền ban đầu mà bác An đã vay là 10.000.000vnđ.

*Nên sau năm thứ nhất :

Số tiền gốc bác An phải trả là 10.000.000vnđ

Số tiền lãi bác An phải trả là: $10.000.000x$ vnđ

Số tiền bác An phải trả cả tiền gốc và tiền lãi là:

$$10.000.000+10.000.000x=10.000.000(1+x)$$

Do năm đầu, bác chưa có tiền trả, nên số tiền cần trả trong năm đầu tiên (gồm gốc và lãi) chuyển thành tiền gốc để tính lãi cho năm sau.

*Sau năm thứ hai bác An phải trả :

Số tiền gốc bác An phải trả là $10.000.000(1+x)$

Số tiền lãi bác An phải trả là: $10.000.000(1+x)x$

Số tiền bác An phải trả cả tiền gốc và tiền lãi là:

$$\begin{aligned}&10.000.000(1+x)+10.000.000(1+x)x\\&=10.000.000(1+x)(1+x)\\&=10.000.000(1+x)^2\end{aligned}$$

Theo đề, sau hai năm, bác An phải trả 11881000vnđ, nên ta có phương trình :

$$10.000.000(1+x)^2=11.881.000$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-\frac{11.881.000}{10.000.000}=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x_1&=\frac{9}{100}\\x_2&=\frac{-209}{100}\end{aligned}\right.$$

Nhận nghiệm $x_1=\frac{9}{100}=0,09=9\%$ và loại nghiệm $x_2=\frac{-209}{100}$.

Vậy, lãi suất cho vay của Ngân hàng là 9 %.

d. Dạng 4. Bài toán về Công việc làm chung, làm riêng – Vòi nước chảy chung chảy riêng (quy về đơn vị)

+ Sản lượng = Năng suất x Thời gian.

+ Xem toàn bộ công việc là 1 = 100%.

+ Làm riêng trong x ngày thì xong việc, suy ra: Năng suất một ngày làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

+ Khi hai người làm chung thì sau n ngày sẽ xong việc, thì năng suất làm việc một ngày của hai người là: $\frac{1}{n}$

+ Khi hai người này làm riêng:
Người thứ nhất làm xong trong x ngày, nên năng suất làm việc của người thứ nhất trong một ngày là: $\frac{1}{x}$.
Người thứ hai làm xong trong y ngày, nên năng suất làm việc của người thứ hai trong một ngày là: $\frac{1}{y}$.

Do đó, ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$

Ví dụ minh hoạ 6: Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày, phần việc đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu ?

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian hoàn thành công việc (ngày)	Năng suất làm việc trong 1 ngày
Hai đội	24	$\frac{1}{24}$
Đội A	x	$\frac{1}{x}$
Đội B	y	$\frac{1}{y}$

Giải:

Gọi x (ngày) là số ngày để đội A một mình hoàn thành công việc; y (ngày) là số ngày để đội B một mình hoàn thành công việc. Điều kiện ($x > 24; y > 24$)

Khi hai đội làm riêng:

Mỗi ngày : Đội A làm được: $\frac{1}{x}$ công việc

Đội B làm được : $\frac{1}{y}$ công việc

Do mỗi ngày, phần việc đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B nên ta có phương trình: $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}.1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.\frac{1}{y}$ (1)

Khi hai đội làm chung: mỗi ngày cả hai đội làm chung được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc

Hai đội làm chung trong 24 ngày thì xong công việc, nên mỗi ngày 2 đội cùng làm thì được $\frac{1}{24}$ công việc. Do đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.\frac{1}{y}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{3}{2}.\frac{1}{y}=0\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=40\\ y=60\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy đội A làm một mình trong 40 ngày thì hoàn thành toàn bộ công việc.

Đội B làm một mình trong 60 ngày thì hoàn thành toàn bộ công việc.

Ví dụ minh hoạ 7: Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Nhưng làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc, do cải tiến cách làm tăng năng suất của đội lên gấp đôi. Nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải trong bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc.

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian hoàn thành công việc (ngày)	Năng suất làm việc trong 1 ngày
Hai đội làm chung	12	$\frac{1}{12}$
Đội I	x	$\frac{1}{x}$
Đội II	y	$\frac{1}{y}$

Giải:

Gọi x (ngày) là số ngày để đội I một mình hoàn thành công việc; y (ngày) là số ngày để đội II một mình hoàn thành công việc. Điều kiện ($x > 12; y > 12$)

Do đó, mỗi ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ công việc, và mỗi ngày đôi II làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Khi hai đội làm chung, mỗi ngày cả hai đội làm được : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ công việc

Hai đội làm chung trong 12 ngày thì xong công việc, nên mỗi ngày 2 đội cùng làm được $\frac{1}{12}$ công việc. Do đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ (1)

Khi hai đội làm chung trong 8 ngày được $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ công việc suy ra:

$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{2}{3}$, do cải tiến cách làm năng suất của đội II tăng gấp đôi, nên mỗi ngày đội hai làm được $\frac{2}{y}$ công việc. Và họ làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày nên $\frac{2}{y}.3,5=\frac{1}{3}$. Vậy, ta có phương trình: $8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y}.\frac{7}{2}=1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y}.\frac{7}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{2}{3}+\frac{7}{y}=1\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=28\\ y=41\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy với năng suất ban đầu, đội I làm một mình trong 28 ngày thì hoàn thành toàn bộ công việc. Đội II làm một mình trong 41 ngày thì hoàn thành toàn bộ công việc.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng vòi nước

Bài 1: Hai vòi nước chảy vào một bể nước cạn thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ mới đầy bể. Hỏi nếu mở riêng mỗi vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu.

Bài 2: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn không có nước thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mở riêng mỗi vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu.

Bài 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 30 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai cho chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu sẽ đầy bể.

Bài 4: Hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì bể sẽ đầy sau 1 giờ 12 phút. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 30 phút và vòi thứ hai chảy trong 45 phút thì đầy $\frac{17}{36}$ bể. Hỏi nếu chảy một mình thì mỗi vòi chảy bao lâu mới đầy bể.

Dạng cùng làm chung công việc

Bài 5: Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày, phần việc đội 1 làm gấp rưỡi rội 2. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu.

Bài 6: Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được

25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 7: Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc, nhưng do cải tiến cách làm, năng suất của đội II tăng lên gấp đôi nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình trong bao lâu để xong công việc.

Bài 8: Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì hai người làm được $\frac{3}{4}$ bức tường. Hỏi mỗi người làm một mình trong bao lâu thì xây xong bức tường.

Bài 9: Hai công nhân cùng sơn cửa cho một công trình trong 4 ngày thì xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 9 ngày, sau đó có thêm người thứ hai đến làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người nếu làm một mình thì mất bao lâu để xong việc.

Bài 10: Hai cần cẩu lớn bốc vỡ một lô hàng ở Cảng Chân Mây. Sau 3 giờ thì có thêm 5 cần cẩu bé (có công suất nhỏ hơn) cùng làm việc. Cả 7 cần cẩu cùng làm việc 3 giờ nữa thì xong. Hỏi mỗi cần cẩu làm việc một mình thì bao lâu sẽ xong việc? Biết rằng nếu cả 7 cần cẩu cùng làm việc từ đầu thì trong 4 giờ sẽ xong việc.

Bài 11: Hai tổ công nhân cùng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 6 giờ. Nhưng khi làm chung trong 5 giờ thì tổ II được điều động đi làm việc khác. Do cải tiến cách làm, năng suất của tổ I tăng 1,5 lần. Nên tổ I đã hoàn thành phần công việc còn lại trong 2 giờ. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi tổ làm một mình thì sau bao nhiêu giờ sẽ làm xong công việc?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng vòi nước

Bài 1:

Hai vòi chảy hết $4\frac{4}{5}$ giờ = $\frac{24}{5}$ giờ thì đầy bể

Vòi 1 chảy 9 giờ + cả hai vòi chảy trong $\frac{6}{5}$ giờ thì đầy bể.

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian chảy đầy bể (giờ)	Năng suất làm đầy bể trong 1 giờ (bể)
Vòi 1	x	$\frac{1}{x}$
Vòi 2	y	$\frac{1}{y}$
Cả hai vòi	$\frac{24}{5}$	$\frac{5}{24}$

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để riêng vòi 1 chảy đầy bể, và y (giờ) là thời gian để riêng vòi 2 chảy đầy bể. Điều kiện ($x > \frac{24}{5}; y > \frac{24}{5}$)

Khi mỗi vòi chảy riêng, thì mỗi giờ : Vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ bể

Vòi 2 chảy được: $\frac{1}{y}$ bể

Khi hai vòi chảy chung, mỗi giờ chúng chảy được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ bể

* Theo đề, khi hai vòi cùng chảy hết $\frac{24}{5}$ giờ thì đầy bể, nên 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{5}{24}$ bể, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}$ (1)

* Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ mới đầy bể:

Trong 9 giờ đầu vòi thứ nhất chảy được : $\frac{9}{x}$ bể

Trong $\frac{6}{5}$ giờ tiếp theo có thêm vòi 2 chảy được $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ thì đầy bể, nên ta có phương trình: $\frac{9}{x}+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\\ \frac{9}{x}+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\\ \frac{9}{x}+\frac{6}{5}\left(\frac{5}{24}\right)=1\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=12\\ y=8\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy vòi 1 chảy riêng sau 12 giờ sẽ đầy bể.

Vòi 2 chảy riêng sau 8 giờ sẽ đầy bể.

Bài 2:

Hai vòi chảy hết 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ thì đầy bể

Vòi 1 chảy trong 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ và vòi 2 chảy trong 12 phút = $\frac{1}{5}$ giờ thì được $\frac{2}{15}$ bể.

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian chảy đầy bể (giờ)	Năng suất làm đầy bể trong 1 giờ (bể)
Vòi 1	x	$\frac{1}{x}$
Vòi 2	y	$\frac{1}{y}$
Cả hai vòi	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để riêng vòi 1 chảy đầy bể, và y (giờ) là thời gian để riêng vòi 2 chảy đầy bể. Điều kiện ($x > \frac{4}{3}; y > \frac{4}{3}$)

Khi mỗi vòi chảy riêng, thì mỗi giờ : Vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ bể

Vòi 2 chảy được: $\frac{1}{y}$ bể

Khi hai vòi chảy chung, mỗi giờ chúng chảy được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ bể

* Theo đề, khi hai vòi cùng chảy hết $\frac{4}{3}$ giờ thì đầy bể, nên 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$ (1)

* Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể:

Trong 10 phút vòi thứ nhất chảy được : $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)$ bể, trong 12 phút vòi 2 chảy được $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{y}\right)$ thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, nên ta có phương trình: $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{2}{15}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2}{15} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy vòi 1 chảy riêng sau 2 giờ sẽ đầy bể.

Vòi 2 chảy riêng sau 4 giờ sẽ đầy bể.

Bài 3:

Hai vòi cùng chảy vào bể cạn hết 1 giờ 30 phút = $\dfrac{3}{2}$ giờ thì đầy bể

Vòi 1 chảy trong 15 phút = $\dfrac{1}{4}$ giờ rồi đóng lại và mở vòi 2 chảy trong 20 phút = $\dfrac{1}{3}$ giờ thì được $\dfrac{1}{5}$ bể.

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian chảy đầy bể (giờ)	Năng suất làm đầy bể trong 1 giờ (bể)
Vòi 1	x	$\dfrac{1}{x}$
Vòi 2	y	$\dfrac{1}{y}$
Cả hai vòi	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{2}{3}$

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để riêng vòi 1 chảy đầy bể, và y (giờ) là thời gian để riêng vòi 2 chảy đầy bể. Điều kiện ($x>\dfrac{3}{2}; y>\dfrac{3}{2}$)

Khi mỗi vòi chảy riêng, thì mỗi giờ : Vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ bể

Vòi 2 chảy được: $\frac{1}{y}$ bể

Khi hai vòi chảy chung, mỗi giờ chúng chảy được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ bể

* Theo đề, khi hai vòi cùng chảy hết $\frac{3}{2}$ giờ thì đầy bể, nên 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{2}{3}$ bể, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ (1)

* Nếu mở vòi 1 chảy trong 15 phút = $\frac{1}{4}$ giờ rồi đóng lại và mở vòi 2 chảy trong 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ thì được $\frac{1}{5}$ bể:

Vòi 1 chảy trong 15 phút = $\frac{1}{4}$ giờ chảy được : $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)$; Vòi 2 chảy trong 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ thì được $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)$, nên ta có phương trình: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{5}\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{4}{15}\\ \frac{1}{y}=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{15}{4}\\ y=\frac{5}{2}\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy vòi 1 chảy riêng sau $\frac{15}{4}=3$ giờ 45 phút sẽ đầy bể.

Vòi 2 chảy riêng sau $\frac{5}{2}=2$ giờ 30 phút sẽ đầy bể.

Bài 4:

Hai vòi cùng chảy vào bể cạn hết 1 giờ 12 phút = $\frac{6}{5}$ giờ thì đầy bể .

Vòi 1 chảy trong 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ và vòi 2 chảy trong 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ thì được $\frac{17}{36}$ bể.

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thời gian chảy đầy bể (giờ)	Năng suất làm đầy bể trong 1 giờ (bể)
Vòi 1	x	$\frac{1}{x}$
Vòi 2	y	$\frac{1}{y}$
Cả hai vòi	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để riêng vòi 1 chảy đầy bể, và y (giờ) là thời gian để riêng vòi 2 chảy đầy bể. Điều kiện ($x > \frac{6}{5}; y > \frac{6}{5}$)

Khi mỗi vòi chảy riêng, thì mỗi giờ : Vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ bể

Vòi 2 chảy được: $\frac{1}{y}$ bể

Khi hai vòi chảy chung, mỗi giờ chúng chảy được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bể

* Theo đề, khi hai vòi cùng chảy hết $\frac{6}{5}$ giờ thì đầy bể, nên 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{5}{6}$ bể, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$ (1)

* Nếu Vòi 1 chảy trong 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ và vòi 2 chảy trong 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ thì được $\frac{17}{36}$ bể :

Vòi 1 chảy trong 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ chảy được : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$; Vòi 2 chảy trong 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ thì được $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{y}\right)$, nên ta có phương trình: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{17}{36}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{17}{36}\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{11}{18}\\ \frac{1}{y}=\frac{2}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{11}\\ y=\frac{9}{2}\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy vòi 1 chảy riêng sau $\frac{18}{11}$ giờ sẽ đầy bể.

Vòi 2 chảy riêng sau $\frac{9}{2}$ = 4 giờ 30 phút sẽ đầy bể.

Dạng cùng làm chung công việc

Bài 5:

Gọi x (ngày) là thời gian để đội thứ nhất làm riêng và làm xong công việc, và y (ngày) là thời gian để đội thứ hai làm riêng và làm xong công việc. Điều kiện ($x>24; y>24$)

Khi mỗi đội làm riêng thì mỗi ngày đội một làm được: $\frac{1}{x}$ công việc, đội hai làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Theo đề, năng suất đội một gấp rưỡi đội hai: $\frac{1}{x} = 1,5\frac{1}{y}$ (1)

Cả hai đội cùng làm trong 24 ngày thì xong, nên mỗi ngày cả hai đội làm được:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1,5\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi đội làm riêng thì đội 1 cần 40 ngày để làm xong công việc, đội hai cần 60 ngày để làm xong công việc.

Bài 6:

Gọi x (giờ) là thời gian để người thứ nhất làm riêng và làm xong công việc, và y (giờ) là thời gian để người thứ hai làm riêng và làm xong công việc. Điều kiện ($x > 16; y > 16$)

Khi người thứ nhất làm riêng thì mỗi giờ làm được: $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm riêng thì mỗi giờ làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Khi làm chung:

Hai người làm chung trong 16 giờ thì xong công việc, nên cả hai người làm trong 1 giờ được $\frac{1}{16}$ giờ, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Khi làm riêng:

Người thứ nhất làm trong 3 giờ làm được : $3\left(\frac{1}{x}\right)$ công việc

Người thứ hai làm trong 6 giờ làm được : $6\left(\frac{1}{y}\right)$ công việc

Khi đó cả hai người làm được $25\% = \frac{1}{4}$ công việc: $3\left(\frac{1}{x}\right) + 6\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ 3\left(\frac{1}{x}\right) + 6\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi người làm riêng thì người thứ nhất cần 24 giờ, và người thứ hai cần 48 giờ để hoàn thành công việc.

Bài 7:

Gọi x (ngày) là thời gian để đội thứ nhất làm riêng và làm xong công việc theo dự định, và y (ngày) là thời gian để đội thứ hai làm riêng và làm xong công việc theo dự định. Điều kiện ($x > 24; y > 24$)

Khi mỗi đội làm riêng thì mỗi ngày đội một làm được: $\frac{1}{x}$ công việc, đội hai làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Theo đề, hai đội làm chung trong 12 ngày thì xong việc, nên mỗi ngày cả hai đội làm được : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Thực tế:

Trong 8 ngày đầu cả hai đội làm được : $8.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ công việc

Trong 3,5 ngày tiếp theo, đội 2 cải tiến kỉ thuật nâng cao năng suất tăng gấp đôi $2\left(\frac{1}{y}\right)$ nên làm được : $3{,}5 \times 2\left(\frac{1}{y}\right)$ công việc.

Ta có phương trình : $8.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3,5\times 2\left(\frac{1}{y}\right)=1$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ 8.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3,5\times 2\left(\frac{1}{y}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{8}{x}+\frac{15}{y}=1\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=28\\ y=21\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi đội làm riêng (năng suất không đổi) thì đội 1 cần 28 ngày để làm xong công việc, đội hai cần 21 ngày để làm xong công việc.

Bài 8:

Gọi x (giờ) là thời gian để người thứ nhất làm riêng và làm xong công việc, và y (giờ) là thời gian để người thứ hai làm riêng và làm xong công việc. Điều kiện ($x>\frac{36}{5};y>\frac{36}{5}$)

Khi người thứ nhất làm riêng thì mỗi giờ làm được: $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm riêng thì mỗi giờ làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Khi làm chung:

Hai người làm chung trong 7 giờ 12 phút = $\frac{36}{5}$ giờ thì xong công việc, nên mỗi giờ cả hai người làm được $\frac{5}{36}$ công việc: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{36}$ (1)

Khi làm riêng:

Người thứ nhất làm trong 5 giờ làm được : $5\left(\frac{1}{x}\right)$ công việc

Người thứ hai làm trong 6 giờ làm được : $6\left(\frac{1}{y}\right)$ công việc

Khi đó cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc: $5\left(\frac{1}{x}\right)+6\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{36} \\ 5\left(\dfrac{1}{x}\right)+6\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=12 \\ y=18 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi người làm riêng thì người thứ nhất cần 12 giờ, và người thứ hai cần 18 giờ để hoàn thành công việc.

Bài 9:

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất làm riêng và làm xong công việc, và y (ngày) là thời gian để người thứ hai làm riêng và làm xong công việc. Điều kiện ($x>4; y>4$)

Khi người thứ nhất làm riêng thì mỗi ngày làm được: $\dfrac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm riêng thì mỗi ngày làm được: $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Khi làm chung:

Hai người làm chung trong 4 ngày thì xong công việc, nên mỗi ngày cả hai người làm được $\dfrac{1}{4}$ công việc: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ (1)

Khi làm riêng:

Người thứ nhất làm trong 9 + 1 = 10 ngày làm được : $10\left(\dfrac{1}{x}\right)$ công việc

Người thứ hai làm trong 1 ngày làm được : $\dfrac{1}{y}$ công việc

Khi đó cả hai người làm xong công việc nên: $10\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ 10\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi người làm riêng thì người thứ nhất cần 12 ngày, và người thứ hai cần 6 ngày để hoàn thành công việc.

Bài 10:

Gọi x (giờ) là thời gian để một cần cẩu lớn làm riêng và làm xong công việc, và y (giờ) là thời gian để một cần cẩu bé làm riêng và làm xong công việc. Điều kiện ($x > 4; y > 4$)

Khi một cần cẩu lớn làm riêng thì trong 1 giờ sẽ làm được: $\frac{1}{x}$ công việc

Khi một cần cẩu bé làm riêng thì trong 1 giờ sẽ làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Trường hợp 1: Có 2 cần cẩu lớn làm trong 3 giờ, sau đó có thêm 5 cần cẩu bé làm trong 3 giờ nữa thì xong việc.

Trong 3 giờ đầu có 2 cần cẩu lớn làm việc : $3\left(2.\frac{1}{x}\right)$ công việc

Trong 3 giờ tiếp theo có 2 cần cẩu lớn và 5 cần cẩu bé làm việc: $3\left(2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}\right)$

Ta có phương trình: $3\left(2.\frac{1}{x}\right)+3\left(2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}\right)=1$ (1)

Trường hợp 2: cả 7 cần cẩu cùng làm việc từ đầu thì trong 4 giờ sẽ xong việc.

Ta có phương trình: $4\left(2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}\right)=1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\left(2.\frac{1}{x}\right)+3\left(2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}\right)=1 \\ 4\left(2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(\frac{1}{x}\right)+15\left(\frac{1}{y}\right)=1 \\ 8\left(\frac{1}{x}\right)+20\left(\frac{1}{y}\right)=1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 24 \\ y = 30 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu một cần cẩu lớn làm một mình trong 24 giờ sẽ xong việc. Một cần cẩu bé làm một mình trong 30 giờ sẽ xong việc.

Bài 11:

Gọi x (giờ) là thời gian để tổ thứ nhất làm riêng và làm xong công việc, và y (giờ) là thời gian để tổ thứ hai làm riêng và làm xong công việc.

Điều kiện ($x > 6; y > 6$)

Năng suất làm việc của tổ thứ nhất mỗi giờ làm được: $\frac{1}{x}$ công việc, năng suất làm việc của tổ thứ hai mỗi giờ làm được: $\frac{1}{y}$ công việc.

Theo dự định: Hai đội làm chung trong 6 giờ thì xong công việc, nên mỗi giờ cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ công việc: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)

Thực tế: Cả hai tổ làm chung trong 5 giờ làm được : $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ công việc

Khi chỉ còn tổ thứ nhất (năng suất tăng 1,5 lần) làm trong 2 giờ làm được: $2\left(1,5\times\frac{1}{y}\right)$ công việc.

Khi đó ta có phương trình: $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\left(1,5\times\frac{1}{y}\right)=1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\left(1,5\times\frac{1}{y}\right)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ 5\left(\frac{1}{x}\right)+8\left(\frac{1}{y}\right)=1\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=18\\ y=9\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy nếu mỗi tổ làm riêng theo năng suất ban đầu thì tổ thứ nhất cần 18 giờ để hoàn thành công việc, tổ thứ hai cần 9 giờ để hoàn thành công việc.

e. Dạng 5. Bài toán có liên quan đến nội dung hình học

+ Diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}xy$ (x là cạnh đáy, y là đường cao).

+ Diện tích tam giác vuông: $S=\frac{1}{2}xy$ với x và y là độ dài hai cạnh góc vuông. Độ dài cạnh huyền: $z^2 = x^2 + y^2$ (z là độ dài cạnh huyền)

+ Diện tích hình chữ nhật: $S=xy$ (x là chiều rộng, y là chiều dài)

+ Diện tích hình vuông: $S=x^2$ (x là độ dài cạnh hình vuông)

+ Diện tích hình thang: $S=\frac{1}{2}h.\left(x+y\right)$ (x là độ dài đáy bé, y là độ dài đáy lớn, h là chiều cao hình thang).

+ Đa giác có n đỉnh thì có số đường chéo là: $\frac{n(n-3)}{2}$

Ví dụ minh hoạ 8: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m, nếu tăng chiều dài thêm 3m, tăng chiều rộng thêm 5m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 cm^2. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thực tế	Khi có thay đổi
Chiều dài	x	$x+3$
Chiều rộng	y	$y+5$
Chu vi	$2\left(x+y\right)=80$	
Diện tích	$x.y$	$\left(x+3\right)\left(y+5\right)=x.y+195$

Giải:

Gọi x (mét) là chiều dài của mảnh đất; y (mét) là chiều rộng mảnh đất. Điều kiện ($x > y > 0$)

Thực tế: Chu vi mảnh đất bằng 80 m, ta có phương trình : $2\left(x+y\right)=80$ (1)

Diện tích mảnh đất: xy (m^2)

Khi kích thức thay đổi: chiều dài tăng thêm 3m, chiều rộng tăng thêm 5m.

Diện tích mảnh đất mới tăng thêm 195 m^2 so với kích thước ban đầu là:

$\left(x+3\right)\left(y+5\right)=xy+195$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2\left(x+y\right)=80\\ \left(x+3\right)\left(y+5\right)=xy+195\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=40\\ xy+5x+3y+15=xy+195\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=40\\ 5x+3y=180\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=30\\ y=10\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 30m.

Chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 10m.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng thêm bớt chiều dài cạnh của các hình hình học

Bài 1: Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam vuông. Biết nếu tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng lên 36cm^2, và nếu một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm 4cm thì diện tích của tam giác đó giảm đi 26cm^2.

Bài 2: Nhà bạn Đào có một mảnh vườn trồng cà chua. Vườn được làm thành nhiều luống để trồng cà chua, biết số cây trong mỗi luống bằng nhau. Đào tính rằng: nếu tăng thêm 8 luống rau nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì tổng số cây trong vườn giảm đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì tổng số cây trong vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Đào trồng bao nhiêu cây cà chua.

Bài 3: Sân trường của trường Trần Phú là hình chữ nhật có chu vi 340m. Biết 3 lần chiều dài lớn hơn 4 lần chiều rộng là 20 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường.

Bài 4: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80m. Nếu tăng chiều dài thêm 3m, và tăng chiều rộng thêm 5m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 5: Một thửa ruộng hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng 100m^2. Nếu chiều dài và chiều rộng cùng giảm 2m thì diện tích giảm đi 68m^2. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Bài 6: Tính chu vi của một hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài và chiều rộng lên 5m thì diện tích hình chữ nhật tăng 225m^2. Nếu tăng chiều rộng lên 2m và giảm chiều dài 5m thì diện tích hình chữ nhật không thay đổi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng thêm bớt chiều dài cạnh của các hình hình học

Bài 1:

Gọi x và y (cm) là độ dài hai cạnh góc vuông. Điều kiện ($x > 4; y > 4$)

Diện tích tam giác: $\frac{1}{2}xy$ (cm^2)

Khi kích thức thay đổi:

+ Tăng mỗi cạnh thêm 3cm, diện tích tam giác mới là: $\frac{1}{2}(x+3)(y+3)$

Diện tích mảnh đất mới tăng thêm 36 cm^2 so với kích thước ban đầu là:

$$\frac{1}{2}(x+3)(y+3) = \frac{1}{2}xy + 36 \quad (1).$$

+ Nếu một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm 4cm, diện tích tam giác mới là:

$$\frac{1}{2}(x-2)(y-4)$$

Diện tích của tam giác khi đó giảm đi $26cm^2$ so với kích thước ban đầu:

$$\frac{1}{2}(x-2)(y-4)=\frac{1}{2}xy-26 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+3)(y+3)=\frac{1}{2}xy+36\\ \frac{1}{2}(x-2)(y-4)=\frac{1}{2}xy-26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+3y=63\\ 2x+y=30\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases}x=12\\ y=9\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy kích thước ban đầu của hai cạnh của tam giác vuông là 12cm và 9cm.

Bài 2:

Gọi x là số luống trồng cây, và y là số cây trên mỗi luống. Điều kiện ($x>4; y>54$)

Số cây có thể trồng trên mảnh vườn hiện tại là: xy (cây)

Khi có sự thay đổi:

Trường hợp 1:

Nếu tăng thêm 8 luống rau : $x+8$ (luống)

Mỗi luống trồng ít đi 3 cây: $y-3$ (cây)

Tổng số cây trong vườn: $(x+8)(y-3)$ giảm 54 cây so với số cây ban đầu, nên ta có phương trình : $(x+8)(y-3)=xy-54 \quad (1)$

Trường hợp 2:

Nếu giảm 4 luống rau : $x-4$ (luống)

Mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây: $y+2$ (cây)

Tổng số cây trong vườn: $(x-4)(y+2)$ tăng 32 cây so với số cây ban đầu, nên ta có phương trình : $(x-4)(y+2)=xy+32 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+8).(y-3)=xy-54\\ (x-4).(y+2)=xy+32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+8y=-30\\ 2x-4y=40\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Tổng số cây cà chua ban đầu trên mảnh vườn là $50 \times 15 = 750$ cây.

Bài 3:

Gọi x (m) là kích thước chiều dài và y (m) là kích thước chiều rộng của sân trường hình chữ nhật. Điều kiện ($x > 0; y > 0$)

Chu vi của sân trường là 340m nên ta có phương trình: $2(x+y) = 340$ (1)

Ba lần chiều dài lớn hơn bốn lần chiều rộng là 20m: $3x - 4y = 20$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 340 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 170 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 100 \\ y = 70 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Sân trường hình chữ nhật có chiều dài 100m và chiều rộng là 70m.

Bài 4:

Gọi x (m) là kích thước chiều dài và y (m) là kích thước chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật. Điều kiện ($x > 0; y > 0$)

Chu vi của mảnh đất là 80m nên ta có phương trình: $2(x+y) = 80$ (1)

Diện tích ban đầu của mảnh đất là xy (m^2).

Tăng chiều dài thêm 3m: $(x+3)$, và tăng chiều rộng thêm 5m: $(y+5)$ thì diện tích của mảnh đất $(x+3)(y+5)$ tăng thêm $195m^2$ so với ban đầu, nên ta có phương trình: $(x+3)(y+5) = xy + 195$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y) = 80 \\ (x+3)(y+5) = xy + 195 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ xy + 5x + 3y + 15 = xy + 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 3y = 180 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 30m và chiều rộng là 10m.

Bài 5:

Gọi x (m) là kích thước chiều dài và y (m) là kích thước chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật. Điều kiện ($x > 2; y > 2$)

Diện tích ban đầu của thửa ruộng là xy (m^2).

Tăng chiều dài thêm 2m: $(x+2)$, và tăng chiều rộng thêm 3m: $(y+3)$ thì diện tích của thửa ruộng là $(x+2)(y+3)$ tăng thêm 100m^2 so với ban đầu, nên ta có phương trình: $(x+2)(y+3) = xy + 100$ (1)

Giảm chiều dài đi 2m: $(x-2)$, và giảm chiều rộng đi 2m: $(y-2)$ thì diện tích của thửa ruộng là $(x-2)(y-2)$ giảm đi 68m^2 so với ban đầu, nên ta có phương trình: $(x-2)(y-2) = xy - 68$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)(y+3) = xy + 100 \\ (x-2)(y-2) = xy - 68 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 3x + 2y + 6 = xy + 100 \\ xy - 2x - 2y + 4 = xy - 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ -2x - 2y = -72 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 22 \\ y = 14 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài 22m và chiều rộng là 14m.

Bài 6:

Chú ý: *Trong bài này, đề yêu cầu tính chu vi hình chữ nhật, để tính chu vi ta cần biết chiều dài và chiều rộng của nó. Hơn nữa, nội dung bài toán cho biết sự thay đổi của kích thức hai cạnh của hình chữ nhật nên ta phải đặt ẩn là kích thước hai cạnh của hình chữ nhật.*

Gọi x (m) là kích thước chiều dài và y (m) là kích thước chiều rộng của hình chữ nhật. Điều kiện ($x > 5; y > 0$)

Diện tích ban đầu của hình chữ nhật là: xy (m^2)

Tăng chiều dài thêm 5m: $(x+5)$, và tăng chiều rộng thêm 5m: $(y+5)$ thì diện tích của hình chữ nhật là $(x+5)(y+5)$ tăng thêm 225m^2 so với ban đầu, nên ta có phương trình: $(x+5)(y+5) = xy + 225$ (1)

Tăng chiều rộng lên 2m: $(y+2)$, và giảm chiều dài 5m: $(x-5)$ thì diện tích hình chữ nhật không thay đổi, nên ta có phương trình: $(x-5)(y+2) = xy$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+5)(y+5) = xy + 225 \\ (x-5)(y+2) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 200 \\ 2x - 5y = 10 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Sân trường hình chữ nhật có chiều dài 30m và chiều rộng là 10m.

f. Dạng 6. Bài toán có liên quan đến nội dung vật lý, hoá học

+ Công thức : $V = \frac{m}{D}$ (V là thể tích dung dịch, m là khối lượng dịch, D là khối lượng riêng của dung dịch.

