CAO VĂN TUẤN - LÊ BÁ BẢO - NGUYỄN ĐỖ CHIẾN
ĐẶNG QUANG HIẾU - NGUYỄN MẠNH HÙNG

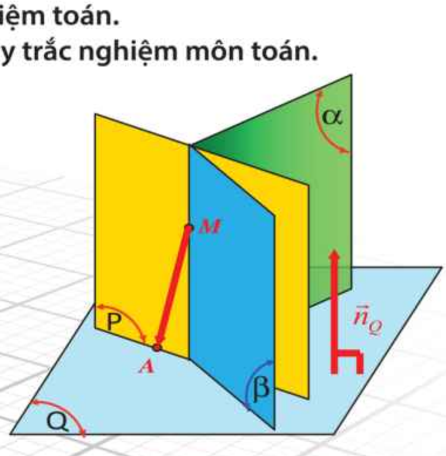
CHINH PHỤC KỲ THI THPT

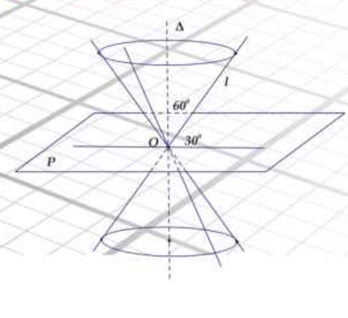
Trắc nghiệm

MÔN TOÁN

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN VÀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

- Áp dụng từ năm **2017** trắc nghiệm môn toán.
- Giúp học sinh làm quen ôn tập, luyện thi trắc nghiệm toán.
- Tài liệu cho thầy cô giáo ứng dụng trong giảng dạy trắc nghiệm môn toán.





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nguyện vọng của đông đảo bạn đọc trên cả nước mong muốn có một bộ sách hữu ích phục vụ cho việc học tập, ôn luyện và giảng dạy trước những thay đổi về phương pháp dạy học và kiểm tra, chúng tôi ra mắt bộ sách: Chinh phục kỳ thi THPT môn Toán. Bộ sách gồm 4 quyển:

1. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
2. Hàm số lũy thừa - Mũ - Lôgarit. Nguyên hàm - Tích phân. Số phức.
3. Hình học không gian cổ điển và phương pháp tọa độ trong không gian.
4. Bộ đề thi trắc nghiệm môn Toán.

Nội dung kiến thức bám sát sách giáo khoa cơ bản đồng thời có thêm phần chuyên sâu, mở rộng gắn liền với thực tế.

Trong các quyển 1,2,3 chúng tôi viết theo cấu trúc: Tóm tắt lý thuyết căn bản, ví dụ minh họa, câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện, đáp án và hướng dẫn giải chi tiết. Đặc biệt phần: Những kết quả quan trọng thường dùng giúp cho học sinh hệ thống được cốt lõi kiến thức và nhanh chóng tìm ra kết quả chính xác, các công thức giải nhanh và kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay được chúng tôi đề cập, lồng ghép vào các ví dụ ở mức độ vừa phải, lược bỏ những công thức và kỹ thuật cồng kềnh khó nhớ.

Hệ thống câu hỏi đa dạng, phong phú, từ cơ bản đến nâng cao, từ đơn giản đến phức tạp, đảm bảo phân bổ hợp lý cả 4 mức độ: Nhận biết, thông hiểu, vận dụng và vận dụng cao. Các câu hỏi tăng cường và phát huy năng lực tư duy của học sinh hạn chế cách học tập máy móc rập khuôn. Tất cả các câu hỏi, bài tập đều có lời giải chi tiết, đồng thời giải đáp mọi thắc mắc miễn phí qua website: thayhieulive.com

Chúng tôi viết bộ sách với tinh thần cầu thị rất cao tuy nhiên khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định, chúng tôi mong muốn nhận được sự góp ý, chia sẻ từ quý thầy cô và các em học sinh trên cả nước để hoàn thiện bộ sách hơn trong những lần tái bản sau.

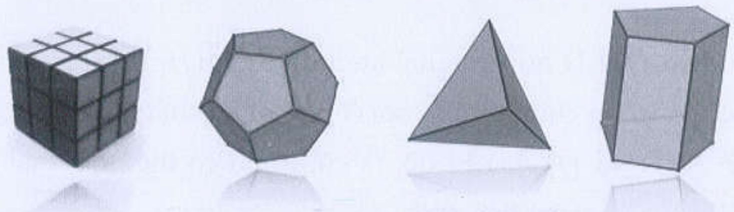
Địa chỉ hòm thư góp ý tới tác giả: chienmath43@gmail.com

Trân trọng cảm ơn !

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN 1: KHỐI ĐA DIỆN. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

Trong thực tế ta thường gặp những vật thể không gian giới hạn bởi các đa giác như viên gạch, khối lập phương, kim tự tháp Ai Cập. Tinh thể của một số hợp chất hoá học như muối ăn, phèn chua,...những vật thể đó được gọi là những khối đa diện.



VẤN ĐỀ 1 | KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP VÀ KHỐI LĂNG TRỤ

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung hoặc có đỉnh chung hoặc có một cạnh chung.
+ Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một *mặt* của hình đa diện.

Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các *đỉnh*, các *cạnh* của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

- *Khối đa diện* là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
  + Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.
  + Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài,... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài,... của hình đa diện tương ứng.

- Khối đa diện được gọi là *khối lăng trụ* nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ.

Khối đa diện được gọi là *khối chóp* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp.

Khối đa diện được gọi là *khối chóp cụt* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp cụt.

Tương tự ta có các định nghĩa về khối chóp n – giác; khối chóp cụt n – giác, khối chóp đều, khối hộp,...

- Tên của khối lăng trụ hay khối chóp được đặt theo tên của hình lăng trụ hay hình chóp giới hạn nó.

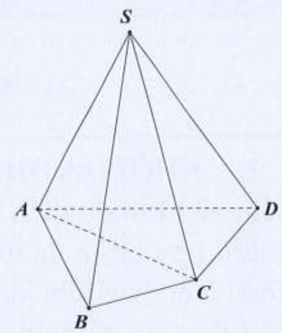
Ví dụ: Hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$ ta có khối lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$; với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ta có khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$;...

II. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói có thể phân chia khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2). Khi đó, ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) để được khối đa diện (H).

Sau đây là một số ví dụ về phân chia các khối đa diện:

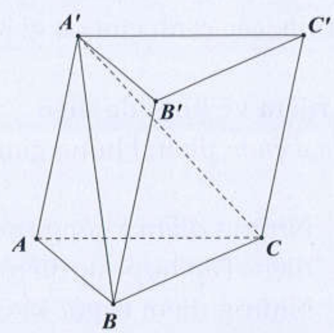
Ví dụ 1: Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, ta hãy xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$. Ta thấy rằng:



+ Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).
+ Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$.

Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.

Ví dụ 2:

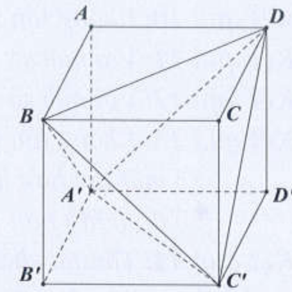


+ Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$. Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.
+ Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Như vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Nhận xét: *Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.*

Ví dụ 3: Với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có thể phân chia thành 5 khối tứ diện sau:



+ $DA'D'C'$
+ $A'ABD$
+ $C'BCD$
+ $BA'B'C'$
+ $BDC'A'$

B. MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

➢ ***Kết quả 1:*** *Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.*

➢ ***Kết quả 2:*** *Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.*

➢ ***Kết quả 3:*** *Cho (H) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.*

Chứng minh: *Gọi m là số các mặt của khối đa diện (H). Vì mỗi mặt của (H) có p cạnh nên m mặt sẽ có pm cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của (H) bằng* $c=\dfrac{pm}{2}$*. Vì m lẻ nên p phải là số chẵn.*

➢ ***Kết quả 4 (Suy ra từ chứng minh kết quả 3):*** *Cho (H) là đa diện có m mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là* $c=\dfrac{pm}{2}$.

➢ ***Kết quả 5:*** *Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.*

Chứng minh: *Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là c và m.*
Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $c=\dfrac{3m}{2}$ *(có thể áp dụng luôn kết quả 4 để suy ra* $c=\dfrac{3m}{2}$*).*

Suy ra $3m=2n \Rightarrow 3m$ *là số chẵn* $\Rightarrow m$ *là số chẵn.*

Một số khối đa diện có đặc điểm như trên mà có số mặt bằng 4, 6, 8, 10:

+ *Khối tứ diện ABCD có 4 mặt mà mỗi mặt là một tam giác.*
+ *Xét tam giác BCD và hai điểm A, E ở về hai phía cua mặt phẳng (BCD). Khi đó ta có khối lục diện ABCDE có 6 mặt là những tam giác.*
+ *Khối bát diện ABCDEF có 8 mặt là các tam giác.*
+ *Xét ngũ giác ABCDE và hai điểm M, N ở về hai phía của mặt phẳng chứa ngũ giác. Khi đó khối thập diện MABCDEN có 10 mặt là các tam giác.*

➢ ***Kết quả 6:*** *Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.*

➢ ***Kết quả 7:*** *Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.*

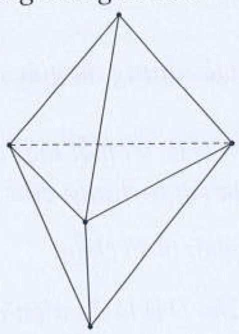
➢ ***Kết quả 8:*** *Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.*

Tổng quát: *Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn.*

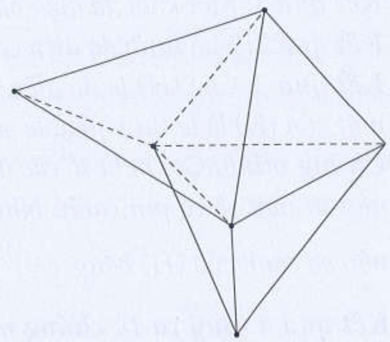
➢ ***Kết quả 9:*** *Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.*

- ***Kết quả 10:*** *Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.*
- ***Kết quả 11:*** *Với mỗi số nguyên $k \geq 3$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k$ cạnh.*
- ***Kết quả 12:*** *Với mỗi số nguyên $k \geq 4$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k+1$ cạnh.*
- ***Kết quả 13:*** *Không tồn tại một hình đa diện có*
  - *Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh;*
  - *Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.*
- ***Kết quả 14:*** *Tồn tại khối đa diện có 2n mặt là những tam giác đều.*

  Khối tứ diện đều có 4 mặt là tam giác đều. Ghép hai khối tứ diện đều bằng nhau (một mặt của tứ diện này ghép vào một mặt của tứ diện kia) ta được khối đa diện H_6 có 6 mặt là tam giác đều. Ghép thêm vào H_6 một khối tứ diện đều nữa ta được khối đa diện H_8 có 8 mặt là các tam giác đều. Bằng cách như vậy, ta được khối đa diện có 2n mặt là những tam giác đều.



H_6



H_8

VẤN ĐỀ 2 | PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

Phép biến hình F trong không gian là một quy tắc để với mỗi điểm M xác định được một điểm M' duy nhất gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Ta còn nói F biến điểm M thành điểm M' và kí hiệu $M' = F(M)$.

Qua phép biến hình F, mỗi hình (H) được biến thành hình (H') gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình (H).

II. PHÉP DỜI HÌNH VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC HÌNH

1. Định nghĩa phép dời hình

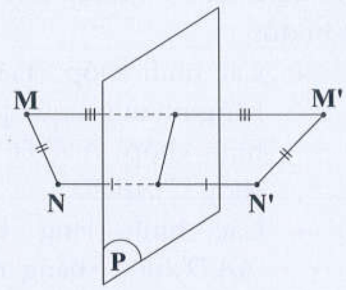
Phép biến hình F trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu nó bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, nghĩa là nếu F biến hai điểm bất kỳ M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

Tính chất: *Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng,...*

2. Các phép dời hình trong không gian thường gặp

a. Phép đối xứng qua mặt phẳng

Định nghĩa: *Phép đối xứng qua mặt phẳng* (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MM'.

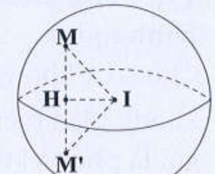


Định lí: *Nếu phép đối xứng qua mp(P) biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.*

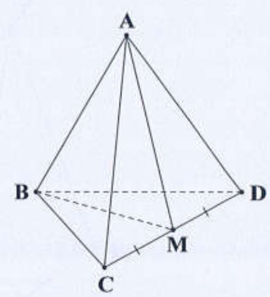
Như vậy: Phép đối xứng qua mặt phẳng là phép biến hình bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Mặt phẳng đối xứng của một hình: Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) là mặt phẳng đối xứng qua hình (H).

Ví dụ 1: Mọi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu (S) đều là mặt phẳng đối xứng của mặt cầu (S).



Ví dụ 2: Hình tứ diện đều $ABCD$ có 6 mặt phẳng đối xứng. Đó là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện. *Chẳng hạn:* Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Khi đó ta có (ABM) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều $ABCD$.



b. Phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

c. Phép đối xứng trục

Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực đoạn MM'.

d. Phép đối xứng tâm

Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

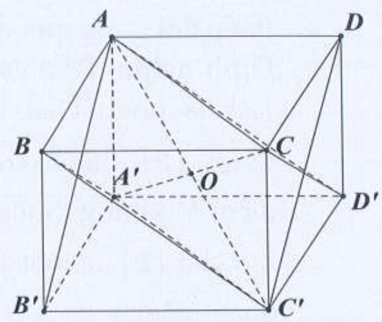
3. Định nghĩa hai hình bằng nhau

Hai hình (H) và (H') gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó:

+ Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
+ Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (Qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$)



Định lý: *Hai hình tứ diện ABCD và $A'B'C'D'$ bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là:*

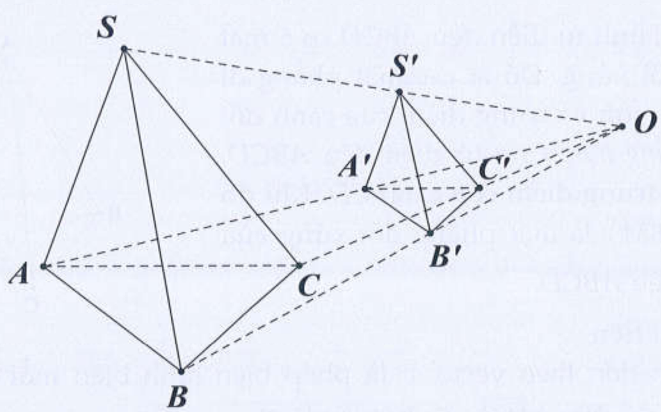
$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $AC = A'C'$, $BD = B'D'$.

III. PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

1. Phép vị tự trong không gian

a. Định nghĩa

Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' thoả mãn: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự. Điểm O gọi là tâm vị tự, số k được gọi là tỉ số vị tự.



b. Các tính chất cơ bản của phép vị tự

+ Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, và do đó $M'N' = |k|MN$.
+ Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

2. Hai hình đồng dạng

Hình (H) được gọi là đồng dạng với hình (H') nếu có phép vị tự biến hình (H) thành hình (H_1) mà hình (H_1) bằng hình (H').

B. MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

- ***Kết quả 1:*** *Phép biến hình biến mỗi điểm M của không gian thành chính nó gọi là phép đồng nhất, thường được kí hiệu là e. Phép đồng nhất e là một phép dời hình.*
- ***Kết quả 2:*** *Phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu có cùng bán kính.*
- ***Kết quả 3:*** *Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình f biến A thành A, biến B thành B. Khi đó f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành chính nó.*
- ***Kết quả 4:*** *Cho tam giác ABC và phép dời hình f biến tam giác ABC thành chính nó với* $f(A)=A$, $f(B)=B$, $f(C)=C$. *Khi đó, f biến mọi điểm M của mặt phẳng (ABC) thành chính nó, tức là* $f(M)=M$.
- ***Kết quả 5:*** *Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.*

  Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho AB $\perp$ *(P). Khi đó, thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) thì kết quả là phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}$.
- ***Kết quả 6:*** *Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng (là phép đối xứng qua đường thẳng giao tuyến của (P) và (Q)).*
- ***Kết quả 7:*** *Phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến mỗi mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.*
- ***Kết quả 8:*** *Cho phép vị tự V tâm O tỉ số* $k \neq 1$ *và phép vị tự V′ tâm O′ tỉ số k′. Khi đó, nếu* $k.k' = 1$ *thì hợp thành của V và V′ là một phép tịnh tiến.*
- ***Kết quả 9:*** *Hai hình hộp chữ nhật bằng nhau nếu các kích thước của chúng bằng nhau.*
- ***Kết quả 10:*** *Hai hình lập phương bằng nhau nếu các đường chéo của chúng có độ dài bằng nhau.*
- ***Kết quả 11:*** *Cho hai hình tứ diện ABCD và A′B′C′D′ có các cạnh tương ứng song song, tức là:*

  $$AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C',\ AD \parallel A'D',\ CB \parallel C'B',\ BD \parallel B'D',\ DC \parallel D'C'.$$

  Khi đó hai tứ diện đã cho đồng dạng.
- ***Kết quả 12:*** *Cho hai hình tứ diện ABCD và A′B′C′D′ có các cạnh tương ứng tỉ lệ, tức là:*

  $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'D'}{BD}=k$$

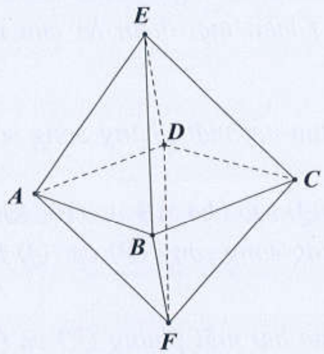
  Khi đó hai tứ diện đã cho đồng dạng.

VẤN ĐỀ 3 KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

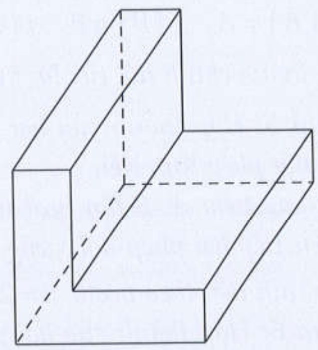
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

2. Khối đa diện đều

a. Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

+ Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
+ Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n,p\}$.

b. Định lí

Chỉ có 5 loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{5;3\}$, loại $\{3;5\}$. Tùy theo số mặt của chúng, 5 khối đa diện trên lần lượt có tên gọi là: Khối tứ diện đều; khối lập phương; khối bát diện đều; khối mười hai mặt đều; khối hai mươi mặt đều.

3. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		***Số đỉnh***	***Số cạnh***	***Số mặt***	***Loại***
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$

Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Chú ý: Giả sử khối đa diện đều loại $\{n, p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt.

Khi đó: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$.

B. MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

➢ ***Kết quả 1:*** *Cho một khối tứ diện đều. Khi đó:*

+ *Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều;*
+ *Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).*

➢ ***Kết quả 2:*** *Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.*

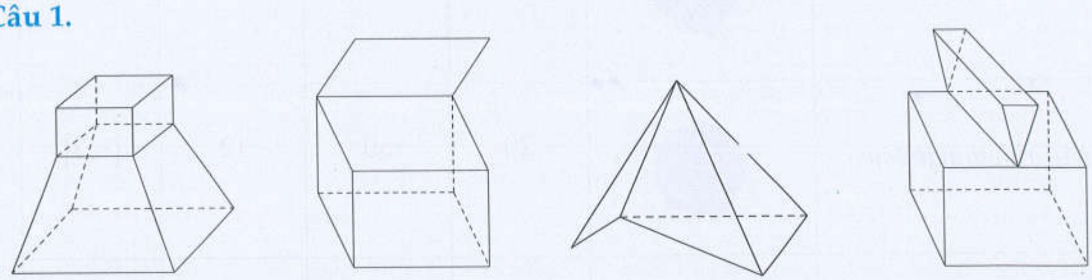
➢ ***Kết quả 3:*** *Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.*

➢ ***Kết quả 4:*** *Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là* ***hai đỉnh đối diện*** *nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là* ***đường chéo*** *của khối bát diện đều. Khi đó:*

+ *Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường;*
+ *Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau;*
+ *Ba đường chéo bằng nhau.*

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM "PHẦN 1: KHỐI ĐA DIỆN. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN"

Câu 1.

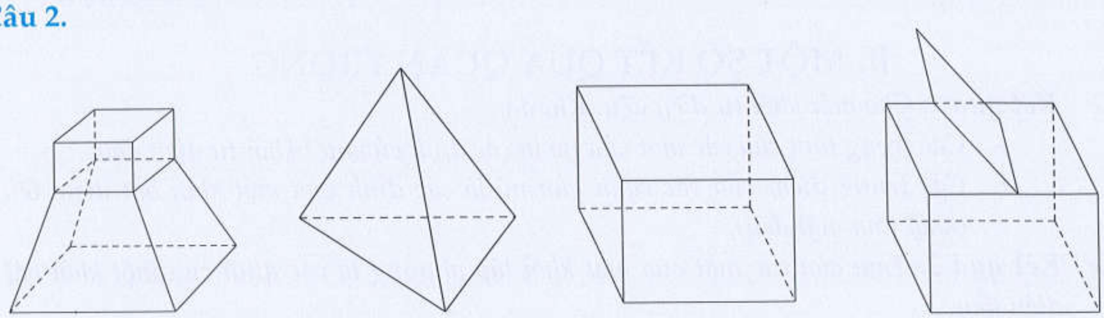


(a) (b) (c) (d)

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là

A. hình (a). **B.** hình (b). **C.** hình (c). **D.** hình (d).

Câu 2.

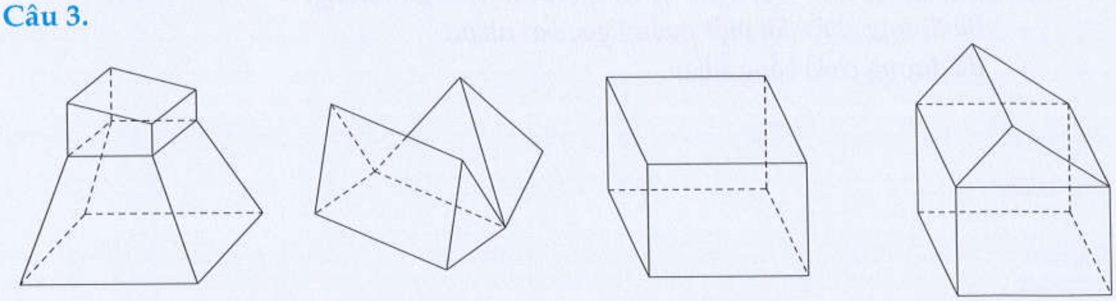


(a) (b) (c) (d)

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình **không** phải đa diện là

A. hình (a). **B.** hình (b). **C.** hình (c). **D.** hình (d).

Câu 3.

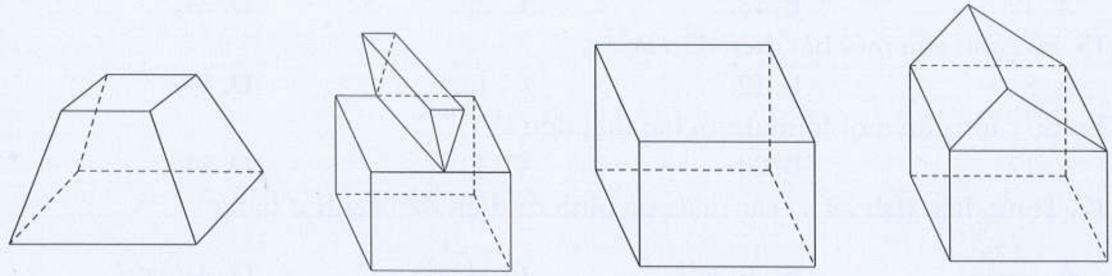


(a) (b) (c) (d)

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số hình đa diện là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4.

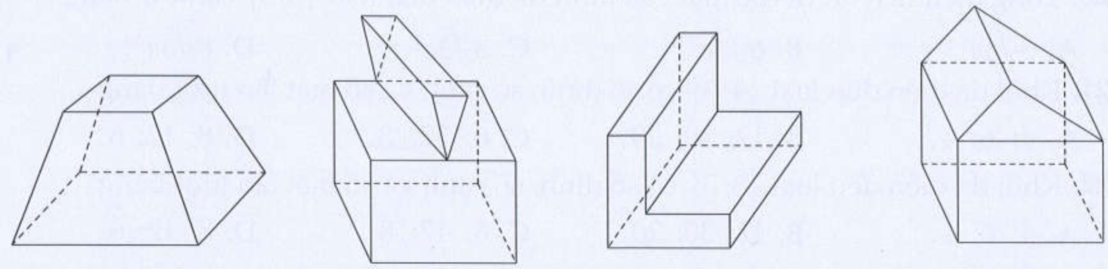


(a) (b) (c) (d)

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình **không** phải đa diện lồi là

A. hình (a). **B.** hình (b). **C.** hình (c). **D.** hình (d).

Câu 5.



(a) (b) (c) (d)

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Trong các mặt của các khối đa diện, số cạnh cùng thuộc một mặt tối thiểu là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có tên gọi là

A. khối lập phương. **B.** khối bát diện đều.

C. khối hai mươi mặt đều. **D.** khối mười hai mặt đều.

Câu 8. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 12π. **D.** 10π.

Câu 9. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ là

A. 4π. **B.** 6π. **C.** 8π. **D.** 10π.

Câu 10. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là

A. 4π. **B.** 6π. **C.** 8π. **D.** 10π.

Câu 11. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là

A. 12π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 24π.

Câu 12. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là

A. 12π. **B.** 16π. **C.** 20π. **D.** 24π.

Câu 13. Số đỉnh của một bát diện đều là

A. 6. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 14. Số đỉnh của một hình mười hai mặt đều là

A. 12. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 24.

Câu 15. Số cạnh của một bát diện đều là

A. 8. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 16. Số cạnh của một hình mười hai mặt đều là

A. 12. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 24.

Câu 17. Tổng diện tích tất cả các mặt của hình tứ diện đều cạnh a bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **B.** $2\sqrt{3}a^2$. **C.** $\sqrt{3}a^2$. **D.** $4\sqrt{3}a^2$.

Câu 18. Tổng diện tích tất cả các mặt của hình tám mặt đều cạnh a bằng

A. $4\sqrt{3}a^2$. **B.** $6\sqrt{3}a^2$. **C.** $2\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a^2$.

Câu 19. Tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a bằng

A. $4a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $8a^2$. **D.** $10a^2$.

Câu 20. Tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ cạnh a bằng

A. $5\sqrt{3}a^2$. **B.** $6\sqrt{3}a^2$. **C.** $3\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a^2$.

Câu 21. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt bằng

A. $4;\ 6;\ 4$. **B.** $12;\ 30;\ 20$. **C.** $6;\ 12;\ 8$. **D.** $8;\ 12;\ 6$.

Câu 22. Khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt bằng

A. $4;\ 6;\ 4$. **B.** $12;\ 30;\ 20$. **C.** $6;\ 12;\ 8$. **D.** $8;\ 12;\ 6$.

Câu 23. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt bằng

A. $4;\ 6;\ 4$. **B.** $12;\ 30;\ 20$. **C.** $6;\ 12;\ 8$. **D.** $8;\ 12;\ 6$.

Câu 24. Phát biểu sau đây là đúng (Đ) hay sai (S): " Khối lăng trụ đều bất kì là một khối đa diện đều".

Câu 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.

B. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.

C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.

D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

Câu 26. Có bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 27. Các khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của số mặt là

A. $\{3;3\}, \{3;4\}, \{3;5\}, \{4;3\}, \{5;3\}$. **B.** $\{3;3\}, \{4;3\}, \{3;4\}, \{5;3\}, \{3;5\}$.

C. $\{3;3\}, \{3;4\}, \{4;3\}, \{3;5\}, \{5;3\}$. **D.** $\{3;3\}, \{4;3\}, \{3;4\}, \{3;5\}, \{5;3\}$.

Câu 28. Phát biểu sau đây là đúng (Đ) hay sai (S): " Khối chóp tam giác đều bất kì là một khối đa diện đều".

Câu 29. Phát biểu sau đây là đúng (Đ) hay sai (S): " Tồn tại khối đa diện đều có số cạnh bằng số mặt".

Câu 30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Số đỉnh và số mặt của mọi hình đa diện luôn bằng nhau.

B. Số đỉnh của mọi hình đa diện luôn lớn hơn 4.

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh gấp 2 lần số đỉnh.

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh nhỏ hơn 6.

Câu 31. Một hình đa diện có các mặt là những tam giác thì số mặt M và số cạnh C của đa diện đó thỏa mãn

A. $3C = 2M$. **B.** $C = M + 2$. **C.** $M \geq C$. **D.** $3M = 2C$.

Câu 32. Các khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh $Đ$ và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn

A. $Đ = C - 2$. **B.** $Đ \geq C$. **C.** $3Đ = 2C$. **D.** $3C = 2Đ$.

Câu 33. Khối tứ diện đều, khối bát diện đều và khối hai mươi mặt đều có số đỉnh $Đ$, số cạnh C, số mặt M thỏa mãn

A. $C = \frac{2M}{3}$. **B.** $M = \frac{2C}{3}$. **C.** $M = Đ$. **D.** $C = 2Đ$.

Câu 34. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

A. năm mặt. **B.** bốn mặt. **C.** hai mặt. **D.** ba mặt.

Câu 35. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 36. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là

A. 4. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 37. Số mặt phẳng đối xứng của đa diện đều loại $\{4;3\}$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 38. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' cắt Δ khi và chỉ khi

A. $\Delta \subset (P)$.

B. Δ cắt (P).

C. Δ không vuông góc với (P).

D. Δ cắt (P) nhưng không vuông góc với (P).

Câu 39. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống, mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng.

"Số cạnh của một hình đa diện luôn.........số mặt của hình đa diện ấy."

A. lớn hơn. **B.** bằng.

C. nhỏ hơn hoặc bằng. **D.** nhỏ hơn.

Câu 40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình hộp là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép vào nhau là một hình đa diện lồi.

D. Hình lập phương là đa diện lồi.

Câu 41. Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 42. Hình chóp tứ giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 43. Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng $2a$ là

A. $4a^2\sqrt{3}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** $2a^2\sqrt{3}$ **D.** $8a^2\sqrt{3}$.

Câu 44. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 45. Số các đỉnh hoặc số các mặt bất kì hình đa diện nào cũng

A. lớn hơn 4. **B.** lớn hơn hoặc bằng 5.

C. lớn hơn 5. **D.** lớn hơn hoặc bằng 4.

Câu 46. Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn

A. lớn hơn 6. **B.** lớn hơn 7.

C. lớn hơn hoặc bằng 6. **D.** lớn hơn hoặc bằng 8.

Câu 47. Trung điểm của tất cả cạnh của hình tứ diện đều là các đỉnh của

A. hình lập phương. **B.** hình tám mặt đều.

C. hình hộp chữ nhật. **D.** hình tứ diện đều.

Câu 48. Phát biểu sau đây đúng (Đ) hay sai (S)?

"Tâm của tất cả mặt của hình tứ diện đều lập thành hình tứ diện đều"

Câu 49. Tâm của các mặt hình tám mặt đều diện đều là các đỉnh của

A. hình lập phương. **B.** hình tám mặt đều.

C. hình hộp chữ nhật. **D.** hình tứ diện đều.

Câu 50. Biết rằng khối đa diện mà mỗi mặt đều là hình tam giác. Gọi n là số mặt của khối đa diện đó, lúc đó ta có

A. n là số chia hết cho 3. **B.** n là số chẵn.

C. n là số lẻ. **D.** n là số chia hết cho 5.

Câu 51. Biết rằng khối đa diện mà mỗi mặt đều là hình ngũ giác. Gọi C là số cạnh của khối đa diện đó, lúc đó ta có

A. C là số chia hết cho 3. **B.** C là số chẵn.

C. C là số lẻ. **D.** C là số chia hết cho 5.

Câu 52. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi

A. d song song với (P). **B.** d nằm trên (P).

C. $d \perp (P)$. **D.** d nằm trên (P) hoặc $d \perp (P)$.

Câu 53. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d'?

A. Có một. **B.** Có hai. **C.** Không có. **D.** Có vô số.

Câu 54. Cho hai đường thẳng phân biệt d và d' đồng phẳng. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d'?

A. Không có. **B.** Có một.

C. Có hai. **D.** Có một hoặc hai.

Câu 55. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 56. Cho phép vị tự tâm O biến điểm A thành điểm B, biết rằng $OA = 2OB$. Khi đó, tỉ số vị tự là bao nhiêu?

A. 2. **B.** -2. **C.** $\pm\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 57. Cho hai đường thẳng song song d, d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d'?

A. Có một. **B.** Không có.

C. Có hai. **D.** Có một hoặc không có.

Câu 58. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và mặt bằng nhau.

Câu 59. Cho khối chóp có đáy là $n-$giác. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Số cạnh của khối chóp bằng $n+1$.

B. Số mặt của khối chóp bằng $2n$.

C. Số đỉnh của khối chóp bằng $2n+1$.

D. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

Câu 60. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

A. Phép vị tự biến mặt phẳng thành mặt phẳng song song với nó.

B. Phép vị tự biến mặt phẳng qua tâm vị tự thành chính nó.

C. Không có phép vị tự nào biến hai điểm phân biệt A và B lần lượt thành A và B.

D. Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	D	C	B	B	B	D	C	A	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	C	A	C	B	C	C	C	B	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	D	A	C	Sai	D	D	B	Sai	Đúng	C
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Đáp án	D	C	B	D	C	D	A	D	A	C
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Đáp án	C	D	A	D	D	C	B	Đúng	B	B
Câu	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Đáp án	D	D	B	D	C	C	D	B	D	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

+ Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;
+ Hai mặt bất kì hoặc có 1 đỉnh chung, hoặc 1 cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2.

Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

+ Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;
+ Hai mặt bất kì hoặc có 1 đỉnh chung, hoặc 1 cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 3.

Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

+ Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;
+ Hai mặt bất kì hoặc có 1 đỉnh chung, hoặc 1 cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4.

Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (H): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)" $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (H): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)" $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6. Do mỗi mặt của hình đa diện tối thiểu là tam giác nên số cạnh tối thiểu của mỗi mặt là 3, áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (H): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)" $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 7.

Loại	$\{3;3\}$	$\{4;3\}$	$\{3;4\}$	$\{5;3\}$	$\{3;5\}$
Tên	Tứ diện đều	Khối lập phương	Khối bát diện đều	Khối mười hai mặt đều	Khối hai mươi mặt đều

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 8.

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, gồm 6 mặt là các hình vuông nên tổng các góc bằng $6.2\pi = 12\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9.

Khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ là khối tứ diện đều, gồm 4 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $4.\pi = 4\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 10.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối tám mặt đều, gồm 8 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $8.\pi = 8\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11.

Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là khối mười hai mặt đều, gồm 12 mặt là các ngũ giác đều nên tổng các góc bằng $12.3\pi = 36\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Lưu ý: Đa giác đều n cạnh có góc bằng $(n-2)\pi$.

Câu 12.

Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, gồm 20 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $20.\pi = 20\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 13.

Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$

Bát diện đều loại $\{3;4\} \Rightarrow n = 3,\ p = 4$.

Ta có: $4Đ = 3.8 \Leftrightarrow Đ = 6 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 14.

Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$

Hình mười hai mặt đều loại $\{5;3\} \Rightarrow n = 5,\ p = 3$.

Ta có: $3Đ = 5.12 \Leftrightarrow Đ = 20 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 15.

Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$

Bát diện đều loại $\{3;4\} \Rightarrow n = 3,\ p = 4$.

Ta có: $2C = 3.8 \Leftrightarrow C = 12 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 16.

Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$

Hình mười hai mặt đều loại $\{5;3\} \Rightarrow n = 5,\ p = 3$.

Ta có: $2C = 5.12 \Leftrightarrow C = 30 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 17.

Tứ diện đều có 4 mặt là các tam giác đều cạnh a nên tứ diện có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 4.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \sqrt{3}a^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 18.

Hình tám mặt đều có 8 mặt là các tam giác đều cạnh a nên tứ diện có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 8.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = 2\sqrt{3}a^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 19.

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a nên hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6.a^2 = 6a^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 20.

Đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều nên có 20 mặt là các tam giác đều cạnh a nên hình hai mươi mặt đều có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 20.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = 5\sqrt{3}a^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 21.

Cách 1: Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$

Cách 2: Bảng tổng hợp 5 loại đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 22.

Tương tự câu 21. ***Chọn đáp án A.***

Câu 23.

Tương tự câu 21. ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.

Phát biểu sai (S), do chỉ có khối lập phương là khối đa diện đều.

Câu 25.

Trong 5 loại khối đa diện đều không tồn tại khối chóp có đáy là tứ giác.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 26.

Có 5 loại khối đa diện đều $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 27.

Sắp xếp theo thứ tự tăng dần số mặt của các khối đa diện đều là: Khối tứ diện $\{3;3\}$, khối lập phương $\{4;3\}$, khối tám mặt đều $\{3;4\}$, khối mười hai mặt đều $\{5;3\}$ và khối hai mươi mặt đều $\{3;5\}$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28.

Phát biểu sai (S). Chỉ có khối chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là khối đa diện đều loại $\{3;3\}$.

Câu 29.

Phát biểu sai (S). Khối đa diện đều có số cạnh luôn lớn hơn số mặt.

Câu 30.

Khối lập phương có số cạnh bằng 12 và số mặt bằng 6 $\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 31.

Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Tổng số mặt của hình đa diện là M và mỗi mặt đều là tam giác nên có tổng số cạnh $3M$. Vậy ta có $3M = 2C$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 32.

Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba mặt nên suy ra các cạnh của hình đa diện là $3Đ$. Vậy ta có $3Đ = 2C$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 33.

Dựa vào bảng tổng hợp 5 khối đa diện đều (câu 21) ta suy ra 3 khối tứ diện đều, khối bát diện đều và khối hai mươi mặt đều có $M = \dfrac{2C}{3} \Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 34.

Dựa vào khái niệm và điều kiện xác định của hình đa diện ta suy ra mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt $\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

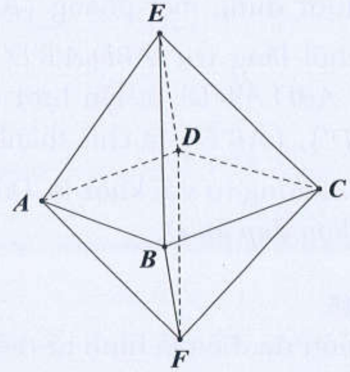
Câu 35.

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện. Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 36.

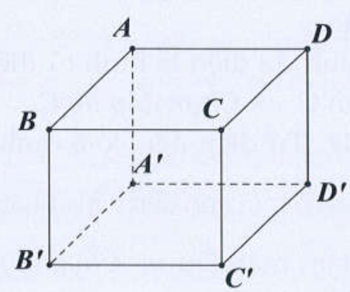
Gọi bát diện đều $ABCDEF$, có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 37.

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là hình lập phương, gọi $ABCD.A'B'C'D'$, có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng trung trực của 3 cạnh AB, AD, AA' và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng đi qua hai cạnh đối diện.



$\Rightarrow$ *Chọn đáp án A.*

Câu 38.

Trong trường hợp $\Delta \subset (P)$ thì ảnh của Δ qua phép đối xứng theo giả thiết là Δ. Giả thiết câu B, trong trường hợp $\Delta \perp (P)$ thì ảnh của Δ qua phép đối xứng theo giả thiết là Δ và giả thiết câu C thì trong trường hợp $\Delta // (P)$ thì không thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 39.

Dựa vào khái niệm hình đa diện và mối quan hệ giữa số cạnh, số mặt ta có kết quả.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 40.

Ta thấy các đáp án **A, B, D** đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện lồi.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 41.

Ta thấy các đáp án **A, B, D** đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 42.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:

+ 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
+ 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

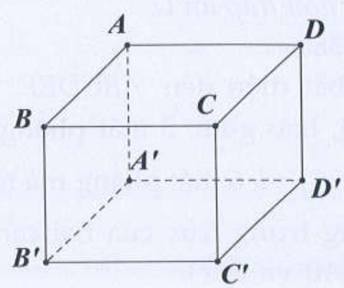
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 43.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt là các tam giác đều cạnh $2a$ nên diện tích xung quanh là $S_{xq} = 4.\dfrac{\sqrt{3}(2a)^2}{4} = 4\sqrt{3}a^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 44.

Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$. Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$, $(AB'D)$ ta chia thành 3 khối tứ diện bằng nhau. Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 45.

Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án D $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 46.

Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án C $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 47. Tứ diện đều có 6 cạnh nên có 6 trung điểm. Nối các điểm này ta được hình đa diện có các cạnh đều bằng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$ độ dài cạnh tứ diện đều. Vậy đa diện là hình tám mặt đều $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 48.

Phát biểu đúng (Đ).

Tứ diện đều có 4 mặt nên có 4 tâm các mặt suy ra có 6 cạnh nối các điểm này. Nối các tâm ta được các cạnh với độ dài bằng nhau và bằng $\frac{1}{3}$ độ dài cạnh tứ diện đều.

Câu 49.

*Lập luận tương tự câu 47, 48. **Chọn đáp án B.***

Câu 50.

Gọi C là số cạnh của đa diện. Do mỗi mặt của khối đa diện là các tam giác nên ta có $2C = 3n$. Vậy n là số chẵn $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 51.

Gọi C là số cạnh của đa diện. Do mỗi mặt của khối đa diện là các ngũ giác nên ta có $2C = 5n$. Vậy n là số chia hết cho 5 $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 52.

Kiểm tra thấy các đáp án A, B, C không thỏa mãn giả thiết đề bài (chú ý yếu tố khi và chỉ khi tức là bao gồm tất cả các trường hợp xảy ra) $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 53.

Tồn tại hai mặt phẳng thỏa yêu cầu là các mặt phẳng chứa các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng $(d, d') \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 54.

Hai đường thẳng phân biệt là hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau. Trong trường hợp hai đường thẳng song thì tồn tại một mặt phẳng thỏa yêu cầu, đó là mặt phẳng vuông góc với (d, d') và cách đều hai đường thẳng. Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau, như *câu 53*, có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 55.

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:

+ 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
+ Mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 56.

Ta có hai hệ thức tương ứng thỏa giả thiết $OA = 2OB$ là $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

Vậy có hai phép vị tự $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}, V_{\left(O;-\frac{1}{2}\right)}$ biến điểm A thành điểm B.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 57.

+ Trong trường hợp O, d, d' đồng phẳng thì tồn tại duy nhất phép vị tự tâm O biến d thành d'.
+ Trong trường hợp $O \notin (d, d')$ thì không tồn tại phép vị tự tâm O biến d thành d'

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 58.

Hình tứ diện có 4 đỉnh và 4 mặt $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 59.

Đáy là $n-$giác nên đáy có n đỉnh. Ta nối đỉnh của khối chóp với n đỉnh của đa giác đáy thì khối chóp có $n+1$ mặt. Do khối chóp có $n+1$ đỉnh nên đáp án đúng là D.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 60.

Do phép vị tự tâm I bất kì, biến A thành A' thì I, A, A' thẳng hàng. Do đó khi ta chọn 2 điểm thuộc mặt phẳng đi qua tâm thì phép vị tự biến mặt phẳng chính nó.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

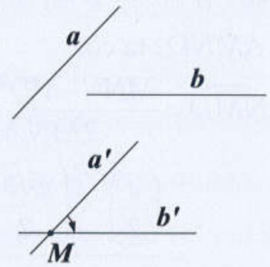
PHẦN 2: GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

VẤN ĐỀ 1 | GÓC TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

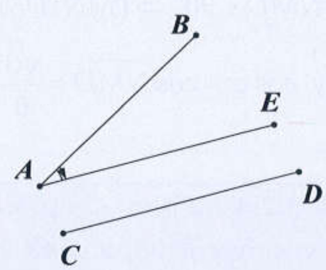
+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0^0.
+ Nếu a và b cắt nhau thì góc giữa chúng là góc nhỏ nhất trong các góc được tạo bởi hai đường thẳng.
+ Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.



Tức là: $\begin{cases} a \,//\, a' \\ b \,//\, b' \end{cases} \Rightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(a',b')}$.

Chú ý:

* $0^0 \le \widehat{(a,b)} \le 90^0$.
* Để xác định góc giữa hai đường thẳng, ta có thể lấy một điểm (thuộc một trong hai đường thẳng đó) từ đó kẻ đường thẳng song song với đường còn lại.



Ví dụ: Để tính $\widehat{(AB,CD)}$. Ta kẻ $AE \,//\, CD$.

Khi đó: $\widehat{(AB,CD)} = \widehat{(AB,AE)} = \widehat{BAE}$.

* Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $\widehat{(a,b)} = \left[\begin{array}{ll} \widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)} = \alpha & khi\ \ \alpha \le 90^0 \\ 180^0 - \alpha & khi\ \ \alpha > 90^0 \end{array}\right.$.

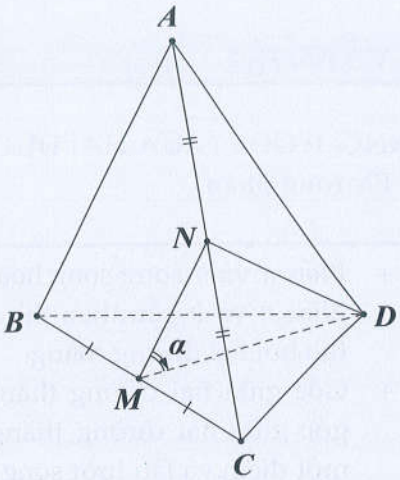
Tức là: $\cos\widehat{(a,b)} = \left|\cos\widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}\right| = \dfrac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} MN // AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}.$$

Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow MD = ND = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $MN // AB \Rightarrow \alpha = \left(\widehat{AB, DM}\right) = \left(\widehat{MN, DM}\right)$.

Xét ΔMND, ta có:

$$\cos\widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

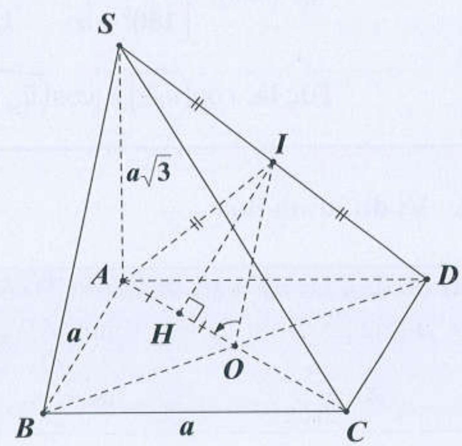
$\Rightarrow \widehat{NMD} < 90^0 \Rightarrow \left(\widehat{MN, DM}\right) = \widehat{NMD}$.

Vậy $\cos\alpha = \cos\widehat{NMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow \begin{cases} OI // SB \\ OI = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}.$$

Vì $OI // SB \Rightarrow \left(\widehat{SB, AC}\right) = \left(\widehat{OI, AC}\right) = \widehat{AOI}$.

Ta có: $AI = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$.

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại I.

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$

Và $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔOHI, ta có: $\cos\widehat{HOI} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{SB, AC}\right) = \cos\widehat{HOI} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Chú ý: Để tính $\cos\widehat{AOI}$ ta có thể tính cách khác như sau:

$$\cos\widehat{AOI} = \frac{OA^2 + OI^2 - AI^2}{2OA.OI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 - a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$; $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ và $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

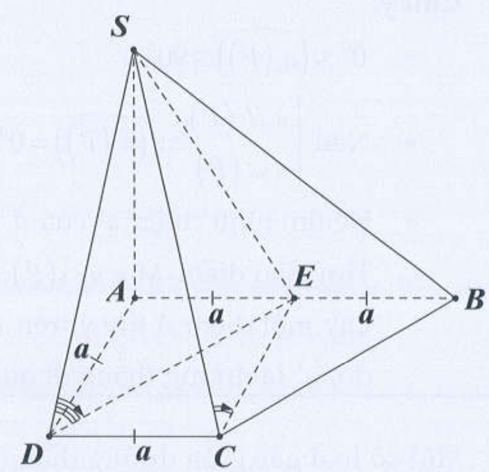
a) Góc giữa đường thẳng SB và DC bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

b) Gọi α là góc giữa SD và BC. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{28}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{28}$.

Lời giải:



a) Vì $DC \,//\, AB$

$\Rightarrow \left(\widehat{SB, DC}\right) = \left(\widehat{SB, AB}\right) = \widehat{SBA}$.

(vì ΔSAB vuông tại $A \Rightarrow \widehat{SBA} < 90^0$).

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^0.$$

Vậy $\left(\widehat{SB, DC}\right) = \widehat{SBA} = 30^0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

b) Gọi E là trung điểm của AB.

Khi đó, $BCDE$ là hình bình hành

$\Rightarrow DE \,//\, BC \Rightarrow \left(\widehat{SD, BC}\right) = \left(\widehat{SD, DE}\right) = \alpha$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} SE^2 = SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \\ DE^2 = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SE = SD = a\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}. \\ DE = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác SDE, ta được:

$$\cos\widehat{SDE} = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD.DE} = \frac{2a^2}{2.a\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{14}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow \widehat{SDE} < 90^0.$$

Vậy $\left(\widehat{SD,BC}\right)=\left(\widehat{SD,DE}\right)=\widehat{SDE}=\alpha.$

$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\widehat{SDE}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

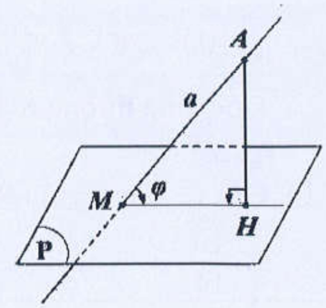
1. Phương pháp

\+ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Tức là: $a\perp(P)\Rightarrow\left(\widehat{a,(P)}\right)=90^0$.

\+ Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Tức là: Nếu $a\not\perp(P)$ và a' là hình chiếu của a trên (P) thì $\left(\widehat{a,(P)}\right)=\left(\widehat{a,a'}\right)=\varphi$.



Chú ý:

* $0^0\le\left(\widehat{a,(P)}\right)\le 90^0$.

* Nếu $\left[\begin{array}{l}a\,//\,(P)\\ a\subset(P)\end{array}\right.\Rightarrow\left(\widehat{a,(P)}\right)=0^0$.

* Để tìm hình chiếu a' của a trên (P) ta có thể làm như sau:

Tìm giao điểm $M=a\cap(P)$.

Lấy một điểm A tùy ý trên a và xác định hình chiếu H của A trên (P). Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M.

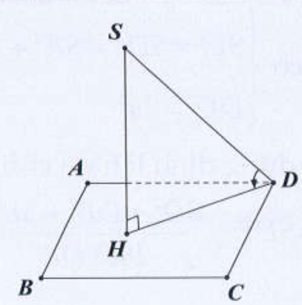
2. Một số loại góc giữa đường thẳng và mặt phẳng thường gặp đối với hình chóp

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$

$\Rightarrow HD$ là hình chiếu vuông góc của SD trên $(ABCD)$

Vậy $\boxed{\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SD,HD}\right)=\widehat{SDH}}$.



Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

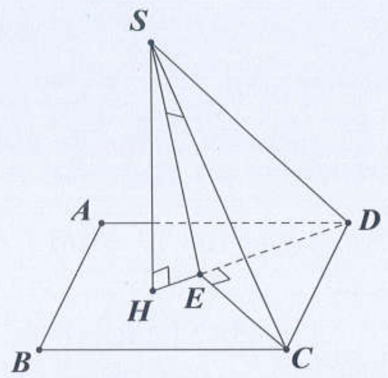
Dựng $CE \perp HD \quad (E \in HD)$.

Vì $\begin{cases} CE \perp HD \\ CE \perp SH \end{cases} \Rightarrow CF \perp (SDH)$.

$\Rightarrow E$ là hình chiếu vuông góc của C trên (SHD)

$\Rightarrow$ SE là hình chiếu vuông góc của SC trên (SHD).

Vậy $\boxed{\widehat{(SC,(SHD))} = \widehat{(SC,SE)} = \widehat{CSE}}$.



Góc giữa đường cao và mặt bên

Dựng $HE \perp CD \quad (E \in CD)$

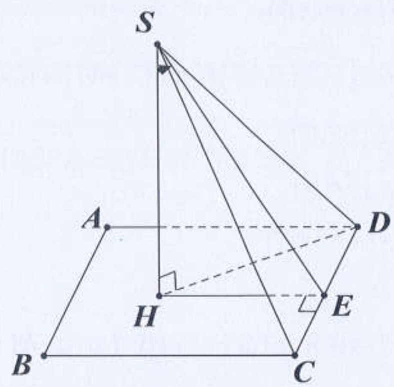
Vì $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE)$.

$\Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$

Mà $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

$\Rightarrow SE$ là hình chiếu vuông góc của SH trên (SAD).

Vậy $\boxed{\widehat{(SH,(SAD))} = \widehat{(SH,SE)} = \widehat{HSE}}$.



3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$, khi đó số đo góc α bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

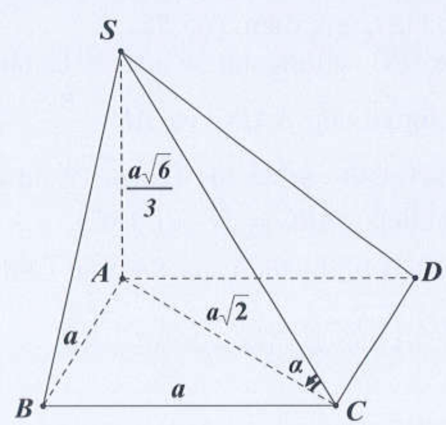
Do đó: $\alpha = \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$.

(vì ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{SCA} < 90^0$).

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA} = 30^0.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

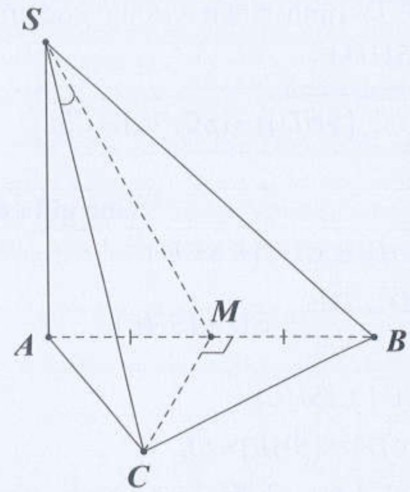


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB), khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau

A. $\frac{\sqrt{3}}{17}$. **B.** $\frac{\sqrt{51}}{17}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{17}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{17}$.

Lời giải:

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow CM \perp AB$.



Vì $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \left(do \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ CM \subset (ABC) \end{cases} \right) \end{cases}$

$\Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow SM$ là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB).

Khi đó: $\alpha = \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SM)} = \widehat{CSM}$.

(vì $\begin{cases} CM \perp (SAB) \\ SM \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp SM \Rightarrow \Delta SCM$ vuông tại $S \Rightarrow \widehat{CSM} < 90^0$).

Xét ΔSCM vuông tại S, ta có: $\tan\widehat{CSM} = \frac{CM}{SM} = \frac{CM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{51}}{17}$.

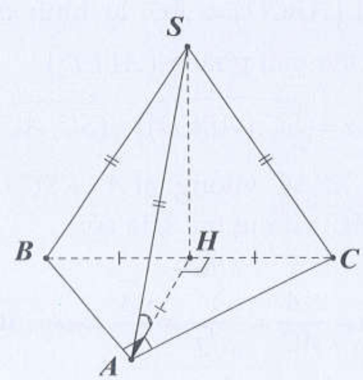
Vậy $\tan\alpha = \tan\widehat{CSM} = \frac{\sqrt{51}}{17} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $BC = a$ và $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.



Vì ΔABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}$.

(vì ΔSHA vuông tại H nên $\widehat{SAH} < 90^0$).

Xét ΔSHA vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAH} = 30^0$.

Vậy $\widehat{\left(SA,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SAH} = 30^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

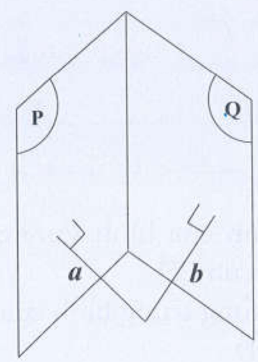
DẠNG 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1: ***Theo định nghĩa***

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((P),(Q)\right)} = \widehat{(a,b)}.$$

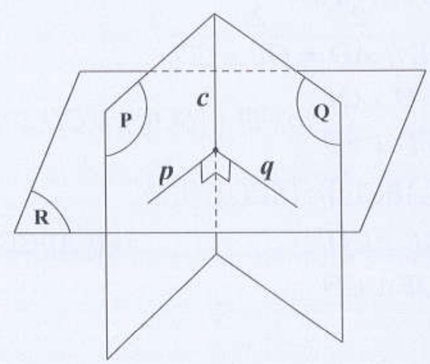


Cách 2: Khi xác định được $(P) \cap (Q) = c$ thì ta làm như sau:

+ *Bước 1:* Tìm mặt phẳng $(R) \perp c$.

+ *Bước 2:* Tìm $\begin{cases} p = (R) \cap (P) \\ q = (R) \cap (Q) \end{cases}$

Khi đó: $\widehat{\left((P),(Q)\right)} = \widehat{(p,q)}$.



Đặc biệt: Nếu xác định được 2 đường thẳng p,q sao cho: $\begin{cases} (P) \supset p \perp c \\ (Q) \supset q \perp c \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((P),(Q)\right)} = \widehat{(p,q)}$.

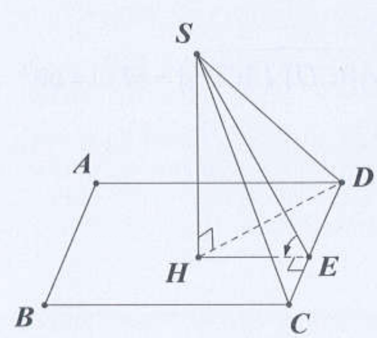
Ví dụ: *Góc giữa mặt bên và mặt đáy.*

Dựng $HE \perp CD \quad (E \in CD)$

Vì $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHD) \Rightarrow CD \perp SE.$

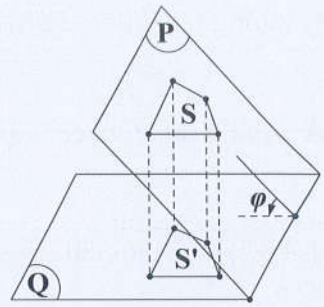
Vì $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ CD \perp HE \subset (ABCD) \\ CD \perp SE \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{\left((SCD),(ABCD)\right)} = \widehat{(SE,HE)} = \widehat{SEH}}.$



Cách 3: *Theo định lí về hình chiếu*

$$S' = S.\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{S'}{S}}$$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy là

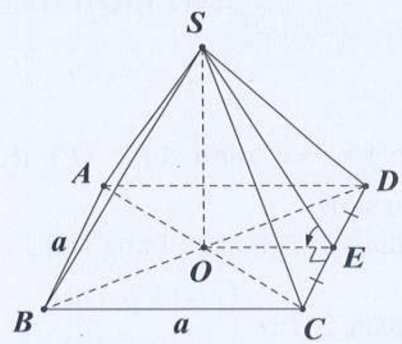
A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm của CD.

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔACD

$\Rightarrow \begin{cases} OE \,//\, AD \\ OE = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \end{cases}$.



Vì $OE \,//\, AD \Rightarrow OE \perp CD$.

Vì $\begin{cases} CD \perp OE \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow CD \perp SE$.

Vì $\begin{cases} (ABCD) \cap (SCD) = CD \\ SE \perp CD \\ OE \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABCD),(SCD))} = \widehat{(SE,OE)} = \widehat{SEO}$.

Xét ΔSEO vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = 60^0$.

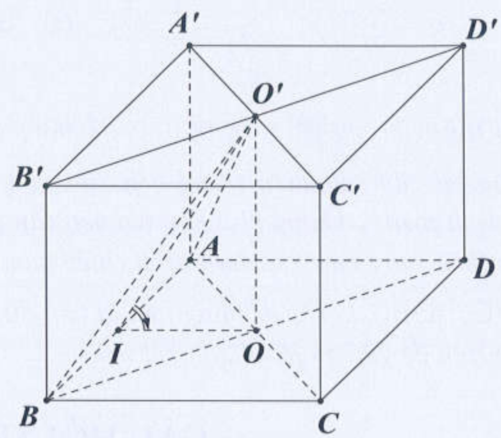
Vậy $\widehat{((ABCD),(SCD))} = \widehat{SEO} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = 2$. **C.** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.



Vì $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OIO') \Rightarrow AB \perp O'I.$

Vì $\begin{cases} (O'AB) \cap (ABCD) = AB \\ OI \perp AB \\ O'I \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((O'AB),(ABCD))} = (OI, O'I) = \widehat{O'IO} = \alpha.$

Xét $\Delta O'OI$ vuông tại I, ta có:

$\tan\alpha = \tan\widehat{O'IO} = \frac{OO'}{OI} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$

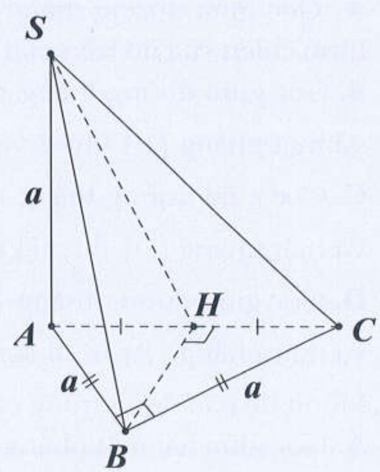
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA = BC = a$; SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc α giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow BH \perp AC$.



Vì $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \left(do \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BH \subset (ABC) \end{cases} \right) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow \Delta SHC$ là hình chiếu của ΔSBC lên $(SAC) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}}$.

+ Ta có: $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta SHC} = \frac{1}{2}SA.HC = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

+ Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ \left(do\ SA \perp (ABC)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Khi đó: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SB.BC = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2+a^2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Bình luận: *Trong bài toán trên, ta dễ dàng xác định được giao tuyến* $SC = (SAC) \cap (SBC)$ *nhưng lại gặp khó khăn trong việc tìm một mặt phẳng vuông góc với SC, mất nhiều thời gian tính toán,... không phù hợp với yêu cầu tốc độ của hình thức thi trắc nghiệm. Đồng thời nhận thấy rằng việc xác định hình chiếu của B lên* (SAC) *và tính diện tích của hai tam giác* ΔSHC ; ΔSBC *là khá dễ dàng nên ta vận dụng cách 3 trong nội dung phương pháp đã trình bày ở trên để giải quyết nhanh bài toán.*

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM
"VẤN ĐỀ 1: GÓC TRONG KHÔNG GIAN"

Câu 1. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

B. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c.

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

Câu 2. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song hoặc trùng nhau.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Câu 3. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi (Q) song song hoặc trùng với (R).

C. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) thì (Q) song song với (R).

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\widehat{(MN,SC)}$ bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng 90^0.

B. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD).

C. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) lớn hơn góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD).

D. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng tích của $\sqrt{2}$ với góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD).

Câu 7. Cho hình chóp ngũ giác đều $S.ABCDE$. Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là

A. 36^0. **B.** 54^0. **C.** 72^0. **D.** 90^0.

Câu 8. Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDE$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy và $SO=a$. Góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo nhỏ nhất là

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 9. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (P), đoạn vuông góc $SH=1$ và các đoạn xiên $SA=2$, $SB=3$ và $SC=4$. Gọi α, β γ lần lượt là góc tạo bởi SA, SB, SC và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha < 45^0$. **B.** $\beta > 45^0$. **C.** $\beta < \gamma$. **D.** $\gamma > 60^0$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACD}$.

B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Nếu góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45^0 thì độ dài đoạn SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = a\sqrt{2}$. **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

a) Góc giữa SC và $(ABCD)$ có số đo bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

b) Góc α giữa SB và (SAC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{14}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{14}$.

c) Góc β giữa AC và (SBC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết $SB = a$, khi đó số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và $mp(SAB)$ là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\tan\alpha = 1$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$ là φ, khi đó $\tan\varphi$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = 1$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{3}$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SAB) \perp (ABC)$.

B. $(SAB) \perp (SAC)$.

C. Vẽ $AH \perp BC$, $(H \in BC) \Rightarrow$ góc $\widehat{AHS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{ACB}$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$.

B. $(BCD) \perp (AIB)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

D. $(ACD) \perp (AIB)$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. Góc $\widehat{SBA}$.

B. Góc $\widehat{SCA}$.

C. Góc $\widehat{SCB}$.

D. Góc $\widehat{SIA}$ với I là trung điểm của BC.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

D. $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 22. Cosin của góc giữa hai mặt của tứ diện đều bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Số đo của góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 75^0.

Câu 24. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 75^0.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 26. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Khi đó, độ dài đường cao SH bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Biết $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn nội tiếp đáy $ABCD$ có bán kính bằng a. Góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 75^0.

Câu 28. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đáy ABC là tam giác vuông.

B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc với nhau.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45^0.

D. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Nếu góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0 thì góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. 60^0. B. 30^0. C. $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$. D. 45^0.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, $A'D'$. Góc giữa MP và $C'N$ bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

Câu 31. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$ và SA vuông góc với đáy. Để thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $a^3\sqrt{3}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60^0. B. 30^0. C. 45^0. D. Đáp án khác.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 72cm$, $CA = 58cm$, $BC = 50cm$, $CD = 40cm$ và $CD \perp (ABC)$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** Đáp án khác.

Câu 33. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ góc $\widehat{BAC} = 120^0$, $BB' = a$ và I là trung điểm của CC'. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 34. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $A'A = A'B = A'C = m$. Để góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60^0 thì giá trị của m là

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là tâm của đáy và M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Nếu góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 thì độ dài đoạn MN là

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

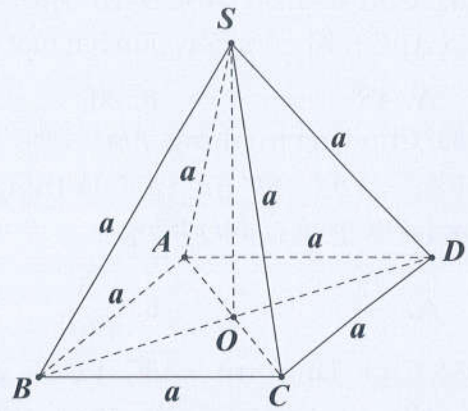
Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	C	B	B	D	D	B	D
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	A	C	B	C, B, D	B	C
Câu	15	16	17	18	19	20	21
Đáp án	A	B	A	D	C	A	C
Câu	22	23	24	25	26	27	28
Đáp án	D	C	B	B	A	C	D
Câu	29	30	31	32	33	34	35
Đáp án	A	D	A	A	B	C	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 4. Trong tứ diện đều thì hai cạnh đối diện luôn vuông góc với nhau.

Do đó $AB \perp CD \Rightarrow \left(\widehat{AB, CD}\right) = 90^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5.



Vì $MN // SA \Rightarrow \widehat{(MN,SC)} = \widehat{(SA,SC)}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Vì $SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = AC^2$

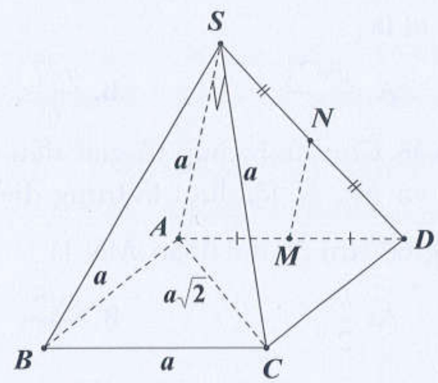
$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

$\Rightarrow SA \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA,SC)} = 90^0$.

Vậy $\widehat{(MN,SC)} = \widehat{(SA,SC)} = 90^0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6.



+ A sai, vì ΔSBD và ΔSAC vuông tại S nên nếu $SB \perp (SCD)$ thì $SA \perp (SCD)$ $\Rightarrow SA \equiv SB$ (vô lí).

+ B đúng, vì $\sin\widehat{(SB,(SCD))} = \dfrac{d(B,(SCD))}{SB}$

$= \dfrac{d(B,(SCD))}{BC} = \sin\widehat{(BC,(SCD))}$.

$\Rightarrow \widehat{(SB,(SCD))} = \widehat{(BC,(SCD))}$.

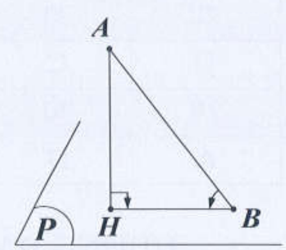
+ C sai, vì $AB // (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(B,(SCD))$

$\Rightarrow \sin\widehat{(SA,(SCD))} = \dfrac{d(A,(SCD))}{SA} = \dfrac{d(B,(SCD))}{BC} = \sin\widehat{(BC,(SCD))}$

$\Rightarrow \widehat{(SA,(SCD))} = \widehat{(BC,(SCD))}$.

+ D sai, vì $\sin\widehat{(SA,(SCD))} = \sqrt{2}\sin\widehat{(SO,(SCD))}$ không suy ra được $\widehat{(SA,(SCD))} = \sqrt{2}\widehat{(SO,(SCD))}$.

Chú ý: Để giải quyết nhanh bài toán trên, tôi đã sử dụng một kết quả sau (*mối liên hệ giữa góc và khoảng cách*):



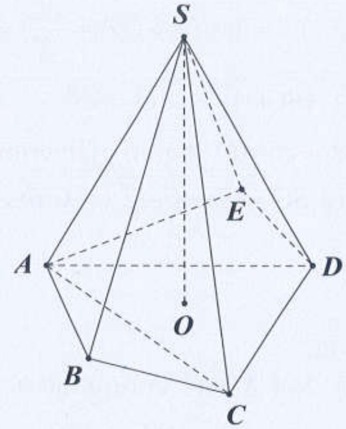
Giả sử: $AH \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} d(A,(P)) = AH \\ \widehat{(AB,(P))} = \widehat{ABH} \end{cases}$.

Trong ΔAHB vuông, ta có:

$$\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \boxed{\sin\widehat{(AB,(P))} = \frac{d(A,(P))}{AB}}$$

Câu 7.

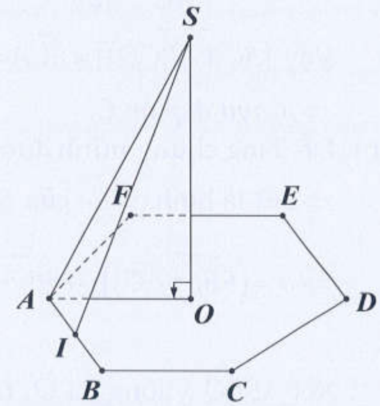
+ Ta đã biết góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^0, nên nếu có một cạnh đáy vuông góc với SA thì góc lớn nhất là 90^0.
+ Vì $SC = SD$ và $AC = AD$ (hai dây chắn hai cung bằng nhau trong đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều $ABCDE$) nên $SA \perp CD$.



Vậy góc giữa cạnh bên SA và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là $90^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 8.

Vì $\begin{cases} CD \,//\, AF \\ ED \,//\, AB \\ EF \,//\, AO \end{cases}$ nên ta chỉ tính và so sánh các góc $\widehat{SAB}$, $\widehat{SAF}$, $\widehat{SAO}$.



Mà $\widehat{SAB} = \widehat{SAF}$ nên ta chỉ cần so sánh $\widehat{SAB}$, $\widehat{SAO}$.

Ta có $\sin \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA}$.

Kẻ $SI \perp AB$, $(I \in AB)$, khi đó $\sin \widehat{SAB} = \dfrac{SI}{SA}$.

Vì $SO < SI \Rightarrow \sin \widehat{SAO} < \sin \widehat{SAB} \Rightarrow \widehat{SAO} < \widehat{SAB}$.

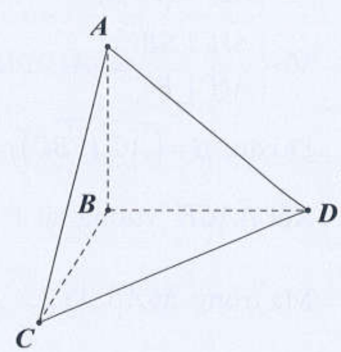
Vậy $\widehat{SAO}$ nhỏ nhất và bằng 45^0 vì ΔSAO vuông cân $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9.

$\sin\alpha = \dfrac{1}{2} > \sin\beta = \dfrac{1}{3} > \sin\gamma = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 30^0 > \beta > \gamma \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

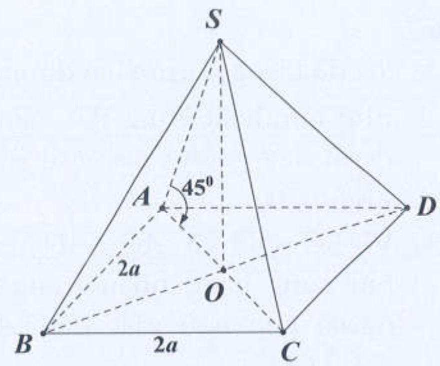
Câu 10.

+ A sai, vì $\widehat{\left(AC,(BCD)\right)} = \widehat{ACB}$.
+ B sai, vì $\widehat{\left(AD,(ABC)\right)} = \widehat{BAD}$.
+ D sai, vì $\widehat{\left(CD,(ABD)\right)} = \widehat{BDC}$.



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11.



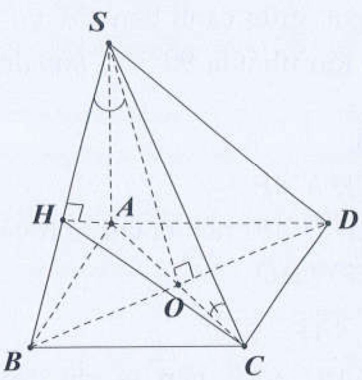
Ta có $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$.

$\widehat{\left(SA,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SAO} = 45^0$.

Khi đó, ΔSAO là tam giác vuông cân tại O.

Suy ra $SO = OA = a\sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12.



a) Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.

Vậy $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SCA} = 60^0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

b) Dễ dàng chứng minh được $BO \perp \left(SAC\right)$

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SB lên $\left(SAC\right)$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{\left(SB,\left(SAC\right)\right)} = \widehat{\left(SB,SO\right)} = \widehat{BSO}$.

Xét ΔSBO vuông tại O, ta có: $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Vậy $\sin\alpha = \sin\widehat{BSO} = \dfrac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

c) Trong $\left(SAB\right)$, kẻ $AH \perp SB$, $\left(H \in SB\right)$.

Vì $\begin{cases} BC \perp \left(SAB\right) \\ AH \subset \left(SAB\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Vì $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của AC lên $\left(SBC\right)$.

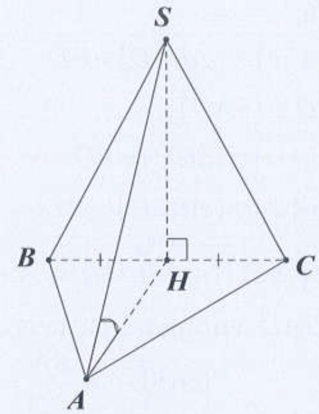
Do đó: $\beta = \widehat{\left(AC,\left(SBC\right)\right)} = \widehat{\left(AC,HC\right)} = \widehat{ACH}$.

Xét ΔACH vuông tại H, ta có: $\sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC}$.

Mà trong ΔSAB, ta có: $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\sin\beta = \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 13.



Gọi H là trung điểm của BC

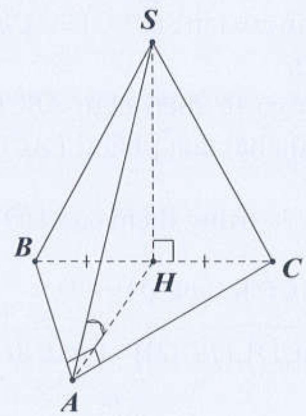
$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên $(ABC) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}$.

Vì AH, SH lần lượt là đường cao trong hai tam giác đều ABC và SBC có cạnh bằng a nên $AH = SH$

$\Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{SAH} = 45^0$.

Vậy $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = 45^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên (ABC)

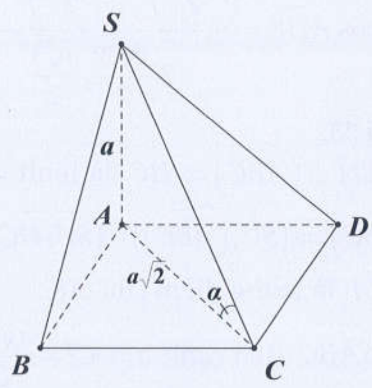
$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}$.

Ta có: $\begin{cases} SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

Xét ΔSAH vuông tại H, ta có: $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^0$.

Vậy $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 15.



