

CÁC BÀI TOÁN VỀ TỨ GIÁC VÀ ĐA GIÁC ĐẶC SẮC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ TỨ GIÁC

1. Tứ giác

Định nghĩa:

- Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.
- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tam giác.

Tính chất:

- Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .
- Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác. Tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng 360°

2. Hình thang

Định nghĩa

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Tính chất

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

Hình thang cân

- Định nghĩa: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Tính chất: Trong hình thang cân hai cạnh bên bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau.
- Dấu hiệu nhận biết:
 - + Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
 - + Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của tam giác

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Đường trung bình của hình thang

- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

3. Hình bình hành

Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

Tính chất: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

4. Hình chữ nhật

Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Tính chất: Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Áp dụng vào tam giác:

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

5. Hình thoi

Định nghĩa: Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất: Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.

- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

6. Hình vuông

Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
- Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

7. Đa giác

Định nghĩa

• **Đa giác lồi** là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

- **Đa giác đều** là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Một số tính chất

- Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng $\frac{n(n-3)}{2}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác ABCD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Phân tích tìm lời giải

Để thấy nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc thì $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, ngược lại nếu có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, khi đó để chứng minh AC và BD vuông góc với nhau ta có các hướng sau:

+ Hướng 1: Gọi M là giao điểm của AC và BD. Từ đỉnh B hạ đường thẳng vuông góc với AC tại O. Ta cần chứng minh được M và O trùng nhau. Muốn vậy lấy N trên tia đối của tia OB sao cho $ON = MD$ và ta cần phải chứng minh được hai điểm M và O trùng nhau. Chú ý rằng khi $AB = BC$ thì ta suy ra được $CD = DA$ nên hiển nhiên M và O trùng nhau. Như vậy ta cần xét cho trường hợp $AB \neq BC$. Theo định lí Pitago ta có

$$AB^2 + CD^2 = AM^2 + 2AM \cdot OM + OM^2 + OB^2 + CM^2 + MD^2$$

$$BC^2 + AD^2 = OB^2 + MC^2 - 2MC \cdot OM + OM^2 + MA^2 + MD^2$$

Mà ta lại có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên từ đó suy ra được $MO(AM + MC) = 0 \Leftrightarrow MO = 0$

+ Hướng 2: Dựng BK và DH cùng vuông góc với AC. Ta cần chứng minh cho hai điểm K và H trùng nhau. Áp dụng định lí Pitago ta được

$$AB^2 + CD^2 = AK^2 + BK^2 + CH^2 + DH^2; BC^2 + AD^2 = CK^2 + BK^2 + AH^2 + DH^2$$

Mà ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên ta được $KH = 0$.

Lời giải

+ Điều kiện cần: Xét tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc tại O. Khi đó áp dụng định lí Pitago ta được

$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2; AD^2 + BC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

Từ đó ta được $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

+ Điều kiện đủ: Xét tứ giác ABCD có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Cách 1: Ta xét các trường hợp sau

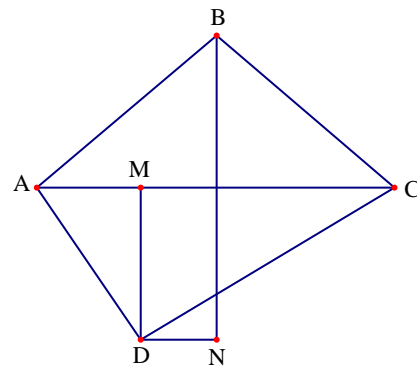
- Nếu $AB = BC$ thì từ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ ta được $CD = DA$

Từ đó suy ra B, D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC, do đó $AC \perp BD$.

- Nếu $AB \neq BC$. Khi đó vẽ BO vuông góc với AC tại O, vẽ DM vuông góc với AC tại M, vẽ DN vuông góc với BO tại N. Khi đó tứ giác DMNO là hình chữ nhật.

Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm giữa O và A.

Khi đó áp dụng định lí Pitago ta được



$$\begin{aligned}
 AB^2 + CD^2 &= OA^2 + OB^2 + CM^2 + MD^2 = (MA + MO)^2 + OB^2 + CM^2 + MD^2 \\
 &= AM^2 + 2AM \cdot OM + OM^2 + OB^2 + CM^2 + MD^2 \\
 BC^2 + AD^2 &= OB^2 + OC^2 + MA^2 + MD^2 = OB^2 + (MC - OM)^2 + MA^2 + MD^2 \\
 &= OB^2 + MC^2 - 2MC \cdot OM + OM^2 + MA^2 + MD^2
 \end{aligned}$$

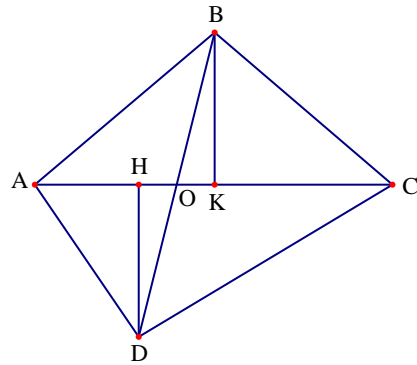
Mà ta lại có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên ta được

$$2MA \cdot OM = -2MC \cdot OM \Leftrightarrow MO(AM + MC) = 0 \Leftrightarrow MO = 0$$

Từ đó dẫn đến hai điểm O và M trùng nhau hay ta được $AC \perp BD$.

Cách 2: Vẽ DH vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K

- Nếu hai điểm K và H trùng nhau thì ta được $AC \perp BD$
- Nếu hai điểm K và H không trùng nhau, khi đó gọi O là giao điểm của AC và BD. Không mất tính tổng quát ta giả sử A, H, O, K, C nằm trên AC theo thứ tự đó.



Áp dụng định lý Pitago ta được

$$\begin{aligned}
 AB^2 + CD^2 &= AK^2 + BK^2 + CH^2 + DH^2 \\
 BC^2 + AD^2 &= CK^2 + BK^2 + AH^2 + DH^2
 \end{aligned}$$

Mà ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ nên ta được

$$\begin{aligned}
 AK^2 + CH^2 &= CK^2 + AH^2 \Leftrightarrow AH^2 - CH^2 + CK^2 - AK^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow (AH + CH)(AH - CH) + (AK + CK)(CK - AK) &= 0 \\
 \Leftrightarrow AC(AH - CH + CK - AK) = 2AC \cdot KH &\Leftrightarrow KH = 0
 \end{aligned}$$

Điều này vô lý vì K và H không trùng nhau. Vậy hai điểm K và H trùng nhau hay ta được $AC \perp BD$.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau. Lấy các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng $EG = FH$ và $EG \perp FH$

Phân tích tìm lời giải

Từ giả thiết của bài toán ta suy ra được $\frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$ nên $EM \parallel AC$. Tương tự ta cũng được $NF \parallel BD$. Từ đó ta được $EM = \frac{2}{3}AC$; $NF = \frac{2}{3}BD$, chú ý đến $AC = BD$ suy ra được $ME = NF$. Từ các đường thẳng song song ta thấy được $MG = NH = \frac{1}{3}AC$ và

