CÁC DẠNG TOÁN VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

✪ RÚT GỌN PHÂN THỨC HỮU TỶ

Nhắc lại kiến thức: Các bước rút gọn biểu thức hữu tỷ

1. Tìm ĐKXĐ: Phân tích mẫu thức thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0.

2. Phân tích tử thành nhân tử, chia tử và mẫu cho nhân tử chung.

🗁 Dạng 1: Rút gọn biểu thức hữu tỷ

★Thí dụ 1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x^4-x^3-2x-4}{2x^4-3x^3+2x^2-6x-4}$.

Lời giải

Ta có:

$$x^4-x^3-2x^2-4=\left(x^4-4\right)-\left(x^3+2x\right)=\left(x^2+2\right)\left(x^2-2\right)-x\left(x^2+2\right)$$
$$=\left(x^2+2\right)\left(x^2-x-2\right)=\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right).$$

$$2x^4-3x^3+2x^2-6x-4=\left(2x^4-8\right)-\left(3x^3+6x\right)+\left(2x^2+4\right)$$
$$=2\left(x^4-4\right)-3x\left(x^2+2\right)+2\left(x^2+2\right)$$
$$=\left(x^2+2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=\left(x^2+2\right)\left(x-2\right)\left(2x+1\right).$$

Điều kiện xác định của A là $x\ne 2, x\ne -\dfrac{1}{2}$. Ta có:

$$A=\frac{\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{\left(x^2+2\right)\left(x-2\right)\left(2x+1\right)}=\frac{x+1}{2x+1}.$$

Vậy với $x\ne 2$ và $t\ne -\dfrac{1}{2}$ thì $A=\dfrac{x+1}{2x+1}$

★Thí dụ 2. Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{2xy-x^2+z^2-y^2}{2x^2+z^2-y^2+2xz}$.

Lời giải

Ta có:

$$B=\frac{z^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)}{\left(x^2+2xz+z^2\right)-y^2}=\frac{z^2-\left(x-y\right)^2}{\left(x+z\right)^2-y^2}=\frac{\left(z+x-y\right)\left(z-x+y\right)}{\left(x+z+y\right)\left(x+z-y\right)}.$$

Với $x+y+z\ne 0, x-y+z\ne 0 \Rightarrow B=\dfrac{z-x+y}{x+y+z}$.

🗁 Dạng 2: Rút gọn biểu thức hữu tỷ và bài toán liên quan

★Thí dụ 3. Cho biểu thức $A=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$.

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị của A khi $\left|2x-1\right|=7$

Lời giải

a) Ta có:

$$x^4-5x^2+4=\left(x^4-x^2\right)-4\left(x^2-1\right)=x^2\left(x^2-1\right)-4\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)$$
$$x^4-10x^2+9=\left(x^4-x^2\right)-\left(9x^2-9\right)=x^2\left(x^2-1\right)-9\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$$

Điều kiện xác định của A là $x\ne\pm1, x\ne\pm3$. Ta có:

$$A=\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}$$

b) Ta có:

$$A=0\Leftrightarrow\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=0\Leftrightarrow x=\pm2.$$

c) Ta có:

$$\left|2x-1\right|=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=7\\2x-1=-7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$$

Với x = 4 thì $A=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\frac{\left(4-2\right)\left(4+2\right)}{\left(4-3\right)\left(4+3\right)}=\frac{1.6}{1.7}=\frac{6}{7}$

Với x = - 3 thì A không xác định.

★**Thí dụ 4.** Cho biểu thức $B=\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để $B>0$

Lời giải

a) Ta có:

$$3x^3-19x^2+33x-9=\left(3x^3-9x^2\right)-\left(10x^2-30x\right)+\left(3x-9\right)$$
$$=\left(x-3\right)\left(3x^2-10x+3\right)=\left(x-3\right)\left[\left(3x^2-9x\right)-\left(x-3\right)\right]=\left(x-3\right)^2\left(3x-1\right)$$
$$2x^3-7x^2-12x+45=\left(2x^3-6x^2\right)-\left(x^2-3x\right)-\left(15x-45\right)=\left(x-3\right)\left(2x^2-x-15\right)$$
$$=\left(x-3\right)\left[\left(2x^2-6x\right)+\left(5x-15\right)\right]=\left(x-3\right)^2\left(2x+5\right)$$

Điều kiện xác định của A là $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$. Ta có:

$$B = \frac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)} = \frac{2x+5}{3x-1}$$

b) Ta có:

$$B > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-1>0 \\ 2x+5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-1<0 \\ 2x+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy để $B > 0$ thì $x > \frac{1}{3} \vee x < -\frac{5}{2}$.

★**Thí dụ 5.** Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2+xy} + \frac{y^2-x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy+y^2}\right) \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$

1) Rút gọn biểu thức P.
2) Tính giá trị của biểu thức P, biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x-3y)$$

Lời giải

1) Với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ ta có:

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2y - (x^2-y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)}\right) \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

2) Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = 2(x-3y)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

Lập luận $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} (tm)$

Nên thay $x=1; y=-3$ vào biểu thức $P=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1+(-3)}{1.(-3)}=\dfrac{2}{3}$

★**Thí dụ 6.** Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{5-x}{1-x^2}\right):\dfrac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
c) Tìm x để $|A|=A$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq \pm 1; x\neq \dfrac{1}{2}$

$$A=\left(\dfrac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2}\right).\dfrac{x^2-1}{1-2x}$$

$$=\dfrac{-2}{1-x^2}.\dfrac{x^2-1}{1-2x}=\dfrac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2⋮(1-2x)$, từ đó tìm được $\begin{cases} x=1(ktm) \\ x=0(tm) \end{cases}$

Vậy $x=0$

c) Ta có:

$$|A|=A \Leftrightarrow A\geq 0 \Leftrightarrow 1-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1\neq x<\dfrac{1}{2}$

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức có tính quy luật

Ví dụ 7. Tính tổng: $S=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+.....+\dfrac{1}{2007.2009}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(n+2)-n}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

Do đó:

$$S=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+......+\dfrac{1}{2007}-\dfrac{1}{2009}\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2009}\right)=\dfrac{1004}{2009}$$

Ví dụ 8. Cho $M=\dfrac{2.1+1}{(1^2+1)^2}+\dfrac{2.2+1}{(2^2+2)^2}+\dfrac{2.3+1}{(3^2+3)^2}+......+\dfrac{2.2012+1}{(2012^2+2012)^2}$

Tính giá trị biểu thức M

Lời giải

Ta có:

$$\frac{2a+1}{\left(a^2+a\right)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\left(a+1\right)^2}$$

Do đó:

$$M=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+.......+\frac{1}{2012^2}-\frac{1}{2013^2}$$
$$=1-\frac{1}{2013^2}$$

Ví dụ 9. Rút gọn biểu thức:

$$M=\frac{3}{\left(1.2\right)^2}+\frac{5}{\left(2.3\right)^2}+......+\frac{2.n+1}{\left[n\left(n+1\right)\right]^2}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{2k+1}{\left[k\left(k+1\right)\right]^2}=\frac{2k+1}{k^2\left(k+1\right)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}$$

Do đó:

$$M=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-....-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}=\frac{n\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2}$$

Ví dụ 10. Rút gọn biểu thức:

$$M=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Lời giải

Ta có:

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}{k^2}$$

Do đó:

$$M=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}.....\frac{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{n^2}=\frac{1.3.2.4...\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{2^2.3^2.4^2...n^2}$$
$$=\frac{1.2.3...\left(n-1\right)}{2.3.4....\left(n-1\right)n}.\frac{3.4.5....\left(n+1\right)}{2.3.4....n}=\frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

Bài tập vận dụng

Câu 1. Rút gọn biểu thức sau: $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$.

Câu 2. Cho biểu thức : $P=\frac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để $P<1$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x>1$

Câu 3. Tìm tích: $M=\frac{1^4+4}{3^4+4}.\frac{5^4+4}{7^4+4}.\frac{9^4+4}{11^4+4}....\frac{17^4+4}{19^4+4}$

Câu 4. Cho biểu thức : $A=\left(\frac{4x}{2+x}+\frac{8x^2}{4-x^2}\right):\left(\frac{x-1}{x^2-2x}-\frac{2}{x}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A=-1$

c) Tìm các giá trị của x để $A<0$

Câu 5. Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-4}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right):\left(1-\frac{x-8}{x^2+x+1}\right)$ $(x\neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$

Câu 6. Cho biểu thức $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right).\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 7. Cho biểu thức $M=\frac{x^4+2}{x^6+1}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Câu 8. Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

Câu 9. Rút gọn biểu thức: $P=\frac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8}$

Câu 10. Cho biểu thức sau:

$$P=\left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5}+\frac{2x-8}{13x-2x^2-20}-\frac{3}{2x-1}\right):\frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3}+1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Câu 11. Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 12. Tính: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^8}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3}\right)\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)}\right).\frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)}\right).\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2}$$

$$= \frac{x.(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)}.\frac{(x + 1).(x + 2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)}.\frac{x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}$$

Vậy $A = \frac{x + 1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \frac{x^2}{x - 1}$

b) $P < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x - 1} < 0$

$\Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

a) Ta có: $P=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2$

Khi $x>1; x-1>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x-1+\frac{1}{x-1}\ge 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$. Vậy GTNN của P bằng $4 \Leftrightarrow x=2$

Câu 3.

Nhận xét được: $n^4+4=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right]$. Do đó:

$$M=\frac{1.\left(2^2+1\right)}{\left(2^2+1\right).\left(4^2+1\right)}.\frac{\left(4^2+1\right).\left(6^2+1\right)}{\left(6^2+1\right).\left(8^2+1\right)}......\frac{\left(16^2+1\right).\left(18^2+1\right)}{\left(18^2+1\right).\left(20^2+1\right)}=\frac{1}{20^2+1}=\frac{1}{401}$$

Câu 4.

a) ĐKXĐ: $x\ne 0; x\ne \pm 2$

$$A=\left(\frac{4x}{2+x}+\frac{8x^2}{4-x^2}\right):\left(\frac{x-1}{x^2-2x}-\frac{2}{x}\right)=\frac{4x(2-x)+8x^2}{(2+x)(2-x)}:\frac{x-1-2(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=\frac{8x-4x^2+8x^2}{(2+x)(2-x)}:\frac{x-1-2x+4}{x(x-2)}=\frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)}:\frac{3-x}{x(x-2)}$$

$$=\frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)}.\frac{x(x-2)}{3-x}=\frac{4x^2}{x-3}$$

b) $A=-1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3}=-1 \Leftrightarrow 4x^2+x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$

c) $A<0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x<3$

Vậy $x<3; x\ne 0; x\ne \pm 2$ thì $A<0$

Câu 5.

1. a) Với $x\ne 1$ ta có:

$$P=\left(\frac{x-4}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}+\frac{x^2+x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right):\frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1}$$

$$=\left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right):\frac{x^2+9}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x-3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.\frac{x^2+x+1}{x^2+9}$$

$$=\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+9\right)}=\frac{x+3}{x^2+9}$$

Vậy $x\ne 1$ thì $P=\frac{x+3}{x^2+9}$

b) $x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(tm) \\ x=1(ktm) \end{array}\right.$. Thay $x=2$ vào P ta có: $P=\frac{2+3}{2^2+9}=\frac{5}{13}$

Kết luận với $x=2$ thì $P=\dfrac{5}{13}$

Câu 6.

a) Giá trị của A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+8\neq 0\\ 8-4x+2x^2-x^3\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2\neq -8\\ 4(2-x)+x^2(2-x)\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\neq -4\\ (2-x)(4+x^2)\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 0\end{cases}$$

Ta có:

$$A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right].\left(\frac{x^2-x+2}{x^2}\right)$$

$$=\frac{(x^2-2x)(2-x)-4x^2}{2(x^2+4)(2-x)}.\frac{x^2+x-2x-2}{x^2}$$

$$=\frac{2x^2-x^3-4x+2x^2-4x^2}{2(x^2+4)(2-x)}.\frac{x(x+1)-2(x+1)}{x^2}$$

$$=\frac{-x(x^2+4)}{2(x^2+4)(2-x)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

b) Ta có:

$*\ \dfrac{x+1}{2x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+1\vdots 2x\Rightarrow 2x+2\vdots 2x$ mà $2x\vdots 2x$

$$\Rightarrow 2\vdots 2x\Rightarrow 1\vdots x\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1(tm)\\ x=-1(tm)\end{array}\right.$$

Vậy $A=\dfrac{x+1}{2x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-1$

Câu 7.

a) Ta có:

$$M=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4+2+(x^2-1)(x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^4+2+x^4-1-x^4+x^2-1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$=\frac{x^4+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{x^2.\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$$

Vậy $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

b) Ta có : $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

- Nếu $x=0$ ta có $M=0$
- Nếu $x\neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-1}$

Ta có: $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1=\left(x^2-2.x.\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1\geq 1$

Nên ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2-1}}\leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Vậy M lớn nhất là $M=1$ khi $x=1$

Câu 8. Ta có:

$$\frac{\left(x^2+a\right)\left(1+a\right)+a^2x^2+1}{\left(x^2-a\right)\left(1-a\right)+a^2x^2+1}=\frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2}=\frac{x^2\left(1+a+a^2\right)+\left(1+a+a^2\right)}{x^2\left(1-a+a^2\right)+\left(1-a+a^2\right)}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)\left(1+a+a^2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(1-a+a^2\right)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$$

Câu 9.

$$P=\frac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8}=\frac{a\left(a^2-1\right)-4\left(a^2-1\right)}{\left(a^3-8\right)-7a\left(a-2\right)}=\frac{\left(a^2-1\right)\left(a-4\right)}{\left(a-2\right)\left(a^2-5a+4\right)}$$

$$=\frac{\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a-4\right)}{\left(a-2\right)\left(a-1\right)\left(a-4\right)}=\frac{a+1}{a-2}$$

Vậy $P=\dfrac{a+1}{a-2}$ với $a\neq\left\{1;2;4\right\}$

Câu 10. Phân tích:

$4x^2-12x+5=\left(2x-1\right)\left(2x-5\right)$; $13x-2x^2-20=\left(x-4\right)\left(5-2x\right)$

$21+2x-8x^2=\left(3+2x\right)\left(7-4x\right)$; $4x^2+4x-3=\left(2x-1\right)\left(2x+3\right)$

Điều kiện: $x\neq\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{-3}{2};\dfrac{7}{4};4\right\}$

a) Rút gọn: $P=\dfrac{2x-3}{2x-5}$

b) $|x|=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow P=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow P=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

c) $P=\dfrac{2x-3}{2x-5}=1+\dfrac{2}{x-5}$

Vậy $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-5\in U(2)=\{\pm1;\pm2\}$

$x-5=-2\Rightarrow x=3(tm)$

$x-5=-1\Rightarrow x=4(tm)$

$x-5=1\Rightarrow x=6(tm)$

$x-5=2\Rightarrow x=7(tm)$

d) $P=\dfrac{2x-3}{2x-5}=1+\dfrac{2}{x-5}$

Ta có: $1>0\Rightarrow P>0\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-5}>0\Rightarrow x-5>0\Leftrightarrow x>5$

Với $x>5$ thì $P>0$

Câu 11.

a) Ta có:

$a^3-4a^2-a+4=(a-1)(a+1)(a-4)$

$a^3-7a^2+14a-8=(a-2)(a-1)(a-4)$

Nêu ĐKXĐ: $a\neq1;a\neq2;a\neq4$

Rút gọn $P=\dfrac{a+1}{a-2}$

b)

$P=\dfrac{a-2+3}{a-2}=1+\dfrac{3}{a-2}$; ta thấy P nguyên khi $a-2$ là ước của 3, mà

$U(3)=\{-1;1;-3;3\}$, từ đó tìm được $a\in\{-1;3;5\}$

Câu 12. Ta có:

$$3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}\quad(1)$$

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^8}\quad(2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2A=1-\frac{1}{3^8}=1-\frac{1}{6561}=\frac{6560}{6561}.\Rightarrow A=\frac{3280}{6561}$$

✪ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC MỘT BIẾN

🗁 Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa đa thức

★Thí dụ 1. Tính giá trị biểu thức $F=\frac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}$ với $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1$.

Do đó:

$x^3=x.x^3=x(3x-1)=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3;$

$x^4=x^3.x=(8x-3).x=8(3x-1)-3x=21-8;$

$x^5=x^4.x=(21-8)x=21x^2-8x=21(3x-1)-8x=55x-21.$

Từ đó ta có:

$x^5-3x^3-10x+12=55x-21-3(8x-3)-10x+12=21x;$

$x^4+7x^2+15=21x-8+7(3x-1)+15=42.$

Vậy: $F=\frac{x^5-3x^3-10x+12}{x^4+7x^2+15}=\frac{21x}{42x}=\frac{1}{2}\ (\text{do } x\neq 0)$

★Thí dụ 2. Cho $t=\frac{x}{x^2-x+1}$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ theo t.

Lời giải

1) Nếu $x=0$ thì $t=0$ và $A=0$.

2) Nếu $x\neq 0$ thì $\left(x+\frac{1}{x}-1\right)t=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{t}+1\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(1+\frac{1}{t}\right)^2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1.$

Khi đó: $A=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}=\frac{t^2}{1+2t}$.

Từ hai trường hợp trên suy ra $A=\frac{t^2}{1+2t}$.

🗁 Dạng 2: Tính giá trị biểu thức chứa căn thức

★Thí dụ 3. Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị biểu thức

$H=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2023$

Lời giải

Ta có:

$x+\sqrt{3}=2 \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{3} \Rightarrow (2-x)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

$H=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2023$

$=x^5-4x^4+x^3+x^4-4x^3+x^2+5(x^2-4x+1)+2018$

$=x^3(x^2-4x+1)+x^2(x^2-4x+1)+5(x^2-4x+1)+2018$

$=(x^3+x^2+5)(x^2-4x+1)+2018=2018 \quad$ (do $\quad x^2-4x+1=0$)

Vậy $H=2018$ khi $x+\sqrt{3}=2$

★**Thí dụ 4.** Cho $x=\dfrac{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=(x^2+2x-1)^{2012}$.

Lời giải

Ta có: $x=\dfrac{\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}-1$

$\Rightarrow x^2+2x-1=1$

$\Rightarrow P=(x^2+2x-1)^{2012}=1$

★**Thí dụ 5.** Cho $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$. Tính $Q=x^3+12x+2009$.

Lời giải

Ta có : $x^3=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)^3$

$=\left(1+\sqrt{65}\right)-\left(\sqrt{65}-1\right)-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{65}\right)\left(\sqrt{65}-1\right)}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)$

$=2-12\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}}-\sqrt[3]{\sqrt{65}-1}\right)=2-12x$.

Do đó: $Q = 2-12x +12x + 2009 = 2011$.

🗁 Dạng 3: Tính giá trị biểu thức có biến là nghiệm của phương trình cho trước

★**Thí dụ 6.** Cho a là nghiệm của phương trình: $x^2-3x+1=0$. Không cần tính a hãy tính giá trị biểu thức: $Q=\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}$

Lời giải

Do a là nghiệm của phương trình: $x^2-3x+1=0$ nên $a^2-3a+1=0 \Rightarrow a^2+1=3a$.