+ Khối lượng nồng độ dung dịch = $\dfrac{\text{Khối lượng chất tan}}{\text{Khối lượng dung môi (m tổng)}}$

Ví dụ minh hoạ 9: Một dung dịch loại 1 chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác loại 2 chứa 55% axit nitơric .Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitơric?

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Thể tích (lít)	Lượng chất tan (axit nitơric)	Nồng độ phần trăm
Dung dịch loại 1	x	$\frac{30}{100}x$	30%
Dung dịch loại 2	y	$\frac{55}{100}y$	55%
Dung dịch mới	100	50	50%
Phương trình	$x+y=100$	$\frac{30}{100}x+\frac{55}{100}y=50$	

Giải:

Gọi x là số lít dung dịch loại 1, và y là số lít dung dịch loại 2 cần để tạo ra dung dịch mới có tỉ lệ 50% axit nitơric. ($x;y>0$)

Lượng axit nitơric chứa trong x lít dung dịch loại 1 là : $\frac{30}{100}x$

Lượng axit nitơric chứa trong y lít dung dịch loại 2 là : $\frac{55}{100}y$

Dung dịch mới có thể tích 100 lít, với nồng độ 50% nên ta có các phương trình sau:

Tổng thể tích hai loại dung dịch dùng để pha chế: $x+y=100$ (1)

Lượng axit nitơric trong dung dịch mới: $\frac{30}{100}x+\frac{55}{100}y=50$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{30}{100}x+\frac{55}{100}y=50 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy cần lấy 20 lít dung dịch loại 1 và 80 lít dung dịch loại 2 để pha chế được 100 lít dung dịch mới có nồng độ 50%.

g. Dạng 7. Bài toán khác

Ngoài các dạng toán đã nêu ở trên, chúng ta có thể gặp các dạng toán khác như: toán về độ tuổi, toán lãi suất ngân hàng, lãi vay ngân hàng, hoặc loại toán phân chia hàng hoá, phân chia đều,…

Với mỗi dạng đó, ta nên lập bảng phân tích hoặc lập sơ đồ (trong toán chuyển động) để dễ dàng nắm bắt và đưa ra các phương trình hợp lý, chính xác giúp cho việc giải toán dễ dàng, trình bày mạch lạc hơn.

Ví dụ minh hoạ 10: Có 12 chiếc bánh lớn cho 12 người ăn. Biết rằng mỗi người đàn ông có thể ăn hết 2 chiếc bánh, phụ nữ mỗi người ăn $\frac{1}{2}$ chiếc bánh, trẻ em mỗi người ăn $\frac{1}{4}$ chiếc bánh. Hỏi có bao nhiêu người đàn ông, bao nhiêu người phụ nữ và bao nhiêu trẻ em?

Hướng dẫn giải :

Bảng phân tích tóm tắt:

	Số lượng (người)	Số bánh mỗi người ăn được (chiệc)	Tổng số bánh ăn được
Đàn ông	x	2	$2x$
Phụ nữ	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}y$
Trẻ em	z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}z$
Phương trình	$x+y+z=12$	$2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=12$	

Giải:

Gọi x, y, z lần lượt là số đàn ông, phụ nữ, và trẻ em ($x; y; z \in N; x, y, z > 0$)

Số bánh mà x người đàn ông ăn hết là : $2x$

Số bánh mà y người phụ nữ ăn hết là : $\frac{1}{2}y$

Số bánh mà z trẻ em ăn hết là : $\frac{1}{4}z$

Do tổng số người là 12 người nên ta có phương trình: $x + y + z = 12$ (1)

Tổng số bánh mà 12 người ăn là 12 chiếc bánh nên: $2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 12$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 2y + z = 48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 2y + z = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 7x + y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ y = 36 - 7x \end{cases}$

Vì x, y , z là các số tự nhiên, và $y = 36 - 7x$ phải là số nguyên dương nên :

$1 \le 36 - 7x \le 12 \Leftrightarrow -35 \le -7x \le -24 \Leftrightarrow \frac{24}{7} \le x \le 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 6 \\ x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow z = 0 \end{array} \right.$

Loại trường hợp z = 0, nhận nghiệm là $x = 5; y = 1; z = 6$

KL: Vậy có 5 người đàn ông, 1 phụ nữ và 6 trẻ em.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng dãy bàn – ghế

Bài 1: Trong phòng học có một số dãy bàn ghế dài. Nếu xếp mỗi dãy 3 học sinh thì 6 học sinh không có chổ ngồi. Nếu xếp mỗi dãy 4 học sinh thì thừa một dãy. Hỏi lớp có bao nhiêu dãy bàn ghế và bao nhiêu học sinh.

Bài 2: Để sửa một ngôi nhà cần một số thợ làm việc trong thời gian quy định. Nếu giảm 3 người thì mất thêm 6 ngày để hoàn thành, nếu tăng thêm 2 người sẽ hoàn thành sớm hơn 2 ngày. Hỏi theo quy định thì cần bao nhiêu thợ và làm trong bao nhiêu ngày? Biết rằng khả năng lao động của mỗi công nhân đều như nhau.

Bài 3: Trong một phòng họp có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 5 người thì có 9 người không có chỗ ngồi. Nếu xếp mỗi ghế 6 người thì thừa 1 ghế. Hỏi phòng họp có bao nhiêu ghế và bao nhiêu người dự họp?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng dãy bàn – ghế

Bài 1:

Gọi x là số dãy ghế và y là số học sinh có trong phòng học. Điều kiện ($x > 2; y > 6$)

Xếp mỗi dãy 3 học sinh thì 6 học sinh không có chổ ngồi:

+ Số dãy ghế được sử dụng: x

+ Số học sinh ngồi trong mỗi dãy: 3

+ Số học sinh có chỗ ngồi : $3x$

+ Số học sinh không có chỗ ngồi : 6

Do đó tổng số học sinh có chổ ngồi cộng với 6 học sinh không có chổ ngồi bằng số học sinh có trong phòng học, nên ta có phương trình: $3x + 6 = y$ (1)

Xếp mỗi dãy 4 học sinh thì thừa một dãy.

+ Số dãy ghế được sử dụng: $x - 1$

+ Số học sinh ngồi trong mỗi dãy: 4

+ Số học sinh có chỗ ngồi : $4(x-1)$

+ Số học sinh không có chỗ ngồi : 0

Do đó tất cả học sinh đều có chổ ngồi, nên ta có phương trình: $4(x-1) = y$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 6 = y \\ 4(x-1) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -6 \\ 4x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 36 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện)}$$

KL: Vậy phòng học có 10 dãy ghế và 36 học sinh.

Bài 2:

Gọi x là số thợ cần thiết và y là số ngày để hoàn thành công việc theo quy định. Điều kiện ($x > 3; y > 2$)

Bảng phân tích số liệu:

Số thợ lao động	Số ngày làm	Tổng số công lao động
x	y	xy
$x - 3$	$y+6$	$(x-3)(y+6)$
$x + 2$	$y-2$	$(x+2)(y-2)$

Do khả năng lao động của mỗi người thợ đều như nhau nên: tổng số **công lao động** (năng suất lao động một ngày của 1 người thợ) để hoàn thành công việc là bằng nhau trong các trường hợp.

+ Tổng số công lao động ban đầu với x người thợ và y ngày làm: xy

+ Tổng số công lao động khi giảm 3 thợ và số ngày lao động tăng 6 ngày là: $(x-3)(y+6)$, nên ta có phương trình: $(x-3)(y+6) = xy$ (1)

+ Tổng số công lao động khi tăng 2 thợ và số ngày lao động giảm 2 ngày là: $(x+2)(y-2)$, nên ta có phương trình: $(x+2)(y-2) = xy$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)(y+6) = xy\\(x+2)(y-2) = xy\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}xy+6x-3y-18 = xy\\xy-2x+2y-4 = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-3y=18\\-2x+2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8\\y=10\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Theo quy định cần 8 người thợ làm trong 10 ngày để làm xong công việc.

Bài 3:

Gọi x là số ghế và y là số người dự họp có mặt trong phong. Điều kiện ($x > 1; y > 9$)

Xếp mỗi ghế 5 người thì có 9 người không có chổ ngồi:

+ Số dãy ghế được sử dụng: x

+ Số người ngồi trong mỗi dãy: 5

+ Số người có chỗ ngồi : $5x$

+ Số người không có chỗ ngồi : 9

Do đó tổng số người có chổ ngồi cộng với 9 người không có chổ ngồi bằng tổng số người có mặt trong phòng họp, nên ta có phương trình: $5x+9=y$ (1)

Xếp mỗi ghế 6 người thì thừa 1 ghế.

+ Số dãy ghế được sử dụng: $x-1$

+ Số người ngồi trong mỗi dãy: 6

+ Số người có chỗ ngồi : $6(x-1)$

+ Số người không có chỗ ngồi : 0

Do tất cả mọi người đều có chổ ngồi, nên ta có phương trình: $6(x-1)=y$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 5x+9=y \\ 6(x-1)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y=-9 \\ 6x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=84 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

KL: Vậy trong phòng họp có 15 dãy ghế và có 84 người dự họp.

V. ÔN TẬP CHƯƠNG 3

SƠ ĐỒ TƯ DUY CHƯƠNG 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- Phương trình (1) có đồ thị là đường thẳng d_1 :

  $$y = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x + \frac{c_1}{b_1} \text{ với } (b_1 \neq 0)$$

  Phương trình (2) có đồ thị là đường thẳng d_2 :

  $$y = \left(-\frac{a_2}{b_2}\right)x + \frac{c_2}{b_2} \text{ với } (b_2 \neq 0)$$

- Nghiệm của hệ là nghiệm chung của cả hai phương trình (1) và (2)

- Số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2

- Nhìn nhanh số nghiệm của hệ:

  *Vô nghiệm $\Leftrightarrow$

  $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

  *Một nghiệm duy nhất

  $$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

  *Vô số nghiệm $\Leftrightarrow$

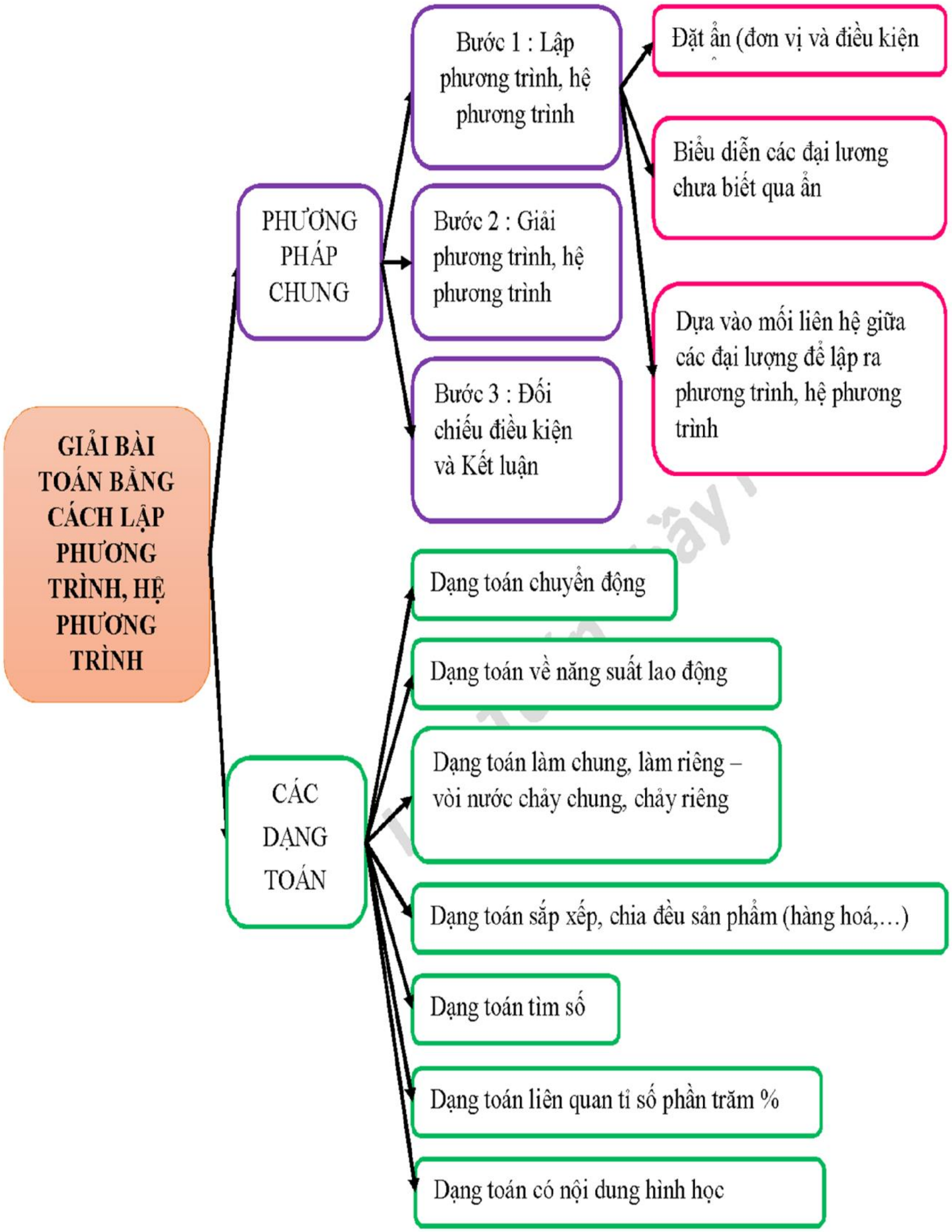
  $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Nếu $M(x_M; y_M)$ là nghiệm của hệ

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x_M + b_1y_M = c_1 \\ a_2x_M + b_2y_M = c_2 \end{cases}$$

- Giải hệ bằng Phương
  - Bước 1: Chọn PT dễ nhất của hệ (thường là pt có hệ số đơn giản) $\to$ Biểu diễn ẩn này theo ẩn kia. Rồi thế vào phương trình còn lại.
  - Bước 2: Hệ phương trình mới tương đương gồm phương trình đã thay ẩn, và 1 phương trình đơn giản của hệ ban đầu). Giải hệ phương trình.

- Giải hệ bằng Phương pháp cộng đại số
  - Bước 1: Xác định ẩn (x hoặc y,…) bạn muốn khử (loại bỏ). Xem xét hệ số đứng trước ẩn đó ở cả hai phương trình của hệ. Rồi nhân thêm hệ số sao cho hệ số của chúng bằng nhau (không quan tâm dấu).
  - Bước 2: Cộng vế theo vế nếu hệ số của ẩn muốn khử ở hai phương trình trái dấu, và trừ vế theo vế nếu hệ số của ẩn muốn khử ở hai phương trình cùng dấu.
  - Bước 3: Hệ gồm phương trình mới và một phương trình đơn giản của hệ ban đầu. Giải hệ phương trình.


GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP CHUNG
Bước 1 : Lập phương trình, hệ phương trình
Đặt ẩn (đơn vị và điều kiện
Biểu diễn các đại lương chưa biết qua ẩn
Dựa vào mối liên hệ giữa các đại lượng để lập ra phương trình, hệ phương trình
Bước 2 : Giải phương trình, hệ phương trình
Bước 3 : Đối chiếu điều kiện và Kết luận
CÁC DẠNG TOÁN
Dạng toán chuyển động
Dạng toán về năng suất lao động
Dạng toán làm chung, làm riêng – vòi nước chảy chung, chảy riêng
Dạng toán sắp xếp, chia đều sản phẩm (hàng hoá,…)
Dạng toán tìm số
Dạng toán liên quan tỉ số phần trăm %
Dạng toán có nội dung hình học

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- **Dạng toán chuyển động**
  - Dựa vào các đại lượng: quãng đường (s), vận tốc (v), và thời gian (t) của vật trong công thức: $s = v.t$
  - Dựa vào nguyên lý cộng vận tốc:
    Ví dụ khi giải bài toán chuyển động của thuyền trên sông ta có:
    $v_{xuoidong} = v_{thuyen} + v_{dongnuoc}$
    và $v_{nguocdong} = v_{thuyen} - v_{dongnuoc}$
- **Dạng toán về năng suất lao động**
  - Dựa vào quan hệ của các đại lượng: năng suất lao động N, thời gian để hoàn thành công việc t, lượng công việc đã làm s. Thì ta có $N = \frac{s}{t}$
- **Dạng toán làm chung làm riêng – vòi nước chảy chung chảy riêng**
  - Nếu x giờ (*ngày*) làm xong công việc thì mỗi giờ (*ngày*) làm được $\frac{1}{x}$ công việc đó.
  - Nếu trong 1 giờ đối tượng A làm được $\frac{1}{x}$, đối tượng B làm được $\frac{1}{y}$ công việc thì lượng công việc mà cả hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc.
  - Nếu mỗi giờ làm được $\frac{1}{x}$ công việc, thì n giờ sẽ làm được $n.\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{n}{x}$ công việc.

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- **Dạng toán sắp xếp, chia đều sản phẩm**
  - n là số lượng hàng hóa phân phối cho mỗi xe, x là số xe chở hàng, N là tổng số hàng hóa trong kho (*hoặc tổng lượng hàng hóa cần chở*).
    Ta có: $N = n.x$

- **Dạng toán tìm**
  - Dựa vào mối liên hệ giữa các hàng (đơn vị) trong một số.
    Ví dụ: $\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

- **Dạng toán liên quan tỉ số phần trăm %**
  - Chú ý các kết quả sau: n% của A nghĩa là ($\frac{n}{100}.A$).
    Ví dụ 15% của 900 là: $\frac{15}{100}.900 = 135$
  - Số A bằng n% số B nghĩa là: $A = \frac{n}{100}.B$ hay $\frac{A}{B} = \frac{n}{100}$.
    Ví dụ: tổng sản phẩm của công ty thứ hai bằng 80% tổng sản phẩm của công ty thứ nhất. Biết tổng sản phẩm của công ty thứ nhất là 4500sp. Ta suy ra, công ty thứ hai làm được số sản phẩm là:
    Tổng sản phẩm cty 2 = $\frac{80}{100}.4500 = 3600\ (sp)$
  - Giá trị đại lượng A tăng lên n% thì được giá trị mới là: $A + \frac{n}{100}.A$. Ví dụ: Tháng giêng công ty may được 5000 sản phẩm. Tháng hai tổng sản phẩm tăng 20% so với tháng trước. Vậy số sản phẩm công ty sản xuất được trong tháng hai là: $5000 + \frac{20}{100}.5000 = 6000\,(sp)$.

- **Dạng toán có nội dung hình học**
  - Đối với loại này các em cần nắm vững các công thức tính chu vi, diện tích của các hình đa giác đặc biệt, định lý phytago và các hệ thức lượng trong tam giác,…

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau, và minh hoạ hình học kết quả tìm được :

a. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ \dfrac{3}{2}x - y = -2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4} \\ x - \dfrac{3}{2}y = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$ d. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{3}{2} \\ -x + \dfrac{3}{2}y = 3 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau, rồi tìm nghiệm gần đúng chính xác đến hai chữ số thập phân:

a. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{4}{3y+1} = -1 \\ \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{8}{3y+1} = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{4y}{y+1} = \sqrt{3} \\ \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{3}x + \left(\sqrt{2} - 1\right)y = 2 \\ \left(1 - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{3}y = 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{5}}{2}x - 2y = \dfrac{15 - 2\sqrt{7}}{2} \\ -\sqrt{5}x + 4\sqrt{7}y = 9 \end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = -m \\ 9x - m^2 y = -3\sqrt{3} \end{cases}$

a. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm ?

b. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm ? Khi đó hãy tìm dạng tổng quát nghiệm của hệ phương trình.

c. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất ?

Bài 4. Một người đi từ A đến C, trên đường phải đi qua B. Biết vận tốc đoạn AB là 6 km/h, và vận tốc đoạn BC là 4 km/h. Sau một thời gian nghỉ tại C người đó quay trở về A bằng đường cũ và dự định phải đi sao cho thời gian đi từ C về A bằng thời gian đi từ A đến C. Muốn vậy người đó phải đi trên quãng đường CA với vận tốc 5 km/h. Nhưng do sự cố, người đó phải ở lại B trong 24 phút nên muốn về đúng giờ nên phải tăng tốc thành 6 km/h trên quãng đường BA. Tính chiều dài quãng đường AB, BC?

Bài 5. Có hai loại thép vụn, loại I chứa 5% niken, loại II chứa 40% niken. Hỏi cần phải có bao nhiêu thép vụn mỗi loại để luyện được 140 tấn thép chứa 30% niken.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau, và minh hoạ hình học kết quả tìm được :

a. $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ \dfrac{3}{2}x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=6 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm vì $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$. Học sinh tự vẽ hình.

b. $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 2x+y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=5 \\ 2x+y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5}{4} \\ x=-\dfrac{21}{8} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(-\dfrac{21}{8};\dfrac{5}{4}\right)$. Học sinh tự vẽ hình.

c. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{3}{4} \\ x-\dfrac{3}{2}y=-\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3 \\ x-\dfrac{3}{2}y=-\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. Học sinh tự vẽ hình.

d. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}y=-\dfrac{3}{2} \\ -x+\dfrac{3}{2}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-6 \\ -2x+3y=6 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm vì $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = -1$.

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{2}{3}x + 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{3}{2}x - 3 \end{cases}$

Học sinh tự vẽ hình.

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau, rồi tìm nghiệm gần đúng chính xác đến hai chữ số thập phân:

a. Điều kiện : $x \neq 1; y \neq -\dfrac{1}{3}$. Đặt $\dfrac{1}{x-1} = a; \dfrac{1}{3y+1} = b$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{4}{3y+1} = -1 \\ \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{8}{3y+1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -1 \\ 5a - 8b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3y+1} = -\dfrac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{17}{12} \end{cases}$

Vậy nghiệm gần đúng của hệ phương trình là $x = 4, y \approx -1,33$.

b. $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{4y}{y+1} = \sqrt{3} \\ \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$

Điều kiện : $x \neq 1; y \neq -1$. Đặt $\dfrac{x}{x-1} = a; \dfrac{y}{y+1} = b$

Hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{4y}{y+1} = \sqrt{3} \\ \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 4b = \sqrt{3} \\ a - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{5} \\ b = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{5} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{4+3\sqrt{3}}{5} \\ \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy nghiệm gần đúng của hệ phương trình là $x \approx 2{,}19, y \approx 16{,}55$.

c. $\begin{cases} \sqrt{3}x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = 2 \\ \left(1-\sqrt{2}\right)x - \sqrt{3}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1} \end{cases}$

Vậy nghiệm gần đúng của hệ phương trình là $x \approx -1{,}57, y \approx 1{,}57$.

d. $\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{5}}{2}x - 2y = \dfrac{15-2\sqrt{7}}{2} \\ -\sqrt{5}x + 4\sqrt{7}y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm gần đúng của hệ phương trình là $x \approx 2{,}24; y \approx 1{,}32$.

Bài 3. Hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = -m \\ 9x - m^2y = -3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y = -3m \\ 9x - m^2y = -3\sqrt{3} \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được phương trình: $m^2y - 3y = 3\sqrt{3} - 3m$

$\Leftrightarrow \left(m^2-3\right)y + 3\left(m-\sqrt{3}\right) = 0$ (1) đây là dạng phương trình bậc nhất $ax + b = 0$.

Với $a = m^2 - 3;\quad b = 3\left(m-\sqrt{3}\right)$.

a. Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 = 0 \\ 3\left(m-\sqrt{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 3 \\ m - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{3} \\ m \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm khi $m = -\sqrt{3}$.

b. Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có vô số nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 = 0 \\ 3\left(m - \sqrt{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 3 \\ m - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{3} \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm khi $m = \sqrt{3}$.

Khi đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = -\sqrt{3} \\ 9x - 3y = -3\sqrt{3} \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm. Dạng tổng quát nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{y - \sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

c. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất.

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm khi $m = -\sqrt{3}$.

Bài 4.

Gọi x (km) là chiều dài quãng đường AB và y (km) là chiều dài quãng đường BC.

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

* Khi đi từ A qua B để đến C:

+ Trên đoạn đường AB có vận tốc 6 km/h nên thời gian đi là : $\dfrac{x}{6}$ (giờ)

+ Trên đoạn đường BC có vận tốc 4 km/h nên thời gian đi là : $\frac{y}{4}$ (giờ)

Nên tổng thời gian khi đi là : $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}$

* Theo dự định nếu đi trên cả quãng đường từ C về A với vận tốc 5 km/h sẽ về với thời gian $\frac{x+y}{5}$ (giờ) bằng thời gian lúc đi.

Nên ta có phương trình : $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=\frac{x+y}{5}$ (1)

* Thực tế :

+ Trên đoạn đường CB có vận tốc 5 km/h nên thời gian đi CB là : $\frac{y}{5}$ (giờ)

+ Thời gian dừng ở B 24 phút = $\frac{2}{5}$ (giờ)

+ Trên đoạn đường BA có vận tốc 6 km/h nên thời gian đi BA là : $\frac{x}{6}$ (giờ)

Nên tổng thời gian khi về là : $\frac{y}{5}+\frac{2}{5}+\frac{x}{6}$ vẫn bằng thời gian dự kiến nên ta có phương trình : $\frac{y}{5}+\frac{2}{5}+\frac{x}{6}=\frac{x+y}{5}$ (2)

Vậy, ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=\frac{x+y}{5}\\ \frac{y}{5}+\frac{2}{5}+\frac{x}{6}=\frac{x+y}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{y}{20}=\frac{x}{30}\\ \frac{2}{5}=\frac{x}{30}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=8\\ x=12\end{cases}$

KL : Vậy, quãng đường AB dài 12 km, quãng đường BC dài 8 km.

Bài 5. Có hai loại thép vụn, loại I chứa 5% niken, loại II chứa 40% niken. Hỏi cần phải có bao nhiêu thép vụn mỗi loại để luyện được 140 tấn thép chứa 30% niken.

Gọi x là số tấn thép vụn loại I, và y là số tấn thép vụn loại II ($0 < x; y < 140$).

Ta có phương trình: $x + y = 140$ (1)

Khối lượng niken có trong x tấn thép vụn loại I là: $5\% \times x = \frac{5x}{100} = \frac{x}{20}$ (tấn)

Khối lượng niken có trong y tấn thép vụn loại II là: $40\% \times y = \frac{40y}{100} = \frac{2y}{5}$ (tấn)

Khối lượng niken có trong 140 tấn thép luyện là: $30\% \times 140 = 42$ (tấn)

Lượng niken có trong thép luyện bằng tổng lượng niken có trong thành phần của hai loại thép vụn, nên ta có phương trình : $\frac{x}{20} + \frac{2y}{5} = 42$ (2)

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 140 \\ \frac{x}{20} + \frac{2y}{5} = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 100 \end{cases}$ (thoả điều kiện)

Vậy, cần 40 tấn thép vụn loại I và 100 tấm thép vụn loại II.

VI. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG III MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 01

I. Trắc nghiệm: Hãy khoanh tròn vào câu trả lời đúng nhất

Câu 1:Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn:

A. $4x^2+5y=7$ **B**. $x+2y^2=5$

C. $2x^2+3y^2=1$ **D**. $2x+5y=9$

Câu 2: Cặp số nào sau đây là một nghiệm của phương trình $2x+3y=12$**?**

A. $(0;3)$ **B**. $(3;0)$ **C**. $\left(-1;\dfrac{10}{3}\right)$ **D**. $\left(1;\dfrac{10}{3}\right)$

Câu 3: Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ PT $\begin{cases}4x+5y=3\\x-3y=5\end{cases}$

A. (2; 1) **B**. (-2; -1) **C**. (2; -1) **D**. (3; 1)

Câu 4: Với giá trị nào của k thì phương trình x – ky = -1 nhận cặp số (1; 2) làm nghiệm.

A. k = 2 **B**. k = 1 **C**. k = -1 **D**. k = 0

II. Tự luận:

Bài 1: (3 điểm). Giải hệ phương trình

a. $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}$ **b**. $\begin{cases}4x+3y=6\\2x+y=4\end{cases}$

Bài 2. (3,5 điểm). Một cửa hàng có tổng cộng 28 chiếc Ti vi và Tủ lạnh. Giá mỗi cái Tủ lạnh là 15 triệu đồng, mỗi cái Ti vi là 30 triệu nếu bán hết 28 cái Tivi và Tủ lạnh này chủ cửa hàng sẽ thu được 720 triệu. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu cái ?

Bài 3: (1,5 điểm)Cho hệ phương trình $\begin{cases}3x+my=4\\x+y=1\end{cases}$

a. Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm
b. Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm x < 0, y > 0

HẾT

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 01

Phần I: Trắc nghiệm (2đ) Mỗi câu chọn đúng, nối thích hợp được 0,5 đ

Câu	1	2	3	4
Đáp án	D	D	C	B

B Tự luận: (8 điểm)

Câu	**Ý**	**Nội dung đáp án**	**Biểu điểm**
1 3 đ	a 1,5 đ	$\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-3\\x+2(2x-3)=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-3\\5x=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-3\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$	1,5 đ
	b 1,5 đ	$\begin{cases}4x+3y=6\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y=6\\4x+2y=8\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3.y=6\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3.(-2)=6\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$	1,5 đ
2 3,5 đ		Gọi x là số cái Tủ lạnh x>0, x nguyên dương Gọi y là số cái Ti vi y>0, y nguyên dương	0,5đ
		Tổng số Ti vi và Tủ lạnh là 28	0,5đ
		Theo điều kiện bài toán ta có phương trình x + y = 28 (1)	
		Giá mỗi chiếc Ti vi là 30 triệu, mỗi chiếc Tủ lạnh là 15 triệu Bán hết 28 cái Tivi và Tủ lạnh chủ cửa hàng thu được 720 triệu.	0,5đ
		Theo điều kiện bài toán ta có phương trình: Ta có phương trình: 15x + 30y = 720 (2)	
		Kết hợp (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=28\\15x+30y=720\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=20\end{cases}$ Ta thấy x, y phù hợp với điều kiện bài toán	1,5đ
		Vậy cửa hàng có 20 ti vi và 8 tủ lạnh	0,5đ
3 1,5đ		Tìm được m # 3 thì hệ có nghiệm duy nhất Không có m nào để hệ có vô số nghiệm	1 đ
		Nghiệm của hệ là $(x<0, y>0)$: $\begin{cases}x=\dfrac{m-4}{m-3}\\y=\dfrac{1}{m-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-4}{m-3}<0\\\dfrac{1}{m-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<4$	0,5 đ

Lưu ý: HS làm cách khác đúng vẫn tính điểm tối đa.

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG III MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 02

I- TRẮC NGHIỆM: ***(3điểm)***

Bài 1: ***Chọn chữ cái A, B, C, hoặc D cho mỗi khẳng định đúng.***

Câu 1: Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn ?

A. $3x^2 + 2y = -1$ B. $x - 2y = 1$

C. $3x - 2y - z = 0$ D. $\frac{1}{x} + y = 3$

Câu 2: Nếu phương trình mx + 3y = 5 có nghiệm (1; -1) thì m bằng:

A. 2 B. -2

C. -8 D. 8

Câu 3: Cặp số(1;-2) là một nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x - y = 0$ B. $2x + y = 1$

C. $x - 2y = 5$ D. $x - 2y = -3$

Câu 4: Phương trình $x - 3y = 0$ có nghiệm tổng quát là:

A. $(x \in R;\ y = 3x)$ B.$(x = 3y;\ y \in R)$

C. $(x \in R;\ y = 3)$ D. $(x = 0; y \in R)$

Câu 5: Cặp số (2;-3) là nghiệm của hệ phương trình nào ?

A. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 0x - 2y = 6 \\ 2x + 0y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Câu 6: Hệ phương trình : $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô nghiệm B. Một nghiệm duy nhất

C. Hai nghiệm D.Vô số nghiệm

Câu 7: Hệ phương trình $\begin{cases}2x-3y=5\\4x+my=2\end{cases}$ vô nghiệm khi :

A. m = - 6 B. m = 1

C. m = -1 D. m = 6

Câu 8: Hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=1\\x-y=5\end{cases}$ có nghiệm là:

A. (2;-3) B. (-2;3)

C. (-4;9) D. (-4; -9)

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}ax+by=c & (a\neq 0; b\neq 0)\\a'x+b'y=c' & (a'\neq 0; b'\neq 0)\end{cases}$

Điền dấu "x" vào ô "Đúng" hoặc "Sai" cho các khẳng định sau?