$\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^\circ$ nên $\Delta EMG = \Delta FNH$. Từ đó ta suy ra được $EG = FH$. Mặt khác gọi O là giao điểm của EG với FH , P là giao điểm của EM với FH và Q là giao điểm của EM với FN . Khi đó ta thấy $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^\circ$ nên ta được $EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$

Lời giải

+ Chứng minh $EG = FH$

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có $CM = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{3}BC$ nên ta được

$$\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$$

Do đó theo định lí Talets đảo ta được EM song song với AC . Nên suy ra

$$\frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3}AC$$

Tương tự ta được $\frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3}BD$

Mà ta lại có $AC = BD$ nên suy ra được mà $ME = NF$. Tương tự như trên ta có $MG \parallel BD$ và $NH \parallel AC$. Lại có $MG = NH = \frac{1}{3}AC$. Mặt khác $EM \parallel AC$; $MG \parallel BD$ và AC vuông góc với BD nên ta được EM vuông góc với MG . Từ đó ta được $\widehat{EMG} = 90^\circ$. Hoàn toàn tương tự thì ta có $\widehat{FNH} = 90^\circ$. Từ đó ta được $\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^\circ$.

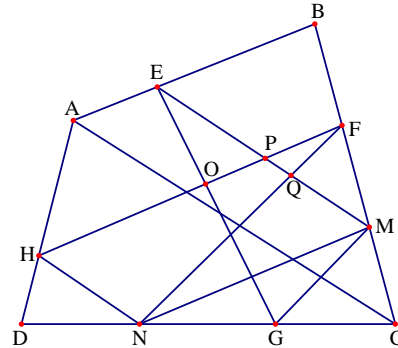
Kết hợp với $ME = NF$ và $MG = NH = \frac{1}{3}AC$ ta được $\Delta EMG = \Delta FNH$ nên suy ra $EG = FH$

+ Chứng minh $EG \perp FH$

Gọi O là giao điểm của EG với FH , P là giao điểm của EM với FH và Q là giao điểm của EM với FN .

Khi đó ta có $\widehat{PQF} = 90^\circ$ nên $\widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^\circ$. Mà ta lại có $\widehat{QPF} = \widehat{OPE}$ và $\widehat{OEP} = \widehat{QFP}$

Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^\circ$ nên ta được $EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$



Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm M trên cạnh AD . Qua điểm A và D vẽ lần lượt các đường thẳng song song với MC và MB , hai đường thẳng này cắt nhau tại N . Chứng minh rằng N nằm trên cạnh BC khi và chỉ khi AB song song với CD .

Phân tích tìm lời giải

+ Khi N nằm trên cạnh BC thì ta được $\frac{PA}{PB} = \frac{CN}{CB}$ và $\frac{CN}{CB} = \frac{CD}{CQ}$ nên

$\frac{PA}{PB} = \frac{CD}{CQ} \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{PB}{CQ}$. Từ Q kẻ đường thẳng song song với PB và cắt AD, PC lần lượt tại

D' và C' thì ta được $\frac{PA}{C'D'} = \frac{CD}{CQ}$, từ đó ta được $\frac{CD}{CQ} = \frac{C'D'}{C'Q}$. Từ đó suy ra C và C' , D và D'

trùng nhau. Do đó ta được $AB // CD$

+ Khi AB song song với CD , khi đó giả sử DN cắt BC tại K và AN cắt BC tại L . Khi đó cần chứng minh ba điểm N, K, L trùng nhau.

Lời giải

Gọi giao điểm của AB và CM là P , giao điểm của BM và CD là Q .

+ Điều kiện cần: Ta chứng minh khi N nằm trên cạnh BC thì AB song song với CD .

Thật vậy, khi N nằm trên cạnh BC thì

Do $AN // CP$ nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CN}{CB}$$

Do $DN // BQ$ nên theo định lý Talet ta có $\frac{CN}{CB} = \frac{CD}{CQ}$. Từ đó ta được $\frac{PA}{PB} = \frac{CD}{CQ} \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{PB}{CQ}$.

Từ Q kẻ đường thẳng song song với PB và cắt AD, PC lần lượt tại D' và C' . Ta sẽ chứng minh hai điểm C và C' trùng nhau, hai điểm D và D' trùng nhau. Vì $QC' // BP$ nên theo

định lý Talet ta có $\frac{PA}{C'D'} = \frac{CD}{CQ}$, từ đó ta được $\frac{CD}{CQ} = \frac{C'D'}{C'Q}$. Nếu hai điểm C và C'

không trùng nhau, hai điểm D và D' không trùng nhau thì ta được $DD' // CC'$. Điều này mâu thuẫn. Do đó ta được $PB // CQ$ hay $AB // CD$.

+ Ta chứng minh khi $AB // CD$ thì N nằm trên cạnh BC .

Thật vậy, giả sử DN cắt BC tại K và AN cắt BC tại L . Do $AB // CD$ và $BM // DK$ nên theo định

lý Talet ta được $\frac{PA}{PB} = \frac{CD}{CQ} = \frac{CK}{CB}$. Từ $AL // CM$ ta có $\frac{PA}{PB} = \frac{CL}{CB}$

Từ đó ta được $\frac{CL}{CB} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow CL = CK$ nên ta được $L \equiv K$, do đó $L \equiv K \equiv N$ hay N nằm trên

BC .

Ví dụ 4. Hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ và hai đường chéo cắt nhau tại O . Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M và N .

a) Chứng minh rằng $OM = ON$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.

c) Biết $S_{AOB} = a^2$ và $S_{COD} = b^2$. Tính S_{ABCD} theo a và b .

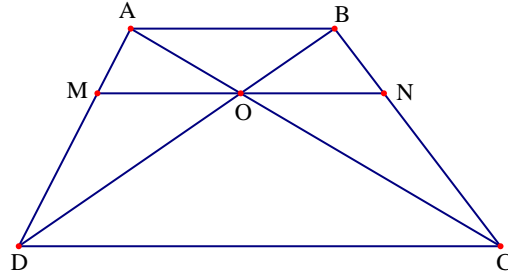
Lời giải

a) Trong tam giác DAB có OM song song AB nên theo định lý Talets ta có $\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{BD}$

Tương tự ta có $\frac{ON}{AB} = \frac{OC}{AC}$

Cũng theo định lý Talets ta có $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA}$

Do đó $\frac{OD}{OD+OB} = \frac{OC}{OC+OA} \Rightarrow \frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$



Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB}$ nên suy ra $OM = ON$

b) Trong tam giác ABD có $OM \parallel AB$ nên theo định lý Talets ta có $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$

Trong tam giác ADC có $OM \parallel CD$ nên theo định lý Talets ta có $\frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD}$

Từ đó ta được $OM \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = \frac{AM+DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $ON \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1$