Suy ra: $Q=\dfrac{a^2}{a^4+a^2+1}=\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2-a^2}=\dfrac{a^2}{(3a)^2-a^2}=\dfrac{a^2}{8a^2}=\dfrac{1}{8}$

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng phương trình $x^2+x-1=0$ có hai nghiệm trái dấu. Gọi x_1 là nghiệm âm của phương trình . Tính giá trị của biểu thức $D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1$.

Lời giải

Phương trình $x^2+x-1=0$ có ac = -1 < 0 nên có 2 nghiệm trái dấu.

Vì x_1 có là nghiệm của phương trình nên: $x_1^2+x_1-1=0 \Rightarrow x_1^2=1-x_1$

Do đó:

$$x_1^4=\left(1-x_1\right)^2=1-2x_1+x_1^2=1-2x_1+1-x_1=2-3x_1;$$
$$x_1^8=\left(2-3x_1\right)^2=4-12x_1+9x_1^2=4-12x_1+8x_1^2+x_1^2$$
$$=4-12x_1+8\left(1-x_1\right)+x_1^2=12-20x_1+x_1^2;$$
$$x_1^8+10x_1+13=12-20x_1+x_1^2+10x_1+13=25-10x_1+x_1^2=\left(5-x_1\right)^2$$

Do đó:

$$D=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+x_1.=\sqrt{\left(5-x_1\right)^2}+x_1=\left|5-x_1\right|+x_1$$

Do x_1 là nghiệm âm của phương trình nên $x_1 < 0$ nên $5 - x_1 > 0$ do đó:

$$D=\left|5-x_1\right|+x_1=5-x_1+x_1=5$$

★**Thí dụ 8.** Gọi m là nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2+x-1=0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức: $A=\dfrac{2m-3}{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}+2m^2}$

Lời giải

Do m là nghiệm dương của phương trình $\sqrt{2}.x^2+x-1=0$ nên $\sqrt{2}.x^2=1-x \Rightarrow 0<x<1$ nên $4x^4=1-2x+x^2$. Do đó ta có:

$$A=\frac{2m-3}{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}+2m^2}=\frac{(2m-3)\left(\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2\right)}{4m^2-4m+6-4m^4}$$
$$=\frac{(2m-3)\left(\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2\right)}{-4m+6}=\frac{\sqrt{2\left(2m^4-2m+3\right)}-2m^2}{-2}$$
$$=\frac{\sqrt{2(2-m)^2}}{-2}+m^2=\frac{\sqrt{2}\left(2-m\right)}{-2}+\frac{1-m}{\sqrt{2}}=\frac{m-2}{\sqrt{2}}+\frac{1-m}{\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài tập luyện tập

Câu 1. Cho x, y thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+1.$$

Câu 2. *(Chuyên Hải Dương 2010)*

Cho $x=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $M=\left(9x^3-9x^2-3\right)^2$.

Câu 3. Cho $m=\sqrt[3]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-1}$, $\quad n=\sqrt[3]{\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}+2}$.

Tính giá trị biểu thức $\quad T=2(20m+6n)^2-38$.

Câu 4. Tính giá trị của biểu thức

$$B=\frac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2} \text{ biết } a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}.$$

Câu 5. *(HSG Hải An 2018)*

Cho biểu thức $A=\left(x^2-x-1\right)^{2018}+2019.$

Tính giá trị biểu thức A khi $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

Câu 6. *(HSG Lê Chân 2018)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Chứng ming rằng: $x^4-16x^2+32=0.$

Câu 7. *(HSG Thanh Hóa 2017)*

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2}-\frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Câu 8. *(HSG TP. Hải Phòng 2018)*

Cho $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh $a^2-2a-2=0.$

Câu 9. *(HSG Hải Dương 2016)*

Cho biểu thức: $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1\le x\le 1$).

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\frac{1}{2019}$

Câu 10. *(HSG Hải Phòng 2016)*

Cho $x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P=\left(12x^2+4x-55\right)^{2017}$.

Câu 11. *(HSG Hải Dương 2015)*

Cho $x=3-\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$.

Câu 12. *(HSG Hưng Yên 2015)*

Cho $x=1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{x^3-3x^2-3x+2018}$.

Câu 13. *(HSG Phú Thọ 2015)*

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}$ với $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 14. *(HSG TP. Hải Phòng 2015)*

Tính giá trị của biểu thức $A=x^3-6x+1976$ với $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Câu 15. *(HSG Hưng Yên 2014)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}.$$

Câu 16. *(HSG Hải Dương 2014)*

Tính giá trị của biểu thức: $A=2x^3+3x^2-4x+2$

với $x=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$

Câu 17. *(HSG Hưng Yên 2013)*

Cho $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=(4x^5+4x^4-x^3+1)^{19}+\left(\sqrt{4x^5+4x^4-5x^3+5x+3}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}\right)^{2014}.$$

Câu 18. *(HSG Phú Thọ 2013)*

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$, biết $a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$.

Câu 19. *(HSG Kinh Môn 2013)*

Không dùng máy tính. Hãy tính giá trị của biểu thức $P=(4x^3-6x^2-1)^{2015}+2014$

với $x=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)$.

Câu 20. *(HSG TP. Thanh Hóa)*

Với $x = \dfrac{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức: B = $\left(3x^3+8x^2-2\right)^{2015}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Có $x = \sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}} + \sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$

$$\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}\cdot\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\left(\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$$

$$A = x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4+3x^2-2xy) + (x^3y+3xy-2y^2)+1$$

$$= x(x^3+3x-2y) + y(x^3+3x-2y)+1 = 1$$

Câu 2. Từ $x = \dfrac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$

$$\Rightarrow (3x-1) = \left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}}+\sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}}\right)^3$$

$$\Rightarrow (3x-1)^3 = 8 + 3(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 - 9x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow M = (-1)^2 = 1$$

Câu 3.

Ta có: $m = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} - 1} = 1$

$$n = \sqrt[3]{\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} + 2} = 2$$

Do đó: $T = 2(20+12)^2 - 38 = 2010$

Câu 4.

$$B = \frac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2} = \frac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{a+2}{a-2}$$

Xét $a^3 = 55+\sqrt{3024}+55-\sqrt{3024}+3\sqrt[3]{\left(55+\sqrt{3024}\right)\left(55-\sqrt{3024}\right)}.a$

$\Leftrightarrow a^3 = 110 + 3a$

$\Leftrightarrow (a-5)(a^2+5a+22) = 0$

$\Leftrightarrow a = 5 \left(\text{do } a^2+5a+22>0\right)$

$\Rightarrow B = \dfrac{a+2}{a-2} = \dfrac{7}{3}$

Câu 5. Ta có

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1\right)}{\sqrt{3}+1-1}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1-\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}{1} = 2$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta được

$A = \left(2^2-2-1\right)^{2018} + 2019 = 1 + 2019 = 2020$

Câu 6.

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$= 8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3}.\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= 8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow x^2-8 = -2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x^2-8\right)^2 = \left[-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3.\left(2-\sqrt{3}\right)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+64 = 4\left(2+\sqrt{3}\right)+12.\left(2-\sqrt{3}\right)+8\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+64 = 32$$

$$\Leftrightarrow x^4-16x^2+32 = 0$$

Vậy $x^4-16x^2+32=0$ (đpcm)

Câu 7.

Vì $x = \sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

nên $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $P = \dfrac{2x^{2017}\left(2x^2+2x-1\right)+2x+1}{\left(2x^2+2x-1\right)+x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1} = 3-\sqrt{3}.$

Câu 8.

$$a^2 = 3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}+3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}$$

$$= 6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$= 6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 6+2\left(\sqrt{3}-1\right)4+2\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

Vì $a>0$ nên $a=\sqrt{3}+1$. Do đó $(a-1)^2 = 3$ hay $a^2-2a-2=0$.

Câu 9.

$$P=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow P^2 = (1-x)\left(2+2\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\right) = 2(1-x)\left(1+|x|\right)$$

Mà $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \Rightarrow P=\sqrt{2}(1-x)$

Với $x=-\dfrac{1}{2019} \Rightarrow P=\dfrac{2019}{2018}\sqrt{2}.$

Câu 10.

Ta có :

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}$$

$$x=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \frac{3-1}{1} = 2$$

Thay giá trị của x vào P ta được: $P=\left(12.2^2+4.\,2-55\right)^{2017} = 1^{2017} = 1$

Câu 11.

Ta có: $x=3-\sqrt{5} \Leftrightarrow 3-x=\sqrt{5} \Rightarrow (3-x)^2=5 \Rightarrow x^2-6x+4=0$

$$A = x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$$

$$= (x^5-6x^4+4x^3)-2(x^4-6x^3+4x^2)+(x^3-6x^2+4x)+20(x^2-6x+4)+24$$

$$A = x^3(x^2-6x+4)-2x^2(x^2-6x+4)+x(x^2-6x+4)+20(x^2-6x+4)+24$$

$$A=24$$

Câu 12.

Có $x+1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2=\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\sqrt[3]{2}x$.

$$\Rightarrow (x+1)^3 = 2x^3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-3x=1 \Rightarrow A=2019$$

Câu 13.

Ta có $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1$

Khi đó $x^3=x^2.x=(3x-1)x=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3$

$x^4=x^3.x=(8x-3)x=8x^2-3x=8(3x-1)-3x=21x-8$

$x^5=x^4.x=(21x-8)x=21x^2-8x=21(3x-1)-8x=55x-21$

Suy ra P = $\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}=\dfrac{(55x-21)-4(8x-3)-17x+9}{(21x-8)+3(3x-1)+2x+11}$

$=\dfrac{6x}{32x}=\dfrac{3}{16}$ (do $x\neq 0$). Vậy P = $\dfrac{3}{16}$.

Câu 14.

+ Đặt u = $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$;v = $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Ta có $x=u+v$ và $u^3+v^3=40$

u.v = $\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}=2$

$x=u+v\Rightarrow x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=40+6x$

hay $x^3-6x=40$. Vậy A = 2016.

Câu 15.

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Thay $x=\sqrt{2}$ vào A ta có

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}=\left(4+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1\right)^{2019}=1^{2019}=1$$

Câu 16.

Đặt a = $\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}$, $a>0$

$$a^2=4+2\sqrt{4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

$x=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x^2+2x-1=0$

$B=2x^3+3x^2-4x+2=2x\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)+1=1$

Câu 17. Ta có $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow 2x=\sqrt{2}-1 \Rightarrow 2x+1=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4x^2+4x-1=0$ (a)

Do đó:

$4x^5+4x^4-x^3+1=x^3(4x^2+4x-1)+1=1$

$4x^5+4x^4-5x^3+5x+3=x^3\ (4x^2+4x-1)$ - $x\ (4x^2+4x-1)+(4x^2+4x-1)+4=4$

Từ (a) $\Rightarrow 2x^2+2x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x^2+2x}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; $\sqrt{2}-2x=1$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}=\dfrac{1-\sqrt{2}x}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-2x=1$

Do đó $A=1^{19}+\left(\sqrt{4}\right)^3+1^{2014}=10$

Câu 18. Ta có $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}=\dfrac{\left(a-1\right)^2\left(a+2\right)}{\left(a-1\right)^2\left(a-2\right)}=\dfrac{a+2}{a-2}$;

mà $a^3=110+3\sqrt[3]{55^2-3024}\left(\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\right)$.

$\Rightarrow a^3=110+3a \Leftrightarrow a^3-3a-110=0$.

$\Leftrightarrow \left(a-5\right)\left(a^2+5a+22\right)=0 \Leftrightarrow a=5$. Suy ra $P=\dfrac{7}{3}$.

Câu 19. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \\ b=\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=1 \\ a^3+b^3=6 \\ a+b=2x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow (2x-1)^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=6+3(2x-1)$

$\Rightarrow (2x-1)\left[(2x-1)^2-3\right]=6$

$\Rightarrow 4x^3-6x^2-1=1$

Vậy $P=(4x^3-6x^2-1)^{2015}++2014=1+2014=2015$.

Câu 20.

Ta có $x=\dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}$.

Do đó B = - 1.

✪ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN

Dạng 1: Sử dụng phương pháp phân tích

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$.

Tính giá trị biểu thức: $P=(a^{23}+b^{23})(b^{3}+c^{3})(c^{2019}+a^{2019})$

Lời giải

Ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

$(a+b+c)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)=1$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

$\Leftrightarrow (a^2b+abc+ca^2)+(ab^2+b^2c+abc)+(abc+bc^2+c^2a)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+ca^2+b^2c+ab^2+c^2b+ac^2+2abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$

* Với a = - b thì: $a^{23}+b^{23}=(-b)^{23}+b^{23}=0$

Do đó: $P=(a^{23}+b^{23})(b^{3}+c^{3})(c^{2019}+a^{2019})=0$

* Với b = - c thì: $b^3+c^3=(-c)^3+c^3=0$

Do đó: $P=(a^{23}+b^{23})(b^{3}+c^{3})(c^{2019}+a^{2019})=0$

Với: c = - a thì: $c^{2019}+a^{2019}=(-a)^{2019}+a^{2019}=0$

Do đó: $P=(a^{23}+b^{23})(b^{3}+c^{3})(c^{2019}+a^{2019})=0$

Vậy ta có: P = 0

★**Thí dụ 2.** Cho các số dương x, y thỏa mãn: $7x^2-13xy-2y^2=0$ (1)

Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{2x-6y}{7x+4y}$.

Lời giải

Từ (1) ta có: $(7x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x=2y$ (do x, y > 0)

Thay x = 2y vào A ta được: $A=\frac{2x-6y}{7x+4y}=\frac{4y-6y}{14y+4y}=\frac{-2y}{18y}=\frac{-1}{9}$

★**Thí dụ 3.** Cho các số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{2010}{x}+1=\dfrac{2010}{y} \\ x+2y=2335 \end{cases}$ (2)

Tính giá trị biểu thức: $B=\dfrac{x}{y}$.

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{2010}{x}$, $b=\dfrac{2010}{y}$ với $a, b>0$.

Từ (2) suy ra: $\begin{cases} a+1=b \\ \dfrac{2010}{a}+\dfrac{2.2010}{b}=2345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=b \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{7}{6}$

$\Leftrightarrow 7a^2-11a-6=0 \Leftrightarrow a=2\ (\text{do } a>0) \text{ suy ra}: b=3.$

Vậy: $B=\dfrac{x}{y}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$.

Dạng 2: Sử dụng phương pháp hệ số bất định

★**Thí dụ 4.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} (x-y)(x+y)=z^2 \\ 4y^2=5+7z^2 \end{cases}$ (4)

Tính giá trị biểu thức $D=2x^2+10y^2-23z^2$.

Lời giải

Ta có: (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} z^2-x^2-y^2=0 \\ 4y^2-7z^2=5. \end{cases}$ (4)

Ta tìm các số thực a, b thỏa mãn: $a(z^2-x^2-y^2)+b(4y^2-7z^2)=2x^2+10y^2-23z^2$

$\Leftrightarrow ax^2+(4b-a)y^2-(7b+a)z^2=2x^2+10y^2-23z^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 4b-a=10 \\ 7b+a=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3. \end{cases}$

Vậy D = 2.0 + 3.5 = 15.

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{t}{x+2y+2z}=1 \\ \dfrac{t}{z-3x}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (5).

Tính giá trị biểu thức: $E=\dfrac{t}{x+8y+9z}$.

Lời giải.

Ta có: (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{t}+2\dfrac{y}{t}+2\dfrac{z}{t}=1 \\ \dfrac{z}{t}-3\dfrac{x}{t}=2 \end{cases}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{E}=\dfrac{x}{t}+8\dfrac{y}{t}+9\dfrac{z}{t}$. Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn:

$$a\left(\frac{x}{t}+2.\frac{y}{t}+2.\frac{z}{t}\right)+b\left(-3.\frac{x}{t}+\frac{z}{t}\right)=\frac{x}{t}+8.\frac{y}{t}+9.\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)\frac{x}{t}+2a.\frac{y}{t}+(2a+b).\frac{z}{t}=\frac{x}{t}+8\frac{y}{t}+9\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=1 \\ 2a=8 \\ 2a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{E}=4.1+1.2=6.$$

Vậy $E=6$

★Thí dụ 6. Cho số thực x, y, z, t thỏa mãn: $\begin{cases} 5x=3y=\dfrac{5}{2}z & (1) \\ \dfrac{t}{x}-\dfrac{t}{y}+\dfrac{t}{z}=\dfrac{9}{10} & (2) \end{cases}$

Tính giá trị biểu thức: $C=\dfrac{t^2}{xy}+\dfrac{t^2}{yz}+\dfrac{t^2}{zx}$.

Lời giải.

Từ (1) ta có: $y=\dfrac{5}{3}x, z=2x.$

Thay $y=\dfrac{5}{3}x, z=2x.$ vào (2) ta được: $\dfrac{t}{x}-\dfrac{t}{\frac{5}{3}x}+\dfrac{t}{2x}=\dfrac{9}{10}\Rightarrow t=x.$

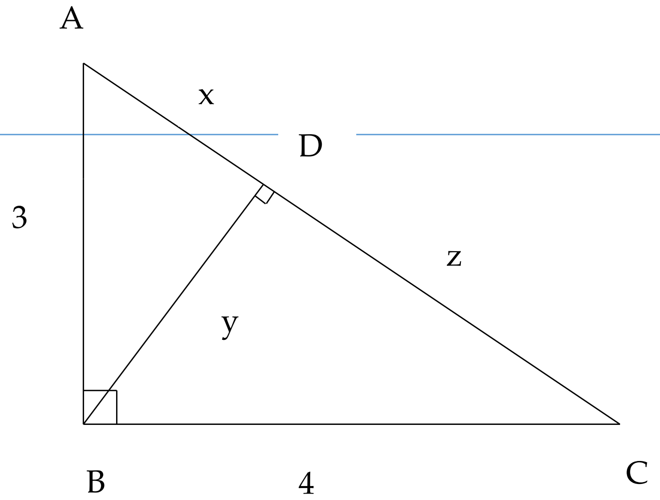
Vì thế: $C=\dfrac{t^2}{xy}+\dfrac{t^2}{yz}+\dfrac{t^2}{zx}=\dfrac{x^2}{xy}+\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{x^2}{zx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y}.\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{5}.$

🗁 Dạng 3: Sử dụng phương pháp hình học

★Thí dụ 7. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+z^2=16 \\ y^2=xz \end{cases} \quad (*)$

Tính giá trị biểu thức $G=xy+yz$

Lời giải



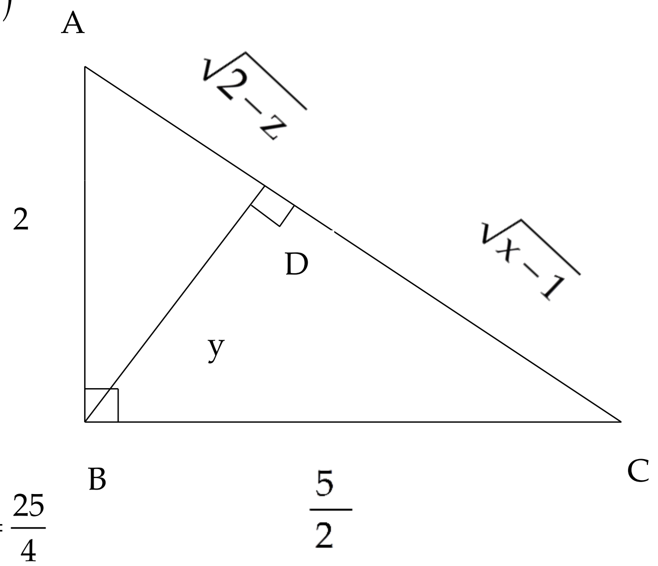
Xét tam giác ABC vuông tại B, có AB = 3, BC = 4 đường cao BD. Đặt AD = x, BD = y, DC = z, ta thấy x, y,z hoàn toàn thỏa mãn hệ thức (*). Khi đó:

$G = xy + yz = y(x+z) = 2.S_{ABC} = AB.BC = 3.4 = 12$

★**Thí dụ 8**. Cho 3 số thực x, y, z với y > 0 thỏa mãn: $\begin{cases} x + y^2 = \dfrac{29}{4} \\ y^2 - z = 2 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases} \quad (7)$

Tính giá trị biểu thức $H = y\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}\right)$

Lời giải



Từ (7) suy ra x > 1 và z < 2.