Câu	Nội dung	Đúng	Sai
1	Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất khi: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$		
2	Hệ phương trình trên có hai nghiệm khi: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$		
3	Hệ phương trình trên có vô số nghiệm khi: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$		
4	Hệ phương trình trên vô nghiệm nghiệm khi: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$		

II. TỰ LUẬN: ***(7 điểm)***

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau: (3 điểm)

1/ $\begin{cases}3x+y=3\\2x-y=7\end{cases}$ 2/ $\begin{cases}x+2y=5\\3x+4y=5\end{cases}$

Bài 4: (1 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+3y=-4\\x-2y=5\end{cases}$

Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Bài 5: (3 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:

Tìm hai số tự nhiên biết rằng: Tổng của chúng bằng 1012. Hai lần số lớn cộng số nhỏ bằng 2014.

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 02

I Trắc nghiệm: (3 điểm) *Mỗi câu đúng được 0,25 điểm*

Bài	**1**								**2**			
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
Đáp án	**B**	**D**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**S**	**S**	**Đ**	**Đ**

II. Tự luận (7 điểm)

Câu	**Nội dung trình bày**	**Điểm**
Bài 3 **(3đ)**	1/ $\begin{cases}3x+y=3\\2x-y=7\end{cases} <=> \begin{cases}5x=10\\3x+y=3\end{cases} <=> \begin{cases}x=2\\3.2+y=3\end{cases} <=> \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ *(Mỗi bước biến đổi tương đương được 0,5 điểm)* 2/ $\begin{cases}x+2y=5\\3x+4y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+4y=10\\3x+4y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5\\x+2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases}$ *(Mỗi bước biến đổi tương đương được 0,5 điểm)*	1,5 1,5
Bài 4 **(1đ)**	Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi: $\frac{m}{1} \neq \frac{3}{-2} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$	1,0
Bài 5 **(3đ)**	Gọi hai số tự nhiên cần tìm là x, y (ĐK: $x;y \in \mathbb{N}$; $1012 > x > y > 0$) Tổng của chúng bằng 1012, nên ta có pt: $x + y = 1012$ (1) Hai lần số lớn cộng số nhỏ bằng 2014, nên ta có pt: $2x + y = 2014$ (2) Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình. $\begin{cases}x+y=1012\\2x+y=2014\end{cases}$ Giải hệ pt ta được: $\begin{cases}x=1002\\y=10\end{cases}$ thoả mãn điều kiện <u>Vậy</u>: Hai số tự nhiên cần tìm là: 1002 và 10.	0,5 0,25 0,5 0,5 0,5 0,5 0,25

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG III MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 03

I . Phần trắc nghiệm: (3đ) *Lựa chọn đáp án đúng*

Câu 1: Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. xy + x = 3 B. 2x – y = 0

C. $x^2 + 2y = 1$ D. x + 3 = 0

Câu 2: Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình – x + y = 5 là

A. y = x – 5 B. x = y – 5

C. y = x + 5 D. x = y + 5

Câu 3: Cặp số (1; - 2) là nghiệm của phương trình nào?

A. 3x + 0y = 3 B. x – 2y = 7

C. 0x + 2y = 4 D. x – y = 0

Câu 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

Kết luận nào sau đây về tập nghiệm của hệ phương trình là đúng ?

A. Hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (3 ; -1)

B. Hệ phương trình vô nghiệm

C. Hệ phương trình có vô số nghiệm ($x \in R$; $y = -x + 3$)

D. Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

Câu 5: Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

A. (2 ; 1) B. (2 ; -1)

C. (1 ; - 1) D. (1 ; 1)

Câu 6: Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$ có vô số nghiệm ?

A. a = 1 B. a = -1

C. a = 1 hoặc a = – 1 D. a = 2

II.Phần Tự luận: (7đ)

Bài 1: (3đ) Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 7x + 4y = 18 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$

Bài 2: (3đ)

Số tiền mua 7 cân cam và 7 cân lê hết 112 000 đồng . Số tiền mua 3 cân cam và 2 cân lê hết 41 000 đồng . Hỏi giá mỗi cân cam và mỗi cân lê là bao nhiêu đồng ?

Bài 3: (1đ)

Tìm a và b biết đồ thị hàm số y = ax + b đi qua các điểm $(\sqrt{2}\,; 4 - \sqrt{2})$

và (2 ; $\sqrt{2}$).

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 03

I. Trắc nghiệm: (3đ) Mỗi ý đúng 0,5 đ

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	C	A	B	D	A

II. Tự luận: (7đ)

Câu	Ý	Nội dung đáp án	Điểm
1 3đ	a 1,5đ	$\begin{cases}7x+4y=18\\3x-4y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10x=20\\3x-4y=2\end{cases}$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\6-4y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\4y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ Vậy hệ PT đó cho có nghiệm là (x;y) = (2; 1)	1
	b 1,5đ	$\begin{cases}7x-3y=5\\\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x-3y=5\\3x+2y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}14x-6y=10\\9x+6y=36\end{cases}$	0,75đ
		$\Leftrightarrow \begin{cases}23x=46\\3x+2y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ Vậy hệ PT đó cho có nghiệm là (x;y)= (2; 3).	0,75đ
3 3đ		Gọi giá tiền mỗi cân cam là x (0 < x < 112000); giá tiền mỗi cân lê là y (0 < y < 112000);	0,5đ
		Số tiền mua 7 cân cam là: 7x (nghìn đồng) Số tiền mua 7 cân lê là: 7y (nghìn đồng).Theo bài ra ta có phương trình: 7x + 7y = 112000 (1)	0,5đ
		Số tiền mua 3 cân cam là : 3x (nghìn đồng) . Số tiền mua 2cân lê là : 2y (nghìn đồng) Theo bài ra ta có phương trình: 3x + 2y = 41000 (2)	0,5đ
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}7x+7y=112000\\3x+2y=41000\end{cases}$	0,5đ
		Giải hệ phương trình trên tìm được x = 9000; y = 7000 Vậy giá tiền mỗi cân cam là 9000 nghìn đồng, giá tiền	1đ

	mỗi cân lê là 7000 nghìn đồng.	
3 **1đ**	Vì đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm $\left(\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$; $\left(2;\sqrt{2}\right)$nên tọa độ của hai điểm $\left(\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right);\left(2;\sqrt{2}\right)$ phải thỏa mãn hệ PT $\begin{cases}\sqrt{2}a+b=4-\sqrt{2}\\ 2a+b=\sqrt{2}\end{cases}$	0,5đ
	Giải hệ phương trình trên tìm được a = – 2 ; b = $4+\sqrt{2}$ Vậy với a = – 2 ; b = $4+\sqrt{2}$ thì đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm $\left(\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right);\left(2;\sqrt{2}\right)$.	0,5đ

VII. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÀM SỐ BẬC NHẤT TRÍCH TỪ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI, THI CHUYÊN TOÁN 9

Trong các đề thi học sinh giỏi, thi vào 10 chuyên. Dạng bài tập đồ thị hàm số bậc nhất ít được ra, vì khả năng đánh đố và phân loại mức độ của học sinh giỏi, chuyên không cao. Do đó nó ít được ra trong đề thi, đồng thời nếu ra sẽ hạn chế trong một số câu hỏi, chủ đề nhỏ mà các học sinh phổ thông ít khi được học trên lớp như: toạ độ điểm cố định của họ đồ thị hàm số với tham số m…

Câu 1: Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=2\\ |x-1|+y=3\end{cases}$ b. $\begin{cases}|x|+y=4\\ x+3|y|=6\end{cases}$

Hướng dẫn giải :

a. Hệ phương trình: $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=2 & (1)\\ |x-1|+y=3 & (2)\end{cases}$

Xét phương trình (2): $|x-1|+y=3 \Leftrightarrow |x-1|=3-y$

Thay vào phương trình (1), ta được: $|x-1|+|y-2|=2 \Leftrightarrow 3-y+|y-2|=2$

+ Khi $y \geq 2 \Rightarrow |y-2| = y-2$, ta có: $3-y+|y-2|=2$

$\Leftrightarrow 3-y+y-2=2 \Leftrightarrow 0y=1$ vô nghiệm.

+ Khi $y<2 \Rightarrow |y-2| = 2-y$, ta có: $3-y+|y-2|=2$

$\Leftrightarrow 3-y+2-y=2 \Leftrightarrow -2y=-3 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$ (thoả điều kiện)

Suy ra $|x-1|=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\dfrac{3}{2} \\ x-1=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

KL: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

b. $\begin{cases} |x|+y=4 \\ x+3|y|=6 \end{cases}$

Xét 4 trường hợp:

TH1: $x \geq 0; y \geq 0$, khi đó hệ phương trình biến đổi thành:

$\begin{cases} x+y=4 \\ x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$ (thoả điều kiện)

TH1: $x \geq 0; y<0$, khi đó hệ phương trình biến đổi thành:

$\begin{cases} x+y=4 \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ (thoả điều kiện)

TH1: $x<0; y \geq 0$, khi đó hệ phương trình biến đổi thành:

$\begin{cases} -x+y=4 \\ x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=10 \\ -x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (thoả điều kiện)

TH1: $x<0; y<0$, khi đó hệ phương trình biến đổi thành:

$$\begin{cases}-x+y=4\\x-3y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2y=10\\-x+y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-5\\x=-9\end{cases}$$ (thoả điều kiện)

KL: Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $(3;1)$; $\left(\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $(-9;-5)$.

Câu 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}3x+y-z=1\\2x-y+2z=5\\x-2y-3z=0\end{cases}$ b. $\begin{cases}x+3y+2z=8\\2x+y+z=6\\3x+y+z=6\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a. $\begin{cases}3x+y-z=1 & (1)\\2x-y+2z=5 & (2)\\x-2y-3z=0 & (3)\end{cases}$

Từ phương trình (1) : $3x+y-z=1 \Leftrightarrow z=3x+y-1$, thay vào hai phương trình còn lại của hệ ta được hệ phương trình mới hai ẩn:

$$\begin{cases}2x-y+2(3x+y-1)=5\\x-2y-3(3x+y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+y=7\\-8x-5y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=1\end{cases}$$

Suy ra: $z=3.1+(-1)-1=1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;-1;1)$.

b. $\begin{cases}x+3y+2z=8 & (1)\\2x+y+z=6 & (2)\\3x+y+z=6 & (3)\end{cases}$

Từ phương trình (3) : $3x+y+z=6 \Leftrightarrow z=-3x-y+6$, thay vào hai phương trình còn lại của hệ ta được hệ phương trình mới hai ẩn:

$$\begin{cases} x+3y+2(-3x-y+6)=8 \\ 2x+y+(-3x-y+6)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+y=-4 \\ -x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$$

Suy ra: $z=-3.0-(-4)+6=10$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;-4;10)$.

Câu 3. Tìm giá trị của a để ba đường thẳng sau đồng quy:

$(d_1): 2x-3y=8$
$(d_2): 7x-5y=-5$
$(d_3): y=(2+m)x-3m$

Hướng dẫn giải :

Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 7x-5y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$$

Vậy toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(-5;-6)$.

Để ba đường thẳng đồng quy thì M phải thuộc đường thẳng (d_3):

$y=(2+m)x-3m$

Hay $(-5;-6)$ là nghiệm của phương trình đường thẳng d_3:

$-6=(2+m)(-5)-3m$

$\Leftrightarrow -6=-10-5m-3m$
$\Leftrightarrow 8m=-4$
$\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

Vậy, với $m=-\dfrac{1}{2}$ thì ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Câu 4: Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm $x > 0; y > 0$.

b. $\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ 3x + ay = 4 \end{cases}$ có nghiệm $x > 0; y < 0$.

Hướng dẫn giải

a. $\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm $x > 0; y > 0$.

Ta có: $x + ay = 2 \Leftrightarrow x = -ay + 2$ thay vào phương trình (2): $a(-ay + 2) - y = 1$

$\Leftrightarrow -a^2y + 2a - y = 1 \Leftrightarrow (a^2 + 1)y = 2a - 1$.

Vì $a^2 + 1 > 0$ với mọi a nên $\Rightarrow y = \dfrac{2a-1}{a^2+1}$ thay vào phương trình (1)

Suy ra $x = -a\left(\dfrac{2a-1}{a^2+1}\right) + 2 = \dfrac{-2a^2 + a + 2a^2 + 2}{a^2+1} = \dfrac{a+2}{a^2+1}$

Vậy, để $x > 0; y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+2}{a^2+1} > 0 \\ \dfrac{2a-1}{a^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 > 0 \\ 2a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{2}$

KL: Vậy với $a > \dfrac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm $x > 0; y > 0$.

b. $\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ 3x + ay = 4 \end{cases}$ có nghiệm $x > 0; y < 0$.

Ta có: $ax-2y=3 \Leftrightarrow y=\dfrac{ax-3}{2}$ thay vào phương trình (2): $3x+a\left(\dfrac{ax-3}{2}\right)=4$

$\Leftrightarrow 6x+a^2x-3a=8 \Leftrightarrow \left(6+a^2\right)x=3\text{a}+8$.

Vì $6+a^2>0$ với mọi a nên $\Rightarrow x=\dfrac{3\text{a}+8}{6+a^2}$.

Suy ra $y=\dfrac{ax-3}{2}=\dfrac{a\left(\dfrac{3a+8}{6+a^2}\right)-3}{2}=\dfrac{3a^2+8a-18-3a^2}{2\left(6+a^2\right)}=\dfrac{8a-18}{2\left(6+a^2\right)}$

Vậy, để $x>0; y<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3a+8}{6+a^2}>0\\ \dfrac{8a-18}{2\left(6+a^2\right)}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a+8>0\\ 8a-18<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a>-\dfrac{8}{3}\\ a<\dfrac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{8}{3}<a<\dfrac{9}{4}$

KL: Vậy với $-\dfrac{8}{3}<a<\dfrac{9}{4}$ thì hệ phương trình có nghiệm $x>0; y<0$.

Câu 5. Cho hệ phương trình : $\begin{cases}mx+ny=10\\ my+nx=10\end{cases}$ trong đó m, n là các số nguyên dương và $m>n>0$. Tìm các cặp số $(m;n)$ để hệ phương trình có nghiệm là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình: $\begin{cases}mx+ny=10 & (1)\\ my+nx=10 & (2)\end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có: $mx+ny-my-nx=0 \Leftrightarrow \left(m-n\right)x-\left(m-n\right)y=0$

$\Leftrightarrow (m-n)(x-y)=0$.

Mà theo đề ra, $m>n$ nên $m-n>0$.

Do đó phương trình: $(m-n)(x-y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào hệ phương trình, ta có: $mx+nx=10 \Leftrightarrow (m+n)x=10$

Vì $m>n>0$, nên: $x=\dfrac{10}{m+n}$. Suy ra $m+n$ là ước nguyên dương của 10.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+n=10\ (TM) \\ m+n=5\ (TM) \\ m+n=2\ (L) \\ m+n=1\ (L) \end{array}\right.$$

Với $m+n=10$, ta tìm được các cặp số thoả mãn là:

$\begin{cases} m=9 \\ n=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m=8 \\ n=2 \end{cases}$; $\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases}$; $\begin{cases} m=6 \\ n=4 \end{cases}$

Với $m+n=5$, ta tìm được các cặp số thoả mãn là: $\begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$

KL: Vậy với các giá trị của cặp số m, n như sau thì hệ phương trình đã cho có nghiệm là số nguyên dương: $\begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$; $\begin{cases} m=9 \\ n=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m=8 \\ n=2 \end{cases}$; $\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases}$; $\begin{cases} m=6 \\ n=4 \end{cases}$.

Câu 6: Giải các hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2-3x=y^2-2 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases}$ (I)

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2-3x=y^2-2 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x^2-3x\right)-\left(2y^2-3y\right)=\left(y^2-2\right)-\left(x^2-2\right) \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y)(x+y-1)=0 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases} \text{(II)} \\ \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases} \text{(III)} \end{array} \right.$$

Giải hệ phương trình (II): $\begin{cases} x-y=0 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x-1)(x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (III):

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y^2-3y=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

KL: Vậy, hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Chương 4: HÀM SỐ $Y = Ax^2$ $(A \neq 0)$ VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. HÀM SỐ $Y = Ax^2$ $(A \neq 0)$

1. Kiến thức trọng tâm

*** Tập xác định của hàm số:**

+ Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi x $\in$ R.

*** Tính chất biến thiên của hàm số:**

+ Nếu a > 0 thì hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ nghịch biến khi x < 0, và đồng biến khi x > 0.

+ Nếu a < 0 thì hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ đồng biến khi x < 0 và nghịch biến khi x > 0.

*** Đồ thị của hàm số:** $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

+ Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục **Oy làm trục đối xứng**. Đường cong đó được gọi là một **Parabol (P) với đỉnh O**.

+ Nếu a > 0 thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Do đó, đồ thị (P) nằm phía trên trục hoành (Ox), đỉnh O là điểm thấp nhất của đồ thị.

+ Nếu a < 0 thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Do đó, đồ thị (P) nằm phía dưới trục hoành (Ox), đỉnh O là điểm cao nhất của đồ thị.

+ Vì đồ thị $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ luôn đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Xác định hàm số bậc hai

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là hàm số bậc hai một ẩn nếu phương trình của hàm số có :

Vậy, để xác định một hàm số là hàm số bậc hai một ẩn phải thoả mãn điều kiện sau :

+ Hàm số chỉ chứa một ẩn duy nhất, với bậc cao nhất của ẩn là bậc hai.

+ Hàm số có dạng $ax^2+bx+c=0$ với $(a\neq 0)$.

+ Hàm số có dạng $y=ax^2+b$ có hệ số $a\neq 0$.

+ Hàm số $y=ax^2$ có hệ số $a\neq 0$.

Ví dụ minh hoạ 1:

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai một ẩn?

a. $y=\dfrac{1}{x^2}+3$ b. $y=1+\dfrac{x^2}{5}$ c. $y=-x^2+\dfrac{1}{x}$

d. $y=\dfrac{1}{y^2}+x^2$ e. $y=1+x-x^2$ f. $y=3\left(x-1\right)^2$

Hướng dẫn giải :

Các hàm số là hàm số bậc hai một ẩn là: $y=1+\dfrac{x^2}{5}$ và $y=1+x-x^2$

$y=3\left(x-1\right)^2=3x^2-6x+3$.

Ví dụ minh hoạ 2:

Tìm m để hàm số sau là hàm số bậc hai một ẩn.

a. $y=(m+2)x^2$ b. $y=(m^2-2)x^2$

Hướng dẫn giải :

a. Để hàm số $y=(m+2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi:

$m+2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -2$

Vậy, với $m\neq -2$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

b. Để hàm số $y=(m^2-2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi:

$$m^2-2\neq 0 \Leftrightarrow m^2\neq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\neq 2 \\ m\neq -2 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m\neq \pm 2$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

Dạng 2. Điểm thuộc đồ thị hàm số - Vẽ đồ thị hàm số

* Cho hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P).

\+ Điểm M có toạ độ $(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị parabol (P) khi và chỉ khi $y_0=a{x_0}^2$

\+ Điểm M có toạ độ $(x_0;y_0)$ không thuộc đồ thị parabol (P) $\Leftrightarrow$ $y_0\neq a{x_0}^2$.

* Vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$

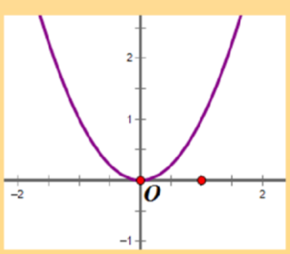
\+ Xác định đỉnh của Parabol là gốc toạ độ O (0;0).

\+ Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số:

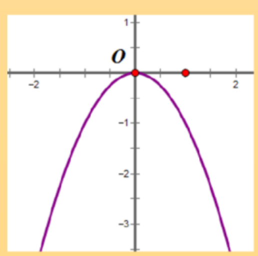
-2	-1	0	1	2
4a	a	0	a	4a

\+ Hình dạng parabol:

$a>0$



$a<0$



Parabol nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$.

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

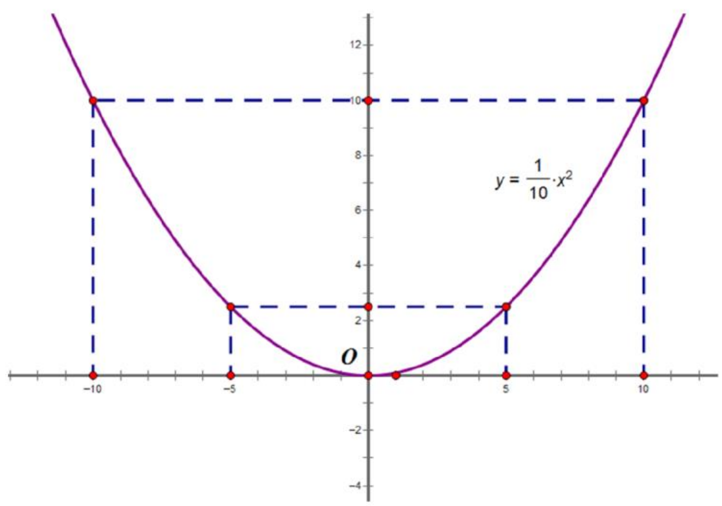
b. Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không: $A\left(3;\frac{9}{10}\right), B\left(-5;\frac{5}{2}\right), C(-10;1)$?

Hướng dẫn giải :

Hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a. Đồ thị (P) có đỉnh là O (0;0), nằm phía trên trục hoành, nhận trục Oy làm trục đối xứng và đồ thị đi qua các điểm sau:

-10	-5	0	5	10
10	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	10



b. Thay toạ độ điểm $A\left(3;\frac{9}{10}\right)$ vào phương trình parabol (P) : $y = \frac{1}{10}x^2$

Ta có: $\frac{9}{10} = \frac{1}{10}(3)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{10} = \frac{9}{10}$ (đúng). Vậy điểm A thuộc đồ thị hàm số.

Thay toạ độ điểm $B\left(-5;\frac{5}{2}\right)$ vào phương trình parabol (P) : $y = \frac{1}{10}x^2$

Ta có: $\frac{5}{2} = \frac{1}{10}(-5)^2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{25}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ (đúng).

Vậy điểm B thuộc đồ thị hàm số.

Thay toạ độ điểm $C(-10;1)$ vào phương trình parabol (P) : $y=\frac{1}{10}x^2$

Ta có: $1=\frac{1}{10}(-10)^2 \Leftrightarrow 1=\frac{100}{10} \Leftrightarrow 1=10$ (vô lý).

Vậy điểm B không thuộc đồ thị hàm số.

b. **Dạng 3. Sự đồng biến – nghịch biến của đồ thị hàm số**.

Cho hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ xác định với mọi x $\in$ R.

+ Nếu $a>0$: Hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ nghịch biến khi x < 0, và đồng biến khi x > 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y=ax^2$ $(a\neq 0)$		↘	0	↗	

+ Nếu a < 0: Hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ đồng biến khi x < 0 và nghịch biến khi x > 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y=ax^2$ $(a\neq 0)$		↗	0	↘	

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y=\left(m^2-m\right)x^2$. Tìm giá trị của m để :

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0$.

Hướng dẫn giải :

Hàm số $y=\left(m^2-m\right)x^2$.

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0 \Leftrightarrow a>0 \Leftrightarrow m^2-m>0 \Leftrightarrow m\left(m-1\right)>0$

Khi $\begin{cases} m>0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$

Hoặc $\begin{cases} m<0 \\ m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m<0$

Vậy với $m<0$ hoặc $m>1$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0 \Leftrightarrow a<0 \Leftrightarrow m^2-m<0 \Leftrightarrow m\left(m-1\right)<0$

Khi $\begin{cases} m>0 \\ m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$

Hoặc $\begin{cases} m<0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Không có giá trị nào của m thoả mãn điều kiện này.

Vậy với $0<m<1$ thì hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x>0$.

c. Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

* Hàm số $y=ax^2$ $(a\neq 0)$

\+ Nếu $a>0$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi x = 0.

\+ Nếu $a<0$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 khi x = 0.

* Hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

\+ Nếu $a>0$ hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

có giá trị nhỏ nhất khi $x=-\dfrac{b}{2a}$

\+ Nếu $a<0$ hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

có giá trị lớn nhất khi $x=-\dfrac{b}{2a}$

d. Dạng 5. Viết phương trình parabol $y = ax^2\ (a \neq 0)$ **(tìm hệ số a)**

Khi biết toạ độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2\ (a \neq 0)$, ta đi tìm hệ số a của nó bằng cách thay toạ độ điểm đó vào phương trình hàm số.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y = (m^2 - m)x^2$. Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;2)$.

Hướng dẫn giải :

Đồ thị hàm số $y = (m^2 - m)x^2$ đi qua điểm $A(1;2)$

$\Leftrightarrow 2 = (m^2 - m)(1)^2 \Leftrightarrow m^2 - m = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Vậy, với $m = -1$ hoặc $m = 2$ thì đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1;2)$.

Ví dụ minh hoạ 2: Viết phương trình parabol $y = ax^2$. Biết đồ thị của nó đi qua điểm $M(-2;8)$.

Hướng dẫn giải :

Phương trình parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $M(-2;8)$

$\Leftrightarrow -8 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = -2$

Vậy, hàm số cần tìm là: $y = -2x^2$.

e. Dạng 6. Tương giao giữa Parabol với đường thẳng

Cho parabol $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và đường thẳng $y = kx + b$.

+ Lập phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 = kx + b$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của parabol với đường thẳng.

+ Toạ độ giao điểm $(x_0; y_0)$ vừa là nghiệm của phương trình $y = ax^2$, vừa là nghiệm của phương trình $y = kx + b$.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y = mx^2$ có đồ thị là parabol (P). Tìm giá trị của m biết rằng đồ thị của hàm số $y = mx^2$ cắt đường thẳng (d) : $y = x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng 5.

Hướng dẫn giải :

Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ giao điểm của (P) và (d).

Theo đề, $x_0 = 5$ và M thuộc (d) nên ta có: $y_0 = x_0 - 3 \Leftrightarrow y_0 = 5 - 3 \Leftrightarrow y_0 = 2$

Vậy $M(5;2)$. Điểm $M(5;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = mx^2$

$\Leftrightarrow 2 = m(5)^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{25}$. Vậy, hàm số cần tìm là: $y = \dfrac{2}{25}x^2$.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = -3x^2$

a. Lập bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ (x) sau:

$-2;\ -1;\ -\dfrac{1}{2};\ 0;\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ 2$

b. Với giá trị nào của x thì hàm số (y) nhận các giá trị sau:

$$0;\ 27;\ -27;\ 5;\ -\frac{1}{9};\ -81;\ -3$$

Bài 2. Cho hàm số $y=(m-4)x^2$. Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$

a. Xét sự biến thiên của hàm số trên tập xác định của nó?

b. Tìm k biết đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$?

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị của hàm số;

b. Cho các điểm sau: $A(0;1)$; $\mathrm{B}(2;2)$; $\mathrm{C}\left(-3;\frac{5}{2}\right)$; $\mathrm{D}\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

Bài 5. Cho hàm số $y=(m+1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;9)$

b. Đồ thị của hàm số đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$.

a. Biết điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm m? Hỏi điểm $A'(3;m)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?

b. Biết điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm k? Hỏi điểm $M'(\mathrm{k};9)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?

Bài 7. Cho hàm số $y = ax^2$.

a. Xác định hàm số biết đồ thị của nó đi qua điểm $A\left(\sqrt{2};2\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số với giá trị tìm được của a.

b. Biết $B\left(-\sqrt{2};2\right)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số trong câu a, O là gốc toạ độ. Tam giác OAB là tam giác gì? Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (P) và $y = 2x - 2$.

a. Vẽ hai đồ thị hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b. Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Bài 9. Cho hàm số $y = -3x^2$.

a. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng – 9;

b. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục toạ độ

c. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ.

Bài 10. Cho hàm số $y = kx^2$.

a. Xác định k biết đồ thị hàm số có đồ thị cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại điểm có hoành độ $x = -2$.

b. Với giá trị k tìm được ở câu a, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = kx^2$ và $y = -3x + 4$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

c. Bằng đồ thị hãy xác định toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = kx^2$ và $y = -3x + 4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho hàm số $y = -3x^2$

a. Bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ (x) sau:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = -3x^2$	-12	-3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-3	-12

b. Với $y = 0$, ta có $-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Với $y = 27$, ta có $-3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = -9$ không có giá trị của x thoả mãn;

Với $y = -27$, ta có $-3x^2 = -27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$;

Với $y = -\frac{1}{9}$, ta có $-3x^2 = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$;

Với $y = -3$, ta có $-3x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$;

Bài 2. Cho hàm số $y = (m-4)x^2$.

a. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$

$\Leftrightarrow m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$

Vậy với $m > 4$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$

$\Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$

Vậy với $m > 4$ thì hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x > 0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$

a. Hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$ có hệ số $a=k^2-2k+3=\left(k-1\right)^2+2>0$ với mọi giá trị của k.

Do đó, hàm số đã cho nghịch biến khi $x<0$; và đồng biến khi $x>0$.

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$ $\Leftrightarrow 6=\left(k^2-2k+3\right)(1)^2$

$$\Leftrightarrow k^2-2k+3=6 \Leftrightarrow k^2-2k-3=0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=3 \end{array}\right.$$

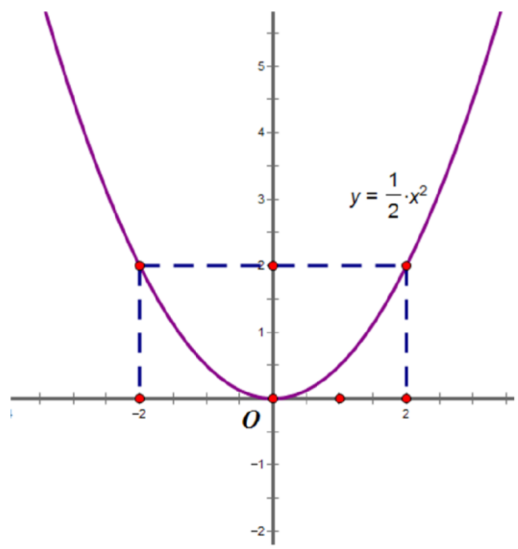
Vậy, với $k=-1$ hoặc $k=3$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị của hàm số:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ là parabol (P) có đỉnh là O (0;0), nhận trục Oy làm trục đối xứng, và đi qua các điểm sau :

x	-2	0	2
$y=\dfrac{1}{2}x^2$	2	0	2



b. Ta có:

Thay hoành độ điểm $A(0;1)$ vào hàm số : $\dfrac{1}{2}(0)^2=0\neq y_A=1$.

Vậy điểm $A(0;1)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $B(2;2)$ vào hàm số : $\frac{1}{2}(2)^2 = 2 = y_B$.

Vậy điểm $B(2;2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $C\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ vào hàm số : $\frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{9}{2} \neq y_C = \frac{5}{2}$.

Vậy điểm $C\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $D\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ vào hàm số : $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}\right)^2 = \frac{5}{2} = y_D$.

Vậy điểm $D\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

KL: Vậy điểm B và điểm D thuộc đồ thị hàm số.

Bài 5. Cho hàm số $y = (m+1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^2$ đi qua điểm $A(1;9)$

$\Leftrightarrow 9 = (m+1)(1)^2 \Leftrightarrow m+1 = 9 \Leftrightarrow m = 8$

Vậy, với $m = 8$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;9)$.

b. Đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^2$ đi qua điểm $B(-4;32)$

$\Leftrightarrow 32 = (m+1)(-4)^2 \Leftrightarrow 16(m+1) = 32$

$\Leftrightarrow m+1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy, với $m = 1$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.

a. Vì điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$, nên:

$m=-\frac{1}{3}(-3)^2 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{3} \Leftrightarrow m=-3$.

Suy ra toạ độ điểm $A(-3;-3)$ và $A'(3;-3)$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy (tính chất đối xứng của hàm số $y=ax^2$ với $(a \neq 0)$). Mà điểm $A(-3;-3)$ thuộc đồ thị hàm số nên điểm $A'(3;-3)$ cũng thuộc đồ thị hàm số.

b. Điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$, nên:

$-9=-\frac{1}{3}(k)^2 \Leftrightarrow k^2=27 \Leftrightarrow k=\pm 3\sqrt{3}$.

Với $k=\pm 3\sqrt{3}$ thay vào phương trình hàm số ta được

$y=-\frac{1}{3}\left(\pm 3\sqrt{3}\right)^2=-9 \neq y_{M'}$.

Do đó điểm $M'(\mathrm{k};9)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Bài 7. Cho hàm số $y=ax^2$.