Suy ra ta có $(OM+ON) \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 2$ hay ta được $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

c) Dễ thấy các tam giác AOB và AOD có cùng đường cao hạ từ A nên $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD}$

Các tam giác BOC và DOC có cùng đường cao hạ từ C nên $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{OB}{OD}$

Do đó ta được $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{DOC}}$ suy ra $S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$

Mà lại lại có $S_{CAB} = S_{DAB}$ hay $S_{COB} + S_{AOB} = S_{DOA} + S_{AOB}$ nên ta được $S_{AOD} = S_{BOC}$

Do đó suy ra $S_{AOB} \cdot S_{DOC} = (S_{AOD})^2$ hay ta được $S_{AOD}^2 = a^2 \cdot b^2 \Rightarrow S_{AOD} = ab$

Từ đó suy ra $S_{ABCD} = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Ví dụ 5. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

a) Hai đường thẳng MP và AB song song với nhau

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy tại một điểm

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh MP song song với AB. Ta chứng minh $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM}$

+ Để chứng minh ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy tại một điểm. Ta gọi I là giao điểm của BD và CF rồi chứng minh ba điểm P, I, M thẳng hàng

Lời giải

a) Do EP // AC nên theo định lý Talets ta có

$$\frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$$

Do AK // CD nên theo định lý Talets ta có $\frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK}$

Để thấy các tứ giác AFCD và DCBK là các hình bình hành nên AF = DC và BF = AK. Kết hợp các

kết quả trên ta được $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM}$ nên theo định lý

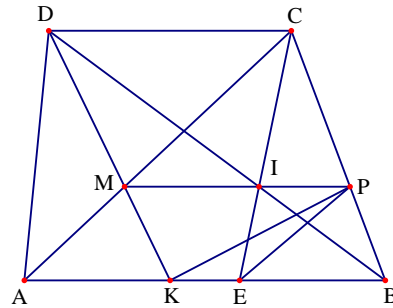
đảo ta có MP song song với AB.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, khi đó ta có $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$

Mà FB song song với CD nên $\frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB}$ suy ra $\frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB}$

Từ đó theo định lý Talets đảo ta có IP // DC // AB

Do đó qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB nên theo tiên đề Oclit thì ba điểm P, I, M thẳng hàng hay MP đi qua giao điểm của CF và DB. Do đó ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy



Ví dụ 6. Cho hình thang ABCD (AB//CD). Chứng minh rằng nếu $AC + CB = AD + DB$ thì hình thang ABCD cân.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh được hình thang ABCD cân ta có các ý tưởng sau:

+ Ý tưởng thứ nhất ta sẽ chứng minh hai đường chéo AC và BD bằng nhau. Hạ AH và BK cùng vuông góc với CD. Khi đó ta được $AD^2 = AH^2 + HD^2$; $BC^2 = BK^2 + CK^2$. Đến đây ta thấy nếu $BD > AC$ thì ta được $DK > CH$, từ đó suy ra $DH > CK$ nên ta được $AD > BC$. Từ đó ta suy ra được $AC + CB < AD + DB$, nhưng điều này lại mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $BD < AC$ ta cũng được kết quả tương tự. Do đó ta suy ra được AC và BD bằng nhau hay ABCD là hình thang cân.

+ Ý tưởng thứ hai là chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ để hình thang ABCD nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Cách 1: Hạ AH vuông góc với CD và B vuông góc với CD ($H, K \in CD$). Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Nếu $BD > AC$, khi đó áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông AHC và BKD ta có

$$DK^2 = BD^2 - BK^2; CH^2 = AC^2 - AH^2$$

Do $BD > AC$ và $AH = BK$ nên ta được

$$DK > CH, \text{ từ đó suy ra } DH > CK.$$

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông AHD và BKC ta có

$$AD^2 = AH^2 + HD^2; BC^2 = BK^2 + CK^2$$

Do $AH = CK$ và $DH > CK$ nên ta được $AD > BC$.

Từ $BD > AC$ và $AD > BC$ suy ra $AC + CB < AD + DB$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $AC + CB = AD + DB$. Vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Trường hợp 2: Nếu $BD < AC$, chứng minh tương tự như trên ta cũng được

$$AC + CB > AD + DB$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $AC + CB = AD + DB$. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Từ đó ta được $AC = BD$ hay hình thang ABCD cân.

Cách 2: Gọi I và J lần lượt là tâm đường trong nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Gọi E và F là hình chiếu tương ứng của I và J trên AC và BD.

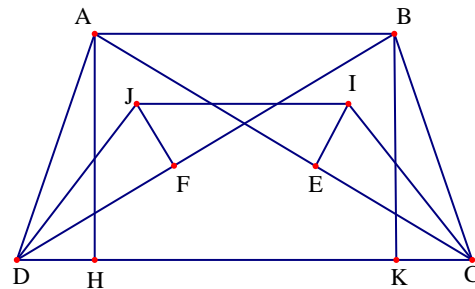
Do $AB \parallel CD$ nên ta có $S_{ABC} = S_{ABD}$ do đó ta có $IE(AB + BC + CA) = JF(AB + BD + DA)$ (1)

Từ $AC + CB = AD + DB$ ta được $AC + CB + AB = AD + DB + AB$.

Kết hợp với (1) ta được $IE = JF$. Mặt khác ta có $2CE = AC + BC - AB = AD + BD - AB = 2DF$

Xét hai tam giác vuông IEC và JFD có $IE = JF$, $CE = DF$ nên ta được $\widehat{ICE} = \widehat{JDF}$

Từ đó suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, do đó hình thang ABCD nội tiếp. Suy ra hình thang ABCD là hình thang cân.



Ví dụ 7. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi K, M lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q. Chứng minh rằng KM song song với AB và $QC = QD$

Phân tích tìm lời giải

+ Gọi I là trung điểm AB, E là giao điểm của IK với CD, R là giao điểm của MI với CD. Để chứng minh $KM // AB$ ta sẽ chứng minh $KM // ER$. Muốn vậy ta cần chứng minh KM là đường trung bình của tam giác IER. Để có điều này ta cần chứng minh được $IK = KE$ và $MI = MR$, điều này có thể thực hiện được do $\Delta KIB = \Delta KED$ và $\Delta MIA = \Delta MRC$.

+ Để chứng minh $QC = QD$ ta sẽ chứng minh Q thuộc đường trung trực của CD hay Q thuộc đường trung trực của ER. Muốn vậy ta cần chứng minh Q là giao điểm của hai đường trung trực của tam giác IER.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB, E là giao điểm của IK với CD, R là giao điểm của MI với CD.

Xét hai tam giác KIB và KED có

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}, \quad KB = KD \text{ và } \widehat{IKB} = \widehat{EKD}$$

Suy ra $\Delta KIB = \Delta KED \Rightarrow IK = KE$

Chứng minh tương tự có $\Delta MIA = \Delta MRC$

nên suy ra $MI = MR$

Trong tam giác IER có $IK = KE$ và $MI = MR$ nên KM là đường trung bình, do đó $KM // CD$

Mà ta lại có $CD // AB$ nên ta được $KM // AB$.