Tương tự câu 12a, ta có:

$$\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA}.$$

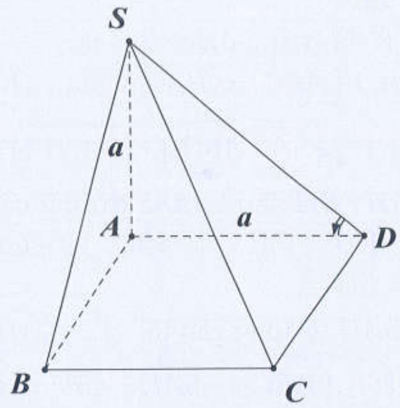
Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\tan\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 16.



Vì $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ CD\perp(SAD)\\ (SAD)\cap(SCD)=SD\\ (SAD)\cap(ABCD)=AD\end{cases}$

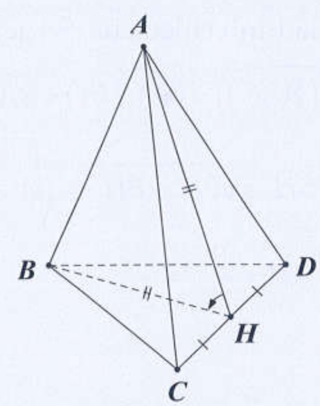
$\Rightarrow \varphi=\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{(SD,AD)}=\widehat{SDA}.$

Xét ΔSAD vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SDA}=\frac{SA}{AD}=\frac{a}{a}=1.$$

Vậy $\tan\varphi=\tan\widehat{SDA}=1\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 22.



Giả sử có tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Cần tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Gọi H là trung điểm của $CD\Rightarrow\begin{cases}AH\perp CD\\ SH\perp CD\end{cases}$

Mà $(ACD)\cap(BCD)=CD$

$\Rightarrow\widehat{((ACD),(BCD))}=\widehat{(AH,BH)}=\widehat{AHB}.$

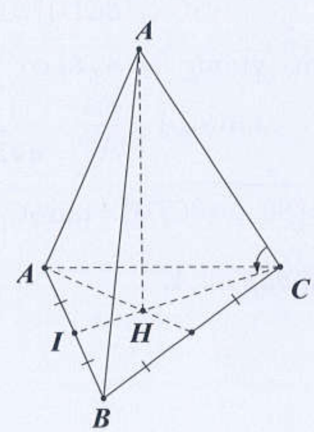
Ta có: $AH=BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Áp dụng định lí cosin trong ΔABH, ta được:

$$\cos\widehat{AHB}=\frac{AH^2+BH^2-AB^2}{2AH.BH}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{AHB}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 23.



Vì $SH\perp(ABC)\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên $(ABC)\Rightarrow\widehat{(SC,(ABC))}=\widehat{(SC,HC)}=\widehat{SCH}.$

Gọi I là trung điểm của AB.

Vì ΔABC đều cạnh $a\Rightarrow CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

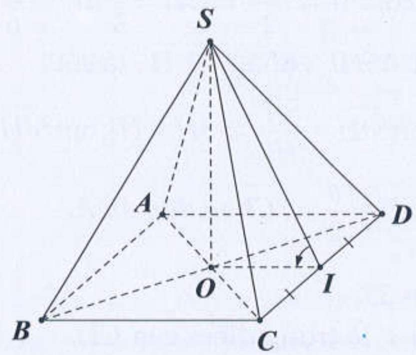
$\Rightarrow CH=\dfrac{2}{3}CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Xét ΔSCH vuông tại H, ta có:

$$\tan\widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^0.$$

Vậy $\widehat{\left(SC,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SCH} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.



Giả sử có hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} OI \perp CD \\ OI = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp SI.$

Vì $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((SCD),(ABCD)\right)} = \widehat{(SI,OI)} = \widehat{SIO}.$

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SIO} = 45^0.$

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{\left((SCD),(ABCD)\right)} = \widehat{SIO} = 45^0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 25.

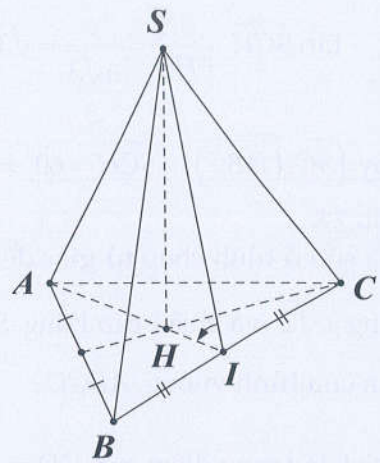
Tương tự câu 24, góc giữa một mặt bên và một mặt đáy là $\widehat{\left((SCD),(ABCD)\right)} = \widehat{SIO}.$

Ta có: $OI = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}.$

Vì ΔSCD đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{SIO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 26.



Gọi I là trung điểm của BC.

Khi đó, $\widehat{\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(SI,AI\right)}=\widehat{SIA}=60^0$.

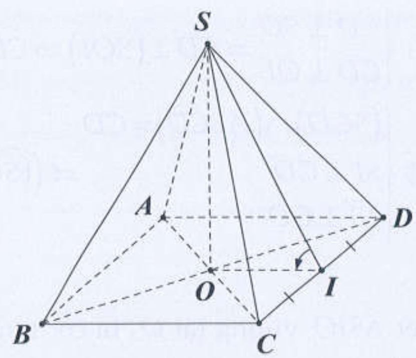
Ta có: $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HI=\dfrac{1}{3}AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét ΔSHI vuông tại H, ta có:

$$\tan\widehat{SIH}=\frac{SH}{HI}\Rightarrow SH=HI.\tan\widehat{SIH}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60^0$$

$\Rightarrow SH=\dfrac{a}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 27.



Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có: $\widehat{\left(\left(SCD\right),\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{\left(SI,OI\right)}=\widehat{SIO}$.

Đường tròn nội tiếp đáy $ABCD$ có bán kính bằng $a\Rightarrow OI=a$.

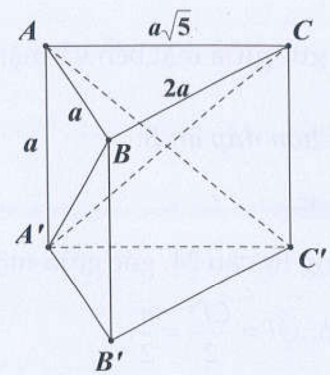
Xét ΔSIO vuông tại O, ta có:

$$\tan\widehat{SIO}=\frac{SO}{OI}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SIO}=60^0.$$

Vậy $\widehat{\left(\left(SCD\right),\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SIO}=60^0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 28.



+ $AB^2+BC^2=a^2+\left(2a\right)^2=5a^2=AC^2$

  $\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $B\Rightarrow$ A đúng.

+ ΔABC vuông tại $B\Rightarrow AB\perp BC$.

  Vì $\begin{cases}AB\perp BC\\ AB\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(BB'C'\right)$

  $\Rightarrow\left(AA'B'B\right)\perp\left(BB'C'\right)\Rightarrow$ B đúng.

+ Dễ dàng chứng minh được $BC\perp\left(AA'B'B\right)$

  $\Rightarrow BC\perp A'B$

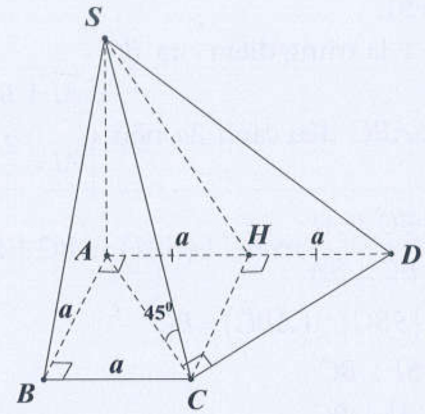
  Vì $\begin{cases}\left(ABC\right)\cap\left(A'BC\right)=BC\\ AB\perp BC\\ A'B\perp BC\end{cases}\Rightarrow\widehat{\left(\left(ABC\right),\left(A'BC\right)\right)}=\widehat{\left(AB,A'B\right)}=\widehat{ABA'}=45^0.$

  (vì $\Delta ABA'$ vuông cân tại A) $\Rightarrow$ C đúng.

+ Ta có $AC'=\sqrt{AA'^2+A'C'^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{5}\right)^2}=a\sqrt{6}\Rightarrow$ D sai.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 29.



Gọi H là trung điểm của AD.

$\Rightarrow ABCH$ là hình vuông $\Rightarrow CH \perp AD$

$\Rightarrow CH \perp (SAD)$

$\Rightarrow \Delta SHD$ là hình chiếu của ΔSCD lên (SAD).

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Khi đó: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta SHD}}{S_{\Delta SCD}}$.

Ta có: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,CA)} = \widehat{SCA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \begin{cases} SA = AC = a\sqrt{2} \\ SC = 2a \end{cases}$.

+ $S_{\Delta SHD} = \dfrac{1}{2}SA.HD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

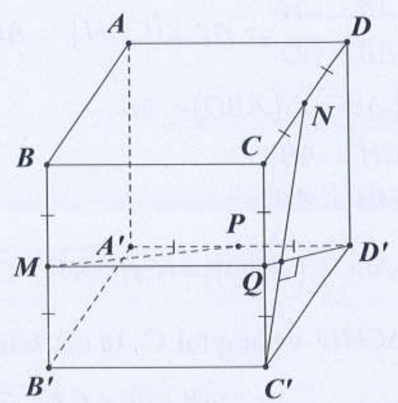
+ Ta có $AC = CD = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 + CD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$.

Vì $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Khi đó: $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}SC.CD = \dfrac{1}{2}.2a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta SHD}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{a^2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 30.



Gọi Q là trung điểm $CC' \Rightarrow MQ \parallel BC$.

Mà $BC \perp (CC'D'D) \Rightarrow MQ \perp (CC'D'D) \supset C'N$

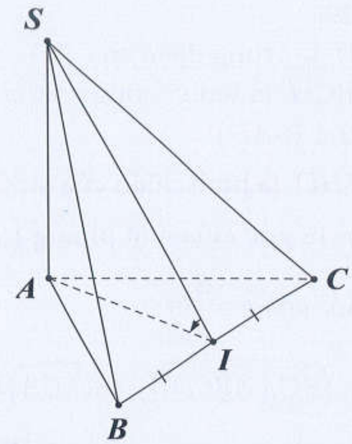
$\Rightarrow MQ \perp C'N$

Trong hình vuông $CC'D'D$, ta có: $C'N \perp D'Q$.

Vì $\begin{cases} C'N \perp MQ \\ C'N \perp D'Q \end{cases} \Rightarrow C'N \perp (MPD'Q) \Rightarrow C'N \perp MP$

Vậy $\widehat{(C'N, MP)} = 90^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 31.



Gọi I là trung điểm của BC

Vì ΔABC đều cạnh $2a$ nên $\begin{cases} AI \perp BC \\ AI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI.$

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI, AI)} = \widehat{SIA}.$

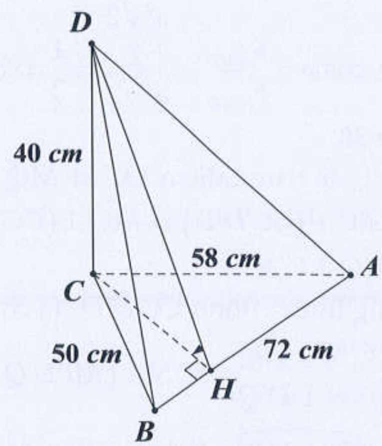
Xét ΔSAI vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} \Rightarrow SA = AI.\tan\widehat{SIA}.$

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.AI.\tan\widehat{SIA}.\dfrac{1}{2}AI.BC$

$$\Rightarrow \tan\widehat{SIA} = \frac{6V_{S.ABC}}{AI^2.BC} = \frac{6.a^3\sqrt{3}}{\left(a\sqrt{3}\right)^2.2a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^0.$$

Vậy $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SIA} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 32.



Trong (ABC), kẻ $CH \perp AB$, $(H \in AB)$.

Vì $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp DH$.

Vì $\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((ABC),(ABD))} = \widehat{(CH, DH)} = \widehat{CHD}.$

Xét ΔCHD vuông tại C, ta có: $\tan\widehat{CHD} = \dfrac{CD}{CH}.$

Ta có: $p = p_{\Delta ABC} = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \dfrac{72 + 50 + 58}{2} = 90.$

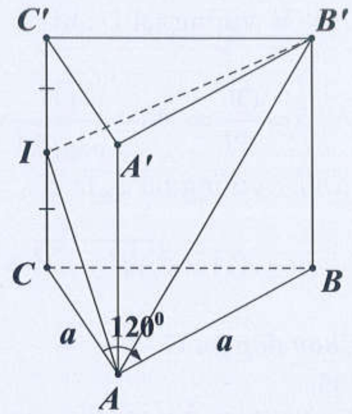
$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{90(90-72)(90-50)(90-58)} = 1440cm^2.$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}CH.AB \Rightarrow CH = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \dfrac{2.1440}{72} = 40cm.$

Do đó: $\tan\widehat{CHD} = \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{40}{40} = 1 \Rightarrow \widehat{CHD} = 45^0.$

Vậy $\widehat{((ABC),(ABD))} = \widehat{CHD} = 45^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 33.



Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta AB'I$ trên (ABC)

nên $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}$.

$+$ Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

$= \dfrac{1}{2}.a.a.\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$+$ $B'C'^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120^0 = 3a^2$.

Ta có: $\begin{cases} AB' = a\sqrt{2} \\ AI = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{13a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow AB'^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta AB'I$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}AB'.AI = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

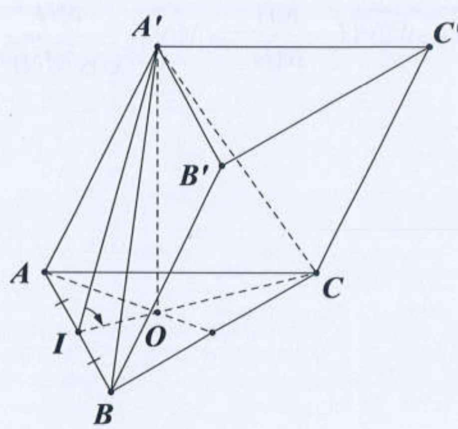
Câu 34.

Gọi O là trọng tâm của ΔABC đều $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà $A'A = A'B = A'C$

$\Rightarrow A'O \perp (ABC) \Rightarrow A'O \perp AB$

Gọi I là trung điểm của AB



$\Rightarrow \begin{cases} OI \perp AB \\ OI = \dfrac{1}{3}CI = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'OI) \Rightarrow AB \perp A'I.$

Vì $\begin{cases} (ABB'A') \cap (ABC) = AB \\ A'I \perp AB \\ OI \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((ABB'A'),(ABC))} = \widehat{(A'I, OI)} = \widehat{A'IO} = 60^0$.

Xét $\Delta A'OI$ vuông tại O, ta có:

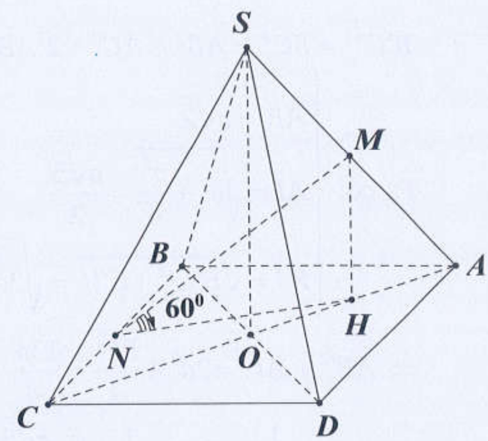
$$\cos\widehat{A'IO} = \frac{OI}{A'I} \Rightarrow A'I = \frac{OI}{\cos\widehat{SIA}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\Delta A'IA$ vuông tại I, ta có:

$$m = A'A = \sqrt{A'I^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 35.



Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ (1)

Gọi H là trung điểm của OA

$\Rightarrow MH \,//\, SO$ (2)

Vì (1) và (2) $\Rightarrow MH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow HN$ là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(MN,(ABCD))} = \widehat{(MN,NH)} = \widehat{MNH} = 60^0.$

Ta có: $CH = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}.a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$

Trong ΔCNH, ta có:

$$NH = \sqrt{CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos 45^0}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét ΔMNH vuông tại H, ta có:

$$\cos\widehat{MNH} = \frac{NH}{MN} \Rightarrow MN = \frac{NH}{\cos\widehat{MNH}} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

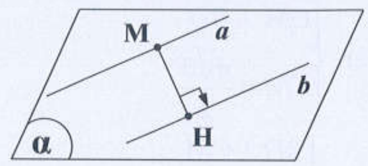
VẤN ĐỀ 2 | KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

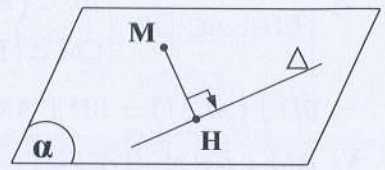
Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ.

$$\xrightarrow[(H\in\Delta)]{MH\perp\Delta}\boxed{d(M,\Delta)=MH}$$



Chú ý: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.*

$$\xrightarrow[M\in b]{a\,//\,b}\boxed{d(a,b)=d(M,a)=MH}$$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=3a$, $SB=a$, $SC=2a$. Khi đó, khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{8a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải:

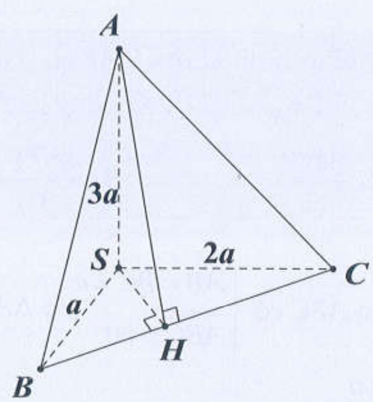
Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau nên $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.

Trong (SBC), kẻ $SH\perp BC$, $(H\in BC)$.

Vì $\begin{cases}BC\perp SH\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp AH$

$\Rightarrow d(A,BC)=AH=\sqrt{SA^2+SH^2}$.

Xét ΔSBC vuông tại S và có đường cao SH, ta có: $SH=\dfrac{SB.SC}{\sqrt{SB^2+SC^2}}=\dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Vậy $d(A,BC)=AH=\sqrt{SA^2+SH^2}=\sqrt{(3a)^2+\left(\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{7a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC\perp(BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD.

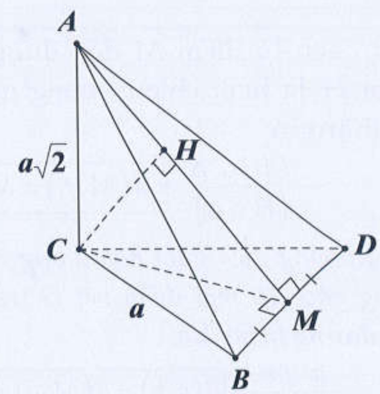
a) Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

b) Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Lời giải:



Vì ΔBCD đều cạnh a có đường trung tuyến CM nên $\begin{cases} CM \perp BD \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

a) Vì $\begin{cases} BD \perp CM \\ BD \perp AC \end{cases} \left(do \begin{cases} AC \perp (BCD) \\ CM \subset (BCD) \end{cases} \right)$

$\Rightarrow BD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp AM$.

Vì $AM \perp BD \Rightarrow d(A,BD) = AM$

$\Rightarrow d(A,BD) = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

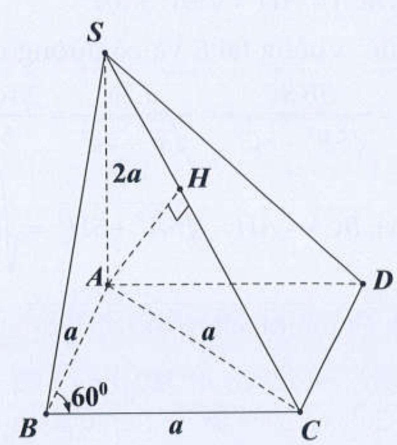
b) Trong (ACM), kẻ $CH \perp AM$, $(H \in AM)$.

Khi đó: $d(C,AM) = CH = \frac{AC.CM}{AM} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{11}}{2}} = a\sqrt{\frac{6}{11}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$ và $SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải:



Tam giác ABC có $\begin{cases} AB = BC = a \\ \widehat{ABC} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$\Rightarrow AC = a$

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SC$, $(H \in SC)$.

Khi đó: $d(A,SC) = AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$

$\Rightarrow d(A,SC) = \frac{2a.a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

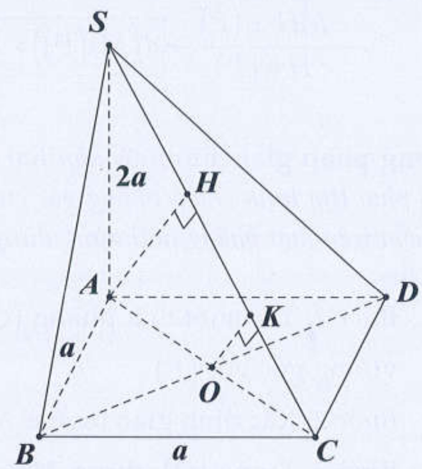
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải:

Trong (SAC), kẻ $AH\perp SC,\ (H\in SC)$ và $OK\perp SC,\ (K\in SC)$.



Khi đó: $d(O,SC)=OK$.

Trong (SAC), ta có $\begin{cases}AH\perp SC\\ OK\perp SC\end{cases}\Rightarrow AH\ //\ OK.$

Xét ΔAHC, có $\begin{cases}AH\ //\ OK\\ AO=OC\end{cases}\Rightarrow HK=KC$

$\Rightarrow OK$ là đường trung bình của ΔAHC

$\Rightarrow OK=\frac{AH}{2}=\frac{1}{2}.\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}$

$\Rightarrow d(O,SC)=OK=\frac{1}{2}.\frac{2a.a\sqrt{2}}{\sqrt{(2a)^2+(a\sqrt{2})^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khi đó, khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng

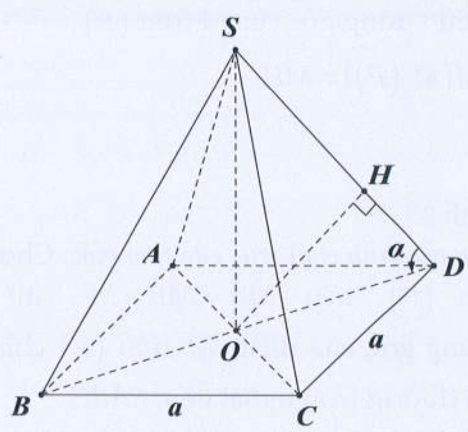
A. $a\sqrt{2}.\cot\alpha$. B. $a\sqrt{2}.\tan\alpha$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos\alpha$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha$.

Lời giải:

Giả sử, hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng a.

Trong (SBD), kẻ $OH\perp SD,\ (H\in SD)$.

Khi đó, khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên là $d(O,SD)=OH$.



Ta có:

$$OD=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{BC^2+CD^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì OD là hình chiếu của SD lên $(ABCD)$ nên

$\alpha=\widehat{(SD,(ABCD))}=\widehat{(SD,OD)}=\widehat{SDO}.$

Xét ΔOHD vuông tại H, ta có: $\sin\alpha=\frac{OH}{OD}\Rightarrow OH=OD.\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha.$

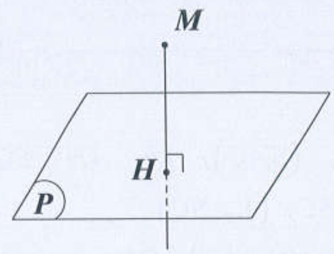
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

$$\xrightarrow[H\in(P)]{MH\perp(P)} \boxed{d\left(M,(P)\right)=MH}$$



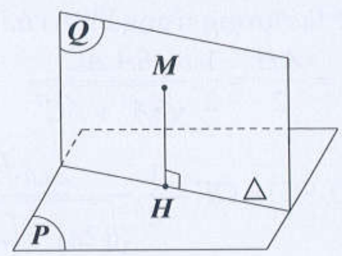
Phương pháp giải chung: *Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:*

Cách 1:

+ *Bước 1:* Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).
+ *Bước 2:* Xác định giao tuyến: $\Delta=(P)\cap(Q)$.
+ *Bước 3:* Trong (Q), dựng $MH\perp\Delta$, $(H\in\Delta)$.

Vì $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ \Delta=(P)\cap(Q)\\ (Q)\supset MH\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow MH\perp(P)$

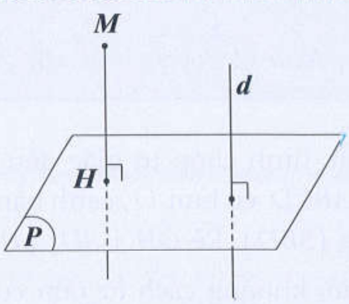
$\Rightarrow d\left(M,(P)\right)=MH$



Cách 2:

Nếu đã biết trước một đường thẳng $d\perp(P)$ thì ta sẽ dựng $Mx\,//\,d$, khi đó: $H=Mx\cap(P)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

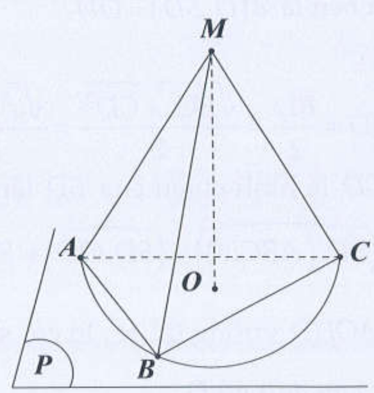
$\Rightarrow d\left(M,(P)\right)=MH$



Cách 3:

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho ΔABC nằm trên (P), nếu $MA=MB=MC$ thì hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) chính là tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

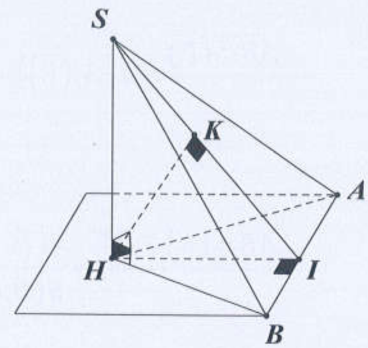
Khi đó: $MO\perp(P)\Rightarrow d\left(M,(P)\right)=MO$.



KHOẢNG CÁCH DỰNG TRỰC TIẾP

Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt bên (SAB).*

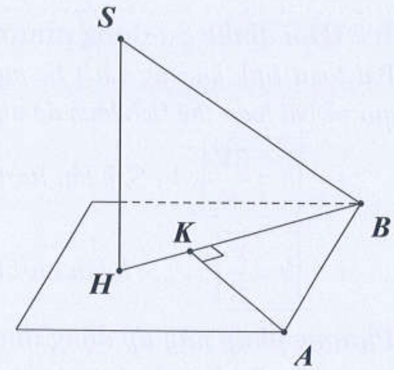


+ Kẻ $HI \perp AB,\ (I \in AB)$.
+ Kẻ $HK \perp SI,\ (K \in SI)$

Khi đó: $\boxed{d\left(H,(SAB)\right) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}}$.

Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng (chứa đường cao)

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).*

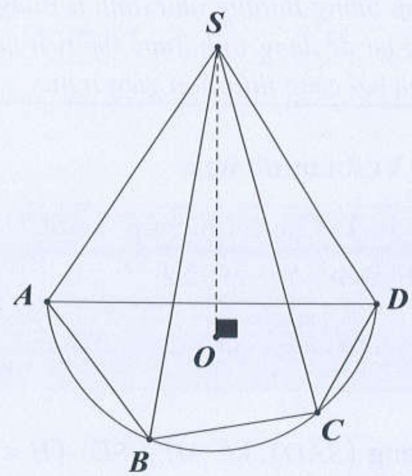


+ Kẻ $AK \perp HB$.
+ $\begin{cases} AK \perp HB \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHB)$

$\Rightarrow d\left(A,(SHB)\right) = AK.$

Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau

Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$ (đáy có thể là bốn đỉnh hoặc ba đỉnh). Khi đó nếu như O là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các đỉnh nằm trên mặt đáy thì SO là trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy hay nói cách khác: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d\left(S,(ABCD)\right) = SO$.



Chú ý:

Nếu đáy là:

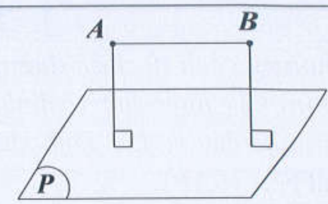
+ Tam giác đều, O là trọng tâm.
+ Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.
+ Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

TÍNH KHOẢNG CÁCH BẰNG CÁCH GIÁN TIẾP

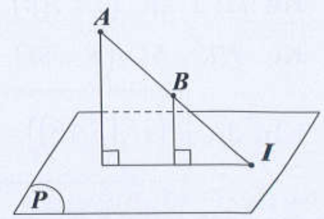
Giả sử ta muốn dựng trực tiếp khoảng cách từ điểm (P) tới mặt phẳng (P) mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm B ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới khi đó ta sẽ thực hiện tính khoảng cách gián tiếp như sau:

Cách 1 ***(Đổi điểm)*:** Tính thông qua tỉ số khoảng cách.

$$\xrightarrow{AB \cap (P)} d(A,(P)) = d(B,(P))$$



$$\xrightarrow{AB \cap (P) = \{I\}} \frac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \frac{AI}{BI}$$



Cách 2 ***(Đổi đỉnh)*:** Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp có thể qui về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính khoảng cách này dựa vào công thức:

\+ $\boxed{h = \dfrac{3V}{S}}$*: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.*

\+ $\boxed{h = \dfrac{V}{S}}$*: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ.*

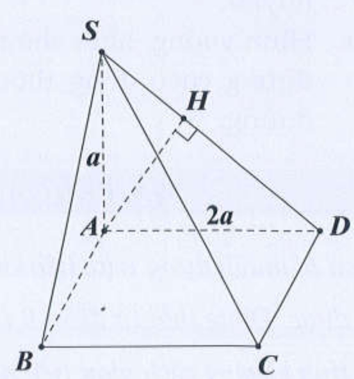
Phương pháp này áp dụng được trong trường hợp sau: *Giả sử có thể qui bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường là không tính được trực tiếp bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như định lí Pitago, công thức lượng giác,... Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy, chiều cao của nó sẽ được xác định bởi công thức đơn giản trên.*

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$; SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải:



Trong (SAD), kẻ $AH \perp SD$, $(H \in SD)$.

Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \xrightarrow{AH \subset (SAD)} CD \perp AH.$

Vì $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(A,(SCD)) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}}$

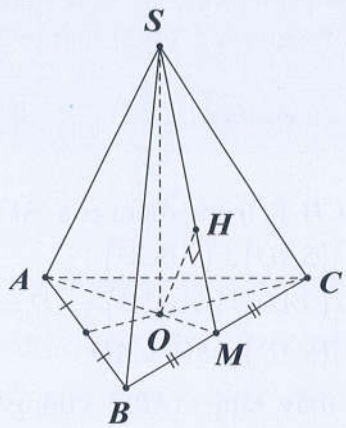
$\Rightarrow d(A,(SCD)) = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Lời giải:

Vì O là tâm của đáy của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ nên $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.



Gọi M là trung điểm của BC.

Vì ΔABC đều cạnh bằng $2a \Rightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Khi đó $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

Trong (SAM), kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$.

Vì $\begin{cases} (SAM) \perp (SBC) \\ (SAM) \cap (SBC) = SM \\ (SAM) \supset OH \perp SM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Xét ΔSOM vuông tại O có đường cao OH, ta có:

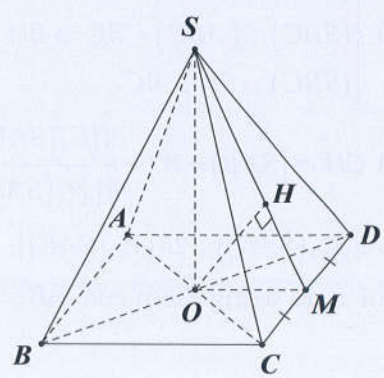
$$d(O,(SBC)) = OH = \frac{OS.OM}{\sqrt{OS^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = a\sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

Vì O là tâm của đáy của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$.



Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} OM \perp CD \\ OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$.

Trong (SOM), kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$.

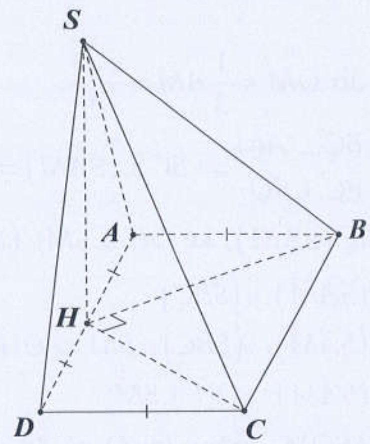
$\Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH = \frac{OS.OM}{\sqrt{OS^2 + OM^2}}$

Vậy $d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD=2a, AB=a$. SAD là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHB) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp AD$.

Vì $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\(SAD)\supset SH\perp AD\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Dễ thấy rằng ΔABH vuông cân tại A và và ΔCDH vuông cân tại D.

$\Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{CHD}=45^0\Rightarrow\widehat{BHC}=90^0\Rightarrow CH\perp HB$.

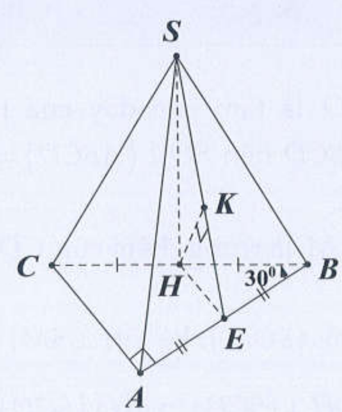
Vì $\begin{cases}CH\perp HB\\CH\perp SH\left(do\begin{cases}SH\perp(ABCD)\\CH\subset(ABCD)\end{cases}\right)\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SHB)$

Suy ra $d\left(C,(SHB)\right)=CH=\sqrt{CD^2+DH^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{26}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{26}$.

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của

Vì $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\\(SBC)\supset SH\perp BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Vì $CH\cap(SAB)=B\Rightarrow\dfrac{d\left(C,(SAB)\right)}{d\left(H,(SAB)\right)}=\dfrac{CB}{HB}=2$

$\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=2d\left(H,(SAB)\right)$.

Gọi E là trung điểm của $AB\Rightarrow HE\,//\,AC\Rightarrow HE\perp AB$.

Trong (SHE), kẻ $HK \perp SE,\ (K \in SE)$ (1)

Vì $\begin{cases} AB \perp HE \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \xrightarrow{HK \subset (SHE)} AB \perp HK$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HK$.

Ta có: $\begin{cases} SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ HE = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BC.\sin\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{a}{4} \end{cases}$.

Xét ΔSHE vuông tại H có đường cao HK, ta có: $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{26}$.

Vậy $d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB)) = 2HK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

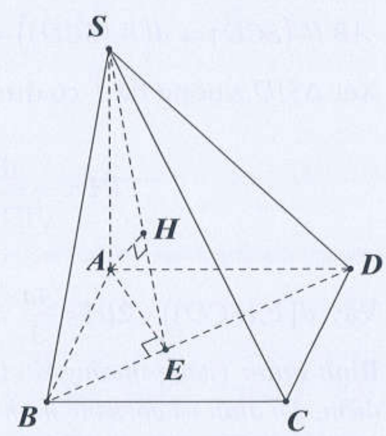
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD,\ (E \in BD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp SE,\ (H \in SE)$ (1)



Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Xét ΔABD vuông tại A có đường cao AE, ta có:

$$AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Xét ΔSAE vuông tại A có đường cao AH, ta có:

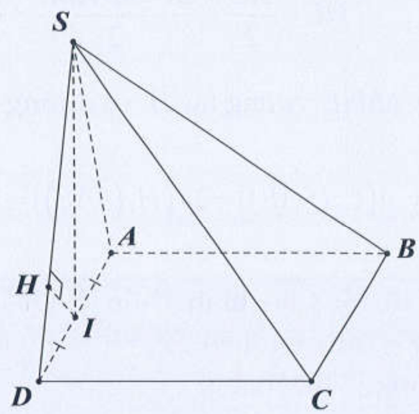
$$AH = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(A,(SBD)) = AH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 7 [*Trích* **Đề Minh Họa – 2017]:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{2}{3}a.$ **B.** $h=\frac{4}{3}a.$ **C.** $h=\frac{8}{3}a.$ **D.** $h=\frac{3}{4}a.$

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AD, vì ΔSAD cân tại S nên $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3.\frac{4}{3}a^3}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a.$$

Trong (SAD), dựng $IH \perp SD,\ (H \in SD)$.

Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp IH.$

Vì $\begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp CD \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I,(SCD)) = IH.$

$$AB \,//\, (SCD) \Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) \xlongequal{AI \cap (SCD) = \{D\}} \frac{AD}{HD}.d(I,(SCD)) = 2IH.$$

Xét ΔSID vuông tại I có đường cao IH, ta có:

$$IH = \frac{ID.IS}{\sqrt{ID^2+IS^2}} = \frac{ID.IS}{\sqrt{ID^2+IS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.2a}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+4a^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(B,(SCD)) = 2IH = \frac{4a}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

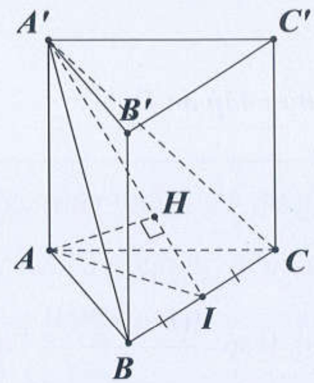
Bình luận: *Thông thường khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt ta có 3 hướng đi chính: Đổi điểm, đổi đỉnh và đổi sang hình học tọa độ không gian (phương pháp tọa độ hóa). Nếu đi theo hướng giải đổi điểm là đổi gián tiếp từ B sang A rồi sang H (như lời giải trên) sẽ mất nhiều thời gian không đáp ứng được yêu cầu về tốc độ thi theo hình thức trắc nghiệm. Đồng thời khi nhận ra đề bài cho thể tích V của khối chóp S.ABCD cho trước bạn nên dùng phương pháp đổi đỉnh sẽ phù hợp hơn. Cụ thể:*

$$d(B,(SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}} = \frac{3.\frac{V_{S.ABCD}}{2}}{\frac{1}{2}SD.CD} = \frac{\frac{3}{2}.\frac{4}{3}a^3}{\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{SI^2+ID^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{2}.\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{4a}{3}.$$

Ví dụ 8: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, $AB = a$. Khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. C. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} AI \perp BC \\ AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Trong $(AA'I)$, kẻ $AH \perp A'I$, $(H \in A'I)$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow (A'BC) \perp (AA'I)$.

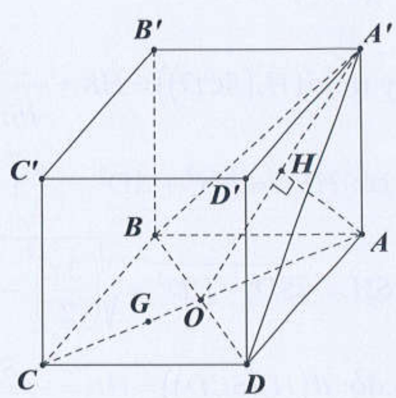
Vì $\begin{cases} (A'BC) \perp (AA'I) \\ (A'BC) \cap (AA'I) = A'I \Rightarrow AH \perp (A'BC) \\ (AA'I) \supset AH \perp A'I \end{cases}$

$$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH = \frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 9: Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$ đồng thời $AA' = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Khoảng cách từ G tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. C. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải:



Vì $AG \cap (A'BD) = \{O\} \Rightarrow \dfrac{d(G,(A'BD))}{d(A,(A'BD))} = \dfrac{GO}{AO} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G,(A'BD)) = \dfrac{1}{3} d(A,(A'BD))$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow (A'BD) \perp (AA'O)$.

Trong $(AA'O)$, kẻ $AH \perp A'O$, $(H \in A'O)$.

Vì $\begin{cases} (A'BD) \perp (AA'O) \\ (A'BD) \cap (AA'O) = A'O \Rightarrow AH \perp (A'BD) \\ (AA'O) \supset AH \perp A'O \end{cases}$

$$\Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH = \frac{AA'.AO}{\sqrt{AA'^2 + AO^2}}.$$

Tam giác ABD cân có $\widehat{BAD}=60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều có cạnh bằng $a \Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d\left(G,\left(A'BD\right)\right)=\dfrac{d\left(A,\left(A'BD\right)\right)}{3}=\dfrac{AA'.AO}{3\sqrt{AA'^2+AO^2}}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

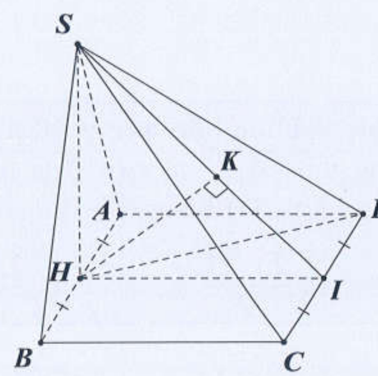
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SD=\dfrac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Khi đó, tỉ số $\dfrac{d\left(H,(SDC)\right)}{a}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Theo đề bài, ta có: $SH\perp(ABCD)$.



Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} HI=a \\ HI\perp CD \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} CD\perp HI \\ CD\perp SH \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SHI)\Rightarrow(SCD)\perp(SHI)$.

Trong (SHI), kẻ $HK\perp SI$, $(K\in SI)$.

Vì $\begin{cases} (SCD)\perp(SHI) \\ (SCD)\cap(SHI)=SI \Rightarrow HK\perp(SCD) \\ (SHI)\supset HK\perp SI \end{cases}$

Suy ra: $d\left(H,(SCD)\right)=HK=\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}$.

Ta có: $HD^2=AH^2+AD^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2=\dfrac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2-\dfrac{5a^2}{4}}=a$.

Do đó: $d\left(H,(SCD)\right)=HK=\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}}=\dfrac{a.a}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\dfrac{d\left(H,(SDC)\right)}{a}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

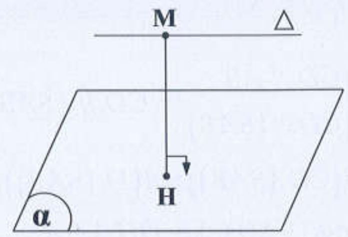
DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Phương pháp

a) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với Δ là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc Δ đến mặt phẳng (α):

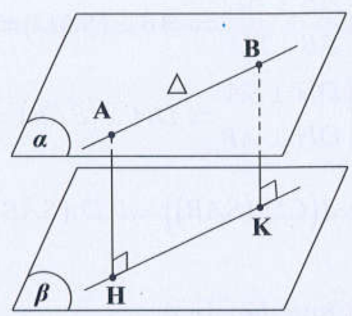
$$\xrightarrow[M\in\Delta]{\Delta\,//\,(\alpha)} \boxed{d\left(\Delta,(\alpha)\right)=d\left(M,(\alpha)\right)=MH}$$



b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$$\xrightarrow[A\in\Delta\subset(\alpha)]{(\alpha)\,//\,(\beta)} \boxed{\begin{array}{l} d\left((\alpha),(\beta)\right)=d\left(\Delta,(\beta)\right) \\ =d\left(A,(\beta)\right)=AH \end{array}}$$



Như vậy, việc tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đều quy về việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Cần lưu ý việc chọn điểm trên đường hoặc trên mặt sao cho việc xác định khoảng cách là đơn giản nhất.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khoảng cách giữa đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

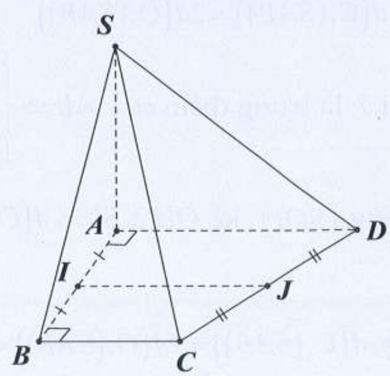
Vì $\begin{cases} IJ\,//\,AD \\ IJ\not\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow IJ\,//\,(SAD)$

$\Rightarrow d\left(IJ,(SAD)\right)=d\left(I,(SAD)\right)$.

Vì $\begin{cases} IA\perp AD \\ IA\perp SA\end{cases}\Rightarrow IA\perp(SAD)\Rightarrow d\left(I,(SAD)\right)=IA.$

Vậy $d\left(IJ,(SAD)\right)=d\left(I,(SAD)\right)=IA=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}.$

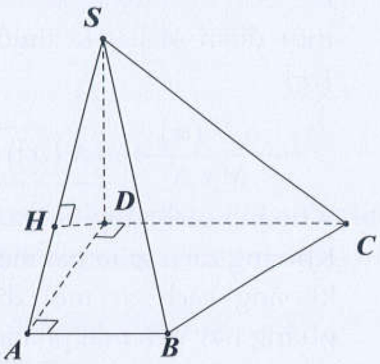
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Ví dụ 2: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S sao cho $SD = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Vì $\begin{cases} CD // AB \\ CD \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CD // (SAB)$

$\Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB))$.

Trong (SAD), kẻ $DH \perp SA$

Vì $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp DH$.

Vì $\begin{cases} DH \perp SA \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DH$.

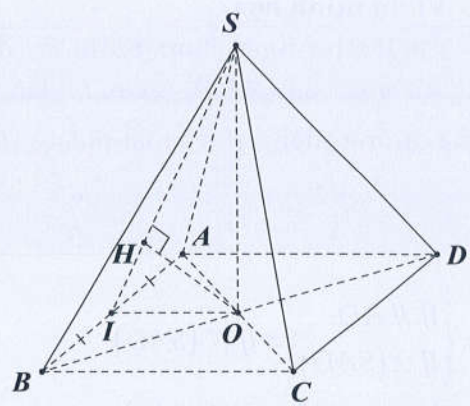
Vậy $d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH = \frac{SD.AD}{\sqrt{SD^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{2}.2a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow \begin{cases} SO \perp ABCD \\ SO = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Vì $CD // (SAB) \Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB))$.

Vì $CO \cap (SAB) = \{A\} \Rightarrow \frac{d(C,(SAB))}{d(O,(SAB))} = \frac{CA}{OA} = 2$

$\Rightarrow d(C,(SAB)) = 2d(O,(SAB))$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} OI \perp AB \\ OI = \frac{BC}{2} = a \end{cases}$.

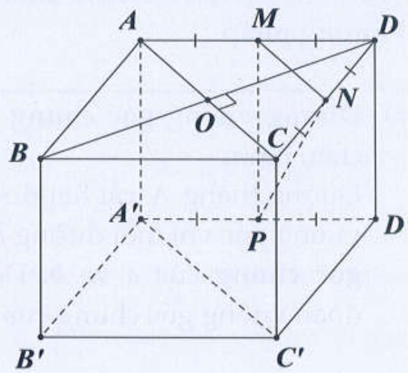
Trong (SOI), kẻ $OH \perp SI \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH = \frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(C,(SAB)) = 2d(O,(SAB)) = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Dễ thấy $(MNP) \,//\, (ACC')$

$\Rightarrow d((MNP),(ACC')) = d(M,(ACC'))$.

Vì $DM \cap (ACC') = \{A\} \Rightarrow \dfrac{d(M,(ACC'))}{d(D,(ACC'))} = \dfrac{MA}{DA} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d(M,(ACC')) = \dfrac{1}{2} d(D,(ACC'))$.

Gọi O là tâm của đáy $ABCD \Rightarrow \begin{cases} DO \perp AC \\ DO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ACC') \Rightarrow d(D,(ACC')) = DO$.

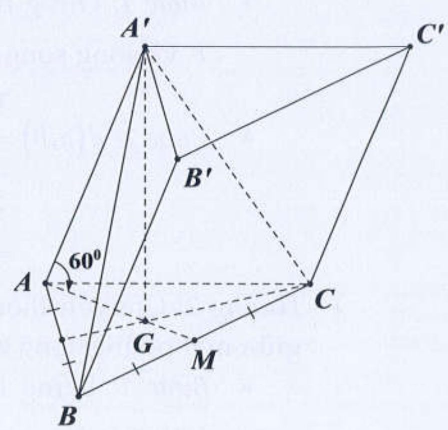
Vậy $d((MNP),(ACC')) = d(M,(ACC')) = \dfrac{1}{2} d(D,(ACC')) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng 60^0, đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A, B, C. Khoảng cách giữa hai đáy của hình trụ bằng

A. a. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của ΔABC.

Vì ΔABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó: $AG = \dfrac{2}{3} AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hình chóp $A'.ABC$ có $A'A = A'B = A'C$ và ΔABC đều nên $A'.ABC$ là hình chóp đều.

Suy ra $A'G \perp (ABC)$.

Do đó: $d((ABC),(A'B'C')) = A'G$.

Vì $A'G \perp (ABC) \Rightarrow AG$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC).

Suy ra: $\widehat{\left(AA',\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(AA',AG\right)}=\widehat{A'AG}=60^0$.

Xét $\Delta A'AG$ vuông tại G, ta có:

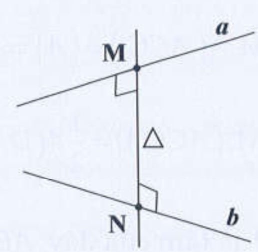
$$\tan\widehat{A'AG}=\frac{A'G}{AG}\Rightarrow A'G=AG.\tan\widehat{A'AG}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^0=a\Rightarrow \textit{Chọn đáp án A.}$$

DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Phương pháp

a) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

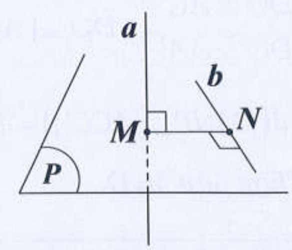
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a và b. Đoạn thẳng MN gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.



b) Một số hướng tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

TH1: Khi a,b chéo nhau và $a\perp b$.

+ *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại M.
+ *Bước 2:* Trong (P) dựng $MN\perp b$ tại N.
+ *Bước 3:* Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và $b\Rightarrow \boxed{d\left(a,b\right)=MN}$..



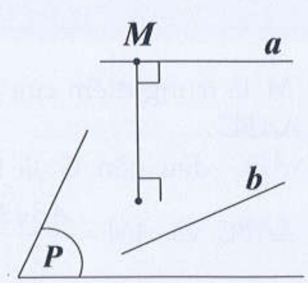
TH2: Khi a,b chéo nhau và $a\not\perp b$.

Mục tiêu: Chuyển về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

➢ *Hướng 1:* Chuyển thông qua khoảng cách từ một đường đến một mặt phẳng.

* *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.

* *Bước 2:* $d\left(a,b\right)\xlongequal[b\subset(P)]{a//(P)}d\left(a,(P)\right)\xlongequal{M\in a}d\left(M,(P)\right)$

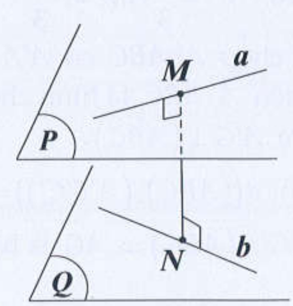


➢ *Hướng 2:* Chuyển thông qua khoảng cách giữa mặt phẳng song song.

* *Bước 1:* Dựng hai mặt phẳng (P), (Q) sao cho $a\subset(P)\ //\ (Q)\supset b$.

* *Bước 2:* Khi đó

$$d\left(a,b\right)=d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)$$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Vì $CD \,//\, (SAB)$

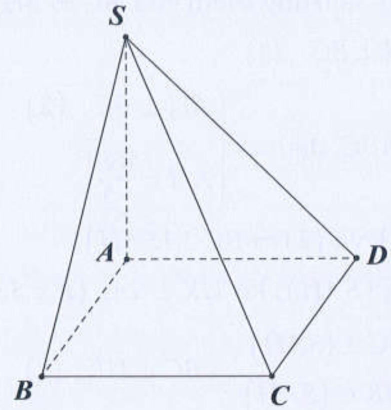
$\Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB))$.

Vì

$\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DA = a.$

Vậy $d(CD,SB) = d(D,(SAB)) = a$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Ví dụ 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

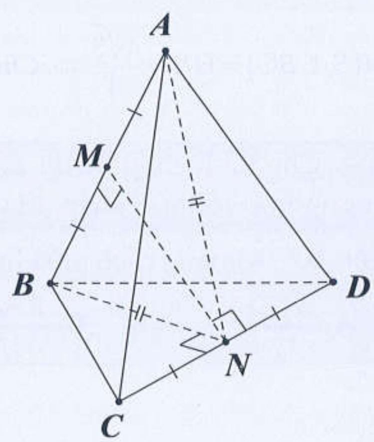
Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a nên $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases} AN \perp CD \\ BN \perp CD \end{cases}$ $(*)$

$(*) \Rightarrow CD \perp (ABN) \xrightarrow{MN \subset (ABN)} CD \perp MN$ (1)

Mặt khác, vì $AN = BN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N

$\Rightarrow MN \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.



Do đó: $d(AB,CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$

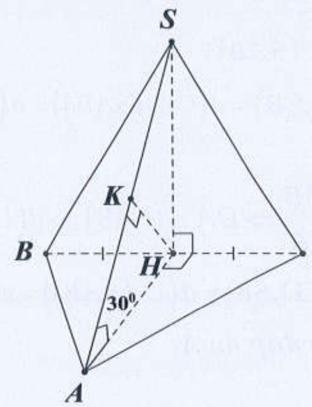
$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(AB,CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên (ABC) trùng với trung điểm của BC. Biết SA hợp với đáy một góc 30^0. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp BC \quad (1)$

Vì ΔABC đều $\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \quad (2) \\ AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Trong (SAH), kẻ $HK \perp SA$, $(K \in SA)$ (3)

Vì $\begin{cases} BC \perp (SAH) \\ HK \subset (SAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK \quad (4)$

Từ (3) và $(4) \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SA và $BC \Rightarrow d(SA, BC) = HK$.

Vì $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA, HA)} = \widehat{SAH} = 30^0$.

Xét ΔAHK vuông tại K, ta có: $\sin\widehat{HAK} = \dfrac{HK}{AH} \Rightarrow HK = AH.\sin\widehat{HAK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SA, BC) = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và SB tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

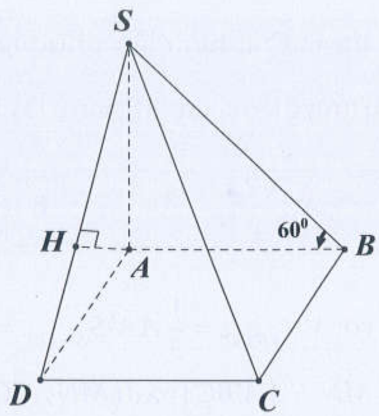
Vì $AB \,//\, (SCD) \Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD))$

$= d(A,(SCD))$

Trong (SAD), kẻ $AH \perp SD$, $(H \in SD)$

Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$

Vì $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH$



Ta có: $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} = 60^0.$

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}.$

Vậy $d(AB,SC) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $AB = a$. Khi đó, tỉ số $\dfrac{\sqrt{3}d(AA',BC')}{a}$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Vì $AA' \,//\, (BB'C'C)$

$\Rightarrow d(AA',BC') = d(AA',(BB'C'C)) = d(A,(BB'C'C)).$

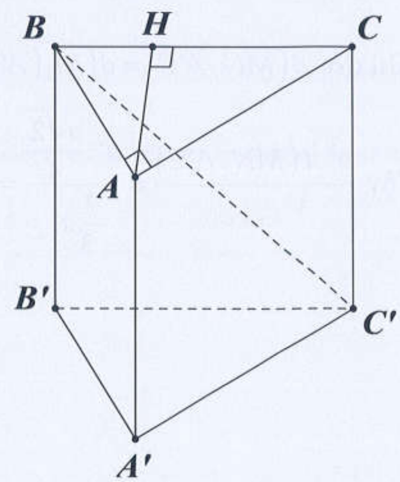
Trong (ABC), kẻ $AH \perp BC$, $(H \in BC)$.

Vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BB'C'C)$

$\Rightarrow d(A,(BB'C'C)) = AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}.$

Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow d(A,(BB'C'C)) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

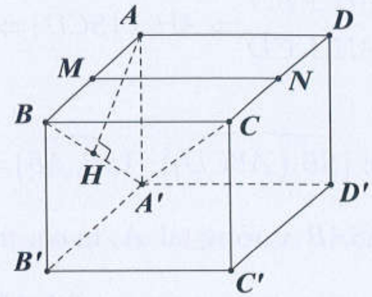


Vậy $\dfrac{\sqrt{3}d(AA',BC')}{a} = \dfrac{\sqrt{3}d(A,(BB'C'C))}{a} = \dfrac{\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{a^2.d\left(MN, A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Ta có: $V_{A.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}.a.a^2 = \dfrac{1}{3}a^3$.

Vì $MN \,//\, \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(MN, A'C\right) = d\left(MN, \left(A'BC\right)\right)$

$= d\left(M, \left(A'BC\right)\right)$

Vì $AM \cap \left(A'BC\right) = \{B\} \Rightarrow \dfrac{d\left(M, \left(A'BC\right)\right)}{d\left(A, \left(A'BC\right)\right)} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(M, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, \left(A'BC\right)\right)$.

Trong $\left(AA'B'B\right)$, kẻ $AH \perp A'B$, $\left(H \in A'B\right)$. Vì $\begin{cases} BC \perp \left(AA'B'B\right) \\ AH \subset \left(AA'B'B\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Vì $\begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(A, \left(A'BC\right)\right) = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$.

Ta có: $BH = \dfrac{A'B}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $d\left(MN, A'C\right) = d\left(M, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\dfrac{a^2.d\left(MN, A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}} = \dfrac{a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{3}a^3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM "VẤN ĐỀ 2: KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN"

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P). Đặt $d_1 = (A,(P))$ và $d_2 = (B,(P))$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi AB song song với (P).

B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P).

C. Nếu $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ thì đoạn thẳng AB cắt (P).

D. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $d(A,(SBC)) = AH$.
B. $d(A,(SBC)) = AK$.
C. $d(C,(SAB)) = BC$.
D. $d(S,(ABC)) = SA$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
B. a.
C. $a\sqrt{2}$
D. $2a$.

Câu 4. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 3a$ $OB = 2a$, $OC = a$. Gọi d là khoảng cách từ A đến đường thẳng BC. Khi đó, tỉ số $\frac{a}{d}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
B. $\frac{\sqrt{5}}{7}$.
C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi M là trung điểm của BC, khi đó khoảng cách từ A đến đường thẳng SM bằng

A. $a\sqrt{2}$.
B. $a\sqrt{3}$.
C. $a\sqrt{6}$.
D. $a\sqrt{11}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a$ và $AB = b$. Khi đó, khoảng cách từ trung điểm M của AC tới mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
B. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
C. $\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
D. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy b và đường cao $SH = a$. Khoảng cách từ H tới mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2ab}{\sqrt{12a^2+b^2}}$. B. $\dfrac{ab}{\sqrt{12a^2+b^2}}$. C. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy b và đường cao $SO = a$. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. C. $\dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. D. $\dfrac{ab}{2\sqrt{4a^2+b^2}}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, bốn cạnh bên đều bằng $3a$ và $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng

A. $2a\sqrt{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $2a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Giả thiết sau đây dùng cho các câu 10, 11, 12, 13: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Câu 10. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{3a}{4}$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 11. Khoảng cách giữa AD và BC bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$.

Câu 13. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AA' = a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\dfrac{a}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ B đến (SAC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. $\dfrac{2a}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\dfrac{a}{5}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Khi đó, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều; tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Nếu $AB = a$ thì khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khi đó, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và cạnh bên SC hợp với đáy một góc 45^0. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Nếu điểm M thuộc đoạn AD thì khoảng cách từ M đến (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Câu 25. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên (ABC) trùng với trung điểm H của AC. Biết $A'H = 3a$. Khi đó, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

A. $\frac{6a}{7}$.
B. $\frac{5a}{7}$.
C. $\frac{3a}{7}$.
D. $\frac{4a}{7}$.

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
D. $\frac{a}{2}$.

Câu 27. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = AB = a$. Gọi M là trung điểm của CC', khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BM)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
C. $\frac{a}{2}$.
D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, khi đó khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
B. $\frac{a}{2}$.
C. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.
D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a; hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ trùng với O. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{a}{2}$.
D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = a$, $CD = a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 45^0. Gọi d là khoảng cách từ điểm B đến (SCD), khi đó tỉ số $\frac{\sqrt{6}.d}{a}$ bằng

A. 2.
B. 4.
C. 1.
D. 3.

Câu 31. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Biết $B'C' = a\sqrt{3}$, góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 30^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BA' và $B'C$ bằng

A. $\frac{a}{2}$.
B. $\frac{3a}{2}$.
C. a.
D. $2a$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCN) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.
B. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.
C. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.
D. $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cạnh SC hợp với đáy một góc 60^0, gọi d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD). Khi đó, tỉ số $\frac{d}{a}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{78}}{13}$. B. $\frac{\sqrt{18}}{13}$. C. $\frac{\sqrt{58}}{13}$. D. $\frac{\sqrt{38}}{13}$.

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm của SH đến (SBC) bằng b. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$. B. $\frac{a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$. C. $\frac{2a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$. D. $\frac{2ab}{3}$.

Câu 35. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và $AD=2a\sqrt{2}$, $BC=a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) hợp với đáy một góc bằng 60^0. Khoảng cách từ trung điểm của AB đến mặt phẳng (SCD) bằng

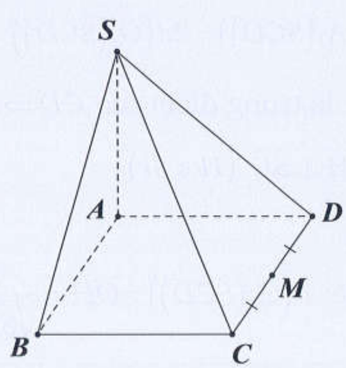
A. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{3a\sqrt{15}}{20}$. C. $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. D. $\frac{9a\sqrt{15}}{20}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	D	B	B	B	A	D	B
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	C	C	B	D	B	D
Câu	15	16	17	18	19	20	21
Đáp án	D	A	B	B	A	C	C
Câu	22	23	24	25	26	27	28
Đáp án	B	C	B	A	B	D	D
Câu	29	30	31	32	33	34	35
Đáp án	B	A	A	B	A	A	D

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3.

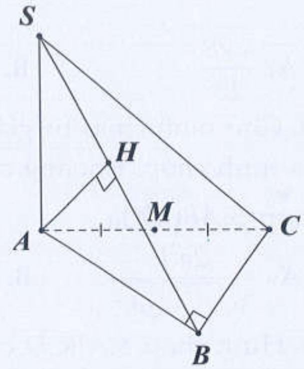


Vì $\begin{cases} CD \parallel (SAB) \\ M \in CD \end{cases}$

$\Rightarrow d\left(M,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)=DA=a.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6.



Vì $AM \cap (SBC) = \{C\} \Rightarrow \dfrac{d(M;(SBC))}{d(A;(SBC))} = \dfrac{MC}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d(M;(SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A;(SBC))$

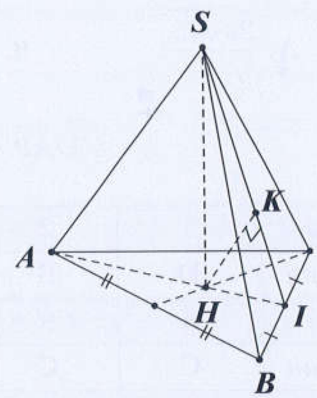
Kẻ $AH \perp SB,\ (H \in SB)$ ta có:

$$d(A,(SBC)) = AI = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do đó: $d(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A;(SBC)) = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7.



Gọi I là trung điểm của BC.

Kẻ $HK \perp SI,\ (K \in SI)$

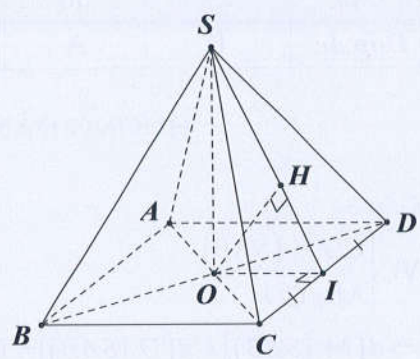
$\Rightarrow d(H,(SBC)) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$.

Vì ΔABC có cạnh $AB = b \Rightarrow AI = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow HI = \dfrac{1}{3} AI = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $d(H,(SBC)) = \dfrac{a.\dfrac{b\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \dfrac{\dfrac{ab\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{\sqrt{12a^2+b^2}}{2\sqrt{3}}} = \dfrac{ab}{\sqrt{12a^2+b^2}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 8.



Vì $AO \cap (SCD) = \{C\} \Rightarrow \dfrac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{AC}{OC} = 2$.

$\Rightarrow d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD))$

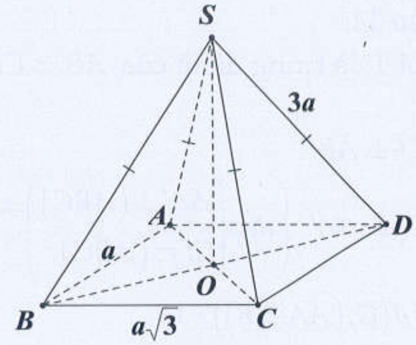
Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2} CD = \dfrac{b}{2}$.

Kẻ $OH \perp SI,\ (H \in SI)$.

Khi đó: $d(O;(SCD)) = OH = \dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{a.\dfrac{b}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

$\Rightarrow d(O;(SCD)) = 2d(O;(SCD)) = \dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9.



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$ $(\{O\} = AC \cap BD)$.

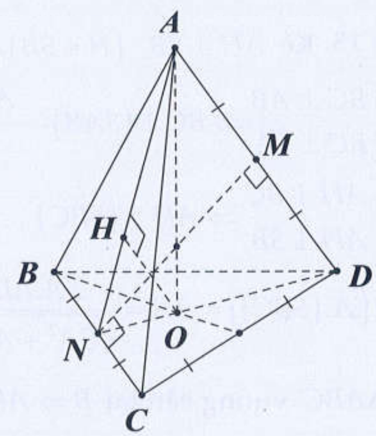
Vì hình chóp $S.ABCD$ có các bên bằng nhau nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SO = \sqrt{SC^2 - OC^2}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.

$OC = \dfrac{AC}{2} = a$.

Vậy $d(S,(ABCD)) = SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 10. Vì $AO \perp (BCD) \Rightarrow d(A,(BCD)) = AO$.



Gọi N là trung điểm của BC.

Ta có $AN = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \dfrac{1}{3}DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$AO = \sqrt{AN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11. Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AD và BC $\Rightarrow d(AD, BC) = MN$.

Ta có: $S_{\Delta AND} = \dfrac{1}{2}AO.ND = \dfrac{1}{2}MN.AD \Rightarrow MN = \dfrac{AO.ND}{AD} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD, BC) = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12.

Kẻ $OH \perp AI$, $(H \in AI) \Rightarrow OH \perp (ABC)$

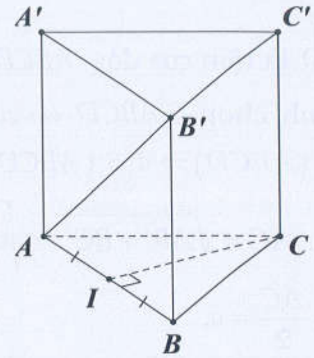
$$\Rightarrow d(O,(ABC)) = OH = \frac{AO.OI}{\sqrt{AO^2 + OI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 13. Vì $DO \cap (ABC) = \{N\} \Rightarrow \dfrac{d(A,(ABC))}{d(O,(ABC))} = \dfrac{AN}{ON} = 3$

$\Rightarrow d(A,(ABC)) = 3d(O,(ABC)) = 3.\dfrac{a\sqrt{6}}{9} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14.



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow CI \perp AB$.

Vì

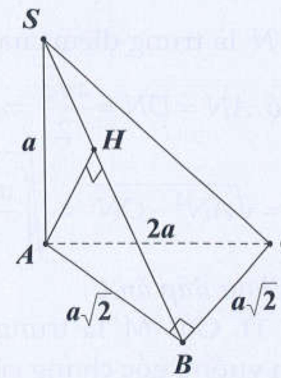
$$\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp AA' \quad \left(do \begin{cases} AA' \perp (ABC) \\ CI \subset (ABC) \end{cases} \right) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (AA'B'B).$$

$\Rightarrow d(C,(AA'B'B)) = CI.$

Vì $CC' \,//\, (AA'B'B)$

$\Rightarrow d(CC', AB') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C,(AA'B'B)) = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 15. Kẻ $AH \perp SB$, $(H \in SB)$.



Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \xrightarrow{AH \subset (SAB)} BC \perp AH.$

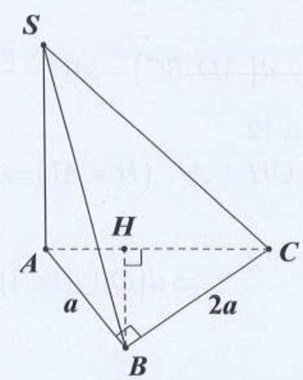
Vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}.$

Vì ΔABC vuông cân tại $B \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$

Vậy $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 16.



Kẻ $BH \perp AC$, $(H \in AC) \Rightarrow BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow d(B,(SAC)) = BH = \dfrac{AB.BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.$

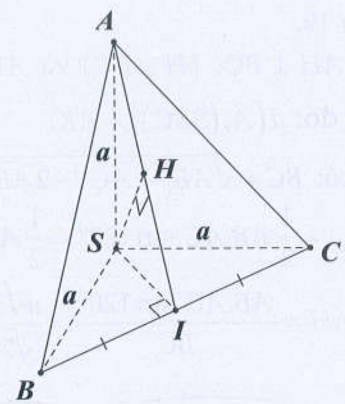
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 17. Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow SI \perp BC$.

Khi đó: $SI = \dfrac{SB.SC}{\sqrt{SB^2 + SC^2}} = \dfrac{a.a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

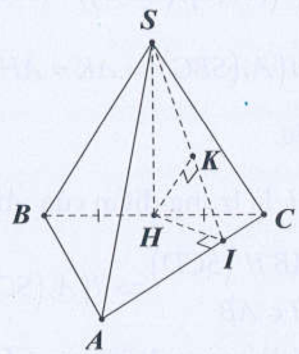
Kẻ $SH \perp AI,\ (H \in AI) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\Rightarrow d(S,(ABC)) = SH = \dfrac{SA.SI}{\sqrt{SA^2 + SI^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.$$



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 18. Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} SH \perp BC \\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.



Vì $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HI \perp AC,\ (I \in AC)$. Khi đó: $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI,\ (K \in SI)$

Vì $AC \perp (SHI) \Rightarrow (SAC) \perp (SHI)$.

Vì $\begin{cases} (SHI) \perp (SAC) \\ (SHI) \cap (SAC) = SI \\ (SHI) \supset HK \perp SI \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H,(SAC)) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$.

Ta có: $HI = HC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{a}{2}.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $BH \cap (SAC) = \{C\} \Rightarrow \dfrac{d(B,(SAC))}{d(H,(SAC))} = \dfrac{BC}{HC} = 2 \Rightarrow d(B,(SAC)) = 2d(H,(SAC)) = 2HK$

$$\text{Vậy } d(B,(SAC)) = 2HK = 2.\dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = 2.\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19.

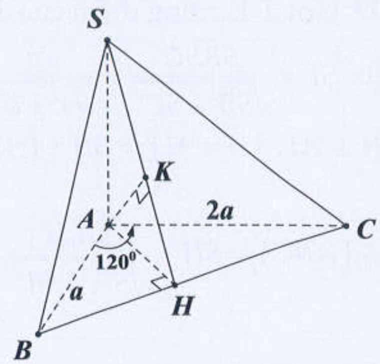
Kẻ $AH \perp BC$, $(H \in BC)$ và $AK \perp SH$, $(K \in SH)$.

Khi đó: $d(A,(SBC)) = AK$.

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0} = a\sqrt{7}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{1}{2}AH.BC$

$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC.\sin 120^0}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.



Ta có $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SH, AH)} = \widehat{SHA} = 60^0$.

Vậy $d(A,(SBC)) = AK = AH.\sin\widehat{SHA} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\sin 60^0 = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 20.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

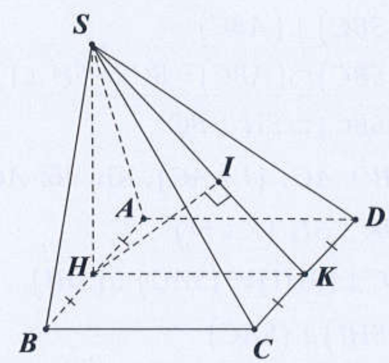
Vì $\begin{cases} AB \,//\, (SCD) \\ H \in AB \end{cases} \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$.

Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow HK = a$.

Kẻ $HI \perp SK$, $(I \in SK)$.

Khi đó: $d(H,(SCD)) = HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d(A,(SCD)) = d(H,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 21.

Kẻ $AH \perp SB$, $(H \in SB)$.

Khi đó $d(A,(SBC)) = AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$.

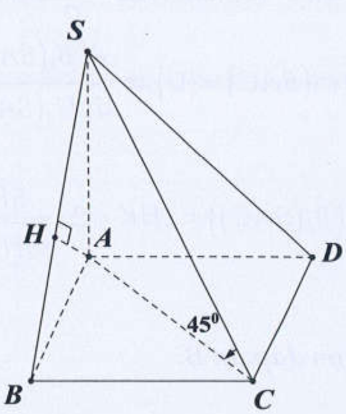
Ta có: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A

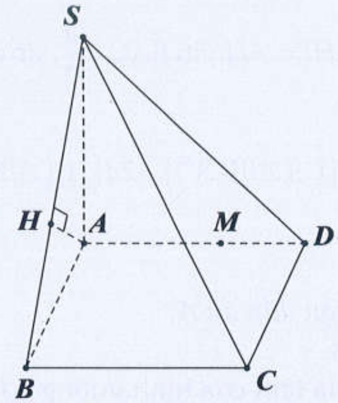
$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(A,(SBC)) = \frac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 22.



Vì $\begin{cases} AD \parallel (SBC) \\ M \in AD \end{cases} \Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right).$

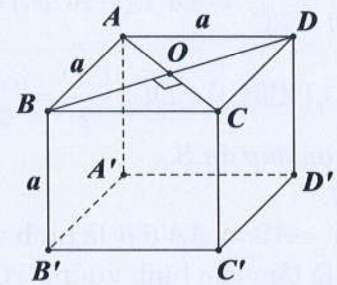
Kẻ $AH \perp SB,\ (H \in SB)$.

Khi đó: $d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$

$$\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right) = \frac{2a.a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 23.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

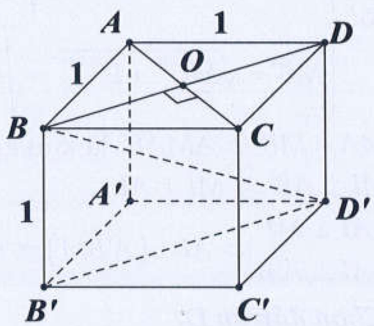
Khi đó: $BO \perp AC$. (1)

Vì $\begin{cases} BB' \perp (ABCD) \\ BO \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BB' \perp BO.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BO$ là đoạn vuông góc chung của BB' và $AC \Rightarrow d\left(BB', AC\right) = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.



Vì $AA' \parallel (BB'D'D)$ nên

$$d\left(AA', BD'\right) = d\left(AA', (BB'D'D)\right) = d\left(A, (BB'D'D)\right)$$

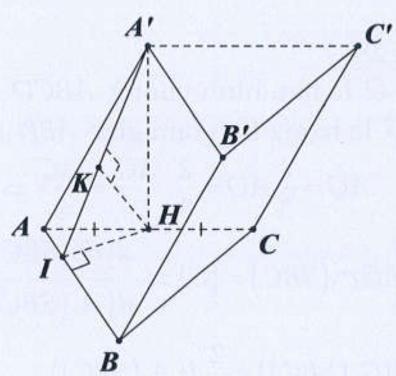
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó: $AO \perp (BB'D'D)$

$$\Rightarrow d\left(A, (BB'D'D)\right) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 25.



Vì $CH \cap (ABB'A') = \{A\}$

$$\Rightarrow \frac{d\left(C,(ABB'A')\right)}{d\left(H,(ABB'A')\right)} = \frac{CA}{HA} = 2$$

$$\Rightarrow d\left(C,(ABB'A')\right) = 2d\left(H,(ABB'A')\right).$$

Kẻ $HI \perp AB,\ (I \in AB)$ và $HK \perp A'I,\ (K \in A'I)$

Khi đó: $HK \perp (ABB'A')$

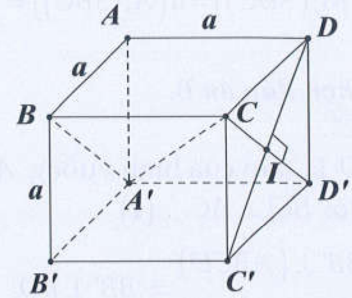
$$\Rightarrow d\left(H,(ABB'A')\right) = HK = \frac{A'H.HI}{\sqrt{A'H^2 + HI^2}}.$$

Ta có $HI = AH.\sin\widehat{BAC} = \frac{a}{2}.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right) = 2d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right) = 2.\frac{A'H.HI}{\sqrt{A'H^2 + HI^2}} = 2.\frac{3a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}} = \frac{6a}{7}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 26.