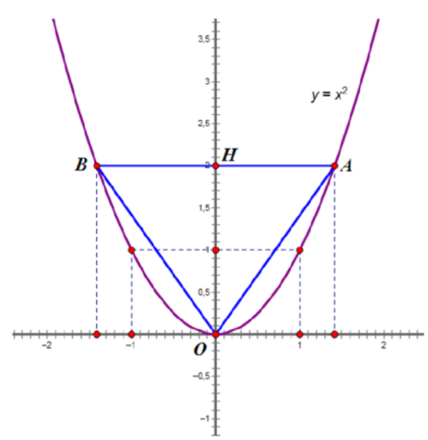
a. Đồ thị hàm số $y=ax^2$ đi qua điểm $A\left(\sqrt{2};2\right) \Leftrightarrow 2=a\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow a=1$.

Vậy, $a=1$ và hàm số cần tìm là $y=x^2$

Đồ thị hàm số $y=x^2$ là parabol có đỉnh O (0;0), có trục đối xứng Oy.

Đồ thị hàm số $y=x^2$ đi qua các điểm sau:

x	-1	0	1
$y=x^2$	1	0	1



b. Điểm $A\left(\sqrt{2};2\right)$ và $B\left(-\sqrt{2};2\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^2$.

Vì $\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$ nên hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục Oy.

Do đó, Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra $OA = OB$.

Vậy tam giác OAB là tam giác cân tại O.

Ta có: $OH = |y_A| = 2$; $AB = 2\sqrt{2}$

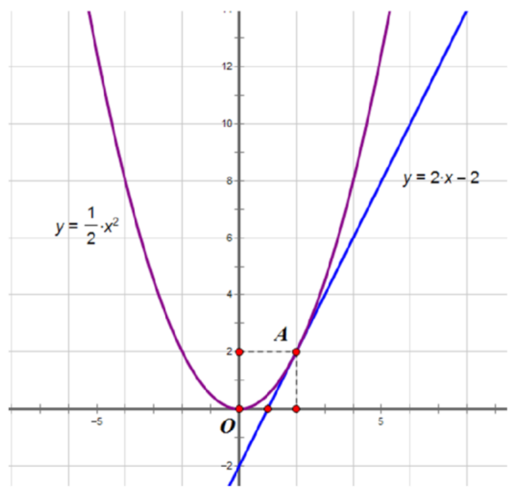
Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}.2.2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (đvdt)

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (P) và $y = 2x - 2$.

a. * Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) có đỉnh O (0;0), có trục đối xứng Oy.

Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua các điểm sau:

x	-2	0	2
$y = x^2$	2	0	2



* Đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;-2)$ và $(1;0)$.

b. Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$. Vậy toạ độ giao điểm là $(2;2)$.

Bài 9. Cho hàm số $y=-3x^2$ (P).

a. Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có $y_M=-9$

Vì M thuộc (P) nên ta có: $-9=-3x_M{}^2 \Leftrightarrow x_M{}^2=3 \Leftrightarrow x_M=\pm\sqrt{3}$.

Vậy điểm thuộc đồ thị hàm số và có tung độ bằng – 9 là : $M_1\left(-\sqrt{3};-9\right)$ và $M_2\left(\sqrt{3};-9\right)$.

b. Gọi $N(x_N;y_N)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có khoảng cách đến các trục toạ độ bằng nhau.

N thuộc đồ thị hàm số nên : $y_N=-3x_N{}^2$

N có khoảng cách đến hai trục toạ độ bằng nhau nên:

$$|y_N|=|x_N| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y_N=x_N & (1) \\ y_N=-x_N & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): $y_N=x_N \Leftrightarrow -3x_N{}^2=x_N$

$$\Leftrightarrow x_N\left(1+3x_N\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_N=0 \quad \Rightarrow y_N=0 \\ x_N=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow y_N=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ta có điểm $(0;0);\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Giải (2): $y_N=-x_N \Leftrightarrow -3x_N{}^2=-x_N$

$$\Leftrightarrow x_N\left(1-3x_N\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_N=0 \quad \Rightarrow y_N=0 \\ x_N=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y_N=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ta có điểm $(0;0);\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Vậy, các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục toạ độ là:

$(0;0);\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

c. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ.

Điểm $A(x_A;y_A)$ có tung độ gấp 9 lần hoành độ: $y_A = 9x_A$.

Điểm A thuộc đồ thị hàm số nên: $y_A = -3x_A{}^2 \Leftrightarrow 9x_A = -3x_A{}^2$

$$\Leftrightarrow 3x_A(x_A+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 0 \;\;\Rightarrow y_A = 0 \\ x_A = -3 \Rightarrow y_A = -27 \end{array}\right.$$

Vậy toạ độ các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ là:

$(0;0);(-3;-27)$.

Bài 10. Cho hàm số $y = kx^2$ (P).

a. Đồ thị hàm số có đồ thị cắt đường thẳng (d): $y=-3x+4$ tại điểm có hoành độ $x=-2$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là toạ độ giao điểm của (P) và (d). Theo đề ta có $x_0=-2$

M thuộc đường thẳng (d) nên: $y_0=-3x_0+4 \Leftrightarrow y_0=-3.2+4=-2$

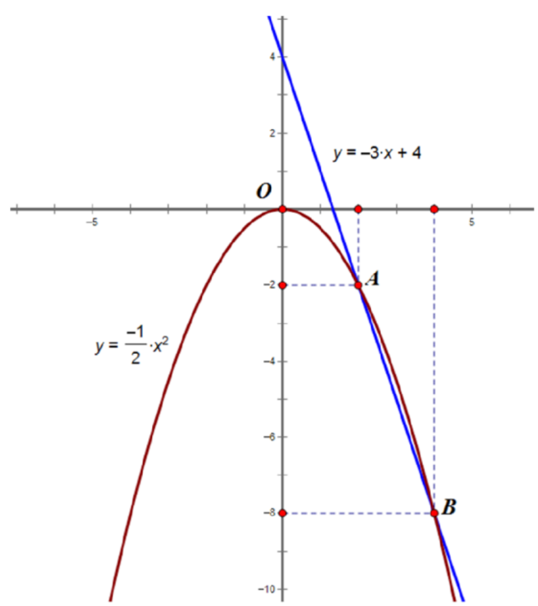
Suy ra $M(-2;-2)$. Thay vào phương trình (P), ta có:

$-2=k(-2)^2 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$

Vậy, đồ thị hàm số cần tìm là:

$y=-\frac{1}{2}x^2$

b. Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ (P) và đường thẳng (d): $y=-3x+4$



Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ (P) là parabol có đỉnh O(0;0), có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm :

x	-2	0	2
$y=-\frac{1}{2}x^2$	-2	0	-2

* Đồ thị hàm số $y=-3x+4$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;4)$ và $(1;1)$.

c. Dựa vào đồ thị ta thây toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ (P) và đường thẳng (d): $y=-3x+4$ là: $A(2;-2);\mathrm{B}(4;-8)$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

a. Phương trình bậc hai một ẩn có dạng: $ax^2+bx+c=0$ (*)
trong đó x là ẩn ; a, b, c là các hệ số cho trước với $(a\neq 0)$.

Cách giải:

+ Nếu c = 0, ta có phương trình:

$$ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{b}{a}\end{array}\right.$$

+ Nếu b = 0, ta có phương trình: $ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}$

Khi $-\dfrac{c}{a}>0$ thì $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Khi $-\dfrac{c}{a}<0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $b\neq 0;c\neq 0$, biến đổi phương trình về dạng :

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha \\ x=\beta\end{array}\right.$$

b. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

* Biệt thức Delta: $\Delta=b^2-4ac$

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$;

* Lưu ý: nếu $a.c<0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ và $b=2b'$

Tính biệt thức: $\Delta'=b'^2-ac$

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt
$x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}; x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-\dfrac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

d. Hệ thức Viet và ứng dụng

+ Định lý Viet: nếu $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$thì tổng và tích của hai nghiệm là: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}; \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

+ Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$. (Điều kiện để có hai số đó là: $S^2-4P\geq 0$).

e. Cách nhẩm nghiệm của phương trình:

+ Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=1,\ x_2=\dfrac{c}{a}$.

+ Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{c}{a}$.

+ Nếu nhẩm được: $x_1+x_2=m+n;\ x_1x_2=mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1=m,\ x_2=n$.

f. Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

1. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

3. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

4. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0$

5. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P>0 \end{cases}$

6. Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

7. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

8. Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P>0 \\ S<0 \end{cases}$

9. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \\ S<0 \end{cases}$

10. Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P<0 \\ S=0 \end{cases}$

11. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$

12. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

13. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

g. Các biểu thức thường gặp trong việc giải toán phương trình bậc hai chứa tham số $(\Delta \geq 0)$:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2p$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4p$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3Sp$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2p)^2 - 2p^2$
- $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{p}$
- $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{S^2 - 2p}{p}$

Đây là một số biểu thức căn bản nhất, thường xuất hiện trong các bài toán phương trình bậc hai có thức tham số, nằm trong cấu trúc đề thi vào 10. Do đó, các em cần nắm vững những kiến thức này, để có thể vận dụng thuần thục, giúp biến đổi các loại biểu thức khác để giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Phương trình bậc hai không có tham số

1. Phương trình bậc hai $(a \neq 0)$ dạng khuyết hạng tử bậc nhất (b = 0), ta có phương trình: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$

Khi $-\frac{c}{a} > 0$ thì $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Khi $-\frac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình bậc hai dạng khuyết hạng tử tự do (c = 0), ta có phương trình: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{array}\right.$

3. Phương trình bậc hai có đầy đủ các hạng tử ($b \neq 0; c \neq 0$):

Ta biến đổi phương trình về dạng : $a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha \\ x = \beta \end{array}\right.$

Ví dụ minh hoạ 1: Chỉ ra các hệ số a, b, c trong mỗi phương trình, sau đó giải phương trình:

a. $3x^2 + 5x = 0$ b. $x^2 - 16 = 0$

c. $x^2 - 5x + 4 = 0$ d. $x^2 + 2x - 8 = 0$

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2 + 5x = 0$, có hệ số $a = 3; b = 5;$ và $c = 0$.

$$3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = 0; x = -\frac{5}{3}$.

b. Phương trình $x^2-16=0$, có hệ số $a=1;b=0;$ và $c=-16$.

$x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=-4;x=4$.

c. Phương trình $x^2-5x+4=0$, có hệ số $a=1;b=-5;$ và $c=4$.

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=1;x=4$.

d. Phương trình $x^2+2x-8=0$, có hệ số $a=1;b=2;$ và $c=-8$.

$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=2;x=-4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$. Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. $3x^2+3x+5=5x+1$

b. $\frac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\frac{1}{3}$

c. $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+3$

d. $x^2-3(k-2)x-8=1-k^2$

Bài 2. Giải các phương trình sau :

a. $x^2-5x=0$

b. $2x^2-32=0$

c. $3x^2+4=0$

d. $2x^2+\sqrt{2}x=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f(x)^2=m$ với m là hằng số:

a. $x^2-10x+9=0$

b. $x^2+2x-3=0$

c. $x^2+2x+7=0$

d. $4x^2-7x+3=0$

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi vế trái về dạng tích của các biểu thức:

a. $x^2-5x+4=0$ b. $x^2+x-6=0$

c. $-3x^2+2x+5=0$ d. $4x^2+24x+9=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$. Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. Phương trình $3x^2+3x+5=5x+1 \Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$
có hệ số : $a=3;\ b=-2;\ c=4$.

b. Phương trình $\frac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-7x-\frac{10}{3}=0$

có hệ số : $a=\frac{3}{4};\ b=-7;\ c=-\frac{10}{3}$.

c. Phương trình $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+3 \Leftrightarrow -\sqrt{5}x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x-4=0$

có hệ số : $a=-\sqrt{5};\ b=1-\sqrt{5};\ c=-4$.

d. Phương trình $x^2-3\left(k-2\right)x-8=1-k^2 \Leftrightarrow x^2-3\left(k-2\right)x+k^2-9=0$

có hệ số : $a=1;\ b=k-2;\ c=k^2-9$.

Bài 2. Giải các phương trình sau :

a. Phương trình $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x\left(x-5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0, x=5$.

b. Phương trình $2x^2-32=0 \Leftrightarrow 2x\left(x-16\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=16 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0, x=16$.

c. Phương trình $3x^2+4=0 \Leftrightarrow 3x^2=-4$

$VT=3x^2 \geq 0$ với mọi x, $VP=-4<0$. Do đó, phương trình $3x^2=-4$ vô nghiệm.

d. Phương trình $2x^2+\sqrt{2}x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0, x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f\left(x\right)^2=m$ với m là hằng số:

a. Phương trình $x^2-10x+9=0 \Leftrightarrow x^2-10x+25-16=0$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=16 \Leftrightarrow \left(x-5\right)^2=16 \Leftrightarrow \left(x-5\right)^2=4^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1, x=9$.

b. Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-4=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-4=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=4 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=2^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1, x=-3$.

c. Phương trình $x^2+2x+7=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+6=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=-6 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=-6$ không có giá trị x thoả mãn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+\frac{49}{16}-\frac{1}{16}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-7x+\frac{49}{16}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x-\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{7}{4}=\frac{1}{4} \\ 2x-\frac{7}{4}=-\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2 \\ 2x=\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1, x=\frac{3}{4}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi vế trái về dạng tích của các biểu thức:

a. Phương trình $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=1, x=4$.

b. Phương trình $x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=2, x=-3$.

c. Phương trình $-3x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow (-3x+5)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x+5=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=-1, x=\dfrac{5}{3}$.

d. Phương trình $4x^2+\left(8-\sqrt{3}\right)x-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left(4x-\sqrt{3}\right)\left(x+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\sqrt{3}=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, x=2$.

b. Dạng 2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm

1. Giải phương trình bậc hai bằng công thức nghiệm :

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$

* Biệt thức Delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm

* Lưu ý: nếu $a.c < 0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ và $b = 2b'$

Tính biệt thức: $\Delta' = b'^2 - ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh hoạ 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, rồi tính biệt thức delta (Δ) và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 + 5x + 2 = 0$ b. $x^2 - 5x + 9 = 0$

c. $2x^2-6x+\frac{9}{2}=0$ 　　　　 d. $x^2+\left(\sqrt{2}+1\right)x-\sqrt{2}=0$

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2+5x+2=0$, có hệ số $a=3;b=5;$ và $c=2$.

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4.3.2=25-24=1>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $x^2-5x+9=0$, có hệ số $a=1;b=-5$ và $c=9$.

$\Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4.1.9=25-36=-11<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

c. Phương trình $2x^2-6x+\frac{9}{2}=0$, có hệ số $a=2;b=-6;$ và $c=\frac{9}{2}$.

$\Delta=b^2-4ac=\left(-6\right)^2-4.2.\frac{9}{2}=36-36=0$

Vậy, phương trình có nghiệm kép.

d. Phương trình $x^2+\left(\sqrt{2}+1\right)x-\sqrt{2}=0$, có hệ số $a=1;b=\sqrt{2}+1;$ và $c=-\sqrt{2}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4.1.\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm.

a. $3x^2-5x+8=0$ 　　　　 b. $5x^2-3x-2=0$

c. $x^2-4x+1=0$ 　　　　 d. $3x^2+7x+2=0$

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2-5x+8=0$, có hệ số $a=3;b=-5;$ và $c=8$.

$\Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4.3.8=25-96=-71<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2-3x-2=0$, có hệ số $a=5; b=-3$ và $c=-2$.

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4.5.(-2)=9+40=49>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-7}{2.5}=-\frac{2}{5}\ ;\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+7}{2.5}=1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-\frac{2}{5}; x_2=1$.

c. Phương trình $x^2-4x+1=0$, có hệ số $a=2; b=-4;$ và $c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4.1.1=16-4=12>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-2\sqrt{3}}{2.1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\ ;$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+2\sqrt{3}}{2.1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=2-\sqrt{3}; x_2=2+\sqrt{3}$.

d. Phương trình $3x^2+7x+2=0$, có hệ số $a=3; b=7$ và $c=2$.

$\Delta=b^2-4ac=(7)^2-4.3.2=49-24=25>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-5}{2.3}=-2\ ;\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7+5}{2.3}=-\frac{1}{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-2; x_2=-\frac{1}{3}$.

Ví dụ minh hoạ 3: Với giá trị nào của m thì :

a. Phương trình $3x^2+(m+1)x+5=0$ có nghiệm $x=1$.

b. Phương trình $mx^2-4x-3=0$ có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

c. Phương trình $-x^2+2mx-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2+(m+1)x+5=0$ có nghiệm $x=1$

Thay $x=1$ vào phương trình đã cho :

$3.1^2+(m+1).1+5=0 \Leftrightarrow 3+m+1+5=0 \Leftrightarrow m+9=0 \Leftrightarrow m=-9$

Vậy, với $m=-9$ thì phương trình có nghiệm $x=1$.

b. Phương trình $mx^2-4x-3=0$.

Với hệ số $a=m$, $\Delta=(-4)^2-4.m.(-3)=16+12m$.

Để phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 16+12m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$

Với $m=-\dfrac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép, và

$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-4)}{2.m}=-\dfrac{(-4)}{2.\left(-\dfrac{4}{3}\right)}=-\dfrac{3}{2}$.

c. Phương trình $-x^2+2mx-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

Với hệ số $a=-1$, $\Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4.(-1).(-1)=4m^2-4$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\neq 0 \\ 4m^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\neq 0 \\ m^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$

Vậy, với $m > 1$ hoặc $m < -1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 4: Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu.

Áp dụng: Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có mấy nghiệm:

a. $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$

b. $5x^2 - 3mx - 1 - m^2 = 0$.

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khi a, c trái dấu thì $ac < 0$, suy ra $-ac > 0$, do đó $-4ac > 0$.

Mặt khác: $b^2 \geq 0$ với mọi b.

Vì vậy, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu.

Điều này cũng đúng khi chứng minh với (Δ').

Áp dụng:

a. Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$ có hệ số $a = 1 + \sqrt{2} > 0$,

hệ số $c = -\sqrt{3} < 0$.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $5x^2 - 3mx - 1 - m^2 = 0$ có hệ số $a = 5 > 0$,

hệ số $c = -1 - m^2 < 0$ với mọi m.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 5: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn.

a. $3x^2-5x+8=0$

b. $5x^2-3x-2=0$

c. $x^2-4x+1=0$

d. $3x^2+7x+2=0$

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2-5x+8=0$, có hệ số $a=3;b=-5\Rightarrow b'=-\dfrac{5}{2};$ và $c=8$.

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3.8=\frac{25}{4}-24=-\frac{71}{4}<0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2-3x-2=0$, có hệ số $a=5;b=-3\Rightarrow b'=-\dfrac{3}{2};$ và $c=-2$.

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-5.(-2)=\frac{9}{4}+10=\frac{49}{4}>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\frac{7}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{7}{2}}{5}=-\frac{2}{5}\ ;x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{2}}{5}=1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-\dfrac{2}{5};x_2=1$.

c. Phương trình $x^2-4x+1=0$, có hệ số $a=1;b=-4\Rightarrow b'=-2;$ và $c=1$.

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=(-2)^2-1.1=3>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-2)-\sqrt{3}}{1}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}\ ;$$

$$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-2)+\sqrt{3}}{1}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2-\sqrt{3}; x_2 = 2+\sqrt{3}$.

d. Phương trình $3x^2+7x+2=0$, có hệ số $a=3; b=7 \Rightarrow b'=\dfrac{7}{2}$; và $c=2$.

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3.2 = \frac{49}{4} - 6 = \frac{25}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{5}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}{3} = -2 \; ; \; x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2; x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta Δ và cho biết số nghiệm của phương trình :

a. $x^2-5x+1=0$ b. $2x^2-9x+10=0$

c. $2x^2+7x+3=0$ d. $-x^2+6x-9=0$

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:.

a. $x^2-8x+17=0$ b. $\dfrac{1}{2}x^2-5x-3=0$

c. $-x^2+\sqrt{5}x-1=0$ d. $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $3x^2+\sqrt{2}x-3+\sqrt{2}=0$ b. $5x^2-5\sqrt{2}x+\dfrac{5}{2}=0$

c. $x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ d. $x^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$

Bài 4. Với giá trị nào của k thì các phương trình sau có nghiệm kép? Tính nghiệm kép đó.

a. $x^2-10x+k+2=0$ b. $x^2+kx-3=0$

c. $x^2+2kx+7-k=0$ d. $x^2-\left(k+1\right)x-1=0$

Bài 5. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau vô nghiệm?

a. $3x^2+2mx+4=0$ b. $x^2+2x+m=0$

c. $-3x^2+mx+2=0$ d. $-x^2+\left(m-2\right)x+9=0$

Bài 6. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt? Tính nghiệm của phương trình theo m.

a. $4x^2-mx-15=0$ b. $x^2-8x+4m^2=0$

c. $4x^2+3x+m-1=0$ d. $3x^2-2\left(m-1\right)x+3=0$

Bài 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình:

a. $x^2-6x+8=0$ b. $2x^2-9x-5=0$

c. $x^2+5x-14=0$ d. $-x^2+4x+12=0$

Bài 8. Giải các phương trình sau, nghiệm gần đúng chính xác đến chữ số thập phân thứ hai:

a. $x^2-4x+2=0$ b. $x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$

c. $x^2+7x-2=0$ d. $-x^2+7x-5=0$

Bài 9. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau:

a. Phương trình $2x^2+mx-6=0$ có nghiệm $x=-2$.

b. Phương trình $(m-5)x^2-x+2=0$ có nghiệm $x=2$.

Bài 10. Với giá trị nào của x hai hàm số sau có giá trị bằng nhau :

a. $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ và $y=2x$

b. $y=x^2-2$ và $y=3x+2$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm kép :

a. $x^2-4x+m=0$

b. $2x^2+mx+1=0$

c. $2x^2-2(m-4)x+m^2+m+3=0$

d. $mx^2-4x+4m=0$

Bài 12. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt ?

a. $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$

b. $x^2-mx+m+3=0$

c. $-x^2+2mx+3=0$

d. $-x^2+9x+12m=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta Δ và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. Phương trình $x^2-5x+1=0$, có hệ số $a=1;b=-5$ và $c=1$

$\Delta=(-5)^2-4.1.1=25-4=21>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $2x^2-9x+10=0$, có hệ số $a=2;b=-9$ và $c=10$

$\Delta = (-9)^2 - 4.2.10 = 81 - 80 = 1 > 0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $2x^2 + 7x + 3 = 0$, có hệ số $a = 2; b = 7$ và $c = 3$

$\Delta = (7)^2 - 4.2.3 = 49 - 24 = 25 > 0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d. Phương trình $-x^2 + 6x - 9 = 0$, có hệ số $a = -1; b = 6$ và $c = -9$

$\Delta = (6)^2 - 4.(-1).(-9) = 36 - 36 = 0$

Vậy, phương trình có nghiệm kép.

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $x^2 - 8x + 17 = 0$, có hệ số $a = 1; b = -8$ và $c = 17$

$\Delta = (-8)^2 - 4.1.17 = 64 - 68 = -4 < 0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 3 = 0$, có hệ số $a = \frac{1}{2}; b = -5$ và $c = -3$.

$\Delta = (-5)^2 - 4.\frac{1}{2}.(-3) = 25 + 6 = 31 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{31}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{31}}{2.\dfrac{1}{2}} = 5 - \sqrt{31}$; và $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{31}}{2.\dfrac{1}{2}} = 5 + \sqrt{31}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 5 - \sqrt{31};\ x_2 = 5 + \sqrt{31}$.

c. Phương trình $-x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$, có hệ số $a = -1; b = \sqrt{5}$ và $c = -1$.

$$\Delta=\left(\sqrt{5}\right)^2-4.\left(-1\right).\left(-1\right)=5-4=1>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=1$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\left(\sqrt{5}\right)-1}{2.\left(-1\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ ;\ x_1=\frac{-\left(\sqrt{5}\right)+1}{2.\left(-1\right)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\quad x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

d. Phương trình $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$, có hệ số $a=5;b=\sqrt{3}$ và $c=-2$.

$$\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4.5.\left(-2\right)=3+40=43>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{43}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\left(\sqrt{3}\right)-\sqrt{43}}{2.5}=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{43}}{10}\ ;\ x_2=\frac{-\left(\sqrt{3}\right)+\sqrt{43}}{2.5}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{43}}{10}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{43}}{10};\quad x_2=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{43}}{10}.$$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $3x^2+\sqrt{2}x-3+\sqrt{2}=0$ có

$$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-4.3.\left(-3+\sqrt{2}\right)=2+36-12\sqrt{2}=\left(6-\sqrt{2}\right)^2>0$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=6-\sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\left(\sqrt{2}\right)-\left(6-\sqrt{2}\right)}{2.3}=\frac{-6}{6}=-1\ ;$$

$$x_2 = \frac{-\left(\sqrt{2}\right) + \left(6 - \sqrt{2}\right)}{2.3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{6} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là : $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{3}$.

b. Phương trình $5x^2 - 5\sqrt{2}x + \dfrac{5}{2} = 0$ có :

$$\Delta = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 4.5.\frac{5}{2} = 50 - 50 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \dfrac{-\left(-5\sqrt{2}\right)}{2.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

Vậy, nghiệm của phương trình là : $x_1 = x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Phương trình $x^2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} = 0$ có :

$$\Delta = \left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right]^2 - 4.1.\left(-\sqrt{3}\right) = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2} = 1 + \sqrt{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right] - \left(1 + \sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \ ;$$

$$x_2 = \frac{-\left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right] + \left(1 + \sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

Vậy, nghiệm của phương trình là : $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = 1$.

d. Phương trình $x^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$ có :

$$\Delta=\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^2-4.1.\left(-\sqrt{6}\right)=5-2\sqrt{6}+4\sqrt{6}=5+2\sqrt{6}>0$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2.1}=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\ ;$$

$$x_2=\frac{-\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2.1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là : $x_1=-\sqrt{2}$ và $x_2=\sqrt{3}$.

Bài 4. Tìm m để phương trình có nghiệm kép

a. Phương trình $x^2-10x+k+2=0$ có :

$$\Delta=\left(-10\right)^2-4.1.\left(k+2\right)=100-4k-8=92-4k$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow 92-4k=0\Leftrightarrow k=23$

Vậy, với $k=23$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=5$.

b. Phương trình $x^2+kx-3=0$ có :

$\Delta=k^2-4.1.\left(-3\right)=k^2+12>0$ với mọi k. Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị k thoả mãn điều kiện bài toán.

c. Phương trình $x^2+2kx+7-k=0$ có :

$$\Delta=\left(2k\right)^2-4.1.\left(7-k\right)=4k^2+4k-28.$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 28 = 0$ (*)

Giải phương trình $4k^2 + 4k - 28 = 0$ (*) ta được $k = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}; k = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

Vậy, với $k = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.

với $k = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

d. Phương trình $x^2 - (k+1)x - 1 = 0$ có :

$\Delta = \left[-(k+1)\right]^2 - 4.1.(-1) = (k+1)^2 + 4 > 0$ với mọi k.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k.

Vậy, không có giá trị k thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 5. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

a. Phương trình $3x^2 + 2mx + 4 = 0$ có :

$\Delta = (2m)^2 - 4.1.4 = 4m^2 - 16$

Để phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Vậy, với $-2 < m < 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có :

$\Delta = 2^2 - 4.1.\mathrm{m} = 4 - 4m$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4m < 0 \Leftrightarrow 4m > 4 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy, với $m > 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Phương trình $-3x^2+mx+2=0$ có :

$\Delta=\left(m\right)^2-4.\left(-3\right).2=m^2+24>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị m thoả mãn để phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $-x^2+\left(m-2\right)x+9=0$ có :

$\Delta=\left(m-2\right)^2-4.\left(-1\right).9=\left(m-2\right)^2+36>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị m thoả mãn để phương trình vô nghiệm.

Bài 6.

a. Phương trình $4x^2-mx-15=0$ có :

$\Delta=\left(-m\right)^2-4.1.\left(-15\right)=m^2+60>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m, với :

$$x_1=\frac{m-\sqrt{m^2+60}}{8};\ x_2=\frac{m+\sqrt{m^2+60}}{8}.$$

b. Phương trình $x^2-8x+4m^2=0$ có :

$\Delta=\left(-8\right)^2-4.1.\left(4m^2\right)=64-16m^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow 64-16m^2>0\Leftrightarrow 16m^2<64\Leftrightarrow m^2<4\Leftrightarrow -2<m<2$$

Vậy, với $-2 < m < 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{64-16m^2}}{2} = 4-2\sqrt{4-m^2};$$

$$x_2 = \frac{8+\sqrt{64-16m^2}}{2} = 4+2\sqrt{4-m^2}.$$

c. Phương trình $4x^2+3x+m-1=0$ có :

$$\Delta = 3^2 - 4.4.(\mathrm{m}-1) = 25-16m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 25-16m > 0 \Leftrightarrow 16m < 25 \Leftrightarrow m < \frac{25}{16}$$

Vậy, với $m < \frac{25}{16}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{25-16m}}{8}; \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{25-16m}}{8}.$$

d. Phương trình $3x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$ có :

$$\Delta = \left[-2(m-1)\right]^2 - 4.3.3 = 4(m-1)^2 - 36$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > \frac{36}{4}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 > 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 > 3 \\ m-1 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -2 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m > 4$ hoặc $m < -2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{2(m-1)-\sqrt{4(m-1)^2-36}}{6} = \frac{m-1-\sqrt{(m-1)^2-9}}{3}$

$$x_2=\frac{2(m-1)+\sqrt{4(m-1)^2-36}}{6}=\frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2-9}}{3}.$$

Bài 7. Xác định a, b’, c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình:

a. Phương trình $x^2-6x+8=0$ có các hệ số $a=1;b'=-3;c=8$.

$$\Delta'=(-3)^2-1.8=1>0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\frac{3-1}{1}=2$; $x_2=\frac{3+1}{1}=4$.

b. Phương trình $2x^2-9x-5=0$ có các hệ số $a=2;b'=-\frac{9}{2};c=-5$.

$$\Delta'=\left(-\frac{9}{2}\right)^2-2.(-5)=\frac{81}{4}+10=\frac{121}{4}>0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\frac{\frac{9}{2}-\frac{11}{2}}{2}=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{\frac{9}{2}+\frac{11}{2}}{2}=5$.

c. Phương trình $x^2+5x-14=0$ có các hệ số $a=1;b'=\frac{5}{2};c=-14$.

$$\Delta'=\left(\frac{5}{2}\right)^2-1.(-14)=\frac{25}{4}+14=\frac{81}{4}>0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}}{1}=-7$; $x_2=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{1}=2$.

d. Phương trình $-x^2+4x+12=0$ có các hệ số $a=-1;b'=2;c=12$.

$$\Delta'=(2)^2-(-1).12=4+12=16>0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \dfrac{-2-4}{-1} = 6$; $x_2 = \dfrac{-2+4}{-1} = -2$

Bài 8. Học sinh tự xác định các hệ số a, b', c, và sử dụng công thức nghiệm thu gọn để tính nghiệm của phương trình.

a. Phương trình $x^2 - 4x + 2 = 0$ có hai nghiệm :

$x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59$; và $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$

b. Phương trình $x^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$ có hai nghiệm :

$x_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$; và $x_2 = 1$

c. Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có hai nghiệm :

$x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{57}}{2} \approx 0,27$; và $x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{57}}{2} \approx -7,27$

d. Phương trình $-x^2 + 7x - 5 = 0$ có hai nghiệm :

$x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{29}}{2} \approx 6,19$; và $x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{29}}{2} \approx 0,81$

Bài 9.

a. Phương trình $2x^2 + mx - 6 = 0$ có nghiệm $x = -2$.

$\Leftrightarrow 2\left(-2\right)^2 + m\left(-2\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi $m = 1$, ta có phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$ có hai nghiệm $x = \dfrac{3}{2}; x = -2$.

b. Phương trình $\left(m - 5\right)x^2 - x + 2 = 0$ có nghiệm $x = 2$.

$\Leftrightarrow \left(m - 5\right)2^2 - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Khi $m = 5$, ta có phương trình $-x + 2 = 0$ có một nghiệm $x = 2$.

Bài 10.

a. Hai hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ và $y=2x$ có giá trị bằng nhau khi và chỉ khi x là nghiệm của phương trình: $-\frac{1}{2}x^2+1=2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2-2x+1=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $x=-2-\sqrt{6}; x=-2+\sqrt{6}$.

Vậy, với $x=-2-\sqrt{6}; x=-2+\sqrt{6}$ thì hai hàm số đã cho có giá trị bằng nhau.

b. Hai hàm số $y=x^2-2$ và $y=3x+2$ có giá trị bằng nhau khi và chỉ khi x là nghiệm của phương trình: $x^2-2=3x+2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $x=-1; x=4$.

Vậy, với $x=-1; x=4$ thì hai hàm số đã cho có giá trị bằng nhau.