+ Ta có $IA = IB; KB = KD$ nên IK là đường trung bình của tam giác ABD.

Từ đó suy ra $IK // AD$ hay $IE // AD$. Chứng minh tương tự cho tam giác ABC ta được $IM // BC$ hay $IR // BC$

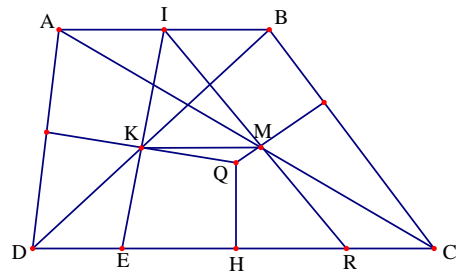
Lại có $QK \perp AD$ và $IE // AD$ nên $QK \perp IE$. Tương tự ta cũng có $QM \perp IR$

Từ trên có $IK = KE$ và $QK \perp IE$ nên QK là trung trực ứng với cạnh IE của tam giác IER.

Tương tự QM là trung trực thứ hai của tam giác IER

Hạ $QH \perp CD$ suy ra QH là trung trực thứ ba của tam giác. Do đó Q nằm trên trung trực của đoạn CD

Suy ra Q cách đều C và D hay $QC = QD$



Ví dụ 8. Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn là AC. Tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. Chứng minh rằng

$$a) \frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$$

$$b) AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

Lời giải

a) Do $AD \parallel CM$ nên theo định lý Talets ta có

$$\frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI}$$

Do CD song song với AN nên ta được

$$\frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN}$$

Từ đó ta được $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay $ID^2 = IM \cdot IN$

Cũng theo định lý Talets ta có $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB}$

Nên ta được $\frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB}$

Từ $ID = IK$ và $ID^2 = IM \cdot IN$ suy ra $IK^2 = IM \cdot IN$. Do đó ta được

$$\frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK}$$

Nên suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB}$. Kết hợp với suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

b) Dễ thấy hai tam giác AGB và AEC đồng dạng với nhau nên ta được

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG$$

Từ đó ta được $AB \cdot AE = AG \cdot (AG + CG)$. Ta lại có $\triangle CGB \sim \triangle AFC$ nên suy ra

$$\frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$$

Từ đó ta được $AF \cdot AD = AC \cdot CG \Rightarrow AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot CG$

Cộng vế theo vế hai kết quả trên ta được

$$AB \cdot AE + AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot AG + (AG + CG) \cdot CG$$

Hay ta được $AB \cdot AE + AF \cdot AD = AG^2 + 2 \cdot AG \cdot CG + CG^2 = (AG + CG)^2 = AC^2$

Vậy $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

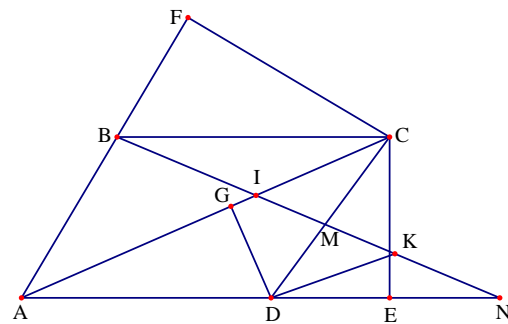
Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N thỏa mãn điều kiện $\frac{BM}{CM} = \frac{CN}{2DN} = k$ (k là một số cho trước). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BD với AM, AN .

Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = S_{APQ}$.

Phân tích tìm lời giải

Dễ thấy $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN}$ do đó để chứng minh $S_{MNPQ} = S_{APQ}$ ta cần chỉ ra được

$\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{1}{2}$. Từ đó ta tập trung chứng minh $\frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN} = \frac{1}{2}$. Để ý là $\frac{BM}{CM} = k$ nên



$\frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{BM}{AD} = \frac{k}{k+1}$, từ đó ta được $\frac{PM}{AP} = \frac{k}{k+1}$ nên $\frac{AP}{AM} = \frac{k+1}{2k+1}$. Hoàn toàn tương tự tương tự ta được $\frac{AQ}{AN} = \frac{2k+1}{2(k+1)}$. Đến đây bài toán được chứng minh.

Lời giải

Để thấy $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot AQ \cdot \sin \widehat{PAQ}}{\frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{MAN}} = \frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN}$. Mà ta có $\frac{BM}{CM} = \frac{CN}{2DN} = k$.

Nên ta được $\frac{BM}{BM+CM} = \frac{k}{k+1}$ hay $\frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{BM}{AD} = \frac{k}{k+1}$

Trong tam giác PAD có MB//AD nên theo

định lí Talets ta có $\frac{BM}{AD} = \frac{PM}{AP}$. Từ đó ta

được $\frac{PM}{AP} = \frac{k}{k+1}$ nên suy ra

$$\frac{AP}{AP+PM} = \frac{k+1}{2k+1} \text{ hay } \frac{AP}{AM} = \frac{k+1}{2k+1}$$

Lại có $\frac{CN}{2DN} = k$ nên $\frac{DN}{CN} = \frac{1}{2k}$.

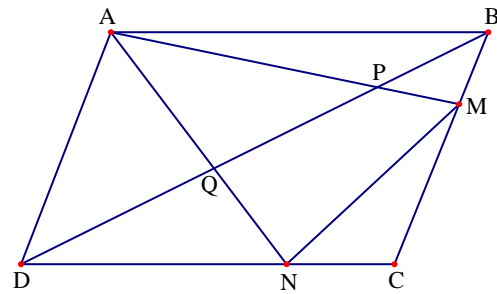
Do đó $\frac{DN}{DN+CN} = \frac{1}{2k+1} \Rightarrow \frac{DN}{CD} = \frac{1}{2k+1}$. Từ đó suy ra $\frac{AB}{DN} = 2k+1$.

Trong tam giác QAB có DN//AB nên theo định lí Talets ta được $\frac{AQ}{NQ} = \frac{AB}{DN}$

Từ đó ta được $\frac{AQ}{NQ} = 2k+1 \Rightarrow \frac{AQ}{AQ+NQ} = \frac{2k+1}{2k+1+1} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{2k+1}{2(k+1)}$

Do đó ta được $\frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN} = \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{APQ} = \frac{1}{2} S_{AMN}$

Từ đó suy ra $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{AMN}$ nên ta được $S_{MNPQ} = S_{APQ}$.



Ví dụ 10. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng R và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng r. Tính diện tích hình thoi ABCD theo các bán kính R và r.