Gọi I là tâm của hình vuông $CDD'C' \Rightarrow DI \perp CD'$.

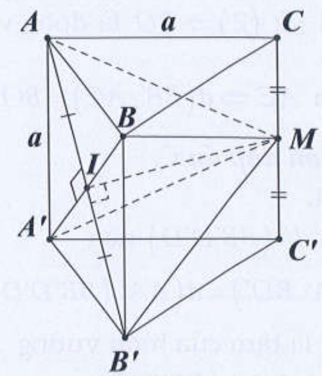
Vì $BC \perp \left(CDD'C'\right) \Rightarrow BC \perp DI$.

Vì $\begin{cases} DI \perp CD' \\ DI \perp BC \end{cases} \Rightarrow DI \perp \left(A'BCD'\right) \equiv \left(A'BC\right)$

$\Rightarrow d\left(D,\left(A'BC\right)\right) = DI = \frac{C'D}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27.



Vì $AA' = AB \Rightarrow AA'B'B$ là hình vuông.

Gọi I là tâm của hình vuông $AA'B'B \Rightarrow AI \perp A'B$.

Ta có: $\begin{cases} MA = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ MB' = \sqrt{MC'^2 + B'C'^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

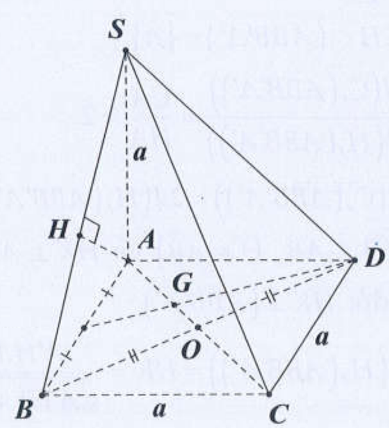
$\Rightarrow MA = MB' \Rightarrow \Delta MAB'$ là tam giác cân ở M.

$\Rightarrow MI \perp AB' \Rightarrow MI \perp AI$.

Vì $\begin{cases} AI \perp MI \\ AI \perp A'B \end{cases} \Rightarrow AI \perp \left(A'BM\right) \Rightarrow d\left(A,\left(A'BM\right)\right) = AI = \frac{AB'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 28.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên

$$AG = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{AC}{2} = \frac{AC}{3} \Rightarrow GC = \frac{2AC}{3}.$$

Vì $AG \cap \left(SBC\right) = \left\{C\right\} \Rightarrow \frac{d\left(G,\left(SBC\right)\right)}{d\left(A,\left(SBC\right)\right)} = \frac{GC}{AC} = \frac{2}{3}$

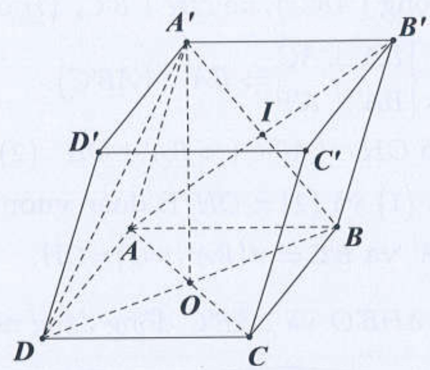
$\Rightarrow d\left(G,\left(SBC\right)\right) = \frac{2}{3}d\left(A,\left(SBC\right)\right)$.

Kẻ $AH \perp SB$, $\left(H \in SB\right)$.

Khi đó: $d\left(A,(SBC)\right)=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a.a}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d\left(G,(SBC)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 29. Gọi $\{I\}=AB'\cap A'B$. Vì $AA'B'B$ là hình bình hành nên $AI=IB'$.



Vì $AB'\cap(A'BD)=\{I\}\Rightarrow\dfrac{d\left(B',(A'BD)\right)}{d\left(A,(A'BD)\right)}=\dfrac{B'I}{AI}=1$

$\Rightarrow d\left(B',(A'BD)\right)=d\left(A,(A'BD)\right)$.

Ta có: $V_{A'ABD}=\dfrac{1}{3}A'O.S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(A'BD)\right).S_{\Delta A'BD}$

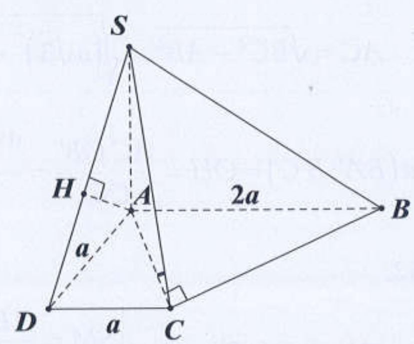
$\Rightarrow d\left(A,(A'BD)\right)=\dfrac{S_{\Delta ABD}.A'O}{S_{\Delta A'BD}}$.

+ $S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB.AD=\dfrac{1}{2}a.a=\dfrac{a^2}{2}$.

+ Vì $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow A'O\perp BD\Rightarrow S_{\Delta A'BD}=\dfrac{1}{2}A'O.BD=\dfrac{1}{2}A'O.a\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.A'O$.

Vậy $d\left(A,(A'BD)\right)=\dfrac{S_{\Delta ABD}.A'O}{S_{\Delta A'BD}}=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}.A'O}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.A'O}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 30.



Vì $AB\,//\,(SCD)\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=d$.

Kẻ $AH\perp SD,\ (H\in SD)$

Khi đó: $d\left(A,(SCD)\right)=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}$.

Dễ dàng chứng minh được:

$BC\perp AC\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SC$.

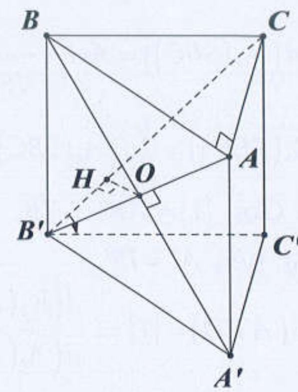
Vì $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ BC\perp SC\\ BC\perp AC\end{cases}\Rightarrow\widehat{\left((SBC),(ABCD)\right)}=\widehat{(SC,AC)}=\widehat{SCA}=45^0$.

$\Rightarrow\Delta SAC$ vuông cân ở $A\Rightarrow SA=AC=a\sqrt{2}$.

Vậy $d=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{6}.d}{a}=\dfrac{\sqrt{6}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 31.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABB'A'$.

Vì $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp BA'$.

Trong $(AB'C)$, kẻ $OH \perp B'C$, $(H \in B'C)$ (1)

Vì $\begin{cases} BA' \perp AC \\ BA' \perp A'B \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C)$.

Mà $OH \subset (AB'C) \Rightarrow BA' \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của BA' và $B'C \Rightarrow d(BA', B'C) = OH$.

Vì $\Delta HB'O$ và $\Delta AB'C$ đồng dạng nên $\dfrac{OH}{AC} = \dfrac{OB'}{CB'} \Rightarrow OH = \dfrac{AC.OB'}{CB'}$.

Ta có: $\widehat{(B'C,(A'B'C'))} = \widehat{(B'C, B'C')} = \widehat{CB'C'} = 30^0$.

+ $CB' = \dfrac{B'C'}{\cos\widehat{CB'C'}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\cos 30^0} = 2a$.

+ $CC' = B'C'\tan\widehat{CB'C'} = a\sqrt{3}.\tan 30^0 = a \Rightarrow AA' = CC' = a$.

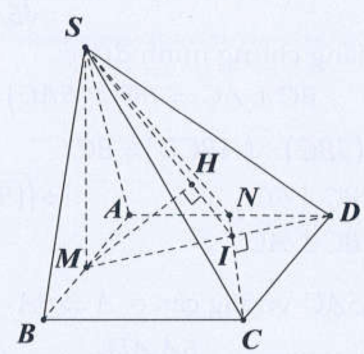
Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $AB = AA' = a$.

$\Rightarrow AB' = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow OB' = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(BA', B'C) = OH = \dfrac{AC.OB'}{CB'} = \dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 32.



Vì tam giác SAB đều nên $\begin{cases} SM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ SM \perp AB \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \supset SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SM \perp CN$.

Mà $CN \perp DM \Rightarrow CN \perp (SMI) \Rightarrow (SCN) \perp (SMI)$, $(\{I\} = CN \cap DM)$

Kẻ $MH \perp SI$, $(H \in SI)$.

Vì $\begin{cases}(SCN)\perp(SMI)\\(SCN)\cap(SMI)=SI\\(SMI)\supset MH\perp SI\end{cases}\Rightarrow MH\perp(SCN)\Rightarrow d(M,(SCN))=MH=\dfrac{SM.MI}{\sqrt{SM^2+MI^2}}$.

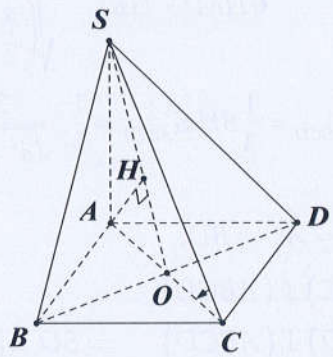
Vì ΔAMD và ΔIND đồng dạng nên $\dfrac{AD}{ID}=\dfrac{MD}{ND}\Rightarrow ID=\dfrac{AD.ND}{MD}$.

Ta có: $\begin{cases}AD=a,\ ND=\dfrac{a}{2}\\MD=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow ID=\dfrac{AD.ND}{MD}=\dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Khi đó: $MI=MD-ID=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}-\dfrac{a\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Vậy $d(M,(SCN))=MH=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}\right)^2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 33.



Gọi O là tâm của đáy. Kẻ $AH\perp SO,\ (H\in SO)$.

Vì $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.

Vì $\begin{cases}(SBD)\perp(SAC)\\(SBD)\cap(SAC)=SO\\(SAC)\supset AH\perp SO\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBD)$

$\Rightarrow d=d(A,(SBD))=AH=\dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}$.

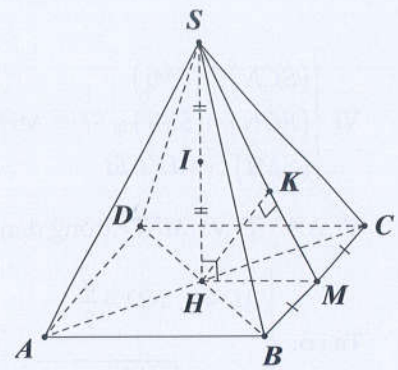
Ta có $\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{(SC,AC)}=\widehat{SCA}=60^0$.

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $SA=AC.\tan\widehat{SCA}=a\sqrt{2}.\tan 60^0=a\sqrt{6}$.

Vì O là tâm của đáy nên O là trung điểm của $AC\Rightarrow AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $d=\dfrac{a\sqrt{6}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{6})^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{78}}{13}\Rightarrow\dfrac{d}{a}=\dfrac{\sqrt{78}}{13}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 34.



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và SH.

$\Rightarrow HM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vì $IH \cap (SBC) = \{S\} \Rightarrow \dfrac{d(I,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{SI}{SH} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow d(H,(SBC)) = 2d(I,(SBC)) = 2b$.

Kẻ $HK \perp SM$, $(K \in SM)$.

Khi đó: $d(H,(SBC)) = HK = 2b$.

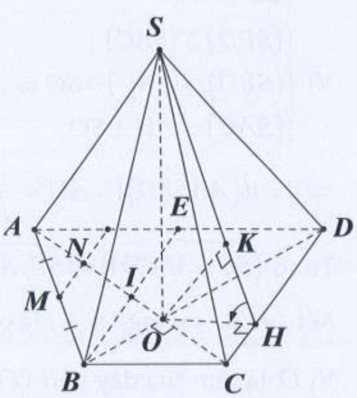
Xét ΔSHM vuông tại H và có đường cao HK, ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HM^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{HK.HM}{\sqrt{HM^2 - HK^2}} = \frac{2b.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - (2b)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.a^2 = \dfrac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 35.



Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.

Vì $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Vì $ABCD$ là hình thang cân và $AC \perp BD$ nên ΔAOD và ΔBOC là các tam giác vuông cân ở O

$$\Rightarrow \begin{cases} AO = \dfrac{AD}{\sqrt{2}} = 2a \\ CO = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a \end{cases} \Rightarrow OC = \frac{1}{3}AC.$$

Gọi E là trung điểm của AD và $\{I\} = AC \cap BE$.

Ta có: $ED = \dfrac{AD}{2} = a\sqrt{2}$.

Vì $\begin{cases} BC = ED = a\sqrt{2} \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow BCDE$ là hình bình hành $\Rightarrow BE // CD$.

Xét ΔACD, có $\begin{cases} IE // CD \\ AE = ED \end{cases} \Rightarrow AI = IC \Rightarrow AI = \dfrac{1}{2}AC$.

Gọi M là trung điểm của AB.

Kẻ đường thẳng qua M, song song với BE và cắt AC tại N.

Khi đó: $\begin{cases} AN = NI \\ MN \,//\, BE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AN = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{1}{4}AC \Rightarrow NC = \dfrac{3}{4}AC \\ MN \,//\, CD \end{cases}$.

Vì $MN \,//\, CD \Rightarrow d\left(M,(SCD)\right) = d\left(N,(SCD)\right)$ (1)

Vì $NO \cap (SCD) = \{C\} \Rightarrow \dfrac{d\left(N,(SCD)\right)}{d\left(O,(SCD)\right)} = \dfrac{NC}{OC} = \dfrac{\frac{3}{4}AC}{\frac{1}{3}AC} = \dfrac{9}{4}$.

$\Rightarrow d\left(N,(SCD)\right) = \dfrac{9}{4} d\left(O,(SCD)\right)$ (2)

Kẻ $OH \perp CD$, $(H \in CD)$ và $OK \perp SH$, $(K \in SH)$

Khi đó: $d\left(O,(SCD)\right) = OK = OH.\sin\widehat{SHO}$.

Ta có:

+ $OH = \dfrac{OC.OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

+ $\widehat{\left((SCD),(ABCD)\right)} = \widehat{(SH,OH)} = \widehat{SHO} = 60^0$.

$\Rightarrow d\left(O,(SCD)\right) = OK = OH.\sin\widehat{SHO} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right) = \dfrac{9}{4}.\dfrac{a\sqrt{15}}{5} = \dfrac{9a\sqrt{15}}{20} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

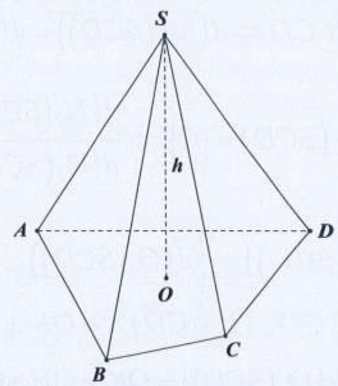
PHẦN 3: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích khối chóp: $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.

+ h: Độ dài chiều cao của khối chóp.

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S,(ABCD))}.S_{ABCD}}$$

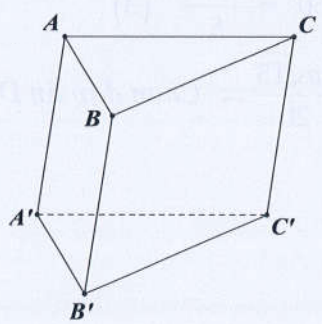


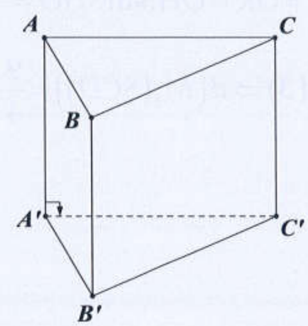
Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V = S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.

+ h: Chiều cao của khối chóp.

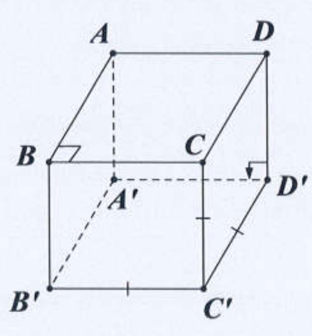
Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.

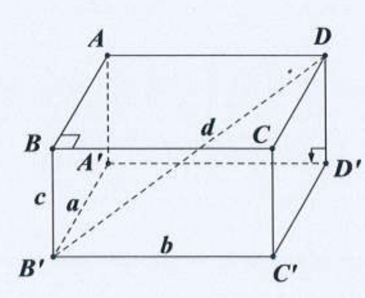




Thể tích khối hộp chữ nhật: $\boxed{V = a.b.c}$

Thể tích khối lập phương: $\boxed{V = a^3}$





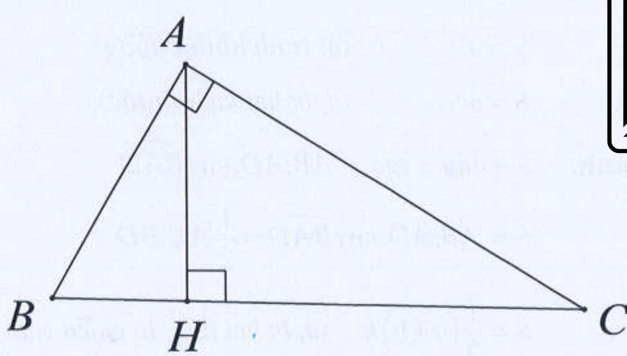
*** Chú ý:**

- *Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$*
- *Đường chéo của hình lập phương cạnh a là : $a\sqrt{3}$*
- *Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a,b,c là : $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$*
- *Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*

CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



- $AB^2+AC^2=BC^2$
- $AB^2=BH.BC$
- $AC^2=CH.BC$
- $AH.BC=AB.AC$
- $AH^2=BH.HC$
- $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$
- $AB=BC.\sin C=BC.\cos B=AC.\tan C=AC.\cot B$

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: *a, b, c; độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c; bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r; nửa chu vi p.*

- Định lí hàm số cosin:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A;\ b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B;\ c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$$

- Định lí hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$ (h_a, h_b, h_c: ba đường cao)
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- ΔABC *vuông tại A:* $S = \frac{AB.AC}{2} = \frac{BC.AH}{2}$
- ΔABC *đều, cạnh a:* $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình vuông: $S = a^2$ *(a: cạnh hình vuông)*

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ *(a, b: hai kích thước)*

d) Hình bình hành: $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB.AD.\sin\widehat{BAD}$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC.BD$

f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ *(a, b: hai đáy, h: chiều cao)*

g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}AC.BD$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

- **Phương pháp trực tiếp:** *Sử dụng trực tiếp công thức*
  - $V_{chóp} = \frac{1}{3}h \,.\, S_{đáy}$
  - $V_{trụ} = h \,.\, S_{đáy}$
- **Phương pháp gián tiếp**
  - *Tính thể tích bằng cách chia nhỏ.*
  - *Tính thể tích bằng cách bổ sung.*
  - *Tính thể tích bằng tỉ số thể tích.*

DẠNG 1: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TRỰC TIẾP CÔNG THỨC

1. Phương pháp

Bước 1: Tính các yếu tố cần thiết: Chiều cao, diện tích đáy, ….

➢ ***Xác định chiều cao của khối đa diện cần tính thể tích***

+ Trong nhiều trường hợp, chiều cao này được xác định ngay từ đầu bài *(Chiều cao cho trực tiếp)*, nhưng cũng có trường hợp việc xác định này phải dựa vào các định lí về quan hệ vuông góc đã học ở lớp 11 *(Chiều cao cho gián tiếp)*: Hay dùng nhất là định lí 3 đường vuông góc, các định lí về điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng,….
+ Việc tính độ dài chiều cao thông thường nhờ vào việc sử dụng định lí Pitago, hoặc nhờ hệ thức lượng trong tam giác,…
+ Đôi khi ta phải sử dụng cách gián tiếp: Chuyển về bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến 1 mặt phẳng.
  * Nếu AB // (P) thì $d\left(A,(P)\right) = d\left(B,(P)\right)$
  * Nếu $AB \cap (P) = \{I\}$ thì $\dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)} = \dfrac{IA}{IB}$

➢ ***Tìm diện tích đáy bằng các công thức quen biết:*** Nhìn chung dạng toán loại này rất cơ bản, chỉ đòi hỏi tính toán cẩn thận và chính xác *(có thể dùng phương pháp phần bù để tính)*.

Bước 2: Sử dụng công thức tính thể tích.

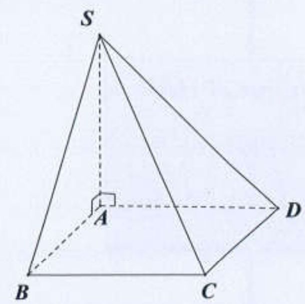
CÁCH XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO CỦA KHỐI ĐA DIỆN

CHIỀU CAO CHO TRỰC TIẾP

Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy

Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Ví dụ 1: Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow h = SA$

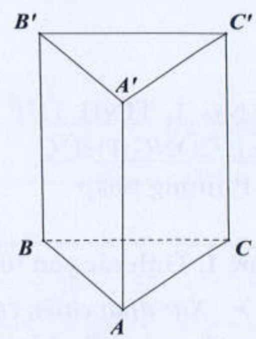


Hình lăng trụ đứng

Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên

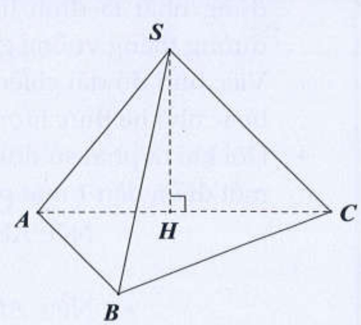
Ví dụ 2: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$

$\Rightarrow h = AA' = BB' = CC'$

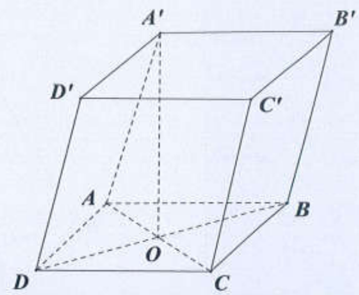


Cho biết vị trí chân đường cao

Ví dụ 3: Hình chóp $S.ABC$, hình chiếu S trên $\left(ABC\right)$ là H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB \Rightarrow h = SH$



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD $\Rightarrow h = A'O$

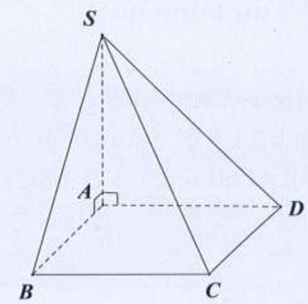


CHIỀU CAO CHO GIÁN TIẾP

Hình chóp có hai mặt bên vuông góc với đáy

Chiều cao hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với đáy

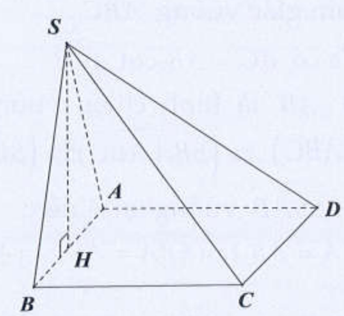
Ví dụ 5: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD) \Rightarrow h = SA$



Hình chóp có một mặt bên vuông góc với mặt đáy

Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy

Ví dụ 6: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là chiều cao của ΔSAB (hay $h = SH$ với H là hình chiếu của S trên AB).

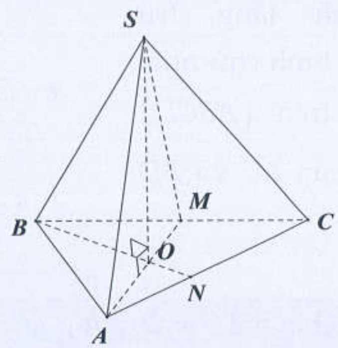


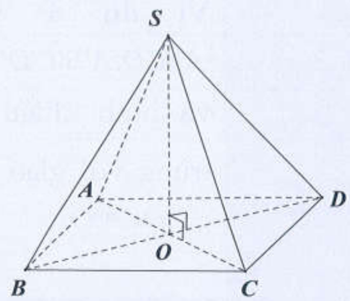
Hình chóp đều

Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy

Ví dụ 7: Hình chóp đều $S.ABC$ (hoặc hình chóp đều $S.ABCD$) có O là tâm của ΔABC (hình vuông $ABCD$) $\Rightarrow h = SO$

Tâm của đa giác đáy là tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.



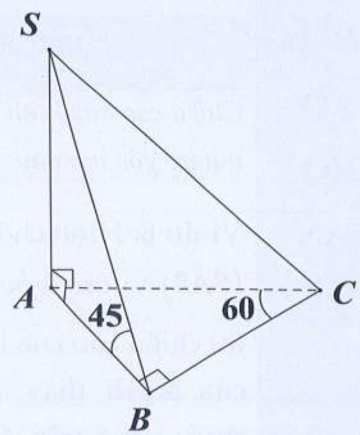


2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, \widehat{ACB} = 60^0$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Phân tích:



+ ΔABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC$.

Để tính BC ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC.

Ta có $BC = AB.\cot\widehat{ACB}$

+ AB là hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA} = 45^o$

+ ΔSAB vuông tại A nên:

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = AB.\tan 45^o = a$

+ Thể tích khối chóp $S.ABC$ tính theo công thức $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA$

Lời giải:

+ ΔABC vuông tại B nên $BC = AB.\cot\widehat{ACB} = a.\cot 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

+ Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA} = 45^o$

ΔSAB vuông tại A nên $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = AB.\tan 45^o = a$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}\frac{a^2.\sqrt{3}}{6}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*, đáy *ABCD* có diện tích là $16cm^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}cm^2$. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là

A. $\frac{32\sqrt{2}cm^3}{3}$. **B.** $\frac{32\sqrt{13}cm^3}{3}$. **C.** $\frac{32\sqrt{11}cm^3}{3}$. **D.** $4cm^3$.

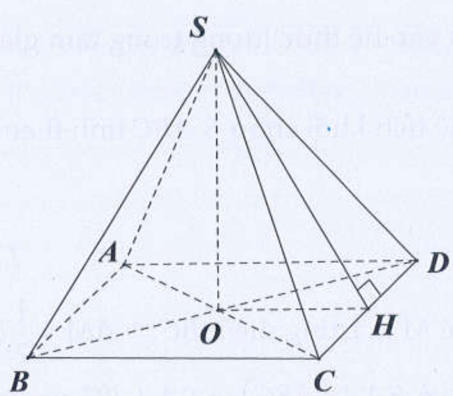
Phân tích:

+ *S.ABCD* là chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO\perp ABCD$

Đề bài đã cho diện tích đáy, ta chỉ cần tìm chiều cao *SO*.

+ Bốn mặt bên có diện tích bằng nhau nên ta lấy một mặt là tam giác *SCD* có diện tích $8\sqrt{3}cm^2$, dễ dàng tính được chiều cao *SH* của tam giác *SCD*.

+ Dựa vào tam giác *SOH* vuông tại *O* ta tính được *SO*.



+ Thể tích khối chóp *S.ABCD* tính theo công thức $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$

Lời giải:

+ Ta có $S_{ABCD}=16cm^2\Rightarrow CD=4cm$

$S_{\Delta SCD}=8\sqrt{3}cm^2\Rightarrow\frac{1}{2}SH.CD=8\sqrt{3}cm^2\Rightarrow SH=4\sqrt{3}cm$

+ Xét ΔSOH vuông tại *O* có: $SO=\sqrt{SH^2-OH^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}cm=2\sqrt{11}cm$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.16.2\sqrt{11}cm^3=\frac{32\sqrt{11}}{3}cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*, cạnh $BC=a\sqrt{2}$, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 45^0. Thể tích khối chóp *S.ABC* bằng *V*. Giá trị $\frac{6V}{a^3}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

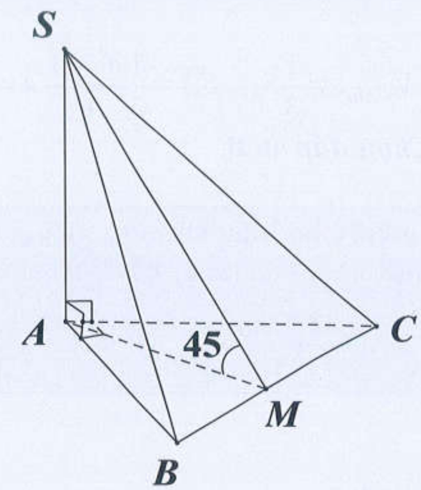
Phân tích:

+ Gọi M là trung điểm BC. Do ΔABC vuông cân tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{4}BC^2$

+ Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 45^o$



Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông SAM tính được $SA = AM.\tan\widehat{SMA}$

+ Thể tích khối chóp $S.ABC$ tính theo công thức $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA$

Lời giải:

+ Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{a^2}{2}$

+ Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ và $BC \perp AM$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AM$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 45^o$

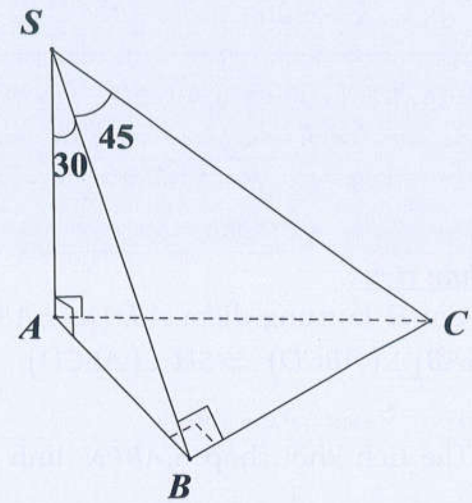
+ Ta có ΔSAM vuông tại A $\Rightarrow SA = AM.\tan\widehat{SMA} = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45^o$, $\widehat{ASB} = 30^o$. Thể tích khối chóp $SABC$ là V. Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ là:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.



Phân tích :

+ Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\begin{cases}(SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow \Delta ABC, \Delta SBC$ là các tam giác vuông tại B.

+ Dựa vào hệ thức lượng trong ΔSAB vuông tại A tính được AB có: $AB = SB.\sin\widehat{ASB}$

+ Dựa vào hệ thức lượng trong ΔSBC vuông tại B tính được BC có: $BC = SB.\tan\widehat{BSC}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC$

+ Thể tích khối chóp $S.ABC$ tính theo công thức $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA$

Lời giải

+ Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\begin{cases}(SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow \Delta ABC, \Delta SBC$ là các tam giác vuông tại B.

+ Xét ΔSAB vuông tại A có : $AB = SB.\sin\widehat{ASB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = SB.\cos\widehat{ASB} = \dfrac{3a}{2}$

+ Xét ΔSBC vuông tại B có : $BC = SB.\tan\widehat{BSC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{4}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3}{8} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Tổng quát: Cho hình chóp $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{ASB} = \beta$. Thể tích khối chóp $SABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta.}{12}$

Chứng minh :

+ Xét ΔSAB vuông tại A có : $AB = SB.\sin\alpha$, $SA = SB.\cos\alpha$

+ Xét ΔSBC vuông tại B có : $BC = SB.\tan\beta \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}.SB^2.\sin\alpha.\tan\beta$

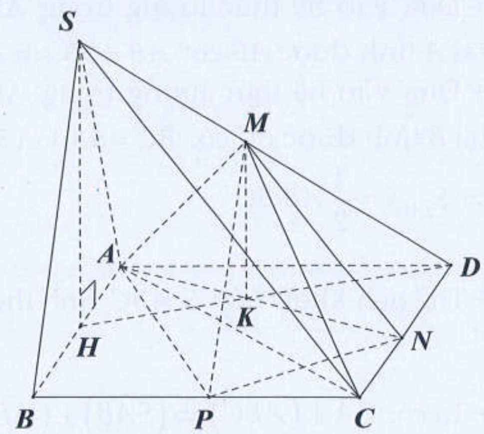
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.SB^2.\sin\alpha.\tan\beta.SB.\cos\alpha = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta.}{12}$

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x, y thoả mãn bất đẳng thức nào dưới đây

A. $x^2+2xy-y^2>160$. **B.** $x^2-2xy+2y^2<109$.

C. $x^2+xy-y^4<145$. **D.** $x^2-xy+y^4>125$.

Phân tích :



+ Gọi H là trung điểm AB. Do ΔABC đều và $(SAB)\perp(ABCD) \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$S_{ABPN}=S_{ABCD}-S_{ADN}-S_{CNP}$

+ Thể tích khối chóp $S.ABPN$ tính theo công thức $V_{S.ABPN}=\dfrac{1}{3}.S_{ABPN}.SH$

Gọi $AN\cap HD=\{K\}$ ta có MK là đường trung bình của $\Delta DHS \Rightarrow MK=\dfrac{1}{2}SH$

+ Thể tích khối chóp $CMNP$ tính theo công thức $V_{CMNP}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta CNP}.MK$

Thay x, y vào các đáp án được kết quả đúng.

Lời giải

+ Gọi H là trung điểm AB. Do ΔABC đều và $(SAB)\perp(ABCD) \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Xét ΔABC đều: $SH=\dfrac{\sqrt{3}AB}{2}=2\sqrt{3}$

+ Ta có $S_{ABPN}=S_{ABCD}-S_{ADN}-S_{CNP}=AB^2-\dfrac{AD.DN}{2}-\dfrac{CN.CP}{2}=4^2-\dfrac{4.2}{2}-\dfrac{2.2}{2}=10$

$\Rightarrow V_{S.ABPN}=\dfrac{1}{3}.S_{ABPN}.SH=\dfrac{1}{3}.10.2\sqrt{3}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

+ Gọi $AN\cap HD=\{K\}$ ta có MK là đường trung bình của $\Delta DHS \Rightarrow MK=\dfrac{1}{2}SH$

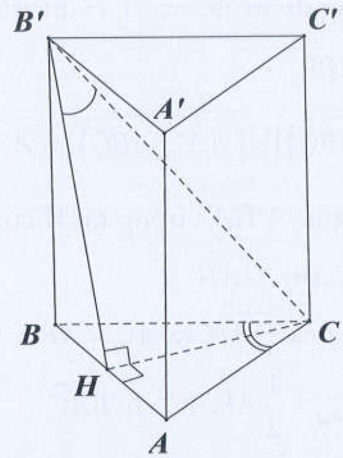
$\Rightarrow V_{CMNP}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta CNP}.MK=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.CN.CP.\dfrac{1}{2}.SH=\dfrac{1}{3}\dfrac{2.2}{2}.\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Thay vào các đáp án $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC=\sqrt{3}a, BC=a, \widehat{ACB}=150^0$, đường thẳng $B'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{105}}{28}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{339}}{14}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{339}}{28}$.

Phân tích:



+ Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC.BC.\sin\widehat{ACB}$

+ Kẻ $CH \perp AB$ ta xác định được góc α

$\left(\widehat{B'C,(ABB'A')}\right) = \left(\widehat{B'C,B'H}\right) = \widehat{CB'H} = \alpha$

+ Tính $CH = \dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{AB}$. Xét tam giác $B'HC$ vuông tại H dựa vào $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ tính được $B'C$.

+ Áp dụng định lý Pitago cho tam giác $B'BC$ vuông tại B ta tìm được BB'

+ Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo công thức $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB'$

Lời giải

+ Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC.BC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2} a\sqrt{3}.a.\sin 150^0 = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$

+ Kẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (ABB'A')$ nên $B'H$ là hình chiếu vuông góc của $B'C$ lên $(ABB'A') \Rightarrow \left(\widehat{B'C,(ABB'A')}\right) = \left(\widehat{B'C,B'H}\right) = \widehat{CB'H} = \alpha$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 150^0 = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$CH = \dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow B'C = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$

+ Xét $\Delta BB'C$ vuông tại B có: $BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB' = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}.\dfrac{a\sqrt{35}}{7} = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{28}$

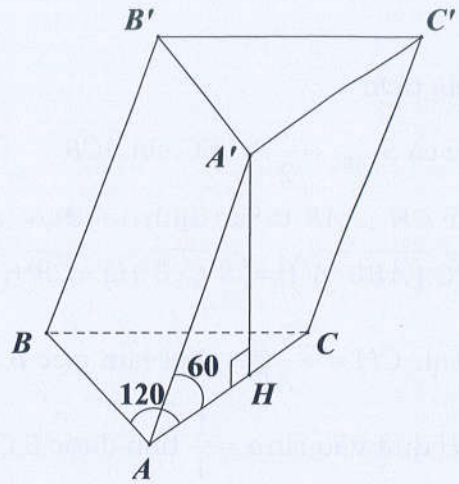
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 7: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung đ ểm của AC, góc tạo bởi BB' với (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Phân tích:

+ H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$



Do $AA'//BB'$

$\Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right) = \left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \widehat{A'AH} = 60^0$

+ Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có:

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH}$

$AH = AA'.\cos\widehat{A'AH} \Rightarrow AC = AB = 2AH$

+ Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

+ Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo công thức $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA'$

Lời giải

+ H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right) = \left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \widehat{A'AH} = 60^0$

+ Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có:

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = AA'.\cos\widehat{A'AH} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AC = AB = 2AH = a$

+ Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 8: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^0$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC, góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

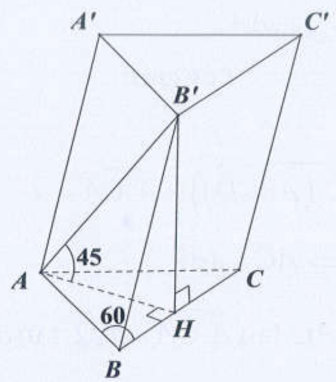
Phân tích:

+ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC}$

$B'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{AB',(ABC)}\right) = \widehat{B'AH} = 45^0$

+ Xét tam giác ABH vuông tại H có:

$AH = AB.\sin\widehat{ABH}$



+ Xét tam giác AHB' vuông tại H có:

$B'H = AH.\tan\widehat{B'AH}$

+ Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo công thức: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.B'H$

Lời giải:

+ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}a.2a.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Ta có $B'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{AB',(ABC)}\right) = \widehat{B'AH} = 45^0$

+ Xét tam giác ABH vuông tại H có: $AH = AB.\sin\widehat{ABH} = a.\sin 60^O = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

+ Xét tam giác AHB' vuông tại H có: $B'H = AH.\tan\widehat{B'AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 45^O = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.B'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{4}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và đường chéo $A'C$ của lăng trụ hợp với đáy $ABCD$ góc α thoả mãn $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. Thể tích khối lăng trụ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Phân tích:

+ $S_{ABCD} = a^2$

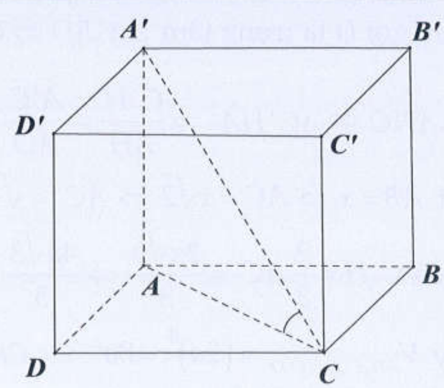
+ $AA' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABCD)}\right) = \widehat{A'CA} = \alpha$

+ Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A có:

$AA' = AC.\tan\widehat{A'CA}$

+ Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ tính



theo công thức: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA'$

Lời giải:

+ $S_{ABCD} = a^2$

+ Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(A'C,(ABCD))} = \widehat{A'CA} = \alpha$

+ $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

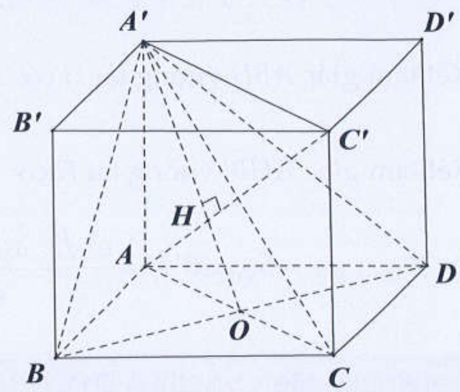
$\Delta AA'C$ vuông tại A có: $AA' = AC.\tan\widehat{A'CA} = a\sqrt{2}.\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 10: Cho hình lập phương $ABCD.\ A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến $(A'BD)$ bằng $\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối lập phương $ABCD.\ A'B'C'D'$ là

A. a^3. **B.** $6a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $27a^3$.

Phân tích:



+ Ta có $C'A'BD$ là tứ diện đều vì có các cạnh đều là đường chéo các hình vuông bằng nhau gọi H là trọng tâm $\Delta A'BD \Rightarrow C'H \perp (A'BD)$

$\Rightarrow d_{(C',(A'BD))} = C'H$

+ ΔAHO ¡ $\Delta C'HA' \Rightarrow \dfrac{C'H}{AH} = \dfrac{A'C}{AO} = 2$

$\Rightarrow C'H = 2AH = \dfrac{2}{3}AC'$

+ Đặt độ dài cạnh hình vuông là x ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và a từ đó tính thể tích khối lập phương $V_{ABCD.A'B'C'D'} = x^3$

Lời giải:

+ Ta có $C'A'BD$ là tứ diện đều vì có các cạnh đều là đường chéo các hình vuông bằng nhau gọi H là trọng tâm $\Delta A'BD \Rightarrow C'H \perp (A'BD) \Rightarrow d_{(C',(A'BD))} = C'H = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2}$

+ $\Delta AHO \backsim \Delta C'HA' \Rightarrow \dfrac{C'H}{AH} = \dfrac{A'C}{AO} = 2 \Rightarrow C'H = 2AH = \dfrac{2}{3}AC'$

Đặt $AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2} \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = x\sqrt{3}$

Ta có $C'H = \dfrac{2}{3}AC' = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{4a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 2a$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = (2a)^3 = 8a^3$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Khối đa diện nào sau đây có công thức tính thể tích là $V=\frac{1}{3}B.h$ (B là diện tích đáy; h là chiều cao)

A. Khối lăng trụ. **B.** Khối chóp.
C. Khối lập phương. **D.** Khối hộp chữ nhật.

Câu 2. Khi tăng độ dài tất cả các cạnh của một khối hộp chữ nhật lên gấp đôi thì thể tích khối hộp tương ứng sẽ tăng lên bao nhiêu lần

A. 2 lần. **B.** 4 lần. **C.** 6 lần. **D.** 8 lần.

Câu 3. Cho hình chóp tam giác có đường cao bằng 25cm và các cạnh đáy có độ dài lần lượt bằng $20cm$, $21cm$, $29cm$. Thể tích của hình chóp là

A. $1750cm^3$. **B.** $5250cm^3$. **C.** $420cm^3$. **D.** $2537,5cm^3$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=5\sqrt{3}cm$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $50cm^3$. **B.** $75cm^3$. **C.** $100cm^3$. **D.** $125cm^3$.

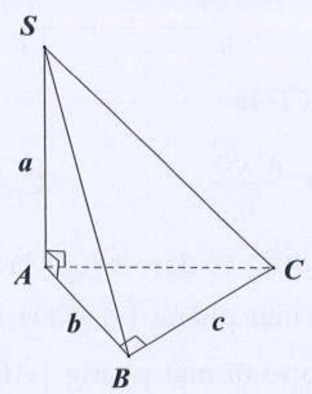
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 6. Khối lăng trụ tam giác đều cạnh a, chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích là

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 7. Cho hình vẽ :



Khối chóp trên có thể tích là

A. abc. **B.** $\frac{1}{2}abc$. **C.** $\frac{1}{3}abc$. **D.** $\frac{1}{6}abc$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 120^0$, $\widehat{ASC} = 90^0$ Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

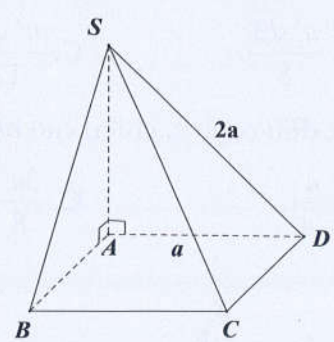
Câu 9. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh a, gọi M là trung điểm AB. Qua điểm M dựng đường thẳng vuông góc $(ABCD)$ và trên đó lấy điểm S sao cho $SI = \frac{a\sqrt{5}}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ADCM$, khối chóp $S.BCM$ và khối chóp $S.BCD$ lần lượt là x, y, z. Giá trị $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z^2} - 150$ là

A. $-17,2$. B. $-247,6$. C. $8,4$. D. $5,2$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{ACB} = 60^0$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC, gọi E là trung điểm AC, góc giữa SE và mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{18}$. C. $\frac{a^3}{9}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ như hình vẽ, đáy $ABCD$ là hình vuông



Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60^0$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng V. Giá trị $\frac{6V}{a^3}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB. SC tạo với đáy một góc bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V thì tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. 0,5. B. 1. C. 1,5. D. 2.

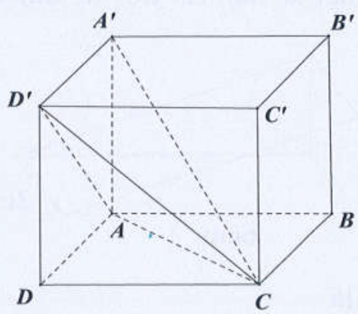
Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ gần nhất giá trị nào dưới đây

A. 5. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật có các cạnh $AB = 3a; AD = 2a; AA' = 2a$ như hình vẽ



Thể tích của khối chóp $A'.ACD'$ là

A. a^3. B. $2a^3$. C. $3a^3$. D. $6a^3$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A $AC = 12cm$, $\widehat{ACB} = 60^0$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BC'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30^0. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau

A. $2117cm^3$. B. $1411cm^3$. C. $4233cm^3$. D. $8466cm^3$.

Câu 18. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 5cm. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{125\sqrt{3}cm^3}{4}$. **B.** $\frac{125\sqrt{2}cm^3}{12}$. **C.** $\frac{125\sqrt{3}cm^3}{12}$. **D.** $\frac{125\sqrt{2}cm^3}{4}$.

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a, AD = a, AC' = a\sqrt{7}$ Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

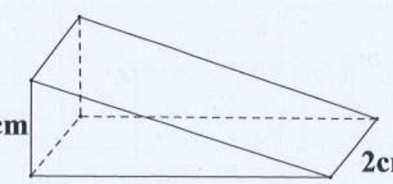
Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$, mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy góc 60^0 và $A'C$ hợp với đáy góc 30^o. Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{16a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = AA' = a$, O là giao điểm của AC và BD. Thể tích khối khối chóp $OA'B'C'D'$ là x, thể tích khối chóp $OBB'C'$ là y. Giá trị $x+y$ là

A. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

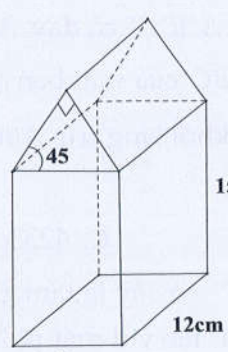
Câu 23. Hình vẽ bên là bản vẽ thiết kế làm cái dốc để dắt xe từ sân vào trong nhà theo tỉ lệ 1:25.



Thể tích của vật liệu cần dùng là

A. $75000cm^3$. **B.** $120cm^3$. **C.** $360cm^3$. **D.** $225000cm^3$.

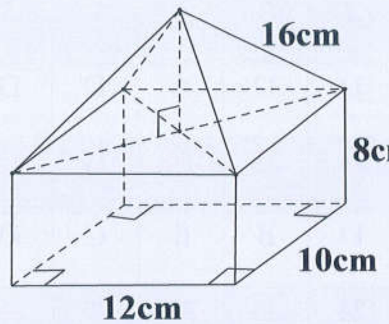
Câu 24. Một vật có 2 mặt tam giác vuông cân bằng nhau, 5 mặt hình chữ nhật như hình vẽ.



Thể tích của khối vật là

A. $1440cm^3$. **B.** $1504cm^3$. **C.** $1632cm^3$. **D.** $1824cm^3$.

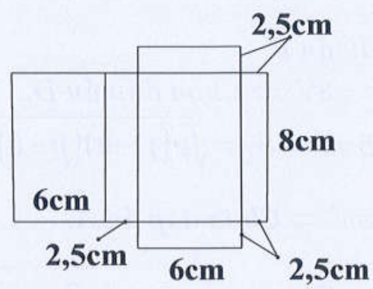
Câu 25. Một khối có 4 mặt tam giác cân bằng nhau, 5 mặt hình chữ nhật có kích thước như hình vẽ.



Thể tích khối trên gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau

A. $1410cm^3$. **B.** $1420cm^3$. **C.** $780cm^3$. **D.** $2350cm^3$.

Câu 26. Một tờ giấy được cắt sẵn để gấp thành một hình hộp chữ nhật như hình vẽ



Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. $40cm^3$. **B.** $120cm^3$. **C.** $80cm^3$. **D.** $140cm^3$.

Câu 27. Một phòng họp có chiều dài *12m*, chiều rộng *8m* và chiều cao *4m*. Người thiết kế phòng họp tư vấn cần phải phải mở rộng thêm chiều dài phòng họp tối thiểu x mét nữa để phòng họp có thể chứa 100 người, biết mỗi người cần có đủ $4{,}48m^3$ không khí để đảm bảo sức khoẻ. Giá trị của x là

A. $1m$. **B.** $2m$. **C.** $3m$. **D.** $4m$.

Câu 28. Một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật, chiều dài là *2,5m*, chiều rộng là 1,6m và chiều cao là *1,4m*, biết rằng bề dày thành bể và đáy bể là *10cm*. Thể tích nước có trong bể khi bể chứa đầy nước là

A. $35{,}64m^3$. **B.** $31{,}556m^3$. **C.** $31{,}878m^3$. **D.** $40m^3$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	D	A	D	D	A	D	D	C	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	C	B	D	B	B	C	D	A	B
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28		
Đáp án	B	A	D	C	B	B	B	C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khối chóp $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2. $V = abc \Rightarrow V' = 2a.2b.2c = 8V$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 3. $p = (20+21+29):2 = 35cm \Rightarrow S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 210cm^2$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.210.25 = 1750cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4. $\sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = AC' = 5\sqrt{3}cm \Rightarrow \sqrt{AA'^2 + \left(\sqrt{2}AA'\right)^2} = 5\sqrt{3}cm \Rightarrow AA' = 5cm$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'^3 = 125cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

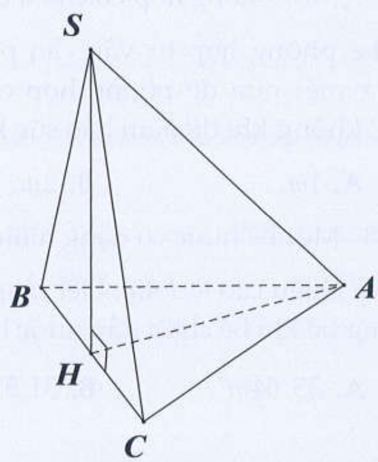
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{a^2}{4}.$

$SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$+\Delta SBC$ đều $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



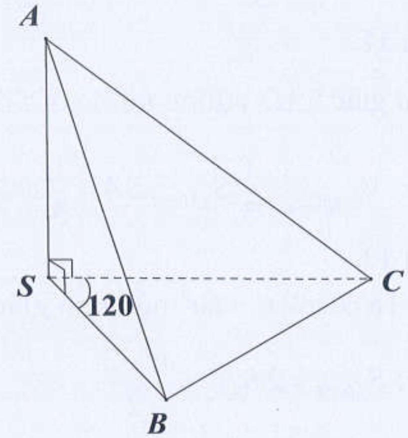
Câu 6. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7. Tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{6}abc$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 8.

Ta có $SA \perp SB, SA \perp SC \Rightarrow SA \perp (SBC)$



$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.SB.\sin 120^0 = \frac{1}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

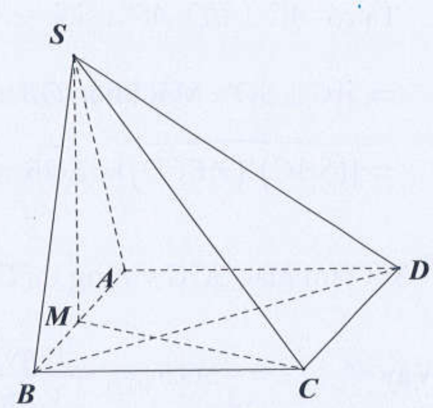
$\Rightarrow V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.SA$

$= \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 9.

+ Ta có: $S_{ADCM} = \frac{(AM+CD).AD}{2} = \frac{3}{4}$



$\Rightarrow V_{S.ADCM} = \frac{1}{3}.SM.S_{ADCM} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{5}}{12}$

$x = \frac{\sqrt{5}}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{144}$

+ $S_{BCM} = \frac{BM.BC}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.BCM} = \frac{1}{3}.SM.S_{BCM} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{36} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{36} \Rightarrow y^2 = \frac{5}{1296}$

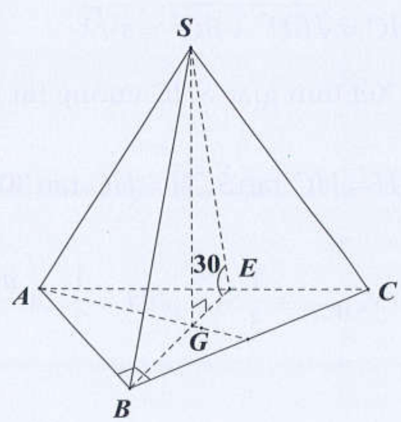
+ $S_{BCD} = \frac{BC.CD}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.SM.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{3}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{18} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{5}}{36} \Rightarrow y^2 = \frac{5}{324}$

Vậy $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z^2} - 150 = \frac{42}{5} = 8,4 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 10.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$



Xét tam giác ABC vuông tại B có

$AC = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = 2a, \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a,$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{9}=\frac{a^3}{18}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 11.

Tam giác SAD vuông tại A có: $SA=\sqrt{SD^2-AD^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.3\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 12.

+ Ta có $\widehat{BAC}=60^0$ nên tam giác ABC đều

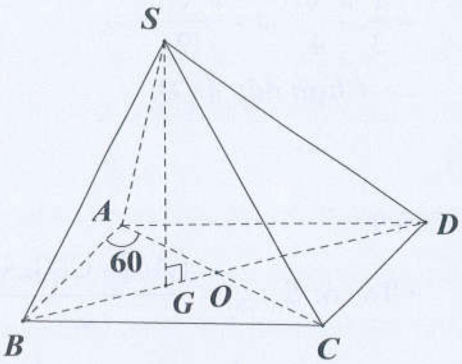
$\Rightarrow S_{ABCD}=2.S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

+ Gọi $O=AC\cap BD$.

Ta có $AC\perp BD, AC\perp SG\Rightarrow AC\perp(SBD)$

$\Rightarrow AC\perp SO$. Mặt khác $OB\perp AC$

$\Rightarrow\widehat{((SAC),(ABCD))}=\widehat{SOB}=45^0$



+ Xét tam giác SOG vuông tại G: $SG=OG.\tan\widehat{SOB}=OG.\tan 45^0=\frac{1}{3}BO=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SG.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{12}\Rightarrow\frac{6V}{a^3}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 13.

+ Ta có $S_{ABCD}=AB.AD=2a^2$

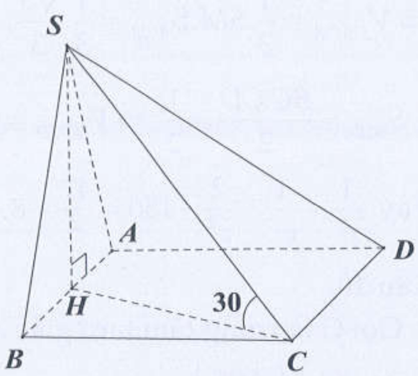
HC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCH}=30^0$

+ Xét tam giác BHC vuông tại B có:

$HC=\sqrt{BH^2+BC^2}=a\sqrt{2}$

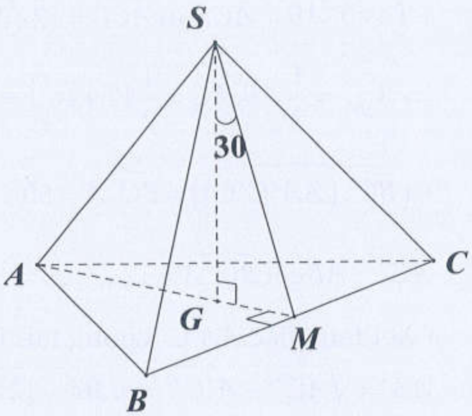
+ Xét tam giác SHC vuông tại H có :

$SH=HC.\tan\widehat{SCH}=HC.\tan 30^0=\frac{a\sqrt{6}}{2}$



Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.2a.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\frac{V}{a^3}\approx 0,82\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14.



+ Do ABC đều nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

+ Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

$\Rightarrow SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$, mà $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$

$\begin{cases}(SBC)\cap(SAM) = SM \\ (SBC)\perp(SAM), SG \subset (SAD)\end{cases}$ nên hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC) là SM

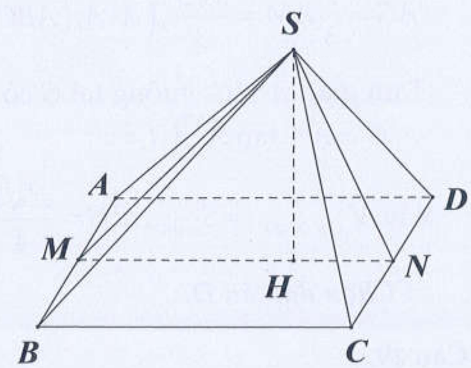
$\Rightarrow \left(\widehat{SG,(SBC)}\right) = \left(\widehat{SG,SM}\right) = \widehat{GSM} = 30^o$

+ Xét tam giác SGM vuông tại M có:

$SG = GM.\cot\widehat{GSM} = \dfrac{1}{3}.AM.\cot 30^0 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 15.



+ $S_{ABCD} = a^2$.

+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

Kẻ $SH \perp MN$

Ta có: $CD \perp MN, CD \perp SN \Rightarrow CD \perp (SMN)$

$\Rightarrow CD \perp SH$ mà $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

+ Ta có SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân tại $S \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$

+ Xét tam giác SMN có: $SM^2 + SN^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 = MN^2$

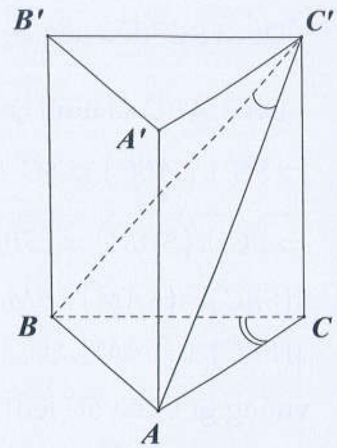
$\Rightarrow$ Tam giác SMN vuông tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{SM.SN}{MN} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2}}{a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = 4\sqrt{2} \approx 6,93 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 16. $V_{A'.ACD'} = V_{C.AA'D'} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta AA'D'}.CD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AA'.A'D'.CD = \dfrac{1}{6}.AA'.AD.AB = 2a^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 17.



+ Ta có $AB = AC.\tan\widehat{ACB} = 12\sqrt{3}cm$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}12.12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}cm^2$

+ $\widehat{\left(BC',\left(AA'C'C\right)\right)} = \widehat{BC'A} = 60^0$

$AC' = AB\cot\widehat{BC'A} = 12\sqrt{3}.\sqrt{3} = 36cm$

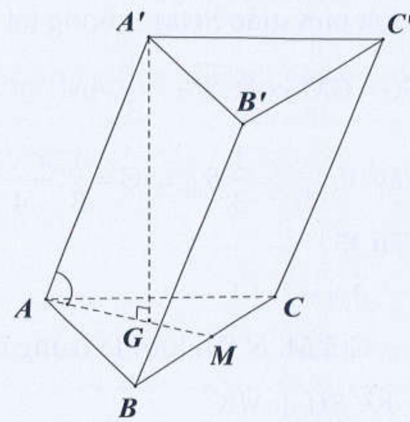
+ Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' có:

$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{36^2 - 12^2} = 24\sqrt{2}cm$

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = 72\sqrt{3}.24\sqrt{2} = 1728\sqrt{6}cm^3 \approx 4233cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 18.



+ Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ $A'ABC$ là tứ diện đều nên trọng tâm G của tam giác ABC là chân đường cao hạ từ A'

$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \widehat{\left(A'A,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{A'AG} = 60^0$

Tam giác $A'AG$ vuông tại G có :

$A'G = AG.\tan\widehat{A'AG} = a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 19.

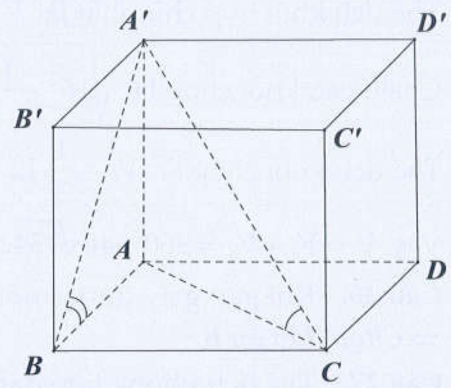
$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}cm^2 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{125\sqrt{3}}{4}cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 20.

$S_{ABCD} = 2a^2, AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{AC'^2 - \left(AB^2 + AD^2\right)} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABCD}.AA' = 2a^3\sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 21.



+ Ta có $AA' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \overline{(A'C,(ABCD))} = \widehat{A'CA} = 30^0$

$BC \perp AB, BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow \overline{(A'BC,(ABCD))} = \widehat{A'BA} = 60^0$

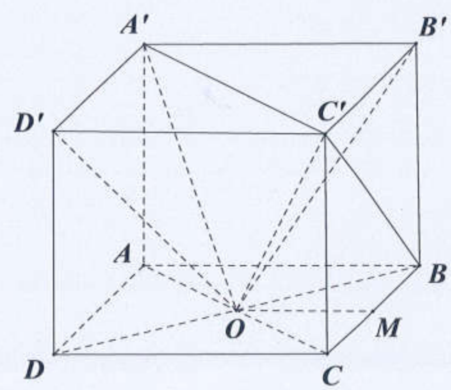
$+\Delta A'AC$ vuông tại $A \Rightarrow AC = AA'.\cot 30^o = 2a\sqrt{3}$

$+\ \Delta A'AB$ vuông tại $A \Rightarrow AB = AA'.\cot 60^o = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$+\ \Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.BC.AA' = \dfrac{16a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 22.



+ Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = a^3\sqrt{3}$

Khối $OA'B'C'D'$ có đáy và đường cao giống khối hộp nên: $V_{O.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp (BB'C')$

$V_{O.BCC'} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta BCC'}.OM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.B'C'.BB'.OM = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow x + y = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 23.

Dốc có dạng hình lăng trụ: $V = \dfrac{1}{2}.6.2,4.2.25^3 = 22500cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 24. Khối vật gồm một khối hộp chữ nhật và một khối lăng trụ

Thể tích khối hộp chữ nhật là: $V_1 = 8.12.15 = 1440cm^3$

Thể tích khối lăng trụ là: $V_2 = \dfrac{1}{2}.\sqrt{32}.\sqrt{32}.12 = 192cm^3$

Vậy $V = V_1 + V_2 = 1632cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 25. Khối vật gồm một khối hộp chữ nhật và một khối chóp đều
Thể tích khối hộp chữ nhật là: $V_1 = 12.10.8 = 960cm^3$

Chiều cao khối chóp là: $\sqrt{16^2 - \dfrac{12^2 + 10^2}{2}} = \sqrt{134}cm$

Thể tích khối chóp là: $V_2 = \dfrac{1}{3}.12.10.\sqrt{134} = 40\sqrt{134}cm^3$

Vậy $V = V_1 + V_2 = 960 + 40\sqrt{134}cm^3 \approx 1423cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 26. Khi gấp giấy được khối hộp chữ nhật có $V = 2,5.6.8 = 120cm^3$
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27. Thể tích phòng họp đảm bảo tối thiểu cho 100 người là: $4,48.100 = 448m^3$
Chiều dài tối thiểu là: $448 : (8 \times 4) = 14m$. Vậy cần phải mở rộng tối thiểu chiều dài 2m nữa $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28. $V = (2,5 - 2.0,1)(1,6 - 2.0,1)(1,4 - 0,1) = 31,878m^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

DẠNG 2: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN BẰNG CÁCH PHÂN CHIA LẮP GHÉP KHỐI HOẶC SO SÁNH KHỐI (TỈ SỐ)

Trong nhiều bài toán, việc tính trực tiếp thể tích khối đa diện như trong dạng 1 (phương pháp trực tiếp) có thể gặp khó khăn vì hai lí do:

+ Hoặc là khó xác định và tính được chiều cao.
+ Hoặc tính được diện tích đáy nhưng cũng không dễ dàng.

Khi đó, ta có thể làm theo các phương pháp gián tiếp được trình bày ngay sau đây.

1. Phương pháp

Tính thể tích bằng cách chia nhỏ

+ Ta chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện nhỏ mà có thể dễ dàng tính thể tích của chúng.
+ Sau đó, ta cộng các kết quả lại, ta sẽ có kết quả cần tìm.

Tính thể tích bằng cách bổ sung: Ta có thể ghép thêm vào khối đa diện một khối đa diện khác, sao cho khối đa diện thêm vào và khối đa diện mới có thể dễ dàng tính được thể tích.

Tính thể tích bằng tỉ số thể tích: So sánh thể tích khối cần tính với một đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích. Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán:

Bài toán: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy A', B', C' tương ứng trên cạnh SA, SB, SC.

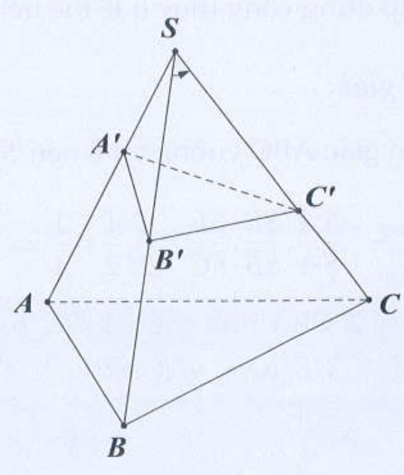
Khi đó: $\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}}$

Chứng minh:

Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{A'SB'C'}}{V_{ASBC}} = \dfrac{\frac{1}{3}d\left(A',(SB'C')\right).S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC}}$

$$= \frac{\frac{1}{3}d\left(A',(SBC)\right).\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\alpha}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha}$$

$$= \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} \Rightarrow (đpcm)$$



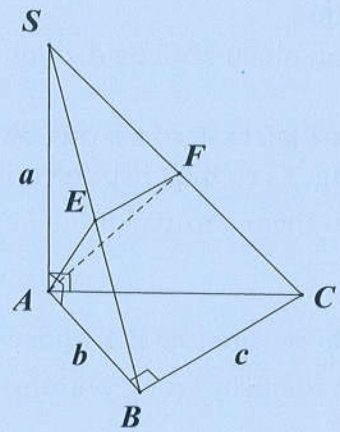
Trong đó: $.\alpha = \widehat{B'SC'} = \widehat{BSC}$

Vì $AA'\cap(SBC)=S\Rightarrow\frac{d\left(A',(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)}=\frac{SA'}{SA}$

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm $A\equiv A', B\equiv B', C\equiv C'$. Thông thường, đối với loại này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu....

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình vẽ với *E, F* là trung điểm các cạnh bên *SB* và *SC.*



Khối *S.AEF* có thể tích là

A. $\frac{1}{24}abc.$ **B.** $\frac{1}{12}abc.$ **C.** $\frac{1}{8}abc.$ **D.** $\frac{11}{12}abc.$

Phân tích:

+ Tam giác *ABC* vuông tại *B* nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA.BC$

+ *SA* là chiều cao của khối chóp *SABC* nên ta tính được thể tích chóp *SABC* theo công thức: $V_{SABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA$

+ Áp dụng công thức tỉ lệ thể tích $\frac{V_{SAEF}}{V_{SABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}$ ta tìm được V_{SAEF}

Lời giải :

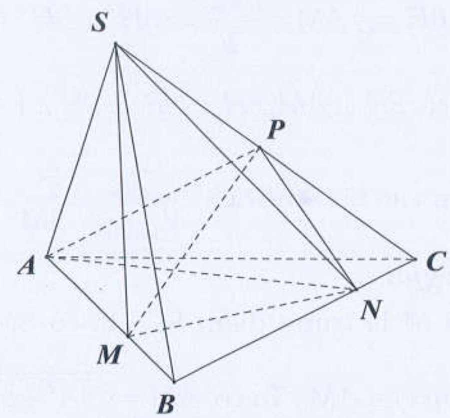
Tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{6}abc$

$\frac{V_{SAEF}}{V_{SABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SAEF}=\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{1}{24}abc\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp *SABC*, trên *AB, BC, SC* lần lượt lấy các điểm *M, N, P* sao cho $AM=2MB, BN=4NC, SP=PC$. Tỉ lệ thể tích hai khối chóp *S.BMN* và *A.CPN* là

A. $\frac{4}{3}.$ **B.** $\frac{8}{3}.$ **C.** $\frac{5}{6}.$ **D.** 1.

Phân tích:



+ Để áp dụng được công thức tỉ lệ thể tích ta cần đổi đỉnh sao cho khối chóp cần tính có các cạnh tỉ lệ tương ứng với các cạnh hình chóp SABC.

+ Với khối chóp $S.MNB$ ta chuyển đỉnh là B đáy là SMN

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{B.MNS}}{V_{B.ACS}}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BS}{BS}$$

$$AM=2MB\Rightarrow\frac{BM}{BA}=\frac{1}{3},\ BN=4BC\Rightarrow\frac{BN}{BC}=\frac{4}{5}$$

+ Với khối chóp $ACPN$ ta chuyển đỉnh là C đáy là ANP :

$$\frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{C.ANP}}{V_{C.ABS}}=\frac{CA}{CA}.\frac{CN}{CB}.\frac{CP}{CS},\quad BN=4BC\Rightarrow\frac{CN}{CB}=\frac{1}{5},\ SP=PC\Rightarrow\frac{CP}{CS}=\frac{1}{2}$$

Sau đó lập tỉ lệ của hai tỉ số thu được kết quả

Lời giải :

$$+\ \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{B.MNS}}{V_{B.ACS}}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BS}{BS}=\frac{1}{3}.\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

$$+\ \frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{C.ANP}}{V_{C.ABS}}=\frac{CA}{CA}.\frac{CN}{CB}.\frac{CP}{CS}=\frac{1}{5}.\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

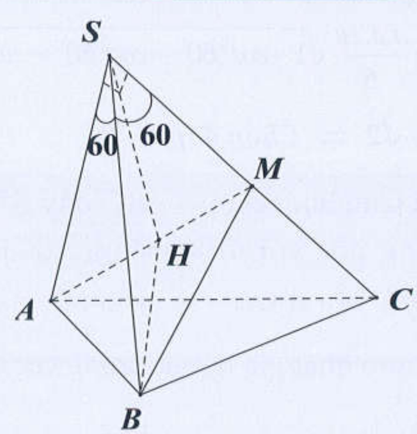
$\Rightarrow\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}}=\dfrac{4}{15}:\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=a$, $SC=2a$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60^o$, $\widehat{ASC}=90^o$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỉ số $\dfrac{6V}{a^3}$ là

A. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Phân tích :



Bài toán yêu cầu tính thể tích của khối $S.ABC$ ta rất khó xác định chiều cao của khối chóp do vậy cần dựng thêm đường phụ.

Gọi M là trung điểm SC, ta có $SM=a$ $\Rightarrow\Delta SAM$ vuông cân tại S. Gọi H là trung điểm của $AM\Rightarrow SH=\dfrac{1}{2}AM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có : $AB=BM=a$ và $AB^2+BM^2=AM^2$

$\Rightarrow\Delta ABM$ vuông cân tại B

$\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$ ta dễ dàng tính được $V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABM}$.

Dựa vào tỉ số thể tích: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM}$

Lời giải :

Gọi M là trung điểm SC, ta có $SM = a \Rightarrow \Delta SAM$ vuông cân tại S. Gọi H là trung điểm của AM. Ta có $AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $SM = SB = a$ và $\widehat{BSC} = 60^o \Rightarrow \Delta BSM$ đều $\Rightarrow BM = a \Rightarrow \Delta BSM$ đều

Ta có $AB = BM = a \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B.

Mặt khác: $AB^2 + BM^2 = 2a^2$ và $AM^2 = 2a^2 \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2$

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại B *(định lý Pitago đảo)* $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SH^2 + BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2$

$\Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H *(định lý Pitago đảo)*

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$

$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

**** Tổng quát:*** Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{ASC} = \gamma$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha cos\beta cos\gamma}$

Áp dụng vào bài này ta được:

$$V_{S.ABC} = \frac{a.a.2a}{6}\sqrt{1 - cos^2 60^0 - cos^2 60^0 - cos^2 90^0 + 2cos60^0 cos60^0 cos90^0} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$\Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB và SC. Thể tích của khối chóp $A.BCKH$ là V. Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ gần nào nhất giá trị nào trong các giá trị sau

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phân tích

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC\ \Rightarrow V_{SABC}=\dfrac{1}{6}AB.BC.SA$

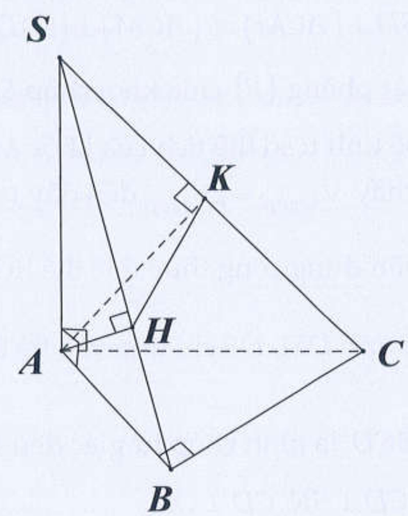
Mặt phẳng (AHK) chia khối SAB thành hai khối: $SAHK$ và $ABCKH$

$\Rightarrow V_{ABCKH}=V_{SABC}-V_{SAHK}$

Ta tính V_{SAHK} dựa vào công thức $\dfrac{V_{SAHK}}{V_{SABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC}$

Dựa vào các tam giác vuông SAB, SAC ta tính được tỉ lệ $\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC}$

Lời giải :



+ Ta có :

$V_{SABC}=\dfrac{1}{6}AB.BC.SA=\dfrac{1}{6}.a.a\sqrt{3}.2a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A\Rightarrow K$ là trung điểm của SC.

+ ΔSAB vuông tại A có :

$\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{SH.SB}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{4a^2}{4a^2+a^2}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{SAHK}}{V_{SABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow V_{SAHK}=\dfrac{2}{5}.V_{SABC}=\dfrac{2}{5}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$

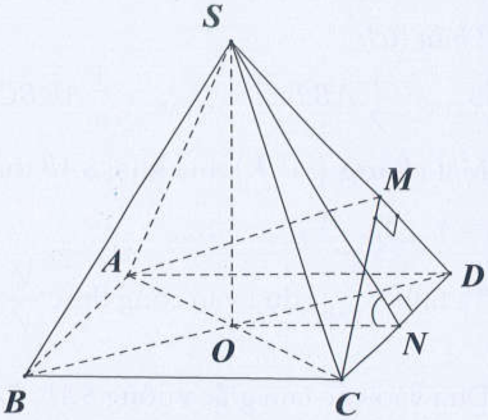
Vậy $V_{ABCKH}=V_{SABC}-V_{SAHK}=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2a^3.\sqrt{3}}{15}=\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{V}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\approx 2,89\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thoả mãn $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

A. 0,11. **B.** 0,13. **C.** 0,7. **D.** 0,9.

Phân tích:



$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO\perp(ABCD)$. Các mặt bên tạo với đáy góc bằng nhau nên ta chỉ cần chọn mặt (SCD)

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SNO}$

Kẻ $CM\perp SD$.

Ta có $\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp SO \end{cases} \Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$

$\Rightarrow SD\perp(ACM)\Rightarrow(ACM)\perp(SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

+ Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM$

Ta sẽ tính tỉ số thể tích của khối $MACD$ so với khối $SABCD$.

Dễ thấy $V_{SABCD}=2V_{SACD}$ đến đây ta đổi đỉnh khối $M.ACD$ thành $D.MAC$

và vận dụng công thức tỉ lệ thể tích $\dfrac{V_{D.AMC}}{V_{D.SABC}}=\dfrac{DM}{DS}.\dfrac{DA}{DA}.\dfrac{DC}{DC}=\dfrac{DM}{DS}$

Việc tính DM, DS chỉ dựa vào hệ thức lượng trong các tam giác vuông .