Ta viết lại hệ (7) dưới dạng:

Ta viết lại hệ (7) dưới dạng: $\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4} \\ y^2 + \left(\sqrt{2-z}\right)^2 = 4 \\ y^2 = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-z} \end{cases}$

Xét tam giác ABC vuông tại B, đường cao BD với $AB = \dfrac{5}{2}, BC = 2.$

Đặt $BD = y, AD = \sqrt{x-1}, CD = \sqrt{2-z}$

Rõ ràng x, y, z thỏa mãn hệ. Từ đó ta có:

$H = y\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}\right) = 2.S_{ABC} = 2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{2}.2 = 5.$

Vậy $H = 5$.

🗁 Dạng 4: Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

★Thí dụ 9. Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a+c-b}{b}=\dfrac{b+c-a}{a}$

Tính $A=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Lời giải

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)}{a+b+c}=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b-c=c\\a+c-b=b\\b+c-a=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2c\\a+c=2b\\b+c=2a\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c.2a.2b}{abc}=8$$

🗁 Bài tập vận dụng

Câu 1. *(Chuyên Khánh Hòa 2018)*

Cho 3 số x,y,z khác 0 thỏa mãn : $x+y+z=\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xyz}=4;\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}>0$

Tính $Q=\left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)$

Câu 2. *(Chuyên Nam Định 2016)*

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=6$;

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{47}{60}.$$

Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Câu 3. *(Chuyên Bình Dương 2018)*

Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x^{2019}+y^{2019}+2018(x+y)+2020$

Câu 4. *(Chuyên Hải Dương 2016)*

Tính giá trị biểu thức $P=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$ biết:

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\,,\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\,.$$

Câu 5. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2018)*

Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$.

Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 6. *(Chuyên Phú Thọ 2018)*

a) Cho a,b,c là 3 số thực đôi một khác nhau: $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$. Tính $P=x.abc$

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+z=9;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$

Câu 7. *(Chuyên Lào Cai 2018)*

Cho: $\begin{cases} x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} \end{cases}$.

Tính giá trị biểu thức $M=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$

Câu 8. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2015)*

Cho hai số thực a , b thỏa điều kiện $ab = 1$, $a + b \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Câu 9. *(HSG huyện Thủy Nguyên 2018)*

Cho các số thực $x,\ y,\ z\neq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$. Tính giá trị biểu thức $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}$.

Câu 10. *(HSG huyện Vĩnh Bảo 2018)*

Cho ba số $x,y,z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}.$$

Câu 11. *(HSG Nam Định 2015)*

Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$.

Câu 12. *(HSG TP. Hải Phòng 2015)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$.

Rút gọn biểu thức: $B=\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}$.

Bài 13. *(HSG Hải Dương 2013)*

Cho *a* và *b* là các số thỏa mãn $a>b>0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Bài 14. *(HSG huyện Yên Định 2012)*

Cho $a+b+c=0$, tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{a^2+c^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$

Bài 15. *(HSG huyện Kinh Môn 2012)*

Tính giá trị của biểu thức sau:

$A = x^2(x + 1) - y^2(y - 1) + xy - 3xy(x - y + 1) + 1974$

Biết $x - y = \sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$

Bài 16. *(Chọn HSG tỉnh năm 2014)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}$

Tính giá trị biểu thức với: $x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right); y=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right); a,b\ge 1$

Bài 17. *(HSG Đăk Lăk năm 2014)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

Bài 18. *(HSG Vĩnh Long năm 2015)*

Cho $x+y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^4+y^4.

Bài 19. *(HSG TP. Hồ Chí Minh năm 2015)*

Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab=a-b$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab.$$

Bài 20. *(HSG Bắc Ninh năm 2016)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0; a^2+b^2\ne c^2; b^2+c^2\ne a^2; c^2+a^2\ne b^2$.

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\dfrac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\dfrac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$.

Bài 21. *(HSG Đồng Nai năm 2016)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức

$$P=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc$$

Bài 22. *(HSG Hưng Yên năm 2016)*

Cho $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2};b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính a^7+b^7.

Bài 23. *(HSG TP Hồ Chí Minh năm 2016)*

Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện sau $a-b=7;b-c=3$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2-c^2-2ab+2bc}$

Bài 24. *(Chuyên Phú Thọ năm 2016)*

Cho các số a, b thoả mãn $2a^2+11ab-3b^2=0;b\ne 2a;b\ne -2a$. Tính giá trị biểu thức:

$$T=\frac{a-2b}{2a-b}+\frac{2a-3b}{2a+b}$$

Bài 25. *(Chuyên Phú Thọ năm 2016)*

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{2x+2xz+1}+\dfrac{2xy}{y+2xy+10}+\dfrac{10z}{10z+yz+10}$ với x, y, z là các số thỏa mãn $xyz=5$ và biểu thức P có nghĩa.

Bài 26. *(Chuyên TP. Hà Nội năm 2016)*

Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc\ne 0$.

Tính: $P=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

Bài 27. *(Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2017)*

Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$

Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$

Bài 28. *(Chuyên Phú Thọ năm 2017)*

Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1)$.

Bài 29. Cho x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{yz}{x^2+2yz}+\dfrac{zx}{y^2+2zx}+\dfrac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 30. Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ và $\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=4$.

Tính giá trị của biểu thức $P = (x + 2y + z)^{2012}$.

Bài 31. Cho $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2018}+b^{2018}+c^{2018}$

Câu 32. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: ab + bc +ca = 1. Tính giá trị biểu thức:

a) $A=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ b) $B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

Câu 33. Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^{100}+b^{100}=a^{101}+b^{101}=a^{102}+b^{102}$

Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2010}+b^{2010}$

Câu 34. Cho số $x\left(x\in R;x>0\right)$ thoả mãn điều kiện: $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

Tính giá trị các biểu thức: $A=x^3+\frac{1}{x^3}$ và $B=x^5+\frac{1}{x^5}$

Câu 35. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = a + 2b + 3c = 14$.

Tính giá trị của biểu thức T = abc.

Câu 36. Cho a, b, c đôi một khác nhau. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}$$

Câu 37. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Câu 38. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị biểu thức: $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Câu 39. Cho a, b,c là các số thực thỏa mãn: $a+b+c=6;\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=8$

Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$

Câu 40. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}$

Câu 41. *(HSG Vĩnh Phúc 2011)*

Cho $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị biểu thức sau:

$$A=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+...+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

Câu 42. Cho a, b, c thỏa mãn: $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=2013$

Tính giá trị biểu thức: $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$.

Câu 43. Cho a,b,c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$

Câu 44. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2-2y^2=xy\left(x+y\neq 0;y\neq 0\right)$

Câu 45. Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x=2011$

Câu 46. Tìm 3 số dương a,b,c thỏa mãn : $\frac{a^2+7}{4}=\frac{b^2+6}{5}=\frac{c^2+3}{6}$ và $a^2+2c^2=3c^2+19$

Câu 47. Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=210$. Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

Câu 48. Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z=7;\quad x^2+y^2+z^2=23;\qquad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H=\frac{1}{xy+z-6}+\frac{1}{yz+x-6}+\frac{1}{zx+y-6}$

Câu 49. Biết $a^3-3ab^2=5$ và $b^3-3a^2b=10$. Tính $M=\frac{a^2+b^2}{2018}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có: $x+y+z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{2xyz}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{xyz}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

Từ đó

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+xz)(x+y+z)=xyz$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{array}\right.$$

Hơn nữa các mũ của Q đều lẻ nên có ít nhất 1 thừa số bằng 0. Vậy $Q=0$

Câu 2. Do $a+b+c=6$ nên $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{6-(b+c)}{b+c}+\frac{6-(c+a)}{c+a}+\frac{6-(a+b)}{a+b}$

$$=\frac{6}{b+c}+\frac{6}{c+a}+\frac{6}{a+b}-3$$

$$=6\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=6.\frac{47}{60}-3=\frac{47}{10}-3=\frac{17}{10}.$$

Câu 3. Ta có:

$$\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\frac{2018}{y+\sqrt{2018+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\frac{2018\left(\sqrt{2018+y^2}-y\right)}{2018+y^2-y^2}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}-y \quad (1)$$

Biến đổi tương tự ta có:

$$\sqrt{2018+x^2}-x=\sqrt{2018+y^2}+y \qquad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2018+x^2=2018+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$$

+)Với $x=y$ ta có:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2} = \sqrt{2018+x^2} - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{2019} + y^{2019} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = x^{2019} + y^{2019} + 2018(x+y) + 2020 = 2020$$

+)Với $x = -y$, ta có: $\begin{cases} x^{2019} + y^{2019} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q = 2020$

Vậy $Q = 2020$

Câu 4. Ta có:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2} \ (1).$$

$$= 3+2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)$$

Tương tự: $y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$ (2).

Trừ vế với vế (1) và (2) ta được: $x^3 - y^3 + 3(x-y) = -20\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1) = -20\sqrt{2}$. Vậy $P = -20\sqrt{2}$

Câu 5. Ta có: $a+b+c = 0 \Leftrightarrow b = -a-c$

$$\Rightarrow a^2 = 2\left(a+c+1\right)\left(a+b-1\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2\left(a+c+1\right)\left(a-a-c-1\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2\left(a+c+1\right)\left(-c-1\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2\left(a+c+1\right)\left(c+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a\left(c+1\right) + 2\left(c+1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+c+1\right)^2 + \left(c+1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c+1 = 0 \\ c+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -a-c = 1$$

$$\Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 = 0^2 + 1^2 + \left(-1\right)^2 = 2$$

Vậy $A = 2$

Câu 6.

a) Ta có: $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow a - b = \dfrac{b-c}{bc}$

Tương tự ta có: $b - c = \dfrac{c-a}{ac}; c - a = \dfrac{a-b}{ab}$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = \frac{b-c}{bc}\cdot\frac{c-a}{ac}\cdot\frac{a-b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow (abc)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} abc = 1 \\ abc = -1 \end{array}\right.$$

Nếu $abc = 1 \Rightarrow P = x$ thì giả thiết tương đương với

$a + ac = b + ba = c + cb = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = (a+ac)(b+ba)(c+cb) = abc(a+1)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) \\ a+b+c+ab+ac+cb = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = abc + ab + ac + bc + 1 + a + b + c = ab + ac + bc + a + b + c + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 3x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = 2 \\ P = -1 \end{array}\right.$$

Nếu $abc = -1$, biến đổi hoàn toàn tương tự

$a - ac = b - ba = c - cb = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = (a-ac)(b-ba)(c-cb) = abc(a-1)(b-1)(c-1) = (a-1)(b-1)(c-1) \\ a+b+c-ac-ba-cb = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = abc - ab - ac - bc - 1 + a + b + c = -ab - ac - bc + a + b + c - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 3x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = 2 \\ P = -1 \end{array}\right.$$

Vậy giá trị của P là $P = 2$ hoặc $P = -1$

b) Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 1$. Do đó dấu bằng phải xảy ra thì mới xảy ra giả thiết hay $x = y = z = 3$

Thay vào T ta được $T = 162$

Vậy giá trị nhỏ nhất hay cũng là giá trị duy nhất của T là 162.

Câu 7. Ta có:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \\ y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 \\ y^3 = \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3+2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right) - 3 + 2\sqrt{2} \\ y^3 = 17+12\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right) - 17 + 12\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \\ y^3 = 24\sqrt{2} - 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow M=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$$
$$=x^3-3xy(x-y)-y^3+3xy(x-y)+3(x-y)$$
$$=x^3-y^3+3(x-y)$$
$$=4\sqrt{2}-3x-24\sqrt{2}+3y+3x-3y=-20\sqrt{2}$$

Câu 8. Với $ab=1$, $a+b\neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4(ab)^2}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$
$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5}$$
$$=\frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}$$
$$=\frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}$$
$$=1$$

Vậy $P=1$, với $ab=1$, $a+b\neq 0$.

Câu 9.

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=0\\ y-\dfrac{1}{y}=0\\ z-\dfrac{1}{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=-1\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Do đó $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=3$ khi $x=y=z=1$

Hoặc $P=x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}=1$ khi $x=y=z=-1$

Câu 10. Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=y(x+z)+x(x+z)=(x+y)(x+z)$

Tương tự: $1+y^2=(x+y)(y+z)$; $1+z^2=(x+z)(z+y)$

Do đó: $P=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

$=x\sqrt{\dfrac{(y+z)(y+x)(x+z)(z+y)}{(x+y)(x+z)}}+y\sqrt{\dfrac{(z+x)(z+y)(x+y)(x+z)}{(x+y)(y+z)}}+z\sqrt{\dfrac{(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)}{(z+x)(z+y)}}$

$=x\sqrt{(y+z)^2}+y\sqrt{(z+x)^2}+z\sqrt{(x+y)^2}$

$=xy+xz+yz+xy+xz+zy$

$=2(xy+yz+zx)$

$=2$

Câu 11.

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$

Suy ra $S=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\dfrac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\dfrac{1}{xy+yz+zx}$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$

Suy ra $S=-\dfrac{1}{7}$

Câu 12.

Ta có $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Leftrightarrow 4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}=16$

Khi đó ta có: $\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x(16-4y-4z+yz)}$

$=\sqrt{x(yz+4\sqrt{xyz}+4x)}$

$= \sqrt{x}.\sqrt{(\sqrt{yz}+2\sqrt{x})^2} = \sqrt{xyz}+2x$ (1)

Tương tự $\sqrt{y(4-z)(4-x)} = \sqrt{xyz}+2y$ (2)

$\sqrt{z(4-x)(4-y)} = \sqrt{xyz}+2z$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B = 2(x+y+z+\sqrt{xyz}) = 2.4 = 8$.

Câu 13.

Ta có: $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2+ab+3b^2) = 0$ (*)

Vì $a > b > 0 \Rightarrow a^2+ab+3b^2 > 0$ nên từ (*) ta có $a = 2b$

Biểu thức $B = \dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4} = \dfrac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$. Vậy: $B = \dfrac{12b^4}{-63b^4} = \dfrac{-4}{21}$

Câu 14.

Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow y + z = -x \Leftrightarrow (y + z)^2 = (-x)^2$

Suy ra: $y^2+z^2 - x^2 = -2yz$. Do đó: $\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2} = \dfrac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2} = \dfrac{y^2}{-2xz}$; $\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2} = \dfrac{z^2}{-2xy}$

Do đó:

$$P = \frac{x^2}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2-z^2} = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2xz} + \frac{z^2}{-2xy} = \frac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}$$

$$= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz} = \frac{0-3.(-z).(-x).(-y)}{-2xyz} = \frac{3xyz}{-2xyz} = -\frac{3}{2}$$

Vậy $P = -\dfrac{3}{2}$

Câu 15.

Ta có $x - y = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5} = 3$

Nên : $A = X^3 + X^2 - Y^3 + Y^2 + XY - 3X^2Y + 3XY^2 - 3XY + 1974$

$= (X-Y)^3 + (X-Y)^2 + 1974$

$= 3^3 + 3^2 + 1974 = 2010$

Câu 16.

Có:

$$x = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}(a+\frac{1}{a})^2 \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4}(a-\frac{1}{a})^2$$

$$y = \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}(b+\frac{1}{b})^2 \Rightarrow y^2 - 1 = \frac{1}{4}(b-\frac{1}{b})^2$$

Do $a,b\ge 1$; nên: $\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{4}(a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})$

$$p=\frac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}=\frac{\frac{1}{4}(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})-\frac{1}{4}(a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})}{\frac{1}{4}(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})+\frac{1}{4}(a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})}$$

$$p=\frac{2(a^2+b^2)}{ab}:\frac{2(a^2b^2+1)}{ab}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$$

Câu 17.

Từ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$ ta có

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

Từ đó ta được $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Khi đó

$$\begin{cases} x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \\ y+1=y+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \\ z+1=z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{z}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \end{cases}$$

Thay vào biểu thức P ta được

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2$$

Câu 18.

Ta có $x+y=-5$ nên ta được $(x+y)^2=25\Rightarrow x^2+y^2+2xy=25$.

Mà ta có $x^2+y^2=11$, do đó suy ra $2xy=14$ hay $xy=7$.

Ta có $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2=11^2-2.7^2=121-98=23$.

Câu 19.

Từ giả thiết $ab=a-b$ ta được $(ab)^2=(a-b)^2$. Ta có

$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2$$

Câu 20.

Từ giả thiết $a+b+c=0$ ta được

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$.

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$ do vậy ta được $P=\frac{3}{2}$

Câu 21.

Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
P&=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc\\
&=a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}-abc\\
&=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}-abc\\
&=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}-abc\\
&=a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1
\end{aligned}$$

Câu 22.

Từ giả thiết ta có $a+b=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\sqrt{2}; ab=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$. Lại có

$$\begin{aligned}
a^7+b^7&=(a^4+b^4)(a^3+b^3)-a^3b^3(a+b)\\
&=\left\{\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2\right\}\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]-a^3b^3(a+b)
\end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$a^7+b^7=\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]\left[2\sqrt{2}-\frac{3}{4}.\sqrt{2}\right]-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{17}{8}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{170\sqrt{2}}{64}-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{169\sqrt{2}}{64}$$

Vậy $a^7+b^7=\frac{169\sqrt{2}}{64}$.

Câu 23.

Nhìn vào tử số của P ta có biến đổi quen thuộc

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$

Từ đây phải biến đổi giả thiết để xuất hiện thêm $c-a$.

Ta có $c-a=-(b-c)-(a-b)=-3-7=-10$. Đặt T là tử của của P ta được $T=79$.

Đặt M là mẫu của P, khi đó M cũng có thể phân tích thành tích được thành

$$M=(a-c)(a+c-2b)=(a-c)(a-b+c-b)=40$$

Vậy ta được $P=\frac{79}{40}$.