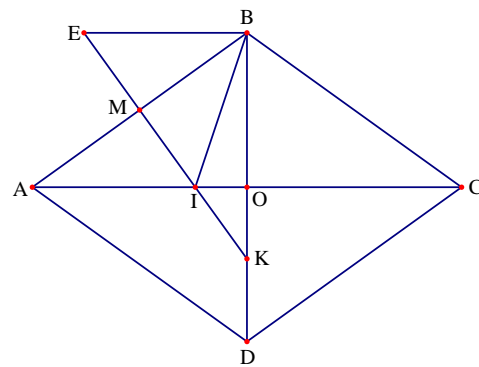
Phân tích tìm lời giải

Do tứ giác ABCD là hình thoi nên hai đường chéo là đường trung trực của nhau. Khi đó tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ABD lần lượt nằm trên AC và BC. Lúc

này vẽ đường trung trực của AB cắt AC, BD lần lượt tại I, K thì I, K là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ABD tương ứng. Khi đó ta suy ra được $KB = r$ và $IB = R$. Để tính được diện tích hình thoi ABCD theo R và r ta cần tính được OA và OB theo R và r. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt IK tại E khi đó ta thấy tam giác EBK vuông tại B có đường cao BM nên $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$. Lại có $\triangle AOB \sim \triangle AMI$ suy ra $\frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AI}$ từ đó ta tính được $AO = \frac{AM \cdot AB}{AI} = \frac{AB^2}{2R}$ và tương tự thì $BO = \frac{BM \cdot AB}{BK} = \frac{AB^2}{2r}$. Kết hợp các kết quả trên ta tính được diện tích hình thoi ABCD theo R và r.

Lời giải

Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD và BD là đường trung trực của AC. Do vậy nếu gọi M, I, K là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AB với AB, AC, BD thì ta có I, K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD



Từ đó ta có $KB = r$ và $IB = R$. Lấy một điểm E đối xứng với điểm I qua M, Ta có BEAI là hình thoi (vì có hai đường chéo EI và AB vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{EBA}$ mà $\widehat{BAI} + \widehat{ABO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBA} + \widehat{ABO} = 90^\circ$

Xét $\triangle EBK$ có $\widehat{EBK} = 90^\circ$ và đường cao BM nên ta có $\frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BM^2}$

Mà $BK = r$, $BE = BI = R$; $BM = \frac{a}{2}$ nên ta được $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle AMI$ có $\widehat{AOB} = \widehat{AMI} = 90^\circ$ và \widehat{A} chung

Do đó $\triangle AOB \sim \triangle AMI$ suy ra $\frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AO = \frac{AM \cdot AB}{AI} = \frac{AB^2}{2R}$

Chứng minh tương tự ta được $BO = \frac{BM \cdot AB}{BK} = \frac{AB^2}{2r}$. Ta có $S_{ABCD} = 2 \cdot AO \cdot OB = 2 \cdot \frac{AB^4}{4Rr}$. Mà

theo định lí Pitago ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2 = \frac{1}{4} AB^4 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} \right) \Rightarrow AB^2 = \frac{4R^2 r^2}{R^2 + r^2}$

Từ đó ta có $S_{ABCD} = \frac{8R^3 r^3}{(R^2 + r^2)^2}$.

Ví dụ 11. Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Lấy M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

a) Chứng minh rằng tam giác OEM vuông cân.

b) Chứng minh rằng ME song song với BN.

c) Từ C kẻ CH vuông góc với BN với H thuộc BN. Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

a) Để thấy $\triangle OEB = \triangle OMC$ nên ta suy ra được $OE = OM$ và $\widehat{BOM} + \widehat{BOE} = \widehat{EOM} = 90^\circ$ nên tam giác EOM vuông cân.

b) Theo định lí Talet ta nhận thấy $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB}$. Từ đó suy ra $ME \parallel BN$.

c) Để chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng ta có thể gọi giao điểm của MO với BN là H' và chứng minh đi H' trùng với H.

Lời giải

a) Xét hai tam giác OEB và OMC. Vì ABCD là hình vuông nên ta có $OB = OC$ và

$$\widehat{ABD} = \widehat{BCA} = 45^\circ$$

Lại có $BE = CM$ nên suy ra $\triangle OEB = \triangle OMC$.

Do đó ta được $OE = OM$ và $\widehat{BOE} = \widehat{COM}$

Lại có $\widehat{BOM} + \widehat{MOC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ vì tứ giác ABCD là hình vuông

Nên ta được $\widehat{BOM} + \widehat{BOE} = \widehat{EOM} = 90^\circ$, kết

hợp với $OE = OM$ suy ra $\triangle OEM$ vuông cân tại

O

b) Vì tứ giác ABCD là hình vuông nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$.

Do $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel CN$, áp dụng định lí Talet ta được $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$

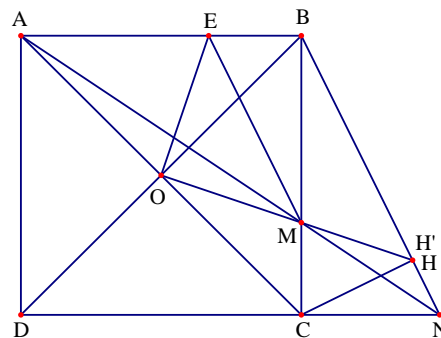
Mà $BE = CM$ và $AB = CD$ nên $AE = BM$. Do đó suy ra $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB}$, nên ta được $ME \parallel BN$.

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN. Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OH'B}$ (cặp góc đồng vị)

Mà $\widehat{OME} = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O. Nên ta được $\widehat{MH'B} = 45^\circ = \widehat{BCA}$

Do đó ta được $\triangle OMC \sim \triangle BMH'$. Suy ra $\frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MH'}$, kết hợp $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối

đỉnh)



Nên ta được $\triangle OMB \sim \triangle CMH'$ suy ra $\widehat{OBM} = \widehat{MH'C} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN (H \in BN)$ suy ra $H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng.

Ví dụ 12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC và CD lấy các điểm P và Q sao cho $\widehat{PAQ} = 45^\circ$. Kẻ PM song song với AQ ($M \in AB$) và QN song song với AP ($N \in AD$). Đường thẳng MN cắt AP, AQ lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $EF^2 = ME^2 + NF^2$.