Lời giải:

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO\perp(ABCD)$. Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow\begin{cases} CD\perp SN, CD\perp ON \\ (SCD)\cap(ABCD)=CD \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SNO}$$

Kẻ $CM\perp SD$. Ta có $\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp SO \end{cases} \Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$

$\Rightarrow SD\perp(ACM)\Rightarrow(ACM)\perp(SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

+ Xét tam giác SON vuông tại O có : $SN=\dfrac{ON}{\cos\widehat{SNO}}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3a}{2}$

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$$

+ Xét tam giác SOD vuông tại O có : $SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Ta có $S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}CM.SD=\dfrac{1}{2}SN.CD\Rightarrow CM=\dfrac{SN.CD}{SD}=\dfrac{\frac{3a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$

+ Xét tam giác MCD vuông tại M có : $DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{10}$

Ta có : $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DA}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow V_{MACD}=\frac{1}{10}V_{SABCD}$. Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM \Rightarrow V_{SABCD}=V_{MACD}+V_{SABCM} \quad \Rightarrow V_{SABCM}=\frac{9}{10}V_{SABCD}$

Do đó : $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\frac{1}{9}\approx 0,11 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Tổng quát: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là $\frac{V_1}{V_2}=\cos^2\alpha$

Lời giải:

Ta có:

$$SD=\sqrt{SN^2+ND^2}=\sqrt{ON^2.\frac{1}{\cos^2\widehat{SNO}}+ND^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+1}=\frac{a}{2.\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+1}$$

Ta có : $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CM.SD=\frac{1}{2}SN.CD$

$$\Rightarrow CM=\frac{SN.CD}{SD}=\frac{\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\alpha}.a}{\frac{a}{2.\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+1}}=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{1+\cos^2\alpha}}=\frac{a.\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}=\frac{1}{2}\frac{\frac{a.\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}}{\frac{a}{2.\cos\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow V_{MACD}=\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD}\Rightarrow V_{SABCM}=\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right)V_{SABCD}=\frac{1}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD}$$

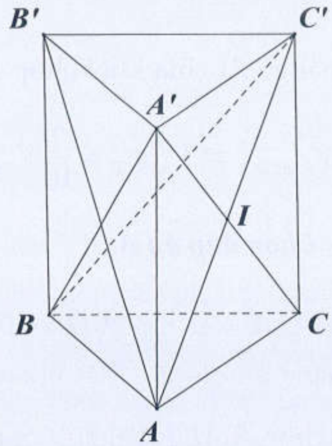
Do vậy : $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\cos^2\alpha$

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là V. Thể tích khối chóp $ACB'D'$ là

A. $\dfrac{V}{4}$. B. $\dfrac{V}{3}$. C. $\dfrac{3V}{4}$. D. $\dfrac{2V}{3}$.

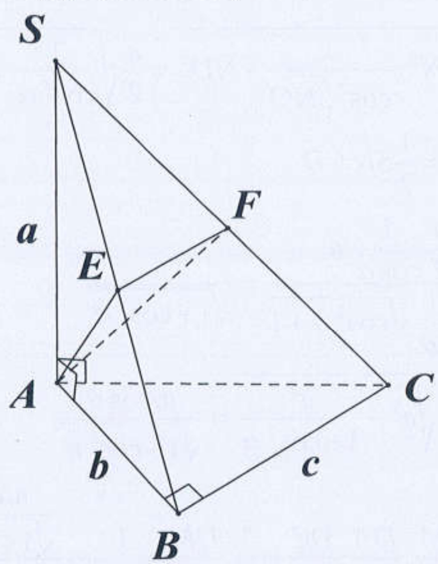
Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V.



Trong các hình dưới đây, hình có thể tích $\dfrac{2V}{3}$ là

A. $A.A'B'C'$. B. $C'.ABC$. C. $I.ABB'A'$. D. $A'.BCC'B'$.

Câu 3. Cho hình vẽ với E, F là trung điểm các cạnh bên SB và SC.



Khối $ABCFE$ có thể tích là

A. $\dfrac{1}{24}abc$. B. $\dfrac{1}{12}abc$. C. $\dfrac{1}{8}abc$. D. $\dfrac{1}{3}abc$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2cm, SB = 3cm, SC = 4cm$, $\widehat{ASB} = 60^o$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{ASC} = 120^0$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $2\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $20cm$, cạnh $SA = 30cm$ và vuông góc với đáy . Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ gần nhất giá trị nào dưới đây

A. $2120cm^3$. **B.** $2770cm^3$. **C.** $1440cm^3$. **D.** $1470cm^3$.

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tỷ lệ $T = \dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}$ có giá trị là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $15cm$. Gọi M là điểm thuộc AA' sao cho $AM = 10cm$. Mặt phẳng (P) chứa CM và song song với BD chia khối lập phương thành hai phần. Thể tích của phần lớn hơn là

A. $1687,5cm^3$. **B.** $2531,25cm^3$. **C.** $2250cm^3$. **D.** $1125cm^3$.

Câu 8. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh $AA' = 2a$ và tạo với đáy một góc 45^0. Thể tích khối tứ diện $ACA'B'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 9. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4cm, BC = 8cm, AA' = 6cm$. Lấy E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD. Mặt phẳng $(A'EF)$ chia khối hộp thành hai phần. Gọi $x(cm^3)$ là thể tích phần nhỏ, $y(cm^3)$ là thể tích phần lớn. Giá trị $|5x-7y|$ là

A. 160. **B.** 512. **C.** 544. **D.** 128.

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30^0. Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp $S.ABC$ thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

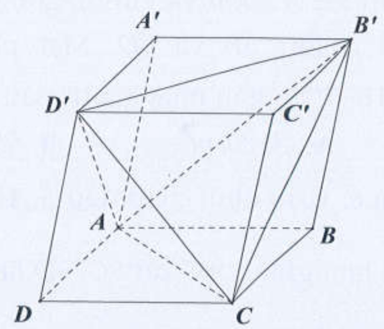
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	D	C	A	D	B	C	A	C	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

$V_{ACB'D'} = V - V_{B.AB'C} - V_{A'.AB'D'} - V_{C'.CB'D'} - V_{D.ACD'}$

$\Rightarrow V_{ACB'D'} = V - 4.\dfrac{V}{6} = \dfrac{V}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Chú ý: *Khối tứ diện có 6 cạnh tạo bởi 3 cặp đường chéo (không song song) của các mặt bên song song của hình hộp có thể tích:* $V_{\text{Tứ diện}} = \dfrac{V_{\text{Hộp}}}{6}$

Câu 2. $V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{2V}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 3. Tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}bc \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{6}abc$

$\dfrac{V_{SAEF}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SAEF} = \dfrac{1}{4}V_{SABC} = \dfrac{1}{24}abc$

$\Rightarrow V_{ABCFE} = V_{SABC} - V_{SAEF} = \dfrac{1}{6}abc - \dfrac{1}{24}abc = \dfrac{1}{8}abc \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4. Tương tự ví dụ 3, hoặc áp dụng công thức giải nhanh:

$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha cos\beta cos\gamma}$

$V_{S.ABC} = \dfrac{2.3.4}{6}\sqrt{1 - cos^2 60^0 - cos^2 90^0 - cos^2 120^0 + 2cos60^0 cos90^0 cos120^0} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

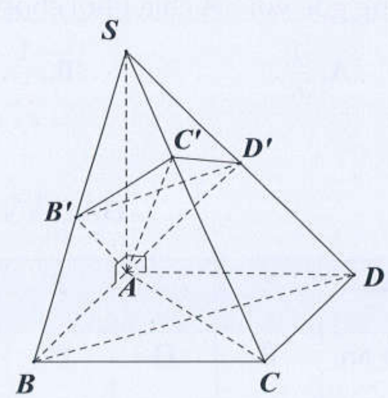
Câu 5.

$+\ V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.30.20^2 = 4000cm^3$

$\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \dfrac{30^2}{30^2 + 20^2 + 20^2} = \dfrac{9}{17}$

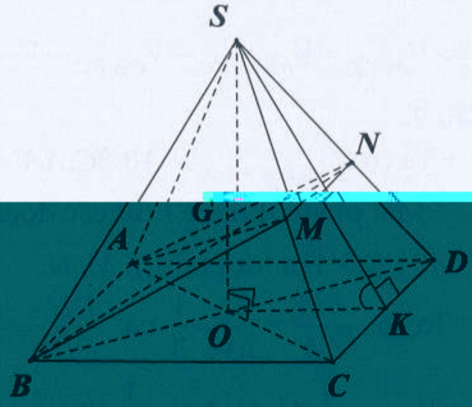
$\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \dfrac{30^2}{30^2 + 20^2} = \dfrac{9}{13}$

$+\ \dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2V_{SAC'D'}}{2V_{SACD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}$



$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{9}{17}.\dfrac{9}{13}V_{S.ABCD} = \dfrac{81}{221}.4000 = \dfrac{324000}{221} \approx 1466cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6.



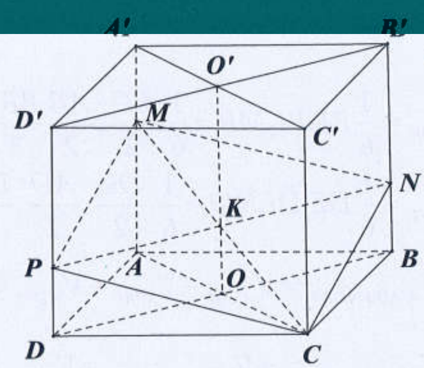
+ $(SCD)\cap(P)=MN\Rightarrow CD//MN$ nên M, N lần lượt là trung điểm SC, SD

+ Ta có $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{SAMN}+V_{SABM}}{V_{SACD}+V_{SABC}}=\frac{V_{SAMN}}{2V_{SACD}}+\frac{V_{SABM}}{2V_{SABC}}$

$=\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}+\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B***

Câu 7.



+ $OO'\cap MC=K$, Từ K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BB', DD' lần lượt tại N và P

mặt phẳng (P) là $(MNCP)$

+ OK là đường trung bình của ΔCAM

$\Rightarrow OK=\frac{1}{2}AM=5cm\Rightarrow DP=OK=5cm$

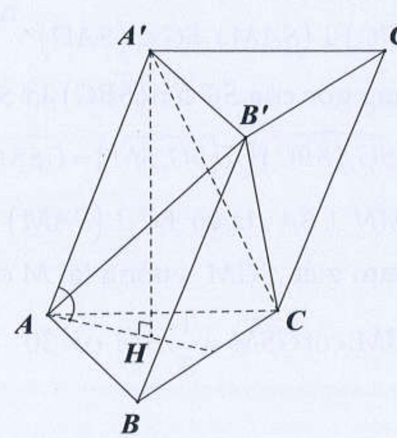
+ $V_{ABCD.A'B'C'D'}=15^3=3375cm^3$ mặt phẳng (P) chia khối lập phương thành hai phần $A'B'C'D'MNCP$ và $ABCDPMN$

+ Ta có $(ACC'A')$ chia khối $ABCDPMN$ thành hai phần bằng nhau do vậy:

$$V_{ABCDPMN}=2V_{CADPM}=2.\frac{1}{3}.S_{ADPM}.CD=\frac{1}{3}.(DP+AM).AD.CD=1125cm^3$$

$\Rightarrow V_{A'B'C'D'.MNCP}=3375cm^3-1125cm^3=2250cm^3\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 8.



+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Ta có $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right)=\widehat{A'AH}=45^o$

$\Delta A'AH$ vuông tại H có:

$A'H=AA'.\sin\widehat{A'AH}=a\sqrt{2}$

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'H=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp $C.A'B'C'$, $B'.ABC$ và $ACA'B'$ ta có:

$V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow V_{ACA'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

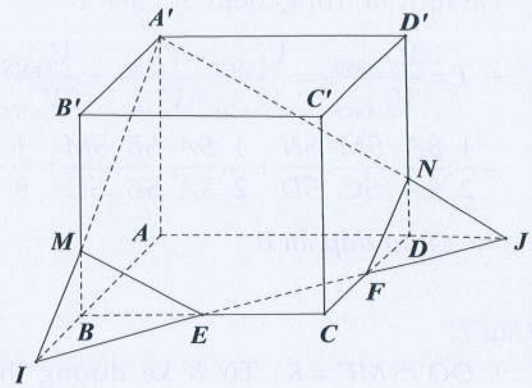
Câu 9.

+ Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.BC.AA' = 192cm^3$

+ Mặt phẳng $(A'EF)$ cắt các đoạn AB, AD, BB', DD' lần lượt tại I, J, M, N.

Ta có: $\dfrac{BM}{AA'} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{DN}{DD'} = \dfrac{JD}{JA} = \dfrac{1}{3}$

$V_{A'AIJ} = \dfrac{1}{6}AI.AJ.AA' = \dfrac{1}{6}.12.6.6 = 72cm^3$



$V_{MBIE} = \dfrac{1}{6}BE.BI.MB = \dfrac{1}{6}.\dfrac{BC}{2}.\dfrac{AB}{2}\dfrac{BB'}{3} = \dfrac{1}{6}.4.2.2 = \dfrac{8}{3}cm^3$,

$V_{NDFJ} = \dfrac{1}{6}DF.DJ.ND = \dfrac{1}{6}.\dfrac{DC}{2}.\dfrac{AD}{2}.\dfrac{DD'}{3} = \dfrac{1}{6}.2.4.2 = \dfrac{8}{3}cm^3$

$\Rightarrow V_{A'MEFNDAB} = V_{A'AIJ} - V_{MBIE} - V_{NDFJ} = \dfrac{200}{3}cm^3$

$\Rightarrow V_{A'B'C'D'NFEM} = V_{ABCDA'B'C'D'} - V_{A'MEFNDAB} = \dfrac{376}{3}cm^3 \Rightarrow |5x - 7y| = 544$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 10.

+ Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

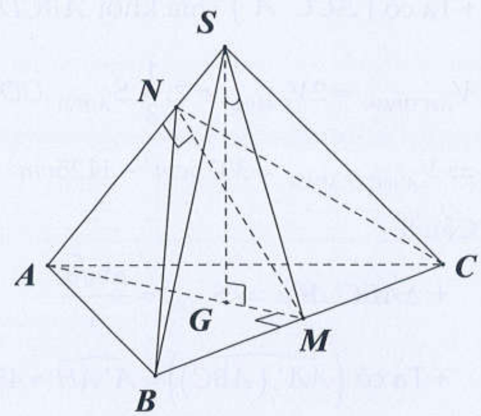
$\Rightarrow SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$,

mà $BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$

$\begin{cases}(SBC) \cap (SAM) = SM \\ (SBC) \perp (SAM), SG \subset (SAD)\end{cases}$ nên hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC) là SM

$\Rightarrow \left(\widehat{SG,(SBC)}\right) = \left(\widehat{SG,SM}\right) = \widehat{GSM} = 30^o$



+ Kẻ $MN \perp SA$, ta có $BC \perp (SAM) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow SA \perp (NBC)$ nên (P) là (NBC).

+ Xét tam giác SGM vuông tại M có:

$SG = GM.\cot\widehat{GSM} = \dfrac{1}{3}.AM.\cot 30^0 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SM = \dfrac{SG}{\cos\widehat{GSM}} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

+ Xét tam giác SGA vuông tại G có: $SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

$$S_{\Delta SAM}=\frac{1}{2}MN.SA=\frac{1}{2}SG.AM \Rightarrow MN=\frac{SG.AM}{SA}=\frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}}=\frac{3a\sqrt{7}}{14}$$

+ Xét tam giác SNM vuông tại N có:

$$SN=\sqrt{SM^2-MN^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2}=\frac{a\sqrt{21}}{42}$$

Ta có: $\frac{V_{SNBC}}{V_{SABC}}=\frac{SN}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{SN}{SA}=\frac{\frac{a\sqrt{21}}{42}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}}=\frac{1}{7}\Rightarrow V_{SNBC}=\frac{1}{7}V_{SABC}$. Mặt phẳng (P) chia khối chóp thành 2 khối $SNBC$ và $NABC \Rightarrow V_{SABC}=V_{SNBC}+V_{NABC}\Rightarrow V_{NABC}=\frac{6}{7}V_{SABC}$

Vậy $\frac{V_{SNBC}}{V_{NABC}}=\frac{1}{6}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A***

DẠNG 3: BÀI TOÁN THỂ TÍCH KẾT HỢP VỚI VIỆC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. Phương pháp

Nội dung bài toán: Thể tích khối đa diện trong các dạng toán này phụ thuộc một tham số nào đó *(tham số có thể là góc, hoặc là độ dài cạnh)*. Bài toán đòi hỏi xác định giá trị của tham số để thể tích đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Phương pháp giải:

+ ***Bước 1:*** Chọn tham số, thực chất là chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

+ ***Bước 2:*** Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta xem đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích V của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

+ ***Bước 3:*** Đến đây, nhiệm vụ của bài toán hình học coi như đã "kết thúc". Ta có một hàm số $f(x), \forall x \in D$ mà cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó. Dùng bất đẳng thức cổ điển (AM-GM hay Cauchy-Schwarz) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất ấy.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho khối hộp chữ nhật có thể tích bằng 16. Tổng độ dài ba cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh đạt giá trị nhỏ nhất là

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải :

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a,b,c với $a,b,c>0$. Ta có $V=a.b.c=16$

Tổng độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh $a+b+c$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*: $a+b+c\ge 3\sqrt{a.b.c}=12$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hình hộp nhật chữ nhật trở thành hình lập phương

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là S. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là

A. $\frac{S\sqrt{S}}{3}$. **B.** $\frac{S\sqrt{S}}{36}$. **C.** $\frac{S\sqrt{6S}}{36}$. **D.** $\frac{S\sqrt{3S}}{9}$.

Lời giải :

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a,b,c với $a,b,c>0$. Ta có $S=2ab+2ac+2bc$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*: $S=2ab+2ac+2bc\ge 3\sqrt[3]{2ab.2ac.2bc}=6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

$6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le S\Rightarrow a^2b^2c^2\le\frac{S^3}{216}\Rightarrow abc\le\sqrt{\frac{S^3}{216}}=\frac{S\sqrt{6S}}{36}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hình hộp nhật chữ nhật trở thành hình lập phương

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Trên 3 tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi, lấy lần lượt các điểm A,B,C sao cho $OA = a; OB = b; OC = c$. Giả sử A cố định còn B,C thay đổi nhưng luôn luôn thỏa $OA = OB + OC$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ lớn nhất là

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{a^3}{24}$. **D.** $\frac{a^3}{32}$.

Lời giải :

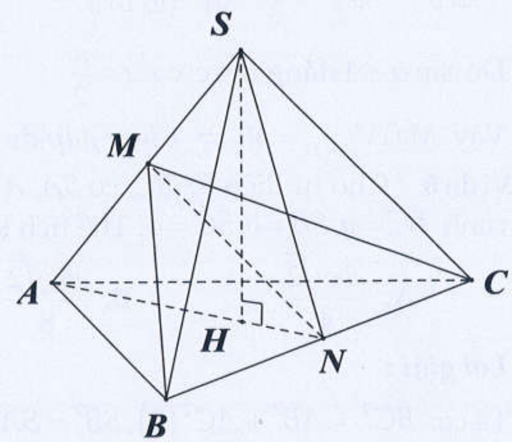
$$V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}a.(bc) \le \frac{1}{6}a.\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{24}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c = \frac{a}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA = x,\ x \in \left(0;\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

Lời giải :



Ta có tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC.

Ta có ΔSAB và ΔSAC là hai tam giác cân tại B và C nên $SA \perp BM, SA \perp CM$

$\Rightarrow SA \perp (BCM) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác :

$$BM = CM = \sqrt{AB^2 - (AM)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$\Rightarrow \Delta BMC$ cân tại $M \Rightarrow MN \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAN)$. Kẻ $SH \perp AN$. Do $BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SH \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có: $MN = \sqrt{SN^2 - SM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2}$

$$S_{\Delta SAN} = \frac{1}{2}SA.NM = \frac{1}{2}SH.AN \Rightarrow SH = \frac{SA.NM}{AN} \Rightarrow SH = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{12} \le \frac{1}{12}.\left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Vậy $MaxV_{S.ABC} = \frac{1}{8}$ đạt được khi và chỉ khi: $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

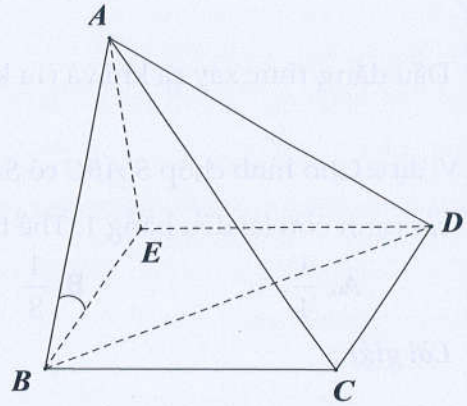
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Tổng quát: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA = x$, các cạnh còn lại đều bằng a (a là hằng số) với $x \in \left(0; a\sqrt{3}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{8}$

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD = 6$, khoảng cách giữa AB và CD là 8, góc giữa AB và CD là α. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. 48. **B.** 52. **C.** 64. **D.** 36.

Lời giải :



Dựng hình bình hành $BCDE$

Ta có: $\left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{AB,BE}\right) = \alpha$

$\Rightarrow S_{\Delta ABE} = \dfrac{1}{2}.AB.BE.\sin\alpha = 18.\sin\alpha$

$CD // (ABE) \Rightarrow d_{(D,(ABE))} = d_{(AB,CD)} = 8$

$V_{ABCD} = V_{ABED} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABE}.d_{(D,(ABE))} = 48.\sin\alpha$

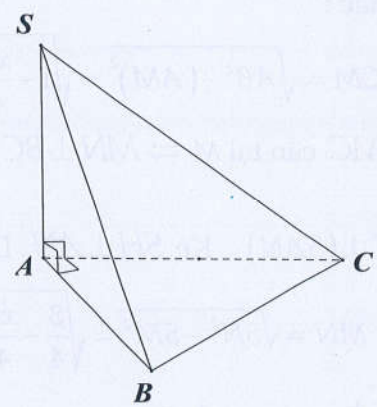
Do $\sin\alpha \le 1$ đẳng thức $\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy $MaxV_{ABCD} = 48 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 6: Cho tứ diện $SABC$, có SA, AB, AC đôi một vuông góc với nhau, độ dài các cạnh $BC = a, SB = b, SC = c$. Thể tích khối tứ diện $SABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{abc\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{abc\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\dfrac{abc\sqrt{2}}{12}$ **D.** $\dfrac{abc\sqrt{2}}{24}$

Lời giải :



Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2\,(1), SB^2 = SA^2 + AB^2\,(2)$,

$SC^2 = SA^2 + AC^2\,(3)$

$(2)+(3) \Rightarrow SA^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

$(1)+(2) \Rightarrow AB^2 = \dfrac{BC^2 + SB^2 - SC^2}{2} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

$(1)+(3) \Rightarrow AC^2 = \dfrac{BC^2 + SC^2 - SB^2}{2} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}.SA.AB.AC = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{8}}$$

Ta có: $\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = b^4 - \left(a^2 - c^2\right)^2 \le b^4$

Tương tự : $\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \le a^4$, $\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right) \le c^4$

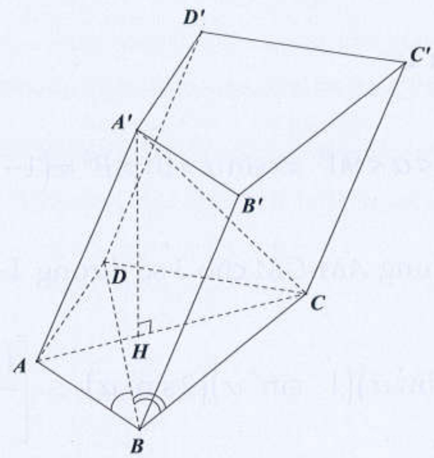
$\Rightarrow \left(b^2+c^2-a^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\left(a^2+c^2-b^2\right)^2 \le a^4b^4c^4 . \Rightarrow V_{SABC} \le \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{a^2b^2c^2}{8}} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{24}$.

Dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a=b=c$. Vậy $MaxV_{SABC} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{24} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD=a\sqrt{3}$, $\widehat{ABD}=\alpha$, $\widehat{CBD}=\beta$, tam giác $A'AC$ đều. Hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AC. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\dfrac{9a^3}{4}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải :



Ta có: $\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = 2R = BD \Rightarrow AC = \sqrt{3}a.\sin(\alpha+\beta)$

$\Delta A'AC$ đều $\Rightarrow A'H = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a.\sin(\alpha+\beta)}{2}$

$+\Delta BAD$ vuông tại $A \Rightarrow AB = BD\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB.BD.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}BD^2.\sin\alpha.\cos\alpha$

$= \dfrac{3a^2}{2}\sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{3a^2}{4}\sin 2\alpha$

$+\Delta BCD$ vuông tại $C \Rightarrow BC = BD\cos\beta$

$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}BC.BD.\sin\beta = \dfrac{1}{2}BD^2.\sin\beta.\cos\beta = \dfrac{3a^2}{2}\sin\beta.\cos\beta = \dfrac{3a^2}{4}\sin 2\beta$

$\Rightarrow S_{\Delta ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \dfrac{3a^2}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \dfrac{3a^2.\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{2}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{3a^2.\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{2}.\dfrac{3a.\sin(\alpha+\beta)}{2}$

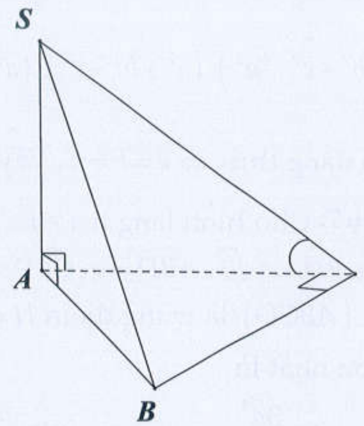
$= \dfrac{9a^3\sin^2(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{4}$ Ta có: $\sin^2(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) \le 1 \Rightarrow V_{ABCDA'B'C'D'} \le \dfrac{9a^3}{4}$.

Dấu đẳng thức $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta \\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$

Vậy $MaxV_{ABCDA'B'C'D'} = \dfrac{9a^3}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $SC=a$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc α. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{a^3}{16}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.



+ $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=\alpha$

+ ΔSAC vuông tại A có: $\begin{cases} SA=SC.\sin\alpha=a\sin\alpha \\ AC=SC.\cos\alpha=a\cos\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}AC^2\right).SA$

$=\frac{1}{6}.(a\cos\alpha)^2.a\sin\alpha=\frac{a^3}{6}\cos^2\alpha.\sin\alpha$

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P=\cos^2\alpha.\sin\alpha=\left(1-\sin^2\alpha\right).\sin\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Cách 1:

Vì $0<\alpha<90^0 \Rightarrow \sin\alpha>0 \Rightarrow P^2=\left(1-\sin^2\alpha\right)^2\sin^2\alpha=\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}$.

Áp dụng *AM-GM* cho 3 số dương $1-\sin^2\alpha, 1-\sin^2\alpha$, và $2\sin^2\alpha$, ta được:

$$\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right) \le \left[\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(2\sin^2\alpha\right)}{3}\right]^3=\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}\le\frac{4}{27}\Rightarrow P^2_{\max}=\frac{4}{27}\Rightarrow P_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi $1-\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $MaxV_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{6}.P_{\max}=\dfrac{a^3}{6}.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Cách 2:

Đặt $t=\sin\alpha$. Vì $0<\alpha<90^0$ nên $0<\sin\alpha<1\Rightarrow 0<t<1$

Ta có: $P=f(t)=\left(1-t^2\right)t=-t^3+t$ xác định và liên tục trên $(0;1)$.

$$f'(t)=-3t^2+1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=\dfrac{\sqrt{3}}{3} & (tm) \\ t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} & (loai)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(t)$	0		$+$	0	$-$	
$f(t)$			$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

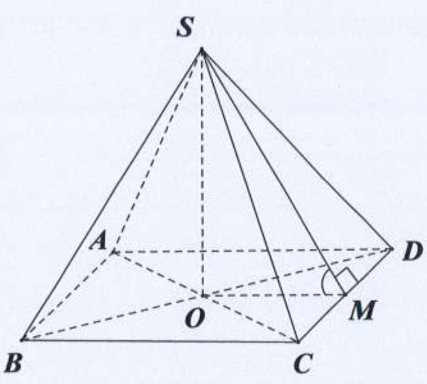
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\underset{(0;1)}{Max} f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $MaxV_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}.P_{\max} = \frac{a^3}{6}.\frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ khi và chỉ khi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{4a^3\sqrt{7}}{49}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{15}}{75}$.

Lời giải :



$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm CD

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SMO} = 60^0$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x

+ Tam giác SMC vuông tại M có:

$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$

+ Tam giác SOM vuông tại O có:

$OM = SM.\cos\widehat{SMO} = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \cos\alpha.\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)\cos^2\alpha$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{4a^2.\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}{1+\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = \frac{4a^2}{2+\tan^2\alpha} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}$$

Ta có: $SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \frac{x}{2}.\tan\alpha = \frac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}.\frac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}} = \frac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$$

Do $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\alpha > 0$. Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{4}{3}\frac{a^3.\tan\alpha}{\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$ đạt giá trị lớn nhất. Ta xét $f(\alpha) = \frac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}$

Áp dụng AM-GM cho ba số dương $\frac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha};\frac{1}{2+\tan^2\alpha};\frac{1}{2+\tan^2\alpha}$ ta có :

$$f(\alpha) = \frac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3} = \frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}.\frac{1}{2+\tan^2\alpha}.\frac{1}{2+\tan^2\alpha}$$

$$\le \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha} + \frac{1}{2+\tan^2\alpha} + \frac{1}{2+\tan^2\alpha}\right)\right]^3 = \frac{1}{27}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2+\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $MaxV_{SABCD} = \frac{4a^3}{3\sqrt{\left(2+1\right)^3}} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP PHẦN THỂ TÍCH

DẠNG 1: HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 3a$, $BC = 4a$, $AC = 5a$. $AD = 6a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. $6a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** $18a^3$. **D.** $36a^3$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài là a. Thể tích khối chóp $S.ABD$ bằng V. Giá trị $\frac{6V}{a^3}$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a, SA = 3a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB = 2$, $AC = 4$, $AD = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Thể tích khối chóp $S.ABMD$ là

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{9a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{2}$. **D.** $\frac{9a^3}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BC = 3a, AC = a\sqrt{10}$, Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC} = 30^0$ $SA = a$, $\widehat{SCA} = 45^0$ và SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau ?

A. $0,01$. **B.** $0,05$. **C.** $0,08$. **D.** 1.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân $BA = BC = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB với mặt phẳng đáy bằng 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỷ số $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{V}$ có giá trị là

A. 24. **B.** 18. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh SA vuông góc với đáy, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.GBC$ bằng V. Tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = CD = 2a$, cạnh bên BC vuông góc với mặt phẳng (ACD). Thể tích khối tứ diện là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SC = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SD vuông góc với đáy, cho $AB = AD = a, CD = 3a, SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa BD và mặt phẳng (DAC) là 30^0. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là V. Tỉ số $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{V}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 15. Cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 60^o$, $\widehat{ASB} = 45^o$. Thể tích khối tứ diện $SABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.BCD$ là V. Tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 1,75. **B.** 1,15. **C.** 3,5. **D.** 4,2.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^0$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, cạnh SM tạo với mặt phẳng đáy góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.AMCD$ là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^0$ $BC = 2a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{18}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a, AD = 2a$, $\widehat{BAD} = 60^0$. SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tỷ số $\dfrac{3V}{a^3}$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi $AC = 2a, BD = 3a$ $AC \perp BD$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc α thoả mãn $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{12}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	B	D	B	C	A	A	C	B	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	A	D	D	D	C	B	B	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}SA=\dfrac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.\sqrt{3}a=a^3\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2.

ΔABC có: $AB^2+BC^2=(3a)^2+(4a)^2=25a^2=AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại B

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=6a^2\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.AD=\dfrac{1}{3}.6a^2.6a=12a^3\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3.

$S_{\Delta ABD}=\dfrac{S_{ABCD}}{2}=\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow V_{S.ABD}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABD}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{2}.a=\dfrac{a^3}{6}\Rightarrow\dfrac{6V}{a^3}=1\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.

$S_{ABCD}=AB.BC=2a^2\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}.2a^2.3a=2a^3\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

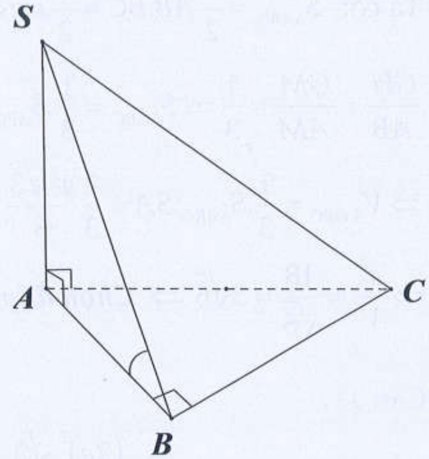
Ta có: $AB\perp AC, AB\perp AD\Rightarrow AB\perp(ACD)$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=4\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}AD=\dfrac{1}{3}.4.6=8\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 6.

$S_{ABMD}=\dfrac{1}{2}AB(AD+BM)=\dfrac{9a^2}{4}\Rightarrow V_{S.ABMD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABMD}.SA=\dfrac{3a^3}{4}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7.



+ Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{3a^2}{2}$

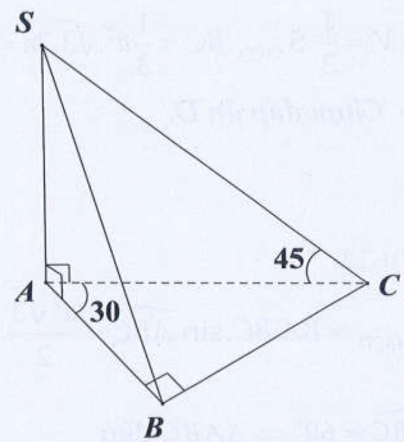
+ $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA} = 30^0$

ΔSAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8.



Ta có $\widehat{SCA} = 45^0 \Rightarrow AC = SA.\tan\widehat{SCA} = a$

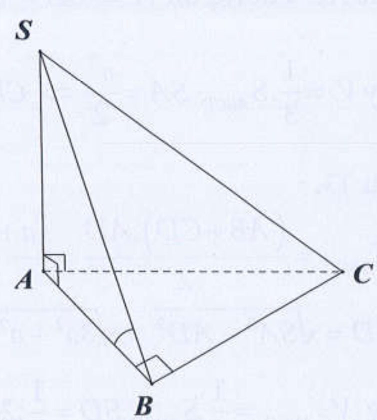
$AB = AC.cos\widehat{BAC} = a.cos30^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.\frac{a.\sqrt{3}.a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{8}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

$\Rightarrow \frac{V}{a^3} = \frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0,072 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9.



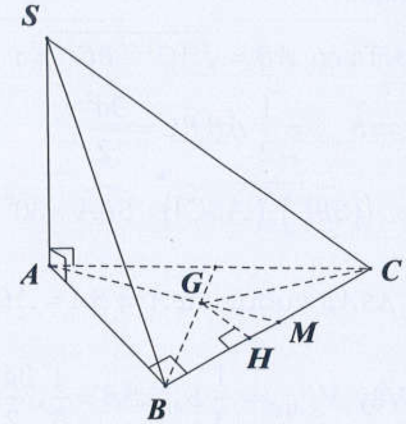
+ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC = \frac{a^2}{2}$

+ $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBA} = 30^0 \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}a^3}{V} = 18 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10.



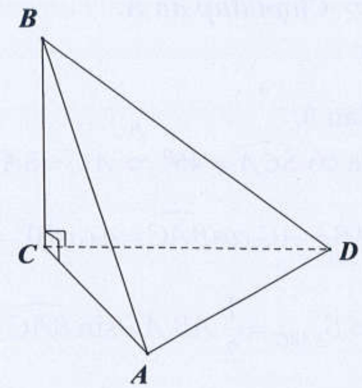
Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{GH}{AB}=\dfrac{GM}{AM}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow S_{\Delta GBC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow V_{S.GBC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{V}=\dfrac{18}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 11.

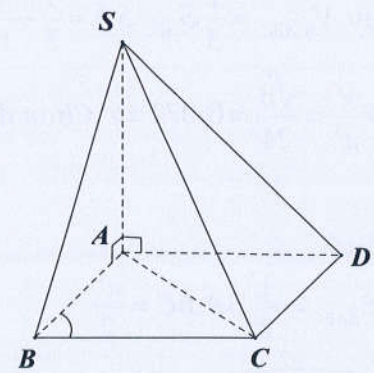


ΔACD đều $\Rightarrow S_{\Delta ACD}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ACD}.BC=\dfrac{1}{3}a^2.\sqrt{3}.2a=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 12.



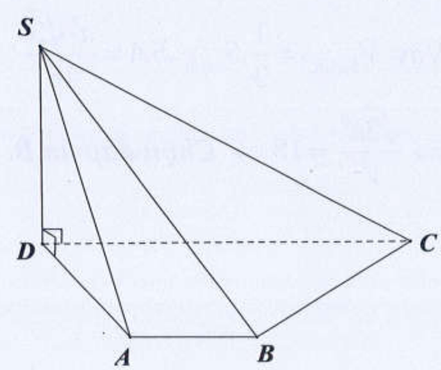
$S_{ABCD}=BA.BC.\sin\widehat{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\widehat{ABC}=60^0\Rightarrow \Delta ABC$ đều

+ ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=a\sqrt{3}$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 13.



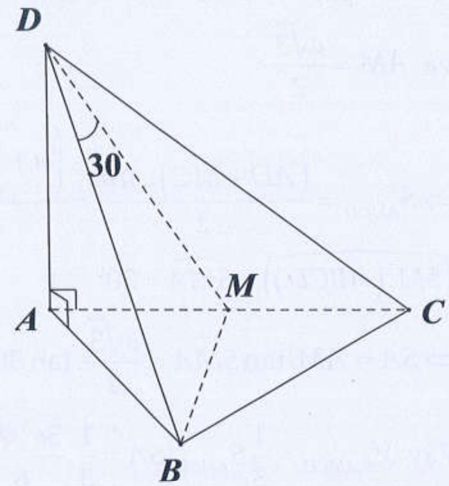
+ $S_{ABCD}=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(a+3a).a}{2}=2a^2$

+ $SD=\sqrt{SA^2-AD^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SD=\dfrac{1}{3}.2a^2.a\sqrt{2}=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 14.



Ta có ABC là tam giác đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi M là trung điểm AC

Ta có $BM\perp AC, BM\perp DA \Rightarrow BM\perp(DAC)$

$\Rightarrow\left(\widehat{BD,(DAC)}\right)=\widehat{BDM}=30^0$

+ Xét ΔBMD vuông tại M có :

$DM=BM.\cot 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{3a}{2}$

+ Xét ΔDAM vuông tại A có :

$DA=\sqrt{DM^2-AM^2}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.DA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{2}a=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}\Rightarrow\dfrac{a^3\sqrt{6}}{V}=12\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

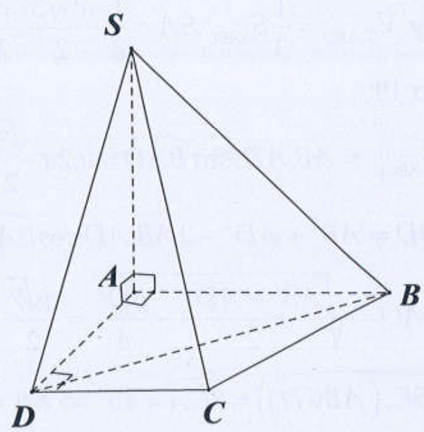
Câu 15.

Tương tự ví dụ 4. Dạng 1: Tính thể tích khối đa diện bằng cách sử dụng trực tiếp công thức.

Hoặc sử dụng công thức giải nhanh $V_{S.ABC}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta.}{12}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^3.\sin 120^0.\tan 45^0}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 16.



$S_{\Delta BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}-\dfrac{AB.AD}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta BCD}=\dfrac{(2a+a).a}{2}-\dfrac{2a.a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

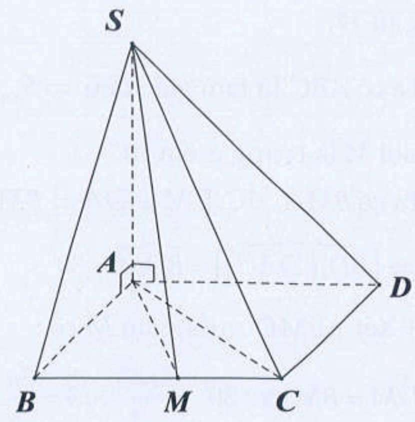
$V_{SBCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{2}.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow\dfrac{a^3}{V}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}\approx 3,46\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 17.

$\widehat{BAD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AM \perp BC$

và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



$$\Rightarrow S_{AMCD} = \frac{(AD + MC).AM}{2} = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$$

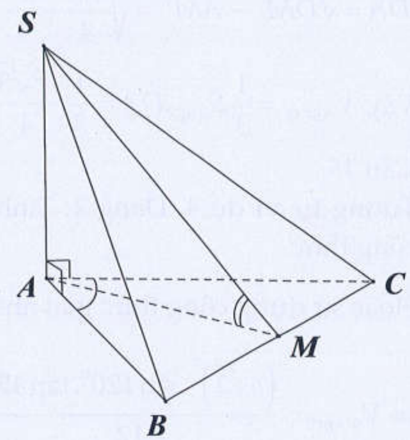
$$\left(\widehat{SM, (ABCD)}\right) = \widehat{SMA} = 30^0$$

$$\Rightarrow SA = AM.\tan\widehat{SMA} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.AMCD} = \dfrac{1}{3}S_{AMCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 18.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$



$\widehat{BAC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAM} = 60^0$

$$\Rightarrow AM = BM.\cot\widehat{BAM} = \frac{BC}{2}.\cot 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

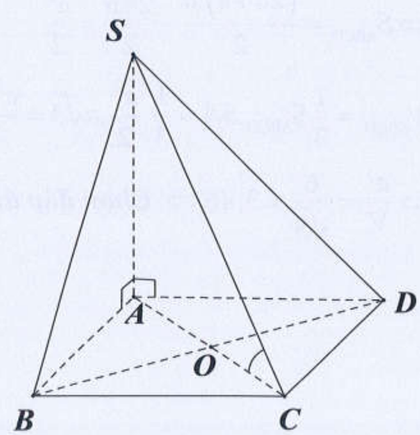
$$\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SMA} = 30^0$$

$$\Rightarrow SA = AM.\tan\widehat{SMA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19.

$+ \ S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$



$+ \ BD = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD} = 3a^2$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{7}$$

$+ \left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \widehat{SCA} = 45^0 \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{7}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.a\sqrt{7} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{3V}{a^3} = \sqrt{21} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

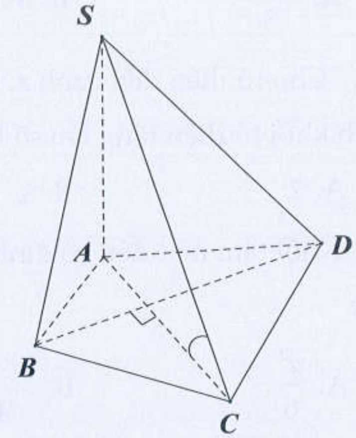
Câu 20.

+ $AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 3a^2$

+ $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SCA} = \alpha \Rightarrow SA = AC.\tan\alpha = \dfrac{2a}{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.3a^2.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{2a^3}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



DẠNG 2: HÌNH CHÓP ĐỀU

Hình chóp đều: *Là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.*

+ Đáy là 1 đa giác đều.

+ Hình chiếu vuông góc của đỉnh xuống đáy là tâm của đáy (chân đường cao trùng với tâm của đáy).

+ Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau. Đường cao vẽ từ đỉnh của 1 mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.

+ Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

+ Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{2}$ Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3.\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $2a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4, chiều cao bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho tứ diện đều cạnh a. Nếu tăng chiều dài tất cả các cạnh lên hai lần thì thể tích khối tứ diện tăng lên số lần là

A. 2. B. 3. C. 6. D. 8.

Câu 6. Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a có thể tích là:

A. $\dfrac{a^3}{6}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{a^3}{12}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương có thể tích bằng V. Tỷ số $\dfrac{a^3}{V}$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 9,5. B. 7,8. C. 15,6. D. 22,6.

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\dfrac{a^3}{24}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\dfrac{a^3}{12}$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AC = 2a$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{2}$. B. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$. C. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{3}$. D. $\dfrac{2a^3.\tan\alpha}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$. B. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{2}$. C. $\dfrac{a^3.\tan\alpha}{2}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng V. Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. 7. **B.** 3,2. **C.** 5. **D.** 1,5.

Câu 13. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\cot\alpha}{24}$. **B.** $\frac{a^3\cot\alpha}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}\cot\alpha}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}\cot\alpha}{8}$.

Câu 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $3AM = 2BM$. Góc giữa SM và mặt phẳng đáy là 45^0 . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{26}}{30}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{26}}{15}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{26}}{10}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{26}}{5}$.

Câu 15. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0 . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

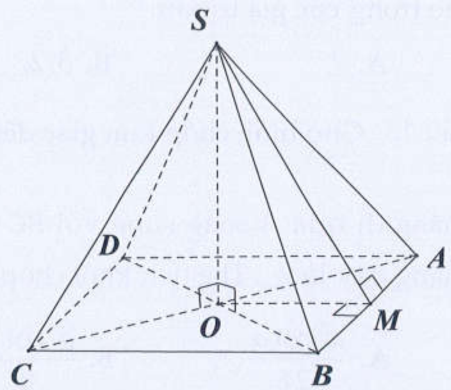
A. $\frac{9\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{32}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{32}$. **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{16}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	A	D	B	D	A	A	A	C	B
Câu	11	12	13	14	15					
Đáp án	D	C	A	A	A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.



$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm AB.

ΔSAB đều $\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

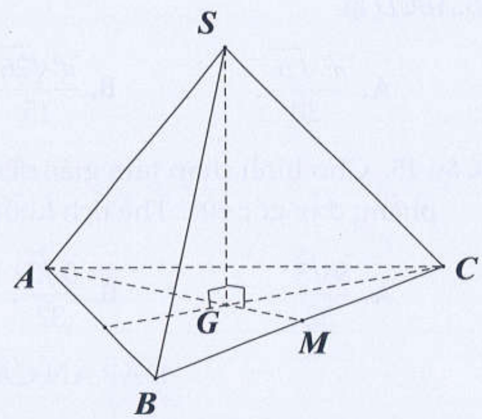
ΔSOM vuông tại O có:

$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 2.



Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

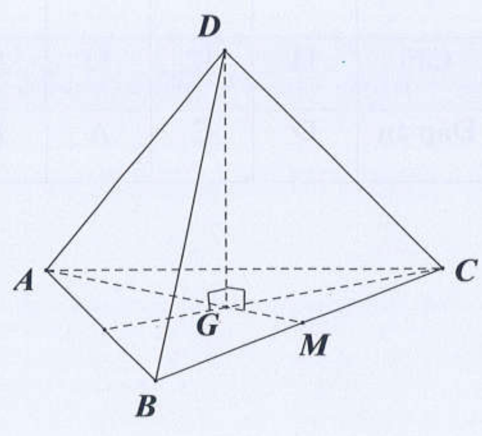
ΔSGA vuông tại G có:

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{15}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3.



Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow DG \perp (ABC)$

ΔABC đều $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

ΔDGA vuông tại G có:

$DG = \sqrt{DA^2 - AG^2} = \sqrt{(2a)^2 - \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.DG = \dfrac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.4^2.\frac{3\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

$V'=2.2.2V=8V\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

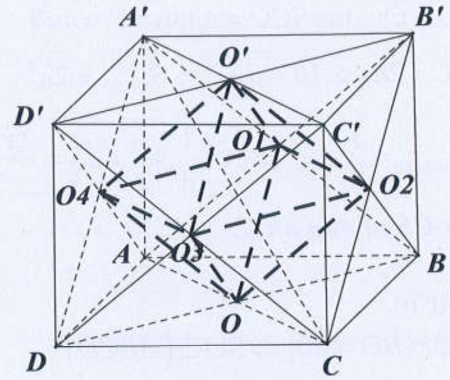
Câu 6.

$+\ O_2O_3=\frac{BD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_{O_1O_2O_3O_4}=\left(O_2O_3\right)^2=\frac{a^2}{2}.$

Chiều cao khối chóp $O_1O_2O_3O_4$ là $h=\frac{OO'}{2}=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow V_{OO_1O_2O_3O_4O'}=2V_{OO_1O_2O_3O_4}=2.\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

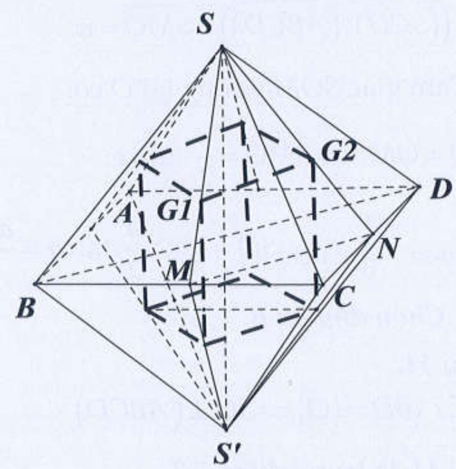


Câu 7.

$+\ G_1G_2=\frac{2}{3}MN=\frac{1}{3}BD=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

$+\ V=\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3=\frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$

$\Rightarrow\frac{a^3}{V}=\frac{27\sqrt{2}}{4}\approx 9,5\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 8.

$+\ \Delta ABC$ đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow SG\perp\left(ABC\right)$

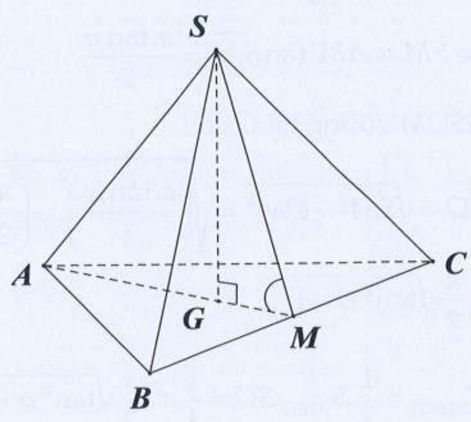
$\Rightarrow\widehat{\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)}=\widehat{SMG}=60^0$

Xét ΔSGM vuông tại G có :

$SG=GM.\tan\widehat{SMG}=\frac{1}{3}.AM\tan 60^0$

$\Rightarrow SG=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 9.

$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{((SC),(ABCD))} = \widehat{SCO} = 60^0$

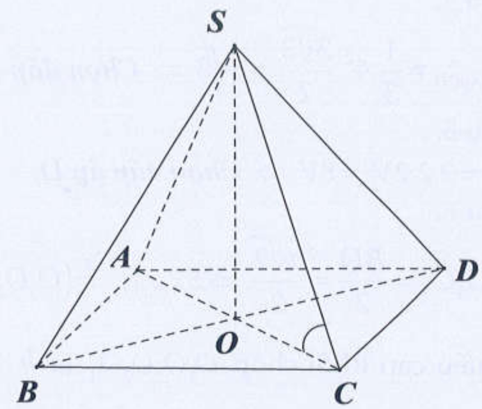
+ Tam giác SOC vuông tại O có:

$SO = OC.\tan\widehat{SCO} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$AC = 2a \Rightarrow AB = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 2a^2$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2a^2.a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 10.

$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm CD

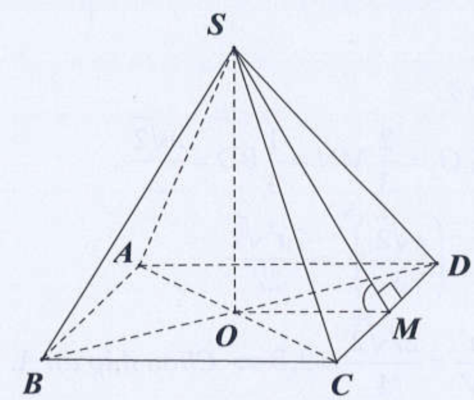
$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SMO} = \alpha$

+ Tam giác SOM vuông tại O có:

$SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \frac{a}{2}.\tan\alpha$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}.\tan\alpha = \frac{a^3\tan\alpha}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 11.

$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm AB.

ΔSMA vuông tại M có:

$\Rightarrow SM = AM.\tan\widehat{SAB} = \frac{a.\tan\alpha}{2}$

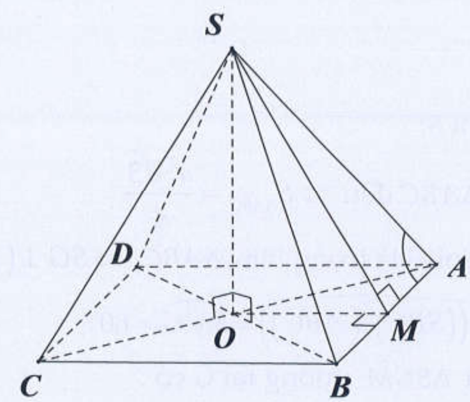
ΔSOM vuông tại O có:

$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{a.\tan\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$= \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$

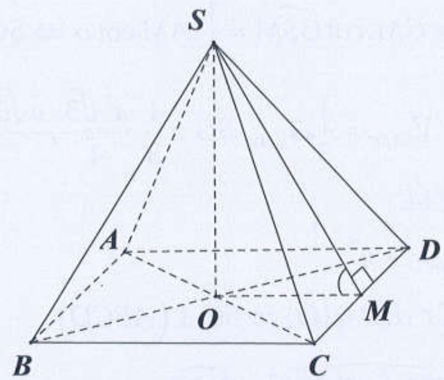
$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - 1} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 12.

$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$



Gọi M là trung điểm CD

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SMO} = 60^0$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x

+ Tam giác SMC vuông tại M có:

$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

+ Tam giác SOM vuông tại O có:

$OM = SM.\cos\widehat{SMO} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow x^2 = a^2 - \dfrac{x^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow x^2 = a^2 - \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{4a^2}{5}$

Ta có: $SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

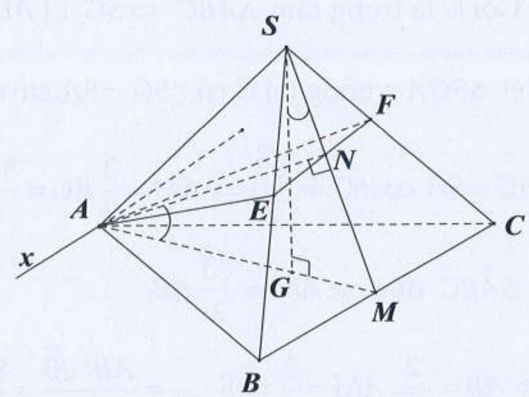
$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2}{5}.\dfrac{a\sqrt{15}}{5} = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{75} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{75}{4\sqrt{15}} \approx 4{,}84 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Cách khác : *Áp dụng công tính tính nhanh Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thể tích :*

$V_{ABCD} = \dfrac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{(2+\tan^2\alpha)^3}} = \dfrac{4a^3.\tan 60^0}{3\sqrt{(2+\tan^2 60^0)^3}} = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{75} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 13.

+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

+ Gọi $(P) \cap (SBC) = EF \Rightarrow EF // BC$

$\Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ax$ với $Ax // EF // BC$

+ Gọi M là trung điểm của BC, $SM \cap EF = N$

Ta có: $AM \perp BC, SG \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow AN \perp Ax$

Mà $AM \perp BC, BC // Ax \Rightarrow AM \perp Ax$

$\Rightarrow \widehat{((P),(ABC))} = \widehat{NAM} = \alpha$

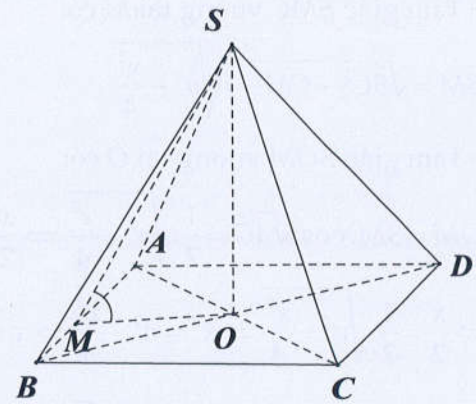
Ta có: $\widehat{GSM} = \widehat{NAM} = \alpha$ *(cùng phụ với* $\widehat{SMA}$*)*

Xét ΔSGM vuông tại G có :

$$SG = GM.\cot\widehat{GSM} = \frac{1}{3}.AM\cot\alpha \Rightarrow SG = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cot\alpha = \frac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{6}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{6} = \frac{a^3\cot\alpha}{24} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 14.



$+ \ S_{ABCD} = a^2$

$+ AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{SM,(ABCD)}\right) = \widehat{SMO}$

Ta có $AC = \sqrt{2}a \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$3AM = 2BM \Rightarrow AM = \frac{2}{5}AB = \frac{2}{5}a$

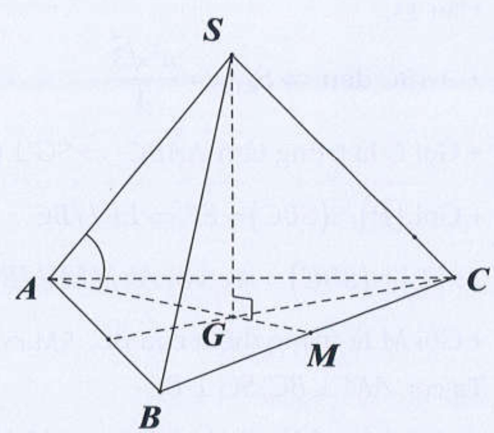
+ Xét tam giác MAO có:

$$MO = \sqrt{AM^2 + AO^2 - 2AM.AO.\cos\widehat{MAO}} = \frac{\sqrt{26}a}{10}$$

Ta có $\widehat{SMO} = 45^0 \Rightarrow \Delta SOM$ vuông cân tại $O \Rightarrow SO = MO = \frac{\sqrt{26}a}{10}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{26}a}{10} = \frac{a^3\sqrt{26}}{30} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 15.



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

Xét ΔSGA vuông tại G có : $SG = SA.\sin 60^0 = \frac{3}{2}$

$AG = SA.\cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$+ \ \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}}AM = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{3}}{16}.\frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

DẠNG 3: HÌNH CHÓP CÓ MỘT MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SA = 2a$ và SA tạo mặt phẳng đáy góc bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỉ số $\frac{a^3\sqrt{3}}{V}$ là

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SD = \frac{3a}{2}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng V. Tỷ số $\frac{a^3}{V}$ có giá trị là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác cân tại A, tam giác BCD vuông cân tại D, hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau, cạnh $AD = \sqrt{2}$ và hợp với (BCD) góc 30^0. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$. SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.　　B. $\frac{3a^3}{16}$.　　C. $\frac{a^3}{16}$.　　D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.　　B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.　　C. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.　　D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

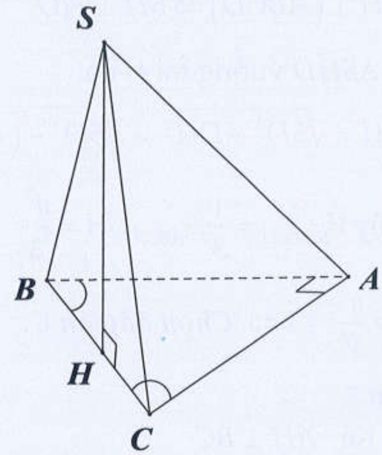
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.　　B. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.　　C. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$.　　D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	A	C	B	C	D	C	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.



+ Kẻ $AH \perp BC$

$$\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$$

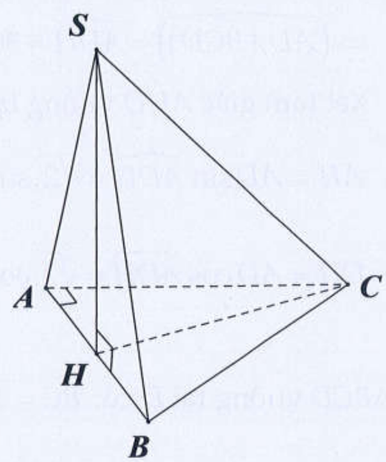
+ Ta có: ΔSAB đều $\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

+ ΔABC vuông tại A có : $AH=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\frac{a}{2}.a=\frac{a^2}{4}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2.



+ Ta có: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$

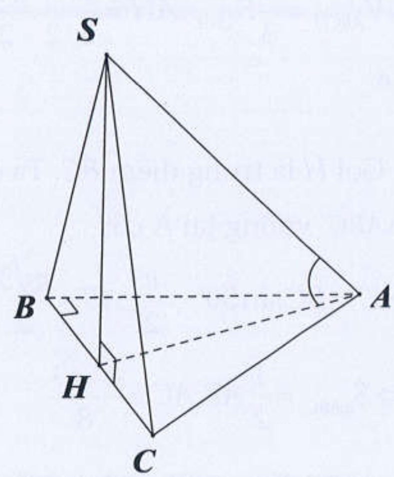
+ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

+ ΔSAB đều $\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3.



+ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Kẻ $SH\perp BC$

$$\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$$

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))}=\widehat{SAH}=30^0$

+ Xét ΔSHA vuông tại H có:

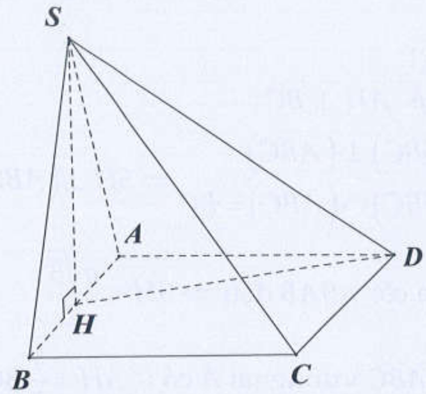
$SH=SA.\sin\widehat{SAH}=2a.\sin 30^0=a$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\frac{a^3\sqrt{3}}{V}=6\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 4.

+ $S_{\Delta ABC} = a^2$. Gọi H là trung điểm của AB

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HD$



+ ΔSHD vuông tại H có:

$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + AD^2)} = a.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{a^3}{3}$

$\Rightarrow \frac{a^3}{V} = 3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5.

Kẻ $AH \perp BC$

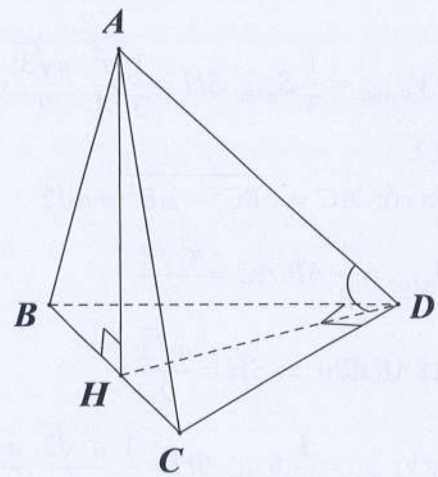
$\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$

$\Rightarrow \widehat{(AD,(BCD))} = \widehat{ADH} = 30^0$

Xét tam giác AHD vuông tại H có:

$AH = AD \sin \widehat{ADH} = \sqrt{2}.\sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$DH = AD \cos \widehat{ADH} = \sqrt{2}.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$



+ ΔBCD vuông tại D có: $BC = 2DH = \sqrt{6} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.DH.BC = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{6} = \frac{3}{2}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6.

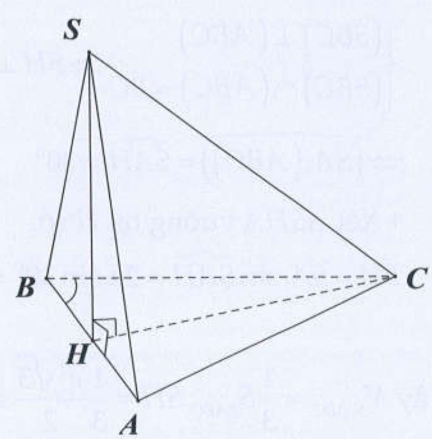
+ Gọi H là trung điểm BC. Ta có: $SH \perp (ABC)$

ΔABC vuông tại A có:

$AC = BC \sin 30^0 = \frac{a}{2}, AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

+ ΔSBC đều $\Rightarrow SH = SB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

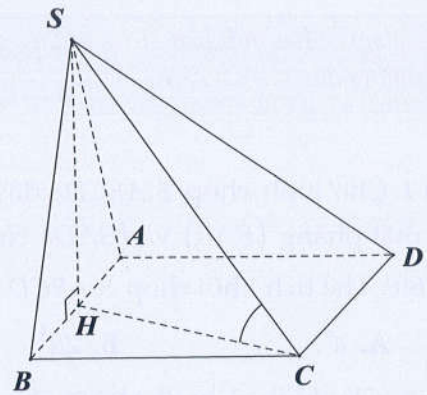


Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3}{16} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 7.

+ Kẻ $SH \perp AB$

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$$



+ ΔSAB đều $\Rightarrow SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.4a^2.a\sqrt{3}=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8.

+ $S_{ABCD}=4a^2$

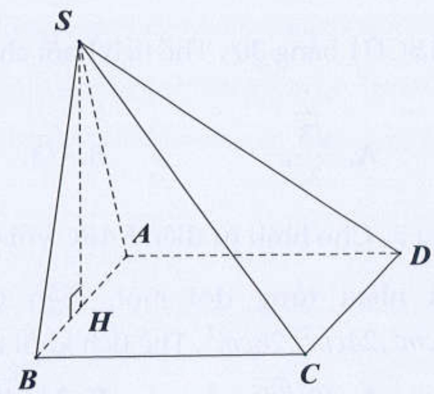
+ Gọi H là trung điểm AB. Do ΔSAB cân tại S

$\Rightarrow SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

+ ΔBHC vuông tại $B\Rightarrow CH=\sqrt{CB^2+BH^2}=a\sqrt{5}$

$+\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCH}=60^0$

ΔSHC vuông tại $H\Rightarrow SH=CH.\tan 60^0=a\sqrt{15}$



$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.4a^2.a\sqrt{15}=\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{3}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

DẠNG 4: HÌNH CHÓP CÓ HAI MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Hình chóp có hai mặt bên cùng vuông góc với đáy thì đường cao nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = \sqrt{3}a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tỉ số $\frac{3V}{a^3}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 3. Cho hình tứ diện $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là $18cm^2, 24cm^2, 26cm^2$. Thể tích khối tứ diện $SABC$ là

A. $48\sqrt{39}cm^3$. **B.** $24\sqrt{39}cm^3$. **C.** $4\sqrt{39}cm^3$. **D.** $8\sqrt{39}cm^3$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng V. Giá trị $\frac{a^3\sqrt{6}}{V}$ là

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh $AB = a$ $AD = 2a$, $\widehat{BAD} = 60^0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng đáy là 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $a^3\sqrt{21}$. **B.** $a^3\sqrt{7}$. **C.** $2a^3\sqrt{21}$. **D.** $2a^3\sqrt{7}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần nhất giá trị nào dưới đây?

A. 0,25. **B.** 0,5. **C.** 0,75. **D.** 1,5.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ tứ giác lồi có $AC \perp BD$, $AC = 2a, BD = 3a$, gọi O là giao điểm AC và BD, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, $SO = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	A	D	A	B	C	B	D

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Ta có: $S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}$

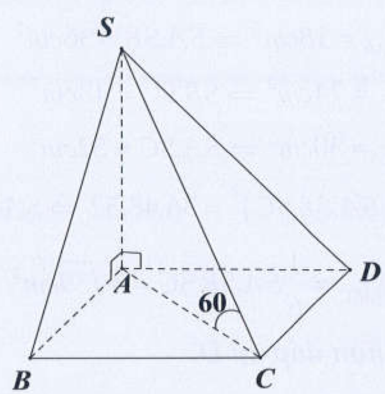
$(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \perp (ABCD)$

$(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$SA = AC.\tan SCA = \sqrt{AB^2 + BC^2}.\tan 60^0 = 2\sqrt{3}a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3}.2a\sqrt{3} = 2a^3$



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2.

$S_{ABCD} = a^2$

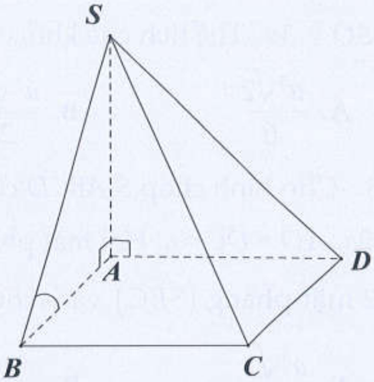
$(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \perp (ABCD)$

$(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$

Ta có: $\begin{cases} SB \perp BC, AB \perp BC \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases}$



$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SBA} = 30^0 \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \dfrac{3V}{a^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3.

$+ \ AS \perp (SBC) \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta SBC}.SA = \dfrac{1}{6}SA.SB.SC$

$S_{\Delta SAB} = 18cm^2 \Rightarrow SA.SB = 36cm^2$

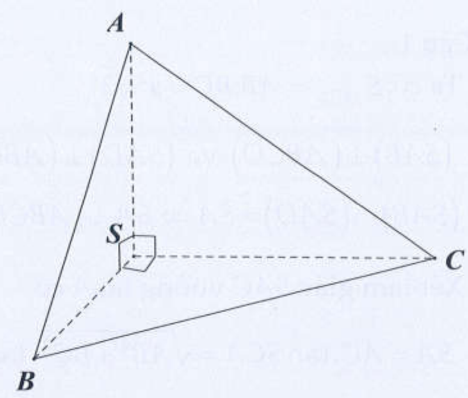
$S_{\Delta SBC} = 24cm^2 \Rightarrow SB.SC = 48cm^2$

$S_{\Delta SAC} = 30cm^2 \Rightarrow SA.SC = 52cm^2$

$\Rightarrow (SA.SB.SC)^2 = 36.48.52 \Rightarrow SA.SB.SC = 48\sqrt{39}$

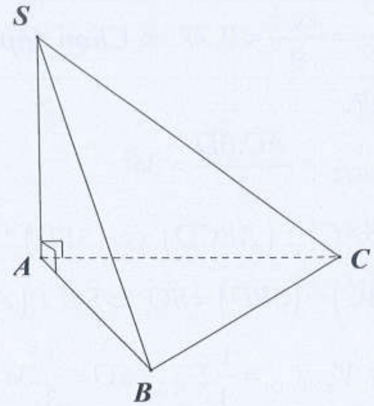
$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{6}SA.SB.SC = 8\sqrt{39}cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



* ***Tổng quát:*** Cho hình tứ diện $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB,SBC,SAC lần lượt là S_1,S_2,S_3. Thể tích khối tứ diện $SABC$ là: $V = \dfrac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$

Câu 4:



ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$

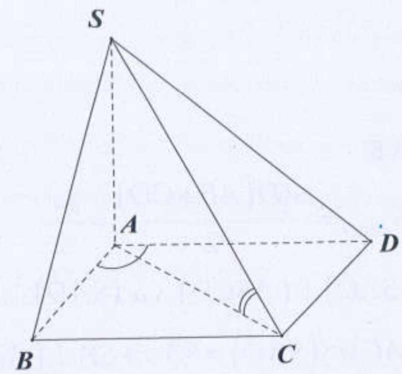
$(SAB) \cap (SAC) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

$\Rightarrow \dfrac{a^3\sqrt{6}}{V} = 12 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 5.



$+ S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = a^2\sqrt{3}$

$(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \perp (ABCD)$

$(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

+ Tam giác ABC có:

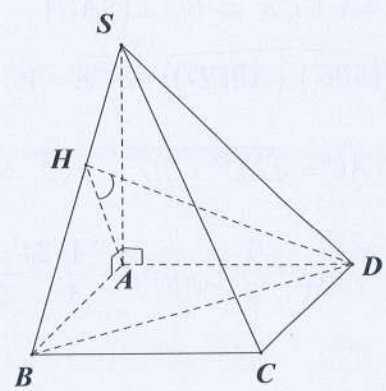
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}} = a\sqrt{7}$

+ Ta có $\left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = \widehat{SCA} = 60^0$

ΔSAC vuông tại A có: $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = \sqrt{7}a.\tan 60^0 = \sqrt{21}a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \sqrt{7}a^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6.



Ta có: $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

$(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \perp (ABCD)$

$(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Ta có: $AD \perp AB, AD \perp SA \Rightarrow AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow AD \perp SB$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow SB \perp (AHD)$

$\Rightarrow SB \perp HD$. Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB, HD \perp SB \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SBD)}\right) = \widehat{AHD} = 45^0 \Rightarrow AH = AD = a$

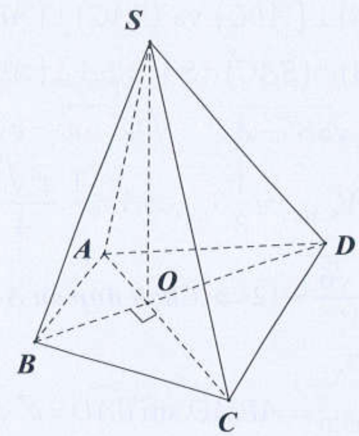
Xét tam giác SAB vuông tại S có:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = \dfrac{AB.AH}{\sqrt{AB^2 - AH^2}} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{4a^2 - a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.2a^2.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{V}{a^3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,77 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 7.



$+\ S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 3a^2$

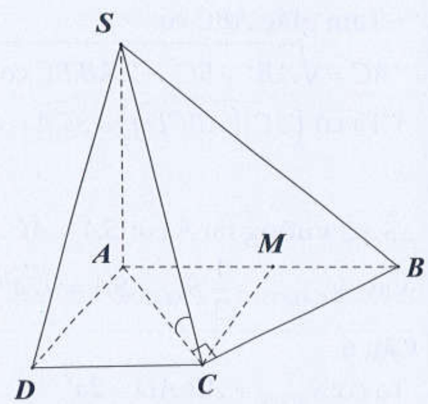
$+\ (SAC) \perp (ABCD)$ và $(SBD) \perp (ABCD)$

$(SAC) \cap (SBD) = SO \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.3a^2.3a = 3a^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 8.



$+\ S_{ABCD} = \dfrac{AD(AB+CD)}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$+\ (SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \perp (ABCD)$

$(SAC) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

+ Gọi M là trung điểm của AB. Ta có

$CM = \dfrac{1}{2}AB = a \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CB$.

Mà $SA \perp CB \Rightarrow BC \perp (SAC)$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^0$

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC \tan 45^0 = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2.a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

DẠNG 5: HÌNH CHÓP CÓ *SH* VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY (*H* THUỘC MẶT PHẲNG ĐÁY, S LÀ ĐỈNH HÌNH CHÓP, H LÀ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA S XUỐNG MẶT PHẲNG ĐÁY)

Hình chóp có SH vuông góc với đáy thì SH là chiều cao của khối chóp.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại *A*, $\widehat{ABC} = 30^0$, SAB là tam giác đều cạnh *a*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của *AB*. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{18}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại tại *A*, cạnh $BC = 2a$, gọi *M* là trung điểm *BC*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của *AM*, tam giác *SAM* vuông tại *S*. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{9}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC có, $AB = 19cm$, $BC = 20cm$ $AC = 37cm$, cạnh bên $SA = \sqrt{985}cm$, gọi *M* là trung điểm của *BC*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC) là điểm *H* thoả mãn $AH = \frac{1}{3}AM$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $570cm^3$. **B.** $760cm^3$. **C.** $1520cm^3$. **D.** $1140cm^3$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật tâm O, cạnh $AB = a$ $BC = a\sqrt{3}$, tam giác *SAC* vuông tại *S*. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm *H* của đoạn *AO*. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$, Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm *H* của *AB*, cạnh *SC* tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^{o}. Thể tích khối chóp *S.AHCD* là

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh 2a, cạnh *SA* tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm *AG*. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 3HA$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng V. Tỷ số $\frac{a^3\sqrt{3}}{V}$ có giá trị là

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi H là trung điểm của OB và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích của khối chóp $S.AHCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{13}}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{39}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{39}}{8}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$ $BC = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy là điểm H nằm trên AM thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HM}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{8a^3}{3}$. **D.** $\frac{8a^3}{9}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là H sao cho $BH = \frac{1}{4}AB$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	A	D	B	C	B	A	B	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

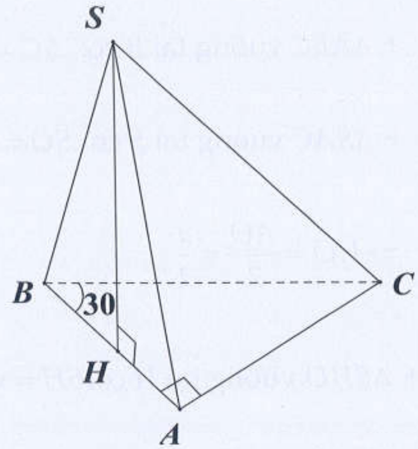
+ Ta có: ΔSAB đều $\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

+ ΔABC vuông tại A có : $AC = AB.\tan\widehat{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{18}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 2.

+ ΔABC vuông cân tại A có:

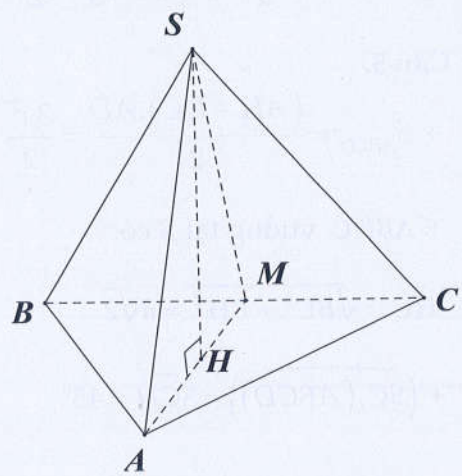
$BC = 2a \Rightarrow AB = AC = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = a^2$

+ ΔSAM vuông tại S có: $SH = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 3.