Bài 11.

a. Phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases}$

Với $\Delta'=(-2)^2-1.m=4-m$. Suy ra $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ 4-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

Vậy, với $m=4$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

b. Phương trình $2x^2+mx+1=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Với $\Delta=m^2-4.2.1=m^2-8$.

Suy ra $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\neq 0 \\ m^2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2=8 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$

Vậy, với $m=\pm 2\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

c. Phương trình $2x^2-2(m-4)x+m^2+m+3=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases}$

Với $\Delta' = \left[-(m-4)\right]^2 - 2.\left(m^2+m+3\right) = m^2-8m+16-2m^2-2m-6$

$\Delta' = -m^2-10m+10$

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 0 \\ -m^2-10m+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5-\sqrt{35} \\ m=-5+\sqrt{35} \end{array}\right.$

Vậy, với $m=-5-\sqrt{35}$ hoặc $m=-5+\sqrt{35}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

d. Phương trình $mx^2-4x+4m=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = (-2)^2 - m.4m = 4-4m^2$.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4-4m^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy, với $m=1; m=-1$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

Bài 12. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt ?

a. Phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = (m+1)^2 - 1.\left(m^2+2\right) = m^2+2m+1-m^2-2 = 2m-1$.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Vậy, với $m > \dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $x^2-mx+m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Với $\Delta=(-m)^2-4.1.(m+3)=m^2-4m-12=(m-6)(m+2)$.

Suy ra $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\neq 0\\ (m-6)(m+2)>0\end{cases}$ (*Điều kiện* $A.B>0$ *Tập 1 – Chương 1*)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-6>0\\ m+2>0\end{cases}\\ \begin{cases}m-6<0\\ m+2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>6\\ m>-2\end{cases}\\ \begin{cases}m<6\\ m<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\ m<-2\end{array}\right.$$

Vậy, với $m>6$ hoặc $m<-2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $-x^2+2mx+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}$

Với $\Delta'=m^2-(-1).3=m^2+3>0$ với mọi giá trị của m và hệ số $a=-1\neq 0$.

Vậy, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

d. Phương trình $-x^2+9x+12m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}$

Với $\Delta=9^2-4.(-1).12m=81+48m$.

Suy ra $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\neq 0\\ 81+48m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{81}{48}$

Vậy, với $m>\dfrac{81}{48}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c. Dạng 3. Ứng dụng hệ thức Viét

1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

+ **Định lý Viet**: nếu x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ thì tổng và tích của hai nghiệm là:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

2. Giải phương trình bằng phương pháp tính nhẩm nghiệm

Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số thoả mãn:

+ Trường hợp: $a+b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$.

+ Trường hợp: $a-b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-1,\ x_2=-\frac{c}{a}$.

3. Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1; x_2 của phương trình

Để làm dạng toán nay các em cần nhớ một số biểu thức sau:

- ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2p$
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=S^2-4p$
- ${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3Sp$
- ${x_1}^4+{x_2}^4=\left({x_1}^2+{x_2}^2\right)^2-2{x_1}^2{x_2}^2=\left(S^2-2p\right)^2-2p^2$
- $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{p}$
- $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2p}{p}$

4. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích của hai nghiệm phương trình:

Nếu u và v là hai số cần tìm có $\begin{cases}u+v=S\\u.v=P\end{cases}$

thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$.

(Điều kiện để có hai số đó là: $S^2-4P\geq 0$).

Ví dụ minh hoạ 1: Không giải phương trình, dùng hệ thức Vi-ét hãy tính tổng và tích các nghiệm của mỗi phương trình sau :

a. $3x^2-11x+4=0$ b. $x^2-3\sqrt{7}x+2\sqrt{3}=0$

c. $2x^2-8x+8=0$ d. $7x^2-4x+1=0$

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình $3x^2-11x+4=0$ có

$\Delta=(-11)^2-4.3.4=121-48=73>0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Theo hệ thức vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{11}{3};\ \ x_1x_2=\dfrac{4}{3}$.

b. Phương trình $x^2-3\sqrt{7}x+2\sqrt{3}=0$ có

$\Delta=\left(-3\sqrt{7}\right)^2-4.1.2\sqrt{3}=63-8\sqrt{3}>0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Theo hệ thức vi ét ta có: $x_1+x_2=3\sqrt{7};\ \ x_1x_2=2\sqrt{3}$.

c. Phương trình $2x^2-8x+8=0$ có

$\Delta'=(-4)^2-2.8=16-16=0$.

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1=x_2$.

Theo hệ thức vi ét ta có: $x_1+x_2=4;\ \ x_1x_2=4$.

d. Phương trình $7x^2-4x+1=0$ có

$\Delta'=(-2)^2-7.1=4-7=-3<0$.

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ minh hoạ 2:

a. Chứng tỏ rằng phương trình $7x^2-3x-54=0$ có một nghiệm là 3. Tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$. Biết phương trình có nghiệm $x=-1$, hãy dùng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại của phương trình, từ đó tính giá trị của m.

Hướng dẫn giải :

a. Thay $x_1=3$ vào phương trình $7x^2-3x-54=0$ được:

$7(3)^2-3(3)-54=63-9-54=0$ nên $x_1=3$ là một nghiệm của phương trình.

Theo định lý Vi ét, ta có: $x_1+x_2=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 3+x_2=\frac{3}{7}\Leftrightarrow x_2=\frac{3}{7}-3=-\frac{18}{7}$.

b. Phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$ có nghiệm $x_1=-1$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -1+x_2=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow x_2=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$

Cũng theo hệ thức Vi ét : $x_1x_2=\frac{m^2-5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.(-1)=\frac{m^2-5}{4}\Leftrightarrow -1=m^2-5\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy, với $m=2$ hoặc $m=-2$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$.

Ví dụ minh hoạ 3: Cho phương trình : $3x^2+5x-6=0$ có nghiệm $x_1;x_2$.

Không tính giá trị của $x_1;x_2$, hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là u và v.

Biết $u=x_1+\frac{1}{x_2}$ và $v=x_2+\frac{1}{x_1}$.

Hướng dẫn giải :

Phương trình: $3x^2+5x-6=0$ có hệ số $a=3>0;c=-6<0$. Do đó tích $a.c<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Định lý vi ét, ta có: $x_1+x_2=-\frac{5}{3}$ và $x_1x_2=-2$. Khi đó:

$$\begin{aligned} u+v &= x_1+\frac{1}{x_2}+x_2+\frac{1}{x_1} \\ &= (x_1+x_2)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right) \\ &= (x_1+x_2)+\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \\ &= -\frac{5}{3}+\frac{5}{6}=-\frac{5}{6} \end{aligned} \quad \text{và} \quad \begin{aligned} uv &= \left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right) \\ &= x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}+2 \\ &= -2+\frac{1}{-2}+2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy, u và v là nghiệm của phương trình : $X^2+\frac{5}{6}X-\frac{1}{2}=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải phương trình, hãy dùng hệ thức Vi ét, tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình sau :

a. $2x^2+5x+3=0$

b. $3x^2-11x+4=0$

c. $x^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$

d. $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)x^2+2x+\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$

Bài 2. Dùng điều kiện $a+b+c=0$, hoặc $a-b+c=0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau :

a. $3x^2-4x+1=0$

b. $-4x^2-3x+7=0$

c. $x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$

d. $3x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$

e. $\left(\sqrt{3}-2\right)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2=0$

f. $\left(5-\sqrt{2}\right)x^2-10x+5+\sqrt{2}=0$

Bài 3.

a. Cho phương trình $2x^2+5x+2=0$. Biết phương trình có một nghiệm $x=-2$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $-3x^2+5x+12=0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x=3$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

Bài 4. Hãy sử dụng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại và tham số m trong mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$.

b. Phương trình $4x^2-2x+m-3=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=3$.

c. Phương trình $x^2-8x+2m^2+7=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=5$.

Bài 5. Tìm hai số u, v trong mỗi trường hợp sau :

a. $u+v=29$ và $u.v=198$

b. $u+v=3\sqrt{2}$ và $u.v=4$

c. $u-v=-2$ và $u.v=80$

d. $u^2+v^2=13$ và $u.v=6$

Bài 6. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a. 5 và 2

b. 7 và 9

c. 3 và $\frac{1}{4}$

d. -5 và $\frac{1}{5}$

e. $\sqrt{5}-1$ và $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

f. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-5x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A=x_1^2+x_2^2$

b. $B=x_1^3+x_2^3$

c. $C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

d. $D=\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}$

Bài 8. Cho phương trình $2x^2-7x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau:

a. $u=\frac{1}{x_1};v=\frac{1}{x_2}$

b. $u=1+x_1;v=1+x_2$

Bài 9. Cho phương trình $x^2-12x+m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn điều kiện sau:

a. $x_1-x_2=-2$

b. $x_1=\frac{3}{2}x_2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a. Phương trình $2x^2+5x+3=0$ có $\Delta=5^2-4.2.3=25-24=1>0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1+x_2=-\frac{5}{2};\ \ x_1x_2=\frac{3}{2}$.

b. Phương trình $3x^2-11x+4=0$ có $\Delta=11^2-4.3.4=121-48=73>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1+x_2=\frac{11}{3};\ \ x_1x_2=\frac{4}{3}$.

c. Phương trình $x^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta'=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}=4+\sqrt{3}>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1+x_2=-2\left(1+\sqrt{3}\right);\ \ x_1x_2=\sqrt{3}$.

d. Phương trình $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)x^2+2x+\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta=2^2-4.\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)=4-4\left(7-3\right)=-12<0$.

Phương trình vô nghiệm.

Bài 2. Dùng điều kiện $a+b+c=0$, hoặc $a-b+c=0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau :

a. Phương trình $3x^2-4x+1=0$ có $a+b+c=3+\left(-4\right)+1=0$.

Nên có nghiệm $x=1;$ và $x=\frac{1}{3}$.

b. Phương trình $-4x^2-3x+7=0$ có $a+b+c=\left(-4\right)+\left(-3\right)+7=0$.

Nên có nghiệm $x=1;$ và $x=-\frac{7}{4}$.

c. Phương trình $x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$ có $a-b+c=3-\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=0$.

Nên có nghiệm $x=-1$; và $x=\sqrt{5}$.

d. Phương trình $3x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$ có $a+b+c=3-\left(3+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=0$.

Nên có nghiệm $x=1$; và $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

e. Phương trình $\left(\sqrt{3}-2\right)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2=0$ có

$a-b+c=\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2=0$.

Nên có nghiệm $x=-1$; và $x=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$.

f. Phương trình $\left(5-\sqrt{2}\right)x^2-10x+5+\sqrt{2}=0$ có

$a+b+c=5-\sqrt{2}+\left(-10\right)+5+\sqrt{2}=0$.

Nên có nghiệm $x=1$; và $x=\dfrac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$.

Bài 3.

a. Cho phương trình $2x^2+5x+2=0$. Phương trình có nghiệm $x=-2$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -2+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}$.

b. Cho phương trình $-3x^2+5x+12=0$. Phương trình có nghiệm $x=3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -2+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 4.

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$. Phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} + x_2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Khi đó, $x_1 x_2 = \frac{3m+1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{3m+1}{3} \Leftrightarrow 3m+1 = 7 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy, với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{7}{3}$ và nghiệm còn lại $x_2 = 1$.

b. Phương trình $4x^2 - 2x + m - 3 = 0$, biết phương trình có nghiệm $x_1 = 3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 + x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$.

Khi đó, $x_1 x_2 = \frac{m-3}{4} \Leftrightarrow -\frac{15}{2} = \frac{m-3}{4} \Leftrightarrow m - 3 = 30 \Leftrightarrow m = -27$.

Vậy, với $m = -27$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 3$ và nghiệm còn lại

$x_2 = -\frac{5}{2}$.

c. Phương trình $x^2 - 8x + 2m^2 + 7 = 0$, biết phương trình có nghiệm $x_1 = 5$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = 8 \Leftrightarrow 5 + x_2 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 3$.

Khi đó, $x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 7}{1} \Leftrightarrow 15 = 2m^2 + 7$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Vậy, với $m = \pm 2$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 5$ và nghiệm còn lại $x_2 = 3$

Bài 5. Tìm hai số u, v trong mỗi trường hợp sau :

a. Ta có : $u + v = 29$ và $u.v = 198$.

Nên u, v là hai nghiệm của phương trình : $X^2 - 29X + 198 = 0$

Giải phương trình ta được nghiệm $X = 18; X = 11$.

Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=18 \\ v=11 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=11 \\ v=18 \end{cases}$.

b. Ta có : $u+v=3\sqrt{2}$ và $u.v=4$.

Nên u, v là hai nghiệm của phương trình : $X^2-3\sqrt{2}X+4=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $X=2\sqrt{2}; X=\sqrt{2}$.

Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=2\sqrt{2} \\ v=\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=\sqrt{2} \\ v=2\sqrt{2} \end{cases}$.

c. $u-v=-2$ và $u.v=80$.

Đặt $v'=-v$, ta có $u+v'=-2$ và $u.(-v')=80 \Leftrightarrow u.v'=-80$.

Nên u, v' là hai nghiệm của phương trình : $X^2+2X-80=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $X=8; X=-10$.

Suy ra : $\begin{cases} u=8 \\ v'=-10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-10 \\ v'=8 \end{cases}$

Do đó, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=8 \\ v=10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-10 \\ v=-8 \end{cases}$

d. $u^2+v^2=13$ và $u.v=6$.

Ta có: $u^2+v^2=13 \Leftrightarrow (u+v)^2-2uv=13 \Leftrightarrow (u+v)^2-12=13$

$\Leftrightarrow (u+v)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=5 \\ u+v=-5 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $u+v=5$ và $u.v=6$, thì u, v là hai nghiệm của phương trình:

$X^2-5X+6=0$. Giải phương trình ta được nghiệm $X=3; X=2$.

Suy ra hai số cần tìm là $\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=2\\v=3\end{cases}$

Trường hợp 2: $u+v=-5$ và $u.v=6$, thì u, v là hai nghiệm của phương trình:

$X^2+5X+6=0$. Giải phương trình ta được nghiệm $X=-3; X=-2$.

Suy ra hai số cần tìm là $\begin{cases}u=-3\\v=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=-2\\v=-3\end{cases}$

Kết luận : Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=2\\v=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=-3\\v=-2\end{cases}$ hoặc

$\begin{cases}u=-2\\v=-3\end{cases}$.

Bài 6. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a. Hai số 5 và 2 có tổng là $5+2=7$ và tích là $5.2=10$ nên nó là nghiệm của phương trình sau: $x^2-7x+10=0$;

b. Hai số 7 và 9 có tổng là $7+9=16$ và tích là $7.9=63$ nên nó là nghiệm của phương trình sau: $x^2-16x+63=0$;

c. Hai số 3 và $\frac{1}{4}$ có tổng là $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ và tích là $3.\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ nên nó là nghiệm của phương trình sau: $x^2-16x+63=0$;

d. Hai số -5 và $\frac{1}{5}$ có tổng là $-5+\frac{1}{5}=\frac{-24}{5}$ và tích là $-5.\frac{1}{5}=-1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau: $x^2+\frac{24}{5}x-1=0$;

e. Hai số $\sqrt{5}-1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ có :

Tổng $\sqrt{5}-1+\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}-1+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}$

$=\sqrt{5}-1+\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}=\dfrac{5\sqrt{5}-3}{4}$. Tích là $\left(\sqrt{5}-1\right)\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}=1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau: $x^2-\dfrac{5\sqrt{5}-3}{4}x+1=0$;

f. Hai số $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ có :

Tổng $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$

Tích là $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau:

$x^2-2\sqrt{2}x-1=0$;

Bài 7.

Phương trình $x^2-5x+6=0$ có $\Delta=(-5)^2-4.1.6=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=6 \end{cases}$

a. Biểu thức $A=x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$

$A=(5)^2-2.6=25-12=13$

b. $B=x_1^3+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1{}^2x_2+3x_1x_2{}^2-3x_1{}^2x_2-3x_1x_2{}^2$

$B=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

$B=(5)^3-3.6(5)=125-90=35$

c. $C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{6}$

d. $D=\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}=\frac{x_1{}^4+x_2{}^4}{x_1{}^2x_2{}^2}=\frac{\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)^2-2x_1{}^2x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}$

$$D=\frac{\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left[\left(5\right)^2-2.6\right]^2-2\left(6\right)^2}{\left(6\right)^2}$$

$$D=\frac{\left[\left(5\right)^2-2.6\right]^2-2\left(6\right)^2}{\left(6\right)^2}=\frac{\left(13\right)^2-72}{36}=\frac{97}{36}$$

Bài 8. Cho phương trình $2x^2-7x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau:

Phương trình $2x^2-7x+6=0$ có $\Delta=7^2-4.2.6=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{7}{2} \\ x_1x_2=3 \end{cases}$

a. Hai số $u=\frac{1}{x_1};v=\frac{1}{x_2}$ có tổng là $u+v=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{7}{6}$ và tích là

$uv=\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{3}$

nên u, v là nghiệm của phương trình sau: $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$;

b. Hai số $u=1+x_1; v=1+x_2$ có

Tổng $u+v=(1+x_1)+(1+x_2)=2+(x_1+x_2)=2+\frac{7}{2}=\frac{11}{2}$

Tích $uv=(1+x_1)(1+x_2)=1+(x_1+x_2)+x_1x_2=1+\frac{7}{2}+3=\frac{15}{2}$

nên u, v là nghiệm của phương trình sau: $x^2-\frac{11}{2}x+\frac{15}{2}=0$;

Bài 9.

Phương trình $x^2-12x+m=0$ có $\Delta'=6^2-m=36-m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 36-m>0 \Leftrightarrow m<36$

Khi đó, áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=12 & (1) \\ x_1x_2=m & (2) \end{cases}$

a. Kết hợp giả thiết $x_1-x_2=-2$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1-x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=7 \end{cases}$$

Thay các giá trị $x_1=5; x_2=7$ vào (2) ta có: $m=5.7=35$.

Vậy, với m = 35 thì phương trình thoả điều kiện bài toán.

b. Kết hợp giả thiết $x_1=\frac{3}{2}x_2$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1=\frac{3}{2}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{36}{5} \\ x_2=\frac{24}{5} \end{cases}$$

Thay các giá trị $x_1=\frac{36}{5}; x_2=\frac{24}{5}$ vào (2) ta có: $m=\frac{36}{5}.\frac{24}{5}=\frac{864}{25}$.

Vậy, với m = 35 thì phương trình thoả điều kiện bài toán.

d. Dạng 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai có chứa tham số

Cho phương trình bậc hai có chứa tham số, thường là tham số m có dạng: $f(x,m)=0$.

1. Giải phương trình khi biết giá trị của tham số
   Phương pháp: Thay giá trị m vào phương trình để tìm nghiệm.
2. Tìm tham số khi biết nghiệm x_0 của phương trình
   + Thay x_0 vào phương trình, ta tìm được giá trị m.
   + Kiểm tra xem giá trị m có thoả mãn điều kiện bài toán không. Nếu thoả mãn, ta kết luận đó là giá trị m cần tìm.
3. Tìm tham số m để phương trình bậc hai
   + Trong bài toán tìm tham số m để phương trình bậc hai thoả mãn điều kiện về số nghiệm, mối quan hệ giữa các nghiệm,…
   Ta cần phân tích yêu cầu bài toán để xác định đúng các điều kiện cần thiết. Nếu tham số m có mặt ở hệ số a, ta cần phải chú ý điều kiện tương ứng của nó.

Các dạng toán thường gặp khi có tham số là tìm m để phương trình:

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta<0 \end{cases}$	Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0$
Phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P>0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$	Phương trình có 1 nghiệm: có 2 TH + Phương trình có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ + PT có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

4. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số.

Phương pháp: Biểu thức liên hệ không phụ thuộc m là biểu thức không có chứa tham số m. Áp dụng hệ thức Vi ét gồm tổng và tích của hai nghiệm. Biểu diễn tham số m theo các nghiệm (rút m).

Ví dụ minh hoạ 1: Cho phương trình: $x^2-(2m+3)x+m=0$

a. Giải phương trình với m = 2

b. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào m.

Hướng dẫn giải :

Phương trình : $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1)

a. Với m = 2, phương trình (1): $x^2-7x+2=0$

$\Delta=\left(-7\right)^2-4.1.2=41>0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2};x_2=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$.

b. Phương trình : $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1) có

$\Delta=\left(2m+3\right)^2-4.1.m \quad =4m^2+12m+9-4m$

$=4m^2+8m+9 \quad =4m^2+8m+4+5$

$=\left(2m+2\right)^2+5>0$ với mọi m.

Vậy, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c. Theo câu b. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Nên áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+3 \\ x_1x_2=m \end{cases}$

Thay $m=x_1x_2$ vào $x_1+x_2=2x_1x_2+3$ (*)

Vậy, biểu thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ không phụ thuộc m là $x_1+x_2=2x_1x_2+3$ (*).

Ví dụ minh hoạ 2: Cho phương trình : $mx^2-2(m+1)x+m-5=0$

a. Xác định m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

b. Xác định m để phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1+1)(x_2+1)=3$

Hướng dẫn giải :

Phương trình : $mx^2-2(m+1)x+m-5=0$

a. Để phương trình có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ -2(m+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$

Vậy, với $m=0$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

b. Để phương trình có một nghiệm

TH1: $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ -2(m+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$

TH2: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m+1)^2-m(m-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+1-m^2+5m=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 7m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=-\dfrac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{7}$$

Vậy, khi $m=0$ hoặc $m=-\dfrac{1}{7}$ thì phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1+1)(x_2+1)=3$

Để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ thì $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+1)^2 - m(m-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 + 5m \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 7m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\dfrac{1}{7} \end{cases}.$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$:

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-5}{m} \end{cases}$

Theo đề ra: $(x_1+1)(x_2+1) = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1 + x_2) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-5}{m} + \dfrac{2m+1}{m} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3m-4}{m} = 2 \Leftrightarrow 3m - 4 = 2m \Leftrightarrow m = 4$ (thoả điều kiện)

Kết luận: Vậy với $m = 4$ thì phương trình có hai nghiệm thoả điều kiện bài toán.

Lưu ý:

Ở câu này, học sinh chú ý, do mức độ phong phú của Tiếng Việt nên gặp đề yêu cầu phương trình có MỘT NGHIỆM (hoặc MỘT NGHIỆM DUY NHẤT) thì các em cần phân biệt chính xác.

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm thì sẽ có hai trường hợp thoả mãn là:

Phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ *hoặc phương trình có nghiệm kép* $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}.$

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm duy nhất thì chỉ có trường hợp $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ *là đúng. Nếu đề yêu cầu phương trình có nghiệm kép thì* $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1+1}{x_2} + \frac{x_2+1}{x_1} = \frac{13}{4}$

b. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào tham số m.

Bài 2. Cho phương trình : $x^2 - 5x + 2m - 1 = 0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{19}{3}$

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

b. Tìm GTNN của biểu thức $A = 10x_1.x_2 + x_1^2 + x_2^2$

Bài 4. Cho phương trình: $(m-4)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

a. Giải phương trình với m = 3

b. Tìm m để phương trình có nghiệm x = 2, tìm nghiệm còn lại

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m - 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm thõa mãn: $x_1 = 2.x_2$.

Bài 6. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+3)x + m - 2 = 0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m thỏa mãn hệ thức $3x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 7 = 0$

c. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào m.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2-(m-3)x-m=0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để phương trình có nghiệm bằng -2. Tìm nghiệm còn lại.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn hệ thức:
$3(x_1+x_2)-x_1x_2\ge 5$.

Bài 8. Cho phương trình: $x^2-2x+m-3=0$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm

b. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức
${x_1}^3+{x_2}^3=-20$.

Bài 9. Cho phương trình: $x^2-2(m+3)x+m^2+8m+6=0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn hệ thức: ${x_1}^2+{x_2}^2=34$

b. Với giá trị m của câu a. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức:
$A=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

Bài 10. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m-4=0$

a. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn hệ thức: ${x_1}^2+{x_2}^2=40$.

c. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào m.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Phương trình: $x^2-2mx+4m-4=0$.

Có $\Delta'=(-m)^2-1(4m-4)=m^2-4m+4=(m-2)^2\ge 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=4m-4\end{cases}$

a. Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}=\dfrac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{{x_1}^2+x_1+{x_2}^2+x_2}{x_1x_2}=\frac{13}{4}\Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m)^2-2(4m-4)+(2m)}{4m-4}=\frac{13}{4}\Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8}{m-1}=13$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8}{m-1}-13=0\Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8-13(m-1)}{m-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2-19m+21}{m-1}=0\Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-19m+21=0\\m-1\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-\dfrac{7}{4}\end{array}\right.\\m\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\m=-\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$$

Vậy, với $m=3$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn $\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}=\dfrac{13}{4}$.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=4m-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ m=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \end{cases}$. Suy ra: $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)=x_1x_2+4$ (*)

Vậy, biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là:

$2\left(x_1+x_2\right)=x_1x_2+4$ (*).

Bài 2. Phương trình : $x^2-5x+2m-1=0$

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ \left(-5\right)^2-4.1.\left(2m-1\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m+29>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{29}{8}$

Vậy, với $m<\dfrac{29}{8}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{19}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq\dfrac{29}{8}$, khi đó:

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{19}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1x_2}=\dfrac{19}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-\dfrac{19}{3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(5\right)^2-2\left(2m-1\right)}{2m-1}-\dfrac{19}{3}=0 \Leftrightarrow \dfrac{75-12m+6-38m+19}{3\left(2m-1\right)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{75-12m+6-38m+19}{3\left(2m-1\right)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-50m+100}{3\left(2m-1\right)}=0 \Leftrightarrow m=2$ (thoả điều kiện)

Vậy, với $m=2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thoả điều kiện.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

a. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m+1)^2 - (2m+10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 2m - 10 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array} \right.$

Vậy, với $m < -3$ hoặc $m > 3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b. Tìm GTNN của biểu thức $A = 10x_1.x_2 + x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array} \right.$

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m + 10 \end{cases}$, thay vào biểu thức A.

$A = 10x_1.x_2 + x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

$A = 4(m+1)^2 + 8(2m+10) = 4m^2 + 8m + 4 + 16m + 80$

$A = 4m^2 + 24m + 84$

$A = 4(m+3)^2 + 48 \geq 48$ với mọi giá trị m thuộc $\left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array} \right.$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $A_{min} = 48 \Leftrightarrow m = -3$.

Bài 4. Cho phương trình: $(m-4)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

a. Khi $m = 3$, ta có $-x^2 - 6x + 1 = 0$.

Giải phương trình ta được nghiệm $x = -3 - \sqrt{10}$; $x = -3 + \sqrt{10}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm x = 2, tìm nghiệm còn lại.

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m-4)(m-2) = 6m - 8$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 \neq 0 \\ 6m-8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m \geq \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Phương trình có nghiệm $x = 2$, suy ra: $4(m-4) - 4m + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18$ (thoả điều kiện).

Khi đó, $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m-4} \Leftrightarrow 2 + x_2 = \dfrac{36}{14} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{4}{7}$.

Vậy, với $m = 18$ thì phương trình có nghiệm $x = 2$, và nghiệm còn lại là $x = \dfrac{4}{7}$

.

c. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 \neq 0 \\ 6m-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Vậy, với $\begin{cases} m \neq 4 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m - 1 = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4 - (m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 & (1) \\ x_1 x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 2.x_2$, suy ra (1):

$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow 3x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \dfrac{8}{3}$.

Thay vào (2): $x_1x_2 = m-1 \Leftrightarrow m = x_1x_2 + 1 = \frac{4}{3}.\frac{8}{3} + 1 = \frac{41}{9}$ (thoả điều kiện)

Vậy, $m = \frac{41}{9}$.

Bài 6. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+3)x + m - 2 = 0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+3)^2 - m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 6m + 9 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 8m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{8} \end{cases}$

Vậy, với $m > -\frac{9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\frac{9}{8} \end{cases}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+3)}{m} \quad (1) \\ x_1x_2 = \frac{m-2}{m} \quad (2) \end{cases}$

Theo đề: $3x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 7 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{m-2}{m}\right) - 2\left(\frac{2(m+3)}{m}\right) + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3m - 6 - 4m - 12 + 7m}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{6m - 18}{m} = 0 \Leftrightarrow m = 3$ (thoả điều kiện)

Vậy, với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm thoả điều kiện bài toán.

c. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào m.

Ta có với $m \geq -\dfrac{9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Với $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+3)}{m} \quad (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{m-2}{m} \quad (2) \end{cases}$

Từ (2): $x_1x_2 = \dfrac{m-2}{m} \Rightarrow mx_1x_2 = m-2$

$\Leftrightarrow m(x_1x_2 - 1) = -2 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2}{x_1x_2 - 1}$, thay vào (1).

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2\left(\dfrac{-2}{x_1x_2 - 1} + 3\right)}{\dfrac{-2}{x_1x_2 - 1}} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{\left(\dfrac{-4}{x_1x_2 - 1} + 6\right)}{\dfrac{-2}{x_1x_2 - 1}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-4 + 6x_1x_2 - 6}{-2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5 + 6x_1x_2$$

Vậy, khi $m \geq -\dfrac{9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ với biểu thức liên hệ $x_1 + x_2 = 5 + 6x_1x_2$ không phụ thuộc m.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - (m-3)x - m = 0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m-3)^2 - 4(-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 + 4m > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 9 > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8 > 0$ với mọi m.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

Thay nghiệm $x = -2$ vào phương trình ta có:

$4+2(m-3)-m=0 \Leftrightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

Theo hệ thức Vi ét: $x_1 + x_2 = m-3 \Leftrightarrow -2 + x_2 = 2-3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Vậy, với m = 2 thì phương trình có nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.

c. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-3 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Thay vào hệ thức: $3(x_1+x_2)-x_1x_2 \geq 5 \Leftrightarrow 3\left(m-3\right)-\left(-m\right) \geq 5$

$\Leftrightarrow 3m-9+m \geq 5 \Leftrightarrow 4m \geq 14 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{7}{2}$

Vậy với $m \geq \dfrac{7}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thoả mãn điều kiện bài toán.

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 3 = 0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1^2 - 1\left(m-3\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m+4>0 \Leftrightarrow m<4$

Vậy, với $m < 4$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2 \;\Leftrightarrow\; \Delta' \geq 0 \;\Leftrightarrow\; m \leq 4$

Áp dụng hệ thức Vi ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases}$

Theo đề: $x_1^{\;3} + x_2^{\;3} = -20 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1+x_2\right) = -20$

$\Leftrightarrow \left(2\right)^3 - 3\left(m-3\right)\left(2\right) = -20 \Leftrightarrow 8 - 6m + 18 = -20$

$\Leftrightarrow -6m = -46 \Leftrightarrow m = \dfrac{23}{3}$

Vậy, với $m = \dfrac{23}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức

$x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = -20$.

Bài 9. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 8m + 6 = 0$

Có $\Delta' = \left(m+3\right)^2 - 1\left(m^2 + 8m + 6\right) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 8m - 6$

$\Delta' = -2m + 3$

a. Phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3}{2}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Vi ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\left(m+3\right) \\ x_1x_2 = m^2 + 8m + 6 \end{cases}$

Theo đề ta có: $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 34 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 34$

$\Leftrightarrow 4\left(m+3\right)^2 - 2\left(m^2 + 8m + 6\right) = 34$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 24m + 36 - 2m^2 - 16m - 12 = 34$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right.$ (thoả điều kiện)

Vậy, với $m = 1$ và $m = -5$ phương trình có nghiệm $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 34$

b. Với giá trị m của câu a. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức:

$A = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

TH1: Với $m = 1$, ta có phương trình $x^2 - 8x + 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Với $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1x_2 = 15 \end{cases}$.

Suy ra $A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(8\right)^2-2.15}{15}=\frac{34}{15}$

TH2: Với $m=-5$, ta có phương trình $x^2+4x-9=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Với $\begin{cases}x_1+x_2=-4\\x_1x_2=-9\end{cases}$.

Suy ra $A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(-4\right)^2-2.\left(-9\right)}{-9}=\frac{34}{-9}$

Bài 10.

a. Phương trình $x^2-2(m+1)x+m-4=0$

Có $\Delta'=\left(m+1\right)^2-1\left(m-4\right)=m^2+2m+1-m+4=m^2+m+5$

$\Delta'=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$ với mọi m.

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm x_1; x_2 với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\left(m+1\right)\\x_1x_2=m-4\end{cases}$

Theo đề: ${x_1}^2+{x_2}^2=40\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=40$

$\Leftrightarrow4\left(m+1\right)^2-2\left(m-4\right)=40\Leftrightarrow4m^2+6m-28=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$. Vậy, với $m=-\frac{7}{2}$ hoặc $m=2$ thì phương trình sẽ có hai nghiệm thoả điều kiện bài toán.

c. Phương trình luôn có hai nghiệm x_1; x_2 với mọi m.