Phân tích tìm lời giải

Quan sát hệ thức cần chứng minh ta liên tưởng đến định lí Pitago cho tam giác vuông. Do đó một ý tưởng hoang toàn tự nhiên là tạo ra một tam giác EFK vuông tại K sao cho $NF = FK; ME = EK$. Vấn đề là điểm K được xác định như thế nào. Ta có thể lấy điểm K đối xứng với N qua AQ, từ đó ta đi chứng minh K đối xứng với M qua AP và $\widehat{EKF} = 90^\circ$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $PM \parallel AQ$ và $QN \parallel AP$ nên ta có

$$\widehat{MPA} = \widehat{PAQ} = \widehat{NQA} = 45^\circ$$

Do đó ta được $\widehat{PAB} = \widehat{NQA}$, suy ra hai tam giác APB và QDN đồng dạng với nhau. Suy ra

$$\frac{ND}{QD} = \frac{PB}{AB} \Rightarrow ND = \frac{PB \cdot QD}{AB}$$

Lại có $\widehat{BPM} = \widehat{DAQ}$ nên hai tam giác BPM và DAQ đồng dạng với nhau. Suy ra

$$\frac{BM}{BP} = \frac{QD}{AD} \Rightarrow BM = \frac{QD \cdot BP}{AD}$$

Từ đó ta được $BM = DN$ nên ta có $AM = AN$

Gọi K là điểm đối xứng với M qua AP, khi đó ta được $AK = AM = AN$ và $\widehat{MAP} = \widehat{KAP}$

Mặt khác ta lại có $\widehat{MAP} + \widehat{QAN} = \widehat{KAP} + \widehat{QAK} = 45^\circ$ nên ta được $\widehat{QAK} = \widehat{QAN}$

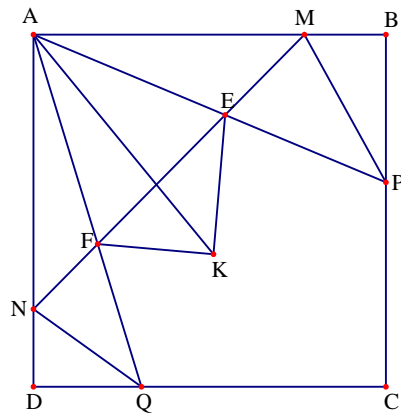
Suy ra hai điểm K và N đối xứng với nhau qua AQ, do đó $EN = EK, EN = FK$

Từ đó ta được $\widehat{KEF} + \widehat{KFE} = 180^\circ - \widehat{KEM} + 180^\circ - \widehat{KFN} = 360^\circ - 2(\widehat{MEP} + \widehat{NFQ}) = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{EKF} = 90^\circ$ hay tam giác EKF vuông tại K. Do đó theo định lí Pitago ta có

$$EF^2 = KE^2 + KF^2$$

Mà ta có $EN = EK, EN = FK$, từ đó suy ra $EF^2 = ME^2 + NF^2$.



Ví dụ 13. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CB, CD lấy lần lượt các điểm E và F sao cho $\frac{EB}{BC} = k$ và $\frac{DF}{DC} = \frac{1-k}{1+k}$ với $0 < k < 1$. Đoạn thẳng BD cắt AE, AF lần lượt tại H, G. Đường thẳng vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$.

Phân tích tìm lời giải

Để vẽ hình được chính xác ta có thể chọn một giá trị cụ thể của k , chẳng hạn $k = \frac{1}{3}$ (chú ý là khi chứng minh bài toán không được dùng đến giá trị $k = \frac{1}{3}$ này). Quan sát hình vẽ ta nhận thấy khá giống với một số bài toán về hình vuông nâng cao lớp 8. Nên ta ta thử đi theo hướng đó xem sao. Trước hết ta lấy T trên tia CD sao cho $DT = BE$. Khi đó ta có $\triangle ADM = \triangle ABE$ nên ta được $\widehat{TAE} = 90^\circ$ và suy ra được $AE = AT$. Bây giờ ta sẽ biến đổi để tìm mối liên hệ giữa các tỉ số bài toán cho như sau

$$\frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow \frac{BE}{CD} = k \Leftrightarrow 1 - \frac{BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CD - BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CE}{CD} = 1 - k$$

$$\text{Và lại có } \frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow 1 + \frac{BE}{CD} = 1 + k \text{ nên ta được } \frac{CD + BE}{CD} = 1 + k \Leftrightarrow \frac{CT}{CD} = 1 + k$$

Từ đó suy ra $\frac{CE}{CT} = \frac{1-k}{1+k}$ nên $\frac{DF}{DC} = \frac{CE}{CT}$ hay $\frac{DF}{DA} = \frac{CE}{CT}$, với kết quả này thì $\widehat{AFD} = \widehat{TEC}$

Đến đây ta nhận thấy tam giác AEF có ba đường cao AK, EG, FH đồng quy tại điểm O, khi đó ta thu được các kết quả như $\triangle AFT = \triangle AFE$ nên $FT = EF$ và $\triangle AFD = \triangle AFK$ nên suy ra $DF = KF$. Từ đó ta được $BE = DT = EK$ và $DG = GK$. Mặt khác ta lại có $\triangle HEK = \triangle HEB$ nên $HK = HB$. Như vậy để chứng minh $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$ ta cần chỉ ra được $\frac{PG}{PH} = \frac{KG}{KH}$. Tuy nhiên điều này hoàn toàn có thể được do KP là đường phân giác của tam giác GKH.

Lời giải

Trên tia CD lấy điểm T sao cho $DT = BE$. Khi đó ta có $\triangle ADM = \triangle ABE$ nên ta được

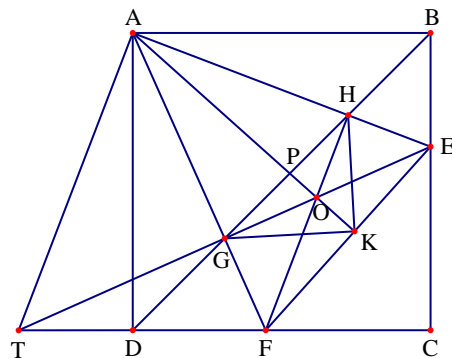
$$\widehat{TAE} = 90^\circ$$

Từ đó ta suy ra tam giác TAE vuông cân nên

$$AE = AT.$$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{EB}{BC} = k &\Leftrightarrow \frac{BE}{CD} = k \Leftrightarrow 1 - \frac{BE}{CD} = 1 - k \\ &\Leftrightarrow \frac{CD - BE}{CD} = 1 - k \Leftrightarrow \frac{CE}{CD} = 1 - k \end{aligned}$$



$$\text{Lại có } \frac{EB}{BC} = k \Leftrightarrow 1 + \frac{BE}{CD} = 1 + k$$

$$\text{Nên ta được } \frac{CD + BE}{CD} = 1 + k \Leftrightarrow \frac{CT}{CD} = 1 + k$$

$$\text{Từ đó ta suy ra } \frac{CE}{CT} = \frac{1-k}{1+k}. \text{ Do đó ta được } \frac{DF}{DC} = \frac{CE}{CT} \text{ hay } \frac{DF}{DA} = \frac{CE}{CT}$$

Từ đó ta được hai tam giác DAF và CTE đồng dạng với nhau, nên suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{TEC}$.

Giả sử ET cắt AF tại G' , khi đó ta có $\widehat{G'EC} + \widehat{G'FC} = 180^\circ$ nên tứ giác $G'ECF$ nội tiếp đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{EG'F} = 90^\circ$. Tam giác TAE vuông có G' là trung điểm của ME nên

$$G'C = AG' = \frac{1}{2}TE. \text{ Điều này chứng tỏ hai điểm G và } G' \text{ trùng nhau. Để ý là tứ giác ABEG}$$

nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{AEG} = \widehat{ABD} = \widehat{EAF} = 45^\circ = \widehat{BDC}$. Suy ra tứ giác AHFD nội tiếp đường tròn, nên ta được $\widehat{AHF} = 90^\circ$ hay $FH \perp AE$. Từ đó ta được các đường cao AK, EG, FH đồng quy tại O.