Câu 24.

Với $2a^2+11ab-3b^2=0; b\neq 2a; b\neq -2a$ ta có

$$T=\frac{a-2b}{2a-b}+\frac{2a-3b}{2a+b}=\frac{(a-2b)(2a+b)+(2a-3b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)}$$

$$=\frac{6a^2-11ab+b^2}{4a^2-b^2}=\frac{-(2a^2-11ab+3b^2+8a^2-2b^2)}{4a^2-b^2}=\frac{-(8a^2-2b^2)}{4a^2-b^2}=4$$

Câu 25.

Kết hợp $xyz=5$ ta biến đổibiểu thức P thành

$$P=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}$$
$$=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+2xyz}+\frac{xyz.2z}{2xyz.z+yz+2xyz}$$
$$=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2y}{1+2x+2xz}+\frac{2xz}{2xz+1+2x}=\frac{1+2y+2zx}{2x+2zx+1}=1$$

Câu 26.

Do $a^3+b^3+c^3=3abc\Rightarrow(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

Do $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ với a, b, đôi một khác nhau nên: a + b + c = 0

Suy ra: a + b + c = 0

Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{ab^2}{a^2+(b-c)(b+c)}=\frac{ab^2}{a^2+(b-c)(-a)}=\frac{b^2}{a+c-b}=\frac{b^2}{-b-b}=\frac{b}{-2}$

Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{a}{-2}$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{b}{-2}+\frac{c}{-2}+\frac{a}{-2}=-\frac{1}{2}(a+b+c)=0$$

Vậy *P = 0.*

Câu 27.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{xy+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy-y^2}{(x^2+1)(xy+1)}+\frac{xy-x^2}{(y^2+1)(xy+1)}=0\Rightarrow(xy-y^2)(y^2+1)+(xy-x^2)(x^2+1)=0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1)=0 \Leftrightarrow xy=1\ (\text{vì } x\neq y) \Rightarrow S=2$

Câu 28.

Biến đổi giả thiết $a^2+b=b^2+c$ ta được

$a^2-b^2=c-b \Leftrightarrow (a-b)(a+b)-(a-b)=c-b-(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=c-a$

Do a , b khác nhau nên ta có $a+b-1=\dfrac{c-a}{a-b}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $b+c-1=\dfrac{a-b}{b-c}; c+a-1=\dfrac{b-c}{c-a}$.

Do đó ta có $T=(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1)=\dfrac{c-a}{a-b}.\dfrac{a-b}{b-c}.\dfrac{b-c}{c-a}=1$

Câu 29. Ta có: $0=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}\Rightarrow xy+yz+zx=0$

Do đó: $x^2 + 2xy = x^2 + 2xy - (xy + yz + xz) = (x^2 - xz) + (xy - yz)$

Suy ra: $x^2+ 2xy = (x-y)(x-z)$

Do đó: $\dfrac{yz}{y^2+2zx}=\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)}$

Tương tự ta có: $\dfrac{zx}{y^2+2zx}=\dfrac{zx}{(y-x)(y-z)};\dfrac{xy}{z^2+2xy}=\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}$

Do đó:

$$P=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$

$$=\frac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$$

Vậy P = 1.

Câu 30. +) Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\Rightarrow\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4$

+) Do đó $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{2}{zx}-\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{z^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2=0\\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1}{z}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{-1}{z}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-z$$

Thay vào $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ta được $x = y = \frac{1}{2}$; $z=\frac{-1}{2}$

Khi đó $P = \left(\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\right)^{2012}=1^{2012}=1$

Câu 31.

Ta có:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

$\Rightarrow 1+2(ab+bc+ca)=1\Rightarrow ab+bc+ca=0$

Mặt khác:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\Leftrightarrow 1-3abc=1.(1-0)$

$\Rightarrow abc=0\Rightarrow a=0\vee b=0\vee c=0$

Xét a = 0 thì $\begin{cases} b+c=1 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2bc+c^2=1 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow bc=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ c=0 \end{array}\right.$

Do đó: a = 0 , b = 0, c = 1 hoặc a = 0 , b = 1, c = 0

Khi đó: P = 1

Lập luận tương tự với các trường hợp b = 0 và c = 0.

Vậy P = 1.

Câu 32.

a) Ta có: $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a + b)(a + c)$

Tương tự: $1 + b^2 = (a + b)(b + c)$; $1 + c^2 = (c +a)(b +c)$

Do đó: $A=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=1$

b) Ta có: $a^2 + 2bc – 1 = a^2 + 2bc – ab – bc – ca = (a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2 + 2ca – 1 = (b – c)(b – a)$; $c^2 + 2ab - 1 = (c – a)(c – b)$

Do đó: $B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=1$

Câu 33.

Ta có:

$0=a^{100}+b^{100}-(a^{101}+b^{101})=a^{101}+b^{101}-(a^{102}+b^{102})$

$\Leftrightarrow a^{100}(1-a)+b^{100}(1-b)=a^{101}(1-a)+b^{101}(1-b)$

$\Leftrightarrow a^{100}.(1-a)^2+b^{100}.(1-b)^2=0$

Do đó a = b = 1 (do a, b dương)

Vậy $P = a^{2010} + b^{2010} = 1 + 1 = 2$

Câu 34.

Từ giả thiết suy ra: $(x + \frac{1}{x})^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$)

$\Rightarrow 21 = (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x + \frac{1}{x}) \Rightarrow A = x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

$\Rightarrow 7.18 = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) = (x^5 + \frac{1}{x^5}) + (x + \frac{1}{x})$

$\Rightarrow B = x^5 + \frac{1}{x^5} = 7.18 - 3 = 123$

Câu 35.

Ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + 2b + 3c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ 2a + 4b + 6c = 28 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c = -14$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 3$

$T = abc = 6$.

Câu 36.

$$P = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-b)(c-a)} = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Bằng cách tách: $a - c = -[(c-b) + (b-a)]$ ta phân tích được:

$$P = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

Câu 37.

Ta có: $a + b + c \neq 0$ do nếu $a + b + c = 0$ thì:

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c} = -1 - 1 - 1 = -3$ (trái với giả thiết)

Do đó $a + b + c \neq 0$. Khi đó:

$$a + b + c = (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = \frac{a^2}{b+c} + \frac{(b+c)a}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{(c+a)b}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{(a+b)c}{a+b}$$

$$= a + b + c + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Câu 38.

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + b^3 = 3abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 3c(a+b)(a+b+c) = 3abc + 3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 = 3c(a+b)(a+b+c) + 3ab(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$$

Với $a+b+c=0$ thì: $P = \frac{a+b}{a}.\frac{c+b}{b}.\frac{a+c}{a} = \frac{-c}{a}.\frac{-a}{b}.\frac{-b}{a} = -1$

Với $a=b=c$ thì $P = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$

Câu 39. Ta có:

$$6.8 = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) = \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}$$

$$= 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c} = 3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}$$

Vậy: $P = \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} = 6.8-3 = 39$

Câu 40.

Ta dễ dàng chứng minh được khi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

Do đó: $P = \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2} = \frac{abc}{c^3}+\frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3} = abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = abc.\frac{3}{abc} = 3$

Câu 41. Ta có: $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2} = \frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$.

Với $x+y=1$ ta có: $f(x) = f(1-y) = \frac{(1-x)^3}{(1-x)^3+x^3} \Rightarrow f(x)+f(y)=1$. Từ đó:

$$2A = f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+...+f\left(\frac{2011}{2012}\right)+f\left(\frac{1}{2012}\right) = 2011 \Rightarrow A = \frac{2011}{2}$$

Câu 42.

Ta có:

$$2013=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-a)-(b-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$

$$=2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2013}{2}$$

Câu 43.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow ab+ac+bc=0$$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b^2+2ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$; $\dfrac{c^2}{c^2+2ac}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

Câu 44.

$$x^2-2y^2=xy \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0$$

Vì $x+y\neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

Khi đó $P=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{y}{3y}=\dfrac{1}{3}$

Câu 45.

$$x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=x-1$$

Câu 46.

a) Từ giả thiết $a^2+2c^2=3b^2+19 \Rightarrow a^2+2c^2-3b^2=19$

Ta có: $\dfrac{a^2+7}{4}=\dfrac{b^2+6}{5}=\dfrac{c^2+3}{6}=\dfrac{3b^2+18}{15}=\dfrac{2c^2+6}{12}=\dfrac{a^2+7+2c^2+6-3b^2-18}{4+12-15}=\dfrac{14}{1}=14$

$a^2=49\Rightarrow a=7$

Suy ra : $b^2=64\Rightarrow b=8$

$c^2=81\Rightarrow c=9$

Câu 47.

Đặt $a-b=x;b-c=y;c-a=z\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-(x+y)$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=210\Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210\Leftrightarrow -3xy(x+y)=210\Leftrightarrow xyz=70$

Do x,y,z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên

$x,y,z\in\{-2;-5;7\}\Rightarrow A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14$

Câu 48.

Vì $x+y+z=7\Rightarrow z=-x-y+7\Rightarrow xy+z-6=...=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1);zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\dfrac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\dfrac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\dfrac{4}{9-(xy+yz+xz)}$ Ta

có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

Vậy $H=\dfrac{4}{9-13}=-1$

Câu 49.

$a^3-3ab^2=5\Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=25$

$b^3-3a^2b=10\Rightarrow b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=100$

$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^3=5^3\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2018}=\dfrac{5}{2018}$

✪ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Dạng 1: Sử dụng phép biến đổi tương đương

★**Thí dụ 1.** Cho x, y, z là số thực thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1+y+yz}=\frac{x}{x+xy+xyz}=\frac{x}{1+x+xy}$;

Mặt khác: $\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz}=\frac{xy}{1+x+xy}$

Do đó: $P=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$

$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1\text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 2.** Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{1+x^2}=\frac{xyz}{yz+x.xyz}=\frac{xyz}{yz+x.(x+y+z)}=\frac{xyz}{x^2+xy+yz+zx}=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}$

Tương tự ta có: $\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}$; $\frac{3z}{1+z^2}=\frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

Do đó: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}+\frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

$$=\frac{xyz(y+z+2x+2z+3x+3y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Vậy: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

★**Thí dụ 3.** Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$. Chứng minh: $P=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0\Rightarrow\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{b}{a-c}+\dfrac{c}{b-a}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow\dfrac{a}{(b-c)^2}=\dfrac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1)

Tương tự ta có: $\dfrac{b}{(c-a)^2}=\dfrac{c^2-bc+ba-a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (2); $\dfrac{c}{(a-b)^2}=\dfrac{b^2-ac+cb-b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) Vế theo vế ta được điều phải chứng minh.

★Thí dụ 4. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãi điều kiện: $x+y+z=0$ và $xyz\neq 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Lời giải

Ta có: $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x\Leftrightarrow(y+z)^2=(-x)^2$

Suy ra: $y^2+z^2-x^2=-2yz$. Do đó: $\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}=\dfrac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}=\dfrac{y^2}{-2xz}$; $\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\dfrac{z^2}{-2xy}$

Do đó: $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}=\dfrac{x^2}{-2yz}+\dfrac{y^2}{-2xz}+\dfrac{z^2}{-2xy}=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}$

$=\dfrac{(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz}=\dfrac{0-3.(-z).(-x).(-y)}{-2xyz}=\dfrac{3xyz}{-2xyz}=-\dfrac{3}{2}$

Vậy $P=-\dfrac{3}{2}$

Dạng 2: Sử dụng các hằng đẳng thức quen biết

★Thí dụ 5. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$; $a+b+c=abc$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=2$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

$=4-2.\dfrac{a+b+c}{abc}=2.$

★Thí dụ 6. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

Lời giải

Từ: a + b + c = 0 $\Rightarrow b+c=-a \Rightarrow (b+c)^2=a^2 \Rightarrow b^2+2bc+c^2=a^2$

$\Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc \Rightarrow (a^2-b^2-c^2)^2=4b^2c^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$\Rightarrow 2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$

Vậy: $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

★Thí dụ 7. Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc\neq 0$. Tính: $P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

Lời giải

Do $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

Do $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ với a, b, đôi một khác nhau nên: a + b + c = 0

Suy ra: a + b + c = 0

Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{ab^2}{a^2+(b-c)(b+c)}=\frac{ab^2}{a^2+(b-c)(-a)}=\frac{b^2}{a+c-b}=\frac{b^2}{-b-b}=\frac{b}{-2}$

Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{c}{-2}$; $\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{a}{-2}$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{b}{-2}+\frac{c}{-2}+\frac{a}{-2}=-\frac{1}{2}(a+b+c)=0$$

Vậy *P = 0.*

★Thí dụ 7. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $b\neq c; a+b\neq c$ và $a^2+b^2=(a+b-c)^2$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$

Lời giải

Ta có:

$$a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a+b-c+b)(a+b-c-b)$$
$$=(a+2b-c)(a-c)$$

Tương tự: $b^2+(b-c)^2=(2a+b-c)(b-c)$

Do đó: $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(2a+b-c)(b-c)+(b-c)^2}=\frac{(2a+2b-2c)(a-c)}{(2a+2b-2c)(b-c)}=\frac{a-c}{b-c}$ (đpcm)

Dạng 3: Phương pháp đổi biến

★**Thí dụ 8.** Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a+3b+3c)^3 = 24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3$$

Chứng minh rằng: $(a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} 3a+b-c=x \\ 3b+c-a=y \\ 3c+a-b=z \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(3a+3b+3c)^3 = 24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3 \\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24+x^3+y^3+z^3 \\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24+(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x) \\
&\Leftrightarrow 24-3(x+y)(y+z)(z+x)=0 \\
&\Leftrightarrow 24-3(2a+4b)(2b+4c)(2c+4a)=0 \\
&\Leftrightarrow 24-24(a+2b)(b+2c)(c+2a)=0 \\
&\Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a)=1 \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 9.** Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a}; y=\sqrt{b}; z=\sqrt{c} \Rightarrow xy+yz+zx=1 \Rightarrow a+1=(x+y)(x+z)$.

Tương tự: $b+1=(y+x)(y+z); c+1=(z+x)(z+y)$

Khi đó ta có:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

★**Thí dụ 10.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $ab+bc+ca=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=ab \\ y=bc \\ z=ca \end{cases}$ thì $a+b+c=0$ và $abc=0$. Ta có:

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3}{a^2b^2c^2}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$$

$$=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}{xyz}$$

$$=\frac{3xyz}{xyz}=3$$

Dạng 4: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

★Thí dụ 11. Cho a, b, c, z, y, z thỏa mãn $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

Chứng minh rằng $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=0$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$ (do mỗi số hạng của tổng đều không âm)

Vì vậy: $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=0.$

★Thí dụ 12. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}=\frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}\le\frac{a^2+1-b^2}{2}+\frac{b^2+1-c^2}{2}+\frac{c^2+1-a^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\sqrt{1-b^2}\\ b=\sqrt{1-c^2}\\ c=\sqrt{1-a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1-b^2\\ b^2=1-c^2\\ c^2=1-a^2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$ (đpcm).

Dạng 5: Phương pháp sử dụng lượng liên hợp

★**Thí dụ 13.** Cho x, y thỏa mãn:

$$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$$

Chứng minh: $x=y$

Lời giải

$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$ (1)

ĐKXĐ: $-2014\le x;y\le 2014$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2014}-\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015-y}+\sqrt{2014-y}-\sqrt{2014-x}=0$

Nếu x khác y và $-2014\le x;y\le 2014$ thì $\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}$ >0;

$\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}>0;\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}>0$, do đó (1)

(2) $\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}+\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}\right)=0$

Khi đó dễ chứng tỏ $\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}>0$

Mà $x-y\ne 0$ nên (2) vô lý vì VT(2) luôn khác 0

Nếu x = y dễ thấy (1) đúng. Vậy x = y.

★**Thí dụ 14.** Nếu a , b , c là các số không âm thoả mãn điều kiện: $b=\frac{a+c}{2}$ thì ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{b-c}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (1)

Tương tự $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{a-b}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ (2)

Mà $b=\frac{a+c}{2}\Rightarrow a-b=b-c$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

hay $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

🗁 Dạng 6: Chứng minh có một số bằng hằng số cho trước

★Thí dụ 15. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=2019 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2019} \end{cases}$

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có một số bằng 2019

Phân tích:

Ta thấy việc chứng minh trong các số a, b, c có một số bằng 2019 sẽ tương đương với việc chứng minh hệ thức sau đúng: $(a-2019)(b-2019)(c-2019)=0$ (*) khai triển (*) ta được:

$$(*)\Leftrightarrow\left(ab-2019a-2019b+2019^2\right)(c-2019)=0$$

$$\Leftrightarrow abc-2019(ab+bc+ca)+2019^2(a+b+c)-2019^3=0\quad(**)$$

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2019$ suy ra $abc-2019(ab+bc+ca)=0\quad(2)$

Từ giả thiết $a+b+c=2019$ suy ra $2019^2(a+b+c)-2019^3=0.\quad(3)$

Cộng (2) và (3) theo vế ta được (**) từ đây ta dẫn đến lời giải sau:

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2019$ suy ra $abc-2019(ab+bc+ca)=0\quad(2)$

Từ giả thiết $a+b+c=2019$ suy ra $2019^2(a+b+c)-2019^3=0.\quad(3)$

Cộng (2) và (3) theo vế suy ra:

$$abc-2019(ab+bc+ca)+2019^2(a+b+c)-2019^3=0$$

$$\Leftrightarrow(a-2019)(b-2019)(c-2019)=0\quad(1)$$

Từ (1) suy ra bài toán được chứng minh.

Nhận xét: Từ phân tích và cách giải bài toán trên ta thấy để giải đơn giản dạng toán này chúng ta cần suy luận ngược để tìm ra lời giải.

★Thí dụ 16. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \\ abc=1 \end{cases}$

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

Phân tích:

Ta thấy việc chứng minh trong các số a, b, c có một số bằng 1 sẽ tương đương với việc chứng minh hệ thức sau đúng: $(a-1)(b-1)(c-1)=0$ (*) khai triển (*) ta được:

$$(*)\Leftrightarrow(ab-a-b+1)(c-1)=0$$

$$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0\quad(**)$$

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ và abc = 1 ta được:

$$a+b+c=ab+bc+ca \text{ hay } (ab+bc+ca)-(a+b+c)=0 \quad (2)$$

Mặt khác $abc=1$ *hay* $abc-1=0$ (3)

Cộng (2) và (3) theo vế ta được (**) từ đây ta dẫn đến lời giải sau:

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ và abc = 1 ta được:

$$a+b+c=ab+bc+ca \text{ hay } (ab+bc+ca)-(a+b+c)=0 \quad (2)$$

Mặt khác $abc=1$ *hay* $abc-1=0$ (3)

Cộng (2) và (3) theo vế ta được:

$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$

$\Leftrightarrow (ab-a-b+1)(c-1)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0 \ (1)$

Từ (1) suy ra bài toán được chứng minh

★Thí dụ 17. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3} \\ \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} \end{cases}$.

Chứng minh trong 3 số có ít nhất một số bằng 27.