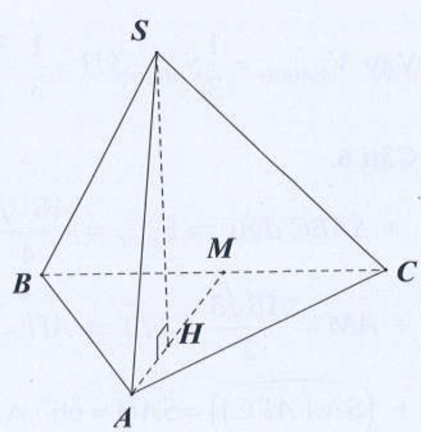
+ Ta có: $p = \dfrac{AB+BC+AC}{2} = 38cm$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114cm^2$

+ $AM = \sqrt{\dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = 3\sqrt{85}cm$

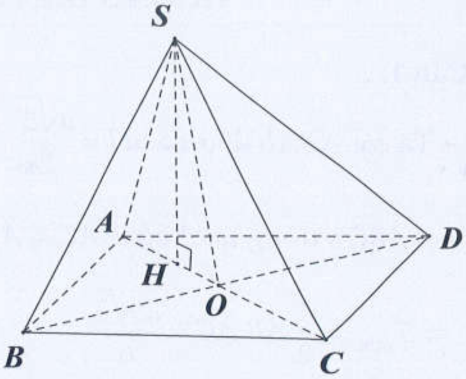
$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{3}AM = \sqrt{85}cm$

+ ΔSAH vuông tại H có : $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 30cm$



Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.114.30 = 1140cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.



$+\ S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$+\ \Delta ABC$ vuông tại B có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$

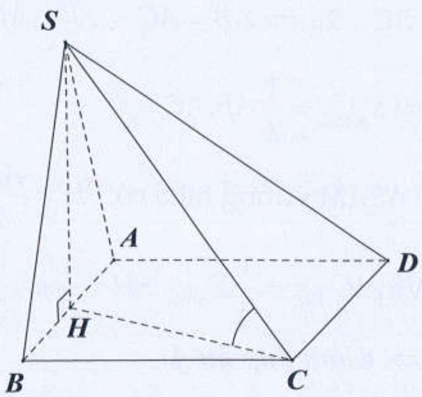
$+\ \Delta SAC$ vuông tại S có: $SO=AO=\dfrac{AC}{2}=a$

$\Rightarrow HO=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{a}{2}$

$+\ \Delta SHO$ vuông tại H có: $SH=\sqrt{SO^2-HO^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{4}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.



$+\ S_{AHCD}=\dfrac{(AH+DC).AD}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$

$+\ \Delta BHC$ vuông tại B có:

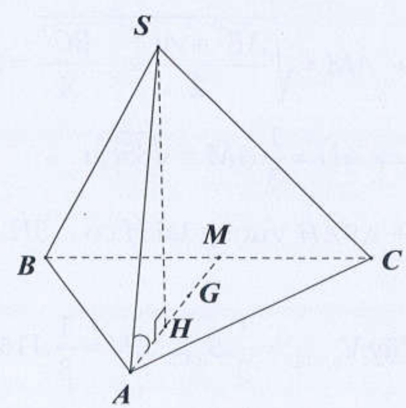
$HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=a\sqrt{2}$

$+\ \widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCH}=45^0$

$\Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại $H\Rightarrow SH=HC=a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.AHCD}=\dfrac{1}{3}S_{AHCD}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 6.



$+\ \Delta ABC$ đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$

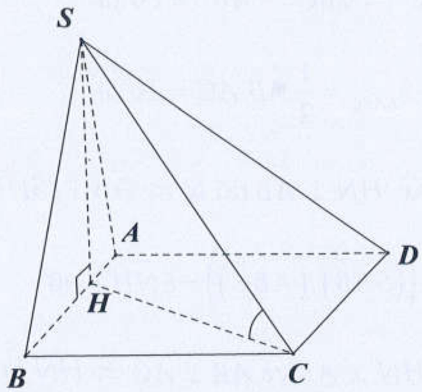
$+\ AM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow AH=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$+\ \widehat{(SA,(ABC))}=\widehat{SAH}=60^0$, ΔSAH vuông tại H có :

$SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}=a$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = a^3\sqrt{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 7.



+ $S_{ABCD} = 4a^2$

+ ΔBHC vuông tại B có: $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{5a}{2}$

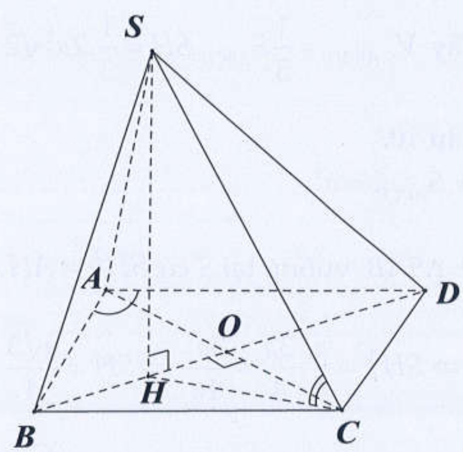
+ $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SCH} = 30^0$

ΔSHC vuông tại H có:

$SH = HC.\tan\widehat{SCH} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}4a^2.\frac{5a\sqrt{3}}{6} = \frac{10a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \frac{a^3\sqrt{3}}{V} = \frac{9}{10} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8.



+ $S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

+ $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta BAD$ đều $\Rightarrow OC = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$:

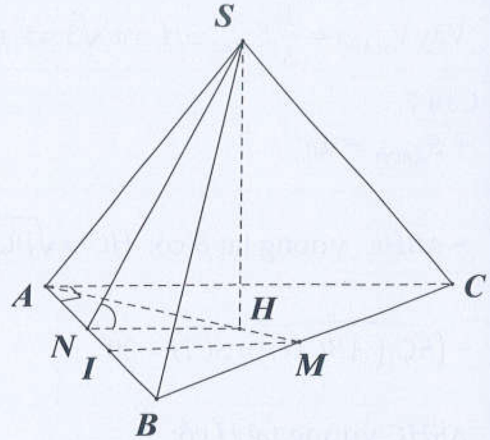
ΔOHC vuông tại O có:

$HC = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}a$

+ $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SCH} = 30^0$. ΔSHC vuông tại H có: $SH = HC.\tan\widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{39}}{12}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{39}}{12} = \frac{a^3\sqrt{13}}{24} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9.



+ ΔABC vuông tại A có:

$AC^2 = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 2\sqrt{2}a^2$

+ Kẻ $HN \perp AB$ tại $N \Rightarrow AB \perp (SHN)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SNH} = 60^0$

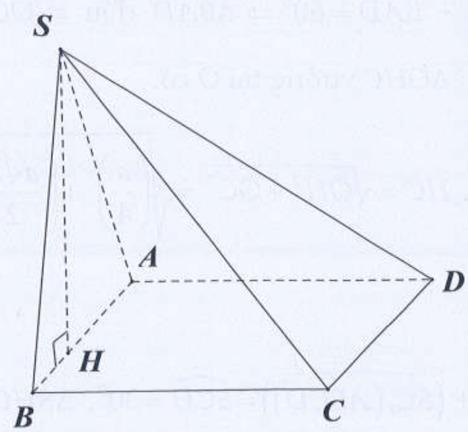
Do $HN \perp AB$ và $AB \perp AC \Rightarrow HN//AC$, gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow HN//MI$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{HN}{MI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HN = \dfrac{2}{3}MI = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

+ ΔSHN vuông tại H có: $SH = HN.\tan\widehat{SNH} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.2a^2\sqrt{2}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{8a^3}{9} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 10.



+ $S_{ABCD} = a^2$

+ ΔSAB vuông tại S có: $SH^2 = AH.BH$

$\Rightarrow SH^2 = \dfrac{a}{4}.\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3a^2}{16} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

DẠNG 6: HÌNH CHÓP CÓ CÁC CẠNH BÊN BẰNG NHAU HOẶC CÁC CẠNH BÊN, MẶT BÊN CÙNG TẠO VỚI ĐÁY NHỮNG GÓC BẰNG NHAU

+ Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.
+ Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy.

Câu 1. Chóp tam giác đều $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích của khối chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB=10cm, BC=12cm, AC=14cm$, các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thoả mãn $\tan\alpha=3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $228cm^3$. **B.** $576cm^3$. **C.** $192cm^3$. **D.** $384cm^3$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^0$ các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{12}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $10cm$, các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thoả mãn $\tan\alpha=\dfrac{9}{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $600cm^3$. **B.** $300cm^3$. **C.** $900cm^3$. **D.** $1200cm^3$.

Câu 5. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a, AD=2a$ Đỉnh S cách đều các đỉnh A,B,C,D của mặt đáy và $SB=a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

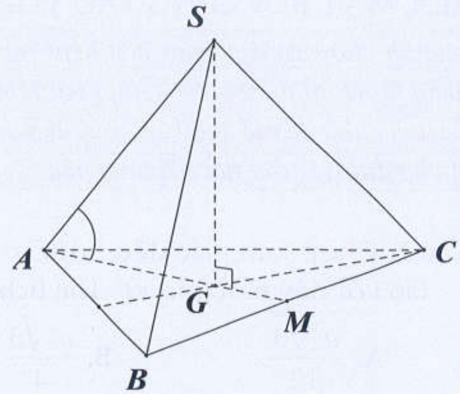
A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	C	D	B	C	D

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.



Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

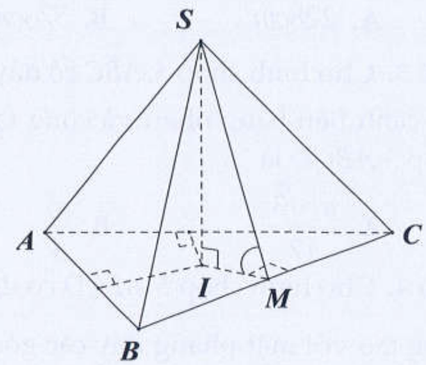
ΔSGA vuông tại G có:

$SG = AG.\tan\widehat{SAG} = a$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2.



$+\ p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 18cm$

$S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}cm^2$

+ Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow SI \perp (ABC)$

$S = p.r \Rightarrow IM = r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}cm$

ΔSIM vuông tại I có: $SI = IM.\tan\widehat{SMI} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}.3 = 4\sqrt{6}cm$

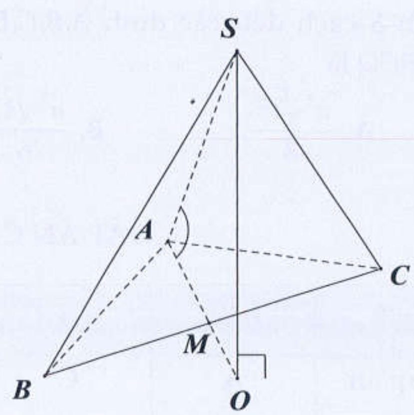
Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SI = \dfrac{1}{3}.24\sqrt{6}.4\sqrt{6} = 192cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3.

$+\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc 30^0 nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SA),(ABC)} = \widehat{SAO} = 30^0$



ΔABC có:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$

$S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{a.a.a\sqrt{3}}{4.OA} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA = a$

ΔABC có: $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.

$+ \ S_{ABCD} = 10^2 = 100cm^2$

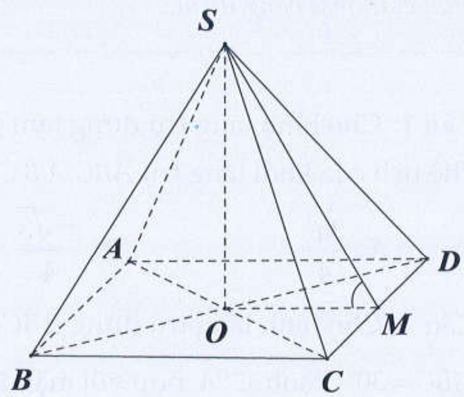
$AC \cap DB = O \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\widehat{(SCD),(ABCD)} = \widehat{SMO} = \alpha$

ΔSOM vuông tại O có:

$SO = OM.\tan\widehat{SMO} = 5.\dfrac{9}{5} = 9cm$

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.100.9 = 300cm^3$



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

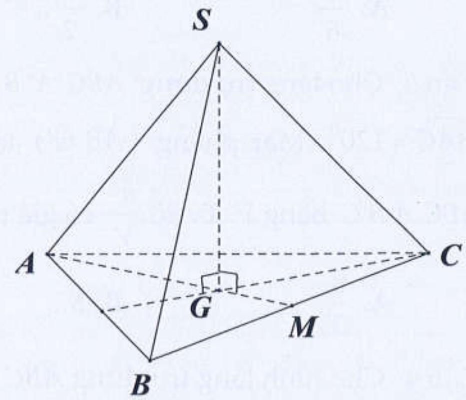
Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSGA vuông tại G có:

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

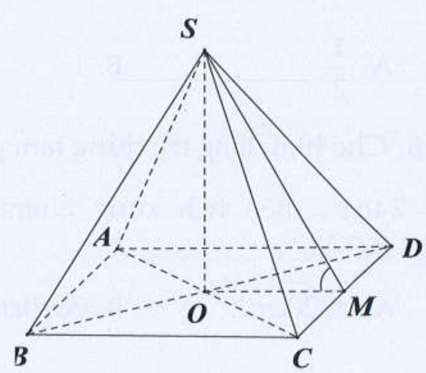
Câu 6.

$+ \ S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$

$AC \cap DB = O \ S$. Do S cách đều các đỉnh $A,B,C,D \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$+ \ BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{5}$ nên ΔSBD là tam giác đều $\Rightarrow SO = \dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$



Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

DẠNG 7: LĂNG TRỤ ĐỨNG

Hình lăng trụ đứng: *Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.*

Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy

Hình lăng trụ đều: *Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau.*

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ $ABC = 30^0$, cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 30^0. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V. Tỷ số $\frac{a^3}{V}$ có giá trị là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = 2a$, $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V. Tỷ số $\frac{a^3}{V}$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** 3 **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có $AB = 26cm$, $BC = 60cm$, $AC = 74cm$, diện tích xung quanh bằng $2880cm^2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $4320cm^3$. **B.** $3840cm^3$. **C.** $12960cm^3$. **D.** $11520cm^3$.

Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^0$, cạnh BC' hợp với mặt bên $(ACC'A')$ góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V. Tỷ số $\dfrac{V}{a^3\sqrt{6}}$ có giá trị là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A $AA' = 2a$, $A'B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $5a^3$. **B.** $13a^3$. **C.** $\dfrac{5a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{13a^3}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$ góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V. Giá trị $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{V}$ là

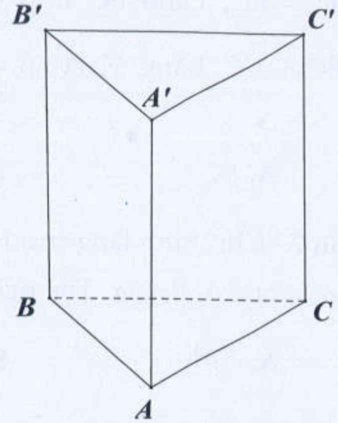
A. 3. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 1.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	C	B	B	C	A	A	D	D	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

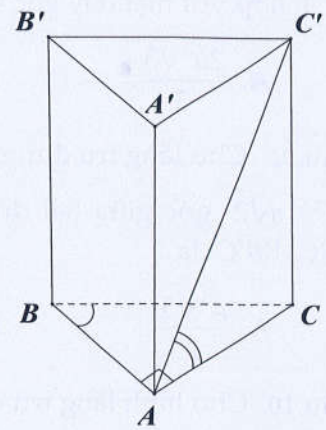


ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2.



+ ΔABC vuông tại A có: $AC = AB.\tan\widehat{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

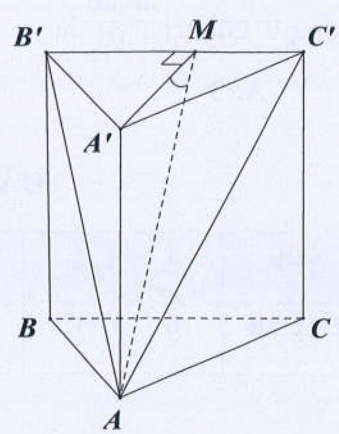
+ Ta có: $\widehat{\left(C'A,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{C'AC} = 60^0$

$\Delta ACC'$ vuông tại C có: $CC' = AC.\tan\widehat{C'AC} = a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3.



+ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi M là trung điểm $B'C' \Rightarrow A'M \perp B'C'$

$\Rightarrow \widehat{\left(\left(AB'C'\right),\left(ABC\right)\right)} = \widehat{A'MA} = 60^0$

$\Delta A'MC'$ vuông tại M có:

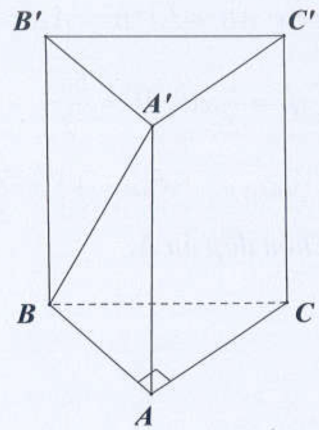
$A'M = A'C'.\sin\widehat{A'C'M} = a.\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$

$\Delta AA'M$ vuông tại A' có:

$AA' = A'M.\tan\widehat{A'MA} = \dfrac{a}{2}.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{8} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = 8 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 4.



+ ΔABC vuông cân tại A có:

cạnh huyền $BC = 2a \Rightarrow AB = AC = a\sqrt{2}$

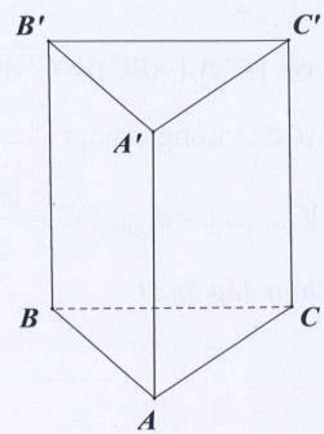
$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC = a^2$

$+\Delta A'AB$ vuông tại A có: $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^3$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = 1 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.



$p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 80cm$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{80(80-26)(80-60)(80-74)} = 720cm^2$

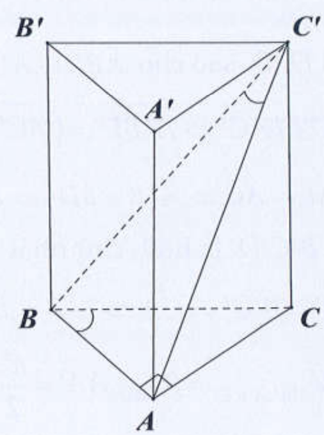
Gọi chiều cao khối lăng trụ là x, các mặt bên là hình chữ nhật nên

$S_{xq} = 26x + 60x + 74x = 2880cm^2 \Rightarrow x = 18cm$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 720.18 = 12960cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 6.



+ $BA \perp (ACC'A') \Rightarrow \widehat{(BC',(ACC'A'))} = \widehat{BC'A} = 30^0$

ΔABC vuông tại A có: $AB = AC.\cot\widehat{ABC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

+ $\Delta ABC'$ vuông tại A có:

$AC' = AB.\cot\widehat{AC'B} = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$

$\Delta ACC'$ vuông tại C có: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}$

$\Rightarrow \dfrac{V}{a^3\sqrt{6}} = 1 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

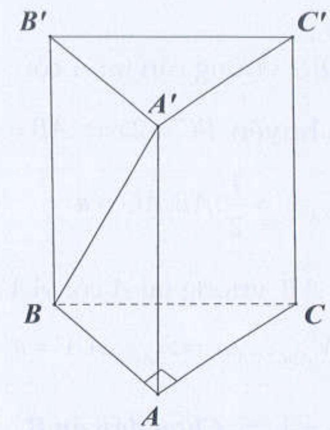
Câu 7.

+ Ta có: $AB = \sqrt{A'B^2 - AA'^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{5a^2}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = 5a^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 8.

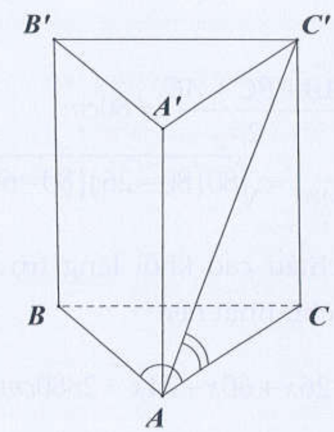
+ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

+ Ta có: $\widehat{\left(C'A,(ABC)\right)} = \widehat{C'AC} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta ACC'$ vuông cân tại $C \Rightarrow CC' = AC = 2a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = a^3\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 9.

+ $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2}{2}$

+ Lấy D, D' sao cho $ABDC.A'B'D'C'$ là hình hộp

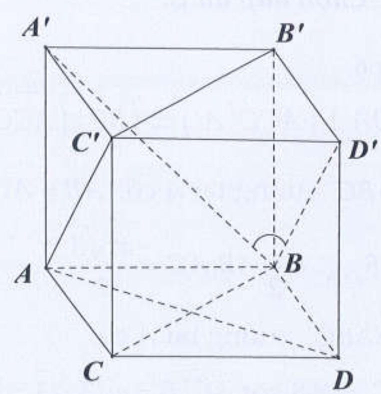
$\Rightarrow BD' // AC' \Rightarrow \widehat{A'BD'} = \widehat{(AC', BA')} = 60^0$.

Mà $AB = AC \Rightarrow A'B = BD' \Rightarrow \Delta A'BD'$ đều

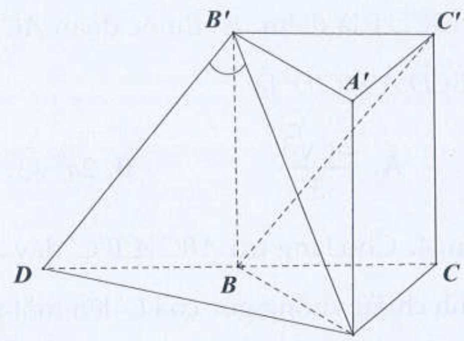
Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật

$A'D' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = a$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^3}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 10.



+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Lấy điểm D đối xứng với C qua B. Tứ giác $BDB'C'$ là hình bình hành.

Đặt $AA' = x\,(x > 0)$

$\Rightarrow AB' = BC' = DB' = \sqrt{a^2 + x^2}, BD = CB = a.$

$\Rightarrow AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD\cos 120^0 = 3a^2$

$$\Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = \widehat{(AB', B'D)} = 60^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{(AB'D)} = 120^0 \\ \widehat{(AB'D)} = 60^0 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $\widehat{AB'D} = 120^0 \Rightarrow AD^2 = AB'^2 + DB'^2 - 2AB'.DB'\cos 120^0$

$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + x^2 + a^2 + x^2 + a^2 + x^2 \Rightarrow x = 0$ vô lý.

Trường hợp 2. $\widehat{AB'D} = 60^0 \Rightarrow \Delta AB'D$ đều $\Rightarrow AB' = BD \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \dfrac{a^3\sqrt{6}}{V} = 4 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

DẠNG 8: LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 1. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC, góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $AA' = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AC, góc tạo bởi AA' với (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Câu 3. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC \perp BD$, $AC = 2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AC = 6a, BC = 8a$, hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC, góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AC)$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V. Giá trị $\frac{V}{a^3\sqrt{3}}$ là :

A. 32. **B.** 24. **C.** 96. **D.** 72.

Câu 5. Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC\ A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh dài $20cm$. Hình chiếu của A' xuống mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy một góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

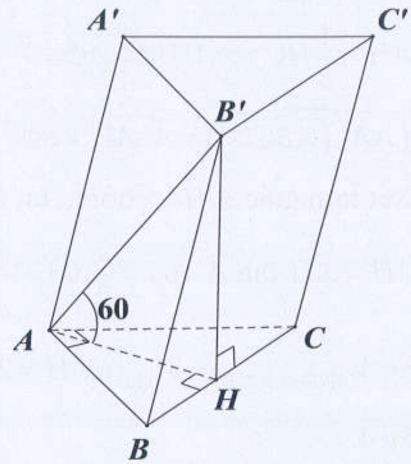
A. $1000\sqrt{3}m^3$. **B.** $2000m^3$. **C.** $2000\sqrt{3}m^3$. **D.** $1000m^3$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	A	D	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Ta có $B'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{(AB',(ABC))} = \widehat{B'AH} = 60^0$

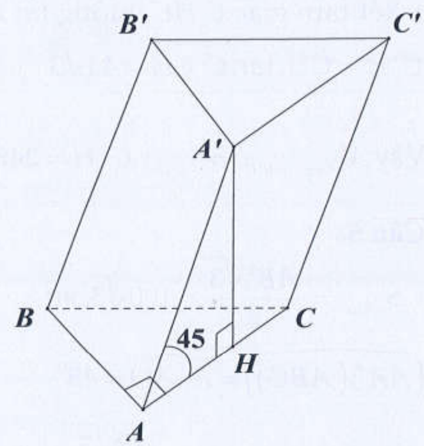
+ Xét tam giác ABC vuông tại A có:

$AH = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

+ Xét tam giác AHB' vuông tại H có: $B'H = AH.\tan\widehat{B'AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^O = \frac{3a}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.B'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2.



+ H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$\widehat{(AA',(ABC))} = \widehat{A'AH} = 45^0$

+ Xét tam giác $A'HA$ vuông cân tại H có:

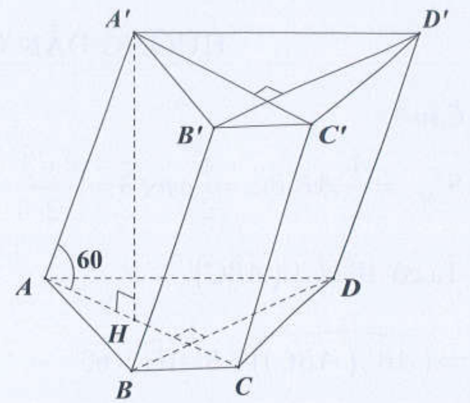
$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$\Rightarrow AH = AH' = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = AC = 2AH = a\sqrt{6}$

+ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 3a^2$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = 3a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3.



+ $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BD = 2a$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = 2a^2$

$+ AH = \frac{1}{3}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{2}$

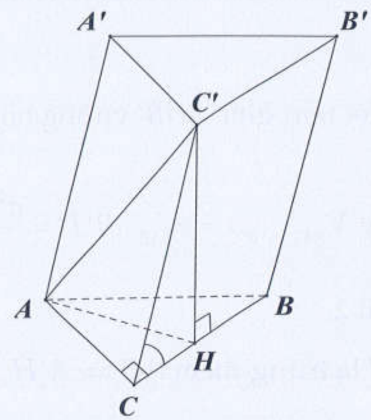
$+ \widehat{\left(AA',\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{A'AH} = 60^0$

+ Xét tam giác $A'HA$ vuông tại H có:

$A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = \frac{a}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = 2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = 24a^2$

+ H là trung điểm $BC \Rightarrow C'H \perp \left(ABC\right)$

$\Rightarrow C'H \perp AC$ mà $AC \perp BC \Rightarrow AC \perp \left(CC'H\right)$

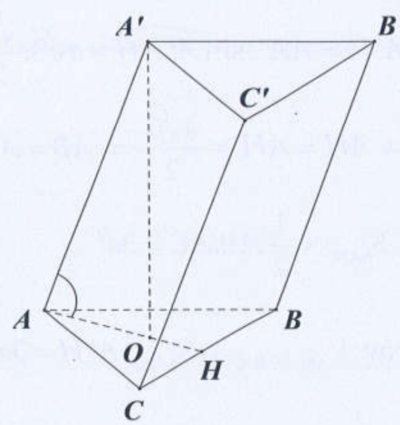
$\Rightarrow AC \perp CC' \Rightarrow \widehat{\left(\left(C'AC\right),\left(ABC\right)\right)} = \widehat{C'CH} = 60^0$

+ Xét tam giác $C'HC$ vuông tại H có:

$C'H = CH.\tan\widehat{C'CH} = 4a\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.C'H = 24a^2.4a\sqrt{3} = 96a^3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{V}{a^3\sqrt{3}} = 96 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5.



$+ S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}cm^2$

$\widehat{\left(AA',\left(ABC\right)\right)} = \widehat{A'AO} = 45^0$

ΔABC đều $\Rightarrow AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}cm$

$\Rightarrow AO = \frac{2AH}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}cm$

$+ \widehat{A'AO} = 45^0 \Rightarrow \Delta A'AO$ vuông cân tại O

$A'O = AO = \frac{20\sqrt{3}}{3}cm$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'O = 100\sqrt{3}.\frac{20\sqrt{3}}{3} = 2000cm^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

DẠNG 9: HÌNH HỘP

Hình hộp: *Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.*

Hình hộp đứng: *Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.*

Hình hộp chữ nhật: *Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là các hình chữ nhật.*

Hình lập phương: *Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông.*

Câu 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $AC = 8cm, A'C = 10cm$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $144\sqrt{2}cm^3$. **B.** $192\sqrt{2}cm^3$. **C.** $144cm^3$. **D.** $192cm^3$.

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 4\sqrt{3}$. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 3. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 6a$, $BD = 8a$. Chu vi của 1 đáy bằng 4 lần chiều cao khối hộp. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $40a^3$. **B.** $80a^3$. **C.** $240a^3$. **D.** $120a^3$.

Câu 4. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^0$, $AC = BD' = 2\sqrt{3}$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 5. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy bằng 30^0 Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 6. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 16 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. $18496cm^3$. **B.** $8704cm^3$. **C.** $57800cm^3$. **D.** $17408cm^3$.

Câu 7. Cho hình hộp đứng $ABCD\,A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $15cm$ và đường chéo BD' với đáy $ABCD$ một góc 30^0. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $1949cm^3$. **B.** $1125cm^3$. **C.** $1591cm^3$. **D.** $2756cm^3$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = \sqrt{15}$ $AD = 5$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc 30^0 và 60^0, cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. 21. **B.** 15. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc AB thoả mãn $AH = \dfrac{BH}{2}$, $\widehat{A'AH} = 30^0$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = a$ $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 120^0$, $AA' = \sqrt{3}a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABD. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{5}$. **D.** $2a^3\sqrt{5}$.

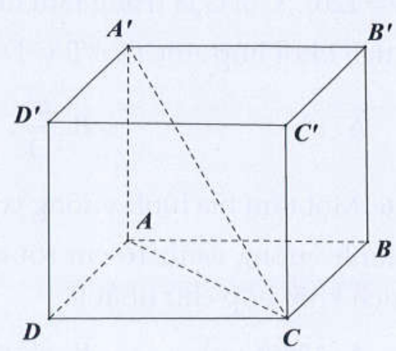
ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	D	C	B	A	D	B	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

ΔABC vuông cân tại B có : $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}cm$



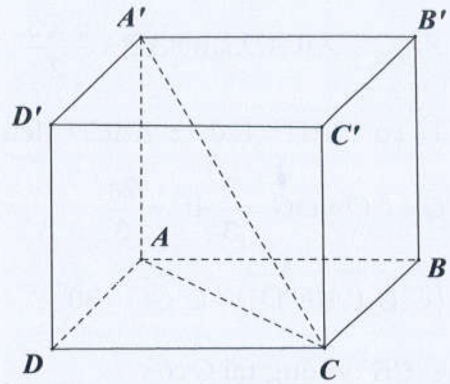
$\Delta D'DB$ vuông tại D có :

$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6cm$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = 192cm^3$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 2.



Đặt $AB = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$

$\Delta A'AC$ vuông tại A có :

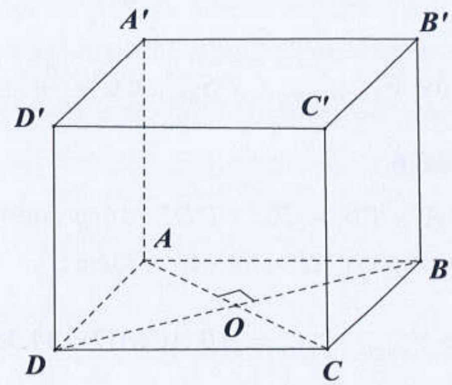
$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$

$A'C = 4\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4^3 = 64$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3.



Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 24a^2$

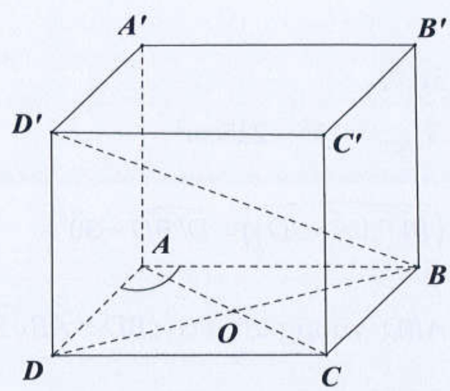
ΔOAB vuông tại O$\Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5a$

$\Rightarrow$ Chu vi đáy: $5a.4 = 20a \Rightarrow AA' = \dfrac{20a}{4} = 5a$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = 120a^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D***

Câu 4.



Ta có $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều

$\Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{3}AB}{2}$

$AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow AO = \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}AB}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2$

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = 2\sqrt{3}$

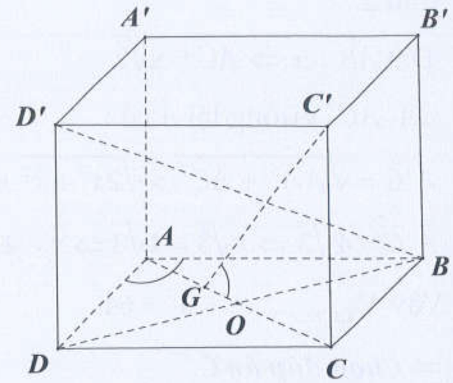
$\Delta D'DB$ vuông tại D có :

$DD' = \sqrt{BD'^2 - DB^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.DD' = 2\sqrt{3}.2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5.



$+ \ S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

+ Ta có $\widehat{BAD} = 120^0 \Rightarrow \Delta ACD$ đều $\Rightarrow AC = a$

$CG = CO + OG = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{3}$

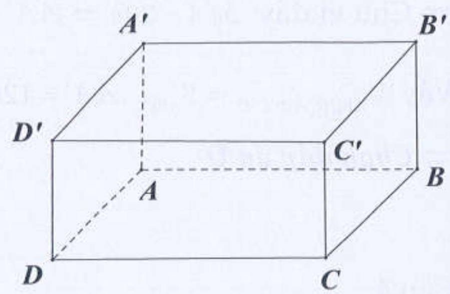
$+ \ \widehat{\left(C'G,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{C'GC} = 30^0$

$\Delta C'CG$ vuông tại C có :

$CC' = CG.\tan\widehat{C'GC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.CC' = \dfrac{a^3}{3}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6.

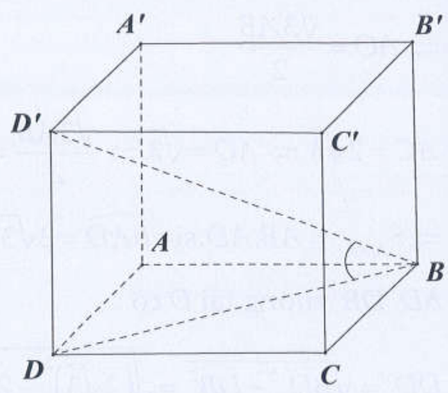


$AA' = BB' = CC' = DD' = 16cm$ nên $ABCD$ là hình vuông có $AB = 50 - 16 = 34cm$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AC.AD = 34.34.16 = 18496cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7.



$+ \ S_{ABCD} = 15^2 = 225cm^2$

$+ \ \widehat{\left(BD',\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{D'BD} = 30^0$

ΔABD vuông tại A có : $BD = AB\sqrt{2} = 15\sqrt{2}cm$

$\Delta D'BD$ vuông tại D có :

$DD' = BD.\tan\widehat{D'BD} = 5\sqrt{6}cm$

Vậy

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.DD' = 1125\sqrt{6}cm \approx 2756cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 8.

$+S_{ABCD}=AB.AD=5\sqrt{15}$

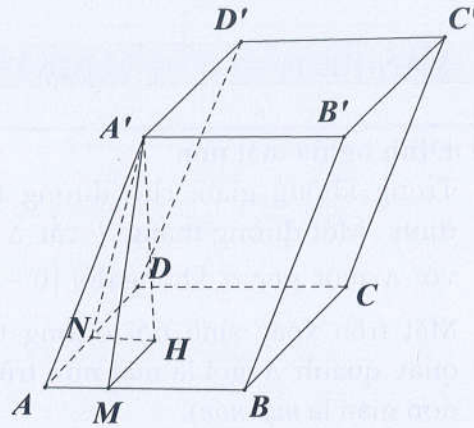
+ Kẻ $A'H\perp(ABCD)$, $MH\perp AB$, $NH\perp AD$

$\Rightarrow\widehat{(ABB'A'),(ABCD)}=\widehat{A'MH}=30^0$

$\widehat{(ADD'A'),(ABCD)}=\widehat{A'NH}=60^0$

Đặt $A'H=x$, Khi đó :

$A'N=\dfrac{x}{\sin 60^0}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}, HM=x.\cot 60^0=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$



$HM=\sqrt{AA'^2-A'N^2}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{3-4x^2}{3}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=5\sqrt{15}.\dfrac{\sqrt{15}}{5}=15\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

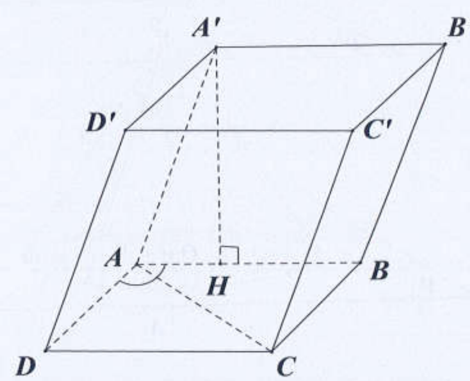
Câu 9.

$+\ S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$+AH=\dfrac{BH}{2}\Rightarrow AH=\dfrac{AB}{3}=\dfrac{a}{3}$

$+\Delta A'AH$ vuông tại H có:

$A'H=AH.\tan\widehat{A'AH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{9}$



Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{9}=\dfrac{a^3}{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 10.

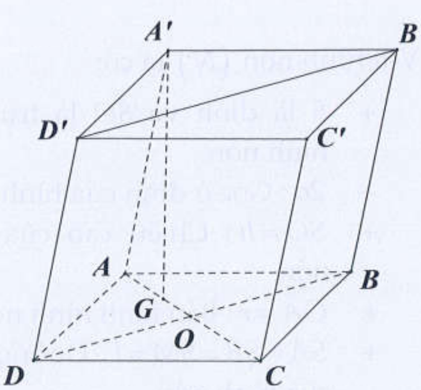
$+\ S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\dfrac{3a^2}{2}$

$+BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD.\cos\widehat{BAD}=13a^2$

$+AO=\sqrt{\dfrac{AB^2+AD^2}{2}-\dfrac{BD^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow AG=\dfrac{2AO}{3}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow A'G=\sqrt{AA'^2-AG^2}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$



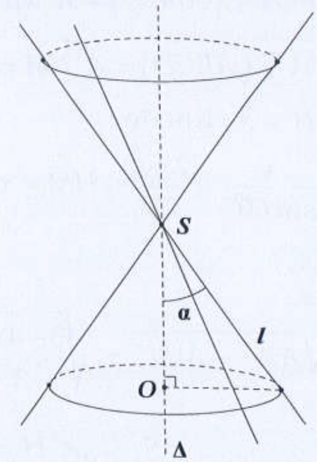
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'G=\dfrac{3a^2}{2}.\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}=a^3\sqrt{5}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

PHẦN 4: MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

VẤN ĐỀ 1 MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

1. Định nghĩa mặt nón

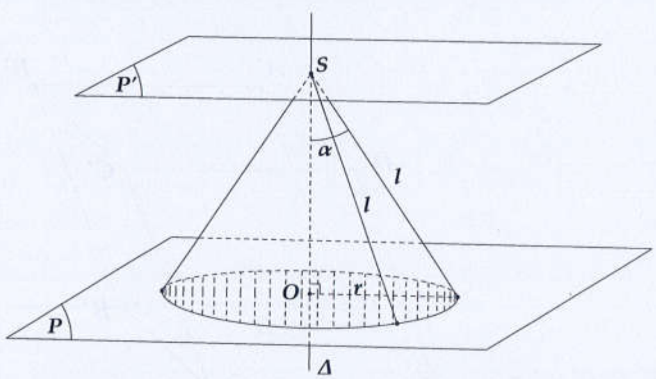
Trong không gian, cho đường thẳng Δ cố định. Một đường thẳng l cắt Δ tại S và tạo với Δ một góc α không đổi $\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$.



Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ gọi là **mặt nón tròn xoay** (hay đơn giản là *mặt nón*).

+ Δ : trục của mặt nón.
+ l : **đường sinh** của mặt nón.
+ S: đỉnh của mặt nón.
+ 2α: **góc ở đỉnh.**

2. Hình nón và khối nón

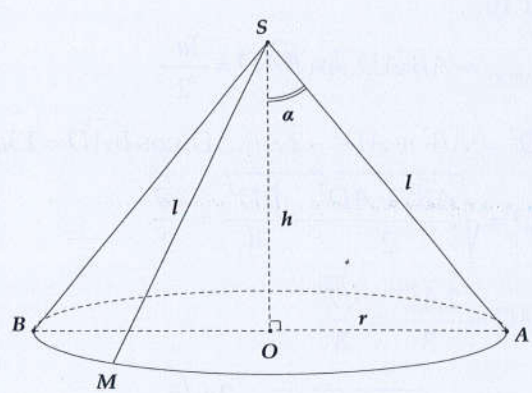


a. Hình nón: Cho mặt nón (N) với trục Δ, đỉnh S và góc ở đỉnh là 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O, $(O \neq S)$, cắt mặt phẳng theo thiết diện là đường tròn$(O;r)$; (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại S.

Khi đó phần của mặt nón (N) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn $(O;r)$ được gọi là **hình nón.**

Với hình nón (N) ta có:

+ S là đỉnh và SO là trục của hình nón.
+ 2α: Góc ở đỉnh của hình nón.
+ $SO = h$: Chiều cao của hình nón.
+ $OA = r$: Bán kính hình nón.
+ $SA = SB = SM = l$: Đường sinh của hình nón.



Nhận xét:

+ *Thiết diện của hình nón và mặt phẳng qua đỉnh của hình nón là 1* ***tam giác cân*** *tại đỉnh hình nón (có cạnh bên tam giác cân là l).*
+ $\forall M \in (O;r): SM = l$: *cách xác định 1 đường sinh của hình nón.*
+ *Góc* 2α *là góc* $\widehat{ASB}$ *với SA và SB, (AB là đường kính đáy) là hai đường sinh của hình nón.*

b. Khối nón: Là phần không gian giới hạn bởi hình nón, kể cả hình nón đó (hoặc hình nón cùng phần bên trong của nó gọi là ***khối nón***).

3. Diện tích hình nón và thể tích khối nón

Cho hình nón *N* có chiều cao *h*, đường sinh *l* và bán kính đáy *r*.

+ ***Diện tích xung quanh:*** của hình nón: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$.
+ ***Diện tích toàn phần:*** của hình nón: $\boxed{S_{tp} = \pi rl + \pi r^2}$.
+ ***Thể tích khối nón:*** $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

Câu 1. Với điểm O cố định thuộc mặt phẳng (P) cho trước, xét đường thẳng l thay đổi đi qua O và tạo với (P) một góc 30^0. Tập hợp các đường thẳng l trong không gian là

A. một mặt phẳng. **B.** hai đường thẳng.
C. một mặt trụ. **D.** một mặt nón.

Câu 2. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay nội tiếp tứ diện đều có cạnh bằng a là

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{4}$. **B.** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{3}a^2}{6}$. **D.** $S_{xq} = \frac{2\pi a^2}{3}$.

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều có cạnh bằng a là

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{3}a^2}{6}$.

Câu 4. Cho hình nón tròn xoay đỉnh *S*, đáy là đường tròn tâm *O*, bán kính đáy $r = 5$. Một thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB đều có cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{13}}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Câu 5. Cho hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là

A. Mặt nón tròn xoay. **B.** Mặt trụ tròn xoay.
C. Mặt cầu. **D.** Hai đường thẳng song song.

Câu 6. Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Đường cao hình nón bằng bán kính đáy của nó.

B. Đường sinh hợp với đáy một góc 45^0.

C. Đường sinh hợp với trục một góc 45^0.

D. Hai đường sinh tùy ý thì vuông góc với nhau.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3\ cm$, $AC = 4\ cm$. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối tròn xoay hình thành khi quay tam giác ABC quanh AB, AC và BC. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $V_1 > V_2 > V_3$. **B.** $V_2 > V_1 > V_3$. **C.** $V_3 > V_1 > V_2$. **D.** $V_3 = V_1 + V_2$.

Câu 8. Một khối tứ diện đều có cạnh a nội tiếp một hình nón. Thể tích khối nón là

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Câu 9. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Trong bảng sau, nối mỗi ý ở cột bên trái với một ý ở cột bên ... để được mệnh đề đúng.

Cột trái	Cột phải
a) Diện tích xung quanh của hình nón (N) là	1) $\dfrac{\pi a^3}{24}$
b) Thể tích của khối nón (N) là	2) $\dfrac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)a^2}{4}$
c) Diện tích toàn phần của hình nón (N) là	3) $\dfrac{\pi a^3}{6}$
d) Độ dài đường sinh hình nón (N) là	4) $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{4}$
	5) $\dfrac{a}{2}$
	6) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 10. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay bằng

A. một nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường cao của nó.

B. một nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh của nó.

C. tích của chu vi đáy với độ dài đường cao của nó.

D. tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh của nó.

Câu 11. Một hình nón (N) sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** πa^2.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Hình trụ luôn chứa một đường tròn.

B. Hình nón luôn chứa một đường tròn.

C. Hình nón luôn chứa một đường thẳng.

D. Mặt trụ luôn chứa một đường thẳng.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc $AC'A'$ khi quay quanh trục AA' bằng

A. $\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $\pi a^2\sqrt{5}$. **D.** $\pi\sqrt{6a^2}$.

Câu 14. Một hình nón có đường sinh bằng $8\,cm$, diện tích xung quanh bằng $240\pi\ cm^2$. Đường kính của đường tròn đáy hình nón bằng

A. $2\sqrt{30}\ cm$. **B.** $30\ cm$. **C.** $60\ cm$. **D.** $50\ cm$.

Câu 15. Cho điểm M cố định thuộc mặt phẳng (α) cho trước, xét đường thẳng d thay đổi đi qua M và tạo với (α) một góc 60^0. Tập hợp các đường thẳng d trong không gian là

A. mặt phẳng. **B.** hai đường thẳng.

C. mặt nón. **D.** mặt trụ.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{3\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\frac{3\pi a^2}{6}$. **D.** $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Câu 17. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90^0. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy của hình nón bằng 60^0. Khi đó diện tích thiết diện bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **C.** $\frac{2a^2}{3}$. **D.** $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích xung quanh của hình nón đó là

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}\pi a^2}{2}$

Câu 19. Cho hai điểm A, B cố định, M là điểm di động trong không gian sao cho góc giữa đường thẳng AB và AM bằng 30^0. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. M thuộc mặt cầu cố định. **B.** M thuộc mặt trụ cố định.

C. M thuộc mặt phẳng cố định. **D.** M thuộc mặt nón cố định.

Câu 20. Cho hình nón có đường sinh $l = 4r$, với r là bán kính đường tròn đáy. Khai triển mặt xung quanh hình nón theo một đường sinh, ta được một hình quạt tròn có bán kính bằng l và góc ở đỉnh của hình quạt là α. Trong các kết luận sau đây, kết luận nào đúng?

A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **B.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **C.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$. **D.** $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3\ cm$, $AC = 4\ cm$. Thể tích khối nón tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh AB bằng

A. $80\pi\ cm^3$. **B.** $\dfrac{80\pi}{3}\ cm^3$. **C.** $48\pi\ cm^3$. **D.** $16\pi\ cm^3$.

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\sqrt{3}\pi a^2$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay các cạnh tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Cho hình nón có đỉnh S, độ dài đường sinh bằng $2a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón theo một thiết diện, diện tích lớn nhất của thiết diện là

A. $2a^2$. **B.** a^2. **C.** $4a^2$. **D.** $\sqrt{3}a^2$.

Câu 25. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Khai triển hình nón theo một đường sinh, ta được một hình quạt tròn có góc ở tâm là α. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

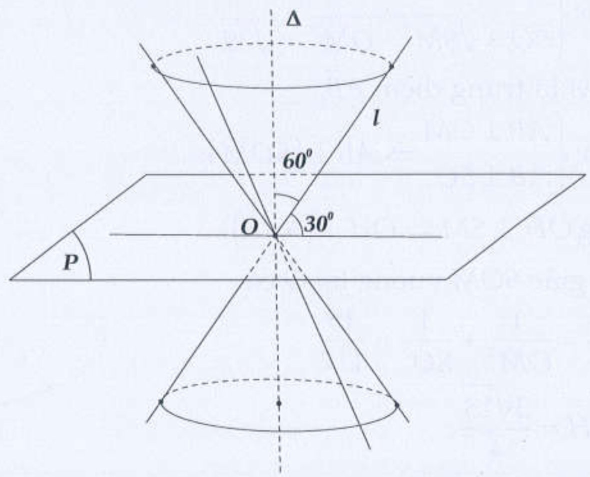
A. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$. **D.** $\alpha = \pi$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	D	A	C	B	B	D	A
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B		B	B	C	D	C
Câu	15	16	17	18	19	20	21
Đáp án	C	A	A	C	D	C	D
Câu	22	23	24	25			
Đáp án	C	B	A	D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

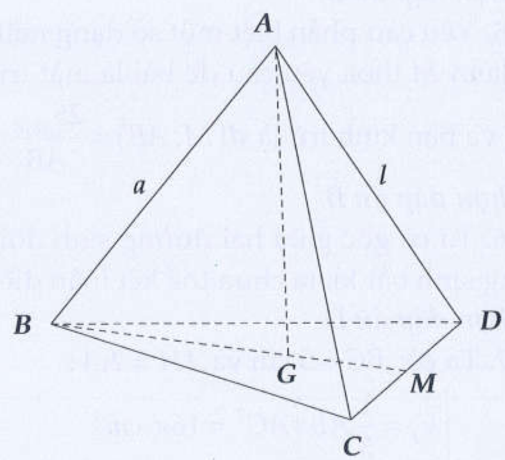


Gọi Δ là đường thẳng qua O và vuông góc với (P).

Do góc giữa l và (P) bằng 30^0 nên góc giữa l và Δ bằng 60^0. Do O và Δ cố định nên tập hợp các đường thẳng l là mặt nón tròn xoay với đỉnh O, trục Δ, góc ở đỉnh 120^0.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 2.



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

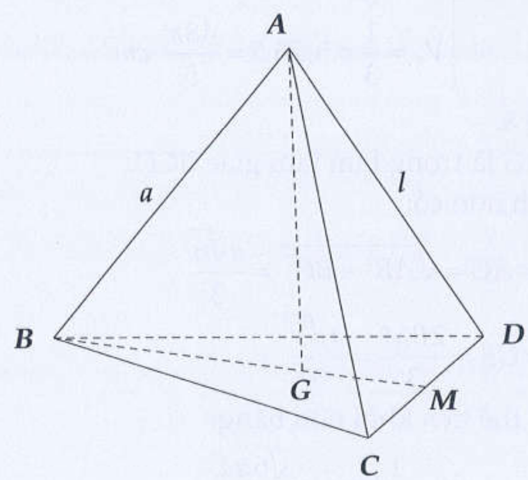
Hình nón có:

$$\begin{cases} h = AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \\ l = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ r = GM = \dfrac{BM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy diện tích xung quanh hình nón bằng:

$S_{xq} = \pi r l = \dfrac{\pi a^2}{4} \Rightarrow$ *Chọn đáp án A.*

Câu 3.



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

Hình nón có:

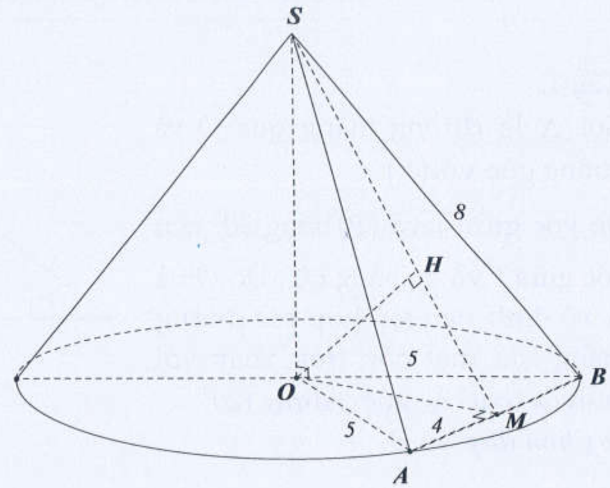
$$\begin{cases} h = AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \\ l = AD = a \\ r = BG = \dfrac{2BM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy diện tích xung quanh hình nón bằng:

$S_{xq} = \pi r l = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 4.



Ta có: $\begin{cases} OM = 3 \\ SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{39} \end{cases}$.

Gọi M là trung điểm AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOM)$.

Dựng $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Tam giác SOM vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{117}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5. Yêu cầu phân biệt một số dạng mặt tròn xoay. Trong trường hợp này, tập hợp các điểm M thỏa yêu cầu đề bài là mặt trụ tròn xoay với trục là đường thẳng AB (*cố định*) và bán kính trụ là $d(M; AB) = \frac{2S_{MAB}}{AB}$ (*không đổi*).

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

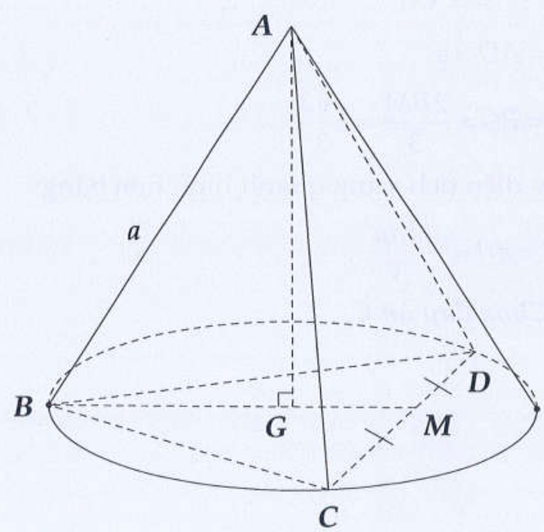
Câu 6. Ta có góc giữa hai đường sinh đối xứng nhau qua trục bằng 90^0. Đối với hai đường sinh bất kì, ta chưa thể kết luận điều gì.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Ta có: $BC = 5$ cm và $AH = 2,4$.

Dễ thấy: $\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} AB\pi AC^2 = 16\pi\ cm^3 \\ V_2 = \frac{1}{3}.AC\pi AB^2 = 12\pi\ cm^3 \\ V_3 = \frac{1}{3}\pi.5,76.5 = \frac{48\pi}{5}\ cm^3 \end{cases} \Rightarrow V_1 > V_2 > V_3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8.



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

Hình nón có:

$$\begin{cases} h = AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ r = GB = \frac{2BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy thể tích khối nón bằng:

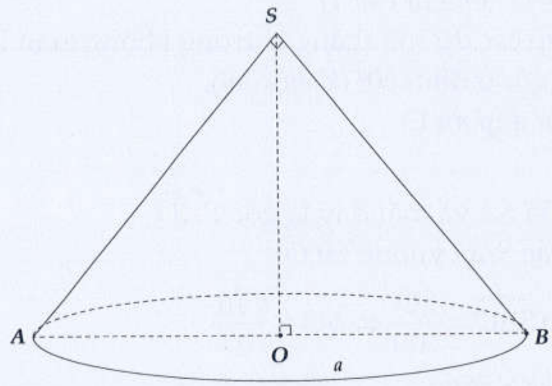
$$V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9. **Chọn đáp án: a-(4), b-(1), c-(2), d-(6)**

Tam giác vuông cân SAB có:

$$AB = a \Rightarrow SA = SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Hình nón có: $\begin{cases} r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \\ l = SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ h = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Suy ra: $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{4}$.

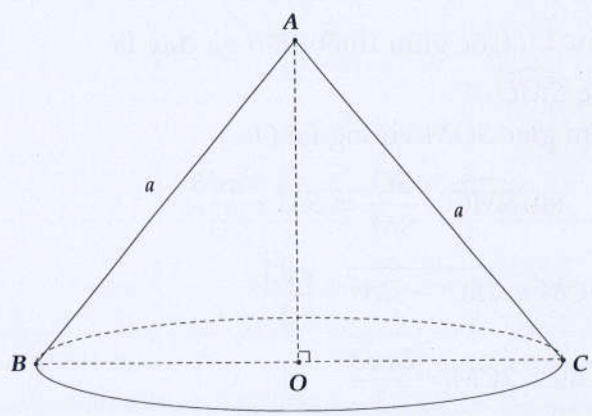
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{4} + \dfrac{\pi a^2}{4} = \dfrac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)a^2}{4} \\ V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = \dfrac{\pi a^3}{24} \end{cases}$$

Câu 10.

Ta có: $S_{xq} = \left(\pi r\right).l \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 11.

Hình nón có: $\begin{cases} r = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \\ l = AC = a \end{cases}$.



Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

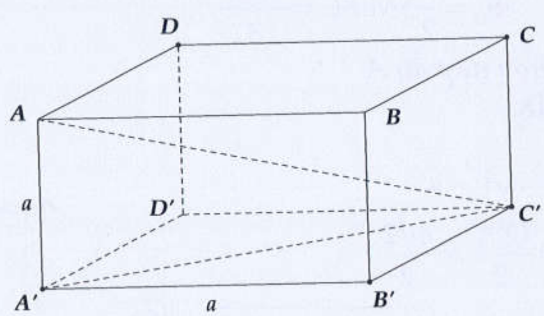
Câu 12.

Chú ý phân biệt khái niệm hình nón và mặt nón $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 13.

Hình nón có:

$$\begin{cases} r = A'C' = a\sqrt{2} \\ l = AC' = \sqrt{\left(AA'\right)^2 + \left(AC'\right)^2} = a\sqrt{3} \end{cases}.$$



Vậy $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{6}\pi a^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 14.

Ta có: $l = 8\ cm$. Suy ra: $S_{xq}\pi rl = 240\pi\ cm^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{240\pi}{\pi l} = 30\ cm$.

Vậy đường kính mặt đáy: $2r = 60\ cm \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

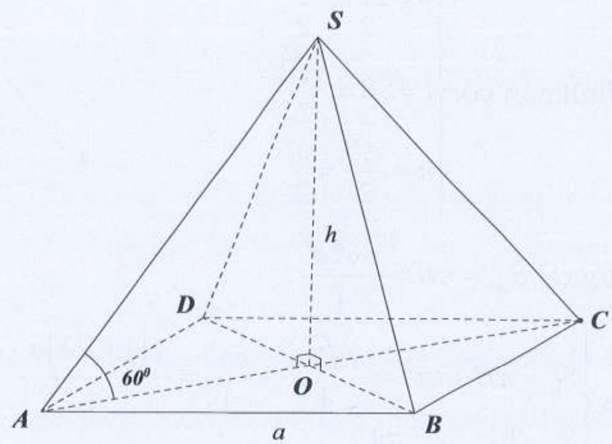
Câu 15. (*Tương tự câu 1*)
Tập hợp các đường thẳng d trong không gian là mặt nón có đỉnh M (*cố định*), đường sinh d, góc ở đỉnh 60^0 (*không đổi*).
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 16.

Góc giữa SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAO}$.
Tam giác SAO vuông tại O:

$$\tan\widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} \Leftrightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có: $\begin{cases} h = SO \\ r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ l = SA = \sqrt{2}a \end{cases}$



Suy ra diện tích đáy của hình nón:

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{2}.$$

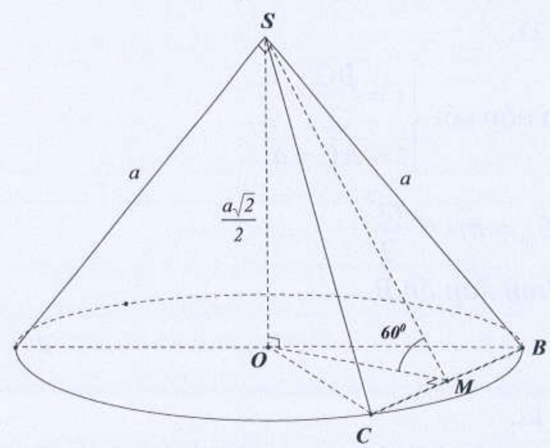
Vậy diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl + \pi r^2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 17. Góc giữa thiết diện và đáy là góc $\widehat{SMO}$.
Tam giác SOM vuông tại O:

$$\sin\widehat{SMO} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{SC^2 - SM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow BC = 2CM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



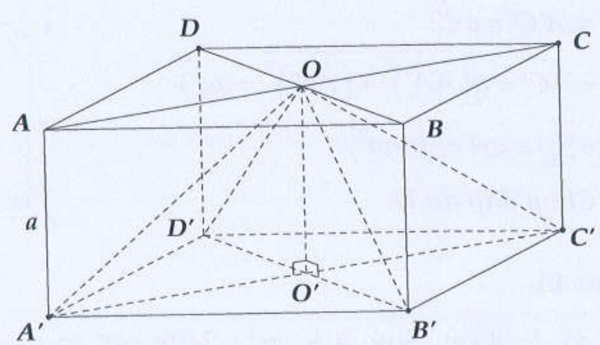
Vậy diện tích thiết diện:

$$S_{td} = \frac{1}{2}SM.BC = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 18.

$$\begin{cases} h = AA' = a \\ r = \dfrac{O'A'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ l = OA' = \sqrt{(O'O)^2 + (O'A')^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2} \end{cases}$$



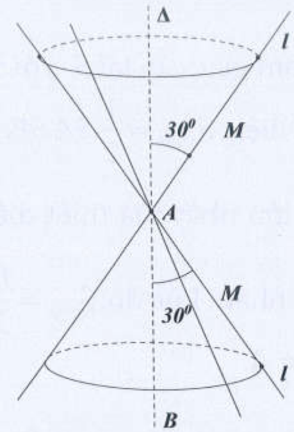
Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 19.

Tập hợp các điểm M cần tìm là mặt tròn xoay với đỉnh A (*cố định*), trục là đường thẳng AB (*cố định*) và góc ở đỉnh bằng 60^0 (*không đổi*).

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 20. Ta có chu vi đáy của hình nón là $C = 2\pi r$, cung AB có độ dài $l\alpha$.

Vậy $l\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2\pi r}{l} = \dfrac{\pi}{2}$, do $l = 4r$.

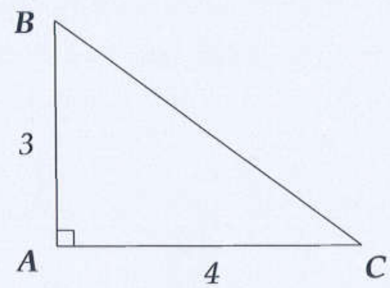
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 21.

Ta có: $\begin{cases} h = AB = 3\ cm \\ r = AC = 4\ cm \end{cases}$.

Suy ra: $V = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = 16\pi\ cm^2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 22.

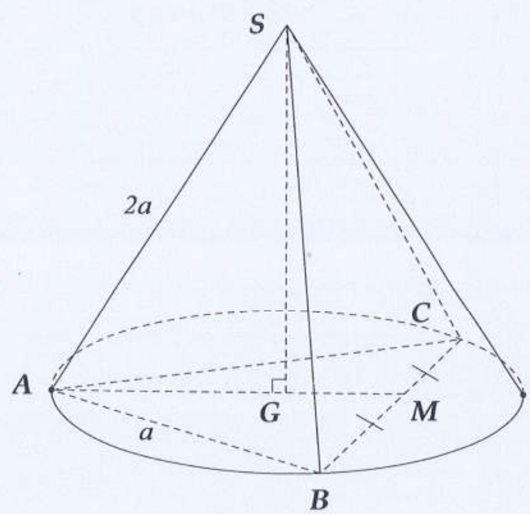
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow SG \perp (ABC)$.

Tam giác SAG vuông tại G:

$$\begin{cases} h = SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3} \\ l = SA = 2a \\ r = GA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 23. Ta có: $\begin{cases} BC \perp DA \\ BC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB.$

Khi quay các cạnh của tứ diện $ABCD$ quanh trục AB thì hình thành 2 hình nón tròn xoay là hình nón (N) với đỉnh B, đường sinh BD và hình nón (N') với đỉnh A, đường sinh AC.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 24.

Thiết diện là tam giác cân tại S với $SA = SB = l$.

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SA.SB.\sin\widehat{ASB} = \frac{l^2}{2}\sin\widehat{ASB} \le \frac{l^2}{2}$.

Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện bằng $\frac{l^2}{2}$ khi thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau. Lúc đó: $S_{\max} = \frac{l^2}{2} = 2a^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 25.

Ta có chu vi đáy của hình nón là $C = 2\pi r$, cung AB có độ dài $l\alpha$.

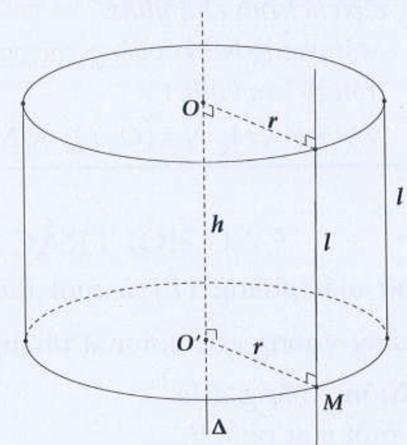
Vậy $l\alpha = 2\pi r \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{l} = \pi$, do $r = \frac{l}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

VẤN ĐỀ 2 — MẶT TRỤ – HÌNH TRỤ – KHỐI TRỤ

1. Định nghĩa mặt trụ

Trong không gian, cho đường thẳng Δ cố định. Một đường thẳng l song song với Δ và cách Δ một khoảng không đổi r. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ gọi là *mặt trụ tròn xoay* (hay đơn giản là *mặt trụ*).

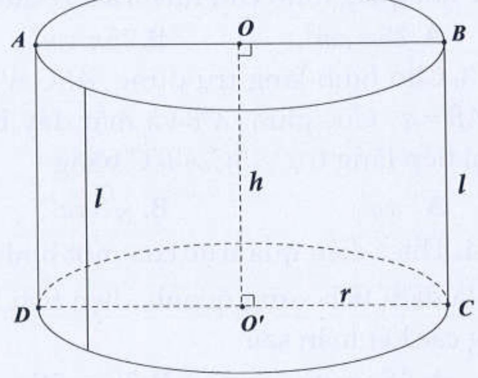


+ Δ : trục của mặt trụ.
+ l : **đường sinh** của mặt trụ.
+ r : bán kính của mặt trụ.

2. Hình trụ và khối trụ

a. Hình trụ

Cho mặt trụ có trục Δ, đường sinh l và bán kính r. Cắt mặt trụ bởi 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với Δ ta được thiết diện là 2 đường tròn $(O;r)$ và $(O';r)$.



Khi đó phần của mặt trụ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hai đường tròn $(O;r)$ và $(O';r)$ được gọi là *hình trụ*.

Lúc đó :

+ $OO' = h$ *:Chiều cao hình trụ.*
+ $(O;r)$ *và* $(O';r)$*: Hai đường tròn đáy của hình trụ và* r *là bán kính hình trụ.*
+ $BC = AD = l$ *: Đường sinh hình trụ.*

b. Khối trụ:
Là phần không gian giới hạn bởi hình trụ, kể cả hình trụ đó (hoặc hình trụ cùng phần bên trong của nó được gọi là ***khối trụ***).

3. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.
+ ***Diện tích toàn phần:*** $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2}$.
+ ***Thể tích:*** $\boxed{V = \pi r^2 h}$.

Nhận xét:

+ *Rõ ràng:* $h = l$.
+ *Mặt phẳng bất kì song song với trục của trụ (hay qua trục) cắt hình trụ theo thiết diện là* ***hình chữ nhật****.*
+ *Mặt phẳng bất kì vuông góc với trục của trụ cắt hình trụ theo thiết diện là đường tròn có bán kính* r.
+ $\forall M \in (O;r)$, $N \in (O';r)$: $MN \,//\, OO'$ *: cách xác định 1 đường sinh của hình trụ.*

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và một điểm I cố định trên mặt phẳng (P). Gọi d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cách I một khoảng k không đổi. Tập hợp các đường thẳng d là

A. một mặt phẳng. **B.** một mặt cầu.
C. một mặt trụ. **D.** một mặt nón.

Câu 2. Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\ cm$, $AD = 5\ cm$. Thể tích khối trụ hình thành được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đoạn AB bằng

A. $25\pi\ cm^3$. **B.** $75\pi\ cm^3$. **C.** $50\pi\ cm^3$. **D.** $45\pi\ cm^3$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, với $AB = a$. Góc giữa $A'B$ và mặt đáy bằng 45^0. Diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. πa^2. **B.** $\sqrt{3}\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 4. Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông cạnh $2a$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ. Chọn kết luận đúng, trong các kết luận sau

A. $4S_1 = 3S_2$. **B.** $3S_1 = 2S_2$. **C.** $2S_1 = S_2$. **D.** $2S_1 = 3S_2$.

Câu 5. Tỉ số thể tích của khối trụ nội tiếp và khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 6. Cho hình trụ có bán kính đáy r, đường cao $h = OO'$. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng (α) tuỳ ý vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng m cho trước $(m < r)$ Khi ấy, mặt phẳng (α) có tính chất

A. cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông.
B. luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h.
C. luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.
D. cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích $h\left(r^2 - m^2\right)$.

Câu 7. Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một hình trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a, b, c. Thể tích khối trụ bằng

A. $\frac{\pi\left(a^2 + b^2\right)c}{4}$. **B.** $\frac{\pi\left(c^2 + b^2\right)a}{4}$.

C. $\frac{\pi\left(a^2+c^2\right)b}{4}$.

D. $\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)c}{4} \cup \frac{\pi\left(a^2+c^2\right)b}{4} \cup \frac{\pi\left(b^2+c^2\right)a}{4}$.

Câu 8. Một hình trụ (H) có diện tích xung quanh bằng 4π. Biết thiết diện của (H) qua trục là hình vuông. Diện tích toàn phần của (H) bằng

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Câu 9. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung 120^0. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 10. Người ta bỏ bốn quả bóng bàn cùng kích thước, bán kính bằng a vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn. Biết quả bóng nằm dưới cùng, quả bóng trên cùng lần lượt tiếp xúc với mặt đáy dưới và mặt đáy trên của hình trụ đó. Lúc đó, diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. $8\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Câu 11. Cho hình trụ (H) có bán kính đáy bằng a và thể tích bằng $2\pi a^3$. Trong bảng sau, nối mỗi ý ở cột bên trái với một ý ở cột bên phải để được mệnh đề đúng.

Cột trái	Cột phải
a) Chiều cao của hình trụ (H) bằng	1) a.
b) Diện tích xung quanh của hình trụ (H) bằng	2) $4\pi a^2$.
c) Diện tích toàn phần của hình trụ (H) bằng	3) πa^2.
d) Mặt phẳng (P) qua trục và cắt hình trụ (H) theo thiết diện có diện tích bằng	4) $6\pi a^2$.
	5) $4a^2$
	6) $2a$.
	7) $2a^2$.

Câu 12. Cho hình trụ (H) có hai đáy là hai đường tròn $(O;r)$ và $(O';r)$. Hình nón (N) có đỉnh là O và đáy của hình nón là đường tròn $(O';r)$. Lúc đó, tỉ số thể tích của khối trụ (H) và khối nón (N) bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 13. Một hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = a$, đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 2a$. Cho hình thang đó quay quanh CD, ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $V = 2\pi a^3$. **C.** $V = \frac{1}{3}\pi a^3$. **D.** $V = 3\pi a^3$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Xét hình trụ tròn xoay ngoại tiếp hình lăng trụ đó. Xét hai khẳng định sau

(I) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

(II) Thể tích khối trụ là $V = \pi a^3$.

Hãy chọn phương án đúng.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều sai. **D.** Cả (I) và (II) đều đúng.

Câu 15. Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Một hình trụ tròn xoay có đáy là 2 đường tròn nội tiếp 2 hình vuông đối diện của hình lập phương. Hiệu số thể tích của khối lập phương và khối trụ đã cho là

A. $1-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $1-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $1-\dfrac{\pi^2}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 16. Một hình trụ tròn xoay, bán kính đáy bằng r, trục $OO' = r$. Một đoạn thẳng $AB = r\sqrt{2}$, với $A \in (O;r)$, $B \in (O';r)$. Góc giữa AB và trục của hình trụ là

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Câu 17. Cho $ABCD$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Biết $AB = 4$, $AD = 3$ và thể tích của khối trụ là 24π. Khi đó, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích đáy của cái lọ hình trụ bằng

A. $16\pi r^2$. **B.** $18\pi r^2$. **C.** $9\pi r^2$. **D.** $36\pi r^2$.

Câu 19. Một hình trụ có bán kính đáy bằng r và thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ bằng

A. $4r^3$. **B.** $3r^3$. **C.** $2r^3$. **D.** $5r^3$.

Câu 20. Diện tích toàn phần một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông bằng

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Câu 21. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. một nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường cao của nó.

B. hai lần tích của chu vi đáy với độ dài đường cao của nó.

C. một nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh của nó.

D. tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh của nó.

Câu 22. Một hình trụ có hai đáy ngoại tiếp hai đáy một hình lập phương. Biết thể tích khối trụ đó là $\dfrac{\pi}{2}$ thì thể tích khối lập phương bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 23. Một hình trụ có đáy là hai hình tròn $(O;6)$, $(O';6)$ và $OO'=10$. Một hình nón có đỉnh O' và có đáy là hình tròn $(O;6)$. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần. Thể tích phần khối trụ còn lại (không chứa khối nón) bằng

A. 60π. **B.** 90π. **C.** 120π. **D.** 240π.

Câu 24. Một khối trụ có bán kính đáy $r=10\ cm$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $8\ cm$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trụ $6\ cm$. Diện tích thiết diện được tạo thành là

A. $138\ cm^2$. **B.** $64\ cm^2$. **C.** $118\ cm^2$. **D.** $128\ cm^2$.

Câu 25. Hình khai triển mặt xung quanh của hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích bằng 48π, biết đường cao hình trụ bằng 4. Bán kính của đường tròn đáy hình trụ bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

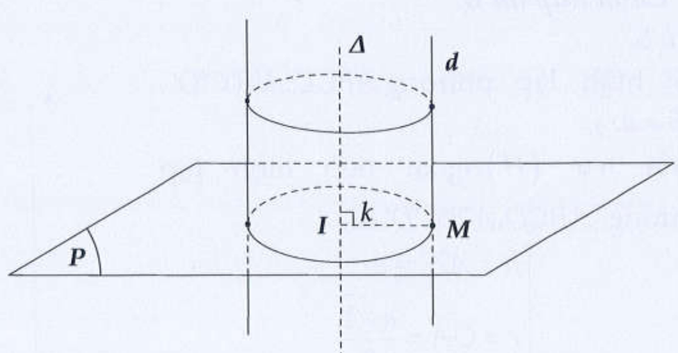
Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	C	B	D	B	A
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	C	D	A	B	C
Câu	11	12	13	14	15
Đáp án		B	A	A	B
Câu	16	17	18	19	20
Đáp án	A	D	C	A	A
Câu	21	22	23	24	25
Đáp án	D	A	D	D	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Tập hợp các đường thẳng d là mặt trụ với trục của trụ là đường thẳng Δ qua I, vuông góc với mặt phẳng (P) (*cố định*) và bán kính mặt trụ là k (*không đổi*).

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

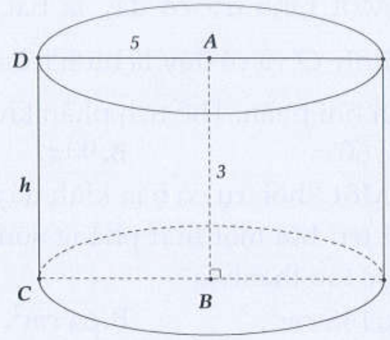


Câu 2.

Hình trụ có: $\begin{cases} h = AB = 3\ cm \\ r = AD = 5\ cm \end{cases}$.

Thể tích khối trụ là $V = h\pi r^2 = 75\pi\ cm^2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 3.

Tam giác ABC có $BC = a\sqrt{2}$.

Do $AA' \perp (ABC)$ nên góc giữa $A'B$ và (ABC) là góc $\widehat{A'BA} = 45^0$.