Các tứ giác OGFK, OHEK, FGHE nội tiếp, suy ra $\widehat{GKP} = \widehat{GFH} = \widehat{GEH} = \widehat{PKH}$

Do đó KP là đường phân giác của tam giác GKH, nên ta được $\frac{PG}{PH} = \frac{KG}{KH}$

Lại có $\triangle AFT = \triangle AFE$ nên $FT = EF$ và $\widehat{AFT} = \widehat{AFE}$, $\widehat{ATF} = \widehat{AEF} = \widehat{AEB}$

Do đó ta được $\widehat{AFD} = \widehat{AFK}$ nên ta được $\triangle AFD = \triangle AFK$, suy ra $DF = KF$

Từ đó ta được $BE = DT = EK$ và $DG = GK$. Mặt khác ta lại có $\triangle HEK = \triangle HEB$ nên $HK = HB$

Từ các điều trên ta được $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 14. Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M và N thay đổi sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Chứng minh rằng chu vi tam giác CMN không phụ thuộc vào vị trí điểm M, N. Từ đó xác định vị trí của M và N để diện tích tam giác CMN lớn nhất.

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh chu vi tam giác CMN không phụ thuộc vị trí điểm M ta đi chứng minh chu vi của tam giác CMN bằng $C_{CMN} = CM + MN + CN = BC + CD = 2a$.

+ Đặt $CM = x$, $CN = y$, ta có $S_{CMN} = \frac{1}{2}x.y$. Chú ý là theo định lí Pitago ta có

$MN^2 = x^2 + y^2$ nên ta được $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$ do đó $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Bài toán quy về tìm

giá trị lớn nhất của biểu thức $S_{CMN} = \frac{1}{2}x.y$ với điều kiện $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = y$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có thể giải được bài toán.

Lời giải

Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt đường thẳng CD tại E.

Khi đó ta có $\widehat{EAD} = \widehat{MAB}$.

Xét hai tam giác vuông ADE và ABM có

$\widehat{EAD} = \widehat{MAB}$ và $AD = AB$

Do đó $\triangle ADE = \triangle ABM$, suy ra $DE = BM$, $AM = AE$

và $\widehat{DAE} = \widehat{MAB}$. Từ đó ta được $\widehat{EAN} = 45^\circ$.

Xét hai tam giác AMN và AEN có $AM = AE$, $\widehat{MAN} = \widehat{EAN} = 45^\circ$ và AN là cạnh chung

Suy ra $\triangle AMN = \triangle AEN$ nên ta được $MN = NE$

Gọi C_{CMN} là chu vi tam giác CMN, khi đó ta có

$$C_{CMN} = CM + MN + CN = CM + EN + CN = CM + CN + BM + CN = BC + CD = 2a$$

Do đó chu vi tam giác CMN không đổi.

Đặt $CM = x$, $CN = y$, theo định lý Pitago ta có $MN^2 = x^2 + y^2$ nên ta được $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$

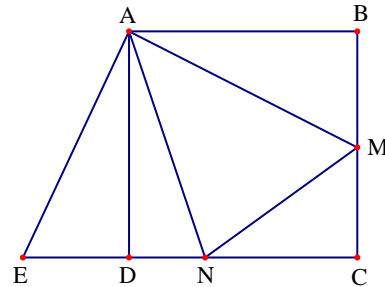
Ta có $S_{CMN} = \frac{1}{2}x.y$ với $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$

Do đó ta được $2a = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{xy}(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \sqrt{xy} \leq a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

Do đó ta được $xy \leq 2a^2(\sqrt{2} - 1)^2$ nên $S_{CMN} \leq a^2(\sqrt{2} - 1)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$ hay $BM = CN = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$



Ví dụ 15. Cho hình thoi ABCD. Dựng các tam giác đều AKD và CDM sao cho K, B thuộc nửa mặt phẳng bờ AD và M thuộc nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm B. Chứng minh rằng ba điểm B, K, M cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu $\alpha < 60^\circ$. Khi đó từ tam giác ADK ta tính được $\widehat{KAB} = 60^\circ - \alpha$. Tam giác ABK cân tại A nên suy ra

$$\widehat{AKB} = \frac{180^\circ - (60^\circ - \alpha)}{2} = 60^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mặt khác dễ thấy các điểm A, K, C, M cùng nằm trên đường tròn tâm D bán kính AD. Do đó ta có

$$\begin{aligned}\widehat{ADM} &= 360^\circ - \widehat{ADC} - \widehat{CDM} \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ = 120^\circ + \alpha\end{aligned}$$

Từ đó suy ra được $\widehat{ADM} = 2\widehat{AKB}$, từ đây ta được ba điểm K, M, B thẳng hàng.

+ Trường hợp 2: Nếu $\alpha > 60^\circ$. Khi đó dễ thấy tam giác ABK cân tại A

Do đó ta được

$$\widehat{ABK} = \widehat{AKB} = \frac{180^\circ - (\alpha - 60^\circ)}{2} = 120^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Ta cần chứng minh được

$$\widehat{BAK} + \widehat{AKD} + \widehat{DKM} = 180^\circ$$

Hay ta cần chứng minh

$$120^\circ - \frac{\alpha}{2} + 60^\circ + \widehat{DKM} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{DKM} = \frac{\alpha}{2}.$$

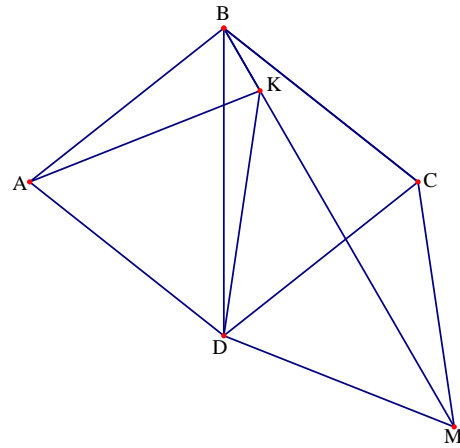
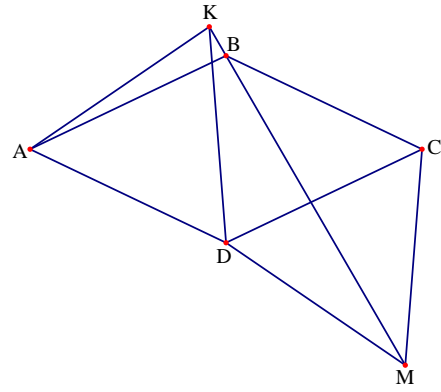
Thật vậy, ta có $\widehat{KDC} = 180^\circ - \alpha - 60^\circ = 120^\circ - \alpha$

Nên suy ra $\widehat{KDM} = 120^\circ - \alpha + 60^\circ = 180^\circ - \alpha$

Tam giác KDM cân tại D nên $\widehat{DKM} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Từ đó ta được $\widehat{BKM} = 180^\circ$ hay ba điểm B, K, M thẳng hàng.