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3}$ suy ra $\sqrt[3]{abc}-3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)=0 \quad (1)$

Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{9-12\sqrt{5}+20}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{5}\right|=2\sqrt{5}-3$$

$$\Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\left(2\sqrt{5}-3\right)}=\sqrt{9}=3$$

Do đó $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}-3=0 \Rightarrow 9\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)-27=0. \quad (2)$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\sqrt[3]{abc}-3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)+9\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)-27=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a}-3\right)\left(\sqrt[3]{b}-3\right)\left(\sqrt[3]{c}-3\right)=0 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra bài toán được chứng minh

Dạng 7: Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

★**Thí dụ 18.** Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1. \\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$

Chứng minh rằng xy + yz + zx = 0

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=(x+y+z)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2$$

Do đó:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0$$

★**Thí dụ 19.** Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2016}=\frac{b}{2015}=\frac{c}{2014}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$.

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2016}=\frac{b}{2015}=\frac{c}{2014}=\frac{a-b}{2016-2015}=\frac{a-c}{2016-2014}=\frac{b-c}{2015-2014}=\frac{a-b}{1}=\frac{a-c}{2}=\frac{b-c}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a-b)=a-c \\ 2(b-c)=a-c \end{cases} \Rightarrow 4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$$

★**Thí dụ 20.** Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2+y^2+c^2}{(ax+by+cz)^2}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

(Các mẫu đều khác 0)

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó:

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\quad \text{(đpcm)}$$

★Thí dụ 21. Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{bx-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{bx-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=\frac{bx-cy+cx-az+ay-bx}{a+b+c}=0$$

Do đó:

$$\begin{cases}bx=cy\\cx=az\\ay=bx\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\quad\text{(đpcm)}$$

★Thí dụ 22. Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-b+c}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}$.

Lời giải

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{2y}{4a+2b-2c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{x+y+z}{(a+2b+c)+(4a+2b-2c)+(4a-4b+c)}=\frac{x+2y+z}{9a}\quad(1)$$

$$\frac{2x}{2a+4b+2c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{2x+y+z}{(2a+4b+2c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)}=\frac{2x+y-z}{9b}\quad(2)$$

$$\frac{4x}{4a+8b+4c}=\frac{4y}{8a+4b-4c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{4x-4y+z}{(4a+8b+4c)-(8a+4b-4c)+(4a-4b+c)}=\frac{4x-4y+z}{9b}\quad(3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{x+2y+z}{9a}=\frac{2x+y-z}{9b}=\frac{4x-4y+z}{9c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}.$$

Bài tập tự luyện:

Câu 1. *(Chuyên Khánh Hòa 2018)*

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta luôn có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Câu 1. *(Chuyên Nam Định 2016)*

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=6$; $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{47}{60}$.

Tính giá trị của biểu thức $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Câu 2. *(Chuyên Thanh Hóa 2018)*

Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn biểu thức $\begin{cases} a^3-3a^2+5a-17=0 \\ b^3-3b^2+5b+11=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $a+b=2$

Câu 3. *(Chuyên Hải Dương 2018)*

Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$

Chứng minh $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8$

Câu 4. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2018)*

Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$.

Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 5. *(Chuyên Quảng Ngãi 2018)*

Cho là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Câu 6. *(Chuyên Lào Cai 2018)*

Cho 2 số dương a,b và số c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Câu 7. *(HSG Quận Hải An 2018)*

Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019.$ Chứng minh: $x^{2019}+y^{2019}=0$

Câu 8. *(HSG Quận Lê Chân 2018)*

Cho ΔABC có $A=60^0$. Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

Câu 9. *(HSG Hải Dương 2017)*

Cho $x,y,z\neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$ Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx \quad (*)$$

Câu 10. *(HSG Hải Dương 2016)*

Cho *x*, *y* là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}=x+y-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Câu 11. *(HSG Phú Thọ 2016)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=5$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 12. *(HSG Nam Định 2015)*

Cho các số thực *x*, *y*, *z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$.

Câu 13. *(HSG Phú Thọ 2015)*

Cho các số thực $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau thỏa mãn

$$x^3=3x-1,\ y^3=3y-1 \text{ và } z^3=3z-1.$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=6$.

Câu 14. *(HSG Bắc Ninh 2016)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0, a^2+b^2\neq c^2$, $b^2+c^2\neq a^2$, $c^2+a^2\neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$

Câu 15. *(HSG Đồng Nai 2016)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức $P=a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc$

Câu 16. *(HSG Phú Thọ 2016)*

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2}+\frac{b-c}{1+a^2}+\frac{c-a}{1+b^2}=0$$

Câu 17. *(Chuyên Phú Thọ 2017)*

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{1}{2x+2xz+1}+\frac{2xy}{y+2xy+10}+\frac{10z}{10z+yz+10}$ với x, y, z là các số thỏa mãn $xyz=5$ và biểu thức P có nghĩa.

Câu 18. *(Chuyên Hải Dương 2015)*

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$.

Câu 19. *(Chuyên Hà Tĩnh 2016)*

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $c^2+2\left(ab-bc-ac\right)=0$, $b\neq c$ và $a+b\neq c$. Chứng minh rằng: $\frac{2a^2-2ac+c^2}{2b^2-2bc+c^2}=\frac{a-c}{b-c}$.

Câu 20. *(Chuyên KHTN 2010)*

Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là [a]. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có.

$$\left[\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\ldots\frac{n^2+n+1}{n\left(n+1\right)}\right]=n$$

Câu 21. *(Chuyên Hải Dương 2010)*

Cho trước $a, b\in R$; gọi x, y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases}x+y=a+b\\ x^3+y^3=a^3+b^3\end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$.

Câu 22. *(HSG huyện Kinh Môn)*

Cho a + b + c + d = 0. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3+d^3=3\left(c+d\right)\left(ab-cd\right)$

Câu 23. Chứng minh rằng nếu có: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

Thì: $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Câu 24. Cho $\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}=\frac{1}{x+y}$ và $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng:

a) $bx^2 = ay^2$

b) $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Câu 25. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Câu 26. Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$

Thì: $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

Câu 27. Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$

Chứng minh rằng: $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Câu 28. Cho $m = \frac{a+b}{a-b}$; $n = \frac{c+d}{c-d}$; $p = \frac{ac-bd}{ad+bc}$. Chứng minh rằng: $m+n+p = m.n.p$

Câu 29. Cho *a* và *b* là các số thực thỏa mãn các điều kiện:

$$6a^2 + 20a + 15 = 0; \quad 15b^2 + 20b + 6 = 0; \quad ab \neq 1.$$

Chứng minh rằng: $\frac{b^3}{ab^2 - 9(ab+1)^3} = \frac{6}{2015}$.

Câu 30. Giả sử a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

a) Chứng minh rằng $a + b = -3$

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$

Câu 31. Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4$$

Chứng minh rằng: $5y = 4x$

Câu 32. Cho Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức:

i) $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$

ii) $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3$. Chứng minh: $abc = 0$

Câu 33. Cho trước $a, b \in R$; gọi x, y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases} x + y = a + b \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$.

Bài 34. Cho a, b ≠ 0 thỏa mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Câu 35. Cho 4 số a, b, c, d nguyên thỏa mãn: $\begin{cases} a+b=c+d \\ ab+1=cd \end{cases}$. Chứng minh: c = d.

Câu 36. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ và $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $(x-1)(y-1)(z-1)=0$

Câu 37. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 38. Cho a + b + c = 2009. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=2009$

Câu 39. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn a + b + c = 0. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Câu 40. Cho $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$

Câu 41. *(HSG Quận 9 TP. Hồ Chí Minh năm 2011)*

Chứng minh rằng: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$

Áp dụng tính: $A=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Câu 42. *(HSG Quận 1 TP. Hồ Chí Minh năm 2012)*

Giả sử 4 số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+\left(a+b\right)^2=c^2+d^2+\left(c+d\right)^2$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+\left(a+b\right)^4=c^4+d^4+\left(c+d\right)^4$.

Câu 43. Cho $x(m+n)=y(n+p)=z(p+m)$ trong đó x,y,z la các số khác nhau và khác 0,

Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)}=\frac{n-p}{y\left(z-x\right)}=\frac{p-m}{z\left(x-y\right)}$

Câu 44. Chứng minh rằng:

$$a\left(b-c\right)\left(b+c-a\right)^2+c\left(a-b\right)\left(a+b-c\right)^2=b\left(a-c\right)\left(a+c-b\right)^2$$

Câu 45. Cho a,b,c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$VT=(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$$
$$=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=VP$$

Câu 2.

$$\begin{cases}a^3-3a^2+5a-17=0\\ b^3-3b^2+5b+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^3+2a-16=0(1)\\ (b-1)^3+2b+12=0(2)\end{cases}$$
$$\Rightarrow(1)+(2)\Leftrightarrow(a-1)^3+2a-16+(b-1)^3+2b+12=0$$
$$\Leftrightarrow(a-1+b-1)\left[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2\right]+2(a+b-2)=0$$
$$\Leftrightarrow(a+b-2)\left[\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow a+b=2\left(do\left(\frac{a-1}{2}+b-1\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2>0\forall a,b\right)$$

Câu 3.

Ta có: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Leftrightarrow4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}=16$

Mặt khác:

$$x(4-y)(4-z)=x\left[16-4(y+z)+yz\right]=x\left[4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}-4(y+z)+yz\right]$$
$$=x\left(4x+4\sqrt{xyz}+yz\right)=x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x}.\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)=2x+\sqrt{xyz}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{y(4-x)(4-z)}=2y+\sqrt{xyz}\\ \sqrt{z(4-x)(4-y)}=2z+\sqrt{xyz}\end{cases}$$

Do vậy

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}=\sqrt{xyz}$$
$$=2x+2y+2z+3\sqrt{xyz}-\sqrt{xyz}$$
$$=2\left(x+y+z+\sqrt{xyz}\right)=8$$

Vậy $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8$

Câu 4.

Ta có: $a+b+c=0\Leftrightarrow b=-a-c$

$\Rightarrow a^2 = 2(a+c+1)(a+b-1)$

$\Leftrightarrow a^2 = 2(a+c+1)(a-a-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2 = 2(a+c+1)(-c-1)$

$\Leftrightarrow a^2 + 2(a+c+1)(c+1) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a(c+1) + 2(c+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a+c+1)^2 + (c+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c+1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-a-c=1$

$\Rightarrow A = a^2+b^2+c^2 = 0^2+1^2+(-1)^2 = 2$

Vậy $A=2$

Câu 5.

Cộng theo vế ta được a + b + c = 0.

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$a+b=c^2-a^2=(c-a)(c+a)=(-b)(c-a) \text{ hay } -c=(-b)(c-a)$$

Tương tự ta có $-b=(-a)(b-c), -a=(-c)(a-b)$.

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta được $(a-b)(b-c)(c-a)=1$

Câu 6.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ \frac{ab+ac+bc}{abc}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c<0 \\ ab+ac+bc=0 \end{cases}$

$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

$\Leftrightarrow a+b=a+c+b+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow c+\sqrt{ab+ac+bc+c^2}=0$

$\Leftrightarrow c^2+\sqrt{c^2}=0$

$\Leftrightarrow c-c=0(c<0)$

Vậy $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Câu 7.

Ta có:

$$\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2019}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$$

$$-2019\left(y+\sqrt{y^2+2019}\right)=2019\left(x-\sqrt{x^2+2019}\right)$$

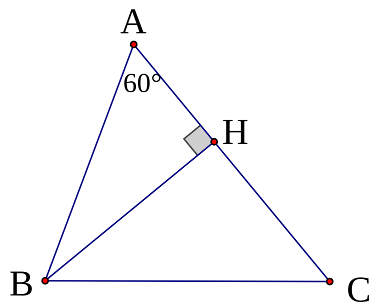
$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+2019}=\sqrt{x^2+2019}-x$$

Tương tự: $x+\sqrt{x^2+2019}=\sqrt{y^2+2019}-y$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $x+y=0\Leftrightarrow x=-y\Rightarrow x^{2019}+y^{2019}=0.$

Câu 8.

1. Kẻ đường cao BH. ΔABH vuông tại H nên



$BH = AB.\sin 60^0 = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$

$AH = AB.\cos 60^0 = \dfrac{AB}{2}$

Xét ΔBHC vuông tại H nên $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$$BC^2=\frac{3AB^2}{4}+\left(AC-\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$BC^2=\frac{3AB^2}{4}+AC^2-AB.AC+\frac{AB^2}{4}$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-AB.AC$$

Hay $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (1)

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow(2a+b+c)(a+b+c)=3(a+b)(a+c)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2ab+2ac+ba+b^2+bc+ac+bc+c^2=3a^2+3ac+3ab+3bc$$

$\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ luôn đúng theo (1)

Câu 9.

Từ giả thiết $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow xy+yz+zx=0$

$$\Rightarrow x^2+2yz=x^2+yz-xy-zx=(x-y)(x-z)$$

Tương tự: $y^2+2zx=(y-x)(y-z); z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$$\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-x)(y-z)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{y-x+x-z+z-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=0$$

Suy ra đpcm

Câu 10.

Ta có: $2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)=2\left[x^2+y^2-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+xy\right]$

$=(x^2+y^2+2xy)-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$=(x+y)^2-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2=\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$ (*)

Do $x>0,\ y>0$ nên $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy>x^2+y^2$

Suy ra : $x+y>\sqrt{x^2+y^2}$

Khai căn hai vế đẳng thức (*) ta được điều phải chứng minh.

Câu 11.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3\Leftrightarrow a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=9\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$

Do đó $a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$

$b+2=b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$

$c+2=c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$

Suy ra

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}+\frac{\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 12.

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$

Suy ra $S=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$

Suy ra $S=-\frac{1}{7}$

Câu 13.

Ta có $x^3=3x-1(1), y^3=3y-1\,(2), z^3=3z-1\,(3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y) \\ y^3-z^3=3(y-z) \\ z^3-x^3=3(z-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3\,(4) \\ y^2+yz+z^2=3\,(5) \\ z^2+zx+x^2=3\,(6). \end{cases}$

Từ (4) và (5) suy ra

$x^2-z^2+xy-yz=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y+z)=0\Leftrightarrow x+y+z=0$, (vì *x, y, z* đôi một phân biệt).

Cộng (4), (5) và (6) theo vế với vế ta có

$$\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{1}{2}(x+y+z)^2=9\Rightarrow x^2+y^2+z^2=6.$$

Câu 14.

Từ giả thiết $a+b+c=0$ ta được

$P=\frac{a^2}{(b+c)^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0$.

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$ do vậy ta được $P=\frac{3}{2}$

Câu 15.

Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$P = a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)} + b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)} + c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)} - abc$$
$$= a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2} + b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2} + c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2} - abc$$
$$= a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2} + b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2} + c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2} - abc$$
$$= a\sqrt{\left(a+bc\right)^2} + b\sqrt{\left(b+ac\right)^2} + c\sqrt{\left(c+ab\right)^2} - abc$$
$$= a\left(a+bc\right) + b\left(b+ac\right) + c\left(c+ab\right) - abc = a^2+b^2+c^2+2abc = 1$$

Câu 16.

Ta có $1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = (a+b)(a+c)$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$1+b^2 = ab+bc+ca+b^2 = \left(b+a\right)\left(b+c\right)$$
$$1+c^2 = ab+bc+ca+c^2 = \left(c+a\right)\left(c+b\right)$$

Suy ra $\dfrac{a-b}{1+c^2} = \dfrac{a-b}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)} = \dfrac{a+c-b-c}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)} = \dfrac{1}{c+b} - \dfrac{1}{c+a}$.

$$\frac{b-c}{1+a^2} = \frac{b-c}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)} = \frac{b+a-a-c}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)} = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}$$
$$\frac{c-a}{1+b^2} = \frac{c-a}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)} = \frac{c+b-a-b}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)} = \frac{1}{b+a} - \frac{1}{b+c}$$

Vậy $\dfrac{a-b}{1+c^2} + \dfrac{b-c}{1+a^2} + \dfrac{c-a}{1+b^2} = \dfrac{1}{c+b} - \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+c} - \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+a} - \dfrac{1}{b+c} = 0$.

Câu 17.

Kết hợp $xyz = 5$ ta biến đổi biểu thức P thành

$$P = \frac{1}{2x+2xz+1} + \frac{2xy}{y+2xy+10} + \frac{10z}{10z+yz+10}$$
$$= \frac{1}{2x+2xz+1} + \frac{2xy}{y+2xy+2xyz} + \frac{xyz.2z}{2xyz.z+yz+2xyz}$$
$$= \frac{1}{2x+2xz+1} + \frac{2y}{1+2x+2xz} + \frac{2xz}{2xz+1+2x} = \frac{1+2y+2zx}{2x+2zx+1} = 1$$

Câu 18.

$$xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2(1+y)^2} = 1-xy$$
$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2$$
$$\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2 = 1-2xy+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$$
$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$$

Câu 19.

Ta có: $c^2 + 2\left(ab-bc-ac\right) = 0 \ \Rightarrow a^2 = a^2 + c^2 + 2\left(ab-bc-ac\right)$

$= \left(a^2 - 2ac + c^2\right) + 2\left(ab - bc\right) = \left(a - c\right)^2 + 2b\left(a - c\right) = \left(a - c\right)\left(a - c + 2b\right)$.

$\Rightarrow\ 2a^2 - 2ac + c^2 = \left(a^2 - 2ac + c^2\right) + a^2 = \left(a - c\right)^2 + a^2 = \left(a - c\right)^2 + \left(a - c\right)\left(a - c + 2b\right)$

$= 2\left(a - c\right)\left(a + b - c\right)$

Tương tự ta có: $2b^2 - 2bc + c^2 = 2\left(b - c\right)\left(a + b - c\right)$.

$$\text{Do đó: } \frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{2\left(a - c\right)\left(a + b - c\right)}{2\left(b - c\right)\left(a + b - c\right)} = \frac{a - c}{b - c} \text{ (với } b \ne c,\ a + b \ne c\text{)}$$

Câu 20.

$$\text{Xét } \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)} + \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} (k \in N)$$

Thay k lần lượt từ 1 đến n ta được:

$$\left[\frac{3}{1.2} + \frac{7}{2.3} + \ldots \frac{n^2 + n + 1}{n\left(n + 1\right)}\right] = \left[n + 1 - \frac{1}{n+1}\right] = \left[n + \frac{n}{n+1}\right] = n \text{ (đpcm)}$$

Câu 21.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) = \left(a + b\right)^3 - 3ab\left(a + b\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b & (1) \\ xy(a + b) = ab(a + b) & (2) \end{cases} \quad (*)$$

+/Nếu $a + b \ne 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ xy = ab \end{cases}$

=> x, y là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - (a + b)X + ab = 0$

Giải ra ta có $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}; \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ => $x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$.

+/Nếu $a + b = 0$ => $a = -b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$.

$$=> \begin{cases} a^{2011} + b^{2011} = 0 \\ x^{2011} + y^{2011} = 0 \end{cases} => x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$$

Câu 22.

Từ: $a + b + c + d = 0$

$$\Rightarrow a+b=-(c+d)\Rightarrow (a+b)^3=-(c+d)^3\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3-d^3-3cd(c+d)$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=-3ab(a+b)-3cd(c+d)\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=3ab(c+d)-3cd(c+d)$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3=3(c+d)(ab-cd)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 23.