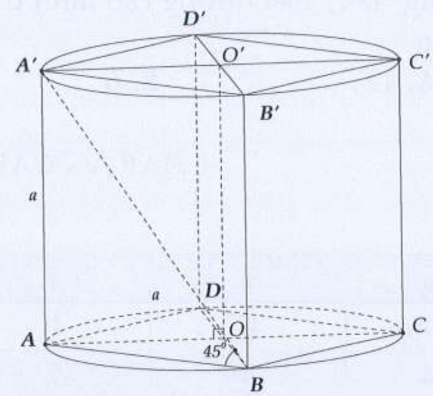
$\Rightarrow AA' = AB = a.$

Hình trụ có: $\begin{cases} r = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ l = AA' = a \end{cases}$.

Diện tích xung quanh trụ là.

$$S_{xq} = 2\pi rl = \sqrt{2}\pi a^2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



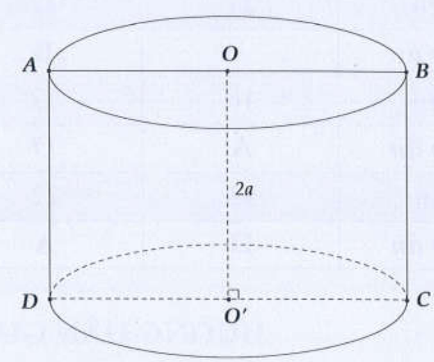
Câu 4. Gọi thiết diện là $ABCD$ với $AB = BC = 2a$, nên hình trụ có:

$$\begin{cases} l = AB = 2a \\ r = \dfrac{BC}{2} = a \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} S_1 = 2\pi rl = 4\pi a^2 \\ S_2 = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 6\pi a^2 \end{cases}$.

Vậy $3V_1 = 2V_2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



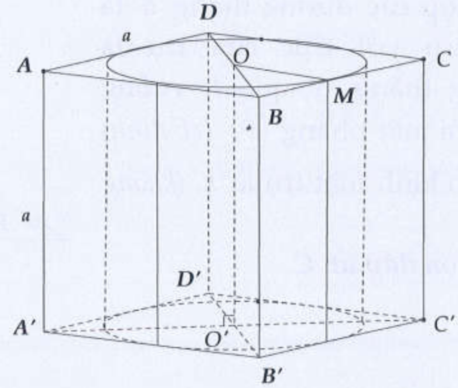
Câu 5.

Gọi hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = a$.

Hình trụ (H) ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có:

$$\begin{cases} h = AA' = a \\ r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Thể tích (H) là $V = h\pi r^2 = \dfrac{\pi a^3}{2}$.



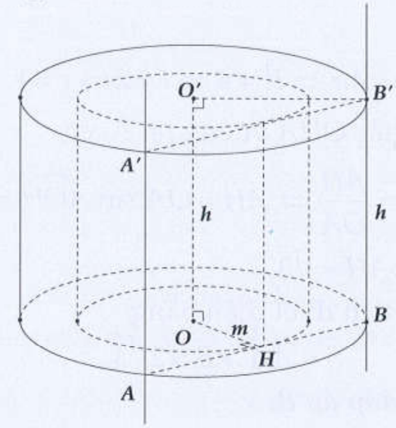
Hình trụ (H') nội tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có: $\begin{cases} h' = AA' = a \\ r' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Thể tích (H') là $V' = h'\pi(r')^2 = \dfrac{\pi a^3}{4}$. Suy ra: $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

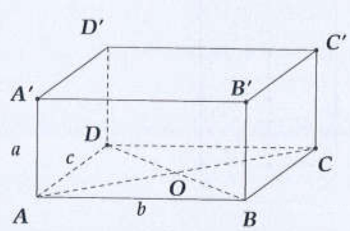
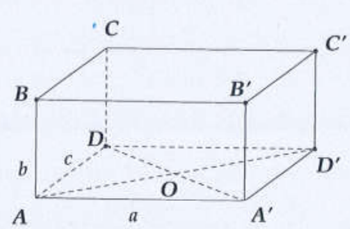
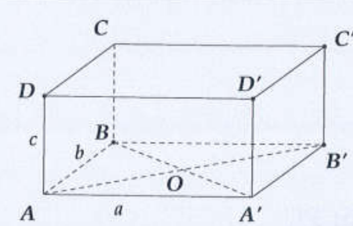
Câu 6.

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh AB của thiết diện. Lúc đó, mặt phẳng (α) luôn tiếp xúc với mặt trụ có trục là OO' *(cố định)* và bán kính mặt trụ bằng m *(không đổi)*.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 7. Gọi các cạnh của hình hộp chữ nhật đã cho là $AA' = a,\ AB = b, AD = c$. Do khối trụ ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có 3 trường hợp sau:

TH 1: $h = a$	**TH 2:** $h = b$	**TH 3:** $h = c$
$V = AA'.\pi\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi\left(b^2+c^2\right)a}{4}.$	$V = AB.\pi\left(\dfrac{AD'}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi\left(a^2+c^2\right)b}{4}.$	$V = AD.\pi\left(\dfrac{AB'}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi\left(a^2+b^2\right)c}{4}.$
		

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

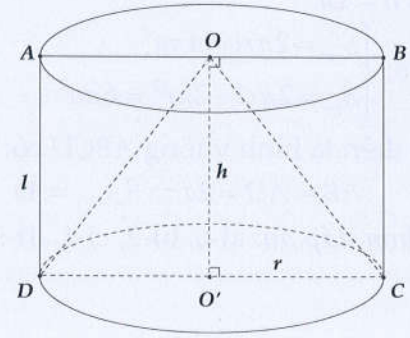
Câu 8. Gọi $l,\ r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính của hình trụ.

Do thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên $r = \dfrac{l}{2}$.

Ta có: $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi \Leftrightarrow l^2 = 4 \Leftrightarrow l = 2 \Rightarrow r = 1.$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + 2\pi r^2 = 6\pi.$

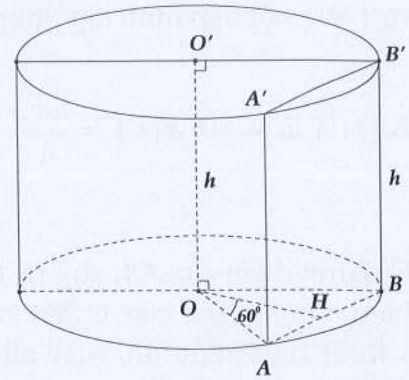
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 9.

Gọi l, r lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính của hình trụ.

Do thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên $r = \frac{l}{2}$.



Ta có:

$S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi \Leftrightarrow l^2 = 4 \Leftrightarrow l = 2 \Rightarrow r = 1.$

Xét tam giác OHA vuông tại A, có:

$\sin\widehat{AOH} = \frac{AH}{OA} \Leftrightarrow AH = OA.\sin\widehat{AOH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

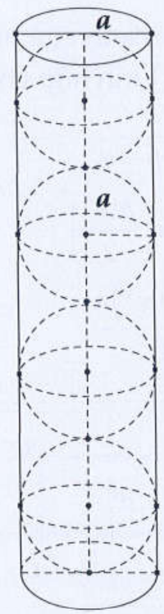
$\Rightarrow AB = 2AH = \sqrt{3}.$

Vậy diện tích thiết diện bằng:

$$S = AA'.AB = 2\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10.



Theo giả thiết, hình trụ có bán kính $r = a$, độ dài đường sinh $l = 4.2a = 8a$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 16\pi a^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11.

Gọi h là chiều cao hình trụ, ta có:

$V = h\pi r^2 \Leftrightarrow h\pi a^2 = 2\pi a^3 \Leftrightarrow h = 2a.$

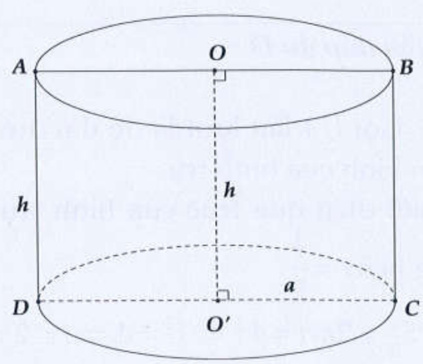
$\Rightarrow l = h = 2a.$

Suy ra: $\begin{cases} S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi a^2 \\ S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 6\pi a^2 \end{cases}.$

Thiết diện là hình vuông $ABCD$ có

$$AB = AD = 2a \Rightarrow S_{ABCD} = 4a^2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án:*** **a)-6, b)-2, c)-4, d)-5.**



Câu 12.

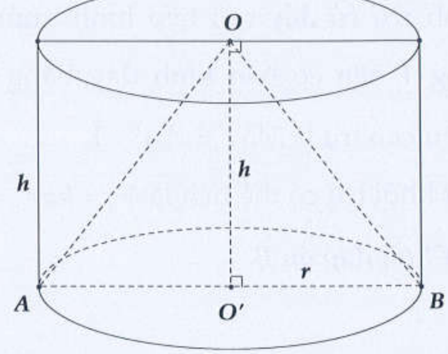
Hình trụ (H) có chiều cao là OO' và bán kính bằng r nên thể tích khối trụ là:

$$V_1 = OO'\pi r^2.$$

Hình nón (N) có chiều cao OO' và bán kính đáy bằng r nên thể tích khối nón là:

$$V_2 = \frac{1}{3}.OO'.\pi r^2$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 13.

Gọi V_1 là thể tích khối nón đỉnh C, đường cao $CH = a$, bán kính đáy $BH = a$ nên:

$$V_1 = \frac{1}{3}CH.\pi BH^2 = \frac{\pi a^3}{3}.$$

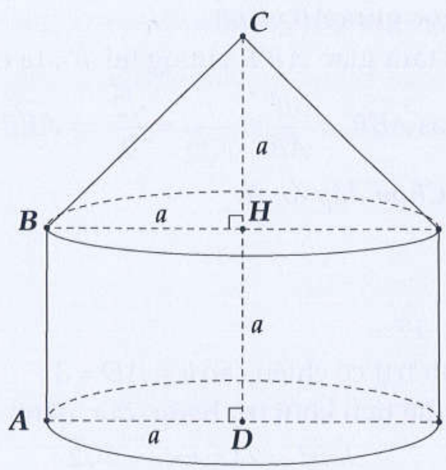
Gọi V_2 là thể tích khối trụ có đường cao $HD = a$, bán kính đáy $AD = a$ nên:

$$V_2 = HD.\pi.AD^2 = \pi a^3.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

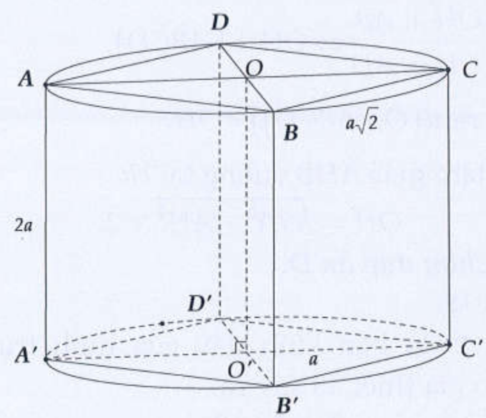


Câu 14. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a$. Vậy thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông (do $AC = AA' = 2a$).

Lúc đó, thể tích khối trụ là:

$$V = AA'.\pi.(OA)^2 = 2\pi a^3.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



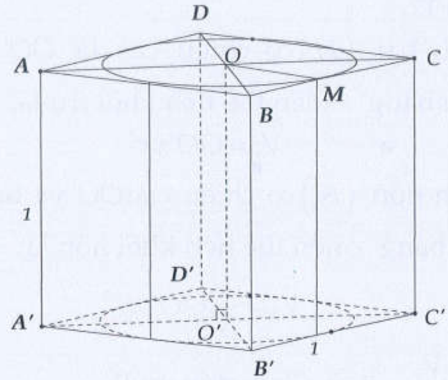
Câu 15.

Thể tích khối lập phương là: $V_1 = 1^3 = 1$.

Hình trụ có đáy nội tiếp hình vuông cạnh bằng 1 nên có bán kính đáy bằng $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$, chiều cao trụ là $MM' = AA' = 1$.

Vậy khối trụ có thể tích là: $V_2 = h\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



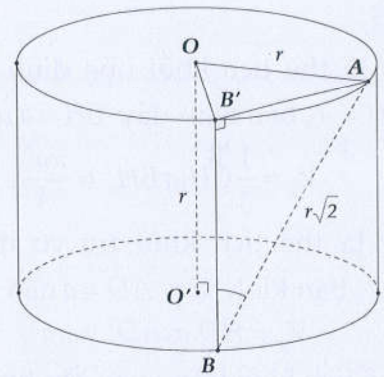
Câu 16.

Dựng $BB' \parallel OO'$ suy ra góc giữa AB và OO' là góc giữa AB và BB'.

Xét tam giác $AB'B$ vuông tại B', ta có:

$$\cos\widehat{ABB'} = \frac{BB'}{AB} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABB'} = 45^0.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 17.

Hình trụ có chiều cao $h = AD = 3$.

Do thể tích khối trụ bằng 24π nên:

$$h\pi r^2 = 24\pi \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}.$$

Gọi H là trung điểm AB

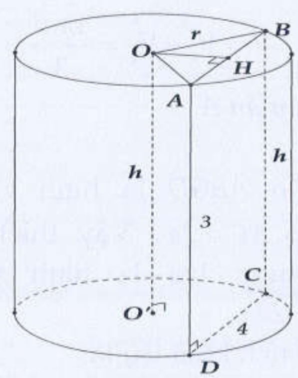
$$\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD).$$

Suy ra: $d(O,(ABCD)) = OH$.

Xét tam giác AHB vuông tại H:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 18.

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ.

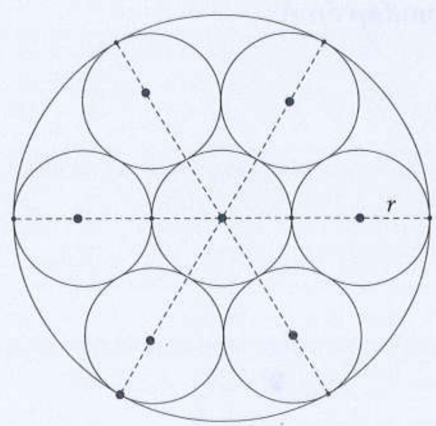
Theo giả thiết, ta suy ra:

$$R = \frac{2r + 2r + 2r}{2} = 3r.$$

Vậy diện tích đáy của hình trụ là:

$$S = \pi R^2 = 9\pi r^2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 19.

Chiều cao hình trụ $h = l = 2r$.

Do đáy của hình lăng trụ nội tiếp hình trụ nên $OA = r \Leftrightarrow \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = r \Leftrightarrow AB = r\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là: $V = 2r.\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 4r^3$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 20.

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ. Ta suy ra $h = l = 2r$.

Do đó: $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$. Từ giả thiết suy ra $4\pi r^2 = 4\pi \Leftrightarrow r = 1$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 6\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 21.

Công thức diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = \left(2\pi r\right)l \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 22.

Gọi cạnh hình lập phương là a.

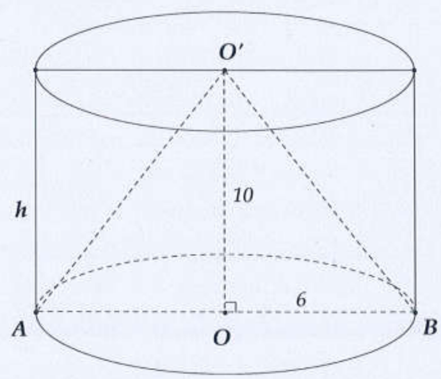
Hình trụ có $\begin{cases} h = a \\ r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow V = h\pi r^2 = \dfrac{\pi a^3}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow a = 1$.

Vậy thể tích khối lập phương là $V = 1^3 = 1 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 23.

+ Hình trụ có chiều cao $h = OO' = 10$ và bán kính đáy $r = 6$ nên khối trụ có thể tích là $V_1 = h\pi r^2 = 360\pi$.

+ Hình nón có đỉnh O', chiều cao $h = OO' = 10$ và bán kính đáy $r = 6$ nên khối nón có thể tích là $V_2 = \dfrac{1}{3}h\pi r^2 = 120\pi$.



Vậy $V = V_1 - V_2 = 240\pi$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 24.

Gọi thiết diện là tứ giác $ABCD$. Hình trụ có chiều cao $h = OO' = 8\ cm$ và bán kính đáy $r = 10\ cm$.

Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp \left(ABCD\right)$

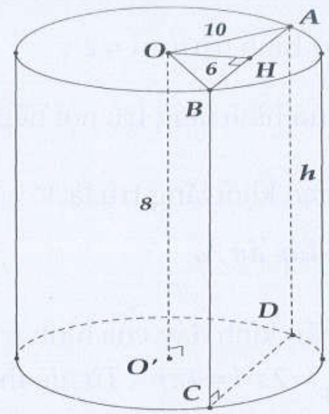
$\Rightarrow OH = d\left(OO', \left(ABCD\right)\right) = 6\ cm$

Ta có: $HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = 8\ cm$

$\Rightarrow AB = 16\ cm$

Vậy $S_{ABCD} = AB.BC = 128\ cm^2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 25.

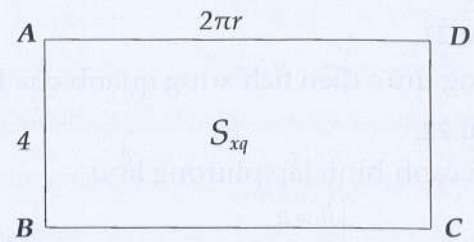
Hình trụ có chiều cao $h = AB = 4$.

Ta có: $S_{xq} = 2\pi rl = 8\pi r$.

Mặt khác $S_{ABCD} = AB.AD = 4AD = 48\pi$.

Lúc đó ta có: $8\pi r = 48\pi \Leftrightarrow r = 6$.

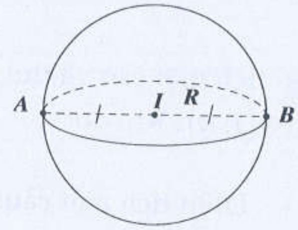
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



VẤN ĐỀ 3 — MẶT CẦU – KHỐI CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu

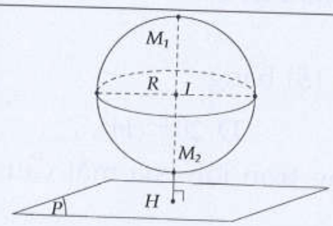
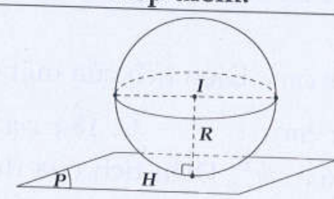
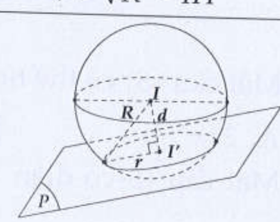
Cho điểm I cố định và một số thực dương R.
Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.



Kí hiệu: $S(I;R)$. Khi đó: $\boxed{S(I;R)=\{M \mid IM=R\}}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

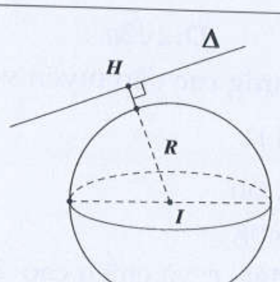
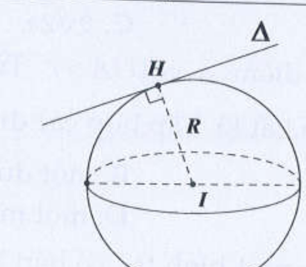
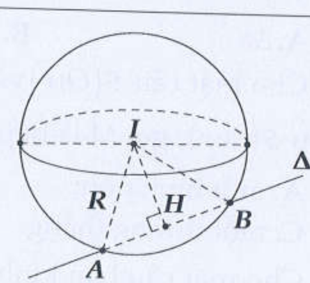
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của (S) và H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

Lưu ý: Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau: $\begin{cases} d(I;\Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho $S(I;R)$. Khi đó:

+ **Diện tích mặt cầu:** $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

+ **Thể tích khối cầu:** $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

5. Điều kiện để hình chóp, hình lăng trụ tồn tại mặt cầu ngoại tiếp

+ Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp.
+ Hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi lăng trụ là lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

Câu 1. Mặt cầu (S) có thể tích $36\pi\ cm^3$. Diện tích của mặt cầu (S) bằng

A. $24\pi\ cm^2$. **B.** $36\pi\ cm^2$. **C.** $18\pi\ cm^2$. **D.** $20\pi\ cm^2$.

Câu 2. Mặt cầu (S) có diện tích $16\pi\ cm^2$. Diện tích của đường tròn lớn của mặt cầu (S) bằng

A. $4\pi\ cm^2$. **B.** $6\pi\ cm^2$. **C.** $8\pi\ cm^2$. **D.** $2\pi\ cm^2$.

Câu 3. Cho mặt cầu (S) tâm O, có bán kính bằng $r = 5\ cm$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) theo một dây cung $AB = 6\ cm$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng

A. $3\ cm$. **B.** $4\sqrt{2}\ cm$. **C.** $5\ cm$. **D.** $4\ cm$.

Câu 4. Cho mặt cầu (S) tâm O, có bán kính bằng $r = 3a$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn có diện tích πa^2. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $2\sqrt{3}a$.

Câu 5. Cho mặt cầu $S(O;r)$ và một điểm A với $OA > r$. Từ A dựng các tiếp tuyến với mặt cầu $S(O;r)$, gọi M là tiếp điểm bất kì. Tập hợp các điểm M là

A. một hình nón. **B.** một đường tròn.

C. một đường thẳng. **D.** một mặt phẳng.

Câu 6. Cho mặt cầu bán kính r và một hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao $2r$. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối trụ là

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Một khối cầu có diện tích đường tròn lớn là 2π thì diện tích của khối cầu đó là

A. $\frac{8}{3}\pi$. **B.** 4π. **C.** 8π. **D.** 16π.

Câu 9. Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Mọi mặt phẳng đi qua M đều cắt (S) theo một đường tròn.

B. Có một mặt phẳng đi qua M không cắt (S).

C. Mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

D. Đường thẳng đi qua M và tâm (O) của mặt cầu cắt (S) tại hai điểm đối xứng nhau qua (O).

Câu 10. Hai khối cầu $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ có diện tích lần lượt là S_1,S_2. Nếu $R_2=2R_1$ thì $\frac{S_2}{S_1}$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11. Trong số các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tồn tại duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau.

B. Tồn tại duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng song song.

C. Tồn tại duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau.

D. Tồn tại duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau nằm trong hai mặt phẳng phân biệt.

Câu 12. Cho hình trụ có bán kính đáy là $3\ cm$, trục $OO'=8\ cm$ và mặt cầu đường kính OO'. Hiệu số giữa diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh hình trụ là

A. $6\pi\ cm^2$. **B.** $16\pi\ cm^2$. **C.** $40\pi\ cm^2$. **D.** $208\pi\ cm^2$.

Câu 13. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp một hình hộp chữ nhật có ba kích thước $a,\ 2a,\ 2a$ bằng

A. $\frac{9\pi a^3}{2}$. **B.** $\frac{9\pi a^3}{8}$. **C.** $\frac{27\pi a^3}{2}$. **D.** $36\pi a^3$.

Câu 14. Cho mặt cầu bán kính $5\ cm$ và một hình trụ có bán kính đáy $3\ cm$ nội tiếp trong hình cầu. Thể tích của khối trụ là

A. $24\pi\ cm^3$. **B.** $36\pi\ cm^3$. **C.** $48\pi\ cm^3$. **D.** $72\pi\ cm^3$.

Câu 15. Một mặt cầu có bán kính bằng $10\ cm$. Một mặt phẳng cách tâm mặt cầu $8\ cm$ cắt mặt cầu theo một đường tròn. Chu vi của đường tròn đó bằng

A. $6\pi\ cm$. **B.** $12\pi\ cm$. **C.** $24\pi\ cm$. **D.** $36\pi\ cm^2$.

Câu 16. Một hình nón nội tiếp trong một mặt cầu. Biết bán kính mặt cầu bằng $5\ cm$, chiều cao hình nón bằng $8\ cm$. Thể tích hình nón bằng

A. 128π. **B.** $\frac{128\pi}{3}$. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** $16\sqrt{5}\pi$.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Mọi hình hộp đều có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Mọi hình hộp có một mặt bên vuông góc với đáy đều có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Mọi hình hộp chữ nhật đều có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 18. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R thì

A. hình hộp có đáy là hình vuông có thể tích lớn nhất.

B. hình lập phương có thể tích lớn nhất.

C. hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng công sai khác 0 có thể tích lớn nhất.

D. hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số nhân công bội khác 1 có thể tích lớn nhất.

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chóp có đáy là tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 20. Mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ cạnh a có bán kính là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Câu 21. Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một mặt cầu, biết rằng góc $\widehat{ACB} = 90^0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. AC là một đường kính của mặt cầu.

B. Luôn có một đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên mặt cầu.

C. Tam giác ABC vuông cân tại C.

D. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn.

Câu 22. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 23. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian nhưng luôn thoả mãn điều kiện $\widehat{AMB} = 90^0$. Khi đó điểm M thuộc mặt nào trong các mặt sau?

A. Mặt nón. **B.** Mặt trụ. **C.** Mặt cầu. **D.** Mặt phẳng.

Câu 24. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian sao cho góc giữa hai đường thẳng AM và AB bằng $\alpha\ (0^0 < \alpha < 90^0)$. Khi đó điểm M thuộc mặt nào trong các mặt sau?

A. Mặt nón. **B.** Mặt trụ. **C.** Mặt cầu. **D.** Mặt phẳng.

Câu 25. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA=a,\ AB=b,\ AC=c$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **D.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	A	A	C	B
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	C	A	C	B	C
Câu	11	12	13	14	15
Đáp án	D	B	A	D	B
Câu	16	17	18	19	20
Đáp án	B	D	B	D	B
Câu	21	22	23	24	25
Đáp án	B	D	C	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi r là bán kính mặt cầu (S).

Theo giả thiết: $V = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3\ cm.$

Vậy $S = 4\pi r^2 = 36\pi\ cm \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2.

Gọi r là bán kính mặt cầu (S).

Theo giả thiết: $S = 16\pi \Leftrightarrow 4\pi r^2 = 16\pi$

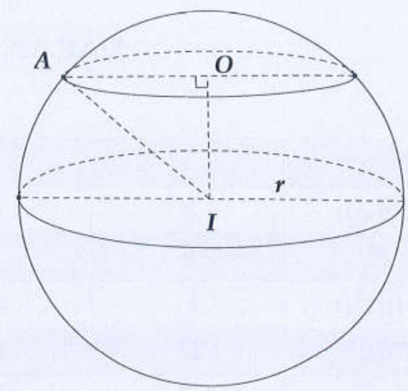
$\Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2\ cm$

Đường tròn lớn có bán kính là bán kính của mặt cầu (S).

Vậy diện tích của đường tròn lớn bằng

$$S = \pi r^2 = 4\pi\ cm^2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 3.

Gọi H là trung điểm AB.

Xét tam giác OHA vuông tại H: $OH = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 3\ cm.$

Vậy $d(O;\Delta) = OH = 3\ cm \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4.

Gọi r' là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

Theo giả thiết: $\pi(r')^2 = \pi a^2 \Leftrightarrow r' = a.$

Ta có: $d(O;(\alpha)) = \sqrt{r^2 - (r')^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên OA.

Xét tam giác OMA vuông tại M:

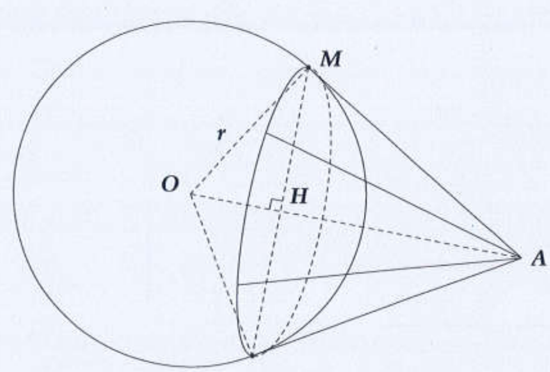
$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MO^2} + \frac{1}{MA^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{OA^2 - r^2}$

$\Rightarrow MH$ không đổi và H cố định.

Vậy M thuộc đường tròn $(H;MH)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 6.

Thể tích khối trụ là $V_1 = h\pi r^2 = 2\pi r^3.$

Thể tích khối cầu là $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3.$

Vậy $\frac{V_2}{V_1}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 7.

Hình nón có độ dài đường sinh $l=a$, bán kính đáy $r=\frac{a}{2}$.

Suy ra diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\frac{3\pi a^2}{4}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu.

Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2$.

Theo giả thiết ta có: $4\pi R^2=\frac{3\pi a^2}{4}\Leftrightarrow R=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8.

Gọi r là bán kính của mặt cầu.

Diện tích đường tròn lớn bằng: πr^2.

Theo giả thiết: $\pi r^2=2\pi\Leftrightarrow r=\sqrt{2}$. Suy ra diện tích mặt cầu là: $S=4\pi r^2=8\pi$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9.

Do điểm M nằm trong mặt cầu (S) nên mọi đường thẳng qua M luôn cắt (S) theo hai điểm phân biệt và mọi mặt phẳng qua M luôn cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

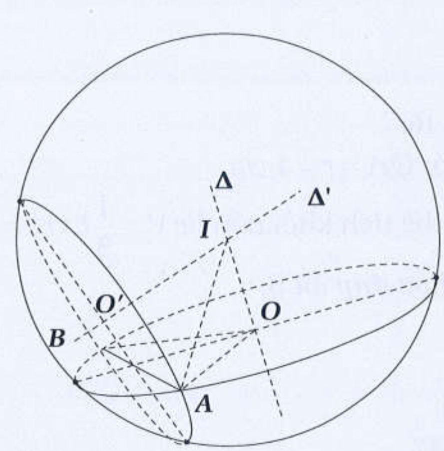
Câu 10.

Khối cầu $(O_1;R_1)$ có diện tích là $S_1=4\pi R_1^2$.

Khối cầu $(O_2;R_2)$ có diện tích là $S_2=4\pi R_2^2$.

Suy ra: $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2=4\ (do\ R_2=2R_1)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11.



Gọi *A, B* là hai giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$, $(O;R')$ cắt nhau nằm trong hai mặt phẳng phân biệt.

Qua O dựng Δ vuông góc với mặt phẳng chứa $(O;R)$. Qua O' dựng Δ' vuông góc với mặt phẳng chứa $(O';R')$.

Δ và Δ' không song song và cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên Δ và Δ' cắt nhau tại điểm duy nhất.

Gọi $\{I\}=\Delta\cap\Delta'$ suy ra I là tâm mặt cầu cần tìm (*cố định*).

Bán kính $r=\sqrt{IO^2+OA^2}$ (*không đổi*) $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 12.

Mặt cầu có bán kính $r=4\ cm$.

Suy ra diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi r^2 = 64\pi\ cm^2$.

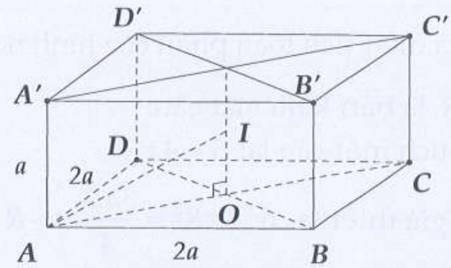
Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 48\pi\ cm^2$.

Vậy $S - S_{xq} = 16\pi\ cm^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 13.

Bán kính mặt cầu là

$$r = IA = \sqrt{OA^2 + IO^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}.$$



Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9\pi a^3}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 14.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của 2 đáy hình trụ.

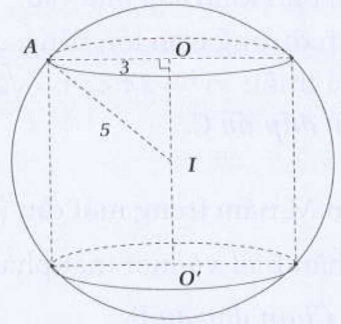
Suy ra tâm của mặt cầu là trung điểm của OO'.

Ta có: $IO = \sqrt{IA^2 - OA^2} = 4\ cm$

$\Rightarrow OO' = 2IO = 8\ cm$

Vậy thể tích khối trụ là $V = h\pi r^2 = 72\pi\ cm^3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 15.

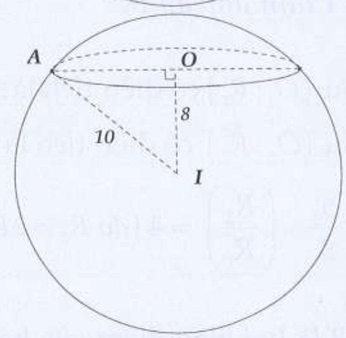
Xét tam giác IOA vuông tại O.

Ta có: $OA = \sqrt{IA^2 - IO^2} = 6\ cm$.

Suy ra chu vi đường tròn là:

$C = 2\pi r = 12\pi\ cm$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

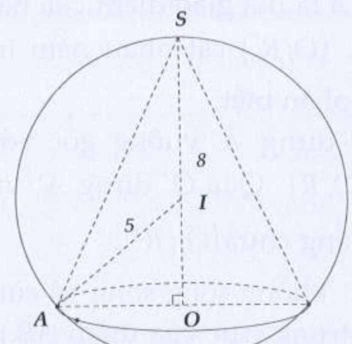


Câu 16.

Ta có: $OA = r = 4\ cm$.

Vậy thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{128\pi}{3}\ cm^3$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 17.

Điều kiện để hình lăng trụ nội tiếp được mặt cầu là hình lăng trụ có các tính chất:

+ Lăng trụ đứng.
+ Đáy lăng trụ là đa giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 18. Gọi các cạnh của hình hộp chữ nhật là $a,\ b,\ c\ \left(a>0,\ b>0,\ c>0\right)$.

Khi đó, thể tích khối hộp là $V=abc$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho là:

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=4R^2$$

Ta có: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2 \quad (1)$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ (2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\Leftrightarrow 8R^2\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\Leftrightarrow abc\le\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}\right)^3$

Vậy $V_{\max}=\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}\right)^3$ đạt được khi $a=b=c$.

Khi đó, hình hộp chữ nhật là hình lập phương $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19.

Điều kiện để hình chóp nội tiếp được mặt cầu là hình chóp có đáy là đa giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 20.

Do mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều nên tâm mặt cầu là trung điểm của đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đối của tứ diện $ABCD$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

Ta có: $\begin{cases} MN\perp BC\\ MN\perp AD\end{cases}\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của BC, AD.

Xét tam giác AMN vuông tại N, ta có: $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $r=\frac{MN}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 21.

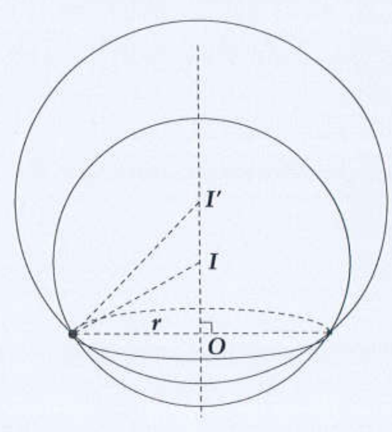
Do $\widehat{ACB}=90^0\Leftrightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AB *(ngoại tiếp tam giác ABC).*

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 22.

Có vô số mặt cầu chứa một đường tròn $(O;r)$ cho trước, với tâm của mặt cầu nằm trên đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa $(O;r)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



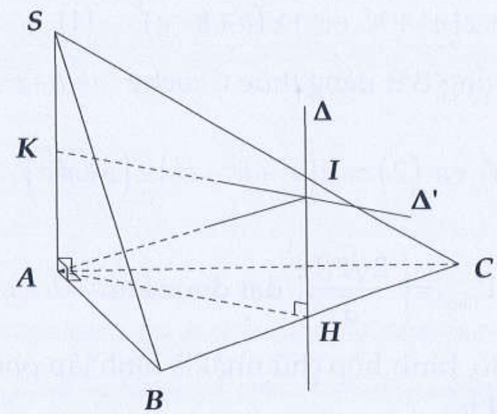
Câu 23.

Do $\widehat{AMB} = 90^0 \Leftrightarrow M$ thuộc mặt cầu với đường kính $AB \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.

Tập hợp các điểm M trong không gian thỏa yêu cầu bài toán là mặt nón đỉnh A, trục AB, đường sinh AM và góc ở đỉnh là $2\alpha \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 25.



Gọi H là trung điểm BC, K là trung điểm SA.

+ Qua H dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABC)$ $\Rightarrow \Delta \,//\, SA$.
+ Qua K dựng đường thẳng $\Delta' \perp SA$ $\Rightarrow \Delta' \,//\, AH$.

Lúc đó $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$: tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Xét tam giác IHA vuông tại H, ta có:

$$IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} \Rightarrow \textit{Chọn đáp án C.}$$

TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP
PHẦN 5: MẶT NÓN – MẶT TRỤ – MẶT CẦU

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Lúc đó, thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{8}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$.

Câu 2. Nếu góc ở đỉnh của hình nón (N) bằng 60^0 thì góc giữa đường sinh và mặt đáy của (N) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 3. Cho một hình cầu $S(O;r)$ và điểm A cố định với $OA=d$. Qua A, kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với $S(O;r)$ tại M. Độ dài AM bằng

A. $\sqrt{r^2-2d^2}$. **B.** $\sqrt{2r^2-d^2}$. **C.** $\sqrt{d^2-r^2}$. **D.** $\sqrt{d^2+r^2}$.

Câu 4. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua A và B là

A. trung điểm của đoạn thẳng AB.
B. mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB.
C. mặt phẳng song song với đường thẳng AB.
D. mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Câu 5. Trong bảng sau, nối mỗi ý ở cột bên trái với một ý ở cột bên phải để được mệnh đề đúng.

Cột trái	Cột phải
a) Khối trụ (H) có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh a có thể tích bằng	1) $\dfrac{\pi a^2}{2}$.
b) Hình trụ (H) có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh a có diện tích xung quanh bằng	2) $\dfrac{\pi a^3}{4}$.
c) Khối nón (N) có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a có thể tích bằng	3) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.
d) Hình nón (N) có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a có diện tích xung quanh bằng	4) πa^2.
e) Mặt cầu $S(O;a)$ có diện tích bằng	5) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$.
f) Khối cầu $S(O;a)$ có thể tích bằng	6) $\dfrac{\pi a^3}{2}$.
	7) $4\pi a^2$.
	8) $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Câu 6. Cho mặt nón (N) với góc ở đỉnh là 60^0. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Góc giữa đường sinh bất kì và trục của mặt nón (N) bằng 30^0.

B. Góc giữa hai đường sinh bất kì của mặt nón (N) bằng 60^0.

C. Mặt nón (N) chứa vô số đường sinh.

D. Góc giữa hai đường sinh đối xứng nhau qua trục của mặt nón (N) là 60^0.

Câu 7. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a là

A. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 8. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D với $AB=AD=a$, $DC=2a$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh AD là

A. $V=\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{7\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AC=4a$, $AB=3a$. Thể tích khối nón tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC bằng

A. $12\pi a^3$. **B.** $10\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $16\pi a^3$.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AC=4a$, $AB=3a$. Quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được hình nón với góc ở đỉnh là α thỏa mãn

A. $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. **B.** $\cot\alpha=\dfrac{3}{4}$. **C.** $\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$. **D.** $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 45^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S=3\pi a^2$. **B.** $S=6\pi a^2$. **C.** $S=4\pi a^2$. **D.** $S=2\pi a^2$.

Câu 12. Cho đường tròn (C) ngoại tiếp một tam giác đều ABC có cạnh bằng a, M là trung điểm BC. Quay hình tròn (C) xung quanh trục AM, ta được một khối cầu có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 13. Một hình nón có đường kính đáy là $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thể tích của khối nón bằng

A. $\sqrt{3}\pi a^3$. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $2\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $SA=a\sqrt{3}$ và cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Câu 15. Một hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$. C. $\dfrac{a\sqrt{12}}{6}$. D. $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Câu 16. Bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh a bằng

A. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. C. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 17. Một khối trụ có bán kính đáy $a\sqrt{3}$, chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ là

A. $8\sqrt{6}\pi a^3$. B. $6\sqrt{6}\pi a^3$. C. $\dfrac{4\sqrt{6}\pi}{3}a^3$. D. $4\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 18. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó bằng

A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. Trong các đa diện sau, đa diện nào **không** luôn luôn nội tiếp được trong một mặt cầu

A. Hình chóp tam giác (tứ diện). B. Hình chóp ngũ giác đều.

C. Hình chóp tứ giác. D. Hình hộp chữ nhật.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, $DB\perp BC$, $AB=AD=BC=a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD, tam giác ABC khi quay quanh AB, tam giác DBC khi quay quanh BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $V_1+V_2=V_3$. B. $V_1+V_3=V_2$. C. $V_3+V_2=V_1$. D. $V_1=V_2=V_3$.

Câu 21. Cho các mệnh đề sau:

1) Hình chóp có đáy là hình thang thì có mặt cầu ngoại tiếp.
2) Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.
3) Hình chóp có đáy là hình chữ nhật thì có mặt cầu ngoại tiếp.
4) Hình chóp có đáy là hình thoi thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Số mệnh đề đúng là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi a^2}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{3}$. C. $\sqrt{3}\pi a^2$. D. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$.

Câu 23. Một tam giác ABC vuông tại A, có $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}$. Kẻ AH vuông góc với BC. Cho tam giác ABC quay quanh BC, tam giác AHB và AHC tạo thành hình nón có diện tích xung quanh là S_1, S_2 và thể tích là V_1, V_2.

Xét hai phát biểu sau: (I): $\sqrt{2}S_2=\sqrt{3}S_1$; (II): $2V_2=3V_1$

Hãy chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
C. Cả (I) và (II) đều sai. D. Cả (I) và (II) đều đúng.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' là tâm của hai hình vuông $A'B'C'D'$ và $ABCD, OO' = a$. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ tròn xoay có đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD.A'B'C'D'$, V_2 là thể tích của khối nón tròn xoay đỉnh O' và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 2. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 25. Một hình trụ tròn xoay, bán kính đáy bằng r, trục $OO' = r$. Một đoạn thẳng $AB = r\sqrt{2}$, với $A \in (O;r)$, $B \in (O';r)$. Góc giữa AB và trục của hình trụ bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 75^0.

Câu 26. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}a}{2}$. B. $\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{3}}a}{8}$. C. $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}a}{8}$. D. $\frac{\sqrt[3]{3}a}{8}$.

Câu 27. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90^0. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy của hình nón bằng 60^0. Khi đó diện tích thiết diện bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. C. $\frac{2a^2}{3}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp bằng

A. $\frac{3\pi a^2}{8}$. B. $\frac{3\pi a^2}{4}$. C. $\frac{5\pi a^2}{2}$. D. $\frac{3\pi a^2}{2}$.

Câu 29. Cho mặt cầu có bán kính r và một hình trụ có bán kính đáy r, chiều cao $2r$. Tỉ số thể tích khối cầu và khối trụ bằng

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 30. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng r, chiều cao r. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt thuộc các dây cung của hai đường tròn đáy, mặt phẳng $(ABCD)$ không vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ. Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{2}r^2}{2}$. B. $5r^2$. C. $\frac{5r^2}{2}$. D. $5\sqrt{2}r^2$.

Câu 31. Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp SB$, $SB \perp SC$, $SC \perp SA$, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính r bằng

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. B. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 32. Một mặt cầu bán kính r đi qua 8 đỉnh của hình lập phương. Cạnh của hình lập phương đó bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}r}{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}r}{3}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}r}{6}$.

Câu 33. Cho một tam giác vuông cân có các cạnh góc vuông có độ dài m. Một mặt cầu sinh bởi đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó khi quay quanh cạnh huyền có diện tích bằng

A. $8\pi m^2$ B. $4\pi m^2$ C. $2\pi m^2$ D. $\dfrac{2\pi m^2}{3}$.

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình vuông $ABCD$ quanh quanh AC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

Câu 35. Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng r, độ dài đường cao bằng h. Diện tích toàn phần của hình trụ là

A. $2h\pi r$. B. $\pi r(h+r)$. C. $\pi r(2h+r)$. D. $2\pi r(h+r)$.

Câu 36. Một hình trụ có đáy là hai hình tròn $(O;6)$, $(O';6)$ và $OO'=10$. Một hình nón có đỉnh O' và có đáy là hình tròn $(O;6)$. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần. Thể tích phần khối trụ còn lại (*không chứa khối nón*) bằng

A. 60π. B. 90π. C. 120π. D. 240π.

Câu 37. Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{6}$. B. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. C. $\dfrac{\pi a^3}{24}$. D. $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Câu 38. Cho mặt cầu (S) có đường kính bằng d. Diện tích của (S) bằng

A. $4\pi d^2$ B. $2\pi d^2$ C. $4\pi d^2$ D. $\dfrac{1}{3}\pi d^2$.

Câu 39. Một hình trụ có bán kính đáy là $4\,cm$, chiều cao $6\,cm$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ đó bằng

A. $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi\ cm^3$. B. $\dfrac{500}{3}\pi\ cm^3$. C. $500\pi\ cm^3$. D. $100\pi\ cm^3$.

Câu 40. Hình khai triển mặt xung quanh của hình nón là hình quạt tròn có bán kính bằng $9\ cm$, số đo cung bằng 120^0. Bán kính của đường tròn đáy hình nón bằng

A. $3\ cm$. B. $9\ cm$. C. $18\ cm$. D. $27\ cm$.

Câu 41. Một khối trụ có bán kính đáy $R = 5\ cm$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $4\ cm$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $4\ cm$. Diện tích thiết diện được tạo thành là

A. $12\ cm^2$. B. $20\ cm^2$. C. $24\ cm^2$. D. $10\ cm^2$.

Câu 42. Cho đường tròn $(O;r)$ và điểm I cố định, $IO=2r$. Qua I kẻ tiếp tuyến IM với $(O;r)$ (M là tiếp điểm). Cho tam giác OMI quay quanh đường thẳng OI. Gọi H là hình chiếu của M lên OI. Thể tích khối tròn xoay do tam giác OMI sinh ra khi quay quanh OI, bằng

A. $\frac{\pi r^3}{4}$.	B. $\frac{\pi r^3}{2}$.	C. $\frac{\pi r^3}{3}$.	D. $\frac{2\pi r^3}{3}$.

Câu 43. Cho mặt cầu $S(O;r)$ và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến O bằng d. Nếu $d<r$ thì đường tròn giao tuyến của (P) và mặt cầu $S(O;r)$ có bán kính là

A. $\sqrt{r^2-d^2}$.	**B.** $\sqrt{r.d}$.	**C.** $\sqrt{r^2+d^2}$.	**D.** $\sqrt{r+d}$.

Câu 44. Một đường thẳng d thay đổi, qua A và tiếp xúc với $S(O;R)$ tại M. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng OA. Khi đó, điểm M thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. Mặt phẳng vuông góc với OA tại O.

B. Mặt phẳng vuông góc với OA tại trung điểm OA.

C. Mặt phẳng vuông góc với OA tại H.

D. Mặt phẳng vuông góc với OA tại A.

Câu 45. Một đường thẳng d thay đổi, qua A và tiếp xúc với $S(O;r)$ tại M, với $OM=2r$. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng OA. Khi đó, độ dài đoạn thẳng MH bằng

A. $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.	B. $\frac{r\sqrt{3}}{3}$.	C. $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.	D. $\frac{3r\sqrt{3}}{4}$.

Câu 46. Giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S') có thể là

A. Đoạn thẳng, điểm.	**B.** Điểm, hình tròn.

C. Điểm, đường tròn.	**D.** Điểm, đường tròn, tập hợp rỗng.

Câu 47. Cho đường tròn (C) có đường kính cố định $AB=2r$ và nằm trong mặt phẳng (P), Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A. Trên Δ lấy điểm S với $SA=h$, M là điểm di động trên (C), I là trung điểm của SM, I' là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P). Diện tích xung quanh của hình do II' sinh ra khi M di động trên (C), bằng

A. $\frac{\pi rh}{3}$.	B. $\frac{3\pi rh}{2}$.	C. $\frac{\pi rh}{2}$.	D. πrh.

Câu 48. Cho hình trụ với đáy là đường tròn $(O;R)$ và đường cao $OO'=h$. Trên $(O;R)$ lấy điểm A, trên $(O';R)$ lấy điểm A' sao cho góc giữa AA' và OO' bằng 30^0. Mặt phẳng chứa AA', song song với trục hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện. Diện tích thiết diện bằng

A. $\frac{\sqrt{3}h^2}{2}$.	B. $\frac{\sqrt{3}h^2}{3}$.	C. $\frac{2\sqrt{3}h^2}{3}$.	D. $\frac{\sqrt{2}h^2}{3}$.

Câu 49. Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R, đường kính cố định AB. Gọi I là trung điểm của đoạn OB. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại I, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là

A. đường tròn tâm I, bán kính $R\sqrt{3}$, nằm trong (P).

B. đường tròn tâm I, bán kính $R\sqrt{3}$.

C. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, nằm trong (P).

D. đường tròn tâm I, bán kính $2R\sqrt{3}$, nằm trong (P).

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh a, tam giác BCD vuông cân tại D. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

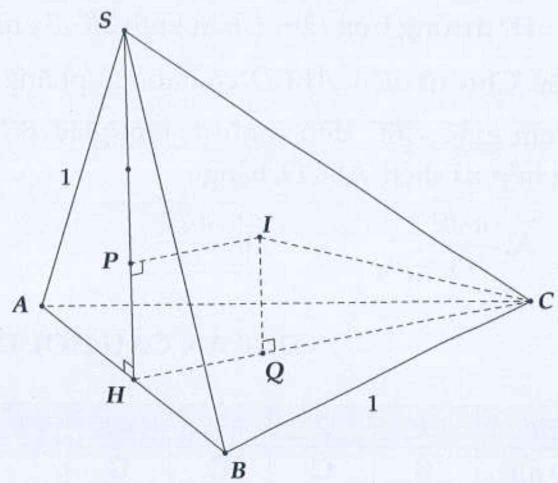
A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	C	C	D		B	A	B	A	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	C	D	B	A	D	A	D	C	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	C	A	D	B	B	B	A	D	B	C
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Đáp án	C	A	C	B	D	D	C	C	B	A
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Đáp án	C	B	A	C	B	D	C	B	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.



Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và ABC.

Do các tam giác SAB và ABC là các tam giác đều cạnh bằng 1 nên P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Qua P *dựng* đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB), qua Q dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Hai trục này cắt nhau tại I, suy ra $IA = IB = IC = IS$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = IC$.

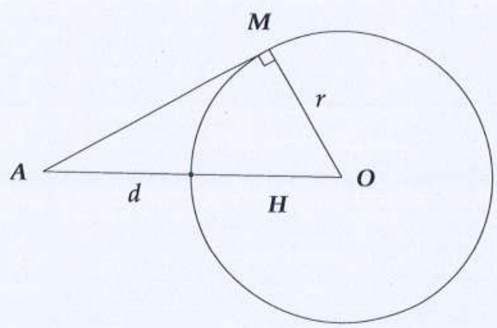
Xét $\Delta IQC : IC = \sqrt{IQ^2 + QC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2. Do góc ở đỉnh của hình nón bằng 60^0 nên $\widehat{OSA} = 30^0$. Dễ thấy góc giữa đường sinh SA và mặt đáy là $\widehat{SAO}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có: $\widehat{SAO} = 90^0 - \widehat{OSA} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3.



Vì Δ tiếp xúc với $S(O;r)$ tại M nên $OM \perp \Delta$ tại M.

Xét tam giác OMA vuông tại M, ta có:

$AM^2 = OA^2 - OM^2 = d^2 - R^2$

$\Rightarrow AM = \sqrt{d^2 - r^2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4.

Gọi I là tâm mặt cầu đi qua hai điểm A, B cố định và phân biệt thì ta luôn có $IA = IB$

Do đó, I thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn $AB \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5.

+ Hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh a nên có chiều cao $h = a$, độ dài đường sinh $l = a$, bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$.

  Vậy thể tích khối trụ là $V = h\pi r^2 = \frac{\pi a^3}{4}$ và diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = \pi a^2$.

+ Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a nên có chiều cao $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, độ dài đường sinh $l=a$, bán kính đáy $r=\frac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}h\pi r^2=\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$ và diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=\pi rl=\frac{\pi a^2}{2}$.

+ Mặt cầu $S(O;a)$ có $r=a$ nên diện tích mặt cầu là $S=4\pi r^2=4\pi a^2$ và thể tích là $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án: **a) - 2), b) - 4), c) - 5), d) - 7), e) - 3).**

Câu 6.

Góc giữa hai đường sinh bất kì thay đổi từ 0^0 đến $90^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 7.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, H là trung điểm cạnh AD.

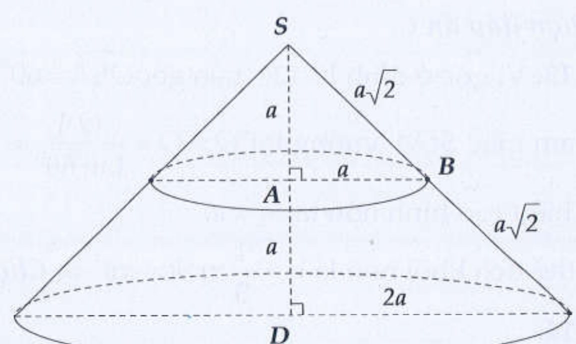
Qua H dựng đường thẳng $\Delta \perp AD$, Δ cắt DG tại O. Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là $r=OD$.

Xét hai tam giác GDA và HDO đồng dạng, ta có:

$$\frac{OD}{DA}=\frac{HD}{GD} \Leftrightarrow OD=\frac{DA.HD}{GD}=\frac{\sqrt{6}a}{4} \Rightarrow \textit{Chọn đáp án A.}$$

Câu 8.

Gọi S là giao điểm của BC và AD.



+ Gọi V_1 là thể tích khối nón đỉnh S, đường sinh SC, bán kính đáy DC.

$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}SD\pi DC^2=\frac{8\pi a^3}{3}$.

+ Gọi V_2 là thể tích khối nón đỉnh S, đường sinh SB, bán kính đáy AB.

$\Rightarrow_2=\frac{1}{3}SA\pi AB^2=\frac{\pi a^3}{3}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng: $V_1-V_2=\frac{7\pi a^3}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9.

Hình nón có chiều cao $h=AC=4a$, bán kính đáy $r=AB=3a$.

Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}h\pi r^2=12\pi a^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 10.

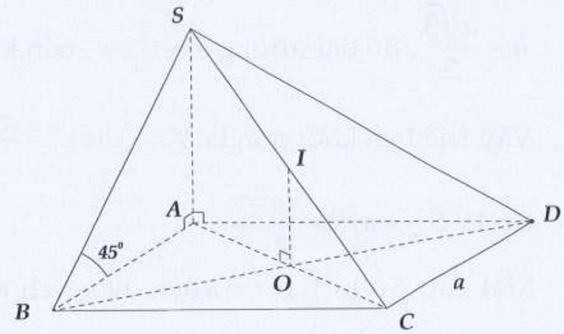
Tam giác ABC vuông tại A có: $\tan\widehat{ACB}=\frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 11.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và đáylà góc $\widehat{SBA} = 45^0$

$\Rightarrow SA = AB = a.$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, qua O dựng đường thẳng $\Delta // SA$, $\Delta \cap SC = \{I\}$: Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính



$r = IC = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy mặt cầu có diện tích là: $S = 4\pi r^2 = 3\pi a^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 12. Vì AH là đường cao trong tam giác đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ΔABC, thì $O \in AH$ và $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Bán kính mặt cầu được tạo thành khi quay đường tròn (C) quanh trục AH là $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Vậy thể tích của khối cầu tương ứng là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 13. Vì góc ở đỉnh là 120^0 nên góc $\widehat{OSA} = 60^0$

Xét tam giác SOA vuông tại O: $SO = \dfrac{OA}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a.$

$\Rightarrow$ Chiều cao hình nón là: $h = a.$

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \pi a^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 14.

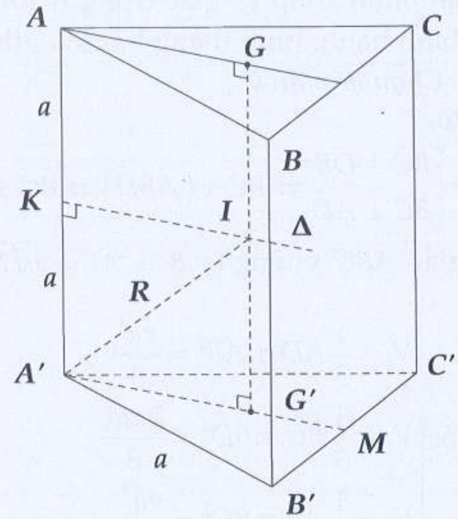
Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC, ta có $SG \perp (ABC)$ nên SG là trục của tam giác ABC. Gọi K là trung điểm của SA.

Qua K dựng đường thẳng $\Delta \perp SA$, $\Delta \cap SG = \{I\}$: Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và bán kính là $r = SO$.

Xét hai tam giác SMO và SHA đồng dạng, ta có: $\dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SH} \Rightarrow SO = \dfrac{SM.SA}{SH}.$

Suy ra: $r = SO = \dfrac{SM.SA}{SH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{8} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 15.



Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $GG' \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AA'.

Qua K dựng đường thẳng $\Delta \perp AA'$.

Ta có điểm I, $(\{I\} = \Delta \cap GG')$ là tâm và $R = IA$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Xét tam giác $IA'G'$ vuông tại G', ta có:

$$IA' = \sqrt{(IG')^2 + (A'G')^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{AA'}{2}\right)^2 + \left(\frac{2A'M}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

Vậy mặt cầu có bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 16. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.

Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác, ta lại có: $V_{ABCD} = V_{I.ABC} + V_{I.ACD} + V_{I.BCD} + V_{I.ABD}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}rS_{ABC} + \frac{1}{3}rS_{ACD} + \frac{1}{3}rS_{BCD} + \frac{1}{3}rS_{ABD} = \frac{4r}{3}S_{ABC} \Leftrightarrow r = \frac{3V_{ABCD}}{4S_{ABC}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 17. Gọi r là bán kính hình trụ, h là chiều cao hình trụ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

Ta có: $R = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2} = a\sqrt{6}$.

Vậy thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{6}\pi a^3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 18.

Hình nón có bán kính đáy $r = 1$ và độ dài đường sinh $l = 2$. Suy ra đường cao của hình nón là: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}$.

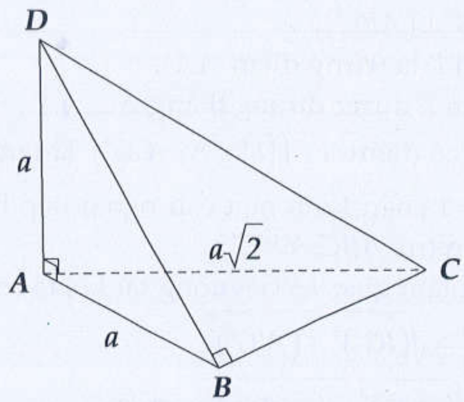
Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón nằm trên trục hình nón. Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có: $R = \sqrt{r^2 + \left(\sqrt{3} - R\right)^2} \Leftrightarrow R^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}R + R^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 19.

Dễ thấy hình chóp tứ giác trong trường hợp đáy là tứ giác không nội tiếp (ví dụ : hình bình hành, hình thang bất kì...) thì không tồn tại mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 20.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB.$

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Lúc đó: $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3}AD.\pi.AB^2 = \dfrac{\pi a^3}{3} \\ V_3 = \dfrac{1}{3}BC.\pi.BD^2 = \dfrac{2\pi a^3}{3} \\ V_2 = \dfrac{1}{3}AB.\pi.BC^2 = \dfrac{\pi a^3}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow V_1 + V_2 = V_3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 21.

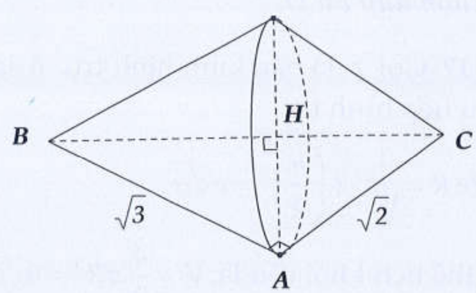
Áp dụng điều kiện để hình chóp, hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp để đưa ra kết luận đúng cho mỗi mệnh đề.

1 – S, 2 – Đ, 3 – Đ, 4 – S $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C***

Câu 22.

Áp dụng điều kiện để hình chóp, hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp để đưa ra kết luận đúng cho mỗi mệnh đề $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 23.



Ta có: $AB^2 = BH.BC$

$\Rightarrow BH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $CH = BC - BH = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Mặt khác: $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Suy ra: $\begin{cases} S_1 = \pi AH.AB = \dfrac{\sqrt{60}\pi}{5} \\ S_2 = \pi AH.AC = \dfrac{\sqrt{90}\pi}{5} \end{cases}$.

$\Rightarrow \sqrt{2}S_2 = \sqrt{3}S_1$.

Tương tự: $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3}HC.\pi.AH^2 \\ V_2 = \dfrac{1}{3}BH.\pi.AH^2 \end{cases} \xrightarrow{2CH = 3BH} 2V_2 = 3V_1$.

Vậy cả (I) và (II) đều đúng $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

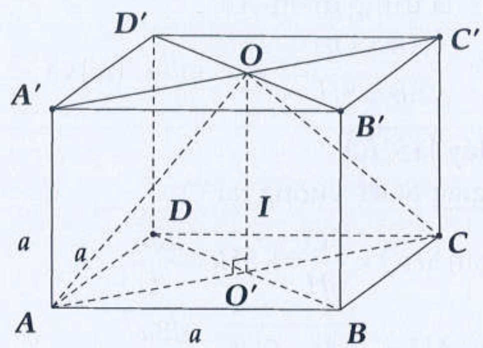
Câu 24.

+ Hình trụ có chiều cao $h_1 = OO' = a$ và bán kính đáy $r_1 = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V_1 = h_1\pi r_1^2 = \frac{\pi a^3}{2}$.

+ Hình nón có chiều cao $h_2 = OO' = a$ và bán kính đáy $r_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}h_2\pi r_2^2 = \frac{\pi a^3}{12}$.



Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 6 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

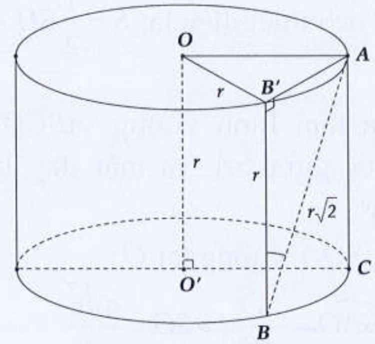
Câu 25.

Dựng $BB' // OO'$ suy ra góc giữa AB và trục OO' là góc $\widehat{ABB'}$

Xét tam giác ABB' vuông tại B':

$$\cos\widehat{ABB'} = \frac{BB'}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABB'} = 45^0.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***



Câu 26.

Hình nón có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu, suy ra thể tích khối cầu tương ứng là: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Theo giả thiết: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \Leftrightarrow R^3 = \frac{\sqrt{3}a^3}{32}$

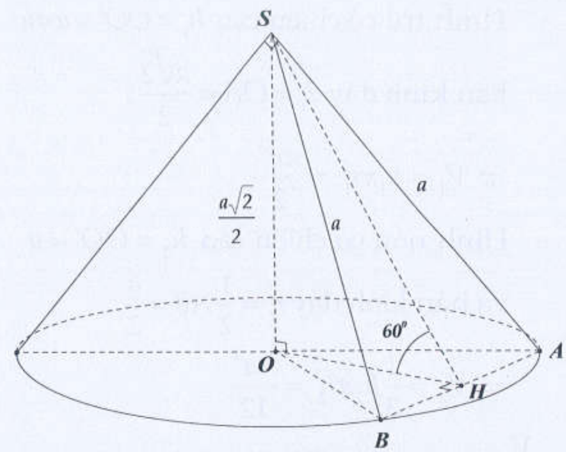
$$\Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt[3]{\sqrt{3}}}{2\sqrt[3]{4}} = \frac{a\sqrt[3]{\sqrt{3}}.\sqrt[3]{4}}{8} = \frac{a\sqrt[3]{4\sqrt{3}}}{8} \Rightarrow \textit{\textbf{Chọn đáp án B.}}$$

Câu 27.

Gọi thiết diện là tam giác SAB.

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa (α) và mặt đáy là $\widehat{SHO}$.



Tam giác SOH vuông tại O:

$$\sin\widehat{SHO} = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra: $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

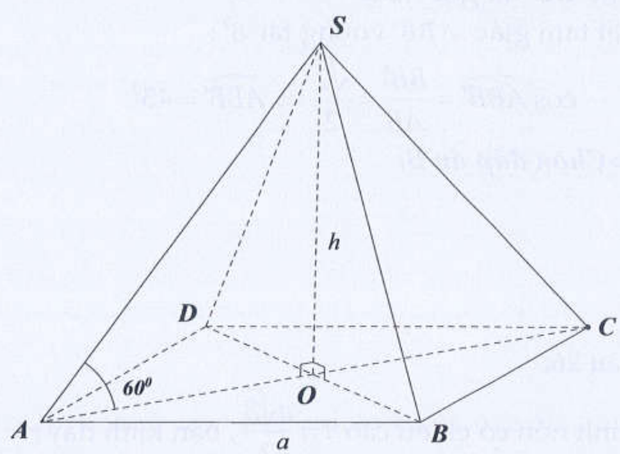
$$\Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

Vậy diện tích thiết diện là: $S = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{\sqrt{2}a^2}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 28.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Suy ra góc giữa SA và mặt đáy là $\widehat{SAO} = 60^0$.



Tam giác SOA vuông tại O:

$$\tan\widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ta có: $SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = a\sqrt{2}.$

Hình nón có: $\begin{cases} l = SA = a\sqrt{2} \\ r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$

Suy ra: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \frac{3\pi a^2}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 29.

+ Khối cầu có thể tích: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

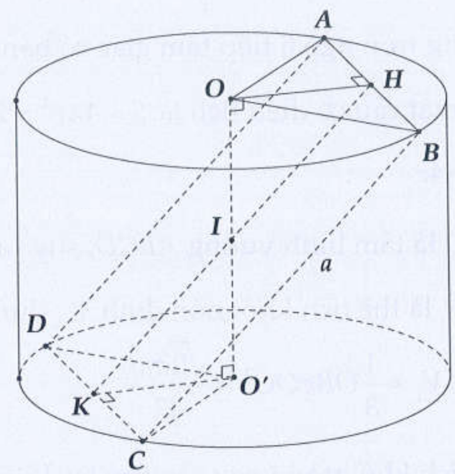
+ Khối trụ có thể tích: $V_2 = h\pi r^2 = 2\pi r^3$.

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 30.

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ bằng a, H, K lần lượt là trung điểm AB, CD.

Gọi $\{I\} = HK \cap OO' \Rightarrow I$ trung điểm của OO'



Xét tam giác OIH vuông tại O:

$IH^2 = OI^2 + OH^2$

$\Leftrightarrow IH^2 = OI^2 + \left(OB^2 - HB^2\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{r^2}{4} + r^2 - \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{5r^2}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 31.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm BC và SA.

+ Qua H dựng đường thẳng $\Delta \perp (SBC) \Rightarrow \Delta \,//\, SA$.

+ Qua K dựng đường thẳng $\Delta' \perp SA \Rightarrow \Delta' \,//\, SH$.

Khi đó giao điểm $\{I\} = \Delta \cap \Delta'$ là tâm và SI là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Xét tam giác IHS vuông tại H: $SI = \sqrt{IH^2 + SH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

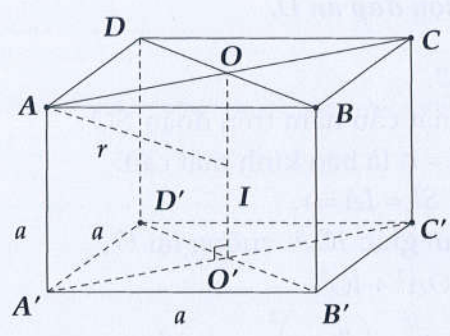
Câu 32.

Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$, suy ra OO' là trục đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông đó.

Gọi I là trung điểm OO', suy ra $IA = IA'$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bán kính $r = IA$.

Gọi cạnh hình lập phương là a.



Ta có: $r = IA = \sqrt{OA^2 + IO^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 33.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính bằng $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Vậy mặt cầu có diện tích là: $S = 4\pi r^2 = 2\pi m^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 34.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra: $OA = OC = OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi V_1 là thể tích khối nón đỉnh B, đường cao OB, bán kính đáy OC.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}OB\pi OC^2 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = 2V_1 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 35.

Hình trụ có độ dài đường sinh $l = h$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 36.

+ Khối trụ có thể tích

$$V_1 = OO'.\pi.OA^2 = 360\pi.$$

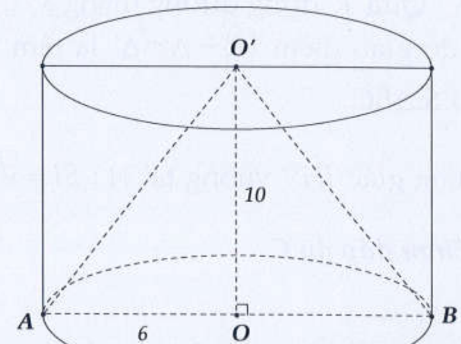
+ Khối nón có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3}OO'.\pi.OA^2 = 120\pi.$$

Vậy thể tích khối cần tìm là:

$$V = V_1 - V_2 = 240\pi.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***



Câu 37.

Tâm mặt cầu nằm trên đoạn SO.

Gọi $SI = r$ là bán kính mặt cầu.

Ta có: $SI = IA = r$.

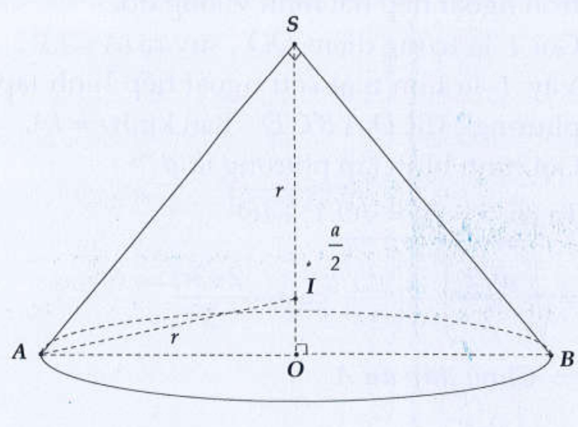
Xét tam giác IOA vuông tại O:

$IA^2 = OA^2 + IO^2$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}$

Vậy thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

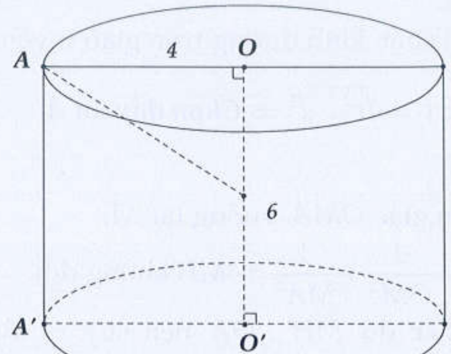


Câu 38.

Mặt cầu (S) có bán kính $r = \frac{d}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 39.



Gọi O, O' là tâm hai đáy của hình trụ. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ là trung điểm của OO'.

Bán kính mặt cầu là:

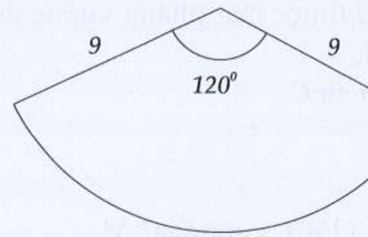
$$r = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = 5\ cm.$$

Vậy thể tích khối cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{500\pi}{3}\ cm^3.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 40.



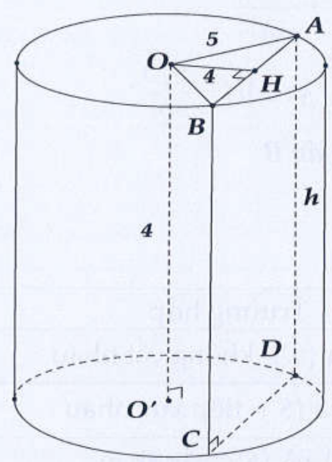
Ta có chu vi đáy của hình nón bằng $2\pi r$.

Số đo cung $120^0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ta có: $l = R\alpha \Leftrightarrow 2\pi r = \dfrac{2\pi}{3}.9 \Leftrightarrow r = 3\ cm.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 41.



Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi H là trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD).$$

Suy ra: $d(OO', (ABCD)) = OH = 4\ cm.$

Tam giác OAH vuông tại H:

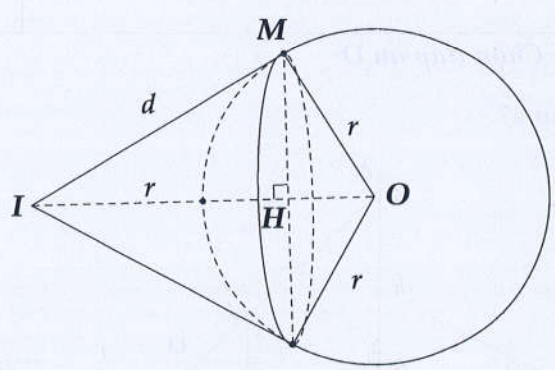
$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 3\ cm \Rightarrow AB = 6\ cm.$$

Vậy diện tích thiết diện là:

$$S = AB.BC = 24\ cm^2.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 42.



Gọi V_3 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác OMI quanh cạnh OI;

V_1 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác OMI quanh cạnh IM;

V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác OMI quanh cạnh OM.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3} IM\pi OM^2 = \dfrac{\sqrt{3}\pi r^3}{3} \\ V_2 = \dfrac{1}{3} OM\pi IM^2 = \pi r^3 \end{cases}.$$

Áp dụng kết quả: $\dfrac{1}{V_1^2} + \dfrac{1}{V_2^2} = \dfrac{1}{V_3^2} \Rightarrow V_3 = \dfrac{\pi r^3}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 43.

Gọi r' là bán kính đường tròn giao tuyến.

Suy ra: $r' = \sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

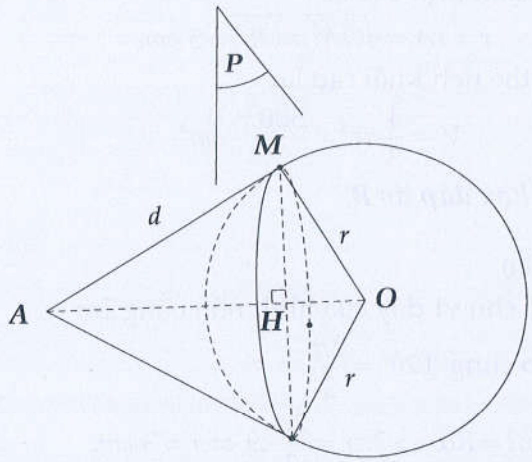
Câu 44.

Xét tam giác OMA vuông tại M:

$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{MA^2} \Rightarrow MH$ không đổi.

Mặt khác do $MH \perp OA$ nên suy ra tập hợp các điểm M thỏa yêu cầu bài toán là đường tròn tâm H, bán kính MH. Từ đây suy ra M thuộc mặt phẳng vuông góc với OA tại H.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



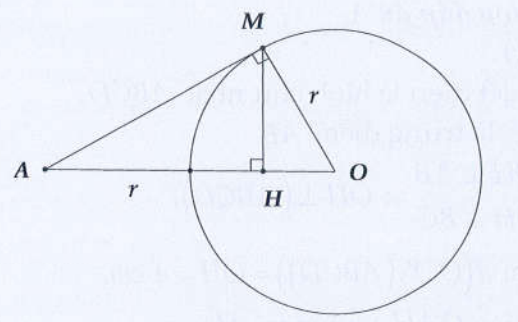
Câu 45.

Xét tam giác OMA vuông tại M:

$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{AM^2}$

$\Leftrightarrow MH^2 = \frac{3r^2}{4} \Leftrightarrow MH = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

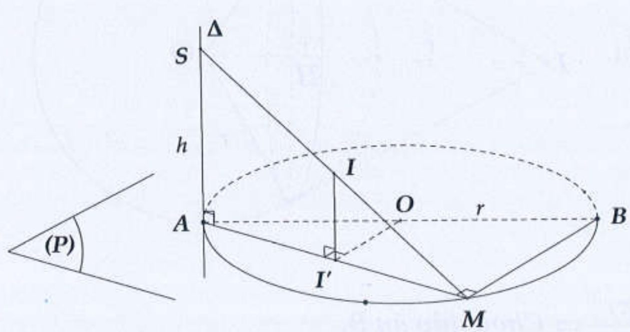


Câu 46.

Trường hợp	Số giao điểm
(S) và (S') không cắt nhau	0
(S) và (S') tiếp xúc nhau	1
(S) và (S') cắt nhau	vô số điểm và các điểm này cùng nằm trên một đường tròn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 47.