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\left(m+1\right) & (1)\\x_1x_2=m-4 & (2)\end{cases}$

Từ (2): $x_1x_2=m-4\Rightarrow m=x_1x_2+4$.

Thay vào (1), ta có: $x_1+x_2=2\left(x_1x_2+4+1\right)\Leftrightarrow x_1+x_2=2x_1x_2+10$

Vậy, biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là :

$x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 10$.

e. Dạng 5. Một số dạng toán khác liên quan phương trình bậc hai

1. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức hàm số bậc hai: $M = ax^2 + bx + c$ với ($a \neq 0$).

+ Ta tính được: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ và $f(x_0) = ax_0{}^2 + bx_0 + c$

+ Biến đổi: $M = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$

+ Nếu $a > 0 \Rightarrow M_{min} = f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

+ Nếu $a < 0 \Rightarrow M_{\max} = f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

2. Bài toán đồ thị hàm số bậc hai (Parabol)

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với ($a \neq 0$) là parabol (P).

Đồ thị hàm số $y = mx + n$ là đường thẳng (d).

+ Biện luận sự tương giao của hai đồ thị là biện luận số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$ax^2 + bx + c = mx + n$ (1)

+ Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

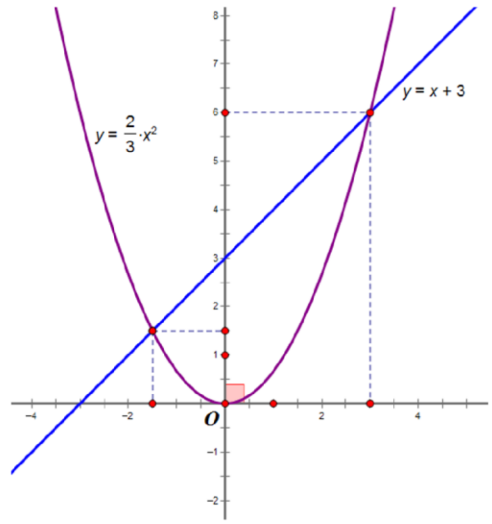
+ Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (d) tiếp xúc với (P). Khi đó, ta gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (P), và hoành độ tiếp điểm chính là nghiệm kép của phương trình.

+ Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P).

Ví dụ minh hoạ 1: Xác định tọa độ giao điểm của (P): $y=\frac{2}{3}x^2$ và (d): $y=x+3$ bằng phương pháp đại số và đồ thị.

Hướng dẫn giải :

a. Đồ thị của parabol (P) và đường thẳng (d) được biểu diễn như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta thấy, đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm có toạ độ $(3;6)$ và $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

b. Tìm giao điểm bằng phương pháp đại số:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{2}{3}x^2=x+3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2-x-3=0$, giải phương trình ta được nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $x=3$, thay vào (d) suy ra $y=6$. Ta có giao điểm $(3;6)$.

Với $x=-\frac{3}{2}$, thay vào (d) suy ra $y=\frac{3}{2}$. Ta có giao điểm $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ minh hoạ 2: Cho (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=-x+3$

a. Xác định giao điểm của (P) và (d)

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Hướng dẫn giải :

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$-x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ có $\Delta = 1 - 4.1.3 = -11 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt parabol (P).

b. Viết phương trình đường thẳng (d’) vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Đường thẳng (d’) có dạng: $y = ax + b$

+ (d’) vuông góc với (d) suy ra: $a.(-1) = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (d'): y = x + b$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d’) và (P):

$-x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 + x + b = 0$ (1)

(d’) tiếp xúc với (P) nên (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$

Vậy, phương trình đường thẳng $(d'): y = x + \frac{1}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho (P): $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Tìm m, n biết (d) đi qua hai điểm A (0; -1) và B(3; 2)

b. Tính a biết (d) tiếp xúc với (P).

Bài 2. Cho (P): $y = \frac{1}{3}x^2$ và (d): $y = -x + 6$.

a. Hãy vẽ đồ thì của (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. Xác định tọa độ giao điểm của chúng bằng đồ thị.

Bài 3. Chứng minh (d): $y = x + \frac{1}{2}$ và (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm của chúng.

Bài 4. Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -2 và 4.

Bài 5. Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = x - m$

a. Với giá trị nào của m thì (d) không cắt (P)

b. Viết phương trình đường thẳng (d')//(d) và tiếp xúc với (P) và tính tọa độ tiếp điểm.

Bài 6. Trên cùng một hệ trục tọa độ cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = -\frac{1}{2}x + 2$

a. Vẽ (P) và (d)

b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

c. Viết phương trình đường thẳng (d')//(d) và tiếp xúc với (P). Tính tọa độ tiếp điểm.

Bài 7. Cho hàm số: $y = -3x^2$ (P)

a. Vẽ đồ thị (P)

b. Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho (P): $y = ax^2\ (a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Đường thẳng (d): $y = mx + n$ đi qua A (0; -1) $\Rightarrow -1 = m.0 + n \Leftrightarrow m = -1$

Đường thẳng (d): $y = mx + n$ đi qua B(3; 2)

$\Rightarrow 2 = 3m + n \Leftrightarrow 2 = 3(-1) + n \Leftrightarrow n = 5$

Vậy, đường thẳng (d): $y = -x + 5$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $ax^2 = -x + 5$

$\Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0$ (*) với $(a \neq 0)$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0$ (*) có nghiệm kép.

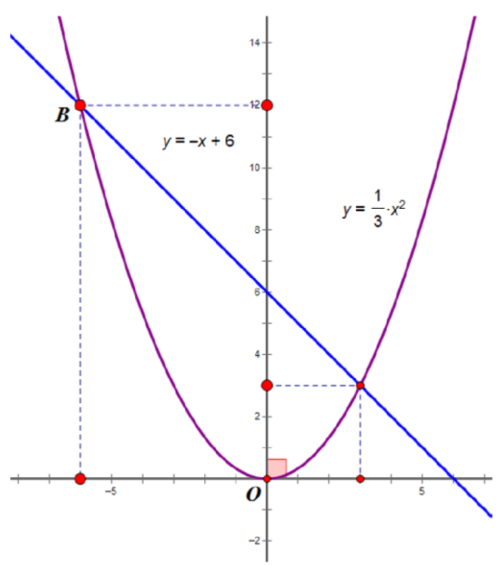
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 - 4.a.(-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 + 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}$$

Vậy, với $a = -\frac{1}{20}$ thì (d) $y = -x + 5$ tiếp xúc với (P) $y = -\frac{1}{20}x^2$.

Bài 2. Cho (P): $y = \frac{1}{3}x^2$ và (d): $y = -x + 6$.

a. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ có đồ thị là parabol (P). Có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy, và đi qua các điểm sau :

x	-3	0	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	0	3



Hàm số $y=-x+6$ có đồ thị là đường thẳng (d) đi qua các điểm $(0;6)$ và $(6;0)$.

b. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại các điểm $(3;3)$ và $(-6;12)$.

Bài 3.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$-\frac{1}{2}x^2=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0$ có $\Delta=1^2-4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=0$.

Do đó, phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép, hay đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Khi đó, phương trình có nghiệm là: $x_1=x_2=-\frac{1}{2.\frac{1}{2}}=-1$ suy ra $y=-\frac{1}{2}$.

Vậy, toạ độ tiếp điểm là $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 4. Cho (P): $y=\frac{1}{2}x^2$ và (d): $y=ax+b$. Tìm a, b biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -2 và 4.

Toạ độ giao điểm thuộc (P) nên:

Với $x=-2\Rightarrow y=\frac{1}{2}.(-2)^2=2$ ta có điểm A$(-2;2)$

Với $x=4\Rightarrow y=\frac{1}{2}.(4)^2=8$ ta có điểm B$(4;8)$

Đường thẳng (d): $y=ax+b$ đi qua A và B nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2=-2a+b\\8=4a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$$

Vậy, a = 1 và b = 4, nên phương trình đường thẳng (d): $y = x + 4$.

Bài 5. Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = x - m$

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$\frac{1}{2}x^2 = x - m \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + m = 0$ (*) có $\Delta = 1^2 - 4.\frac{1}{2}.m = 1 - 2m$.

Để (d) không cắt (P) thì phương trình (*) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Vậy, với $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) nên suy ra phương trình đường thẳng (d') có dạng: $y = x + n \ \ (n \neq m)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P) là:

$\frac{1}{2}x^2 = x + n \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - n = 0$ (**) có $\Delta = 1^2 - 4.\frac{1}{2}.(-n) = 1 + 2n$.

Để (d') tiếp xúc (P) thì phương trình (**) có nghiệm kép

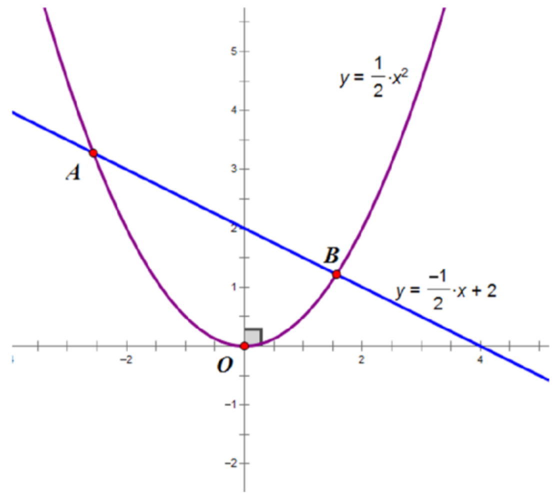
$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}$ (thoả vì $m > \frac{1}{2}$).

Suy ra phương trình có nghiệm $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Toạ độ tiếp điểm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = x - \frac{1}{2}$ tiếp xúc với (P) tại điểm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 6. a. Vẽ (P) và (d)

Parabol (P) $y=\frac{1}{2}x^2$ có đỉnh là O (0;0), có trục đối xứng là Oy, và đi qua các điểm sau:



x	– 2	0	2
$y=\frac{1}{2}x^2$	2	0	2

Đường thẳng (d) $y=-\frac{1}{2}x+2$ đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(4;0)$.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$ có nghiệm $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2};x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

Với $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y=\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ ta có điểm $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{4}\right)$.

Với $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y=\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ ta có điểm $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{9+\sqrt{17}}{4}\right)$.

c. Viết phương trình đường thẳng (d’)//(d) và tiếp xúc với (P). Tính tọa độ tiếp điểm.

Gọi (d’): $y=ax+b$ là đường thẳng cần tìm.

Đường thẳng (d’) song song với (d) suy ra: $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow (d'): y=-\frac{1}{2}x+b$

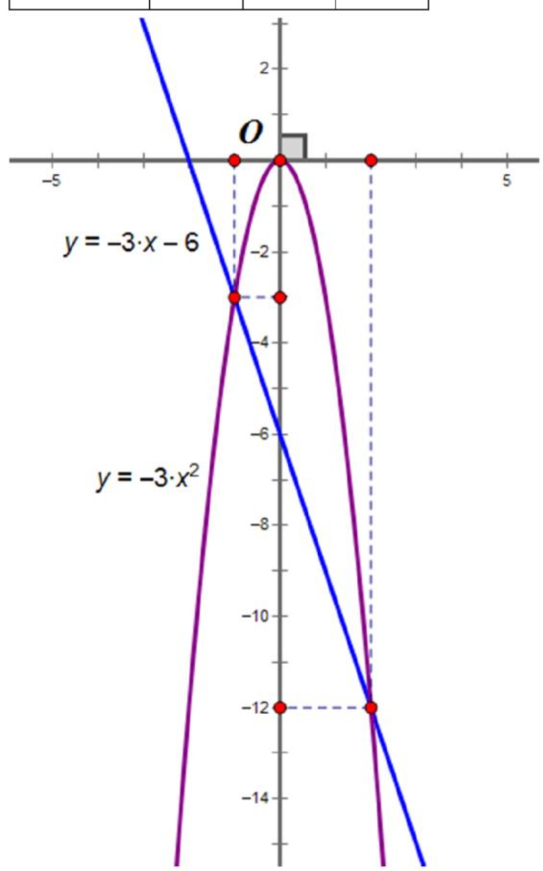
Đường thẳng (d’) tiếp xúc (P) nên: $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - b = 0$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{Pt(*)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{1}{2}.(-b) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}$

Vậy, phương trình đường thẳng (d’): $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$

Bài 7. Cho hàm số: $y = -3x^2$ (P)

a. Hàm số $y = -3x^2$ có đồ thị là parabol (P), có đỉnh là O (0 ;0), có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm:

x	-1	0	1
$y = -3x^2$	-3	0	-3



b. Điểm A thuộc đồ thị (P) có hoành độ $x = -1 \Rightarrow y = -3$ có toạ độ $(-1;-3)$.

Điểm B thuộc đồ thị (P) có hoành độ $x = 2 \Rightarrow y = -12$ có toạ độ $(2;-12)$.

Gọi đường thẳng (d) $y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm.

(d) đi qua hai điểm A, B nên ta có: $\begin{cases} -3 = -a + b \\ -12 = 2a + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có $\begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = -3x - 6$

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Kiến thức trọng tâm

b. Dạng 1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) với $(a \neq 0)$.

Phương pháp giải:

+ Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

+ Đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai ẩn (t) là:

$at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$, $(t \geq 0)$ (2)

+ Giải phương trình (2) tìm (t), loại các giá trị $t < 0$, chỉ lấy các giá trị $t \geq 0$

+ Với $t \geq 0$, $t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$ là nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 1: Giải phương trình: $4x^4 - x^2 - 18 = 0$

Giải:

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2 - t - 18 = 0$ $(t \geq 0)$ (*)

$\Delta = 1 + 4.4.18 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$

$t_1 = \dfrac{1-17}{8} = -2 < 0$ (loại); $t_2 = \dfrac{1+17}{8} = \dfrac{9}{4} > 0$ (nhận)

Với $t_2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{3}{2}$.

c. Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Thực hiện các bước sau:

+ Tìm điều kiện xác định của phương trình

+ Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

+ Giải phương trình vừa nhận được

+ Loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện. Các giá trị thoả mãn điều kiện là nghiệm của phương trình.

+ Kết luận

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}$

Quy đồng mẫu ta được: $PT \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

Khử mẫu ta được: $x^2-3x+1=x-2 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$(thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=3$.

d. Dạng 3. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A.B=0$.

Cách giải: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(3x^2-5x-2)(x^2-8)=0$

Giải:

Ta có: $(3x^2-5x-2)(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2-5x-2=0 & (1) \\ x^2-8=0 & (2) \end{array}\right.$

Giải phương trình (1): $3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Giải phương trình (2): $x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2} \\ x=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_1=2$; $x_2=-\frac{1}{3}$;

$x_3=2\sqrt{2}$; $x_4=-2\sqrt{2}$.

d. Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ để quy về giải phương trình bậc hai

Ví dụ 4: Giải phương trình: $3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x+1)+5=0$

Giải:

Phương trình : $3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x+1)+5=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x)+1=0$

Đặt $t=(x^2-3x)$, ta có phương trình: $3t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t_1=1 \Leftrightarrow x^2-3x=1 \Leftrightarrow x^2-3x-1=0$.

Có nghiệm là: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

Với $t_2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-3x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-3x-\dfrac{1}{3}=0$.

Có nghiệm là: $x_3=\dfrac{9+\sqrt{93}}{6}$; $x_4=\dfrac{9-\sqrt{93}}{6}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$;

$x_3=\dfrac{9+\sqrt{93}}{6}$; $x_4=\dfrac{9-\sqrt{93}}{6}$

e. Dạng 5. Phương trình chứa căn thức

Dạng : $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=\left[g(x)\right]^2 \end{cases}$

Dạng: $a.f(x)+b.\sqrt{f(x)}+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{f(x)},\ t\ge 0 \\ at^2+bt+c=0 \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2+4x-7+\sqrt{x^2+4x-1}=0$

Giải:

Phương trình : $x^2+4x-7+\sqrt{x^2+4x-1}=0$

$\Leftrightarrow x^2+4x-1+\sqrt{x^2+4x-1}-6=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4x-1}$ $(t\ge 0)$, ta có phương trình:

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=-3 \end{array}\right.$ loại nghiệm $t_2=-3$ vì không thoả điều kiện,

Với $t_1=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-1}=2 \Rightarrow x^2+4x-1=4$.

$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x_1=1;\ x_2=-5$.

f. Dạng 6. Phương trình dạng $A^2+B^2=0$

Phương pháp: $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

<u>Ví dụ 6</u>: Giải phương trình: $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0$

Giải:

Phương trình : $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho là: $x=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $x(x-1)(x-2)-x^3+1=0$

b. $(x+6)^2-4x+7=2(x+3)^2$

c. $\dfrac{x+3}{4}-3=\dfrac{(x+5)(x-2)}{3}$

d. $\dfrac{(x+5)^2}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{(x-3)^2}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^4-6x^2-7=0$

b. $x^4-5x^2+4=0$

c. $\dfrac{9}{2}x^4+4x^2-\dfrac{1}{2}=0$

d. $4x^2-29+\dfrac{25}{x^2}=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. $x^3-5x^2-2x+10=0$

b. $x^3-3x^2-3x+1=0$

c. $x^3-6x^2+6x-1=0$

d.

$(2x^2-5x+1)^2-(x^2-5x+6)^2=0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{11}{6}=0$

b. $\dfrac{x+5}{2x-1}-\dfrac{1-2x}{x+5}-2=0$

c. $\dfrac{1}{3x^2-27}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x-3}=1$

d. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$

b. $(x^2-x+1)(x^2-x+3)=15$

c. $x-2\sqrt{x-2}=10$

d. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x\left(x-1\right)\left(x-2\right)-x^3+1=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right)-x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x-x^3+1=0$

$\Leftrightarrow -3x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\dfrac{1}{3}$.

b. Phương trình $\left(x+6\right)^2-4x+7=2\left(x+3\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2\left(x^2+6x+9\right)$

$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2\left(x^2+6x+9\right)$

$\Leftrightarrow x^2+8x+43=2x^2+12x+18$

$\Leftrightarrow -x^2-4x+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{29} \\ x=-2-\sqrt{29} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-2-\sqrt{29}$ và $x=-2+\sqrt{29}$.

c. Phương trình $\dfrac{x+3}{4}-3=\dfrac{\left(x+5\right)\left(x-2\right)}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3-12}{4}=\dfrac{x^2-2x+5x-10}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x-9}{4}=\dfrac{x^2+3x-10}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-27}{12}=\frac{4x^2+12x-40}{12} \Leftrightarrow 3x-27=4x^2+12x-40$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9x-13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{13}{4}$.

d. Phương trình $\frac{(x+5)^2}{2}-\frac{x}{3}=\frac{(x-3)^2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x^2-6x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x^2-6x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+30x+75-2x}{6}=\frac{2x^2-12x+18}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+30x+75-2x=2x^2-12x+18$$

$$\Leftrightarrow x^2+40x+57=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-20+7\sqrt{7} \\ x=-20-7\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-20-7\sqrt{7}$ và $x=-20+7\sqrt{7}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^4-6x^2-7=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-6t-7=0$.

Ta thấy $a-b+c=1-(-6)+(-7)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ (loại); $t=7$ (thoả)

Với $t=7 \Rightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{7}$.

b. Phương trình $x^4-5x^2+4=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-5t+4=0$.

Ta thấy $a+b+c=1+(-5)+4=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$ (thoả); $t=-7$ (loại).

Với $t=1 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$.

c. Phương trình $\frac{9}{2}x^4+4x^2-\frac{1}{2}=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\frac{9}{2}t^2+4t-\frac{1}{2}=0$.

Ta thấy $a-b+c=\frac{9}{2}-4+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ (loại); $t=\frac{1}{9}$ (thoả)

Với $t=\frac{1}{9} \Rightarrow x^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{3}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{1}{3}$.

d. Phương trình $4x^2-29+\dfrac{25}{x^2}=0$ có điều kiện: $x\neq 0$, ta có:

$$4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{4x^4-29x^2+25}{x^2}=0\Leftrightarrow 4x^4-29x^2+25=0$$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2-29t+25=0$.

Ta thấy $a+b+c=4+(-29)+25=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$ (thoả); $t=\dfrac{25}{4}$ (thoả)

Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

Với $t=\dfrac{25}{4}\Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=\pm 1$; $x=\pm\dfrac{5}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. Phương trình $x^3-5x^2-2x+10=0\Leftrightarrow x^2(x-5)-2(x-5)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=0\\x^2-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=0\\x^2=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm $x=\pm\sqrt{2}$; $x=5$.

b. Phương trình $x^3-3x^2-3x+1=0\Leftrightarrow (x^3+1)-(3x^2+3x)=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x^2-4x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x=-1$; $x=2-\sqrt{3}$; $x=2+\sqrt{3}$.

c. Phương trình $x^3-6x^2+6x-1=0 \Leftrightarrow \left(x^3-1\right)-\left(6x^2-6x\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)-6x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-5x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \\ x^2-5x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x=1$; $x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$; $x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

d. Phương trình $\left(2x^2-5x+1\right)^2-\left(x^2-5x+6\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-5x+1-x^2+5x-6\right)\left(2x^2-5x+1+x^2-5x+6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5\right)\left(3x^2-10x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5=0 \\ 3x^2-10x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm là: $x=-\sqrt{5}$; $x=1$; $x=\sqrt{5}$; $x=\dfrac{7}{3}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$, khi đó:

Phương trình $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{11}{6}=0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x-2)(x-1)+x.6x-11x(x-1)}{6x(x-1)}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-18x+12+6x^2-11x^2+11x}{6x(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-7x+12}{6x(x-1)}=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right. \text{ (thoả điều kiện)}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=3$; $x=4$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{1}{2} \\ x \neq -5 \end{cases}$, khi đó:

Phương trình $\dfrac{x+5}{2x-1}-\dfrac{1-2x}{x+5}-2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)^2-(1-2x)(2x-1)-2(2x-1)(x+5)}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25+\left(4x^2-4x+1\right)-2\left(2x^2+9x-5\right)}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25+4x^2-4x+1-4x^2-18x+10}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36}{(2x-1)(x+5)}=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow x=6 \text{ (thoả điều kiện)}$$

Vậy, phương trình có nghiệm kép là: $x=6$.

c. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{1}{2} \\ x \neq -5 \end{cases}$, khi đó:

Phương trình $\dfrac{1}{3x^2-27}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x-3}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3(x-3)(x+3)}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-12(x+3)-3(x-3)(x+3)}{12(x-3)(x+3)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+10x+25+4x^2-4x+1-4x^2-18x+10}{(2x-1)(x+5)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-12x+36}{(2x-1)(x+5)}=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow x=6$ (thoả điều kiện)

Vậy, phương trình có nghiệm kép là: $x=6$.

d. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$, khi đó:

Phương trình $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{30(x^2+x+1)-13(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{30x^2+30x+30-13x^2+13}{(x+1)(x^3-1)}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{17x^2+30x+43}{(x+1)(x^3-1)}=\dfrac{(18x+7)(x+1)}{(x+1)(x^3-1)}$

$\Leftrightarrow 17x^2+30x+43=18x^2+25x+7$

$\Leftrightarrow -x^2+5x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=9 \end{array}\right.$ (thoả điều kiện)

Vậy, phương trình có nghiệm kép là: $x=-4; x=9$.

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. Phương trình $\left(6x^2-7x\right)^2-2\left(6x^2-7x\right)-3=0$.

Đặt $t=6x^2-7x$. Phương trình $\Leftrightarrow t^2-2t-3=0$.

Ta thấy $a-b+c=1-(-2)-3=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ và $t=3$.

Với $t=-1 \Rightarrow 6x^2-7x=-1 \Leftrightarrow 6x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow 6x^2-7x=3 \Leftrightarrow 6x^2-7x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=-\dfrac{1}{3}; x=\dfrac{1}{6}; x=1; x=\dfrac{3}{2}$.

b. Phương trình $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+3\right)=15$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+1+2\right)=15$. Đặt $t=x^2-x+1$.

Phương trình $\Leftrightarrow t(t+2)=15 \Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=3 \end{array}\right.$

Nên phương trình có nghiệm $t=-5$ và $t=3$.

Với $t=-5 \Rightarrow x^2-x+1=-5 \Leftrightarrow x^2-x+6=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=3\Rightarrow x^2-x+1=3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=-1$; $x=2$.

c. Điều kiện: $x\geq 2$.

Phương trình $x-2\sqrt{x-2}=10\Leftrightarrow\left(x-2\right)-2\sqrt{x-3}-8=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$ với $\left(t\geq 0\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-2\end{array}\right.$ (loại giá trị $t=-2$ vì không thoả điều kiện).

Với $t=4\Rightarrow\sqrt{x-2}=4\Leftrightarrow x-2=16\Leftrightarrow x=18$ (thoả điều kiện).

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=18$.

d. Điều kiện: $x\neq 0$. Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ với $\left(t\geq 0\right)$.

Phương trình $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0\Leftrightarrow t^2-\dfrac{9}{2}t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{5}{2}\\t=2\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy, phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{1}{2}$; $x=1$; $x=2$.

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức trọng tâm

Việc giải toán theo dạng này nhìn chung có phương pháp giống với phương pháp giải toán bằng cách lập hệ phương trình. Điểm khác nhau ở đây là dựa vào giả thiết bài toán các em sẽ lập được mối liên hệ giữa các đại lượng bằng cách lập phương trình bậc hai phù hợp.

1. Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Lập phương trình

a) Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.

b) Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.

c) Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số
b. Dạng 2. Làm chung công việc
c. Dạng 3. Toán chuyển động
d. Dạng 4. Có nội dung hình học
e. Dạng 5. Các dạng khác

Ví dụ minh hoạ 1: Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B dài 36 km. Lúc về người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, đo đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đó lúc đi?

Hướng dẫn giải :

Gọi x (km/h) là vận tốc của người đi xe đạp lúc đi từ A đến B.

Gọi $x+3$ (km/h) là vận tốc của người đi xe đạp lúc về từ B đến A.

Thời gian người đi xe đạp từ A đến B là: $\frac{36}{x}$ giờ.

Thời gian người đi xe đạp từ B đến A là: $\frac{36}{x+3}$ giờ.

Theo đề bài, thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút = $\frac{3}{5}$ giờ.

Ta có phương trình: $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{36\left(x+3\right)-36x}{x\left(x+3\right)}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{108}{x^2+3x}=\frac{3}{5}$

Suy ra: $\Leftrightarrow 540=3\left(x^2+3x\right)\Leftrightarrow 3x^2+9x-540=0$

Giải phương trình ta được nghiệm là $\left\{\begin{array}{l} x=12 \\ x=-15 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-15$).

Vậy, vận tốc lúc đi của người đó là 12 km/h.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm hai số, biết rằng số lớn hơn số bé 3 đơn vị và tổng các bình phương của chúng bằng 369.

Bài 2: Một đoàn xe tải cần chở 30 tấn hàng từ địa điểm A đến địa điểm B. Khi sắp bắt đầu khởi hành thì có thêm 2 xe nữa, nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc?

Bài 3: Một canô xuôi dòng một khúc sông dài 50 km, rồi ngược dòng khúc sông ấy 32 km thì hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc của canô là 18 km/h.

Bài 4: Một canô xuôi dòng sông từ A đến B dài 48 km rồi ngược dòng sông từ B về A hết 5 giờ. Tính vận tốc của canô, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 5: Hai cạnh của một mảnh đất hình chữ nhật hơn kém nhau 10 m. Tính chu vi của mảnh đất ấy, biết diện tích của nó là 1200 m^2.

Bài 6: Trong một phòng họp có 70 người dự họp được sắp xếp ngồi vào các dãy ghế với số lượng người trên mỗi ghế là như nhau. Nếu trong phòng bớt đi 2 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 4 người mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế, và mỗi ghế ngồi bao nhiêu người ?

Bài 7: Một hình tam giác có diện tích 180 cm^2. Tính cạnh đáy của tam giác, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm 4 cm và giảm chiều cao tương ứng đi 1 cm thì diện tích của nó không đổi.

Bài 8: Một tam giác vuông có chu vi bằng 30 cm, cạnh huyền là 13 cm. Tính các cạnh góc vuông của tam giác đó?

Bài 9: Người ta trộn 4 kg chất lỏng loại 1 với 3 kg chất lỏng loại 2 thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3. Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là 200 kg/m^3. Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng?

Bài 10: Lúc 6h 30 phút một người đi xe máy đi từ A đến B có độ dài 75 km với vận tốc định trước. Đến B người đó nghỉ lại 20 phút rồi quay về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Người đó về đến A lúc 12 giờ 20 phút. Tính vận tốc dự định của người đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Gọi số bé là $x\left(x\in\mathbb{Z}\right)$ thì số lớn là $x+3$.

Theo đề, tổng các bình phương của hai số là 369, ta có phương trình:

$x^2+\left(x+3\right)^2=369\Leftrightarrow 2x^2+6x-360=0$

Giải phương trình ta được nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}x=12\\x=-15\end{array}\right.$ (thoả điều kiện).

Với $x=12$, suy ra số lớn là $x+3=15$.

Với $x=-15$, suy ra số lớn là $x+3=-12$.

Vậy hai số cần tìm là $\left\{12;15\right\}$ hoặc $\left\{-15;-12\right\}$.

Bài 2: Gọi $x\left(x\in N^*\right)$ là số xe tải lúc đầu, suy ra số xe tải lúc sau là $x+2$.

Lúc đầu mỗi xe phải chở : $\dfrac{30}{x}$ tấn

Lúc sau mỗi xe phải chở : $\dfrac{30}{x+2}$ tấn

Theo đề, lúc sau mỗi xe chở ít hơn lúc đầu 0,5 tấn nên ta có phương trình:

$\dfrac{30}{x}-\dfrac{30}{x+2}=0,5\Leftrightarrow 30\left(x+2\right)-30x=0,5x\left(x\right)$

$\Leftrightarrow 0,5x^2+x-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-12\end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-12$ vì không thoả điều kiện).

Vậy, lúc đầu có 10 chiếc xe tải.

Bài 3:

Gọi vận tốc của dòng nước là x (km/h). Điều kiện $0<x<18$.

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là: $18+x$ (km/h).

Vận tốc của canô khi ngược dòng là: $18-x$ (km/h).

Thời gian canô xuôi dòng 50 km là: $\dfrac{50}{18+x}$ (giờ)

Thời gian canô ngược dòng 32 km là: $\frac{32}{18-x}$ (giờ)

Theo đề, tổng thời gian canô xuôi dòng 50 km và ngược dòng 32 km hết 4 giờ 30 phút = 4,5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{50}{18+x}+\frac{32}{18-x}=4,5$

$\Leftrightarrow 50(18-x)+32(18+x)=4,5(18+x)(18-x)$

$\Leftrightarrow 900-50x+576+32x=1458-4,5x^2$

$\Leftrightarrow 4,5x^2-18x+18=0$. Phương trình có nghiệm kép $x=2$.

Vậy, vận tốc dòng nước là 2 (km/h).

Bài 4: Gọi vận tốc của canô là x (km/h). Điều kiện $x>4$.

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là: $x+4$ (km/h).

Vận tốc của canô khi ngược dòng là: $x-4$ (km/h).

Thời gian canô xuôi dòng 48 km là: $\frac{48}{x+4}$ (giờ)

Thời gian canô ngược dòng 48 km là: $\frac{48}{x-4}$ (giờ)

Theo đề, tổng thời gian canô xuôi dòng 48 km và ngược dòng 48 km hết 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}=5$

$\Leftrightarrow 48(x-4)+48(x+4)=5(x-4)(x+4)$

$\Leftrightarrow 48x-192+48x+192=5x^2-80$

$\Leftrightarrow 5x^2-96x-80=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-4$ vì không thoả điều kiện).

Vậy, vận tốc canô là 20 (km/h).

Bài 5:

Gọi x (m) là chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật $(x>0)$.

Gọi $x+10$ (m) là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật $(x>0)$.

Diện tích mảnh đất là: $x(x+10)$ m^2.

Theo đề, diện tích mảnh đất bằng 1200 m^2 nên ta có phương trình:

$x(x+10)=1200 \Leftrightarrow x^2+x-1200=0$

Giải phương trình ta được $x=30; x=-40$ (loại nghiệm $x=-40$ vì không thoả mãn điều kiện).

Vậy, chiều rộng của mảnh đất là 30 m, và chiều dài mảnh đất là 40 m.

Bài 6:

Gọi x là số dãy ghế lúc đầu $\left(x \in \mathbb{N}^+, x>2\right)$.