Có: $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$

$$=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}\ (=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}\ )$$

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x}=\sqrt[3]{a};\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y}=\sqrt[3]{b};\dfrac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z}=\sqrt[3]{c}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x}+\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y}+\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

. => $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Câu 24.

a) Từ $\dfrac{a^4}{x}+\dfrac{b^4}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ và $a^2+b^2=1$ suy ra: $\dfrac{a^4}{x}+\dfrac{b^4}{y}=\dfrac{(a^2+b^2)^2}{x+y}$

$$\Rightarrow (x+y)(a^4y+b^4x)=(x+y)(a^2+b^2)^2\Rightarrow (ay^2-bx^2)^2=0\Rightarrow bx^2=ay^2.$$

b) Từ câu a) $bx^2=ay^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000};\left(\frac{y^2}{b}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}$$

Do đó: $\dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1000}}$

Câu 25.

Ta có: $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$.

Cộng theo vế các phương trình của hệ ta được:

$$(a+b+c)x+(a+b+c)y=a+b+c\Rightarrow (a+b+c)(x+y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y=1 \end{array}\right.$$

Với $a+b+c=0$ thì: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (1)

Với x + y = 1 thay vào giả thiết ta được: a = b = c $\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 26

$$1+x=1+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2a}{a+b};1+y=1+\frac{b-c}{b+c}=\frac{2b}{b+c};1+z=1+\frac{c-a}{c+a}=\frac{2c}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z)=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$1-x=1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b}{a+b};1-y=1-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2c}{b+c};1-z=1-\frac{c-a}{c+a}=\frac{2a}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

Câu 27

Đặt $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k\Rightarrow k=\frac{cay-cby}{c^2}=\frac{bcx-baz}{b^2}=\frac{abz-acy}{a^2}$

$$k=\frac{cay-cbx+bcx-abz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2}=0\Rightarrow ay-bx=cx-az=bz-cy=0$$

$$\Rightarrow (ay-bx)^2=(cx-az)^2=(bz-cy)^2=0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=0$$

Suy ra: $(ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Câu 28

Ta có:

$$m+n+p=\frac{a+b}{a-b}+\frac{c+d}{c-d}+\frac{ac-bd}{ad+bc}=\frac{(a+b)(c-d)+(c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)}+\frac{ac-bd}{ad+bc}$$

$$=\frac{2(ac-bd)}{(a-b)(c-d)}+\frac{ac-bd}{ad+bc}=\frac{(ac-bd)(2(ad+bc)+(a-b)(c-d))}{(a-b)(c-d)(ad+bc)}$$

$$=\frac{(ac-bd)(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)}=m.n.p$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Câu 29.

Ta ký hiệu các điều kiện như sau:

$6a^2+20a+15=0$ (1); $15b^2+20b+6=0$ (2); $ab\neq 1$ (3).

Dễ thấy các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt.

Do (3) nên b khác 0. Chia hai vế của (2) cho b^2 ta được

$$6\left(\frac{1}{b}\right)^2+20\left(\frac{1}{b}\right)+15=0 \qquad (4)$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra a và $\frac{1}{b}$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình

$$6x^2+20x+15=0 \qquad (5)$$

Theo định lí Vi-ét: $a+\frac{1}{b}=-\frac{10}{3};\ \frac{a}{b}=\frac{5}{2}$.

Từ đó : $\frac{ab^2-9(ab+1)^3}{b^3}=\frac{a}{b}-9\left(a+\frac{1}{b}\right)^3=\frac{5}{2}-9\left(-\frac{10}{3}\right)^3=\frac{2015}{6}$

Suy ra $\frac{b^3}{ab^2-9(ab+1)^3}=\frac{6}{2015}$, điều phải chứng minh.

Câu 30.

a) Giả sử a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\begin{cases}a^2+3b=2\\ b^2+3a=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+3(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+3(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-b=0(\text{loai})\\ a+b=-3\end{array}\right.$

b) $(a+b)^3=-27$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27 \Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$

vì $a^2+3a+b^2+3b=4 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+3(a+b)=4 \Leftrightarrow ab=-2$

Vậy $a^3+b^3=-45$

Câu 31. Ta có: $4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{(x^4+y^4)(x^4-y^4)}$

$=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4-y^4}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2(x^2-y^2)+4y^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$

$=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=\frac{y(x-y)+2y^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{y}{x-y}$

Do đó: $\frac{y}{x-y}=4 \Leftrightarrow y=4x-4y \Leftrightarrow 5y=4x$

Vậy $5y=4x$ (đpcm)

Câu 32. Ta có: $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$

Mà: $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$. Do đó:

$abc(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$

$\Leftrightarrow abc = 0$ hoặc $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^2b^2c^2$

* Nếu $abc \neq 0$

Thì: $a^2 - ab + b^2 \geq |ab|$; $b^2 - bc + c^2 \geq |bc|$; $c^2 - ca + a^2 \geq |ca|$

Suy ra: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq a^2b^2c^2$

Mà: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^2b^2c^2$

Do đó $a = b = c$ thay vào (i) $\Rightarrow 7a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow abc = 0$ (mâu thuẫn)

Vậy: $abc = 0$ (đpcm)

Câu 33. Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a+b \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a+b & (1) \\ xy(a+b)=ab(a+b) & (2) \end{cases} \quad (*)$$

+/Nếu $a+b \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a+b \\ xy=ab \end{cases}$

=> x, y là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - (a+b)X + ab = 0$

Giải ra ta có $\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}; \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \Rightarrow x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$.

+/Nếu $a+b=0 \Rightarrow a=-b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=0 \\ x^3+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2011}+b^{2011}=0 \\ x^{2011}+y^{2011}=0 \end{cases} \Rightarrow x^{2011}+y^{2011}=a^{2011}+b^{2011}$$

Câu 34. $VT = \dfrac{a}{b^3-1} + \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{a}{(b-1)(b^2+b+1)} + \dfrac{b}{(a-1)(a^2+a+1)}$

$$= \frac{a}{-a(b^2+b+1)} + \frac{b}{-b(a^2+a+1)} = \frac{-1}{b^2+b+1} + \frac{-1}{a^2+a+1}$$

$$= \frac{-(a^2+a+1)-(b^2+b+1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)} = -\frac{\left[(a+b)^2-2ab+3\right]}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+2}$$

$$= \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+(a^2+2ab+b^2)+2} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3} = VP$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 35. Ta có: a + b = c + d suy ra: a = c + d – b thay vào ab + 1 = cd

Ta có: $(c+d-b).b+1=cd \Leftrightarrow b(d-b)+cd-cd+1=0 \Rightarrow (d-b)(b-c)=-1$

Vì b,c, d là số nguyên nên: d – b = -b + c = 1 hoặc –d + b = b – c = 1

Vậy $c=d$

Câu 36. Ta có: $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$ Suy ra: $xy+yz+zx=xyz$

Do đó: (x – 1)(y – 1)(z – 1) = xyz – (xy + yz + zx) + (x+y+z) -1 (*)

Thay xy + yz + zx = xyz và x + y + z =1 vào (*) ta được:

(x – 1)(y – 1)(z – 1) = xyz – (xy + yz + zx) + (x+y+z) -1

= (xy + yz + zx) – (xy + yz + zx) + 1 -1 = 0 (đpcm)

Câu 37. Ta có: $0=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}$. Suy ra: $ayz+byz+cxy=0$.

Do đó: $1=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ca}\right)$

$$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{ayz+bxz+cxy}{abc}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2.\left(\frac{0}{abc}\right)$$

Vậy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (đpcm)

Câu 38. Ta có hằng đẳng thức: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Do đó:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=a+b+c=2009$$

Lưu ý cần nhớ: Khi a + b + c =0 thì $a^3+b^3+c^3=3abc$

và ngược lại khi $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì a + b + c = 0

Câu 39. Ta có các hằng đẳng thức:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ và $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-(ab+bc+ca)$

Ta có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+a^2b^2\left(a+b\right)+b^2c^2\left(b+c\right)+c^2a^2\left(c+a\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5-abc\left(ab+bc+ca\right)=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5+abc.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)(\text{đpcm})$$

Câu 40. Đặt $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=k\Rightarrow a=\frac{x^2-yz}{k},b=\frac{y^2-zx}{k},c=\frac{z^2-xy}{k}$

Sau đó tính: a^2-bc,b^2-ca,c^2-ab theo x, y,z, k từ đó suy ra: $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$

Câu 41. Ta có:

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}\right)=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2-(m+n)=2\sqrt{mn}$$

Do đó: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$

Áp dụng: $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{2.5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2+5}}=\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$

Câu 42. Ta có:

$$\left[a^2+b^2+\left(a+b\right)^2\right]^2=\left(a^2+b^2\right)^2+2\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)^2+\left(a+b\right)^4$$

$$=\left(a^2+b^2\right)^2+\left[\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2\right]\left(a+b\right)^2+\left(a+b\right)^4$$

$$=\left(a^2+b^2\right)^2+\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a+b\right)^4$$

$$=2\left[a^4+b^4+\left(a+b\right)^4\right]$$

Tương tự:

$$\left[c^2+d^2+\left(c+a\right)^2\right]^2=2\left[c^4+d^4+\left(c+d\right)^4\right]$$

Vậy $a^4+b^4+\left(a+b\right)^4=c^4+d^4+\left(c+d\right)^4$

Câu 43.

Vì $xyz\neq 0$ nên: $x(m+n)=y(n+p)=z(p+m)$

$$\Rightarrow \frac{x\left(m+n\right)}{xyz}=\frac{y\left(n+p\right)}{xyz}=\frac{z\left(p+m\right)}{xyz}$$

hay : $\frac{m+n}{yz}=\frac{n+p}{xz}=\frac{p+m}{xy}=\frac{\left(p+m\right)-\left(n+p\right)}{xy-yz}=\frac{\left(m+n\right)-\left(p+m\right)}{yz-xy}=\frac{\left(n+p\right)-\left(m+n\right)}{xz-yz}$

$$= \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Câu 44. Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2)+c(a-b)(a+b-c^2)-b(a-c)(a+c-b^2)=0$ (1)

Đặt $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+z}{2} \\ b=\dfrac{x+y}{2} \\ c=\dfrac{y+z}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$VT=\frac{x+z}{2}.\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y+z}{2}\right).y^2+\frac{y+z}{2}.\left(\frac{x+z}{2}-\frac{x+y}{2}\right)x^2-\frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2$$

$$=\frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2+\frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2-\frac{1}{4}.(x^2-y^2)z^2$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-z^2)y^2+\frac{1}{4}(z^2-y^2)x^2-\frac{1}{4}.(x^2-y^2).z^2$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2-\frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2=0=VP \quad \text{(dpcm)}$$

Câu 45.

Đặt $\dfrac{a-b}{c}=x;\dfrac{b-c}{a}=y;\dfrac{c-a}{b}=z \Rightarrow \dfrac{c}{a-b}=\dfrac{1}{x};\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{1}{y};\dfrac{b}{c-a}=\dfrac{1}{z}$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$$

Ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=3+\left(\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{x+z}{y}+\dfrac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\dfrac{y+z}{x}=\left(\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right).\dfrac{c}{a-b}=\dfrac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\dfrac{c}{a-b}$

$$=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{x+z}{y}=\dfrac{2a^2}{bc};\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{2b^2}{ac}$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$$

Vì $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Do đó: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=3+\dfrac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

✪ RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

✪ Các công thức biến đổi căn thức

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \ge 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0$)
3. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \ge 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (Với $B \ge 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (Với $A < 0; B \ge 0$)
7. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (Với $A \ge 0; B > 0$)
8. $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)

9 $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \pm B\right)}{A - B^2}$ (Với $A \ge 0; A \ne B^2$)

10 $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)}{A - B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0; A \ne B$)

11 $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

✪ Cách tìm điều kiện trong bài toán chứa căn thức

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		VÍ DỤ		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \ge 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x \ge 2018$
2.	$\dfrac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \ne 0$	Ví dụ: $\dfrac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x \ne 7$
3.	$\dfrac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x > 3$
4.	$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \ge 0; B > 0$	Ví dụ: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x \ge 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

5. $\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \le 0\\ B<0\end{cases}\\ \begin{cases}A\ge 0\\ B>0\end{cases}\end{array}\right.$ Ví dụ: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\le 0\\ x+2<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\ge 0\\ x+2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x\ge 1\end{array}\right.$

6. Cho a > 0 ta có:
$x^2 > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\sqrt{a}\\ x<-\sqrt{a}\end{array}\right.$ Ví dụ: $x^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\sqrt{a}\\ x<-\sqrt{a}\end{array}\right.$

7. Cho a > 0 ta có:
$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ Ví dụ: $x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$

🗁 Dạng 1: Các bài toán biến đổi căn thức thường gặp

★Thí dụ 1. *(Trích đề thi HSG huyện Nghi Xuân Hà Tĩnh)*

Tính giá trị của biểu thức: $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Lời giải

Ta có: $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}=2$

★Thí dụ 2. *(Trích đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng năm 2010-2011)*

Cho $E=\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$. Chứng minh rằng E là số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$E=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3.\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}}=\sqrt[3]{\left[2+1+3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right]\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=\sqrt{(8-3\sqrt{7})^2}-\sqrt{(8+3\sqrt{7})^2}$$
$$=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\sqrt[3]{2-1}=1$$

Vậy E là số nguyên

★Thí dụ 3. *(Trích đề thi chọn HSG tỉnh Hòa Bình Năm 2010-2011)*

Rút gọn: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$.

Lời giải

Đặt $A=\dfrac{T}{M}$. Ta có $T>0$ nên $T=\sqrt{T^2}$

Xét $T^2=\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)-2.\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}.\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

$$= 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{\sqrt{8} - \left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$= 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}$$

$$= 2\left(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2\left(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{2}$$

★Thí dụ 4. *(Trích đề thi HSG Phú Thọ năm 2012-2013)*

Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{2}$$

★Thí dụ 5. *(Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)*

Tính giá trị của biểu thức $N=\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Lời giải

Ta có: $N=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}}+\sqrt{25-10\sqrt{2}+2}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})^2}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}+\left|5-\sqrt{2}\right|$$

$$=\sqrt{2}+5-\sqrt{2}=5$$

★Thí dụ 6. *(Trích đề thi Chọn HSG tỉnh Long An năm 2012)*

Không sử dụng máy tính, hãy thực hiện phép tính:$A=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}}$

Lời giải

Ta có: A = $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{10}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{23-3\sqrt{5}}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}+2\sqrt{5}}{\sqrt{46-6\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{\left(3\sqrt{5}-1\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1}=\frac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}-1}=1$$

★Thí dụ 7. *(Trích đề thi HSG huyện Nga Sơn-Thanh Hóa năm 2016-2017)*

Rút gọn biểu thức: B = $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{B}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{B}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow B=\sqrt{2}$$

★Thí dụ 8. *(Trích đề thi HSG huyện Thạch Hà năm 2016-2017)*

So sánh $\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1}$ và $\dfrac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2015^2-1}-\sqrt{2014^2-1}=\dfrac{(\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1})(\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1})}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

$$=\frac{(2015^2-1)-(2014^2-1)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}=\frac{2017^2-2016^2}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}=\frac{(2017-2016)(2017+2016)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$$

$$=\frac{2017+2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}>\frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$$

Vậy $\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1}>\dfrac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

★Thí dụ 9. Rút gọn các biểu thức:

a) $A=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ b) $B=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$

Lời giải

a) $A=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}=1$$

b)

Đặt $x_0=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$

$$\Rightarrow x_0^3=\left(\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}\right)^3$$

$$=70-\sqrt{4901}+70+\sqrt{4901}+3\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}.\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}\left(\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}\right)$$

$$=140+3x$$

Khi đó ta có:

$$x_0^3+3x_0-140=0\Leftrightarrow\left(x_0-5\right)\left(x^2+5x+28\right)=0$$

Mà $x_0^2+5x_0+28>0\left(\text{do }\Delta<0\right)\Rightarrow x_0=5$

Vậy $B=5$.

★Thí dụ 10. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)+\left(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$

$$=1+\sqrt{2}$$

Dạng 2: Dùng ẩn phụ đơn giản hóa bài toán

★Thí dụ 11. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}}-\sqrt[4]{7}-\dfrac{\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{7}}}}+\dfrac{6}{\sqrt{7}\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{7}}}\right)}+\dfrac{7}{\sqrt[4]{343}}$.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt[4]{7}\Rightarrow a^4=7$ và $a^2=\sqrt{7}$ ta có:

$$A=\frac{2}{a}-a-\frac{a^2-\frac{1}{a^2}}{a-\frac{1}{a}}+\frac{6}{a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)}+\frac{7}{a^3}=\frac{1-2a^2}{a}+\frac{13a^2+7}{a^3(a^2+1)}$$

$$=\frac{a^4+a^2-2a^6-2a^4+13a^2+a^4}{a^3(a^2+1)}=\frac{2a^2(7-a^4)}{a^3(a^2+1)}=0\left(\text{Do } a^4=7\right)$$

★**Thí dụ 12.** Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{125}}}$.

Lời giải

Đặt $b=\sqrt[4]{5}\Rightarrow b^2=\sqrt[4]{25}, b^3=\sqrt[4]{125}, b^4=5, b^6=5b^2, b^5=5b.$

Ta có: $B=\dfrac{2}{\sqrt{4-3b+2b^2-3b^3}}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{b^3-2b^2+3b-4}=\dfrac{1}{(b^3+3b)-(2b^2+4)}=\dfrac{(b^3+3b)+(2b^2+4)}{(b^3+3b)^2-(2b^2+4)^2}$

$$=\frac{b^3+3b+2b^2+4}{-2b^2-6}=-\frac{(b^3+2b^2+3b+4)(b^2-3)}{2(b^4-9)}=\frac{b^5+2b^4-2b^2-9b-12}{8}$$

$$=\frac{-b^2-2b-1}{4}=-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2.$$

Vậy $B=2\sqrt{\left(\dfrac{2}{b+1}\right)^2}=\dfrac{4}{b+1}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{5}+1}$.