Ta có: $\begin{cases} II' = \frac{1}{2}h \\ OA = \frac{1}{4}AB = \frac{r}{2} \end{cases}$

Vậy diện tích xung quanh của khối tròn xoay là:

$S_{xq} = 2\pi rl = \frac{\pi rh}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 48.

Dựng $A'B' // OO' \Rightarrow$ góc giữa AA' và OO' là góc $\widehat{AA'B'} = 30^0$.

Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABA'B'$.

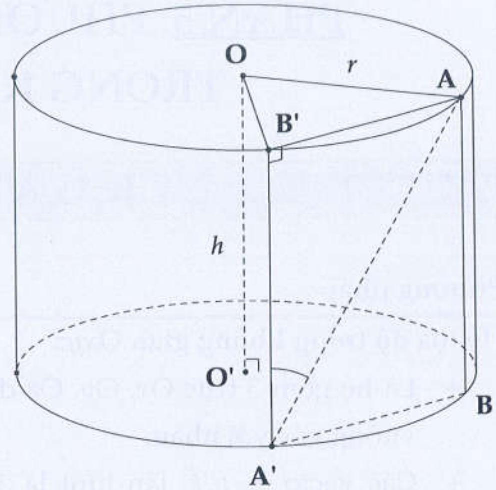
Xét tam giác $AB'A'$ vuông tại B':

$$\tan\widehat{B'A'A} = \frac{AB'}{A'B'} \Leftrightarrow AB' = \frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy diện tích thiết diện là:

$$S = AB'.A'B' = \frac{\sqrt{3}h^2}{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

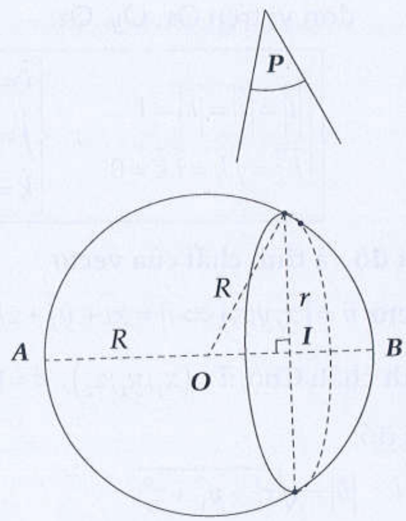


Câu 49.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến của (P) và mặt cầu (S).

Ta có: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 50.

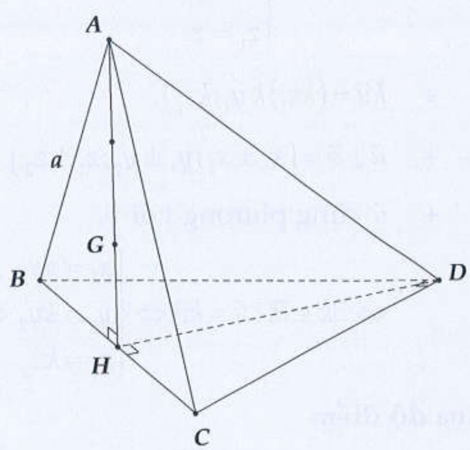
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, H là trung điểm cạnh BC.

Do $(ABC) \perp (BCD)$ và tam giác BCD vuông cân tại D nên AH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Suy ra: G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là:

$$R = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

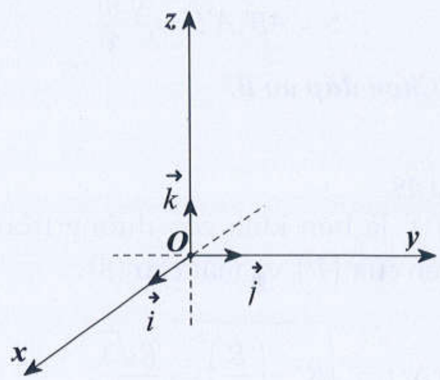


PHẦN 5: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

VẤN ĐỀ 1 — HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Phương pháp

Hệ tọa độ trong không gian Oxyz

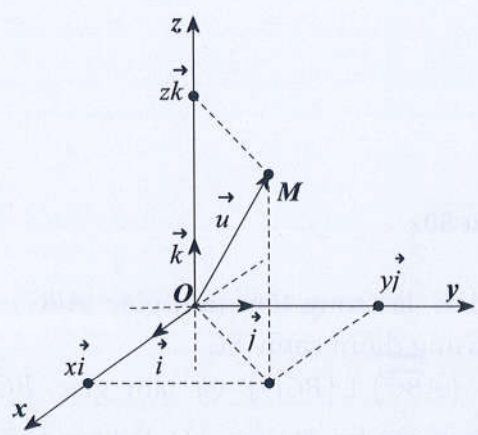


+ Là hệ gồm 3 trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau.
+ Các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là 3 vectơ đơn vị trên Ox, Oy, Oz:

$$\boxed{\begin{cases} |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \vec{i} = (1;\ 0;\ 0) \\ \vec{j} = (0;\ 1;\ 0) \\ \vec{k} = (0;\ 0;\ 1) \end{cases}}$$

Tọa độ và tính chất của vectơ

Vectơ $\vec{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Tính chất: Cho $\vec{u} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{v} = (x_2;y_2;z_2)$.

Khi đó:

+ $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
+ $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.
+ $k\vec{u} = (kx_1; ky_1; kz_1)$.
+ $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.
+ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$.

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Tọa độ điểm

Điểm $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$ và $D(x_D;y_D;z_D)$.

Khi đó:

+ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \\ AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \end{cases}$.

+ Nếu M là trung điểm của AB thì: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$.

+ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$.

+ Nếu G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$.

+ Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k $\left(\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}\right)$ thì: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$ $(k \neq 1)$

Tích vô hướng của hai vectơ: Cho $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$.

Tích vô hướng của 2 vectơ là: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

+ $\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$. Suy ra $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0$.

+ $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;1;5)$, $\vec{c} = (4;3;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$ là

A. $\vec{u} = (-7;4;1)$. **B.** $\vec{u} = (7;4;-1)$. **C.** $\vec{u} = (-7;-4;1)$. **D.** $\vec{u} = (7;4;1)$.

Lời giải:

Vectơ $\vec{u}=\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}$ khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là: $\begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\vec{c}} - x_{\vec{b}} + x_{\vec{a}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{c}} - y_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \\ z_{\vec{u}} = z_{\vec{c}} - z_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = 4-(-2)+1=7 \\ y_{\vec{u}} = 3-1+2=4 \\ z_{\vec{u}} = 1-5+3=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{u}=(7;4;-1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;0;1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(1;0;3)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\vec{a}\perp\vec{b}$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{c}$. **C.** $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{c}$. **D.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Lời giải:

+ $\vec{a}.\vec{b}=(-1)+1=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow$ Đáp án A đúng.

+ $\vec{a}.\vec{c}=(-1)+3=2\neq 0 \Rightarrow \vec{a},\vec{c}$ không vuông góc $\Rightarrow$ Đáp án B sai.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

+ $\vec{a}+2\vec{b}=(1;0;3)=\vec{c} \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

+ $\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2} \\ |\vec{b}| = \sqrt{1+1}=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}| \Rightarrow$ Đáp án D đúng.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình $OADB$ có $\overrightarrow{OA}=(-4;3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;-5;3)$ khi đó tọa độ tâm I là giao điểm giữa đường thẳng OD và AB là

A. $I(-2;-2;4)$. **B.** $I(6;-8;2)$. **C.** $I(-1;-1;2)$. **D.** $I(3;-4;1)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(-4;3;1) \Rightarrow A(-4;3;1)$; $\overrightarrow{OB}=(2;-5;3) \Rightarrow B(2;-5;3)$

Vì I là giao điểm giữa OD và AB nên I là trung điểm AB

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} = -1 \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1;-1;2) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-3;2;-7)$, $B(2;2;-3)$, $C(-3;6;-2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(-4;10;-12)$. **B.** $G(4;-10;12)$.

C. $G\left(\frac{4}{3};-\frac{10}{3};4\right)$. **D.** $G\left(-\frac{4}{3};\frac{10}{3};-4\right)$.

Lời giải:

Tọa độ trọng tâm G: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{10}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = -4 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3};-4\right) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-2)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng OA và BC. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{7\sqrt{6}}{18}$. **B.** $\frac{7\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}}{18}$. **D.** $-\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2;1;-2); \overrightarrow{BC} = (-1;-1;2)$

Gọi góc α là góc giữa hai đường thẳng OA và BC $\left(0 < \alpha < 90^0\right)$ thì:

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\left|2.(-1)+1.(-1)+(-2)2\right|}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|-7|}{3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = 3\left(\vec{i} + 4\vec{j}\right) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

A. $A(3;-2;5)$. **B.** $A(-3;-17;2)$. **C.** $A(3;17;-2)$. **D.** $A(3;5;-2)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Chọn khẳng định **sai**.

A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. **B.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **C.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **D.** $\vec{b} \perp \vec{a}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-2,4,1)$, $\vec{c}=(-1;3;4)$. Vectơ $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$ có tọa độ là

A. $\vec{v}=(7;3;23)$. **B.** $\vec{v}=(7;23;3)$. **C.** $\vec{v}=(23;7;3)$. **D.** $\vec{v}=(3;7;23)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;-3)$, $B(6;5;-1)$. Biết $OABC$ là hình bình hành. Khi đó tọa độ điểm C là

A. $C(-5;-3;-2)$. **B.** $C(7;7;-4)$. **C.** $C\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2};-2\right)$. **D.** $C(5;3;2)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;4)$, $B(-2;2;-6)$, $C(5;3;2)$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** –10. **C.** 30. **D.** –30.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u}=(3;7;0)$, $\vec{v}=(2;3;1)$, $\vec{w}=(3;-2;4)$. Giả sử vectơ $\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$ biết vectơ $\vec{a}=(-4;-12;3)$. Giá trị *x, y, z* nào dưới đây thỏa mãn?

A. $x=-5;\ y=7;\ z=-1$. **B.** $x=5;\ y=7;\ z=-1$.

C. $x=-5;\ y=7;\ z=1$. **D.** $x=5;\ y=-7;\ z=1$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(-5;2;3)$, $\vec{c}=(-1;1;2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ là

A. $\vec{d}=(-3;-1;5)$. **B.** $\vec{d}=(-5;1;9)$.

C. $\vec{d}=(-12;1;15)$. **D.** $\vec{d}=(-13;2;19)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(3;-2;5)$, $B(-2;1-3)$ và $C(5;1;1)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A. $G(2;0;1)$. **B.** $G(-2;0;1)$. **C.** $G(2;1;-1)$. **D.** $G(2;0;-1)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{-1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{4};0\right)$. **C.** $\left(0;\frac{-1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{-1}{4};\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-1;1)$, $B(2;-1;6)$, $C(-3;7;4)$, $D(-2;4;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó tọa độ trung điểm K của đoạn thẳng MN là

A. $K(-1;9;5)$.

B. $K(-2;-2;4)$.

C. $K\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{5}{2}\right)$.

D. $K\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4};-\frac{5}{2}\right)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}=(2;-5;3)$. Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài gấp 3 lần độ dài vectơ $\vec{a}$. Khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ là

A. $\vec{b}=(-6;-15;-9)$.

B. $\vec{b}=(-6;15;-9)$.

C. $\vec{b}=(6;15;9)$

D. $\vec{b}=(6;-15;9)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;-2;-3)$; $\vec{v}=(-1;1;1)$; $\vec{w}=(2;-1;-1)$ và vectơ $\vec{x}=(4;1;-1)$. Phân tích $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ khi đó $a^2+b^2-c^2$ bằng bao nhiêu?

A. 161.

B. -91.

C. 197.

D. 99.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;-3;4)$, $B(-1;2;3)$, $C(4;-4;2)$. Gọi β là góc giữa hai đường thẳng AB, AC. Khi đó, $\cos\beta$ là

A. $\frac{-3\sqrt{35}}{35}$.

B. $\frac{3\sqrt{35}}{35}$.

C. $\frac{\sqrt{35}}{35}$.

D. $\frac{-\sqrt{35}}{35}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo là 45^0 thì giá trị của m bằng

A. $2\pm\sqrt{6}$.

B. $2-\sqrt{6}$.

C. $2+\sqrt{6}$.

D. $-2+\sqrt{6}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;-2)$, $B(1;1;1)$ và $C(3;0;0)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Tam giác ABC vuông tại A.

B. Tam giác ABC vuông tại B.

C. Tam giác ABC cân tại A.

D. Tam giác ABC cân tại B.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	A	D	D	A
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	A	D	C
Câu	11	12	13	14	15
Đáp án	B	D	B	B	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Ta có $\overrightarrow{AO}=3\left(\vec{i}+4\vec{j}\right)-2\vec{k}+5\vec{j}=3\vec{i}+17\vec{j}-2\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=-3\vec{i}-17\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow A\left(-3;-17;2\right)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2.

Ta có: $\vec{b}.\vec{c}=1.1+1.1+0.1=2\neq 0\Rightarrow \vec{b}\not\perp\vec{c}\Rightarrow$ A sai $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3.

Ta có: $\begin{cases}2\vec{a}=\left(2;4;6\right)\\-3\vec{b}=\left(6;-12;-3\right)\\5\vec{c}=\left(-5;15;20\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=\left(2+6-5;4-12+15;6-3+20\right)=\left(3;7;23\right)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4. Gọi tọa độ điểm $C\left(x;y;z\right)\Rightarrow \overrightarrow{CB}=\left(6-x;5-y;-1-z\right)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}=\left(1;2;-3\right)$.

$OABC$ là hình bình hành $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\begin{cases}6-x=1\\5-y=2\\-1-z=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\\z=2\end{cases}\Rightarrow C\left(5;3;2\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(-4;1;-10\right)\\\overrightarrow{AC}=\left(3;2;-2\right)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4.3+1.2+\left(-10\right).\left(-2\right)=10$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6.

Ta có: $\begin{cases}x\vec{u}=\left(3x;7x;0\right)\\y\vec{v}=\left(2y;3y;y\right)\\z\vec{w}=\left(3z;-2z;4z\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\left(3x+2y+3z;7x+3y-2z;y+4z\right)$.

Mà $\vec{a}=\left(-4;-12;3\right)\Rightarrow\begin{cases}3x+2y+3z=-4\\7x+3y-2z=-12\\y+4z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=7\\z=-1\end{cases}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7.

Ta có: $\begin{cases}2\vec{a}=\left(2;-4;8\right)\\3\vec{b}=\left(-15;6;9\right)\\-\vec{c}=\left(1;-1;-2\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}=\left(-12;1;15\right)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 8.

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{3-2+5}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-2+1+1}{3} = 0 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{5-3+1}{3} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow G(2;0;1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 9. Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ là:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = \dfrac{1+0+0-2}{4} = \dfrac{-1}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \dfrac{0+1+0+1}{4} = \dfrac{1}{2} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \dfrac{0+0+1-1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{-1}{4}; \dfrac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \textbf{\textit{Chọn đáp án D.}}$$

Câu 10.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $M\left(\dfrac{3}{2}; -1; \dfrac{7}{2}\right)$ và $N\left(\dfrac{-5}{2}; \dfrac{11}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Vì độ trung điểm K của đoạn thẳng MN nên $\begin{cases} x_K = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{-1}{2} \\ y_K = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{9}{4} \\ z_K = \dfrac{z_M + z_N}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{4}; \dfrac{5}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 11. $\vec{a} = (2; -5; 3)$

Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (-2k; 5k; -3k)$ với $k > 0$

Ta có: $|\vec{b}| = 3|\vec{a}| \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + (5k)^2 + (-3k)^2} = 3\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 3^2}$

$\Leftrightarrow 38k^2 = 9.38 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \ (tm) \\ k = -3 < 0 \ (loại) \end{array}\right.$

Với $k = 3 \Rightarrow \vec{b} = (-6; 15; -9) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12.

Ta có: $\begin{cases} a\vec{u} = (a; -2a; -3a) \\ b\vec{v} = (-b; b; b) \\ c\vec{w} = (2c; -c; -c) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (a - b + 2c; -2a + b - c; -3a + b - c)$.

Mà $\vec{x}=(4;1;-1)\Rightarrow\begin{cases}a-b+2c=4\\-2a+b-c=1\\-3a+b-c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=12\\c=7\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2-c^2=2^2+12^2-7^2=99.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 13. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;5;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;-2)$

Gọi góc α là góc giữa hai đường thẳng AB và AC $\left(0<\alpha<90^0\right)$ thì:

$$\cos\beta=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$=\frac{\left|-3.2+5.(-1)-1.(-2)\right|}{\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|-9|}{3\sqrt{35}}=\frac{3\sqrt{35}}{35}$$

Vậy $\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{35}}{35}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14. Ta có: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{1.1+1.0-2.m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+0+m^2}}$

$$\Leftrightarrow\cos 45^0=\frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow\frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}=1-2m\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m\ge 0\\3\left(m^2+1\right)=1-4m+4m^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\3\left(m^2+1\right)=1-4m+4m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\m^2-4m-2=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\m=2\pm\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 15. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;3)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-2;2)$; $\overrightarrow{BC}=(2;-1;-1)$

+ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.3-1.(-2)+3.2=11\ne 0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\not\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ loại A.

+ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.2-1.(-1)+3.(-1)=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại B.

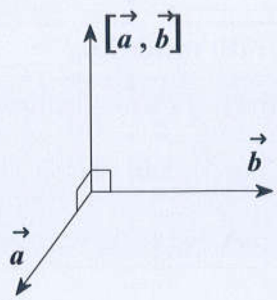
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

VẤN ĐỀ 2 — TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp

Tích có hướng của hai vectơ

Cho $\vec{u}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ và $\vec{v}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$. Tích có hướng của 2 vectơ kí hiệu là $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ và được xác định:



$$\boxed{\begin{aligned}\left[\vec{u},\vec{v}\right]&=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)\\ &=\left(y_1z_2-y_2z_1;y_1z_2-y_2z_1;y_1z_2-y_2z_1\right)\end{aligned}}$$

<u>*Tính chất:*</u>

+ $\begin{cases}\left[\vec{u},\vec{v}\right]\perp\vec{u}\\ \left[\vec{u},\vec{v}\right]\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{u}=0\\ \left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{v}=0\end{cases}.$
+ $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right).$
+ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{0}.$

  Suy ra: *Ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hay A, B, C là ba đỉnh của tam giác)* $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ *không cùng phương* $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\neq\vec{0}.$
+ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0.$

  Suy ra: *Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (hay A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện)* $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0.$

Ứng dụng của tích có hướng

+ ***Diện tích tam giác ABC:*** $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}.$

  $\xrightarrow{AH\perp BC}$ *Độ dài đường cao:* $\boxed{AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}}.$

  $\xrightarrow{p=\frac{AB+BC+CA}{2}}$ *Bán kính đường tròn nội tiếp* ΔABC : $\boxed{r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}}.$
+ ***Diện tích hình bình hành ABCD:*** $\boxed{S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}.$
+ ***Thể tích khối hộp:*** $\boxed{V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|}.$

+ ***Thể tích tứ diện:*** $\boxed{V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}$.

$$\xrightarrow[\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.AH]{AH\perp(BCD)}$$ *Độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A:* $\boxed{AH=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(4;2;5)$, $\vec{v}=(3;1;3)$. Khi đó độ lớn của vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $[\vec{u},\vec{v}]=(1;3;-2)$ khi đó độ lớn vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ là: $\left|[\vec{u},\vec{v}]\right|=\sqrt{1+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ sao cho $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\ \vec{u}\perp\vec{b}\end{cases}$ và $|\vec{u}|=\sqrt{21}$ là

A. $\vec{u}=(4;-1;2)$. **B.** $\vec{u}=(-4;1;-2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1;-4)$. **D.** Cả A và B.

Lời giải:

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(4;-1;2)$.

Do $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\ \vec{u}\perp\vec{b}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=k\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(4k;-k;2k)$.

Ta có: $|\vec{u}|=\sqrt{21}\Leftrightarrow\sqrt{(4k)^2+(-k)^2+(2k)^2}=\sqrt{21}\Leftrightarrow 21k^2=21\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-1\end{array}\right.$

+ $k=1\Rightarrow\vec{u}=(4;-1;2)$.
+ $k=-1\Rightarrow\vec{u}=(-4;1;-2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u}=(1;1;2)$, $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Để vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ vuông góc với $\vec{a}$ thì giá trị m bằng bao nhiêu?

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-m-2;-m;m+1)$.

Theo đề bài: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]\perp\vec{a}\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{a}=0\Leftrightarrow(-m-2).3+(-m).(-1)+(m+1).(-2)=0$

$\Leftrightarrow 4m=-8\Leftrightarrow m=-2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong bộ ba điểm sau đây thì bộ ba điểm nào thẳng hàng?

A. $A(1;3;1);\ B(0;1;2);\ C(0;0;1)$.
B. $A(1;1;1);\ B(-4;3;1);\ C(-9;5;1)$.
C. $A(1;-3;1);\ B(0;1;-2);\ C(0;0;1)$.
D. $A(-1;3;1);\ B(0;-1;2);\ C(0;0;-1)$.

Lời giải:

Ta có kết quả: Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.

Xét các đáp án:

+ Đáp án A: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-2;1)\\\overrightarrow{AC}=(-1;-3;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-1;1)\neq\vec{0}$.

$\Rightarrow$ 3 điểm A,B,C không thẳng hàng $\Rightarrow$ loại A.

+ Đáp án B: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-5;2;0)\\\overrightarrow{AC}=(-10;4;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;0)=\vec{0}$.

$\Rightarrow$ 3 điểm A,B,C thẳng hàng $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

+ Đáp án C: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-4;-3)\\\overrightarrow{AC}=(-1;3;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(9;3;1)\neq\vec{0}$.

$\Rightarrow$ 3 điểm A,B,C không thẳng hàng $\Rightarrow$ loại C.

+ Đáp án D: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-4;1)\\\overrightarrow{AC}=(1;-3;-2)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(11;3;1)\neq\vec{0}$.

$\Rightarrow$ 3 điểm A,B,C không thẳng hàng $\Rightarrow$ loại D.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}(đvdt)$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}(đvdt)$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}(đvdt)$. **D.** $\sqrt{6}(đvdt)$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)\\\overrightarrow{AC}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;2;-1)$.

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}(đvdt).$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có tọa độ $A(-1;1;-1)$, $B(2;0;-1)$, $C(3;1;-2)$. Độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{78}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{442}}{17}$. **C.** $\frac{2\sqrt{26}}{17}$. **D.** $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3;-1;0)\\ \overrightarrow{AC}=(4;0;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;3;4).$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+3^2+4^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(4;0;-1)\Rightarrow AC=\sqrt{17}$.

Độ dài chiều cao từ B của tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BH.AC}{2}\Leftrightarrow BH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AC}=\frac{2.\frac{\sqrt{26}}{2}}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{442}}{17}\Rightarrow \textit{Chọn đáp án B.}$$

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ và $D(-2;1;-2)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{1}{2}(đvtt)$. **B.** $\frac{4}{3}(đvtt)$. **C.** $\frac{3}{2}(đvtt)$. **D.** $\frac{2}{3}(đvtt)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;1;-2)$.

Khi đó: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=1.(-3)+1.1+1.(-2)=-4$.

Vậy thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}.|-4|=\frac{2}{3}(đvtt)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nếu $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$ và $(\vec{a},\vec{b})=30^0$ thì $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 15. **D.** Đáp án khác.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2)$, $\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Với giá trị m nào dưới đây thì vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ có độ lớn bằng $\sqrt{14}$?

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-1$. **D.** Cả A và B.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;-4;3)$, $B(0;2;1)$, $C(x;y;4)$. Với giá trị x,y nào dưới đây thì ba điểm A,B,C thẳng hàng?

A. $x=3;\ y=7$. **B.** $x=3;\ y=-7$.

C. $x=-3;\ y=7$. **D.** $x=-3;\ y=-7$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;1;1)$, $B(-4;3;1)$, $C(3;1;-1)$, $D(-9;5;1)$. Bộ ba điểm thẳng hàng là

A. ba điểm A,B,C. **B.** ba điểm A,B,D.

C. ba điểm A,C,D. **D.** ba điểm B,C,D.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-1;1;-1)$, $C(2;3;1)$. Vectơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ có tọa độ là

A. $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(10;-5;-10)$. **B.** $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(14;-5;-10)$.

C. $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(14;5;-10)$. **D.** $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(10;5;-10)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;2;3)$, $B(2;0;2)$, $C(0;2;0)$. Diện tích của tam giác ABC bằng?

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}(đvdt)$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{2}(đvdt)$. **C.** $\sqrt{14}(đvdt)$. **D.** $2\sqrt{7}(đvdt)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(-1;2;3)$ và $C(0;1;-3)$. Độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC bằng

A. $\frac{5\sqrt{19}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{19}}{38}$. **C.** $\frac{10\sqrt{19}}{19}$. **D.** $\frac{5\sqrt{19}}{19}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(6;5;2)$ và $D(7;7;5)$. Diện tích tứ giác $ABCD$ là

A. $9\sqrt{15}(đvdt)$. **B.** $3\sqrt{83}(đvdt)$. **C.** $2\sqrt{83}(đvdt)$. **D.** $\sqrt{82}(đvdt)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}\,(đvdt)$. **B.** $\sqrt{349}\,(đvdt)$. **C.** $\sqrt{87}\,(đvdt)$. **D.** $\dfrac{\sqrt{349}}{2}(đvdt)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ là

A. $2(đvtt)$. **B.** $3(đvtt)$. **C.** $6(đvtt)$. **D.** $5(đvtt)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$, $D(4;1;0)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ là

A. $\dfrac{36}{\sqrt{77}}$. **B.** $\dfrac{12}{\sqrt{77}}$. **C.** $\dfrac{6}{\sqrt{77}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{77}}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(2;-2;2)$, $B(1;2;1)$, $A'(1;1;1)$, $D(0;1;2)$. Thể tích của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $8(đvtt)$. **B.** $\dfrac{3}{2}(đvtt)$. **C.** $2(đvtt)$. **D.** $4(đvtt)$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	C	D	B	B	A	C
Câu	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	C	B	B	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Ta có: $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 3.10\sin 30^0 = 15 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 2. Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = (-m-2;-m;m+1)$

$\Rightarrow \left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \sqrt{(-m-2)^2+(-m)^2+(m+1)^2} = \sqrt{14}$

$\Leftrightarrow 3m^2+6m+5=14 \Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 3. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;6;-2)$ và $\overrightarrow{AC}=(x-2;y+4;1)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (2y+14;-2x+6;-6x-2y+4)$

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}2y+14=0\\-2x+6=0\\-6x-2y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 4. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;2;0)$ và $\overrightarrow{AD}=(-10;4;0)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(0;0;0)\Rightarrow$ ba điểm A,B,D thẳng hàng $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-3)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;4;-1)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(10;-5;-10)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-3)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;4;-2)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\,(đvdt).$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 7. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(0;0;-5)$ và $\overrightarrow{BC}=(1;-1;-6)\Rightarrow BC=\sqrt{38}.$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-5;-5;0)$

Khi đó: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+0^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\,(đvdt).$

Độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC là: $h_A=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{38}}=\frac{5\sqrt{19}}{19}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 8. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$; $\overrightarrow{AC}=(5;4;1)$ và $\overrightarrow{AD}=(6;6;4)$.

Suy ra: $\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-10;14;-6)\\\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(10;-14;6)\end{cases}.$

Khi đó: $S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|+\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+14^2+(-6)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{10^2+(-14)^2+6^2}=2\sqrt{83}\,(đvdt)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;0;6)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$

Khi đó: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+4^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{349}}{2}\,(đvdt).$

Vậy $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\sqrt{349}\,(đvdt)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10. $\overrightarrow{AB}=(3;6;3)$; $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$; $\overrightarrow{AD}=(2;2;2)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-21;9;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-21.2+9.2+2.3=-18$.

Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{|-18|}{6}=3(đvtt)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 11.

$\overrightarrow{AB}=(-6;3;3)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;2;-4)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;3;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(2;-1;-7)$; $\overrightarrow{BD}=(4;0;-6)$

Ta có:

+ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;-36;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-72$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{|-72|}{6}=12(đvtt)$.

+ $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(6;-16;4)\Rightarrow S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+(-16)^2+4^2}=\sqrt{77}\,(đvdt)$.

Vậy đường cao AH của tứ diện $ABCD$ có độ dài là $\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{3.12}{\sqrt{77}}=\dfrac{36}{\sqrt{77}}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 12. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;4;-1)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;3;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(-1;3;-1)$

Khi đó: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(3;2;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}=3.(-1)+2.3+5.(-1)=-2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|=|-2|=2(đvtt)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

VẤN ĐỀ 3	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Mặt phẳng (P) *đi qua điểm* $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ *và nhận vectơ* $\vec{n}=(A;B;C)$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ *làm vectơ pháp tuyến có dạng:*

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

+ ***Phương trình tổng quát*** của mặt phẳng (P) *là:*

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0},\ (A^2+B^2+C^2>0).$$

+ ***Phương trình đoạn chắn:*** Nếu (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$ thì ta có *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P) là: $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$.

DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG KHI BIẾT VECTƠ PHÁP TUYẾN

1. Phương pháp

+ Mặt phẳng (α) song song với $(\beta)\Rightarrow(\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}$ *, với* $\vec{n}_{(\beta)}$ *là vectơ pháp tuyến của* (β).

+ Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng $d\Rightarrow(\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{u}_d$*, với* $\vec{u}_d$ *là vectơ pháp tuyến của* (β).

+ Mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB\Rightarrow(\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\overrightarrow{AB}$.

+ ***Lưu ý:*** Vec tơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{u}_d=(a;b;c)$ ở 2 dạng phương trình sau:

+ *Phương trình tham số của đường thẳng* Δ *là:* $\boxed{\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\quad(t\in\mathbb{R})\\ z=z_0+ct\end{cases}}$

t là tham số

+ *Phương trình chính tắc của đường thẳng* Δ *(với* $a,b,c\neq 0$ *) là:*

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0$. Phương trình của mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) là

A. $(Q): x-3y+2z-3=0.$ **B.** $(Q): x-3y+2z+14=0.$

C. $(Q): -x+2y+2z-3=0.$ **D.** $(Q): x-2y+2z+11=0.$

Lời giải:

+ Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;-2)$.
+ Vì mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.
+ Mặt phẳng (Q) đi qua $A(-1;3-2)$ có phương trình là:

$(x+1)-2(y-3)-2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z+3=0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-2}$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d là

A. $(P): -2x-y+2z+3=0.$ **B.** $(P): 2x+y+2z-1=0.$

C. $(P): -2x+3y+z-5=0.$ **D.** $(P): 2x+y-2z+3=0.$

Lời giải:

+ Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$.
+ Vì mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.
+ Mặt phẳng (P) đi qua $A(-2;3;1)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $2(x+2)+(y-3)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+3=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$, $B(2;5;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB la

A. $6x+4y-2z-1=0.$ **B.** $3x+2y-z-1=0.$

C. $3x+2y+z-5=0.$ **D.** $2x+y-2z+3=0.$

Lời giải:

+ Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB.
+ Trung điểm $I(-1;3;2)$, $\overrightarrow{AB}=(6;4;-2)$.
+ Mặt phẳng trung trực qua $I(-1;3;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(6;4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $3x+2y-z-1=0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z=0$. Phương trình của mặt phẳng (Q) qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $(Q): x+y-2z-3=0.$ **B.** $(Q): x-y-2z-5=0.$

C. $(Q): x+y+2z-1=0.$ **D.** $(Q): x+y-2z-5=0.$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-3z+10=0$. Phương trình của mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) là

A. $(Q): x-2y+3z+4=0.$ **B.** $(Q): -x+2y+3z+4=0.$

C. $(Q): x-2y-3z+4=0.$ **D.** $(Q): x+2y-3z=0.$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{2}$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $(P): x-3y+2z-7=0.$ **B.** $(P): x-3y+2z+7=0.$

C. $(P): x-3y-2z-3=0.$ **D.** $(P): x+3y-2z+3=0.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $(P): 2x+y-3z+1=0.$ **B.** $(P): 2x+y-3z-1=0.$

C. $(P): 2x+y+3z-1=0.$ **D.** $(P): -2x-y+3z-1=0.$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-1)$, $B(-1;1;3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $x+y-2z=0.$ **B.** $x+y-2z-6=0.$

C. $x+y+2z=0.$ **D.** $x+y+2z-4=0.$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-5;2)$, $B(3;-1;-2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $x+2y-2z+4=0.$ **B.** $x+2y-2z-4=0.$

C. $x+2y+2z+4=0.$ **D.** $x+2y+2z-8=0.$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	D	B	A	B	A	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mặt phẳng (Q) qua $M(3;0;-1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-2)$, có phương trình: $(Q):1(x-3)+1(y-0)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow x+y-2z-5=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2. Mặt phẳng (Q) qua $M(2;-1;0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;-3)$, có phương trình: $(Q):1(x-2)-2(y+1)-3(z-0)=0 \Leftrightarrow x-2y-3z-4=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. Mặt phẳng (P) qua $A(2;-1;1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{u}_d=(1;-3;2)$, có phương trình: $(P):1(x-2)-3(y+1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-3y+2z-7=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4. Mặt phẳng (P) qua $A(1;-1;0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{u}_d=(2;1;-3)$, có phương trình: $(P):2(x-1)+1(y+1)-3(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-1=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB qua trung điểm $I(0;2;1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;4)$, có phương trình:

$-2(x-0)-2(y-2)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2z=0.$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB qua trung điểm $I(2;-3;0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(2;4;-4)$, có phương trình:

$2(x-2)+4(y+3)-4(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+4=0.$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CÓ HƯỚNG

1. Phương pháp

Ứng dụng tính chất tích có hướng của hai vectơ: $\begin{cases}[\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{u}\\ [\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{v}\end{cases}$

+ 2 điểm A, B nằm trong một mặt phẳng $(P) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{n}_{(P)}$

+ Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q) \Rightarrow \vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(Q)}$

+ Mặt phẳng (P) chứa hoặc song song với đường thẳng $d \Rightarrow \vec{n}_{(P)}\perp\vec{u}_d$

Các bài toán thường gặp:

+ Mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm $A, B, C \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

+ Mặt phẳng (α) qua M, N và vuông góc với $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{MN},\vec{n}_{(\beta)}\right]$, *với* $\vec{n}_{(\beta)}$ *là vectơ pháp tuyến của* (β).

+ Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(\beta)}\right]$, *với* $\vec{u}_d$ *là vectơ chỉ phương của đường thẳng* d *và* $\vec{n}_{(\beta)}$ *là vectơ pháp tuyến của* (β).

+ Mặt phẳng (α) song song với đường thẳng d và vuông góc với $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(\beta)}\right]$, *với* $\vec{u}_d$ *là vectơ chỉ phương của đường thẳng* d *và* $\vec{n}_{(\beta)}$ *là vectơ pháp tuyến của* (β).

+ Mặt phẳng (α) vuông góc với (β) và $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(\gamma)}\right]$, *với* $\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(\gamma)}$ *lần lượt là vectơ pháp tuyến của* (β) *và* (γ).

+ Mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1, d_2 \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$, *với* $\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng* d_1, d_2.
+ Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng $d_2 \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$, *với* $\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng* d_1, d_2.
+ Mặt phẳng (α) chứa điểm M và đường thẳng $d \Rightarrow (\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_d, \overrightarrow{MA}]$, *với* $\vec{u}_d$ *là vectơ chỉ phương của đường thẳng* d *và* $A \in d$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;1;1)$, $B(3;0;2)$ và $C(1;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C là

A. $(P): x-2y-2z+5=0.$ **B.** $(P): x+2y+2z-3=0.$

C. $(P): x-2y+2z+1=0.$ **D.** $(P): x+2y-2z+1=0.$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4;-1;1) \\ \overrightarrow{AC} = (2;-1;0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1;2;-2).$

Mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;1;1)$ và nhận $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1;2;-2)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $(x+1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+1=0.$

$\Rightarrow$***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-1;-2)$, $B(0;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) là

A. $(Q): -x+2y-z+1=0.$ **B.** $(Q): x+2y+z+5=0.$

C. $(Q): x-2y-z-3=0.$ **D.** $(Q): x-2y+z+1=0.$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;2;3) \\ \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}] = (-1;2;-1).$

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và nhận $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(-1;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến là: $-(x+1)+2(y+1)-(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y+z+1=0.$

$\Rightarrow$***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $(Q):4x-y-z-14=0.$ **B.** $(Q):4x-y-14=0.$

C. $(Q):4x-y+z-14=0.$ **D.** $(Q):4x-y+z+14=0.$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}\vec{u}_d=(1;3;-1)\\ \vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-4;1;-1).$

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(2;-4;2)$ và nhận $\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-4;1;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (Q) là: $4x-y+z-14=0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z-1=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với Oy là

A. $(Q):3x-2z-y=0.$ **B.** $(Q):-3x+2z+1=0.$

C. $(Q):-3x-2z+5=0.$ **D.** $(Q):3x-2z+y-2=0.$

Lời giải:

Ta có mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3).$

Trục Oy có vectơ chỉ phương là: $\vec{j}=(0;1;0)\Rightarrow\left[\vec{n}_{(P)},\vec{j}\right]=(-3;0;2).$

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(1;1;1)$ và nhận $\left[\overrightarrow{u_{(P)}};\vec{j}\right]=(-3;0;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $-3x+2z+1=0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d_1,d_2 là

A. $(P):3x+2y-z-7=0.$ **B.** $(P):3x-2y-z-1=0.$

C. $(P):-3x+2y+z-1=0.$ **D.** $(P):-3x-2y+2z+7=0.$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}\vec{u}_{d_1}=(1;1;1)\\ \vec{u}_{d_2}=(1;2;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}\right]=(-3;2;1).$

d_1 đi qua điểm $M(1;2;0)$ mà $d_1\subset(P)$ nên M thuộc (P)

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;0)$ có $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}\right]=(-3;2;1)$ là:

$-3(x-1)+2(y-2)+z=0\Leftrightarrow -3x+2y+z-1=0\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-8}{-1}$ và đường thẳng $d_2:\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A. $(P):4x-5y-6z+41=0.$ **B.** $(P):7x+y+3z-26=0.$

C. $(P):x+2y-z-10=0.$ **D.** $(P):4x+5y-6z-9=0.$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(8;5;8)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}=(1;2;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(3;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2}=(7;2;3)$.

Ta có $\left[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}\right]=(8;-10;-12)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 nên M_1 thuộc mặt phẳng (P), mặt phẳng (P) nhận $\left[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}\right]=(8;-10;-12)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $4x-5y-6z+41=0\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tọa độ điểm $M(-1;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa M và đường thẳng Δ là

A. $(P): x+3y-z-2=0.$ **B.** $(P): 4x-y+2z+5=0.$

C. $(P): x-2y+3=0.$ **D.** $(P): 2x-y+3=0.$

Lời giải:

Đường thẳng Δ đi qua $A(0;3;1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Vectơ $\overrightarrow{MA}=(1;2;1)$. Ta có $\left[\vec{u},\overrightarrow{MA}\right]=(-4;2;0)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa Δ và đi qua M nên mặt phẳng (P) nhận $\left[\vec{u},\overrightarrow{MA}\right]=(-4;2;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $2x-y+3=0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;-1)$, $B(2;1;-1)$, $C(3;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A,B,C là

A. $(P): x+3y-z-6=0.$ **B.** $(P): x-3y+z+8=0.$

C. $(P): x-3y-z+6=0.$ **D.** $(P): x+3y+z-4=0.$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) nhận vectơ nào dưới đây làm vectơ pháp tuyến?

A. $\vec{n}=(1;4;-1).$ **B.** $\vec{n}=(1;-4;1).$ **C.** $\vec{n}=(-1;4;1).$ **D.** $\vec{n}=(2;8;2).$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$ và hai điểm $A(1;-2;3), B(3;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $(Q): 2x+y-z+3=0.$ **B.** $(Q): 2x-2y+3z-15=0.$

C. $(Q): 2x+2y+3z-7=0.$ **D.** $(Q): x+2y-2z+9=0.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và mặt phẳng (Q) có phương trình $x+2y+3z-16=0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A,B và vuông góc với mặt phẳng (Q) sẽ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;-1).$ **B.** $N(1;2;1).$ **C.** $P(-1;2;1).$ **D.** $Q(-1;2;-1).$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;0)$, $B(-1;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình là: $2x+2y-z+2=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB, vuông góc với (P) có phương trình

A. $(Q): 3x-y+4z+8=0$. **B.** $(Q): 3x+y+4z+2=0$.

C. $(Q): 3x-y-4z+3=0$. **D.** $(Q): 3x+y-4z+4=0$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $(Q): x+y-z=0$. **B.** $(Q): -x+y+z=0$.

C. $(Q): y-z-2=0$. **D.** $(Q): y-z=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+5=0$. Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(1;2;2)$. **B.** $B(0;-3;-1)$. **C.** $C(1;-2;2)$. **D.** $D(1;2;-3)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-4y+z-7=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $d_1: \begin{cases} x=3t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$. **B.** $d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=3+3t \end{cases}$. **C.** $d_3: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3-3t \end{cases}$. **D.** $d_4: \begin{cases} x=t \\ y=-2 \\ z=3-3t \end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình là: $\begin{cases} x=-2+s \\ y=-1-s \\ z=2s \end{cases}$ và $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2-t \\ z=3+2t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $(P): x+y-z+1=0$. **B.** $(P): x-y-z-3=0$.

C. $(P): x-y-z+3=0$. **D.** $(P): x-y+z+3=0$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=3t\\y=1-2t\\z=3+t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=1+k\\y=-k\\z=4+k\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d_1, d_2 nhận vectơ nào dưới đây làm vectơ pháp tuyến?

A. $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}_{(P)}=(-1;-2;-1)$.

C. $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;-1)$. **D.** $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-1)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$, $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song d_2 là

A. $(P):4x-7y-6z-14=0$. **B.** $(P):-4x+7y+6z-14=0$.

C. $(P):4x-7y+6z-2=0$. **D.** $(P):4x+7y-6z-14=0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=3-2t\end{cases}$ và đi qua $M(2;-1;0)$ là

A. $(P):x+3y-z+1=0$. **B.** $(P):x+4y-z+2=0$.

C. $(P):x+4y+z+2=0$. **D.** $(P):x+3y+z+1=0$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	D	D	C	A	A	C
Câu	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	D	C	B	A	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;-1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-2;2)$.

Mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;2;-1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-6;-2)$, có phương trình:

$(ABC):-2(x+1)-6(y-2)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow x+3y+z-4=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-1;2)$.

Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-4;-1)$.

Ta thấy: $\vec{n}=-2\vec{n}_{(ABC)}$ nên $\vec{n}=(2;8;2)$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 3. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;4;-4)$, $\vec{n}_P=(2;1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) qua $A(1;-2;3)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(-4;-4;-6)$, có phương trình:

$(Q):\ -4(x-1)-4(y+2)-6(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+3z-7=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(1;2;3)$.

Mặt phẳng (P) qua $A(1;0;1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;-2;1)$, có phương trình:

$(P):\ 1(x-1)-2(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+z-2=0.$

Lần lượt thay tọa độ các điểm M, N, P, Q ta thấy tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 5. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\vec{n}_{(P)}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) qua $A(-2;2;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(3;-1;4)$, có phương trình:

$(Q):\ 3(x+2)-1(y-2)+4(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-y+4z+8=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6. Chọn $A(0;1;-1)\in d.$

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(-1;1;1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (Q) qua $A(0;1;-1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(0;2;-2)$, có phương trình:

$(Q):0(x-0)+2(y-1)-2(z+1)=0\Leftrightarrow y-z-2=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 7. Chọn $A(2;-1;-3)\in d.$

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;-2;2)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (Q) qua $A(2;-1;-3)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(0;3;3)$

, có phương trình:

$(Q):0(x-2)+3(y+1)+3(z+3)=0\Leftrightarrow y+z+4=0.$

Lần lượt thay tọa độ các điểm A, B, C, D ta thấy tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 8. Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(3;2;1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(3;-4;1)$.

Mặt phẳng (Q) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(6;0;-18)$.

Kiểm tra thấy $\vec{n}_{(Q)}=3\vec{u}_4\Rightarrow d_4\perp(Q)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 9. Chọn $A(-2;1;0)\in d_1$. Kiểm tra thấy d_1 và d_2 cắt nhau.

Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-1;3)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;-1;2)$.

Mặt phẳng (P) qua $A(-2;1;0)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(1;-1;-1)$, có phương trình:

$(P):1(x+2)-1(y-1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow x-y-z+3=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 10. Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) chứa d_1 và d_2 có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-2;-1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 11. Chọn $A(2;0;-1)\in d_1$.

Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-2;3)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) qua $A(2;0;-1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-4;7;6)$, có phương trình:

$(P):-4(x-2)+7(y-0)+6(z+1)=0\Leftrightarrow -4x+7y+6z+14=0.$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 12. Chọn $A(1;0;3)\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1;-1;-3)$.

Đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;-2)$.

Mặt phẳng (P) qua $A(1;0;3)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=[\overrightarrow{AM},\vec{u}]=(-1;-4;1)$, có phương trình:

$(P):-1(x-1)-4(y-0)+1(z-3)=0\Leftrightarrow -x-4y+z-2=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

VẤN ĐỀ 4 — VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a,b,c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

+ ***Phương trình tham số** của đường thẳng Δ là:* $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$

t là tham số

+ ***Phương trình chính tắc** của đường thẳng Δ (với $a,b,c \neq 0$) là:*

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG KHI BIẾT VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d đi qua hai điểm A, B thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
+ Nếu đường thẳng $d \perp (P)$ thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n}_P$, *với* $\vec{n}_P$ *là một VTPT của mặt phẳng* (P).
+ Nếu đường thẳng $d \,//\, \Delta$ thì d và Δ có cùng vectơ chỉ phương, tức là d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$.

2. Ví dụminh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3;2)$ có phương trình là

A. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $d: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua O và nhận vectơ $\vec{u}=(1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-1;-2)$ và $B(1;1;1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A và B là

A. $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

B. $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$.

C. $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$.

D. $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua A,B sẽ nhận $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương

Đường thẳng d đi qua A có phương trình là: $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;5)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=4+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng Δ đi qua M và song song với d có phương trình chính tắc là

A. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-5}{4}$.

B. $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+5}{4}$.

C. $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+5}{1}$.

D. $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

Lời giải:

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;-1;1)$.

Đường thẳng $\Delta // d$ nên nhận vectơ $\vec{u}_d=(2;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Đường thẳng Δ đi qua M có phương trình là: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình là $2x-y+2z+7=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **B.** $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

C. $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $d:2x-y+2z-5=0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;2)$.

Đường thẳng d vuông góc (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Đường thẳng d đi qua A có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-3t\\z=2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d:\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-7z+1=0$ là

A. $d:\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d:\begin{cases}x=-1+8t\\y=-2+6t\\z=-3-14t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2-4t\\z=3-7t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d:\begin{cases}x=4+t\\y=3+2t\\z=-7+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;-1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;2)$ là

A. $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $d:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $d:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ qua $A(1;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;6)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=4t\\z=1+6t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=4\\z=6-t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-2t\\z=-1-3t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2t\\z=1+3t\end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc đường thẳng qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+2y-3z+1=0$ là

A. $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. **D.** $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+4}{-3}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;-1;0)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A,B là

A. $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $d:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. **D.** $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;-7)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+5=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z+7}{-7}$. **B.** $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.

C. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-7}$. **D.** $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-7}{-2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;3)$, $B(-3;0;-4)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là

A. $d:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{7}$. **B.** $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{y+4}{3}$.

C. $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{7}$. D. $d:\frac{x+1}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{y+3}{7}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(3;-1;1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua hai điểm A,B là

A. $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1}$. B. $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-3}$.

C. $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{4}$. D. $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{4}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình là $2x-y+2z+7=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. B. $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{2}$. D. $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	A	A	C	D
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	D	B	C	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=\frac{1}{2}\vec{u}=(2;-3;1)$.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 2. Đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(\alpha)}=(4;3;-7)$, có phương trình: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3. Chọn 1 vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = \frac{1}{2}\vec{u} = (2;-3;1)$.

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4. Chọn 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = -\frac{1}{2}\vec{u} = (1;-2;-3)$.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = -1-3t \end{cases} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5. Đường thẳng d qua $A(1;2;-1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(P)} = (1;2;-3)$,

có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$, chọn $B(2;4;-4) \in d \Rightarrow d$ có dạng:

$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{-3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2)$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

$\Rightarrow$ loại ngay đáp án A, C.

Thay tọa độ điểm A vào phương trình đáp án D thấy thỏa mãn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Đường thẳng d qua $A(1;4;-7)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(P)} = (1;2;-2)$,

có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 8. Đường thẳng AB qua $A(1;-1;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là

$\vec{u}_d = -\overrightarrow{AB} = (4;-1;7)$, có phương trình: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{7} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9. Đường thẳng AB qua $A(1;2;-3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$,

có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 10. Đường thẳng d qua $A(2;1;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(P)} = (2;-1;2)$, có

phương trình: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA TÍCH CÓ HƯỚNG

1. Phương pháp

+ Nếu $\begin{cases} d \perp \Delta_1 \\ d \perp \Delta_2 \end{cases}$ thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]$, *với* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của* Δ_1 *và* Δ_2.

+ Nếu $\begin{cases} d \perp \Delta \\ d \,//\, (P) \end{cases}$ thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P\right]$, *với* $\vec{u}_\Delta$ *là một vectơ chỉ phương của* Δ *và* $\vec{n}_P$ *là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng* (P).

+ Nếu $\begin{cases} d \perp \Delta \\ d \subset (P) \end{cases}$ thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P\right]$, *với* $\vec{u}_\Delta$ *là một vectơ chỉ phương của* Δ *và* $\vec{n}_P$ *là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng* (P).

+ ...

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{3}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

A. $d: \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$.　　**B.** $d: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

C. $d: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{3}$.　　**D.** $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2;3;2) \\ \vec{u}_\Delta = (-2;1;3) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (7;2;4)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1;-1;1)$ và nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (7;2;4)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

B. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}\vec{u}_d=(1;2;2)\\ \vec{n}_{(P)}=(2;1;2)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(2;2;-3)$.

Đường thẳng Δ qua $A(1;1;-2)$ và nhận $\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(2;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình chính tắc đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Phương trình chính tắc đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

B. $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

D. $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải:

Gọi I là giao điểm giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}\\ x+2y-3z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow I(-3;1;1).$$

Vì đường thẳng d nằm trong (P) cắt Δ nên $I\in d$.

Ta có: $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;2;-3)\\ \vec{u}_\Delta=(1;1;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_\Delta\right]=(1;-2;-1)$.

Đường thẳng d qua I và nhận $\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{\Delta}\right]=(1;-2;-1)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình là: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{3}$ và $\begin{cases}x=-2+t\\ y=-2-t\\ z=3+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $M(-8;4;-9)$ đồng thời vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 là

A. $\Delta:\dfrac{x+8}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+9}{-1}$

B. $\Delta:\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+9}{3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x+8}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+9}{2}$.

D. $\Delta:\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+9}{-1}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$ vuông góc với d và nằm trong mặt phẳng (P) là

A. $\Delta:\begin{cases}x=5t\\ y=-1+t\\ z=4+5t\end{cases}$.

B. $\Delta:\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=4-2t\end{cases}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=-1\\ z=4+t\end{cases}$.

D. $\Delta:\begin{cases}x=-t\\ y=-1+2t\\ z=4+t\end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình lần lượt là: $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$, $(P):2x+y+z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d' qua $A(-3;4;1)$ nằm trên (P) và vuông góc với đường thẳng d là

A. $d':\begin{cases}x=-3+2t\\ y=4-t\\ z=1+t\end{cases}$.

B. $d':\begin{cases}x=-3+2t\\ y=4+t\\ z=1+t\end{cases}$.

C. $d':\begin{cases}x=-3+2t\\y=4+t\\z=1-4t\end{cases}$. D. $d':\begin{cases}x=-3+t\\y=4\\z=1-2t\end{cases}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+1=0$ và điểm $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua A và vuông góc với d song song với mặt phẳng (P) là

A. $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}$. **B.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

C. $\Delta:\frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-3}$. **D.** $\Delta:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-3}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và mặt phẳng (Q) có phương trình là $x+2y+3z-16=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (Q) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng AB là

A. $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$. **B.** $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

C. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$. **D.** $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	A	C	D	D	D

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-1;3)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;-1;2)$.

Đường thẳng Δ qua $M(-8;4;-9)$ và có 1 vectơ chỉ phương là

$\vec{u}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(1;-1;-1)$, có phương trình: $\frac{x+8}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+9}{-1}$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2. Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(-1;2;1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-2)$.

Đường thẳng Δ qua $A(0;-1;4)$ và có 1 vectơ chỉ phương là

$\vec{u}=-\frac{1}{5}\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=-\frac{1}{5}(-5;0;-5)=(1;0;1)$, có phương trình: $\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3. Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;1;1)$.

Đường thẳng d' qua $A(-3;4;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là

$\vec{u}=-\frac{1}{2}\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=-\frac{1}{2}(-2;0;4)=(1;0;-2)$, có phương trình: $\begin{cases}x=-3+t\\y=4\\z=1-2t\end{cases}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4. Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;-2)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-2)$.

Đường thẳng Δ qua $A(1;2;-3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là

$\vec{u}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-2;-2;-3)$, có phương trình: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-3}$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5. Đường thẳng $AB:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}\Rightarrow AB\cap(Q)=M(3;2;3)$.

Mặt phẳng (Q) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(1;2;3)$.

Đường thẳng d qua $M(3;2;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;-2;1)$,

có phương trình: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

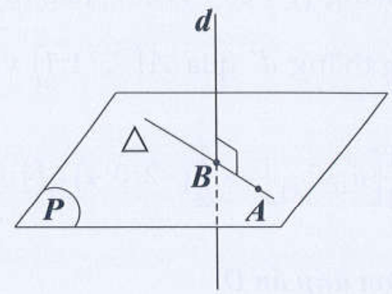
DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG DỰA VÀO TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Phương pháp

+ **Bài toán 1**: *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.*

Cách 1:

- Viết phương trình tham số của đường thẳng d (nếu chưa có).
- Tìm điểm B sao cho: $\begin{cases} \{B\} = \Delta \cap d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_\Delta = 0 \end{cases}$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.



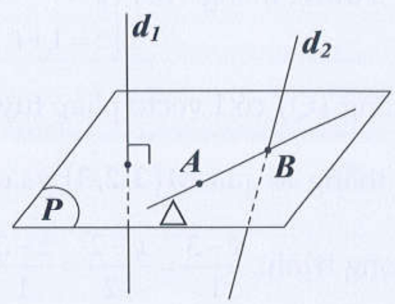
Cách 2:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d.
- Tìm $\{B\} = (P) \cap d$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

+ **Bài toán 2**: *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.*

Cách 1:

- Viết phương trình tham số của đường thẳng d_2 (nếu chưa có).
- Tìm điểm B sao cho: $\begin{cases} \{B\} = \Delta \cap d_2 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_1} = 0 \end{cases}$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.



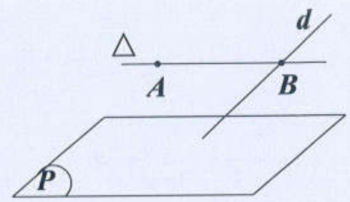
Cách 2:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d_1.
- Tìm $\{B\} = (P) \cap d_2$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

+ **Bài toán 3**: *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P).*

* Tìm điểm B sao cho: $\begin{cases}\{B\} = \Delta \cap d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)} = 0\end{cases}$.

* Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ và điểm $A(1;-1;-3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt đường thẳng d là

A. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-3}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{2}$.

Lời giải:

Gọi H là giao điểm giữa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ và đường thẳng Δ

$$H \in d \Rightarrow H(1+2t; t; -2-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t; t+1; -3t+1)$$

Vì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d = 0$

$\Leftrightarrow 2t.2 + (t+1) + (-3t+1).(-3) = 0$

$\Leftrightarrow 14t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{2}{7}; \frac{8}{7}; \frac{4}{7}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;-3)$ và nhận $\frac{7}{2}\overrightarrow{AH} = (1;4;2)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$. **B.** $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-3}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

Lời giải:

Gọi B là giao điểm giữa Δ với d_2

$\Rightarrow B \in d_2 \Rightarrow B(2;2+t;5t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;t;5t+3)$

Do $\Delta \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$

Đường thẳng Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+1=0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ đi qua $A(3;-1;2)$, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P) là

A. $\Delta: \frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\Delta: \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\Delta: \frac{x-3}{-8}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-2}{-11}$. **D.** $\Delta: \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$.

Lời giải:

Gọi B là giao điểm giữa Δ với $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases}$

$\Rightarrow B \in d \Rightarrow B(1+2t;2-t;3t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2+2t;3-t;-2+3t)$

Vì Δ song song với mặt phẳng (P) nên: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0$

$$\Leftrightarrow (-2+2t).2+(3-t).(-1)+(-2+3t).(-2)=0 \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-8;6;-11)$$

Đường thẳng Δ đi qua $A(3;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-8;6;-11)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-3}{-8}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-2}{-11}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ là vectơ nào dưới đây?

A. $\vec{u}_d = (2;-1;-1)$. **B.** $\vec{u}_d = (2;1;-1)$.

C. $\vec{u}_d = (1;-4;2)$. **D.** $\vec{u}_d = (1;-4;-2)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$. **B.** $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-2y-3z-7=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(-1;0;1)$ song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d là

A. $\Delta: \frac{x+1}{-15} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-17}$. **B.** $\Delta: \frac{x+1}{-15} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-17}$.

C. $\Delta: \frac{x+1}{15} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{17}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{-15} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-17}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;1)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình chính tắc là

A. $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$. **B.** $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

C. $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $d_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z=0$. Đường thẳng Δ qua $A(-1;-3;8)$ song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}_\Delta = (1;-1;-1)$.

B. $\vec{u}_\Delta = (2;-5;-3)$.

C. $\vec{u}_\Delta = (2;1;3)$.

D. $\vec{u}_\Delta = (4;10;-6)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox là

A. $\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3-2t \end{cases}$.

B. $\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

C. $\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+2t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-20=0$. Tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) là

A. $D(1;2;2)$.

B. $D\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

C. $D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

D. $D(2;1;0)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+3=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, cắt trục Ox và song song với mặt phẳng (P) là

A. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+2}{-2}$

B. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$

C. $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$

D. $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2}$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và các đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{2}$, $d_2: \dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+5}{-5}$. Gọi điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho MN song song với (P) và khoảng cách từ đường thẳng MN đến mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2. Tọa độ điểm M và điểm N nào dưới đây thỏa mãn?

A. $M(3;0;2)$ và $N(5;0;-5)$ **B.** $M(1;3;0)$ và $N(5;0;-5)$

C. $M(-1;-4;0)$ và $N(1;3;0)$ **D.** $M(3;0;2)$ và $N(1;3;0)$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	D	B	A	C	D
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	C	B	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi H là giao điểm giữa đường thẳng d và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$

\+ $H \in \Delta \Rightarrow H(1+2t;-1+t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(2t-1;t-2;-t)$.

\+ Vì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_\Delta$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow (2t-1).2+(t-2).1-t.(-1)=0 \Leftrightarrow 6t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \vec{u}_d = 3\overrightarrow{MH}=(1;-4;-2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2. Gọi B là giao điểm giữa đường thẳng Δ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=3+3t \\ z=2t \end{cases}$

\+ $B \in d \Rightarrow B(3+t;3+3t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t+2;3t+1;2t+1)$.

\+ Vì đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_{(\alpha)} = (1;1;-1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow (t+2).1 + (3t+1).1 + (2t+1).(-1) = 0 \Leftrightarrow 2t+2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;-2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Bình luận: *Với bài toán này, sau khi tìm ra được mọi vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-1)$, ta có thể so sánh với 4 đáp án và chọn luôn được đáp án B mà không nhất thiết phải thực hiện tiếp việc viết phương trình của Δ.*

Câu 3. Ngoài cách giải như câu 2, ta có thể giải nhanh bài toán này như sau:

\+ Dựa vào tọa độ điểm $A(-1;0;1) \in \Delta \Rightarrow$ loại B, D.

\+ Để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) thì $\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} = (3;-2;-3)$

Với đáp án A, ta có $\vec{u}_\Delta = (-15;3;-17) \Rightarrow \vec{u}_\Delta.\vec{n}_{(P)} = -15.3 + 3.(-2) - 17.(-3) = 0$

$\Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Với đáp án B, ta có $\vec{u}_\Delta = (15;3;17) \Rightarrow \vec{u}_\Delta.\vec{n}_{(P)} = 15.3 + 3.(-2) + 17.(-3) = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}_\Delta \not\perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ loại C.

Câu 4. Gọi B là giao điểm giữa đường thẳng Δ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$

\+ $B \in d_2 \Rightarrow B(t;-t;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t;-t-1;1)$.

\+ Vì đường thẳng Δ song song với đường thẳng d_1 nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{d_1} = (-2;2;1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow t.(-2) + (-t-1).2 + 1.1 = 0 \Leftrightarrow -4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4};1\right) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = 4\overrightarrow{AB} = (-1;-3;4)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5. Ngoài cách giải như câu 4, ta có thể giải nhanh bài toán này như sau:

Để đường thẳng Δ song song với đường thẳng d_1 thì $\vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_{d_1} = (2;-1;1)$.

Ta sẽ thử lần lượt với 4 đáp án:

\+ Với đáp án A, ta có: $\vec{u}_\Delta = (-1;-3;-5)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{u}_{d_1} = -1.2 - 3.(-1) - 5.1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow$ loại A.

+ Với đáp án B, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (1;3;5)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{u}_{d_1} = 1.2 + 3.(-1) + 5.1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow$ loại B.

+ Với đáp án C, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (1;3;-5)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{u}_{d_1} = 1.2 + 3.(-1) - 5.1 = -6 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow$ loại C.

+ Với đáp án D, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (1;-3;-5)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{u}_{d_1} = 1.2 - 3.(-1) - 5.1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6. Ngoài cách giải như câu 2, ta có thể giải nhanh bài toán này như sau:

Để đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì $\vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_{(P)} = (1;-1;-1)$.

Ta sẽ thử lần lượt với 4 đáp án:

+ Với đáp án A, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (1;-1;-1)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{n}_{(P)} = 1.1 - 1.(-1) - 1.(-1) = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ loại A.

+ Với đáp án B, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (2;-5;-3)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{n}_{(P)} = 2.1 - 5.(-1) - 3.(-1) = 10 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ loại B.

+ Với đáp án C, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (2;1;3)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{n}_{(P)} = 2.1 + 1.(-1) + 3.(-1) = -2 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \not\perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ loại C.

+ Với đáp án D, ta có: $\vec{u}_{\Delta} = (4;10;-6)$

$\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}.\vec{n}_{(P)} = 4.1 + 10.(-1) - 6.(-1) = 0 \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Gọi B là giao điểm giữa đường thẳng Δ và trục Ox

$\Rightarrow B \in Ox \Rightarrow B(t;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t-1;-2;-3)$.

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_d = (2;1;-2)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (t-1).2 + (-2).1 + (-3).(-2) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2;-2;-3) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = -\overrightarrow{AB} = (2;2;3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 8. Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

Vì $D \in AB \Rightarrow D(2-t;1+t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1-t;t;2t)$.

Vì $CD \,//\, (P)$ nên $\overrightarrow{CD} \perp \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\vec{n}_{(P)} = 0$

$\Leftrightarrow (1-t).1 + t.1 + 2t.1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9. Gọi M là giao điểm giữa đường thẳng d và trục Ox

$\Rightarrow M \in Ox \Rightarrow M(t;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t-1;-2;1)$.

Vì $d \,//\, (P)$ nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} = (2;-1;-1) \Leftrightarrow \vec{u}_d.\vec{n}_{(P)} = 0$

$\Leftrightarrow (t-1).2 - 2.(-1) + 1.(-1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{1}{2};-2;1\right) \Rightarrow \vec{u}_d = -2\overrightarrow{AM} = (1;4;-2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Vậy phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{-2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Bình luận: *Ta có thể giải nhanh bài toán trên bằng cách sau:*

Bốn đáp án đều giống nhau về tọa độ vectơ chỉ phương nên ta chỉ cần kiểm tra về vấn đề đường thẳng d đi qua điểm A.

Thử trực tiếp tọa độ điểm A vào bốn đáp án ta được phương trình ở đáp án B thỏa mãn $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10. Vì $M \in d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow M(1+2t;3-3t;2t)$.

Vì $N \in d_1 : \begin{cases} x = 5 + 6k \\ y = 4k \\ z = -5 - 5k \end{cases} \Rightarrow N(5+6k;4k;-5-5k)$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (6k-2t+4;4k+3t-3;-5k-2t-5)$.

\+ $MN \,//\, (P) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}_{(P)} = (1;-2;2) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{n}_{(P)} = 0$

$\Leftrightarrow (6k-2t+4).1 + (4k+3t-3).(-2) + (-5k-2t-5).2 = 0$

$\Leftrightarrow -12k - 12t = 0 \Leftrightarrow 6k + 6t = 0 \Leftrightarrow k = -t \; (1)$

\+ $MN\,//\,(P) \Rightarrow d\left(MN,(P)\right) = d\left(N,(P)\right) = \dfrac{\left|x-2y+2z-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|(5+6k)-2.4k+2.(-5-5k)-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 2 \Leftrightarrow \left|-12k-6\right| = 6$

$\Leftrightarrow \left|2k+1\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2k+1=1 \\ 2k+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=-1 \end{array}\right.$

Với $k=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow M(1;3;0); N(5;0;-5) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

VẤN ĐỀ 5 — MẶT CẦU

1. Định nghĩa

Mặt cầu là tập hợp những điểm M cách một điểm I cố định một khoảng không đổi.

+ *Điểm I cố định được gọi là tâm mặt cầu.*
+ *Khoảng cách không đổi R được gọi là bán kính của mặt cầu.*

Kí hiệu: $S(I,R)$. Khi đó: $S(I,R)=\{M \mid IM=R\}$

2. Phương trình mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a,b,c)$ và bán kính R.

Khi đó (S) có ***phương trình chính tắc*** là: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

Phương tình tổng quát của mặt cầu là:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0} \quad \left(ĐK: a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

Khi đó, mặt cầu (S) có tâm $I(a,b,c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

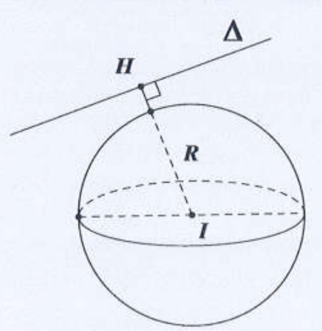
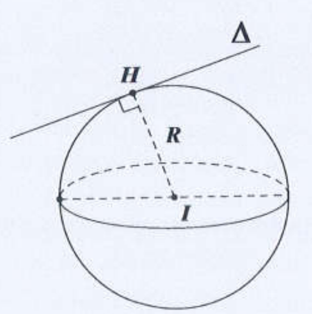
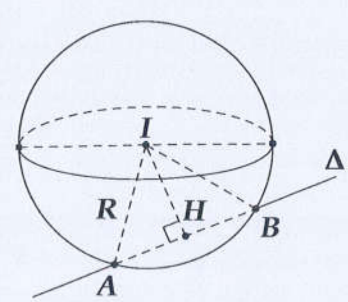
3. Vị trí tương đối giữa một điểm với một mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và điểm A.

+ Điểm A *thuộc* mặt cầu $\Leftrightarrow IA=R$.
+ Điểm A *nằm trong* mặt cầu $\Leftrightarrow IA<R$.
+ Điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $\Leftrightarrow IA>R$.

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ.

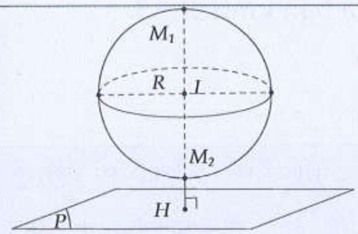
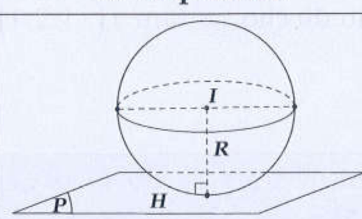
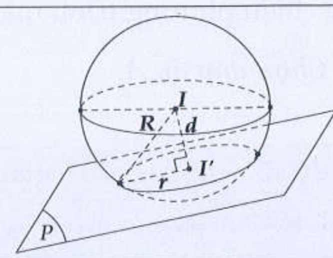
<table>
<tr><th>$d(I,\Delta)>R$</th><th>$d(I,\Delta)=R$</th><th>$d(I,\Delta)<R$</th></tr>
<tr><td>Δ không cắt mặt cầu.</td><td>Δ tiếp xúc với mặt cầu.
Δ: Tiếp tuyến của (S) và H: tiếp điểm.</td><td>Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Lưu ý: Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau: $\begin{cases} d(I,\Delta)=IH \\ R=\sqrt{IH^2+AH^2}=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d=IH=d(I,(P))$.

$d>R$	$d=R$	$d<R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

1. Phương pháp

+ Nếu phương trình mặt cầu (S) cho dưới dạng *chính tắc*:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

thì mặt cầu (S) có tâm $I(a,b,c)$ và bán kính R.

+ Nếu phương trình mặt cầu (S) cho dưới dạng *tổng quát*:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \quad \left(ĐK: a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

thì:

* *Tọa độ tâm* $I(a,b,c)$: Tính a, b, c bằng cách lấy hệ số của x, y, z chia cho -2

* *Bán kính:* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Chú ý:

Khi $d<0$ thì mọi phương trình có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ đều là phương trình mặt cầu.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 [Trích đề minh họa – 2017]: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(-1;2;1)$ và $R=3$ **B.** $I(1;-2;-1)$ và $R=3$

C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$ **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R=9$

Lời giải:

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Đối chiếu phương trình mặt cầu đã cho $\Rightarrow$ tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=3$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(1;-2;0)$ và $R=\sqrt{6}$. **B.** $I(1;-2;1)$ và $R=\sqrt{6}$.

C. $I(1;-2;1)$ và $R=2$. **D.** $I(1;-2;0)$ và $R=2$.

Lời giải:

Phương trình mặt cầu (S) cho dưới dạng *tổng quát*:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\quad\left(ĐK: a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

Khi đó : Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Đối chiếu phương trình trên ta được tâm $I(1;-2;0)$ và $d=1$.

Khi đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình là $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z=0$. Biết OA là đường kính của mặt cầu (S), (O là gốc tọa độ). Tọa độ điểm A là

A. $A(-1;3;2)$. **B.** $A(-1;-3;2)$. **C.** $A(2;-6;-4)$. **D.** $A(-2;6;4)$.

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;-2)$

Vì OA là đường kính của mặt cầu (S) nên I là trung điểm của đoạn OA

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_O}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_O}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_O}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2x_I - x_O = 2.1 - 0 = 2 \\ y_A = 2y_I - y_O = 2.(-3) - 0 = -6 \\ z_A = 2z_I - z_O = 2(-2) - 0 = -4 \end{cases} \Rightarrow A(2;-6;-4) \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0.$

B. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0.$

C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0.$

D. $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0.$

Lời giải:

Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu khi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Khi đó: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

\+ Loại đáp án A vì có $-10xy$.

\+ Loại đáp án D vì có $(y-z)^2 = y^2 - 2yz + z^2$.

\+ Xét đáp án C: $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 2z + \dfrac{9}{2} = 0$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 - \dfrac{9}{2} = -1 < 0 \Rightarrow$ Loại đáp án C.

\+ Xét đáp án B: $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{2}{3}x - 2y + \dfrac{4}{3}z - \dfrac{1}{3} = 0$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - d = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{17}{9} > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$. Bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $R=\sqrt{17}$ **B.** $R=\sqrt{88}$ **C.** $R=2$ **D.** $R=5$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm $A(0;0;0), B(1;2;3), C(2;-1;-1)$ có bao nhiêu điểm thuộc mặt cầu (S)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(-2;4;0);\ R=3\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2;0);\ R=\sqrt{7}$.

C. $I(-1;2;0);\ R=2$. **D.** $I(-1;2;-1);\ R=\sqrt{6}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+6x-2y+2=0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB. Biết điểm $A(-1;-1;0)$ thuộc mặt cầu (S). Tọa độ điểm B là

A. $B(-5;3;-2)$. **B.** $B(-11;5;0)$. **C.** $B(-11;5;-4)$. **D.** $B(-5;3;0)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1)$, $B(-1;0;3)$. Tâm I của mặt cầu (S) đường kính AB có tọa độ là

A. $I(0;-2;4)$. **B.** $I(2;-2;-2)$. **C.** $I(0;-1;2)$. **D.** $I(-2;2;2)$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	D	B	C	D	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2-(-4)}=5 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2. Thay lần lượt tọa độ các điểm A,B,C vào phương trình mặt cầu ta được:

$0^2+0^2+0^2-2.0-4.0-6.0=0$ là đúng, nên $A\in(S)$

$1^2+2^2+3^2-2.1-4.2-6.3=-14=0$ là sai, nên $B\notin(S)$

$2^2+(-1)^2+(-1)^2-2.2-4.(-1)-6.(-1)=12=0$ là sai, nên $C\notin(S)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. Ta có: $a=-1;b=2;c=0;d=1\Rightarrow I(-1;2;0)$

Khi đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2-1}=2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4. Mặt cầu có tâm $I(-3;1;0)$ là trung điểm của AB.

Tọa độ điểm B là: $\begin{cases} x_B=2x_I-x_A=2.(-3)-(-1)=-5 \\ y_B=2y_I-y_A=2.1-(-1)=3 \\ z_B=2z_I-z_A=2.0-0=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5. Tâm I của mặt cầu đường kính AB là trung điểm AB.

$\Rightarrow I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ nên $I(0;-1;2) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

DẠNG 2: LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Phương pháp

Lập phương trình mặt cầu biết (xác định trực tiếp) tâm và bán kính

Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

+ Mặt cầu (S) đi qua A thì có bán kính là $R=IA$.
+ Diện tích mặt cầu: $S=4\pi R^2$
+ Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
+ Mặt cầu có đường kính AB: Tâm I là trung điểm của AB và bán kính $R=\frac{AB}{2}$.

Lập phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng

Cách 1:

+ *Bước 1:* Gọi phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(*)$

(với $a^2+b^2+c^2-d>0$)

+ *Bước 2:* Thay tọa độ bốn điểm A, B, C, D vào phương trình $(*)$, ta được hệ 4 phương trình.

+ *Bước 3:* Giải hệ trên tìm được a,b,c,d (chú ý đối chiếu điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$).

Thay a, b, c, d vào $(*)$ ta được phương trình mặt cầu cần lập.

Cách 2:

+ *Bước 1:* Gọi $I(a,b,c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Suy ra: $IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IB^2=IC^2 \\ IC^2=ID^2 \end{cases}$

+ *Bước 2:* Giải hệ trên để tìm a,b,c.

+ *Bước 3:* Tìm bán kính $R=IA$.

Từ đó, viết phương trình mặt cầu cần tìm có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Cách 3:

+ *Bước 1:* Viết phương trình 3 mặt phẳng trung trực của ba đoạn thẳng không cùng thuộc một mặt phẳng.

+ *Bước 2:* Giao của ba mặt phẳng trung trực trên chính là tâm I của mặt cầu (Tìm tọa độ tâm I bằng cách giải hệ gồm 3 phương trình ba mặt phẳng trung trực).

+ *Bước 3:* Bán kính $R=IA$. Từ đó, viết phương trình mặt cầu cần tìm.

Lập phương trình mặt cầu đi qua 2 điểm A, B và có tâm I thuộc đường thẳng (d)

Cách 1:

+ *Bước 1:* Viết phương trình của (d) dưới dạng phương trình tham số.

Vì $I\in(d) \Rightarrow$ tọa độ của I theo tham số t.

+ *Bước 2:* Mặt cầu đi qua hai điểm $A,B \Leftrightarrow IA=IB=R \Leftrightarrow IA^2=IB^2$.

+ *Bước 3:* Giải hệ phương trình (ẩn t) trên tìm t. Từ đó, tìm được tọa độ của I và tính được R. Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm.

Cách 2:

+ *Bước 1:* Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.
+ *Bước 2:* Tâm mặt cầu là giao của mặt phẳng trung trực trên và đường thẳng (d) (giải hệ tìm tọa độ tâm I).
+ *Bước 3:* Bán kính $R = IA$. Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm.

....

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba điểm $A(2;1;-3)$, $B(4;3;-2)$, $C(6;-4;-1)$. Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **D.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

Lời giải:

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $G(4;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AG}=(2;-1;1) \Rightarrow AG=\sqrt{6}$.

Vì do mặt cầu tâm A đi qua G nên bán kính $R=AG=\sqrt{6}$.

Phương trình mặt cầu tâm $A(2;1;-3)$, $R=\sqrt{6}$ là: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;0;-3)$, $B(2;2;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2+y^2+z^2+2y-4z-1=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2y+4z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2y-4z-1=0$.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu.