Số dãy ghế lúc sau là $x-2$.

Số người ngồi trên mỗi dãy ghế lúc đầu là: $\frac{70}{x}$ (người)

Số người ngồi trên mỗi dãy ghế lúc sau là: $\frac{70}{x-2}$ (người)

Theo đề, số người trên mỗi dãy ghế lúc sau nhiều hơn lúc trước 4 người nên ta có phương trình: $\frac{70}{x-2}-\frac{70}{x}=4 \Leftrightarrow 70x-70x+140=4x(x-2)$

$\Leftrightarrow 4x^2-8x-140=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-5$ vì không thoả điều kiện).

Vậy, lúc đầu phòng họp có 7 ghế dài.

Bài 7:

Gọi x (cm) là chiều dài cạnh đáy của hình tam giác $(x>0)$.

Diện tích tam giác được tính bởi công thức sau: $S=\frac{1}{2}x.h \Rightarrow h=\frac{2S}{x}$

Lúc đầu: diện tích tam giác bằng 180 cm^2 nên suy ra chiều cao là:

$\frac{2.180}{x}=\frac{360}{x}$

Khi có sự thay đổi : chiều dài cạnh đáy là $x+4$ .Do diện tích không đổi bằng 180 cm^2 nên suy ra chiều cao mới là: $\frac{2.180}{x+4}=\frac{360}{x+4}$

Theo đề, chiều cao mới giảm đi 1 cm so với lúc đầu nên ta có phương trình:

$\dfrac{360}{x}-\dfrac{360}{x+4}=1$ hay $x^2+4x-1440=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=36 \\ x=-40 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-40$).

Vậy, chiều dài cạnh đáy của hình tam giác là 36 cm.

Bài 8:

Gọi x (cm) là chiều dài cạnh góc vuông thứ nhất $(x>0)$.

Chu vi của tam giác bằng 30 cm, và cạnh huyền là 13 cm, nên suy ra chiều dài cạnh góc vuông còn lại là : $30-13-x=17-x$ (cm).

Áp dụng định lý pytago bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông nên ta có phương trình : $x^2+(17-x)^2=13^2$

$\Leftrightarrow x^2+289+34x+x^2=169 \Leftrightarrow 2x^2+34x+120=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=5 \end{array}\right.$

Với $x=12$, suy ra độ dài cạnh kia là $17-x=5$.

Với $x=5$, suy ra độ dài cạnh kia là $17-x=12$.

Vậy, độ dài hai cạnh của tam giác vuông là 5 cm và 12 cm.

Bài 9:

Gọi x (kg/m^3) là khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 $(x>200)$.

Khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là $x-200$ (kg/m^3).

Thể tích của chất lỏng loại 1 là: $\dfrac{4}{x}$ (m^3).

Thể tích của chất lỏng loại 2 là: $\dfrac{3}{x-200}$ (m^3).

Thể tích của hỗn hợp là: $\dfrac{7}{700}$ (m^3).

Ta có phương trình: $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x-200}=\dfrac{7}{700}$ hay $x^2-900x+80000=0$

Giải phương trình ta được $x=800; x=100$ loại giá trị $x=100$ vì không thoả điều kiện.

Vậy, khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 là 800 kg/m^3. Khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là 600 kg/m^3.

Bài 10:

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của người đó $(x>0)$.

Thời gian người đi xe máy từ A đến B là: $\frac{75}{x}$ giờ

Thời gian người đi xe máy từ B đến A là: $\frac{75}{x+5}$ giờ

Thời gian người đi xe máy đi từ A đến B rồi trở về A (kể cả thời gian nghỉ) là

12h 20 phút – 6h 30 phút giờ = 5 giờ 50 phút = $\frac{35}{6}$ giờ, ta có phương trình:

$\frac{75}{x}+\frac{75}{x+5}+\frac{1}{3}=\frac{35}{6}$ hay $11x^2-245x-750=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=25 \\ x=-\frac{30}{11} \end{array}\right.$

Loại giá trị $x=-\frac{30}{11}$ vì không thoả điều kiện, $x=25$ thoả điều kiện.

Vậy, vận tốc dự định của người đó là 25 km/h.

V. ÔN TẬP CHƯƠNG 4

SƠ ĐỒ TƯ DUY CHƯƠNG 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
$ax^2 + bx + c = 0$ (*) $(a \neq 0)$

Công thức nghiệm
$\Delta = b^2 - 4ac$
hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$

* $\Delta > 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
* $\Delta = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
* $\Delta < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Hệ thức Viét
(*áp dụng khi phương trình có 2 nghiệm* $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} & (S) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} & (P) \end{cases}$$

Ứng dụng Viét

1.Cho 2 số u, v biết $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ thì u, v là nghiệm của PT: $x^2 - Sx + P = 0$

2.Nếu PT (*) có: $a+b+c=0$ thì nó có nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại là $x = \dfrac{c}{a}$

3. Nếu PT (*) có: $a-b+c=0$ thì nó có nghiệm $x=-1$ và nghiệm còn lại là $x = \dfrac{-c}{a}$

Mối quan hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc 2

PT (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

PT (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

PT (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$

PT (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

PT (*) có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

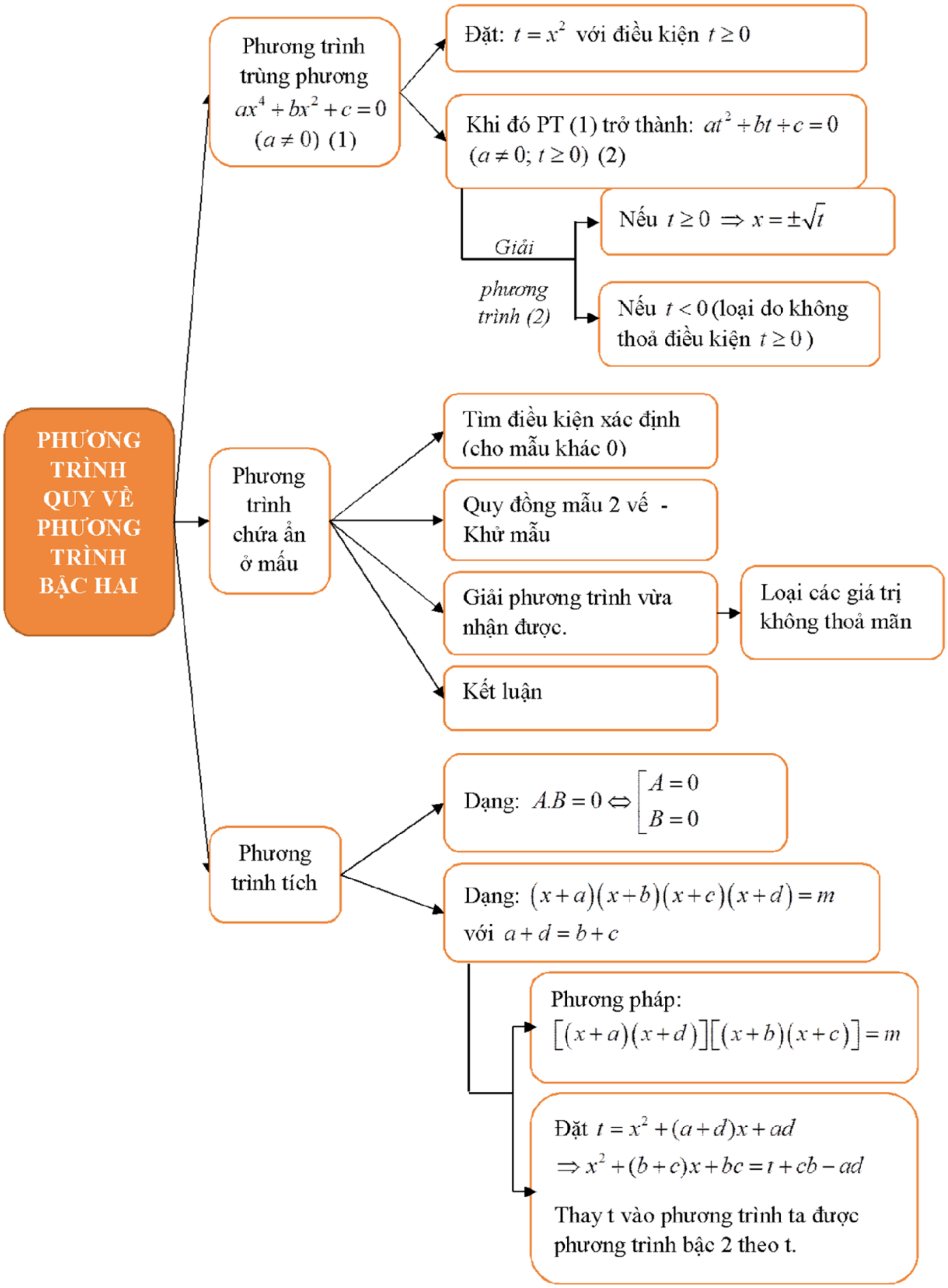
PT (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

PT (*) có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

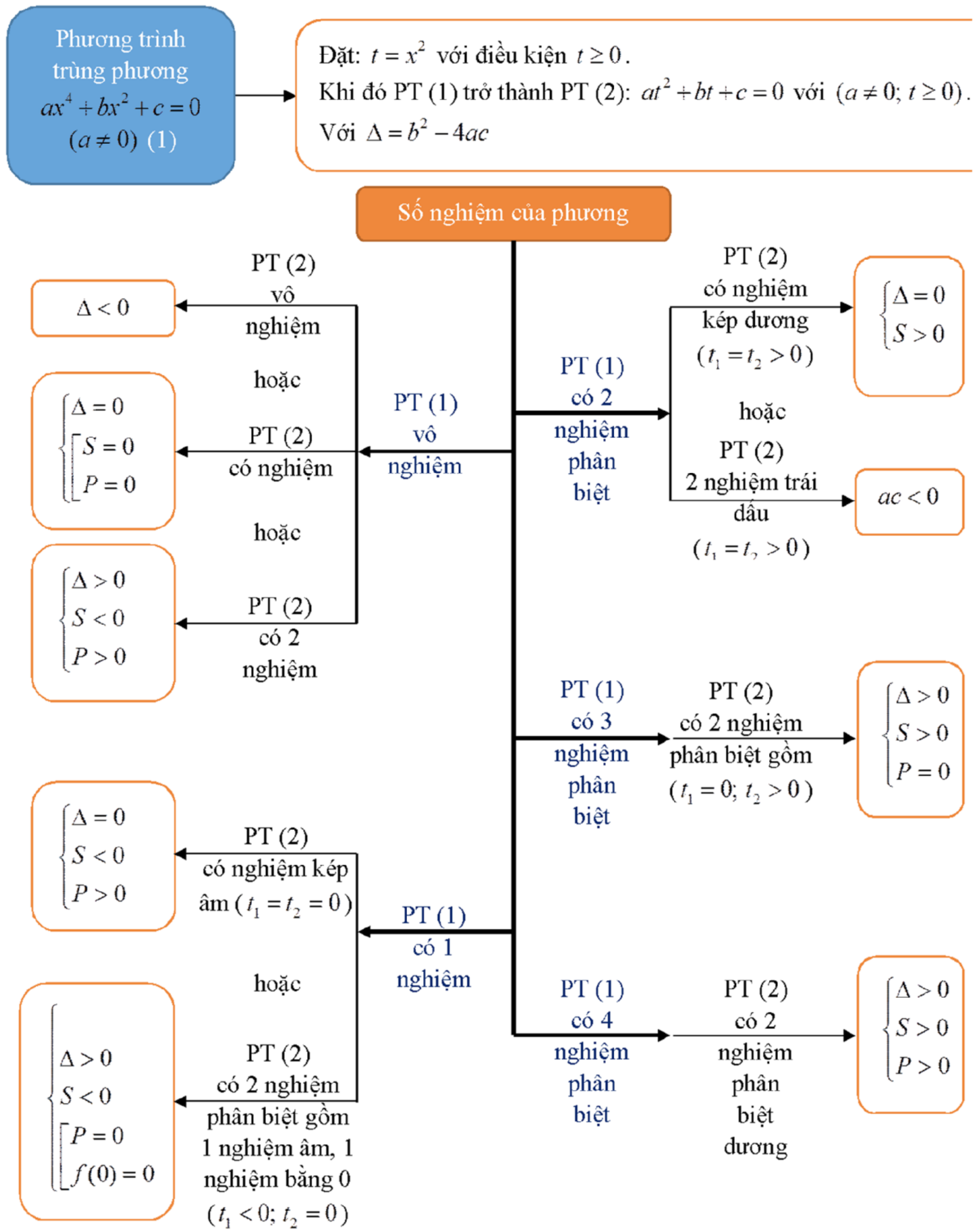
PT (*) có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$

Những hệ thức liên quan:

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2p$
2. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4p$
3. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3Sp$
4. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$
5. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{p}$
6. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{S^2 - 2p}{p}$



PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
Phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ (1)
Đặt: $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$
Khi đó PT (1) trở thành: $at^2+bt+c=0$ $(a\neq 0;\, t\geq 0)$ (2)
Giải phương trình (2)
Nếu $t\geq 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$
Nếu $t<0$ (loại do không thoả điều kiện $t\geq 0$)
Phương trình chứa ẩn ở mẫu
Tìm điều kiện xác định (cho mẫu khác 0)
Quy đồng mẫu 2 vế - Khử mẫu
Giải phương trình vừa nhận được.
Loại các giá trị không thoả mãn
Kết luận
Phương trình tích
Dạng: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$
Dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ với $a+d=b+c$
Phương pháp: $\left[(x+a)(x+d)\right]\left[(x+b)(x+c)\right]=m$
Đặt $t=x^2+(a+d)x+ad$
$\Rightarrow x^2+(b+c)x+bc=t+cb-ad$
Thay t vào phương trình ta được phương trình bậc 2 theo t.



Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)
Đặt: $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.
Khi đó PT (1) trở thành PT (2): $at^2 + bt + c = 0$ với $(a \neq 0;\, t \geq 0)$.
Với $\Delta = b^2 - 4ac$
Số nghiệm của phương
PT (1) vô nghiệm
PT (2) vô nghiệm
$\Delta < 0$
hoặc
PT (2) có nghiệm
$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ P = 0 \end{array}\right. \end{cases}$
hoặc
PT (2) có 2 nghiệm
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$
PT (1) có 2 nghiệm phân biệt
PT (2) có nghiệm kép dương ($t_1 = t_2 > 0$)
$\begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}$
hoặc
PT (2) 2 nghiệm trái dấu ($t_1 = t_2 > 0$)
$ac < 0$
PT (1) có 3 nghiệm phân biệt
PT (2) có 2 nghiệm phân biệt gồm ($t_1 = 0;\, t_2 > 0$)
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 0 \end{cases}$
PT (1) có 1 nghiệm
PT (2) có nghiệm kép âm ($t_1 = t_2 = 0$)
$\begin{cases} \Delta = 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$
hoặc
PT (2) có 2 nghiệm phân biệt gồm 1 nghiệm âm, 1 nghiệm bằng 0 ($t_1 < 0;\, t_2 = 0$)
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ \left[\begin{array}{l} P = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \end{cases}$
PT (1) có 4 nghiệm phân biệt
PT (2) có 2 nghiệm phân biệt dương
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

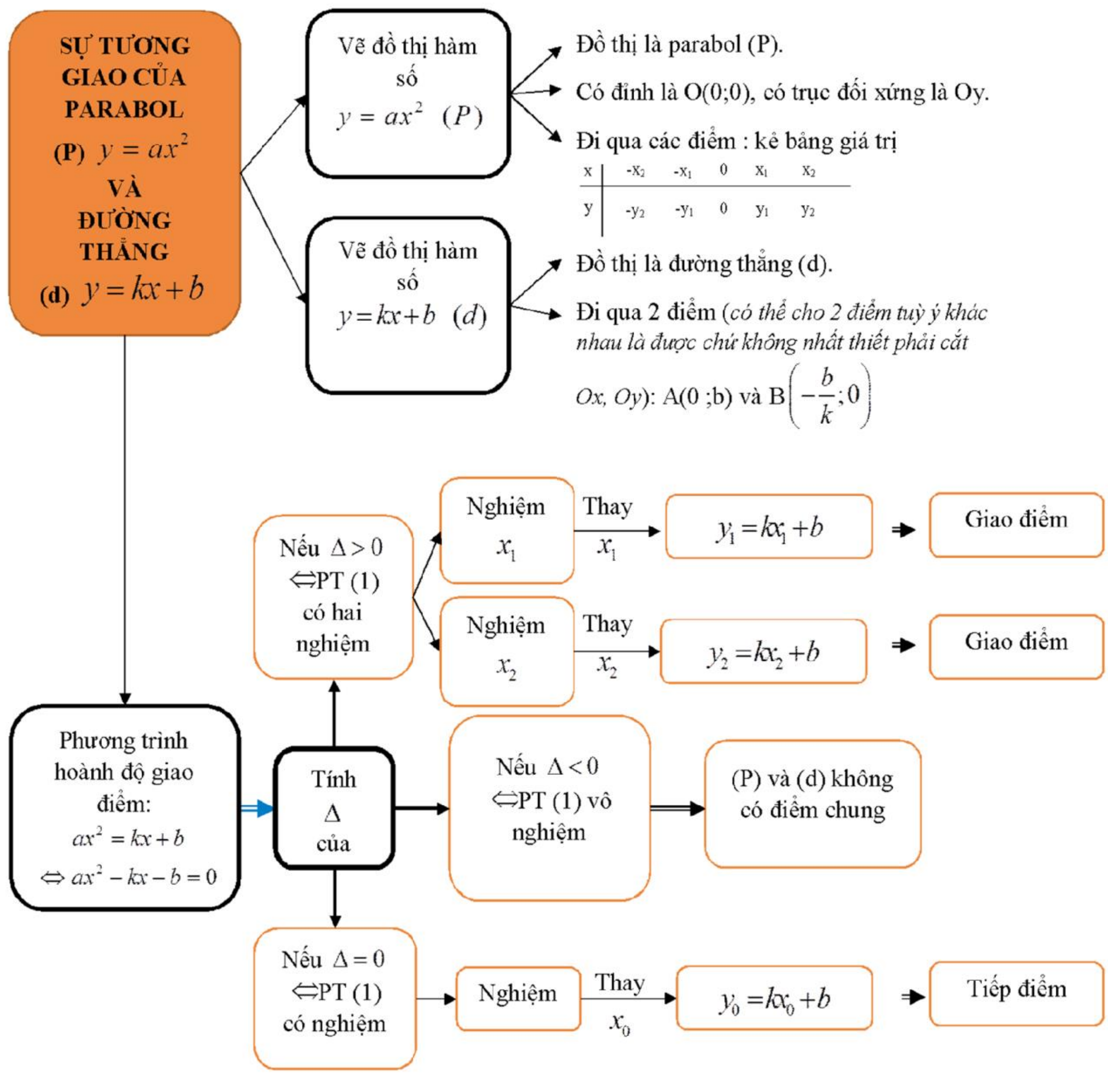
Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta biến đổi về dạng:

$$y = f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right.$$

Nếu a > 0 thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$

Nếu a < 0 thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$

Dùng bất đẳng thức *Cauchy* (Côsi): với hai số không âm x, y bất kỳ ta luôn có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.


SỰ TƯƠNG GIAO CỦA PARABOL
(P) $y = ax^2$
VÀ ĐƯỜNG THẲNG
(d) $y = kx + b$
Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (P)
Đồ thị là parabol (P).
Có đỉnh là O(0;0), có trục đối xứng là Oy.
Đi qua các điểm : kẻ bảng giá trị
x | $-x_2$ | $-x_1$ | 0 | x_1 | x_2
y | $-y_2$ | $-y_1$ | 0 | y_1 | y_2
Vẽ đồ thị hàm số $y = kx + b$ (d)
Đồ thị là đường thẳng (d).
Đi qua 2 điểm (*có thể cho 2 điểm tuỳ ý khác nhau là được chứ không nhất thiết phải cắt Ox, Oy*): A(0 ;b) và B$\left(-\frac{b}{k};0\right)$
Phương trình hoành độ giao điểm:
$ax^2 = kx + b$
$\Leftrightarrow ax^2 - kx - b = 0$
Tính Δ của
Nếu $\Delta > 0$ $\Leftrightarrow$PT (1) có hai nghiệm
Nghiệm x_1
Thay x_1
$y_1 = kx_1 + b$
Giao điểm
Nghiệm x_2
Thay x_2
$y_2 = kx_2 + b$
Giao điểm
Nếu $\Delta < 0$ $\Leftrightarrow$PT (1) vô nghiệm
(P) và (d) không có điểm chung
Nếu $\Delta = 0$ $\Leftrightarrow$PT (1) có nghiệm
Nghiệm
Thay x_0
$y_0 = kx_0 + b$
Tiếp điểm

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho các hàm số $y = x^2$ (P) và hàm số $y = 5x - 6$ (d).

a. Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Bài 2. Giải phương trình:

a. $5(x-2)^2 + 4 = (x+8)^2$

b. $\dfrac{(x+3)^2}{5} + 1 - \dfrac{(3x-1)^2}{5} = \dfrac{x(2x-3)}{2}$

c. $\dfrac{1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+3} = 1$

d. $4 - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2(x+7)}{x-1} - \dfrac{x+11}{x^2-1}$

Bài 3. Giải phương trình

a. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

b. $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$

c. $x^3 + 8 - 4x^2 - 2x = 0$

d. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Bài 4. Giải phương trình:

a. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

b. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

d. $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. $\left(x+11\right)^2+\left(x+11\right)-42=0$ b. $\left(x^2-3x+5\right)^2-\left(x^2-3x+5\right)=2$

c. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+6=0$ d. $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$

Bài 6. Tìm hai số u , v trong các trường hợp sau:

a. $u+v=13$ và $u.v=42$

b. $u-v=15$ và $u.v=-56$

c. $u^2+v^2=130$ và $u.v=-63$

Bài 7. Cho các hàm số $y=-\dfrac{3}{2}x^2$ (P) và hàm số $y=-2x+\dfrac{1}{2}$ (d).

a. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b. Tìm tọa độ những điểm thuộc đồ thị (P) thỏa tính chất tổng hoành độ và tung độ của điểm đó bằng 4.

Bài 8. Cho phương trình : $x^2-\left(2k-1\right)x+2k-2=0\ \left(1\right)$

a. Giải phương trình (1) khi $k=-2$.

b. Tìm giá trị của k để phương trình (1) có một nghiệm $x_1=-2$.

Tìm nghiệm x_2 .

c. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

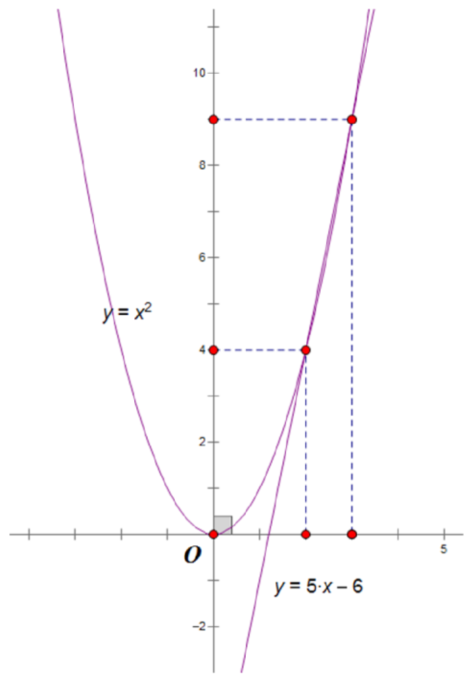
d. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào k.

Bài 9. Một phân xưởng theo kế hoạch phải dệt 3000 tấm thảm trong thời gian nhất định. Trong 8 ngày đầu họ đã thực hiện đúng kế hoạch đề ra, những ngày còn lại họ đã dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm thảm, nên đã hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải dệt bao nhiêu tấm thảm?

Bài 10. Lúc 7 giờ 30 phút một ô tô khởi hành từ A đến B, tại B người đó nghỉ lại 30 phút rồi tiếp tục lên đường để đến C lúc 10 giờ 15 phút. Biết quãng đường AB dài 30 km, quãng đường BC dài 50 km, vận tốc của ô tô trên quãng đường AB lớn hơn vận tốc của nó trên quãng đường BC là 10 km/h. Tính vận tốc của ô tô trên quãng đường AB, BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho các hàm số $y = x^2$ (P) và hàm số $y = 5x - 6$ (d).



a. Đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) có đỉnh là O (0;0), có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm sau:

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

Đồ thị hàm số $y = 5x - 6$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;-6)$ và $(1;-1)$.

b. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

Giải phương trình ta được nghiệm: $x = 2; x = 3$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Ta có giao điểm $(2;4)$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$. Ta có giao điểm $(3;9)$.

Vậy, đường thẳng (d) và đồ thị (P) cắt nhau tại hai điểm có toạ độ $(2;4)$ và $(3;9)$.

Bài 2. Giải phương trình:

a. Phương trình $5(x-2)^2+4=(x+8)^2$

$\Leftrightarrow 5(x^2-4x+4)+4=x^2+16x+64$

$\Leftrightarrow x^2-9x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=10 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-1$; $x=10$.

b. Phương trình $\dfrac{(x+3)^2}{5}+1-\dfrac{(3x-1)^2}{5}=\dfrac{x(2x-3)}{2}$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2+10-2(3x-1)^2=5x(2x+3)$

$\Leftrightarrow 26x^2-39x-26=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=2$; $x=-\dfrac{1}{2}$.

c. Điều kiện: $x \neq \pm 3$

Phương trình $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+3}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+2(x+3)+3(x-3)}{x^2-9}=1 \Rightarrow 1+2(x+3)+3(x-3)=x^2-9$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}\\x=\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{5+\sqrt{53}}{2};x=\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}$.

d. Điều kiện: $x\neq\pm1$

Phương trình $4-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+7)}{x-1}-\dfrac{x+11}{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow\frac{4(x^2-1)}{x^2-1}-\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{2(x+7)(x+1)}{x^2-1}-\frac{x+11}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 4(x^2-1)-(x-1)^2=2(x+7)(x+1)-x-11$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4-x^2+2x-1=2x^2+15x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2-13x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{13+\sqrt{201}}{2}\\x=\dfrac{13-\sqrt{201}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{13+\sqrt{201}}{2};x=\dfrac{13-\sqrt{201}}{2}$.

Bài 3. Giải phương trình

a. Phương trình $x^3-x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow(x^2-4)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-2;x=1;x=2$.

b. Phương trình $2x^3-5x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow 2\left(x^3-1\right)-5x\left(x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)-5x\left(x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[2\left(x^2+x+1\right)-5x\right]=0$ $\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(2x^2-3x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x^2-3x+2=0 \end{array}\right.$

Giải : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Giải: $2x^2-3x+2=0$, có $\Delta = 3^2-4.2.2=9-16=-7<0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$.

c. Phương trình $x^3+8-4x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left(x^3-2x\right)-\left(4x^2+8\right)=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-2\right)-4\left(x^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{2}$; $x=4$.

d. Phương trình $x^3-4x^2+x+6=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-2x^2+4x-3x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)-2x\left(x-2\right)-3\left(x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2-2x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-1$; $x=2$; $x=3$.

Bài 4. Giải phương trình:

a. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$ nhận nghiệm $t = 1$,

loại nghiệm $t = -3$ vì không thoả điều kiện.

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -1; x = 1$.

b. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 16 \\ t = 9 \end{array}\right.$ thoả điều

kiện.

Với $t = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-4; -3; 3; 4\right\}$.

c. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9t^2 + 5t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{4}{9} \end{array}\right.$ loại nghiệm

$t = -1$ vì không thoả điều kiện.

Với $t = \dfrac{4}{9} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{2}{3}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right\}$.

d. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $x^4 - 48x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 48t - 49 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 49 \end{array}\right.$ loại nghiệm $t = -1$ vì không thoả điều kiện.

Với $t = 49 \Rightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-7; 7\}$.

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. Đặt $t = x + 11$.

Phương trình $(x+11)^2 + (x+11) - 42 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -7 \end{array}\right.$

Với $t = 6 \Rightarrow x + 11 = 6 \Leftrightarrow x = -5$.

Với $t = -7 \Rightarrow x + 11 = -7 \Leftrightarrow x = -18$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-18; -5\}$.

b. Đặt $t = x^2 - 3x + 5$.

Phương trình $(x^2 - 3x + 5)^2 - (x^2 - 3x + 5) = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$ có $\Delta = 3^2 - 4.1.6 = -15 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ có $\Delta = 3^2 - 4.1.3 = -3 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$.

Phương trình $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. Giải phương trình ta có hai nghiệm là $x = 1 + \sqrt{2}; x = 1 - \sqrt{2}$.

Với $t = 3 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$. Giải phương trình ta có hai nghiệm là $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right\}$.

d. Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$.

Phương trình $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + 3 = 0$ có

$\Delta = 1^2 - 4.2.3 = -23 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Tìm hai số u , v trong các trường hợp sau:

a. $u + v = 13$ và $u.v = 42$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 13X + 42 = 0$

Phương trình có nghiệm: $X = 7; X = 6$.

Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u = 7 \\ v = 6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 6 \\ v = 7 \end{cases}$.

b. $u-v=15$ và $u.v=-56$

Ta có: $u-v=15 \Leftrightarrow u+(-v)=15$ và $u.v=-56 \Rightarrow u.(-v)=56$

Suy ra u, - v là nghiệm của phương trình: $X^2-15X+56=0$

Phương trình có nghiệm: $X=8; X=7$.

Suy ra $\begin{cases} u=8 \\ -v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ v=-7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=7 \\ -v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=7 \\ v=-8 \end{cases}$

Vậy, hai số cần tìm là: $\begin{cases} u=8 \\ v=-7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=7 \\ v=-8 \end{cases}$.

c. $u^2+v^2=130$ và $u.v=-63$

Ta có: $u^2+v^2=130 \Leftrightarrow (u+v)^2-2uv=130$

$\Leftrightarrow (u+v)^2-2(-63)=130 \Leftrightarrow (u+v)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=2 \\ u+v=-2 \end{array}\right.$

TH1: Với $u+v=2$ và $u.v=-63$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình: $X^2-2X-63=0$

Phương trình có nghiệm: $X=9; X=-7 \Rightarrow \begin{cases} u=9 \\ v=-7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-7 \\ v=9 \end{cases}$.

TH2: Với $u+v=-2$ và $u.v=-63$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình: $X^2+2X-63=0$

Phương trình có nghiệm: $X=7; X=-9 \Rightarrow \begin{cases} u=7 \\ v=-9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-9 \\ v=7 \end{cases}$.

Vậy, hai số cần tìm là: $\begin{cases} u=9 \\ v=-7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-7 \\ v=9 \end{cases}$; $\begin{cases} u=7 \\ v=-9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-9 \\ v=7 \end{cases}$.

Bài 7. Cho các hàm số $y=-\frac{3}{2}x^2$ (P) và hàm số $y=-2x+\frac{1}{2}$ (d).

a. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-\frac{3}{2}x^2=-2x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Với $x=1\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$, ta có toạ độ giao điểm $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

Với $x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=-\frac{1}{6}$, ta có toạ độ giao điểm $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{6}\right)$.

Vậy, (d) cắt (P) tại hai điểm có toạ độ là: $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{6}\right)$.

b. Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị (P) có tổng hoành độ và tung độ bằng $\frac{13}{4}$.

M thuộc (P) suy ra: $y_0=-\frac{3}{2}{x_0}^2$.

M có tổng bình phương của hoành độ và tung độ bằng 4, nên: ${x_0}^2+{y_0}^2=\frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow {x_0}^2+\left(-\frac{3}{2}{x_0}^2\right)^2=\frac{13}{4}\Leftrightarrow \frac{9}{4}{x_0}^4+{x_0}^2-\frac{13}{4}=0.$$

Đặt $t={x_0}^2$, điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\frac{9}{4}{x_0}^4+{x_0}^2-\frac{13}{4}=0\Leftrightarrow \frac{9}{4}t^2+t-\frac{13}{4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{13}{9}\end{array}\right.$

Nhận nghiệm $t=1$, và loại nghiệm $t=-\frac{13}{9}$ do không thoả điều kiện.

Với $t=1 \Rightarrow {x_0}^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2} \\ x=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$, ta có điểm $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right)$

Vậy, các điểm thuộc (P) thoả mãn điều kiện bài toán là $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 8. Cho phương trình : $x^2-(2k-1)x+2k-2=0\ (1)$

a. Khi $k=-2$, ta có phương trình: $x^2+5x+-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=-6$.

b. Tìm giá trị của k để phương trình (1) có một nghiệm $x_1=-2$. Tìm nghiệm x_2.