★**Thí dụ 13.** Rút gọn biểu thức: $E=\left(\dfrac{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^2-\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{2}}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt[4]{2}=a\Rightarrow a^4=2, \sqrt[4]{4}=a^2=\sqrt{2}$

Ta có:

$$E=\left(\frac{a^2-a}{1-a}+\frac{1+a^2}{a}\right)-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}}}{1+a^2}=\left(-a+\frac{1+a^2}{a}\right)^2-\frac{1+a^2}{a^2\left(1+a^2\right)}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}=0$$

Vậy $E=0$

🗁 Dạng 3: Các bài toán về tính tổng dãy có quy luật

★**Thí dụ 14.** Rút gọn:

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+....+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}+\frac{1}{2000\sqrt{1999}+1999\sqrt{2000}}$$

Lời giải

Với $k \in N, k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2.k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\ (1)$$

Áp dụng (1) với k = 1, 2, 3,....., 1999 ta được

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$-------------$$

$$\frac{1}{2000\sqrt{1999}+1999\sqrt{2000}}=\frac{1}{\sqrt{1999}}-\frac{1}{\sqrt{2000}}.$$

Cộng các đẳng thức trên theo vế ta được:

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+....+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}+\frac{1}{2000\sqrt{1999}+1999\sqrt{2000}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{1999}}-\frac{1}{\sqrt{2000}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2000}}$$

$$=\frac{\sqrt{2000}-1}{\sqrt{2000}}$$

$$=\frac{20\sqrt{5}-1}{20\sqrt{5}}$$

★Thí dụ 15. Rút gọn:

$$A=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+....+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1998^2}+\frac{1}{1999^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}.$$

Lời giải

Với $k \in N, k \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)^2=1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k-1}-\frac{2}{(k-1)k}-\frac{2}{k}$$

$$=1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k-1}-\frac{2}{k-1}+\frac{2}{k}-\frac{2}{k}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}=\left(1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\quad (1)$$

Áp dụng (1) với k = 1, 2, 3,....., 2000 ta được

$$A=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{1998}-\frac{1}{1999}\right)+\left(1+\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}\right).$$

$$=1998+\frac{1}{2}-\frac{1}{2000}$$

Dạng 4: Bài toán rút gọn biểu thức chứa một hay nhiều ẩn

★Thí dụ 16. Rút gọn: $B=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt[4]{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}}}{1+\sqrt{a}}$ $(a>0,a\neq 1)$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[4]{a}\,(t>0)\Rightarrow \sqrt{a}=t^2, a=t^4$

Khi đó: $B=\left(\frac{t^2-t}{1-t}+\frac{1+t^2}{t}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}}{1+t^2}$

$$=\left[\frac{t(t-1)}{1-t}+\frac{1}{t}+t\right]^2-\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2}}{1+t^2}=\left(-t+\frac{1}{t}+t\right)^2-\frac{\frac{1}{t^2}+1}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{t^2}-\frac{t^2+1}{t^2(t^2+1)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}$$

$$=0$$

★Thí dụ 17. *(Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2012-2013)*

Rút gọn biểu thức: $A=\left(\sqrt{x-\sqrt{50}}-\sqrt{x+\sqrt{50}}\right)\sqrt{x+\sqrt{x^2-50}}$ với $x\geq\sqrt{50}$

Lời giải

Ta có :

$$A^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{50}}-\sqrt{x+\sqrt{50}}\right)^2\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)\Rightarrow A^2=\left(x-\sqrt{50}+x+\sqrt{50}-2\sqrt{x^2-50}\right)\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)$$

$$\Rightarrow A^2=\left(2x-2\sqrt{x^2-50}\right)\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)\Rightarrow A^2=2\left(x^2-x^2+50\right)$$

Vậy: $A^2=100$

Nhưng do theo giả thiết ta thấy $A=\left(\sqrt{x-\sqrt{50}}-\sqrt{x+\sqrt{50}}\right)\sqrt{x+\sqrt{x^2-50}}<0$

$\Rightarrow A=-10$

★Thí dụ 18. *(Trích đề thi HSG Hải Dương năm 2013-2014)*

Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\leq x\leq 1.$

Lời giải

Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$

$= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

$= \sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)}$

$= \sqrt{2x^2} = |x|\sqrt{2}$

★**Thí dụ 19.** *(Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)*

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$$

Lời giải

Điều kiện $x \ge 0,\ x \ne 4;\ x \ne 9;\ x \ne 1$

Ta có:

$$A = \frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}$$

$$A = \frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3}{2(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})} - \frac{1}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}$$

Do x $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \dfrac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ 0; $x \ne 1;\ x \ne 4;\ x \ne 9$

$$A = \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$A = M = \dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$

$A = a > 0;\ a \ne 1$

$A = (\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a} = M > \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$ => ĐPCM

★**Thí dụ 20.** *(Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)*

Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $\left(a^2+b^2-2\right)\left(a+b\right)^2+(1-ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Lời giải

Ta có:

$$(GT)\Rightarrow\left[\left(a+b\right)^2-2(ab+1)\right](a+b)^2+\left(1+ab\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b\right)^4-2(a+b)^2(1+ab)+(1+ab)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(a+b\right)^2-(1+ab)\right]^2=0\Rightarrow(a+b)^2\text{-}(1+ab)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2=1+ab\Leftrightarrow\left|a+b\right|=\sqrt{1+ab}\in Q;vi:a;b\in Q.KL$$

★**Thí dụ 21.** *(Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)*

Cho biểu thức $M=\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a, b>0$ và $a\neq b$

Rút gọi M và tính giá trị biểu thức M biết $\left(1-a\right)\left(1-b\right)+2\sqrt{ab}=1$

Lời giải

Rút gọn $M=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a, b>0$ và $a\neq b$

Ta có

$$\left(1-a\right)\left(1-b\right)+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow ab-a-b+1+2\sqrt{ab}=1$$

$$\Leftrightarrow ab=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=1\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=1$$

+ Nếu $a>b>0$

$$\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}>0;\sqrt{ab}>0\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>0$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\Rightarrow M=1$$

+ nếu $0<a<b$

$$\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}<0;\sqrt{ab}>0\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}<0$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\Rightarrow\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\Rightarrow M=-1$$

Dạng 4: Bài toán rút gọn biểu thức và bài toán liên quan

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn.

1) Cho giá trị của ẩn bắt tính giá trị biểu thức

★Thí dụ 22. *(Trích đề thi HSG huyện lớp 9 năm 2013-2014)*

Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; y\ge 0; xy\ne 1$.

Mẫu thức chung là $1-xy$

$$P=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1-\sqrt{xy})}{1-xy}:\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy}\cdot\frac{1-xy}{1+x+y+xy}$$

$$=\frac{2(\sqrt{x}+y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

b) Ta có: $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{4-3}=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2$

$$\sqrt{x}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$$

$$P=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{1+3-2\sqrt{3}+1}=$$

$$P=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{5-2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+2}{13}$$

★Thí dụ 23. *(Trích đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa năm học 2011-2012)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{10-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Lời giải

Điều kiện: $1<x\ne 10$

$$1)\ P=\frac{3\sqrt{x-1}+9}{10-x}:\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}}.\frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}-3}\right]$$

$$P=\frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x}.\frac{\sqrt{x-1}.\left(\sqrt{x-1}-3\right)}{2\sqrt{x-1}+4}$$

$$P=\frac{3\sqrt{x-1}(x-10)(\sqrt{x-1}-2)}{2(10-x)(x-1-4)}=-\frac{3(x-2)}{2(x-5)}$$

$$2)\ \ x=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}-\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$=> x =1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=2$ vì x>1

Vậy $P = 0$

2) Tìm giá trị của ẩn để biểu thức bằng một hằng số cho trước

★Thí dụ 25. *(Trích đề thi HSG thành phố Thanh Hóa năm 2016-2017)*

Cho biểu thức: $M=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P=\frac{2}{7}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Với x $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ 0, x

$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}=\frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)}=\frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)}=\frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$ 1. Ta có:

$$P=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $a>0;\ a\neq 1$ nên $(\sqrt{a}-1)^2>0\ \Leftrightarrow\ a+1>2\sqrt{a}\ M>\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+2=4$ (t/m)

Vậy $P=\ 0<N=\dfrac{6}{M}<\dfrac{3}{2}$ khi $x=4$

★Thí dụ 26. *(Trích đề thi HSG Ninh Bình năm học 2012-2013)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ $(x>0,\ x\neq 1)$.

1. Rút gọn P.

2. Tìm giá trị của x để P = 3.

Lời giải

1/Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}-2\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x}+1)$

$=x-\sqrt{x}+1$

2/ Ta có: $P=3\ \Leftrightarrow\ x-\sqrt{x}+1=3\ \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0$

Đặt $\sqrt{x}=t,\ t\geq 0$ ta được pt $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (L)\\ t=2\ (TM)\end{array}\right.$

Ta có $t=2$ ta được $\sqrt{x}=2\ \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x=4$ thì $P=3$.

★Thí dụ 27. *(Trích đề thi HSG tỉnh Hà Nam năm 2012-2013)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})}-\dfrac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$

1. Rút gọn biểu thức *P*.

2. Tìm các giá trị *x*, *y* nguyên thỏa mãn *P* = 2.

Lời giải

1) Điều kiện : $x\geq 0\ ;\ y\geq 0\ ;\ y\neq 1\ ;\ x+y\neq 0$.

$$P=\frac{x(1+\sqrt{x})-y(1-\sqrt{y})-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)+\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)+y\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}$$

2) $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y} = 2$ với $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \ne 1$; $x + y \ne 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right)=1$$

Ta có: $1+\sqrt{y} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$

Thay vào P ta được các cặp giá trị (4;0) và (2;2) thỏa mãn.

3) Tìm giá trị của ẩn đê biểu thức thỏa mãn một bất đẳng thức

★**Thí dụ 28.** *(Trích đề Thi HSG huyện Bình Giang năm 2012-2013)*

Cho biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \ge 0, x \ne 1$

1) Rút gọn A

2) Chứng tỏ rằng: $A < \frac{1}{3}$

Lời giải

Ta có:

1) $A = \frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$A = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A = \frac{x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$A = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$, với $x \ge 0, x \ne 1$

2) Xét $\frac{1}{3}-A=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

Do $x\geq 0,\ x\neq 1$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2>0$ và $x+\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Rightarrow\frac{1}{3}-A>0\Leftrightarrow A<\frac{1}{3}$

★**Thí dụ 29.** *(Trích đề thi HSG huyện Vĩnh Lộc –Thanh Hóa năm 2016-2017)*

Cho biểu thức P = $M=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$

a. Tìm ĐKXĐ và rút gọn P

b. Tìm x để $P<0$

Lời giải

a) Tìm được ĐKXĐ: $x\begin{cases}x+2\geq 0\\ x^3+1\neq 0\\ \sqrt{x+2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ x\neq -1\end{cases}$

Ta có:

$$\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) - Ta có: $P<0$

$$A=\frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})}-\frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12}-\frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}$$

$$A=\frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}-\frac{3}{2(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}-\frac{1}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}$$

- Kết hợp với ĐKXĐ ta được: Với $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ thì $P<0$.

★**Thí dụ 30.** *(Trích đề thi HSG huyện Cam Lộ)*

Cho biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3}{x\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh $P \geq 0$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

b) $\sqrt{x} \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Do đó: $P = \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0$

★Thí dụ 31. *(Trích đề thi HSG T.P Đà Nẵng năm học 2013-2014)*

Cho biểu thức: $M = \dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0,\ a \neq 1$.

Chứng minh rằng $M > 4$.

Lời giải

Do $a > 0,\ a \neq 1$ nên: $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \dfrac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$$

Do $a > 0;\ a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \ \Leftrightarrow\ a+1 > 2\sqrt{a}$

$$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

4) Tìm giá trị của ẩn để biểu thức nhận giá trị nguyên

★Thí dụ 32. *(Trích đề thi HSG tỉnh Hải Phòng năm 2016-2017)*

Cho biểu thức $M=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a>0$, $a\neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N=\frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Với điều kiện $a>0;\ a\neq 1$ thì:

$$M=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$$

$$M=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}-\frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}$$

Khi đó $N=\frac{6}{M}=\frac{6\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}>0$. Ta thấy với $0<a\neq 1\Rightarrow a-\sqrt{a}+1>0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+1\right)^2>3\sqrt{a}\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}<2$$

Do $0<N<2$

Để N có giá trị nguyên thì $N=1$.

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}=1\Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-2\right)^2=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=\sqrt{3}+2\\ \sqrt{a}=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=7+4\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn)}\\ a=7-4\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right.$$

Vậy $a=7\pm 4\sqrt{3}$.

★**Thí dụ 33.** *(Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai 2014-2015)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25}-1\right):\left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}+\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}\right)$

1. Rút gọn A
2. Tìm số nguyên x để A nguyên

Lời giải

1) Điều kiện $x\geq 0, x\neq 25, x\neq 9$

Rút gọn $A=\frac{5}{\sqrt{x}+3}$

2) $x\in z$ => $\sqrt{x}+3$ là Ư(5)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=1 \quad \text{(loai)} \\ \sqrt{x+3}=5 \Rightarrow x=4\end{array}\right.$$

★Thí dụ 34. *(Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai năm 2015-2016)*

Cho $M=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 4, x\ne 9\ (*)$

1) Rút gọn M: Với $x\ge 0; x\ne 4, x\ne 9\ (*)$

Rút gọn ta được: $M=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ $M=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

2) $M=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3\vdots\left(\sqrt{x}+1\right)\Rightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\in U(3)$

Ư(3) $\in\{\pm1;\pm3\}$ Vì $x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}+1\ge 1$

Nên $\sqrt{x}+1\in\{1;3\}$

Xảy ra các trường hợp sau:

+) $\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

+) $\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$. (không TMĐK (*) loại)

Vậy x = 0 thì M nhận giá trị nguyên.

★Thí dụ 35. *(Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $x>0,\ x\ne 1$. Khi đó ta có

Rút gọn biểu thức ta được $P=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$

Ta có $Px+(P-1)\sqrt{x}+P-2=0$, ta coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$. Nếu $P=0\Rightarrow-\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P\ne 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$\Delta=(P-1)^2-4P(P-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow -3P^2+6P+1\geq 0\Leftrightarrow P^2-2P+1\leq \frac{4}{3}\Leftrightarrow (P-1)^2\leq \frac{4}{3}$

Do *P* nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2=0\Leftrightarrow P=1\Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $(P-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P=2\\P=0\end{array}\right.\Rightarrow P=2\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

★Thí dụ 36. *(Trích đề Thi HSG huyện lớp 9)*

Cho biêu thức $M=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$

a.Tìm giá trị của x để biểu thức M có nghĩa và rút gọn biểu thức M

b. Tìm $x\in Z$ để $M=5$.

Lời giải

a/ ĐK $x\geq 0; x\neq 4; x\neq 9$

Rút gọn $M=\dfrac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$

Biến đổi ta có kết quả : $=\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b/ Ta có: $M=5\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}=5$ $\Rightarrow \sqrt{x}=4\Rightarrow x=16(TM)$

5) Tìm giá trị của ẩn để biểu thức đạt GTNN hoặc GTLN

★Thí dụ 37. *(Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai 2014-2015)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-5\sqrt{x}}{x-25}-1\right):\left(\dfrac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}\right)$

1. Rút gọn A

2. Với $x\geq 0$, $x\neq 25$, $x\neq 9$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\dfrac{A(x+16)}{5}$

Lời giải

b) Điều kiện $x\geq 0, x\neq 25, x\neq 9$

Rút gọn $A = \dfrac{5}{\sqrt{x}+3}$

b) Ta có :

$$B = \frac{A(x+16)}{5} = \frac{5(x+16)}{5(\sqrt{x}+3} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3+\frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}-6$$

=> $B \geq 4$ => min $B = 4 \Leftrightarrow x=4$

★Thí dụ 38. *(Trích đề thi HSG huyện Tư Nghĩa năm 2016-2017)*

Cho biểu thức $A = \dfrac{x^2-2x}{x^3+1} + \dfrac{1}{2}.(\dfrac{1}{1+\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x+2}})$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

a) Điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa : $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3+1 \neq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) Rút gọn biểu thức A

$$A = \frac{x^2-2x}{x^3+1} + \frac{1}{2}.(\frac{1}{1+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{1-\sqrt{x+2}}) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2}.\frac{2}{1-(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x-2)-(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-1}{x^2-x+1}$$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Ta có $A = \dfrac{-1}{x^2-x+1} = \dfrac{-1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

Ta có A nhỏ nhất khi $(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của là A là $\dfrac{-4}{3}$ khi $x-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bài tập vận dụng

Câu 1. *(Chuyên Nam Định 2018)*

a) Rút gọn biểu thức $P=\frac{x^2}{(x+y)(1-y)}-\frac{y^2}{(x+y)(1+x)}-\frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}<2018$.

Câu 2. *(Chuyên Hà Tĩnh 2018)*

Cho x,y,z là các số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là số hữu tỉ

Câu 3. *(Chuyên Bình Định 2018)*

Cho biểu thức : $T=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$, với $a\neq b, a>0, b>0$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Chứng tỏ $T>1$

Câu 4. *(Chuyên Cà Mau 2018)*

Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=4\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}-2\sqrt{405}$ b) $B=\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

Câu 5. *(Chuyên Lam Sơn 2018)*

Tính giá trị biểu thức $P=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)........\left(1-\frac{1}{1+2+3+....+2018}\right)$

Câu 6. *(Chuyên Hưng Yên 2018)*

Cho các biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{-1}{-x^2+\sqrt{x}}$ và $B=x^4-5x^2-8x+2025$ với $x>0, x\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $T=B-2A^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 7. *(Chuyên Bến Tre 2018)*

Cho biểu thức $P=\frac{a\sqrt{b}+\sqrt{a}-b\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}$ với a,b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P:\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)}$

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a=2019+2\sqrt{2018}$ và $b=2020+2\sqrt{2019}$

Câu 8. *(Chuyên Hà Nam 2018)*

Cho biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$ $(0<a<1)$

1) Rút gọn Q

2) So sánh Q, Q^3

Câu 9. *(Chuyên Lâm Đồng 2018)*

Tính giá trị biểu thức $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Câu 10. *(Chuyên Đồng Nai 2018)*

Cho biểu thức $P=\left(\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\frac{4-a}{\sqrt{a}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các số thực dương a sao cho P đạt giá trị lớn nhất

Câu 11. *(Chuyên Nguyễn Trãi 2018)*

Cho $x=a+1-\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}},(a>0)$; $P=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Rút gọn P theo a

Câu 12. *(Chuyên Năng Khiếu TP. Hồ Chí Minh 2018)*

Biết $0<x\le y$ và

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+2(x+2y))}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)=\frac{5}{3}$$. Tính $\frac{x}{y}$

Câu 13. *(Chuyên Bắc Ninh 2018)*

Rút gọn biểu thức : $P=\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a-\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2},|a|>|b|>0$

Câu 14. *(Chuyên Hải Dương 2016)*

Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}$ với $a>0,\ x>0$.

Câu 15. *(Chuyên Vĩnh Long 2018)*

a) Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right):\frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$ và $x\ne 4$. Tìm giá trị của A tại $x=14+6\sqrt{5}$.

b) Tính giá trị biểu thức $A=\sqrt{12-\sqrt{80-32\sqrt{3}}}-\sqrt{12+\sqrt{80-32\sqrt{3}}}$.

Câu 16. *(Chuyên Bắc Giang 2018)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ (với $x>0;\ x\neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A\geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Câu 17. *(Chuyên Quảng Nam 2018)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ab}}+1\right):\left(\frac{2a\sqrt{b}+2\sqrt{ab}}{1-ab}\right)$.

với $a>0;\ b>0$ và $ab\neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị lớn nhất của A khi $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Câu 18. *(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 2018)*

Rút gọn biểu thức: $P=\left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{a-1}+1-\sqrt{a}\right)\sqrt{\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a}}$ $(a>1)$

Câu 19. *(Chuyên Điện Biên 2018)*

Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}}-\frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5},(x\geq 0;x\neq 25)$.

a) Rút gọn P. Tìm các số thực x để $P>-2$.

b) Tìm các số tự nhiên x là số chính phương sao cho P là số nguyên.