Tọa độ tâm $I(0;1;-2)$, bán kính $R=IA=\sqrt{6}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4y-1=0 \Rightarrow \textit{Chọn đáp án C.}$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$, biết thể tích khối cầu bằng 972π. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81.$ **B.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9.$

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=81.$ **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9.$

Lời giải:

Thể tích của khối cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=972\pi \Leftrightarrow R=9.$

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;4;2)$ và $R=9$ là:

$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A,B và có tâm I thuộc đường thẳng d.

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5.$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=17.$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17.$ **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5.$

Lời giải:

Phương trình tham số đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$

Ta có: $I\in d \Rightarrow I(1+2t;t;-2t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}=(-1+2t;t-1;-2t) \\ \overrightarrow{BI}=(3+2t;t-3;-2-2t) \end{cases}.$

Vì mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B nên: $R=IA=IB \Leftrightarrow IA^2=IB^2$

$\Leftrightarrow (-1+2t)^2+(t-1)^2+(-2t)^2=(3+2t)^2+(t-3)^2+(-2-2t)^2$

$\Leftrightarrow 20t+20=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow I(-1;-1;2) \Rightarrow R=IA=\sqrt{17}$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;-1)$, $B(2;1;-1)$, $C(3;0;1)$. Mặt cầu đi qua 4 điểm O,A,B,C (O là gốc tọa độ) có bán kính bằng

A. $R=\sqrt{13}$. **B.** $R=2\sqrt{13}$. **C.** $R=\sqrt{14}$. **D.** $R=2\sqrt{14}$.

Lời giải:

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì 4 điểm O,A,B,C thuộc mặt cầu (S) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} O\in(S) \\ A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ 2a-4b+2c+6=0 \\ -4a-2b+2c+6=0 \\ -6a-2c+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z=0$.

Suy ra, mặt cầu có tâm $I(1;3;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;-1;2)$ và đi qua điểm $A(2;0;1)$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$. **D.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4,-3,7)$, $B(2,1,3)$ Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=35$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=35$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0), B(-3;4;2)$. Điểm I trên trục Ox. Phương trình mặt cầu tâm I, đi qua hai điểm A, B là

A. $(x+3)^2+y^2+z^2=20$. **B.** $(x+3)^2+y^2+z^2=\sqrt{20}$.

C. $x^2+(y-6)^2+z^2=17$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;5)$, $B(2;1;1)$ và $C(0;0;3)$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng 3 là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3.$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9.$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9.$ **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=3.$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;-2)$, biết diện tích mặt cầu bằng 100π. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+4=0.$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-86=0.$

C. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+9=0.$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-11=0.$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;0), B(-1;1;4)$ và $C(3;-2;1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A,B,C và độ dài $OI=\sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $R=2.$ **B.** $R=3.$ **C.** $R=4.$ **D.** $R=5.$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	B	A	B	D	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1.

Ta có: $R^2=IA^2=(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$

Phương trình mặt cầu: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2.

Tâm mặt cầu là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;-1;5)$, $R^2=IA^2=1^2+(-2)^2+2^2=9$

Phương trình mặt cầu: $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3.

Điểm I thuộc trục Ox nên $I(m;0;0)$.

A,B thuộc mặt cầu tâm I nên ta có $IA^2=IB^2=R^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 + 0^2 = (m+3)^2 + 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 5 = m^2 + 6m + 29 \Leftrightarrow m = -3$

$R^2 = 20$. Phương trình mặt cầu: $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 20 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4.

Trọng tâm tam giác ABC là $G(1;1;3)$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

Diện tích mặt cầu tính theo công thức: $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = 25$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25$

$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6.

Gọi $I(x;y;z)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 18$

$\Leftrightarrow -2x - 2y + 8z - 14 = 0 \Leftrightarrow -x - y + 4z - 7 = 0$ là phương trình mặt phẳng trung trực của AB.

$IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 14$

$\Leftrightarrow 6x - 8y + 2z - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + z - 5 = 0$ là phương trình mặt phẳng trung trực của AC.

Lập phương trình giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng.

$\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right] = (15;13;7)$ và điểm $M(1;0;2)$ thuộc cả 2 mặt phẳng nên $M \in \Delta$

Vậy $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 15t \\ y = \quad 13t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$. Nên $\Rightarrow I(1+15t;13t;2+7t)$ với $15t \in \mathbb{Z}$.

$OI^2 = 5 \Leftrightarrow (1+15t)^2 + (13t)^2 + (2+7t)^2 = 5 \Leftrightarrow 443t^2 + 58t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-58}{443}(\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy $I(1;0;2) \Rightarrow R = IA = 3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

VẤN ĐỀ 6 — GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Phương pháp

Góc gữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng:

$$(P): Ax+By+Cz+D=0 \text{ và } (P'): A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Khi đó: $\boxed{\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}=\dfrac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}}$

$$\left(0^0\le\varphi\le 90^0\right)$$

Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng:

+ Δ_1 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=\left(x_1;y_1;z_1\right)$.

+ Δ_2 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=\left(x_2;y_2;z_2\right)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Khi đó: $\boxed{\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\dfrac{\left|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}$ $\left(0\le\varphi\le 90^0\right)$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P), biết:

+ Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(x;y;z)$.

+ Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và (P).

Khi đó: $\boxed{\sin\varphi=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|Ax+By+Cz\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\left(0\le\varphi\le 90^0\right)$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho điểm $H(2,-1,-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P). Mặt phẳng $(Q): x-y+1=0$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. $\varphi=30^0$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=135^0$.

Lời giải:

Vì OH vuông góc mặt phẳng (P) do đó mặt phẳng (P) nhận vectơ $\overrightarrow{OH}=(2;-1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-1;0)$.

Khi đó góc φ giữa 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ thỏa mãn:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{\left|2.1+(-1).(-1)+(-2).0\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{4}$ và đường thẳng $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-19}{-4}=\dfrac{z}{1}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{58}}{29}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{58}}{29}$.

Lời giải:

Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}=(2;3;4)$.

Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2}=(1;-4;1)$.

Khi đó góc α giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 thỏa mãn:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{u}_{d_1}.\vec{u}_{d_2}\right|}{\left|\vec{u}_{d_1}\right|\left|\vec{u}_{d_2}\right|}=\frac{\left|2.1+3.(-4)+4.1\right|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}.\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{58}}{29}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=5-t\\y=3\\z=2+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. $\varphi=30^0$ **B.** $\varphi=-30^0$ **C.** $\varphi=60^0$ **D.** $\varphi=-60^0$

Lời giải:

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(-1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(0;1;-1)$.

Khi đó góc φ giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) thỏa mãn:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{\left|(-1).0+0.1+1.(-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30^0.$$

⇒ ***Chọn đáp án A.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+z+3=0$ và mặt phẳng $(\beta):x+y+2z-1=0$. Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. $\varphi=30^0$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=120^0$. **D.** $\varphi=150^0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha):-x+2y-3z=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α). Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 180^0.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+4}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-2=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α). Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 180^0.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho đường thẳng $d:\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và đường thẳng $d':\frac{x-5}{-2}=\frac{y+7}{-4}=\frac{z-3}{-2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng 2 đường thẳng d,d'. Khi đó, góc φ bằng bao nhiêu?

A. $\varphi=30^0$. **B.** $\varphi=-30^0$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=-60^0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	C	A	C	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\cos\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\left(n_{(\alpha)}\right),\left(n_{(\beta)}\right)}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(\alpha)}}.\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right|} = \dfrac{\left|2.1+(-1).1+1.2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 2.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}.\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right|} = \dfrac{\left|1.(-1)+(-2).2+3.(-3)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}.\sqrt{(-1)^2+2^2+(-3)^2}} = 1 \Rightarrow \varphi = 90^0$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 3.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}.\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right|} = \dfrac{\left|1.1+2.1+(-3).1\right|}{\sqrt{1^2+(2)^2+(-3)^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0^0 \Rightarrow$ *Chọn đáp án A.*

Câu 4.

Ta có $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}.\overrightarrow{u_{(d')}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}\right|.\left|\overrightarrow{u_{(d')}}\right|} = \dfrac{\left|2.1+1.2+(-1).1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0 \Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 5.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}.\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|} = \dfrac{\left|1.2+2.1+(-1).1\right|}{\sqrt{1^2+(2)^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ *Chọn đáp án A.*

VẤN ĐỀ 7 — BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. Phương pháp

Bài toán: Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ thỏa mãn điều kiện $(*)$ cho trước.

Giải:

+ *Bước 1:* Viết phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. (nếu chưa có).

+ *Bước 2:* Vì $M \in \Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

+ *Bước 3:* Sử dụng điều kiện $(*)$ ta có được phương trình $f(t) = 0 \Rightarrow t \Rightarrow M$.

Ghi nhớ:

$$M \in \Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \xrightarrow{\text{Gọi}} M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct) \xrightarrow{\text{đk } (*)} f(t) = 0 \to t \to M$$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-1;-2)$ và $B(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Điểm M thuộc đường thẳng AB thỏa mãn khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 là điểm nào dưới đây?

A. $M(-11;-23;-35)$.

B. $M(11;21;30)$.

C. $M(1;1;1)$.

D. $M(-1;-3;-5)$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua A, B nhận $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

Vì $M \in d \Rightarrow M(t; -1 + 2t; -2 + 3t)$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 nên ta có:

$$d(M,(P))=2 \Leftrightarrow \frac{|t+2(-1+2t)-2(-2+3t)+3|}{3}=2$$

$$\frac{|5-t|}{3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-t=6\\5-t=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=11\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(-1;-3;-5)\\M(11;21;31)\end{array}\right. \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1;7;3)$. Điểm M có hoành độ nguyên thuộc Δ sao cho $AM=2\sqrt{30}$. Tọa độ điểm M thỏa mãn là

A. $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right)$. **B.** $M(9;1;-3)$.

C. $M(3;-3;-1)$. **D.** $M(6;-1;2)$.

Lời giải:

Δ đi qua $M(6;-1;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(-3;-2;1)$.

$\Rightarrow$ Phương trình tham số Δ là: $\begin{cases}x=6-3t\\y=-1-2t\\z=-2+t\end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Vì $M\in\Delta \Rightarrow M(6-3t;-1-2t;-2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(5-3t;-8-2t;-5+t)$.

Ta có: $AM=2\sqrt{30} \Leftrightarrow \sqrt{(5-3t)^2+(-8-2t)^2+(-5+t)^2}=2\sqrt{30}$

$$\Leftrightarrow (5-3t)^2+(-8-2t)^2+(-5+t)^2=120 \Leftrightarrow 14t^2-8t-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\frac{3}{7}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(3;-3;-1)\\M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right)\end{array}\right.$$

Vì M có tọa độ nguyên nên $M(3;-3;-1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;1)$, $B(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-3=0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua A,B với mặt phẳng (P) là

A. $M(0;-5;-1)$. **B.** $M(2;1;3)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2};\frac{11}{2};5\right)$. **D.** $M(3;4;2)$.

Lời giải:

AB đi qua $A(1;-2;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d đi qua A,B là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \\ z=1+2t \end{cases} \quad (t\in R)$

Gọi M là giao điểm giữa d và mặt phẳng (P).

$\Rightarrow M\in d \Rightarrow M(1+t;-2+3t;1+2t)$.

Khi đó $M\in(P)\Rightarrow(1+t)-(-2+3t)+2(1+2t)-3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(0;-5;-1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$, $B(2;-1;0)$. Điểm M thuộc trục Ox có tọa độ nguyên sao cho khoảng cách từ M đến A bằng $\dfrac{9}{4}$ lần khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Biết mặt phẳng (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB. Tọa độ điểm M là

A. $M(-1;0;0)$. **B.** $M\left(\dfrac{129}{7};0;0\right)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M(2;0;0)$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $x-2y-2z+5=0$.

Gọi $M\in Ox \Rightarrow M(m;0;0)$, $(m\in\mathbb{Z})$ là điểm cần tìm. Khi đó: $MA=\dfrac{9}{4}d(M,(P))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-m)^2+1^2+2^2}=\frac{9}{4}.\frac{|m+5|}{3}$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2+5=\frac{9}{16}(m+5)^2$$

$$\Leftrightarrow 7m^2-122m-129=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{129}{7}\ (loại) \end{array}\right.$$

Vậy $M(-1;0;0)$ là điểm cần tìm $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Điểm M có tọa độ nguyên thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M là

A. $M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $M(1;-1;0)$. **C.** $M(3;-2;1)$. **D.** $M(-1;0;-1)$.

Lời giải:

Vì $M \in d \Rightarrow M(1+2t;-1-t;t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-2t;t;2-t) \\ \overrightarrow{MB} = (1-2t;t;-t) \end{cases}$.

Tam giác AMB vuông tại $M \Rightarrow MA \perp MB \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow (-2t)(1-2t) + t.t + (2-t)(-t) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;-1;0) \\ M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right.$$

Vì M có tọa độ nguyên $\Rightarrow M(1;-1;0) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-5=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{2}$. Điểm A thuộc d sao khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng 6. Tọa độ điểm A thỏa mãn là điểm nào dưới đây?

A. $A(11;9;9)$. **B.** $A(-1;-3;-5)$. **C.** $A(-2;-2;-5)$. **D.** $A(4;4;7)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. Điểm M nằm trên đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 3. Điểm M nào dưới đây thỏa mãn yêu cầu đề bài?

A. $M(4;3;2)$. **B.** $M(-2;3;0)$. **C.** $M(10;5;-2)$. **D.** $M(-8;5;-2)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{3}$. Điểm B có tọa độ nguyên thuộc d sao cho $AB = \sqrt{27}$ là

A. $B(5;-2;-12)$. **B.** $B\left(-\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};-\dfrac{12}{7}\right)$.

C. $B(-7;4;6)$. **D.** $B\left(-\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};-\dfrac{30}{7}\right)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. Điểm N thuộc d sao cho N cách M một khoảng bằng 5 là điểm nào dưới đây?

A. $N\left(-\dfrac{10}{7};-\dfrac{23}{7};\dfrac{8}{7}\right)$. **B.** $N(2;6;8)$.

C. $N(-4;-11;-4)$. **D.** $N\left(-\dfrac{4}{7};-\dfrac{5}{7};\dfrac{20}{7}\right)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;2), B(0;0;7)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Điểm C nào dưới đây thỏa mãn yêu cầu đề bài?

A. $C(5;4;0)$. **B.** $C(9;0;-2)$ **C.** $C(-3;12;4)$ **D.** $C(1;8;0)$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi M là giao điểm giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Tọa độ điểm M là

A. $M(1;1;1)$. **B.** $M(3;-3;-1)$. **C.** $M\left(\dfrac{3}{2};-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;5;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d. Gọi H là giao điểm giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tọa độ điểm H là

A. $H\left(-\dfrac{1}{7};-\dfrac{4}{7};-\dfrac{2}{7}\right)$. **B.** $H(-1;-1;1)$.

C. $H(3;1;-5)$. **D.** $H\left(\dfrac{15}{7};\dfrac{4}{7};-\dfrac{26}{7}\right)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1), B(-3;0;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$. Tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác MAB vuông tại A là

A. $M(1;4;4)$. **B.** $M(-1;-1;-1)$. **C.** $M(3;-2;4)$. **D.** $M(1;-7;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(4;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. Điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC vuông tại C là điểm nào sau đây?

A. $C(3;-4;3)$. **B.** $C(2;-3;1)$. **C.** $C(2;-2;-1)$. **D.** $C(-2;-1;-2)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-5;2)$, $B(3;-1;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{2}$. Điểm M trên d sao cho giá trị $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị P bằng bao nhiêu?

A. $P=29$. **B.** $P=49$. **C.** $P=50$. **D.** $P=21$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	D	B	C	D	B
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	C	B	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $A\in d\Rightarrow A(2+t;2+t;3+2t)$.

Khoảng cách từ điểm A đến (P) bằng 6 nên ta có:

$$d(A;(P))=6\Leftrightarrow\frac{|6t+6|}{3}=6\Leftrightarrow|t+1|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(-2;-2;-5)\\A(4;4;7)\end{array}\right.\Rightarrow \textit{Chọn đáp án D}.$$

Câu 2. $M\in d\Rightarrow M(1+3t;2-t;1+t)$.

Khoảng cách từ M đến (P) bằng 3 nên:

$$d(M;(P))=3\Leftrightarrow\frac{|2(1+3t)-2(2-t)+(1+t)+1|}{3}=3\Leftrightarrow|3t|=3\Leftrightarrow t=\pm1$$

$\Rightarrow M(4;1;2)$ hoặc $M(-2;3;0)$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. $B\in d\Rightarrow B(-1-2t;1+t;-3+3t)$.

Độ dài $AB=\sqrt{27}\Leftrightarrow AB^2=27\Leftrightarrow(3-2t)^2+t^2+(-6+3t)^2=27\Leftrightarrow 7t^2-24t+9=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{3}{7} \end{array}\right. => B(-7;4;6); B\left(-\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};-\dfrac{12}{7}\right)$ vì điểm B có tọa độ nguyên $\Rightarrow B(-7;4;6)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4. Vì $N \in d$ nên $N(-1+t;-2+3t;2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-3+t;-5+3t;-3+2t)$.

N cách M một khoảng bằng 5 hay $MN = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2+(3t-5)^2+(2t-3)^2} = 5$.

$\Leftrightarrow 14t^2 - 48t + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{3}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N(2;7;8) \\ N\left(-\dfrac{4}{7};-\dfrac{5}{7};\dfrac{20}{7}\right) \end{array}\right. \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5. $C \in d \Rightarrow C(3-2t;6+2t;1+t)$.

Tam giác ABC cân tại A nên:

$AB = AC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 18t - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} C(1;8;2) \\ C(9;0;-2) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6. Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = -t \end{cases}$.

Gọi M là giao điểm của *(P)* và *d*. $M \in d$ nên $M(2+t;-1-2t;-t)$.

Mặt khác M thuộc *(P)* nên:

$(2+t)+(-1-2t)+(-t)-3=0 \Leftrightarrow -2t-2=0 \Leftrightarrow t=-1 => M(1;1;1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7. Mặt phẳng *(P)* vuông góc *d* nên nhận $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng *(P)* là: $2x + y - 3z - 22 = 0$.

Gọi H là giao điểm giữa đường thẳng d với mặt phẳng *(P)*:

$H \in d => H(1+2t;t;-2-3t)$.

Mặt khác $H \in (P) => 2(1+2t)+t-3(-2-3t)-22=0 \Leftrightarrow t=1 => H(3;1;-5)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 8. $M \in d => M(2+t;1-3t;2+2t)$.

Tam giác MAB vuông tại A nên:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -5t + (2-3t) + 2(1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 => M(3;-2;4) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9. $C \in d => C(2+t;-3-t;1+2t)$.

$\overrightarrow{AC} = (2+t;-2-t;-1+2t); \overrightarrow{BC} = (-2+t;-1-t;-2+2t)$.

Tam giác ABC vuông tại C nên ta có:

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (2+t)(-2+t)+(-2-t)(-1-t)+(-1+2t)(-2+2t) = 0$.

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} C(2;-3;1) \\ C\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{7}{2};2\right) \end{array}\right. \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10.

$M \in d \Rightarrow M(-3+4t;2+t;-3+2t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-4+4t;7+t;-5+2t); \overrightarrow{BM} = (-6+4t;3+t;-1+2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (-4+4t)(-6+4t)+(7+t)(3+t)+(-5+2t)(-1+2t) = 21t^2 - 42t + 50$.

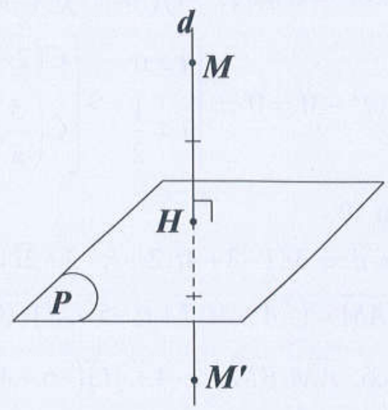
$$21(t^2 - 2t + 1) + 29 = 21(t-1)^2 + 29 \geq 29.$$

Vậy $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 29 khi $t = 1 \Rightarrow M(1;3;-1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

VẤN ĐỀ 8 — BÀI TOÁN TÌM TỌA ĐỘ HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Bài toán: Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P).



+ *Bước 1:* Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P).

+ *Bước 2:* Vì H là hình chiếu vuông góc của M trên (P) nên $H = d \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ của H là nghiệm của hệ gồm phương trình của d và phương trình của (P).

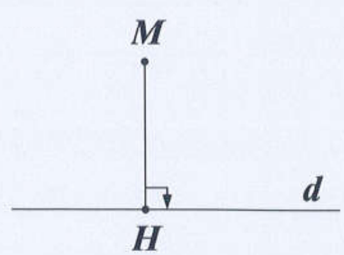
Ứng dụng: Tìm điểm đối xứng với M qua (P).

+ *Bước 1:* Tìm điểm H là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

+ *Bước 2:* Vì M' là điểm đối xứng của M qua (P) nên H là trung điểm của

$$MM' \Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \\ z_H = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases} \Rightarrow M'(\ldots;\ldots;\ldots).$$

Bài toán: Tìm hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng d



+ *Bước 1:* Lập phương trình tham số của đường thẳng d (nếu chưa có). Giả sử:
$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

+ *Bước 2:* Vì H là hình chiếu của M lên đường thẳng d nên

$H \in d \Rightarrow H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

+ *Bước 3:* Vì $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H.$

Ghi nhớ:

Ta có: $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$. Khi đó:

$$\xrightarrow{H\in d} H\left(x_0+at;y_o+bt;z_0+ct\right)\xrightarrow[\Rightarrow \overrightarrow{AH}\perp\vec{u}_d]{AH\perp d}\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0\to f\left(t\right)=0\to t\to H$$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(1;2;3\right)$ lên mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-3=0$. Tọa độ điểm H là

A. $H\left(2;3;4\right)$. **B.** $H\left(1;2;3\right)$. **C.** $H\left(3;4;5\right)$. **D.** $H\left(0;1;2\right)$.

Lời giải:

Mặt phẳng $\left(P\right)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=\left(1;1;1\right)$.

Đường thẳng AH vuông góc $\left(P\right)$ nên nhận $\vec{n}_{(P)}=\left(1;1;1\right)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Đường thẳng AH đi qua A có phương trình tham số là: $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $H\in d\Rightarrow H\left(t+1;t+2;t+3\right)$ mặt khác vì $H\in\left(P\right)$ nên

$$\left(t+1\right)+\left(t+2\right)+\left(t+3\right)-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H\left(0;1;2\right)\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):2x-2y-z-4=0$ và điểm $A\left(1;2;3\right)$. Gọi điểm A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng $\left(P\right)$. Tọa độ điểm A' là

A. $A'\left(5;-2;1\right)$. **B.** $A'\left(-3;6;5\right)$. **C.** $A'\left(1;2;3\right)$. **D.** $A'\left(3;-6;-5\right)$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng $\left(P\right)$. Khi đó H là trung điểm AA'.

Mặt phẳng $\left(P\right)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=\left(2;-2;-1\right)$.

Đường thẳng AH vuông góc $\left(P\right)$ nhận $\vec{n}_{(P)}=\left(2;-2;-1\right)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Đường thẳng AH đi qua A có phương trình tham số là: $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Ta có $H\in d \Rightarrow H(1+2t;2-2t;3-t)$ mặt khác vì $H\in(P)$ nên

$$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;0;2)$$

$\Rightarrow$ Tọa độ $A'(5;-2;1) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;1;6)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Gọi điểm H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Tọa độ điểm H là

A. $H(3;-1;4)$. **B.** $H(-5;7;0)$.

C. $H(-1;3;2)$. **D.** $H(-13;15;-4)$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d.

Vì $H\in d \Rightarrow H(-5+2t;7-2t;t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-9+2t;6-2t;-6+t)$

Vì $AH\perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (-9+2t).2+(6-2t).(-2)+(-6+t)=0 \Leftrightarrow t=4$.

$\Rightarrow H(3;-1;4) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$. Tọa độ điểm A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d là

A. $A'(5;-2;1)$. **B.** $A'(-3;6;5)$. **C.** $A'(1;2;3)$. **D.** $A'(4;-3;5)$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Khi đó H là trung điểm AA'.

Vì $H\in d \Rightarrow H(1+2t;t;2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-1+2t;-5+t;-1+2t)$.

Vì $AH\perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-5)+2(2t-1)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;1;4)$.

$\Rightarrow A'(4;-3;5) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;c)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $N(a;0;0)$ là hình chiếu của M trên trục Ox.

B. $P(0;b;c)$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng Oyz.

C. $Q(-a;b;-c)$ là điểm đối xứng của M qua Oy.

D. $I(-a;0;-c)$ là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng Oxy.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;0)$ và phương trình mặt phẳng $(P): 2x+3y-z-7=0$. Tọa độ điểm A' là điểm đối xứng của A qua (P) là

A. $A'(7;11;3)$. **B.** $A'(1;2;1)$. **C.** $A'(-1;-1;2)$. **D.** $A'(5;3;-1)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và điểm $A(4;1;3)$. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) có tọa độ $A'(a;b;c)$, $(a;b;c \in \mathbb{Z})$. Giá trị của b là

A. $b=0$. **B.** $b=1$. **C.** $b=2$. **D.** $b=-1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-6;0)$, $C(0;0;6)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-4=0$. Gọi điểm G' là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G tam giác ABC trên mặt phẳng (α), khi đó tọa độ điểm G' là

A. $G'(2;-1;3)$. **B.** $G'(0;-3;1)$. **C.** $G'(3;0;4)$. **D.** $G'(1;-2;2)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-4;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+5z-14=0$. Tọa độ điểm $A'(3;b;c)$, $(a;b;c \in \mathbb{Z})$ đối xứng với A qua mặt phẳng (P). Tổng giá trị $b+c$ là

A. $b+c=6$. **B.** $b+c=8$. **C.** $b+c=7$. **D.** $b+c=9$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình là $(P): x+y+2z-5=0$. Tọa độ điểm H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) là

A. $H\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $H\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{13}{3}\right)$. **C.** $H\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$. **D.** $H\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2};6\right)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Điểm H thuộc đường thẳng d sao cho độ dài MH ngắn nhất, khi đó tọa độ điểm H là

A. $H(0;1;-1)$. **B.** $H(2;3;3)$. **C.** $H(3;4;5)$. **D.** $H(-1;0;-3)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$ và phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Tọa độ điểm M' là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d là

A. $M'(1;0;2)$. **B.** $M'(0;0;3)$.

C. $M'(2;4;5)$. **D.** $M'(-6;-8;-9)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-3;2)$, và đường thẳng $(d):\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d. Tọa độ điểm H là

A. $H(5;4;-1)$. **B.** $H(1;0;-1)$. **C.** $H(-5;-4;1)$. **D.** $H(-2;-2;0)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-6)$ và đường thẳng d có phương trình: $d:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=-3+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Điểm N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $N(0;2;-4)$ **B.** $N(-1;2;-2)$ **C.** $N(1;-2;2)$ **D.** $N(-1;0;2)$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	D	C	A	A	A
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	B	B	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xét đáp án D: H là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy có tọa độ là $H(a;b;0)$.

⇨ Tọa độ điểm đối xứng $I(a;b;-c) \Rightarrow$ Đáp án D sai $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

d đi qua $A(3;5;0)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;3;-1)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=5+3t \\ z=-t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu A lên mặt phẳng (P). Khi đó H là giao điểm giữa d với (P).

$H \in d \Rightarrow H(3+2t;5+3t;-t)$.

Mặt khác H thuộc mặt phẳng (P)

$\Rightarrow 2(3+2t)+3(5+3t)-(-t)-7=0 \Leftrightarrow 14t+14=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;2;1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A lên (P) khi đó H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(-1;-1;2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C***

Câu 3. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Đường thẳng d vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=4+t \\ y=1+t \\ z=3-t \end{cases}$

Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow H=d\cap(P)$.

$A'\in d \Rightarrow A'(4+t;1+t;3-t)$.

$A'\in(P) \Rightarrow (4+t)+(1+t)-(3-t)+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow A'(3;0;4) \Rightarrow b=0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G(1;-2;2)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua G và vuông góc với (P).

Đường thẳng d vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=2+t \end{cases}$

Gọi G' là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P) \Rightarrow G'=d\cap(P)$.

$G'\in d\Rightarrow G'(1+t;-2+t;2+t)$.

$G'\in(P)\Rightarrow(1+t)+(-2+t)+(2+t)-4=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow G'(2;-1;3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 5. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng *(P)*. Khi đó H là giao điểm giữa AH và *(P)*.

Đường thẳng AH đi qua A và vuông góc với *(P)* nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;5)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình tham số đường thẳng AH là: $\begin{cases}x=1+t\\y=-4+t\\z=-2+5t\end{cases}$

$H\in d\Rightarrow H(1+t;-4+t;-2+5t)$.

$H\in(P)\Rightarrow t=1\Rightarrow H(2;-3;3)$.

Gọi A' đối xứng với A qua *(P)* $\Rightarrow$ H là trung điểm của AA'.

$\Rightarrow A'(3;-2;8)\Rightarrow b+c=-2+8=6\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng *(P)*.

Phương trình đường thẳng AH đi qua $A(1;2;3)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;2)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng AH là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+2t\end{cases}$

$H\in d\Rightarrow H(1+t;2+t;3+2t)$.

$H\in(P)\Rightarrow(1+t)+(2+t)+2(3+2t)-5=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 7. Độ dài MH ngắn nhất $\Rightarrow$ H là hình chiếu của M lên đường thẳng d.

$H\in d\Rightarrow H(1+t;2+t;1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(-1+t;1+t;-3+2t)$.

Vì $MH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow(-1+t)+(1+t)+(-3+2t).2=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(2;3;3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 8. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng d.

$H\in d\Rightarrow H(1+t;2t;2+t)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(-1+t;2t;1+2t)$.

Vì $MH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow(-1+t)+2t.2+(1+2t)=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow H(1;0;2)$.

M' là điểm đối xứng của M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(0;0;3)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d

$H \in d \Rightarrow H(-2+3t;-2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-6+3t;1+2t;-2-t)$.

Vì $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (-6+3t).3+(1+2t).2+(-2-t).(-1)=0$.

$\Leftrightarrow 14t-14=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(1;0;-1)$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng d.

$H \in d \Rightarrow H(2+2t;1-t;-3+t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (1+2t;-1-t;3+t)$.

Vì $MH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (1+2t).2+(-1-t).(-1)+(3+t)=0$.

$\Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;2;-4)$.

N là điểm đối xứng của M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(-1;2;-2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B***

VẤN ĐỀ 9 — BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG, MẶT CẦU

DẠNG 1: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG, GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(P'): A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Khi đó:

+ (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.

+ $(P) // (P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$.

+ $(P)\equiv(P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$.

+ $(P)\perp(P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(P')}\Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(P')}=0\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$.

Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng: Δ_1 đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$.

Δ_2 đi qua N và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

+ $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=[\vec{u}_1,\overrightarrow{MN}]=\vec{0}$.

+ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\\ [\vec{u}_1,\overrightarrow{MN}]\neq\vec{0}\end{cases}$.

+ Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$.

+ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\neq 0$.

Chú ý:

+ Khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}=0$ thì Δ_1 và Δ_2 đồng phẳng.

+ Do các công thức trên phức tạp và khó nhớ nên khi vận dụng trong bài tập ta nên sử dụng phương pháp sau: Xét hệ phương trình gồm 2 phương trình của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

* Hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2. Khi đó, nghiệm của hệ chính là tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.
* Hệ có vô số nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$.
* Hệ vô nghiệm:

  Nếu $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương thì $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

  Nếu $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

Cho: Đường thẳng Δ đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) ta thực hiện một trong các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình: Gồm phương trình của Δ và (α)

+ Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì Δ cắt (α). Nghiệm duy nhất này chính là tọa độ giao điểm của Δ và (α).
+ Nếu hệ vô nghiệm thì Δ song song với (α).
+ Nếu hệ có vô số nghiệm thì Δ nằm trong mặt phẳng (α).

Cách 2:

+ Nếu $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ thì Δ cắt (α).
+ Nếu $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$ thì Δ song song với (α).
+ Nếu $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$ thì Δ nằm trong mặt phẳng (α).

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp giá trị $(a;b)$ để hai mặt phẳng $(P): 2x + ay + 3z - 5 = 0$, $(Q): bx - 6y - 6z - 2 = 0$ song song với nhau là

A. $(a;b) = (3,-4)$.　　**B.** $(a;b) = (-4,3)$.

C. $(a;b) = (4;-3)$.　　**D.** $(a;b) = (2,-6)$.

Lời giải:

Hai mặt phẳng $(P) \,//\, (Q)$ song song

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b}=\frac{a}{-6}=\frac{3}{-6}\neq\frac{-5}{-2}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{b}=\frac{3}{-6}\\ \frac{a}{-6}=\frac{3}{-6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\ a=3\end{cases}\Rightarrow \textit{Chọn đáp án A.}$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$, $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+m}{3}$. Khi đó, giá trị của m bằng bao nhiêu để d_1 cắt d_2?

A. $m=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{7}{4}$. **C.** $m=\frac{1}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Lời giải:

Phương trình tham số: $d_1:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-1+3t\\ z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d_2:\begin{cases}x=-2+2s\\ y=1+s\\ z=-m+3s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$

Gọi $M\in d_1\Rightarrow M(-1+2t;-1+3t;1+2t)$.

Do d_1 cắt d_2 vì vậy $M\in d_2\Rightarrow\begin{cases}-1+2t=-2+2s\\ -1+3t=1+s\\ 1+2t=-m+3s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-2s=-1\\ 3t-s=2\\ m=3s-2t-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{5}{4}\\ s=\frac{7}{4}\\ m=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$, $d':\begin{cases}x=-1-3t\\ y=2+t\\ z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng là

A. Cắt nhau. **B.** Song song. **C.** Trùng nhau. **D.** Chéo nhau.

Lời giải:

Nhận xét: *Hai đường thẳng này có hai vecto chỉ phương không cùng phương nên chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.*

Phương trình tham số: $d:\begin{cases}x=2+3s\\ y=-1+s\\ z=-s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=-1-3t\\ y=2+t\\ z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Giả sử $M=d\cap d'\Rightarrow M\in d\Rightarrow M(2+3s;-1+s;-s)$.

Mặt khác $M \in d' \Rightarrow \begin{cases} 2+3s=-1-3t \\ -1+s=2+t \\ -s=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=-2 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng d cắt đường thẳng d' tại $M \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Lưu ý:

+ Nếu có vô số giá trị s, t thỏa mãn thì d trùng d'.
+ Nếu không có giá trị s, t thỏa mãn hệ 3 phương trình thì khi đó chỉ xảy ra 2 trường hợp là d và d' song song hoặc chéo nhau.
+ Khi đó chỉ cần xét thêm 2 véc tơ có cùng phương không. Nếu cùng phương $d // d'$ song song, nếu không cùng phương thì d chéo với d'.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+3y+z+1=0$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

A. $d // (\alpha)$. **B.** $d \subset (\alpha)$. **C.** $d \perp (\alpha)$. **D.** (α) cắt d.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;-1;2)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)} = (1;3;1)$

Nhận thấy: $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ \vec{u}_d.\vec{n}_{(\alpha)} = 1.1+(-1).3+2.1=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng song song với mặt phẳng $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+3z+1=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2-2t \\ z=1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d \perp (\alpha)$. **B.** $d \subset (\alpha)$. **C.** d cắt (α). **D.** $d // (\alpha)$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-3;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;-2;0)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = (2;1;3)$.

Nhận thấy $A \in (\alpha)$ và $\vec{u}_d.\vec{n}_{(\alpha)} = 1.2 + (-2).1 + 0.3 = 0 \Rightarrow d \subset (\alpha) \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$, $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. Chéo nhau **B.** Trùng nhau **C.** Cắt nhau **D.** Song song

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - z + 1 = 0$, $(\beta): 3x + y + 11z - 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (α) và (β) song song với nhau.

B. (α) và (β) vuông góc với nhau.

C. (α) và (β) trùng nhau.

D. (α) và (β) cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. d_1, d_2 trùng nhau. **B.** d_1, d_2 cắt nhau.

C. $d_1 // d_2$. **D.** d_1, d_2 chéo nhau.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;2;1)$, và hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$, $(Q): x + 2y - 3z = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Mặt phẳng (Q) đi qua A và không song song với (P).

B. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và song song với (P).

C. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

D. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và không song song với (P).

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào sau đây vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y - z = 0$?

A. $\vec{n} = (2;-1;-1)$. **B.** $\vec{n} = (1;2;0)$. **C.** $\vec{n} = (0;1;2)$. **D.** $\vec{n} = (-2;1;1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-z+1=0$, $(\beta): x-4y+6z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{3-x}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $d // (\alpha)$ và $d \perp (\beta)$.

B. $d \perp (\alpha)$ và $d // (\beta)$.

C. $d \perp (\alpha)$ và $d \perp (\beta)$.

D. d không vuông góc cả hai mặt phẳng (α) và (β).

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$. Khi đó giá trị của m,n lần lượt là

A. $m=-2;\ n=1$. **B.** $m=2;\ n=-1$. **C.** $m=-4;\ n=7$. **D.** $m=0;\ n=7$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{-3}$ có vị trí tương đối là

A. Cắt nhau **B.** Trùng nhau **C.** Chéo nhau **D.** Song song.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+my+3z+4=0$ và $(Q): 2x+y-nz-9=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau thì giá trị $m+n$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$. **B.** -4. **C.** $-\frac{11}{2}$. **D.** -1.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{m}=\frac{y+2}{2m-1}=\frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+3y-2z-5=0$. Để đường thẳng d vuông góc với (P) thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-1$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x+my-2z-7=0$ và $(Q): nx+7y-6z+4=0$. Để (P) song song với (Q) thì giá trị m,n bằng bao nhiêu?

A. $m=7;\ n=3$. **B.** $m=-\frac{7}{3};\ n=-9$.

C. $m=-\frac{7}{3};\ n=9$. **D.** $m=\frac{7}{3};\ n=9$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x+y+2z+1=0$, $(\beta): x+y-z+2=0$, $(\gamma): x-y+5=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $(\alpha)\perp(\beta)$. **B.** $(\alpha)\,//\,(\gamma)$. **C.** $(\gamma)\perp(\beta)$. **D.** $(\alpha)\perp(\gamma)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(\alpha): m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$, $(\beta): 2x+m^2y-2z+1=0$. Để hai mặt phẳng vuông góc nhau, giá trị m bằng?

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\sqrt{2} \\ m=-\sqrt{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, để hai mặt phẳng $(P): 7x-3y+mz-3=0$, $(Q): x-3y+4z+5=0$ vuông góc với nhau thì giá trị m bằng bao nhiêu?

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2t \\ z=-2-mt \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và phương trình mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-6=0$. Giá trị của m để $d\subset(P)$ là

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-4$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+3z+1=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2-2t \\ z=1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $d\perp(\alpha)$. **B.** d cắt (α). **C.** $d\,//\,(\alpha)$. **D.** $d\subset(\alpha)$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. $6x-4y-2z+1=0$. **B.** $9x+6y-3z=0$.

C. $6x-4y+2z+1=0$. **D.** $3x-2y-z+1=0$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	B	C	C	B	B
Câu	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	C	C	D	D	B
Câu	13	14	15	16	17	
Đáp án	C	B	C	D	C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình tham số $d_1:\begin{cases}x=-t_1\\y=3+2t_1\\z=-1+3t_1\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=4+t_2\\y=t_2\\z=3+2t_2\end{cases}$

d_1 và d_2 có hai vecto chỉ phương không cùng phương nên chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.

Gọi $M=d_1\cap d_2$. $M\in d_1\Rightarrow M(-t_1;3+2t_1;-1+3t_1)$.

Mặt khác $M\in d_2\Rightarrow\begin{cases}-t_1=4+t_2\\3+2t_1=t_2\\-1+3t_1=3+2t_2\end{cases}$. Hệ vô nghiệm nên d_1 *và* d_2 chéo nhau

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2. $\vec{n}_{(\alpha)}=(3;2;-1)$, $\vec{n}_{(\beta)}=(3;1;11)$.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{n}_{(\beta)}=3.3+2.1+(-1).11=0\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. Ta có: $\vec{u}_{d_1}=(1;2;3)$, $\vec{u}_{d_1}=(2;4;6)=2(1;2;3)=2\overrightarrow{u_{d_1}}\Rightarrow d_1//d_2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 4. Ta có: $\vec{n}_{(P)}=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$, $\vec{n}_{(Q)}=(1;2;-3)=\frac{1}{2}.\vec{n}_{(P)}\Rightarrow(P)//(Q)$

Thay tọa độ A vào phương trình (P) ta có: $1.(-1)+2.2+(-3).1=0$ đúng $\Rightarrow A\in(Q)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 5. Ta có: $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;-1)$. Thay từng đáp án để tính $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}$

Với đáp án A $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}=2.2+(-1).(-1)+(-1).(-1)=6\neq0$ loại đáp án A

Với đáp án B $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}=2.1+(-1).2+(-1).0=0$ chọn đáp án B

Với đáp án C $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}=2.0+(-1).1+(-1).2=-3\neq0$ loại đáp án C

Với đáp án D $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}=2.(-2)+(-1).1+(-1).1=-6\neq0$ loại đáp án D

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6. Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-1;-1)$, $\vec{n}_{(\beta)}=(1;-4;6)$, $\vec{u}_d=(-2;1;1)=-(2;-1;-1)=\vec{n}_{(\alpha)}$

$\Rightarrow d\perp(\alpha)$. Mà $\vec{u}_d.\vec{n}_{(\beta)}.=(-2).1+1.(-4)+1.6=0\Rightarrow d//(\beta)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 7. $M\in\Delta\Rightarrow\dfrac{2}{1}=\dfrac{m+2}{-1}=\dfrac{n-1}{3}\Rightarrow m=-4,n=7\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 8. Phương trình tham số $d_1:\begin{cases}x=1-2t_1\\y=3t_1\\z=-1+t_1\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=-1-t_2\\y=2+2t_2\\z=7-3t_2\end{cases}$

d_1 và d_2 có hai vecto chỉ phương không cùng phương nên chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.

Gọi $M=d_1\cap d_2$. $M\in d_1\Rightarrow M(1-2t_1;3t_1;-1+t_1)$.

Mặt khác $M\in d_2\Rightarrow\begin{cases}-1-2t_1=-1-t_2\\3t_1=2+2t_2\\-1+t_1=7-3t_2\end{cases}$. Hệ vô nghiệm nên d_1 *và* d_2 chéo nhau

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 9. $(P)//(Q)\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{1}=\dfrac{3}{-n}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\n=-6\end{cases}\Rightarrow m+n=-\dfrac{11}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 10. $d\perp(P)\Rightarrow\dfrac{m}{1}=\dfrac{2m-1}{3}=\dfrac{2}{-2}\Rightarrow m=-1\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 11. $(P)//(Q)\Rightarrow\dfrac{3}{n}=\dfrac{m}{7}=\dfrac{-2}{-6}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{7}{3}\\n=9\end{cases}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 12. Ta có: $\vec{u}_{(\alpha)}=(1;1;2)$, $\vec{u}_{(\beta)}=(1;1;-1)$, $\vec{u}_{(\gamma)}=(1;-1;0)$

Dễ thấy $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{0}{2}$ nên (α) và (γ) không thể song song $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 13. $(P)\perp(Q)\Rightarrow m^2.2-1.m^2+(m^2-2).(-2)=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 14. $(P)\perp(Q)\Rightarrow7.1-3.(-3)+m.4=0\Rightarrow m=-4\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 15. $d\subset(P)\Rightarrow\begin{cases}-3.2+2.(-1)-m.(-2)=0\\2(1-3t)-2t-2(-2-mt)-6=0\end{cases}\Rightarrow m=4\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 16. Ta có $\vec{u}_d.\vec{n}_{(\alpha)}=1.2+(-2).1+0.3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d//(\alpha)\\d\subset(\alpha)\end{array}\right.$.

Mà $2(-3+t)+1(2-2t)+3.1+1=0$ đúng $\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow d\subset(\alpha)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

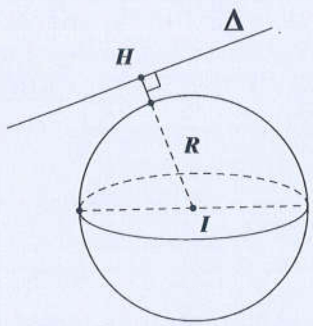
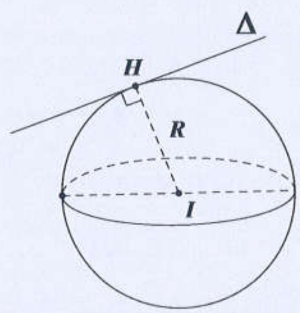
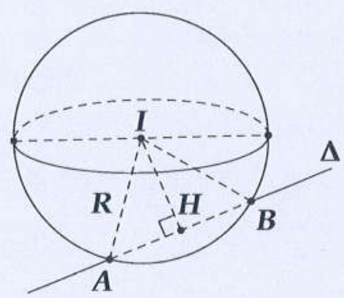
Câu 17. Với đáp án A: $\vec{n}=(3;-2;-1)$, đáp án B: $\vec{n}=(3;2;-1)$, đáp án C: $\vec{n}=(3;-2;1)$, đáp án D: $\vec{n}=(3;-2;-1)$. Ta có: $\vec{u}_d=(-3;2;-1)=-(3;-2;1)\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

DẠNG 2: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

1. Phương pháp

Vị trí tương đối giữa đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ.

<table>
<tr><td>$d(I,\Delta)>R$</td><td>$d(I,\Delta)=R$</td><td>$d(I,\Delta)<R$</td></tr>
<tr><td>Δ không cắt mặt cầu.</td><td>Δ tiếp xúc với mặt cầu.
Δ: Tiếp tuyến của (S) và
H: tiếp điểm .</td><td>Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

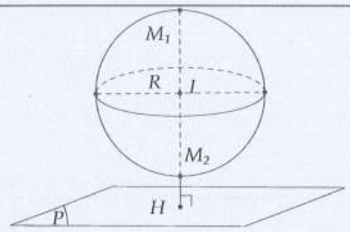
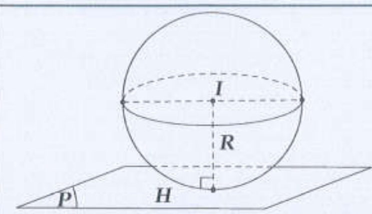
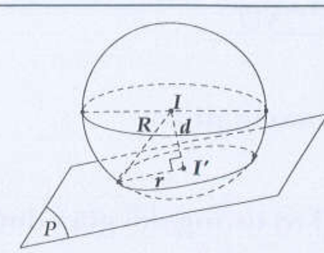
Lưu ý: Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau: $\begin{cases} d(I,\Delta)=IH \\ R=\sqrt{IH^2+AH^2}=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d=IH=d(I,(P))$.

$d>R$	$d=R$	$d<R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$

	H: **tiếp điểm.**	
		
Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**		

2. Một số loại bài tập thường gặp

LOẠI 1: DẠNG TIẾP XÚC

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-11=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (P) đi qua tâm của mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

D. Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S).

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2-(-8)}=\sqrt{14}$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là:

$$d\left(I;(P)\right)=\frac{\left|2.1+3.(-2)+1.1-11\right|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$

$\Rightarrow R=d\left(I;(P)\right)\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{3}$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=3$.

C. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$. **D.** $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=3$.

Lời giải:

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $R=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và $R=\sqrt{3}$ là:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=3 \Rightarrow \textit{Chọn đáp án D.}$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (yOz) là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=2.$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14.$

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4.$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$

Lời giải:

Cách 1:

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình là: $x=0$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $R=d\left(I;(yOz)\right)=\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2}}=2.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(2;-1;3)$ và $R=2$ là:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow \textit{Chọn đáp án C.}$$

Cách 2:

Khoảng cách từ một điểm $I(x;y;z)$ lên các mặt phẳng (xOy), (xOz), (yOz).

Ta có công thức: $\begin{cases} d\left(I;(xOy)\right)=|z| \\ d((I;(xOz))=|y| \\ d\left(I;(yOz)\right)=|x| \end{cases}$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (yOz) nên $R=d\left(I;(yOz)\right)=|x_I|=2.$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(2;-1;3)$ và $R=2$ là:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow \textit{Chọn đáp án C.}$$

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và điểm $I(1;2;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H. Tọa độ điểm H là

A. $H(2;3;4).$ **B.** $H(1;2;3).$ **C.** $H(3;4;5).$ **D.** $H(0;1;2).$

Lời giải:

Gọi H là tiếp điểm của (S) và (P). Khi đó H là hình chiếu của I của (P).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Đường thẳng IH vuông góc (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Đường thẳng IH đi qua I có phương trình tham số là: $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

Ta có $H\in d\Rightarrow H(t+1;t+2;t+3)$ mặt khác vì $H\in(P)$ nên

$$(t+1)+(t+2)+(t+3)-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(0;1;2)\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=26$.

B. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=54$.

C. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=18$.

D. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=26$.

Lời giải:

Cách 1: Ứng dụng tính chất vuông góc

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d

Vì $H\in d\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1+2t;-5+t;-1+2t)$.

Vì $AH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-5)+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;1;4)$.

Mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d nên $R=AH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;5;3)$; bán kính $R=3\sqrt{2}$ là:

$$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=18\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Cách 2: Ứng dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

(Chương trình ban nâng cao)

Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;0;2)$ và có 1 vectơ chỉ phương: $\vec{u}_d=(2;1;2)$.

$\overrightarrow{IA}=(1;5;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{u_d}\right]=(9;0;9)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng d là đoạn MH:

$$MH = d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = \frac{\sqrt{9^2+9^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 3\sqrt{2}.$$

Mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d nên $R = AH = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;5;3)$; bán kính $R = 3\sqrt{2}$ là:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 18 \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13.$ **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14.$ **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10.$

Lời giải:

Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng $Oy \Rightarrow \begin{cases} H \in Oy \\ IH \perp Oy \end{cases}.$

+ $H \in Oy \Rightarrow H(0;t;0) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1; t+2; -3).$

+ Vì $IH \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{j} = 0 \Leftrightarrow (-1).0 + (t+2).1 + (-3).0 = 0$

$$\Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1;0;-3).$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục Oy nên $R = IH = \sqrt{10}.$

Phương trình mặt cầu tâm I là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Cách 2:

Hình chiếu của điểm $I(x;y;z)$ lên các trục Ox, Oy, Oz tương ứng có tọa độ là $(x;0;0)$, $(0;y;0)$, $(0;0;z)$.

Khi đó. hình chiếu của I lên trục Oy là $H(0;-2;0)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{HI} = (1;0;3) \Rightarrow R = HI = \sqrt{10}.$

Phương trình mặt cầu tâm I là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Cách 3:

Sử dụng công thức giải nhanh khoảng cách từ điểm $I(x;y;z)$ lên các trục Ox, Oy, Oz.

$$d(I;d)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\xrightarrow{d\equiv Ox} d(I;Ox)=\sqrt{y^2+z^2}$$

$$d(I;d)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\xrightarrow{d\equiv Oy} d(I;Oy)=\sqrt{x^2+z^2}$$

$$d(I;d)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\xrightarrow{d\equiv Oz} d(I;Oz)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Áp dụng, ta có: $d(I;Oy)=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}.$

Phương trình mặt cầu tâm I là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình là: $2x+2y+z-1=0$. Phương trình mặt cầu (S) nào sau đây có tâm I nằm trên đường thẳng d, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính bằng 2, biết rằng tâm mặt cầu có hoành độ âm?

A. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4.$ **B.** $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4.$

C. $(S):(x-3)^2+y^2+(z+1)^2=4.$ **D.** $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4.$

Lời giải:

Tâm $I\in d\Rightarrow I(1+2t;-1+t;-t).$

Mặt cầu (S) có bán kính $R=2$ và tiếp xúc với (P) nên ta có:

$$d(I;(P))=2\Leftrightarrow\frac{|2+4t-2+2t-t-1|}{3}=2\Leftrightarrow|5t-1|=6$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5t-1=6\\5t-1=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{7}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(-1;-2;1)\\I\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{2}{5};-\dfrac{7}{5}\right)\ (\textit{loại, vì } x_I<0)\end{array}\right.$$

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1;-2;1)$, bán kính $R=2$ là:

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4\Rightarrow \textbf{\textit{Chọn đáp án D.}}$$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P):x+2y+2z+3=0$ và $(Q):x+2y+2z+7=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $(S):(x+3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{4}{9}$.

B. $(S):(x-6)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=\frac{1}{9}$.

C. $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$.

D. $(S):(x-6)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=\frac{25}{9}$.

Lời giải:

Tâm $I\in d\Rightarrow I(t;-1;-t)$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên

$$d(I;(P))=d(I,(Q))=R\Leftrightarrow\frac{|1-t|}{3}=\frac{|5-t|}{3}\Leftrightarrow t=3$$

Suy ra: $R=\frac{|1-t|}{3}=\frac{2}{3};I(3;-1;-3)$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;-3)$ và bán kính $R=\frac{2}{3}$ là:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow \textit{Chọn đáp án C.}$$

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+2=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng d có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm $A(1;-1;1)$ là

A. $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$.

B. $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$.

D. $(S):(x-4)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải:

Gọi I là tâm của $(S) \Rightarrow I \in d \Rightarrow I(1+3t;-1+t;t)$.

Vì mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;1)$ nên bán kính $R = IA = \sqrt{11t^2 - 2t + 1}$ (1)

Mặt khác mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên: $R = d(I;(P)) = \dfrac{|5t+3|}{3}$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow 3\sqrt{11t^2 - 2t + 1} = |5t+3|$

$$\Leftrightarrow 9(11t^2 - 2t + 1) = (5t+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 74t^2 - 48t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{24}{37} \end{array}\right.$$

$+\quad t = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(1;-1;1) \\ R_1 = 1 \end{cases}$. $\qquad +\quad t = \dfrac{24}{37} \Rightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{109}{37};-\dfrac{13}{37};\dfrac{24}{37}\right) \\ R_2 = \dfrac{77}{37} \end{cases}$.

Vì $R_1 < R_2$ nên phương trình mặt cầu (S) cần tìm có tâm $I(1;-1;1)$; $R_1 = 1$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

LOẠI 2: DẠNG CẮT

Ví dụ 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (P) đi qua tâm của mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

D. Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S).

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2-(-11)}=5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I;(P))=\dfrac{|2.1-2.2-3-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=3$.

Nhận thấy: $0<d(I,(P))<R$ và tâm $I(1;2;3)\notin(P)$ vì $2.1-2.2-3-4=-9\neq 0$.

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+10=0$ và điểm $I(2;1;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4 là

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=25$.

B. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

D. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Lời giải:

Gọi R,r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I;(P))=\dfrac{|2.2+1-2.3+10|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3$.

Do mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính $r=4$

$\Rightarrow R=\sqrt{\left(d\left(I;(P)\right)\right)^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;3)$ và $R=5$ là:

$$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z-11=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Bán kính đường tròn tâm (C) bằng bao nhiêu?

A. $r=2$. **B.** $r=3$. **C.** $r=4$. **D.** $r=5$.

Lời giải:

Gọi R,r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+2^2+1^2-(-11)}=5$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|6.3+3.2-2.1-1|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=3$.

Bán kính của đường tròn (C) là: $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có tâm H. Tọa độ tâm đường tròn là

A. $H(3;0;2)$. **B.** $H(-1;4;4)$. **C.** $H(1;2;3)$. **D.** $H(2;-2;-1)$.

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$.

Vì H là tâm đường tròn nên H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;-2;-1)$.

Đường thẳng IH vuông góc (P) nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-2;-1)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Đường thẳng IH đi qua I có phương trình tham số là: $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$

Ta có $H\in d \Rightarrow H(1+2t;2-2t;3-t)$ mặt khác vì $H\in(P)$ nên:

$$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;0;2).$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Mặt cầu (S) có tâm M. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho độ dài $AB=6$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(S):(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18.$

B. $(S):(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=16.$

C. $(S):(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=25.$

D. $(S):(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36.$

Lời giải:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng $d \Rightarrow \begin{cases} H\in d \\ MH\perp d \end{cases}$.

\+ $H\in d \Rightarrow H(-5+2t;7-2t;t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(-9+2t;6-2t;-6+t).$

\+ $MH\perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (-9+2t).2+(6-2t).(-2)+(-6+t)=0$

$$\Leftrightarrow t=4 \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(-1;-2;-2) \Rightarrow MH=3.$$

Vì đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu (S):

$$R^2=MH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2=18 \Rightarrow R=3\sqrt{2}.$$

Phương trình của mặt cầu (S) có tâm M bán kính $R=3\sqrt{2}$ là:

$$(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18 \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án A.***

Cách 2: Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

(Ban nâng cao)

Đường thẳng d đi qua điểm $I(-5;7;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương: $\vec{u}_d=(2;-2;1)$.

$\overrightarrow{IM}=(9;-6;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{u_d}\right]=(6;3;-6)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng d là đoạn MH:

$$MH=d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}=\frac{\sqrt{6^2+3^2+(-6)^2}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

Vì đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu (S):

$$R^2=MH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2=18\Rightarrow R=3\sqrt{2}.$$

Phương trình của mặt cầu (S) có tâm M bán kính $R=3\sqrt{2}$ là:

$$(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18\Rightarrow$$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$. Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$ và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm $H(1;-2;-4)$ bán kính $r=\sqrt{13}$, biết rằng tâm mặt cầu (S) có hoành độ dương. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$.

B. $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=16$.

D. $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=13$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Gọi d là đường thẳng qua H và vuông góc với (P) nhận vectơ $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+t\\ z=-4+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Gọi I là tâm mặt cầu (S) thì $I\in d\Rightarrow I(1+t;-2+t;-4+t)$.

Ta có: Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{4^2-13}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I(2;-1;-3) \\ I(0;-3;-5)\ (\textit{loại, vì } x_I > 0) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-3)$; bán kính $R = 4$ là:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 16 \Rightarrow \textbf{\textit{Chọn đáp án A.}}$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm rèn luyện

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình là $x+y-4z+3=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2.$ **B.** $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{9}{2}.$

C. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4.$ **D.** $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{4}.$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z-1=0$ và điểm $A(3;0;-2)$. Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H. Hoành độ điểm H là

A. $x_H=-1.$ **B.** $x_H=1.$ **C.** $x_H=3.$ **D.** $x_H=5.$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x-2y+2z-3=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính là

A. $R=2.$ **B.** $R=3.$ **C.** $R=4.$ **D.** $R=9.$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Trong các mặt phẳng sau, mặt phẳng nào tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $(P):2x-y-2z+3=0.$ **B.** $(Q):x+2y-2z+3=0.$

C. $(R):2x-y+2z+6=0.$ **D.** $(K):2x+2y-z+3=0.$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z-7=0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Mặt phẳng (P) đi qua tâm của mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

D. Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S).

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d bán kính bằng 2 và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Biết tâm I có tung độ dương, phương trình mặt cầu (S) là

A. $(S):(x-3)^2+(y+5)^2+(z+7)^2=4$. **B.** $(S):(x-3)^2+(y+7)^2+(z-1)^2=4$.

C. $(S):(x+3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(S):(x+3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2=4$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+4=0$. Mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, tâm I thuộc đường thẳng AB và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Biết tâm I có hoành độ dương, phương trình mặt cầu (S) là

A. $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=16$. **B.** $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=4$.

C. $(S):(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=16$. **D.** $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;3)$, đường thẳng $d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+3y-6z-2=0$. Mặt cầu (S) đi qua điểm A có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Biết tâm I có hoành độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $(S):(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.

C. $(S):(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$. **D.** $(S):(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;1;1)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ là

A. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

C. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9.$ D. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1.$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $M(1;2;-3)$. Mặt cầu tâm M, tiếp xúc với đường thẳng d có bán kính R bằng bao nhiêu?

A. $R=2.$ B. $R=2\sqrt{5}.$ C. $R=2\sqrt{2}.$ D. $R=4.$

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$. Mặt phẳng nào sau đây là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $(P):6x+2y+3z=0.$ B. $(Q):x+2y+2z-7=0.$

C. $(R):6x+2y+3z-55=0.$ D. $(K):2x+3y+6z-5=0.$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-m-1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ứng với giá trị m là

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-15\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-15\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-5\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=15\end{array}\right.$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x+y+z-3=0$; $(Q):x+y-z=0$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với (Q) tại điểm $H(1;-1;0)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(S):(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1.$ B. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=3.$

C. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=1.$ D. $(S):(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=3.$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+6}{1}$ hình chiếu của I trên đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=3\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ là $H(3;4;2)$ và mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+3=0$ là

A. $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4.$ B. $(S):(x-4)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=4.$

C. $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4.$ D. $(S):(x-7)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=4.$

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3;-4;-2)$ và tiếp xúc với trục Oy. Bán kính mặt cầu (S) là

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{13}$. **C.** $R=3\sqrt{2}$. **D.** $R=3$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm A tiếp xúc với mặt phẳng (xOz) là

A. $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=25$.

B. $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=18$.

C. $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

D. $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=13$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y+z+5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π. Bán kính mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

A. $R=3$. **B.** $R=4$. **C.** $R=5$. **D.** $R=8$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng nào dưới đây cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính đường tròn bằng 4?

A. $x-2y-2z-3=0$. **B.** $2x+2y+z+3=0$.

C. $x-2y+2z+3=0$. **D.** $2x-2y-z-4=0$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z-11=0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Mặt phẳng (P) đi qua tâm của mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

D. Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S).

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-5=0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Mặt phẳng (P) đi qua tâm của mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

D. Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S).

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-11=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) tâm H có tọa độ là

A. $H(0;-1;-1)$. **B.** $H(1;1;-2)$. **C.** $H(2;3;-3)$. **D.** $H(3;5;-4)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình của mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$ là

A. $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=25$. **B.** $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=49$.

C. $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=16$. **D.** $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=36$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Phương trình của mặt cầu (S) có tâm là điểm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I là

A. $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{1}{3}$. **B.** $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{4}{9}$.

C. $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{9}$. **D.** $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình của mặt cầu (S) có tâm là điểm A và cắt d tại hai điểm B, C sao cho diện tích tam giác ABC bằng 12 là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=36$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=144$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=64$.

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 6π. **D.** 8π.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+m=0$, m là tham số. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{6}$. Giá trị của tham số m là

A. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-11=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Diện tích hình tròn (C) bằng bao nhiêu?

A. 2π **B.** 3π **C.** 6π **D.** 9π

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	B	A	D	B	D	A
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	A	D	B	C	B	D	D
Câu	15	16	17	18	19	20	21
Đáp án	B	C	C	D	C	A	C
Câu	22	23	24	25	26	27	28
Đáp án	A	D	B	D	D	B	A

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với với mặt phẳng (P)

$$\Rightarrow R=d(A;(P))=\frac{|1+2-4.3+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}=\sqrt{2}$$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;3)$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2. Gọi H là tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)

$\Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng AH qua A có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(2;1;-2)$ là: $\begin{cases}x=3+2t\\y=t\\z=-2-2t\end{cases}$

Khi đó $H=AH\cap(P)\Rightarrow H\in AH\Rightarrow H(3+2t;t;-2-2t)$

$H\in(P)\Rightarrow 2(3+2t)+t-2(-2-2t)-1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(1;-1;0)\Rightarrow x_H=1$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với với mặt phẳng (P)

$\Rightarrow R=d(A;(P))=\dfrac{|1-2(-3)+2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 4. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=2$

Để mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=R$

Chỉ có mặt phẳng $(K):2x+2y-z+3=0$ thỏa mãn yêu cầu:

$d(I;(K))=\dfrac{|2+2.2-3+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2=R\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 5. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;1)$ và bán kính $R=1$

Xét $d(I;(P))=\dfrac{|2+2-7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1=R\Rightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S)

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B***

Câu 6. $I\in d\Rightarrow I(1-t;-3+2t;3+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên:

$R=d(I;(P))\Leftrightarrow 2=\dfrac{|-2t+2|}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2t+2=6\\-2t+2=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(-3;5;7)\\I(3;-7;1)\end{array}\right.$

Vì tâm I có tung độ dương $y_I>0\Rightarrow I(-3;5;7)$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x+3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2=4$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$

Gọi tâm $I(1+t;t;2-t)\in AB(t>-1)$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I;(P))=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|5t+2|}{3}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t+2=12 \\ 5t+2=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{14}{5} \end{array}\right. \Rightarrow I(3;2;0)$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$, $R=4$ là: $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=16$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 8. Gọi I là tâm của (S) ; $I\in d\Rightarrow I(-t;-1+2t;2+t)$

Theo yêu cầu đề bài ta có:

$d(I;(P))=IA=R\Leftrightarrow \dfrac{|2t+17|}{7}=\sqrt{6t^2-10t+5}\Leftrightarrow |2t+17|=7\sqrt{6t^2-10t+5}$

$\Leftrightarrow (2t+17)^2=49(6t^2-10t+5)\Leftrightarrow 290t^2-558t-44=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{11}{145} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I(-2;3;4);R=IA=3 \\ I\left(\dfrac{11}{145};-\dfrac{167}{145};\dfrac{279}{145}\right) \end{array}\right. \Rightarrow I(-2;3;4)$ (Vì I có hoành độ âm).

Khi đó $R=IA=3$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 9. Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng Δ

$H\in\Delta\Rightarrow H(2t;-1+2t;1+t)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-1+2t;-2+2t;t)$

Vì IH vuông góc với Δ nên

$\overrightarrow{IH}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow 2(-1+2t)+2(-2+2t)+t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Vì mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu $R=IH=1$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 10. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng d

$H\in d\Rightarrow H(3+2t;-1+t;1+2t)\Rightarrow \overrightarrow{MH}=(2+2t;-3+t;4+2t)$

Vì MH vuông góc với d nên

$\overrightarrow{MH}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow(2+2t).2+(-3+t)+(4+2t).2=0$

$\Leftrightarrow 9t+9=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(0;-4;2)$

Vì mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng $d\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu $R=MH=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B***

Câu 11. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=7$

Để mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=R$.

Trong 4 mặt phẳng có mặt phẳng $(R): 6x+2y+3z-55=0.$

Thỏa mãn $d(I;(R))=\dfrac{|6+2.(-3)+3.2-55|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=7=R\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 12. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=3$

Để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I;(P))=R$

$$\Leftrightarrow\frac{|1+2(-2)-2-m-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3\Leftrightarrow|-6-m|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-6-m=9\\-6-m=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-15\\m=3\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 13. Gọi I là tâm mặt cầu (S).

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Q) tại $H\Rightarrow IH\perp(Q)$

Đường thẳng IH đi qua $H(1;-1;0)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình tham số đường thẳng IH là: $\begin{cases}x=1+t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$

Mặt khác do $I\in(P)\Rightarrow I=IH\cap(P)\Rightarrow I(2;0;-1)\Rightarrow R=IH=\sqrt{3}$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 14. Tâm $I \in d_1 \Rightarrow I(4+3t;-1-2t;-6+t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1-3t;5+2t;8-t)$

$IH \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \Leftrightarrow (-1-3t).0+(5+2t).1+(8-t).(-1)=0$

$\Leftrightarrow 3t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(7;-3;-5)$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow R = d(I;(P)) = 2$

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(7;-3;-5)$ bán kính $R=2$ là

$(x-7)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=4 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 15. Áp dụng công thức nhanh: $R=\sqrt{(x_I)^2+(z_I)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 16. Áp dụng công thức nhanh: $R=|y_A|=2$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(3;-2;4)$ bán kính $R=2$ là:

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 17. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là : $h=d(A;(P))=\dfrac{|1.2+2.2-2.1+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$

Gọi r là bán kính của đường tròn thiết diện thì ta có : $2\pi r=8\pi \Leftrightarrow r=4$

Gọi R là bán kính mặt cầu cần tìm ta có : $R=\sqrt{h^2+r^2}=5$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 18. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=4$

Khi đó khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $h=\sqrt{R^2-r^2}=3$

Trong 4 mặt phẳng trên chỉ có mặt phẳng $2x-2y-z-4=0$ thỏa mãn

$h=d(I;(P))=\dfrac{|2-2.2-3-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 19. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R=5$

Xét $d(I;(P))=\dfrac{|6.3+3.2-2.1-1|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=3<R$; Mặt khác $I \notin (P)$.

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn và không đi qua tâm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 20. Mặt cầu *(S)* có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=3$

Xét $d(I;(P))=\dfrac{|1+2-(-2)-5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=0$ hay $I\in(P)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) đi qua tâm I $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 21. Mặt cầu *(S)* có tâm $I(1;1;-2)$

Gọi *H* là tâm đường tròn *(C)* $\Rightarrow$ *H* là hình chiếu của tâm *I* lên mặt phẳng *(P)*

Đường thẳng *d* qua I và vuông góc với *(P)* có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(1;2;-1)$

Phương trình đường thẳng *d* là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1=2t \quad (t\in R) \\ z=-2-t \end{cases}$

$H\in d\Rightarrow H(1+t;1+2t;-2-t)$

Mà $H\in(P)$ nên ta có $(1+t)+2(1+2t)-(-2-t)-11=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(2;3;-3)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 22. Δ đi qua $M(-2;2;-3)$; $\vec{u}_\Delta=(2;3;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}_\Delta\right]$

Gọi *H* là chân đường vuông góc vẽ từ *A* trên đường thẳng *d*

$$AH=d(A,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3\Rightarrow R^2=AH^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2=25$$

Phương trình mặt cầu *(S)* cần tìm là: $x^2+y^2+(z+2)^2=25$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A***

Câu 23. *d* đi qua $M(-1;0;2)$, $\vec{u}_d=(1;2;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}_d\right]$

- Tam giác *IAB* vuông cân tại *I* (Vì $IA=IB=R$)
- Gọi *H* là hình chiếu của *I* trên *AB* $\Rightarrow IH=\dfrac{AB}{2}$ (*H* là trung điểm *AB*)

$$IH=d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow R^2=IH^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2=2IH^2=\frac{8}{3}$$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 24. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d.

$H \in d \Rightarrow H(t;2t;-2-2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-1;2t+1;-4-2t)$

$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (t-1)+2(2t+1)-2(-4-2t)=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(-1;-2;0) \Rightarrow AH=3$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow 12=\dfrac{1}{2}3.BC \Leftrightarrow BC=8 \Rightarrow BH=\dfrac{BC}{2}=4$

$\Rightarrow R=\sqrt{HA^2+HB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Phương trình mặt cầu tâm $A(1;-1;2)$ và có bán kính $R=5$ là:

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 25. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

$$d(I;(P))=\frac{|2-2.2-3-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=3<R$$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính

$r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=4 \Rightarrow$ Chu vi đường tròn bằng $2\pi r=8\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 26. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;0)$ và có bán kính $R=3$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là:

$$h=d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2+m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow |2+m|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 27. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=3$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $h=d(I;(P))=\dfrac{|1+2+2-11|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}<R$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính :

$r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{3} \Rightarrow$ Diện tích đường tròn là $S=\pi r^2=3\pi \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I;(P))=\dfrac{|3-2+6+14|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG

Khơi nguồn Tri thức

MINHTHANGBOOKS

NHÀ SÁCH MINH THẮNG

Công Ty TNHH Văn Hóa Minh Tân – Nhà Sách Minh Thắng

Địa chỉ trụ sở chính: Số nhà 200, B3 – Khu Tập thể Tân Mai, Phường Tân Mai, Quận Hoàng Mai, Thành phố Hà Nội, Việt Nam.

Địa chỉ địa điểm kinh doanh: Số 808 Đường Láng, Phường Láng Thượng, Quận Đống Đa, Thành Phố Hà Nội, Việt Nam.

Tel: (84-4) 3 999777, Fax: (84-4) 6 266 1133

Chi nhánh cửa hàng bán lẻ: Số 11C7, TT ĐH Ngoại Ngữ - Ngã Ba Phạm Văn Đồng – Trần Quốc Hoàn, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.

Website: *http://nhasachminhthang.com.vn*

Fan page: https://www.facebook.com/nasachminhthang808duonglang

Email: *minhthangbook@gmail.com*

1. Lĩnh vực hoạt động

- Xuất bản sách và các ấn phẩm văn hóa khác.
- Giao dịch bản quyền và cung cấp các thông tin xuất bản
- Tư vấn xuất bản cho các đối tác kinh doanh, các cá nhân, cơ quan, tổ chức.
- Phát hành sách, báo và các ấn phẩm văn hóa.
- Bán buôn, bán lẻ sách, báo, tạp chí , văn phòng phẩm.

2. Nguyên tắc làm việc

- Tôn trọng đối tác, tác giả, dịch giả, độc giả.
- Nâng cao chất lượng nội dung và hình thức ấn phẩm, giảm giá thành.
- Phát triển các kênh phát hành truyền thống, đồng thời mở ra các kênh phát hành mới.
- Tôn trọng luật bản quyền và luật xuất bản

3. Định hướng phát triển

- Với các tủ sách chính:
  - Sách văn học
  - Sách thiếu nhi
  - Sách đời sống
  - Sách ngoại ngữ

- Cung cấp các dịch vụ liên quan đến bản quyền và xuất bản
- Cung cấp sách và các ấn phẩm khác đến tay độc giả.

4. Tầm nhìn.

Cầu nối tri thức- Kết nối bạn bè thế giới.

5. Sứ mệnh:

- Mạnh dạn đương đầu vượt qua những thách thức để mang tri thức mới cho cộng đồng xã hội.
- Cam kết chất lượng là nguyên tắc trong phục vụ khách hàng và quan hệ đối tác.
- Đổi mới và năng động để phát triển vững bền.

6. Giá trị cốt lõi.

Khách hàng là trọng tâm trong việc hoạch định chính sách và chiến lược.

7. Trách nhiệm xã hội.

Với vai trò của một doanh nghiệp trong ngành xuất bản tại Việt Nam, **Nhà sách Minh Thắng** luôn khẳng định sự phát triển trong việc tạo ra giá trị tri thức không ngừng ngày một được nâng cao cho sự phát triển của cộng đồng và xã hội.

Từ khi thành lập cho đến nay, **Nhà Sách Minh Thắng** đã liên kết với các nhà xuất bản lớn như NXB Văn học, NXB Mỹ thuật, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, NXB Hồng Đức, ... để cho ra đời hơn hàng ngàn đầu sách đạt chất lượng hoàn hảo về nội dung và đẹp về hình thức.

Về mặt bản quyền, kể từ khi Việt Nam gia nhập công ước Bern, **Nhà Sách Minh Thắng** đã thiết lập quan hệ và mua bản quyền với nhiều nhà xuất bản lớn trên thế giới DK (Dorling Kindersley), Nhà xuất bản Simon & Schuster, NXB Đại học Cambridge, NXB Đại học Oxford, Công ty TNHH Xuất bản ASK, Tập đoàn 3A, NXB Đại học Ngôn ngữ Bắc Kinh, NXB Đại học Bắc Kinh, NXB Mỹ thuật Trung ương…để mang đến các đầu sách giá trị được nhiều độc giả đón nhận.

Về việc thẩm định chất lượng bản thảo và nội dung luôn được sự hỗ trợ và tư vấn của các thầy cô nổi tiếng tại các trường đại học chuyên ngành trong nước.

Nhà Sách Minh Thắng luôn mong sự hợp tác và góp ý của bạn học và các tác giả trong nước để thúc đẩy và góp phần gia tăng lượng sách trên thị trường xuất bản ngày một hoàn hảo và chất lượng

Nhà Sách Minh Thắng đã trở thành một trong những thương hiệu hàng đầu trong giới xuất bản và được nhiều độc giả yêu mến. Với đội ngũ nhân sự trẻ trung, năng động, có chuyên môn cao và đam mê sách, đang dần hoàn thiện, trở thành một trong những công ty xuất bản hàng đầu Việt Nam. **Nhà Sách Minh Thắng** đã và đang xây dựng hình ảnh đẹp trong lòng nhiều độc giả với những cuốn sách thực sự bổ ích và giá trị

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập - Chế bản: (04) 39714896
Quản lý xuất bản: (04) 39728806 ; Tổng Biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

CHINH PHỤC KỲ THI THPT

TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN VÀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập
TS. Phạm Thị Trâm

Biên tập xuất bản: **Đặng Thị Phương Anh**
Biên tập chuyên ngành: **Nguyễn Lan Hương**
Kĩ thuật vi tính: **Minh Minh**
Trình bày bìa: **Minh Đạo**

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY TNHH VĂN HÓA MINH TÂN - NHÀ SÁCH MINH THẮNG
Điện thoại : 043 999 7777 - Fax : 046 266 11 33
Website : www.nhasachminhthang.vn
facebook.com/nhasachminhthang808duonglang/

ISBN: 978-604-62-6967-0
Mã số: 1L - 654 PT2016
In số lượng 2000 cuốn khổ 20.5x29.5cm, tại Công ty TNHH In và Thương mại Hải Nam.
Địa chỉ: Số 18, ngách 68/59/9, Phường Quan Hoa, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.
Số đăng ký KHXB: 4387 - 2016/CXBIPH/24 - 350/ĐHQGHN, ngày 06/12/2016.
Quyết định xuất bản số: 691LK-TN/QĐ - NXB ĐHQGHN, ngày 15/12/2016.
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2017.