Phương trình $x^2-(2k-1)x+2k-2=0\ (1)$ có nghiệm $x_1=-2$, thay vào phương trình ta có: $(-2)^2-(2k-1)(-2)+2k-2=0$

$\Leftrightarrow 4+4k-2+2k-2=0 \Leftrightarrow k=0$.

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có: $x_1+x_2=-1 \Leftrightarrow -2+x_2=-1 \Leftrightarrow x_2=1$.

Vậy, với $k=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-2$, và nghiệm còn lại là $x_2=1$.

c. Phương trình $x^2-(2k-1)x+2k-2=0\ (1)$ có:

$\Delta=(2k-1)^2-4.1.(2k-2)=4k^2-4k+1-8k+8$

$\Delta=4k^2-12k+9=(2k-9)^2 \geq 0$ với mọi k. Do đó, phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị k.

d. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào k.

Bài 9.

Gọi $x\ \left(x\in N^{*}\right)$ là số tấm thảm phân xưởng làm được theo kế hoạch.

Thời gian hoành thành công việc theo kế hoạch là: $\dfrac{3000}{x}$ (ngày)

Trong 8 ngày đầu phân xưởng dệt được: $8x$ (tấm thảm)Trong những ngày còn lại, mỗi ngày phân xưởng dệt được: $x+10$ (tấm thảm), và cần hoành thành $3000-8x$ số tấm thảm còn lại. Nên số ngày cần thiết để phân xưởng dệt hết số tấm thảm còn lại là: $\dfrac{3000-8x}{x+10}$ (ngày)

Theo đề, ta có phương trình sau: $\dfrac{3000}{x}=8+\dfrac{3000-8x}{x+10}+2$.

Hay $x^2+50x-15000=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=100\\x=-150\end{array}\right.$ loại nghiệm $x=-150$ vì không thoả điều kiện.

Vậy, theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng cần dệt 100 tấm thảm.

Bài 10.

Gọi $x\ \left(km/h\right)$ là vận tốc của ô tô trên quãng đường AB, và vận tốc của ô tô trên quảng đường BC là $x+10\ \left(km/h\right)$.

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là: $\dfrac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là: $\dfrac{50}{x+10}$ (giờ)

Tổng thời gian ô tô đi từ A đến B, nghỉ tại B và từ B đến C là: 10 giờ 15 phút – 7 giờ 30 phút là 2 giờ 45 phút = $\dfrac{11}{4}$ giờ, nên ta có phương trình:

$\frac{30}{x}+\frac{1}{2}+\frac{50}{x+10}=\frac{11}{4} \Rightarrow 9x^2-230x-1200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-\frac{40}{9} \end{array}\right.$ loại nghiệm

$x=-\frac{40}{9}$ vì không thoả điều kiện.

Vậy, vận tốc của ô tô đi trên đoạn đường AB là 30 km/h, và vận tốc của ô tô đi trên đoạn đường BC là 50 km/h.

VI. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 4

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG IV MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 01

I. TRẮC NGHIỆM (4 điểm) ***Khoanh tròn chữ cái đứng trước kết qủa đúng:***

Câu 1.Tổng và tích các nghiệm của phương trình $4x^2 + 2x - 5 = 0$ là

A.$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$; $x_1.x_2 = \frac{5}{4}$ B.$x_1+x_2= -\frac{1}{2}$; $x_1.x_2 = -\frac{5}{4}$

C. $x_1+x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_1.x_2 = \frac{5}{4}$ D.$x_1+x_2= \frac{1}{2}$; $x_1.x_2 = -\frac{5}{4}$

Câu 2. Phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có nghiệm khi

A. $m \geq -1$ B. $m \geq 1$

C. $m \leq 1$ D. $m \leq -1$

Câu 3. Phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ có nghiệm là:

A. $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$ B. $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{2}$

C. $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ D. $x = 1$

Câu 4. Hàm số $y = -\frac{3}{4}x^2$. Khi đó f (-2) bằng :

A. 3 B. - 3

C. $\frac{3}{4}$ D. 6

Câu 5. Tổng hai số bằng 7,tích hai số bằng 12.Hai số đó là nghiệm của phương trình.

A. $x^2 - 12x + 7 = 0$ B. $x^2 + 12x - 7 = 0$

C. $x^2 - 7x - 12 = 0$ D. $x^2 - 7x + 12 = 0$

Câu 6. Phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có Δ bằng

A. $\sqrt{37}$ B. -37

C. 37 D. 13

Câu 7. Phương trình $5x^2 + 8x - 3 = 0$

A. Có nghiệm kép B. Có hai nghiệm trái dấu

C. Có hai nghiệm cùng dấu D. Vô nghiệm

Câu 8. Hàm số $y = -2x^2$

A. Hàm số luôn đồng biến

B. Hàm số luôn đồng biến

C. Hàm số đồng biến khi x>0, nghịch biến khi x<0

D. Hàm số đồng biến khi x<0, nghịch biến khi x>0

II. TỰ LUẬN (6điểm)

Bài 1: (2 điểm).

Cho hai hàm số: $y = x^2$ (P) và $y = -2x + 3$ (D).

a/ Vẽ hai đồ thị (P) và (D) trên cùng một hệ trục toạ độ.

b/ Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (D) bằng phương pháp đại số.

Bài 2: (2 điểm) Giải phương trình:

a) $3x^2 - 8x + 5 = 0$ b) $(2x - 1)(x - 3) = -2x + 2$

Bài 3: (2 điểm).

Cho phương trình : $2x^2 - 7x - 1 = 0$ (gọi x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình)

a) Không giải phương trình, hãy tính: $x_1 + x_2$; x_1x_2

b) Tính giá trị biểu thức: $A = 12 - 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$

..........................*HẾT*............................

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 01

I. Trắc nghiệm (2đ) Mỗi câu chọn đúng, nối thích hợp được 0,5 đ

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	C	A	B	D	C	B	D

II. Tự luận: (8 điểm)

Bài 1 (2 điểm) : Mỗi phần 1 điểm .

*) Hàm số $y = x^2$:

Bảng một số giá trị tương ứng (x,y):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

*) Hàm số y = -2x + 3:

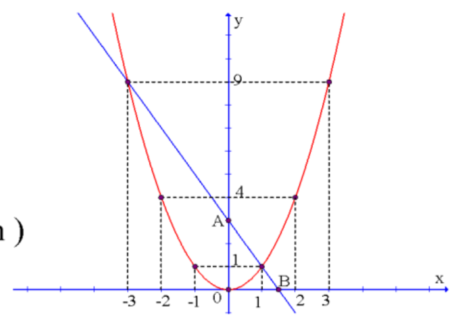
- Giao điểm của đồ thị với Oy: A(0; 3).

Giao điểm của đồ thị với Ox: B($\frac{3}{2}$; 0)

- Đường thẳng AB là đồ thị hàm số y = -2x + 3

b) Tìm đúng 2 toạ độ giao điểm

bằng phương pháp đại số : (1; 1) và (-3; 9) (1 điểm)



Bài 2: (2 điểm). Mỗi câu 1 điểm

a) $3x^2 - 8x + 5 = 0$

Ta có $\Delta' = 16 - 3.5 = 1 > 0$ (0,5 điểm)

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$x_1 = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{4-1}{3} = 1$ (0,5 điểm)

b) $(2x - 1)(x - 3) = - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$ (0,5 điểm)

$\Delta = (-5)^2 - 4.2.1 = 17 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$; $x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ (0,5 điểm)

Bài 3: (2 điểm). Mỗi câu 1 điểm

a) Ta có: ac = - 2 < 0 nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (0,5 điểm)

Theo định lí Vi-ét, ta tính được: $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ và $x_1x_2 = \frac{-1}{2}$ (0,5 điểm)

b) $A = 12 - 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 12 - 10x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

(0,25 điểm)

$= 12 - 12x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2$ (0,25

điểm)

$= 12 - 12.\frac{-1}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 12 + 6 + \frac{49}{4} = 30,25$ (0,5 điểm)

Lưu ý: HS làm cách khác đúng vẫn tính điểm tối đa.

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG IV MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 02

I- TRẮC NGHIỆM: ***(3điểm)* Khoanh tròn chữ cái đứng trước kết quả đúng của các câu sau:**

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm:

A. (0; 1) B. (- 1; 1) C. (1; - 1) D. (1; 0)

Câu 2: Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm A(3; 12). Khi đó a bằng

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 4 D. $\frac{1}{4}$

Câu 3: Phương trình $(m + 1)x^2 – 2mx + 1 = 0$ là phương trình bậc hai khi:

A. m = 1. B. m ≠ -1. C. m = 0. D. mọi giá trị của m.

Câu 4: Phương trình $x^2 – 3x + 7 = 0$ có biệt thức Δ bằng

A. 2. B. -19. C. -37. D. 16.

Câu 5: Cho phương trình $0,1x^2 – 0,6x – 0,8 = 0$. Khi đó:

A. $x_1 + x_2 = 0,6$; $x_1.x_2 = 8$. B. $x_1 + x_2 = 6$; $x_1.x_2 = 0,8$.

C. $x_1 + x_2 = 6$; $x_1.x_2 = 8$. D. $x_1 + x_2 = 6$; $x_1.x_2 = - 8$.

Câu 6: Phương trình $x^2 + 5x — 6 = 0$ có hai nghiệm là:

A. $x_1 = 1$; $x_2 = - 6$ B. $x_1 = 1$; $x_2 = 6$ C. $x_1 = - 1$; $x_2 = 6$ D. $x_1 = - 1$; $x_2 = - 6$

II. TỰ LUẬN: ***(7điểm)***

Câu 1 *(3đ)*. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

Câu 2. *(2đ)*. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$

a) Vẽ đồ thì hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó.

Câu 3. *(2đ)*. Cho phương trình $x^2 + 2x + m - 1 = 0$

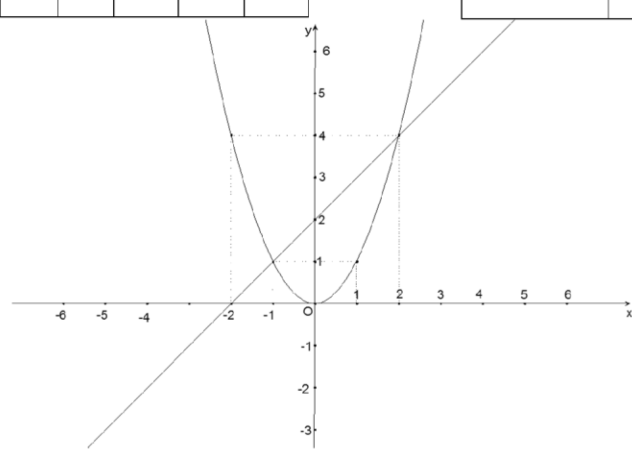
Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 02

I. Trắc nghiệm: (3 điểm) *Mỗi câu đúng được 0,25 điểm*

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	A	B	B	D	A

II. Tự luận:

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>a) $x^2 + 6x + 8 = 0$
$\Delta' = 3^2 - 8 = 1$; $\sqrt{\Delta'} = 1$
$x_1 = -2$; $x_2 = -4$</td><td>0.5
1.0</td></tr>
<tr><td>b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$ (1)
Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$)
Phương trình trở thành: $3y^2 - 15y + 12 = 0$ (2)
Vì a + b + c = 3 - 15 +12 = 0 nên phương trình (2) có hai nghiệm:
$y_1 = 1$; $y_2 = 4$
Suy ra: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$.</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25
0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a)Vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = x^2$</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>- 2</td></tr><tr><td>$y = x + 2$</td><td>2</td><td>0</td></tr></table>

b) Tọa độ giao điểm của hai đồ thị</td><td>0.5
0.5
1.0</td></tr>
</table>

	A(-1; 1); B(2; 4)	
3	Tính được : Δ = 2 - m Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ Tính được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$ Từ (1) và $x_1 - x_2 = 4$ ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ Thay giá trị của x_1, x_2 vào (2) $\Rightarrow$ m = -2 (thỏa điều kiện). Vởy với m = - 2 thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.	0.5 0.5 0.25 0.5 0.25

VII. ĐỀ THI HỌC KÌ 2 – MÔN TOÁN LỚP 9

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II TOÁN 9 MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 01

Bài 1(1,5đ)

a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$$(P): y = x^2;\ (d): y = 2x + 3$$

b) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (d) và (P).

Bài 2(2,0đ)

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

Bài 3 (2,5đ)

a) Cho phương trình $x^2 + 7x - 4 = 0$

Không giải phương trình hãy tính $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$.

b) Một người dự định đi xe gắn máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 90km. Vì có việc gấp phải đến B trước giờ dự định là 45 phút nên người ấy phải tăng vận tốc lên mỗi giờ 10 km . Hãy tính vận tốc mà người đó dự định đi .

Bài 4 (4,0đ)

Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O ; 6cm); kẻ hai tiếp tuyến MN; MP với đường tròn (N ; P $\in$ (O)) và cát tuyến MAB của (O) sao cho AB = 6 cm.

a) Chứng minh: OPMN là tứ giác nội tiếp

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN biết MO = 10 cm

c) Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB. So sánh góc $\widehat{MON}$ với góc $\widehat{MON}$

d) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB của hình tròn tâm O đã cho.

--------Hết--------

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 01

ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
Bài 1:	**(1,5điểm)**

a)Vẽ đồ thị

Tọa độ điểm của đồ thị $(P): y = x^2$

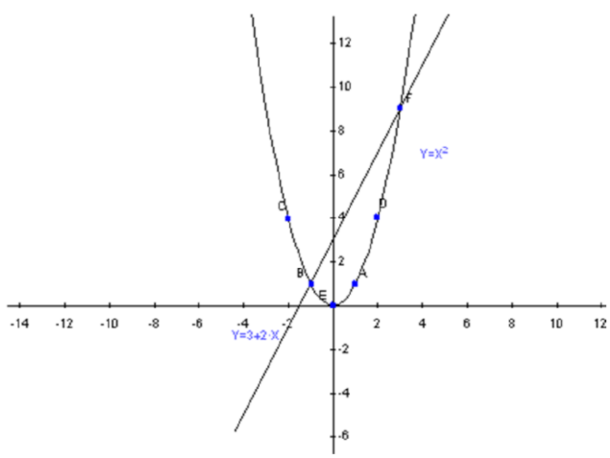
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

0,25

Tọa độ điểm của đồ thị $(d): y = 2x + 3$

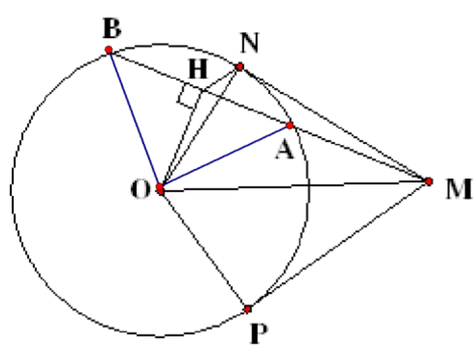
0,25

x	0	$\frac{-3}{2}$
$y = 2x + 3$	3	0



0,5

b)Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = 2x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ Có dạng a – b + c = 1 – (-2) + (-3) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-c}{a} = 3 \end{cases}$ từ (P) $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases}$ Vậy : Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-1;1)$; B(1;9)	0,25 0,25
Bài 2: a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4.3 = 25 - 12 = 13 > 0$ Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$	**(2,0điểm)** 0,5 0,25 0,25
b) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=8 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+5.1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$	1,0
Bài 3: a) + Phương trình có a.c = 1.(-4) = -4 < 0 => Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 +Theo viet: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -7$ $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -4$	**(2,5điểm)** 0,25 0,25 0,25 0,25

b) Gọi x (km/h) là vận tốc dự định đi (đk: x > 0)	0,25
x + 10 (km/h) là vận tốc thực tế đi	
Thời gian dự định đi là : $\frac{90}{x}$(h)	0,25
Thời gian thực tế đi là : $\frac{90}{x+10}$(h)	
	0,25
Vì thực tế đến trước giờ dự định là 45'(=$\frac{3}{4}$h), nên ta có phương trình:	
$\frac{90}{x}-\frac{90}{x+10}=\frac{3}{4}$	
$\Rightarrow x^2+10x-1200=0$	
$\Delta'=b'^2-ac=25+1200=1225,\Rightarrow\sqrt{\Delta}=35$	0,25
Vì Δ' > 0 nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt	
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}'}{a}=\frac{-5+35}{1}=30$ (TMĐK)	
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}'}{a}=\frac{-5-35}{1}=-40$(Loại)	
	0,25
Vậy vận tốc dự định đi là 30km/h	
	0,25
Bài 4:	**(4,0điểm)**
Vẽ hình đúng	0,5
	

a) Tứ giác PMNO có $\widehat{P} = 90^0$ và $\widehat{N} = 90^0$ (Tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow$ $\widehat{P} + \widehat{N} = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác PMNO nội tiếp	0,5 0,5
b) Tính độ dài đoạn MN: Áp dụng định lí Py-Ta –go vào tam giác vuông MON ta có MN = $\sqrt{MO^2 - ON^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}$ = 8 cm	0,5
c) Vì: H là trung điểm của AB, nên: OH $\perp$ AB $\Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{ONM} = 90^0$ $\widehat{OHM}$ và $\widehat{ONM}$ cùng nhìn đoạn OM một góc 90^0 $\Rightarrow$ Tứ giác MNHO nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{MHN} = \widehat{MON}$ (vì cùng chắn cungMN)	0,25 0,25 0,25 0,25
d) Gọi diện tích cần tính là S_{VP} $S_{VP} = S_{qAOB} - S_{\Delta AOB}$ + Ta có: 0A = OB = AB = 6cm => ΔAOB đều => $S_{\Delta AOB} = 9\sqrt{3} \approx 15,59$ + $S_{qAOB} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.6^2 60}{360} = 6\pi \approx 18,84(cm^2)$ =>$S_{VP} = S_q - S_\Delta = 6\pi - 9\sqrt{3} = 3(2\pi - 3\sqrt{3})$ $\approx$ 18,84 - 15,59 $\approx$ 3,25 (cm^2)	0,25 0,25 0,25 0,25

**** Học sinh có thể giải cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa***

--------Hết--------

Họ và tên: ……………………………. Lớp :………	ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II TOÁN 9 MÔN: TOÁN *Ngày kiểm tra: …………..*	Điểm

ĐỀ SỐ 02

Bài 1(1,5đ)

a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$(P): y = x^2$; $(d): y = 2x + 3$

b) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (d) và (P).

Bài 2(2,0đ)

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

Bài 3 (2,5đ) Cho phương trình: $x^2 - mx - 4 = 0$ (m là tham số) (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 5$

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc giá trị của m.

Bài 4 (4,0đ)

Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O ; 6cm); kẻ hai tiếp tuyến MN; MP với đường tròn (N ; P $\in$ (O)) và cát tuyến MAB của (O) sao cho AB = 6 cm.

a) Chứng minh: OPMN là tứ giác nội tiếp

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN biết MO = 10 cm

c) Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB. So sánh góc $\widehat{MON}$ với góc $\widehat{MHN}$

d) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB của hình tròn tâm O đã cho.

--------Hết--------

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM - ĐỀ SỐ 02

ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
Bài 1:	**(1,5điểm)**

a)Vẽ đồ thị

Tọa độ điểm của đồ thị $(P): y = x^2$

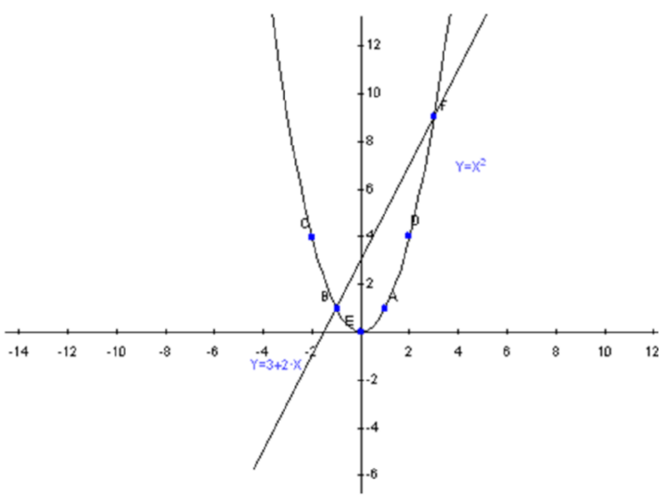
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

0,25

Tọa độ điểm của đồ thị $(d): y = 2x + 3$

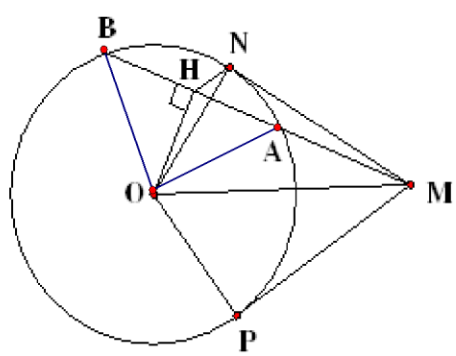
x	0	$\frac{-3}{2}$
$y = 2x + 3$	3	0

0,25



0,5

b)Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = 2x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ Có dạng a – b + c = 1 – (-2) + (-3) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-c}{a} = 3 \end{cases}$ từ (P) $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases}$ Vậy : Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-1;1)$; B(1;9)	0,25 0,25
Bài 2: a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ Δ = $(-5)^2$ – 4.3 = 25 – 12 = 13 > 0 Vì Δ > 0 nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$	**<u>(2,0điểm)</u>** 0,5 0,25 0,25
b) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=8 \\ 2x+5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+5.1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$	1,0
Bài 3: Cho phương trình: x^2 – mx + m – 1 = 0 (m là tham số) (1) ***a) C/m: Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.*** $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(m-1)$ $= m^2 - 4m + 4$ $= (m-2)^2 \geq 0 \quad ;\forall m$ => Phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m	**<u>(2,5điểm)</u>** 0,25 0,25 0,25 0,25
b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 5$	0,25

+ Theo Viet: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m$; $\quad x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 1$ + $x_1^2 + x_2^2 = 5$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 5$ $\Leftrightarrow m^2 - 2.(m - 1) = 5$ $\Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 = 5$ $\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$ Phương trình có dạng: a – b + c = 1 – (- 2) + (-3) = 0 Nên: $m_1 = -1$; $m_2 = 3$ Vậy: $m_1 = -1$ hoặc $m_2 = 3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 5$	0,25 0,25 0,25
c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc giá trị của m. Ta có: $x_1 + x_2 - 1 = x_1.x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1.x_2 = 1$ Vậy: Hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc giá trị của m là: $x_1 + x_2 - x_1.x_2 = 1$	0,25 0,25
Bài 4: Vẽ hình đúng 	**(4,0điểm)** 0,5
a) Tứ giác PMNO có $\widehat{P} = 90^0$ và $\widehat{N} = 90^0$ (Tính chất tiếp tuyến)	0,5

$\Rightarrow \hat{P} + \hat{N} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác PMNO nội tiếp	0,5
b) Tính độ dài đoạn MN: Áp dụng định lí Py-Ta –go vào tam giác vuông MON ta có MN = $\sqrt{MO^2 - ON^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm	0,5
c) Vì: H là trung điểm của AB, nên: OH $\perp$ AB $\Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{ONM} = 90^0$ $\widehat{OHM}$ và $\widehat{ONM}$ cùng nhìn đoạn OM một góc 90^0 $\Rightarrow$ Tứ giác MNHO nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MON}$ (vì cùng chắn cungMN)	0,25 0,25 0,25 0,25
d) Gọi diện tích cần tính là S_{VP} $S_{VP} = S_{qOAB} - S_{\Delta OAB}$ + Ta có: 0A = OB = AB = 6cm => ΔAOB đều => $S_{\Delta AOB} = 9\sqrt{3} \approx 15,59$ + $S_{qAOB} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi .6^2 60}{360} = 6\pi \approx 18,84(cm^2)$ =>$S_{VP} = S_q - S_\Delta = 6\pi - 9\sqrt{3} = 3(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 18,84 - 15,59 \approx 3,25$ (cm^2)	0,25 0,25 0,25 0,25

**** Học sinh có thể giải cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa***

--------Hết--------

MỤC LỤC

KÊU GỌI GÓP VỐN TỪ CỘNG ĐỒNG HỖ TRỢ VIẾT SÁCH

CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 3 – HÌNH HỌC THEO SƠ ĐỒ TƯ DUY

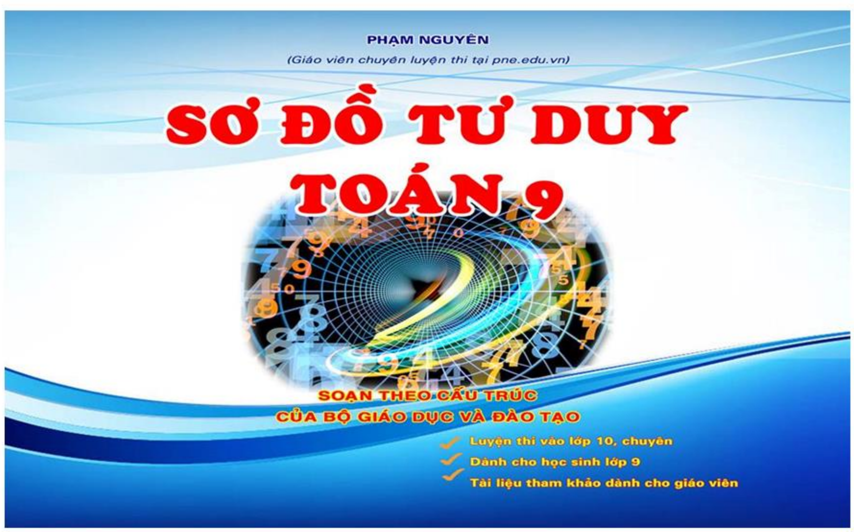
Chào cả nhà,

Tôi là Nguyên, viết sách là niềm đam mê với tôi! Đã từ lâu lắm rồi từ ngày các cuốn sách SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ, CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 2 ĐẠI SỐ được ra đời cũng đã 6 tháng rồi. Đến hôm nay, tôi lại dấy lên trong mình sự khao khát được viết tiếp, hoàn thiện cuốn CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 3 – HÌNH HỌC THEO SƠ ĐỒ TƯ DUY.

Để viết tiếp Tập 3 HÌNH HỌC, tôi sẵn sàng chia sẽ tất cả các file word của các cuốn trước dành cho các anh chị em ủng hộ tôi. Bởi lý do quan trọng nhất của một cuốn sách ra đời với tôi, là đến được với độc giả và thực sự có ích cho anh chị em. Và khi thực hiện dự án viết cuốn 3 này, sau mỗi chương khi hoàn thiện, tôi sẽ gửi mail đến tất cả các anh chị em đã ủng hộ tôi.

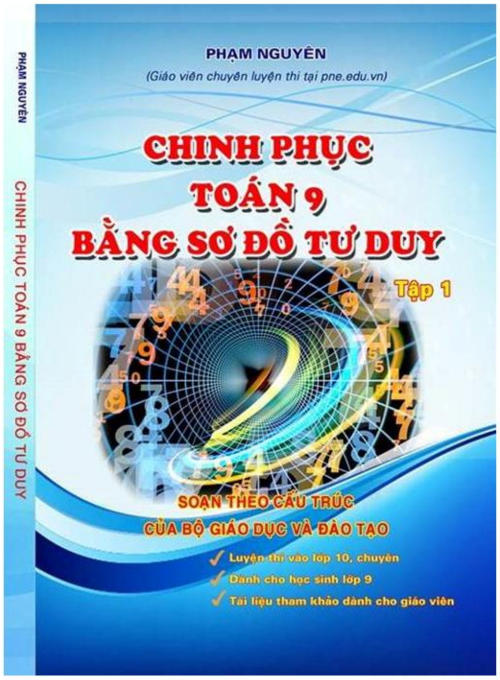
Giới thiệu các tác phẩm trước:

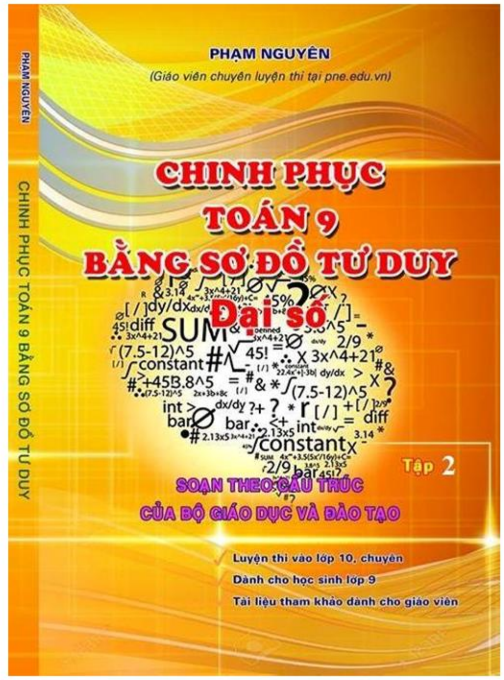
1. Cuốn 1: SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9 (31 sơ đồ). Trình bày các nội dung chính, các nội dung khó của Toán 9 dưới dạng sơ đồ tư duy giúp các em ôn tập sau mỗi chương để các em dễ nắm bắt và nhớ lâu hơn, giáo viên cũng có tài liệu để phát cho các em.



Link tài liệu file PDF:
Sơ đồ tư duy: https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/

2. Cuốn 2, 3: CHINH PHỤC TOÁN 9 – TẬP 1 (207 trang), TẬP 2 ĐẠI SỐ (296 trang). Áp dụng các sơ đồ là việc không dễ với các em học sinh yếu, và yêu cầu cần phải hiểu rõ các nội dung kiến thức, do đó tôi đã viết Tập 1 (Chương 1, Chương 2), Tập 2 (Chương 3, Chương 4) với nội dung nằm trong Đại số lớp 9 với cách phân dạng rất chi tiết và trọng tâm cùng các hướng dẫn cụ thể nhất, để các em có thể TỰ HỌC, VÀ LÀM ĐƯỢC. Thêm vào đó là các bài tập tự luyện, các đề kiểm tra, đề thi được giới thiệu ngay sau mỗi dạng, mỗi bài, và mỗi chương sẽ giúp các em rèn luyện và tự đánh giá được bản thân.





Link tài liệu:

Tập 1: https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/

3. DỰ ÁN viết sách: CHINH PHỤC TOÁN 9 – TẬP 3 HÌNH HỌC
   Chào các anh chị, như tôi đã từng chia sẽ, đây là dự án ý nghĩa và rất tâm huyết với riêng cá nhân tôi, tôi khao khát viết tiếp và hoàn thiện trọn bộ sách này vì nó rất có ích cho các em học sinh, các giáo viên khi sử dụng sách. Trước hết, tôi muốn nói sự ủng hộ của mọi người qua các cuốn sách trước là niệm động viên rất lớn dành cho tôi. Các bạn giáo viên, các anh chị phụ huynh và các em học sinh đã luôn động viên tôi cố gắng hoàn thiện cuốn hình học. Tuy nhiên, vấn đề chi phí là một vấn đề lớn với tôi, với một dự án cá nhân. Tôi cần một ít vốn để viết tiếp.
   Do đó tôi mong được mọi người ủng hộ để tôi có thể thực hiện dự án này thành công.

4. Các bạn có thể ủng hộ tôi, và nhận các ưu đãi như sau:
   a. Ủng hộ 100.000 vnđ để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9 và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
   b. Ủng hộ 200.000 vnđ để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
   c. Ủng hộ 300.000 vnđ để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 2 ĐẠI SỐ và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
   d. Dự án sẽ bắt đầu triển khai khi số tiền ủng hộ đạt được 20.000.000vnđ. Thời gian thực hiện dự án: 5 tháng.
5. Cách thức ủng hộ:
   - Để ủng hộ, các bạn vui lòng chuyển khoản vào tài khoản với nội dung: Ủng hộ Nguyên viết sách + Họ tên + SĐT
   - Thông tin tài khoản:

Chủ tài khoản: Nguyễn Thụy Nhã Uyên (bà xã tác giả)
Số tài khoản: 040036663040 ngân hàng Sacombank, chi nhánh Tp Huế.

- Sau đó vui lòng thông báo lại cho Nguyên biết vào sđt 0935555826 hoặc nhắn tin vào Facebook: https://www.facebook.com/thayphamnguyen
- Tôi sẽ liên tục cập nhật danh sách ủng hộ công khai gồm họ tên, số tiền ủng hộ của anh chị em trên trang fanpage: https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/