Câu 20. *(Chuyên Đà Nẵng 2018)*

Cho biểu thức $A=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}+\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 1$

Chứng minh rằng: $A\geq \frac{3}{4}$

Câu 21. *(Chuyên Đà Nẵng 2018)*

Cho biểu thức: $Q=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right):\frac{y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x>y>0$.

1. Rút gọn Q.
2. Xác định giá trị của Q khi $x=3y$.

Câu 22. *(HSG TP. Hải Phòng 2018)*

Cho biểu thức $A=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$ với $x,y\geq 0$ và $x\neq y$.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc giá trị của biến.

Câu 23. *(HSG Quận Hồng Bàng 2018)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{xy}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$.

a) Tìm điều kiện của x, y để biểu thức P xác định và rút gọn P;

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P=2$.

Câu 24. *(HSG Quận Lê Chân 2018)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\cdot\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\quad(a>b>0)$

Chứng minh rằng khi $a-b=1$ thì $P\ge 2\sqrt{2}+2$.

Câu 25. *(HSG Quận Ngô Quyền 2018)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tính giá trị của P với $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 26. *(HSG Quận Thủy Nguyên 2018)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$. (với $x>0; x\ne 1$)

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Với giá trị của x ta có $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$.

Câu 27. *(HSG Thanh Hóa 2017)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\ne 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Câu 28. *(HSG Hải Dương 2017)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}\ \ (0\le x\le\dfrac{1}{4})$

Câu 29. *(HSG Hải Phòng 2017)*

Cho $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh $a^2-2a-2=0$.

Câu 30. *(HSG Hải Dương 2016)*

Cho biểu thức: $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1\le x\le 1$).

Tính giá trị của biểu thức *P* khi $x=-\dfrac{1}{2019}$

Câu 31. *(HSG Thái Bình 2011)*

Chứng minh rằng: $\dfrac{87}{89}<\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{2011\sqrt{2010}}<\dfrac{88}{45}$

Câu 32. *(HSG Chuyên Hưng Yên 2019-2020)*

Rút gọn biểu thức $A=2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{20}-20\sqrt{\dfrac{1}{5}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) Điều kiện: $x\ne -y; x\ne -1; y\ne 1$.

$$P=\frac{x^3+x^2-y^2+y^3-x^3y^2-x^2y^3}{(x+y)(1-y)(1+x)}=\frac{x^2-xy+y^2+x-y-x^2y^2}{(1-y)(1+x)}$$

$$=\frac{x^2+x^2y+x-y}{1+x}$$

$$=x+xy-y.$$

b) Đặt $S=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\dfrac{1}{2017^2}+\dfrac{1}{2018^2}}$.

Ta có $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^2+\dfrac{2}{n(n+1)}}$ $\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Áp dụng đẳng thức trên ta được $S=\left(1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(1+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}\right)$

$=2018-\dfrac{1}{2018}<2018$. (điều phải chứng minh)

Câu 2.

Từ giả thiết đã cho ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Leftrightarrow xz+yz=xy\Leftrightarrow 2xy-2xz-2yz=0$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz}=\sqrt{(x+y-z)^2}=|x+y-z|$$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là một số hữu tỉ

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 3.

a) Rút gọn T:

Với $a \ne b, a > 0, b > 0$, ta có:

$$T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a^3}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

Vậy : $T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$, với $a \ne b, a > 0, b > 0$.

b) Chứng tỏ $T > 1$

Ta có: $T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$, với $a \ne b, a > 0, b > 0$. (kết quả câu 1.a)

$\Leftrightarrow T = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}} + 1 > 1$ (vì $\sqrt{ab} > 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} \ne 0$ với $a \ne b, a > 0, b > 0$)

Vậy $T > 1$

Câu 4.

Ta có ngay:

$A = 4\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{405}$

$= 8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$B = \sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

$= \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2.2\sqrt{2}.1 + 1} + \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2.2\sqrt{2}.1 + 1}$

$= \sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}$

$= \left|2\sqrt{2}-1\right| + \left|2\sqrt{2}+1\right| = 2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2}$ (do $2\sqrt{2}-1>0$)

Câu 5. Ta có: $1+2 = 3 = \frac{2.3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2} = \frac{2}{2.3}$

$1+2+3 = 6 = \frac{3.4}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2+3} = \frac{2}{3.4}$

....

$1+2+3+.....+2018 = \frac{2018.2019}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2+3+......+2018} = \frac{2}{2018.2019}$

$P = \left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)......\left(1-\frac{2}{2018.2019}\right)$

$= \frac{2.3-2}{2.3} \cdot \frac{3.4-2}{3.4} .... \frac{2018.2019-2}{2018.2019}$

$$= \frac{4}{2.3}.\frac{10}{3.4}..........\frac{4074340}{2018.2019}$$

$$= \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}........\frac{2016.2019}{2017.2018}.\frac{2017.2020}{2018.2019}$$

$$= \frac{(1.2.......2017).(4.5.......2020)}{(2.3.......2018).(3.4.5.......2019)} = \frac{1.2020}{2018.3} = \frac{2020}{6054} = \frac{1010}{3027}$$

Câu 6.

a) Điều kiện $x > 0; x \neq 1$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{-1}{-x^2+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(x^2-\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}.\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right) = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right) = x-1$$

b) Ta có: $T = B - 2A^2$

$$= x^4 - 5x^2 - 8x + 2025 - 2\left(x-1\right)^2$$

$$= x^4 - 5x^2 - 8x + 2025 - 2x^2 + 4x - 2$$

$$= x^4 - 7x^2 - 4x + 2023$$

$$= x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 - 4x + 4 + 2003$$

$$= \left(x^2-4\right)^2 + \left(x-2\right)^2 + 2023$$

Vì $\left(x^2-4\right)^2 \geq 0, \left(x-2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow T \geq 2003$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy với $T_{min} = 2003 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 7.

a) Rút gọn biểu thức $P : \dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b\right)}$

Điều kiện : $a > 0, b > 0$

$$P = \frac{\sqrt{ab}.\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{1+\sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)}{1+\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow P : \frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b\right)} = P.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b\right)$$

$$= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b\right) = \left(a-b\right)\left(a+b\right) = a^2-b^2$$

b) Ta có:

$$\begin{cases} a = 2019 + 2\sqrt{2018} \\ b = 2020 + 2\sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2018}+1\right)^2 \\ b = \left(\sqrt{2019}+1\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{2018}+1 \\ \sqrt{b} = \sqrt{2019}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2018}+1-\left(\sqrt{2019}+1\right) = \sqrt{2018}-\sqrt{2019}$$

Câu 8. 1) Điều kiện $0 < a < 1$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\right)}\right)\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{|a|}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{(a-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)|a-1| \qquad (do \quad a>0)$$

$$= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}(1-a) \qquad (do \quad 0<a<1)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}{\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}(1-a)$$

$$= \frac{1+a-1+a}{1+a+1-a-2\sqrt{1-a^2}}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.(1-a)$$

$$= \frac{2a}{2-2\sqrt{1-a^2}}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}(1-a)$$

$$= -(1-a) = a-1$$

2) Điều kiện $0 < a < 1$

Ta có: $Q^3 = (a-1)^3$

Xét hiệu :

$$Q^3 - Q = (a-1)^3 - (a-1)$$

$$= (a-1)\left[(a-1)^2-1\right] = (a-1)(a-1-1)(a-1+1) = a(a-1)(a-2)$$

Mà

$$0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a-1<0 \\ a-2<0 \end{cases} \Rightarrow a(a-1)(a-2)>0$$

$$\Rightarrow Q^3-Q>0 \Leftrightarrow Q^3>Q$$

Vậy $Q^3>Q$

Câu 9.

$$A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{2}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}$$

$$=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\sqrt{16-15}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).1$$

$$=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=5-3=2$$

Câu 10.

a) Điều kiện $a>0$

$$P=\left(\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\frac{4-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\left[\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}\right].\frac{4-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\right).\frac{4-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}+2}.\frac{\left(2-\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}+1\right)\left(2-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}$$

$$=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(2-\sqrt{a}\right)=-a+\sqrt{a}+2$$

b) Điều kiện $a>0$. Ta có:

$$P=-a+\sqrt{a}+2=-\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}(\text{tm})$

Vậy $\text{Max}P=\frac{9}{4}$ khi $a=\frac{1}{4}$

Câu 11.

Điều kiện $a>0; x\ne 1$

$$x = a+1-\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}}$$
$$= a+1-\sqrt{\frac{a^2+2a+1+a^4+2a^3+2a^2}{(a+1)^2}}$$
$$= a+1-\sqrt{\frac{a^4+2a^3+a^2+2a+1+2a^2}{(a+1)^2}}$$
$$= a+1-\sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{(a+1)^2}}$$
$$= a+1-\left|\frac{a^2+a+1}{a+1}\right| = a+1-\frac{a^2+a+1}{a+1}\left(\text{do} \quad \frac{a^2+a+1}{a+1}>0\right)$$
$$= \frac{a^2+2a+1-a^2-a-1}{a+1} = \frac{a}{a+1} < 1 \forall a > 0$$
$$\Rightarrow 0 < x < 1 \quad \forall a > 0$$
$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}+1}{\sqrt{(x-1)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|+1}{|x-1|} = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{1-x} = \frac{2}{1-\frac{a}{a+1}} = \frac{2(a+1)}{a+1-a} = 2a+2$$

Vậy $P = 2a+2$

Câu 12.

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right).\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+2(x+2y)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{x}{\sqrt{y}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)=\frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+y+2\sqrt{xy}+x+y-2\sqrt{xy}}{x-y+2x+4y}+\frac{y\sqrt{y}+x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{3(x+y)}+\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1$$
$$\Leftrightarrow x+y-\sqrt{xy}=\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=0$$

$\Leftrightarrow x = y \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 1$

Vậy $\dfrac{x}{y} = 1$

Câu 13. $P = \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a-\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \right) : \dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$, $\quad |a|>|b|>0$

$$= \frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)} . \frac{b^2}{4\sqrt{a^2\left(a^2-b^2\right)}}$$

$$= \frac{a^2+a^2+b^2+2a\sqrt{a^2+b^2} - \left(a^2+a^2+b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2-\left(a^2-b^2\right)} . \frac{b^2}{4.|a|.\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{4a\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} . \frac{b^2}{4.|a|.\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \, khi \quad a>0 \\ -\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad khi \quad a<0 \end{cases}$$

Câu 14.

$$A = \sqrt{\frac{a+x^2-2x\sqrt{a}}{x}} + \sqrt{\frac{a+x^2+2x\sqrt{a}}{x}} = \sqrt{\frac{\left(x-\sqrt{a}\right)^2}{x}} + \sqrt{\frac{\left(x+\sqrt{a}\right)^2}{x}}$$

$$= \frac{\left|x-\sqrt{a}\right| + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

+) Với $x \ge \sqrt{a}$ thì $\left|x-\sqrt{a}\right| = x-\sqrt{a}$ nên $A = \dfrac{x-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$.

+) Với $0<x<\sqrt{a}$ thì $\left|x-\sqrt{a}\right| = -\left(x-\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}-x$

nên $A = \dfrac{\sqrt{a}-x+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

Câu 15.

a) Với $x>0; x\ne 4$, ta có:

$$A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)} - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)} \right] \sqrt{x}.$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}.$$

Ta có $x = 14+6\sqrt{5} = 9+2.3.\sqrt{5}+5 = \left(3+\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2} = \left|3+\sqrt{5}\right| = 3+\sqrt{5}.$

Khi đó, ta có: $A = \frac{3+\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}+2.\left(3+\sqrt{5}\right)+4} = \frac{3+\sqrt{5}}{24+8\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{8\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{8}.$

b) Ta có $A^2 = 24-8\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}-2\right)^2$

$\Rightarrow A = \pm\left(2\sqrt{3}-2\right)$

Do $A<0$ nên $A = 2-2\sqrt{3}$.

Câu 16.

a) + Biến đổi $\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} = \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

+ Biến đổi $\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

+ Ta có $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1} : \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} . \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}$

+ Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với điều kiện $x>0, x\neq 1$.

b) Ta có:

$A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1+\frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2018}}$

$\sqrt{x} \leq \sqrt{2018} \Rightarrow 0 < x \leq 2018$

Vì $x>0, x\neq 1$ và x nguyên nên $x \in \{2;3;4;...;2018\}$. Suy ra có 2017 giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán.

Câu 17. Ta có:

$$A = \frac{2+2\sqrt{a}}{1-ab} : \frac{2a\sqrt{b}+2\sqrt{ab}}{1-ab}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{a})}{2\sqrt{ab}(1+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Khi $a>0;\ b>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}=1-\frac{1}{\sqrt{b}}$

Do đó $A=\frac{1}{\sqrt{b}}(1-\frac{1}{\sqrt{b}})=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow b=4;\ a=4$. Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{4}$ khi $a=b=4$

Câu 18.

Ta có:

$$P=\left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{a-1}+1-\sqrt{a}\right)\sqrt{\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a}}\left(a>1\right)$$

$$P=\left(\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}+1-\sqrt{a}\right).\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{a}}$$

$$P=\left(\frac{1-\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-1}+1-\sqrt{a}\right).\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}\qquad (\text{Do}\quad a>1\Rightarrow\sqrt{a}>1\Rightarrow\sqrt{a}-1>0)$$

$$P=\frac{1-\sqrt{a}+a+\sqrt{a}-1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}.\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$P=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}.\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}=1$$

Câu 19.

a) $P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}}-\frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}}-\frac{3x+4\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$

$$=\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5)+(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)-(3x+4\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}$$

$$=\frac{-x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}$$

$$=-\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}=-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$$

Ta có $P>-2\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}>-2\Leftrightarrow2-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}<5\\ \sqrt{x}>12\end{array}\right.$.

+ Với $\sqrt{x}<5\Leftrightarrow0\le x<25$.

+ Với $\sqrt{x} > 12 \Leftrightarrow x > 144$.

Câu 20.

Điều kiện : $x > 0, x \neq 1$

$$A = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= 2(\sqrt{x}-1) + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} - 1$$

$$= 1 + \sqrt{x}.(\sqrt{x}-1) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy $A \geq \frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (tm)

Câu 21.

a) Ta có: $Q = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) : \frac{y}{x - \sqrt{x^2-y^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x^2-x^2+y^2}{y\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{\sqrt{x+y}.\sqrt{x-y}} = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

Vậy $Q = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$ với $x > y > 0$.

b) Ta có:

Thay $x = 3y$ (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức Q, ta được:

$$Q = \frac{\sqrt{3y-y}}{\sqrt{3y+y}} = \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{4y}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $x = 3y$.

Câu 22.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}\text{ với } x,y\ge 0 \text{ và } x\ne y$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}+\frac{3\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=3$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến với $x,y\ge 0$ và $x\ne y$.

Câu 23.

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; y\ge 0, y\ne 1, x+y\ne 0.$

$$P=\frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)-y\left(1-\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}.$$

b) $P=2\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}=2\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right)=1$

Ta có: $1+\sqrt{y}\ge 1\Rightarrow \sqrt{x}-1\le 1\Rightarrow \sqrt{x}\le 2\Leftrightarrow x\le 4.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 4\Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4\}$

Thay vào phương trình trên $P=2$

Ta được $(x;y)\in\{(4;0);(2;2)\}$

Câu 24.

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\quad (a>b>0)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{(a-b).\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)+(a-b).\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right).\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2(a-b).\sqrt{a+b}}{2b\sqrt{a-b}}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a-b}.\sqrt{a+b}}=\frac{a^2+b^2}{b}$$

Vì $a-b=1\Rightarrow a=b+1$ khi đó theo BĐT AM – GM:

$$P=\frac{a^2+b^2}{b}=\frac{(b+1)^2+b^2}{b}=\frac{2b^2+2b+1}{b}=2b+\frac{1}{b}+2\ge 2\sqrt{2b\cdot\frac{1}{b}}+2=2\sqrt{2}+2$$

Câu 25.

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; y\ge 0, xy\ne 1.$

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{1-xy}:\left(\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy}\cdot\frac{1-xy}{1+x+y+xy}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}+y\sqrt{x}\right)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

b) Với $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2.$

$$\sqrt{x}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$$

$$P=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{5-2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+2}{13}.$$

Câu 26.

a) $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$=\left[\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]:\left[\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]$

$=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$

b) $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1\Leftrightarrow\begin{cases}x>0;x\neq 1\\ \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1 \quad (*)\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{16\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\geq 1 \quad \Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)^2\leq 0\Leftrightarrow x=9 \quad (tm)$

Vậy $x=9$ thì $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$

Câu 27.

Với điều kiện $x>0,x\neq 1$, ta có:

$P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$

Ta có với điều kiện $x>0,x\neq 1\Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1$

$\Rightarrow 0<P=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}<2$

Do *P* nguyên nên suy ra $P=1\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x=1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 28.

Ta có $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) + \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right) = 2x.$

Do đó $B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - \left|2\sqrt{x} - 1\right| = 1 - \left(1 - 2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}.$

Câu 29.

Ta có:

$$a^2 = 3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9 - \left(5 + 2\sqrt{3}\right)}$$

$$= 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= 6 + 2\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = 6 + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)4 + 2\sqrt{3} = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$$

Vì $a > 0$ nên $a = \sqrt{3} + 1$. Do đó $\left(a - 1\right)^2 = 3$ hay $a^2 - 2a - 2 = 0.$

Câu 30.

$$P = \sqrt{1 - x}\left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow P^2 = \left(1 - x\right)\left(2 + 2\sqrt{1 - \left(1 - x^2\right)}\right) = 2\left(1 - x\right)\left(1 + \left|x\right|\right)$$

Mà $P = \sqrt{1 - x + \left(1 - x\right)\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x - \left(1 - x\right)\sqrt{1 - x^2}} \geq 0 \Rightarrow P = \sqrt{2}\left(1 - x\right)$

Với $x = -\frac{1}{2019} \Rightarrow P = \frac{2019}{2018}\sqrt{2}.$

Câu 31.

Với n là số nguyên dương ta có:

$$\frac{1}{\left(n + 1\right)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\left(n + 1\right)n} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n + 1} > \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n + 1}}$$

Suy ra: $A = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{2011\sqrt{2010}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}}$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} > 1 - \frac{2}{89} = \frac{87}{89}.$$

Lại có: $\frac{1}{\left(n + 1\right)\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n + 1}\left(\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n + 1}}$

$$\Rightarrow A < 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + ... + \frac{2}{\sqrt{2010}} - \frac{2}{\sqrt{2011}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2011}}\right) < 2\left(1 - \frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45}$$

Câu 32.

Ta có

$$A = 2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{20} - 20.\sqrt{\frac{1}{5}} = 2\left|2-\sqrt{5}\right| + 2\sqrt{5} - 20.\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$= 2\left(\sqrt{5}-2\right) + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 4 + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -4$$