Vậy ta luôn có ba điểm B, K, M cùng thuộc một đường thẳng.



Ví dụ 16. Chứng minh rằng với mọi tứ giác ABCD ta luôn có

$$AC^2 + BD^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$$

Lời giải

Vẽ AH và BK vuông góc với CD với H, K thuộc CD.
Không mất tính tổng quát ta giả sử $AH \geq BK$. Khi đó
vẽ BI vuông góc AH tại I. Khi đó HIBK là hình chữ
nhật. Áp dụng định lí Pitago ta được

$$AD^2 = HD^2 + HA^2 \text{ và } AC^2 = AH^2 + HC^2.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} AC^2 - AD^2 &= (AH^2 + HC^2) - (HD^2 + HA^2) = HC^2 - HD^2 \\ &= (HC + HD)(HC - HD) = CD(HC - HD) \end{aligned}$$

Chúng minh hoàn toàn tương tự ta được $BD^2 - BC^2 = CD(KD - KC)$

Do đó ta được $AC^2 - AD^2 + BD^2 - BC^2 = CD(HC - HD) + CD(KD - KC)$

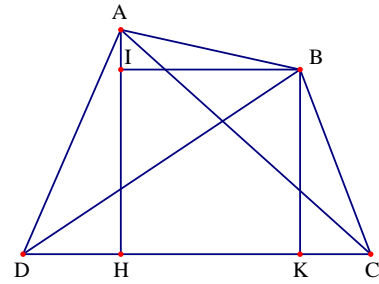
Suy ra

$$AC^2 + BD^2 - (AD^2 + BC^2) = CD[(HC - HD) + (KD - KC)] = CD(HK + HK) = 2CD.HK$$

Hay ta được $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2CD.HK$

Mà ta có $HK \leq AB$. Do đó ta được $AC^2 + BD^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình thang.



Ví dụ 17. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho chu vi tam giác BMN là 1 và $MP \parallel AD$, $NQ \parallel AB$. Tính khoảng giá trị mà chu vi của tam giác DPQ có thể nhận được.

Phân tích tìm lời giải

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác DPQ. Theo bài ra ta có $BM + BN + MN = 1$ và chu vi của tam giác PDQ là $DP + DQ + PQ$.

Đặt $BM = x$; $BN = y$; $DP = a = 1 - x$; $DQ = b = 1 - y$ và gọi p là chu vi tam giác DPQ. Khi đó ta có $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ và $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Để tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của p ta cần tìm điều kiện của a và b . Ta sẽ tìm điều kiện của a, b từ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ nên ta được

$$x + y \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 2 - \sqrt{2} \quad \text{từ đó suy ra } a + b \geq \sqrt{2}. \quad \text{Lại có } \sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y \text{ nên}$$

$1 \leq 2(x + y) \Rightarrow x + y \geq \frac{1}{2}$ suy ra $a + b \leq \frac{3}{2}$. Kết hợp hai kết quả ta được $\sqrt{2} \leq a + b \leq \frac{3}{2}$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ với điều kiện của biến là $\sqrt{2} \leq a + b \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Đặt $BM = x$; $BN = y$; $DP = a = 1 - x$; $DQ = b = 1 - y$. Gọi p là chu vi tam giác DPQ . Vì chu vi của tam giác BMN bằng 1 nên ta có $BM + BN + MN = 1$.

Theo định lí Pitago ta suy ra được $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

Do đó ta được $1 \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + y)$

Hay ta được $x + y \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{1} = 2 - \sqrt{2}$. Ta lại có $a + b = 1 - x = 1 - y = 2 - (x + y)$

nên suy ra $a + b \geq \sqrt{2}$. Ta có chu vi tam giác DPQ là $p = DP + DQ + PQ = a + b + PQ$

Theo định lí Pitago ta được $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq (a + b) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq \sqrt{2} + 1$.

Từ đó suy ra $p \geq \sqrt{2} + 1$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $x^2 + y^2 \leq (x + y)^2$ nên ta được $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$.

Từ đó suy ra $1 \leq 2(x + y) \Rightarrow x + y \geq \frac{1}{2}$. Từ đó dẫn đến $a + b \leq \frac{3}{2}$.

Từ $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ta có $(1 - x - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -x - y + xy = -\frac{1}{2}$

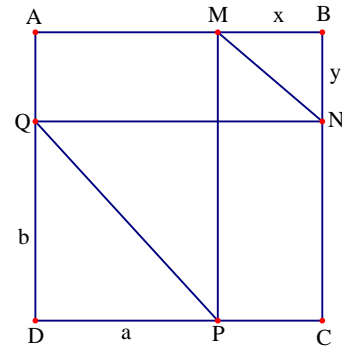
Do đó ta được $(1 - x)(1 - y) = \frac{1}{2}$ hay ta được $ab = \frac{1}{2}$.

Từ $a + b \leq \frac{3}{2}$ ta được $4(a + b)^2 \leq 9 \Rightarrow 4(a + b)^2 - 4 \leq 5$.

Kết hợp với $ab = \frac{1}{2}$ ta được $4(a + b)^2 - 8ab \leq 5 \Rightarrow 4(a^2 + b^2) \leq 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$

Từ các kết quả trên ta thu được $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Vậy ta được $\sqrt{2} + 1 \leq p \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.



Bài 18. Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường chéo của hình bình hành cắt các cạnh AD, AB, BC, CD lần lượt tại M, N, K, L . Tính tỉ số diện tích của $MNKL$ và hình bình hành $ABCD$ biết $AC = a$; $BD = b$

Phân tích tìm lời giải

Dễ thấy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ và $S_{MNKL} = 2S_{NKL} = 2 \cdot \frac{1}{2}NK \cdot KL \cdot \sin \alpha$.

Nên để tính được tỉ số diện tích hình bình hành ABCD và tứ giác MNKL ta cần tính được NK và KL theo a, b.

Lời giải

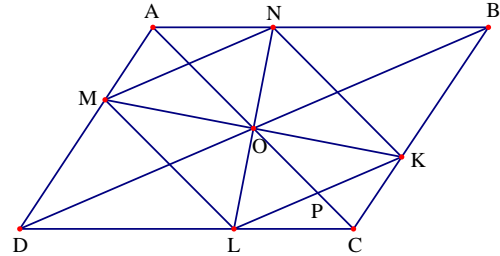
Giả sử $\widehat{BOC} = \alpha$ khi đó ta được

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

Dễ dàng chứng minh được tứ giác MNKL là hình thoi và theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{BO} = \frac{CK}{BK} \text{ và}$$

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AO}{DO} = \frac{OC}{OD} = \frac{CL}{DL}$$



Áp dụng định lí Talets đảo ta suy ra được $KN \parallel AC$ và $MN \parallel BC$, từ đó suy ra $\widehat{NKL} = \alpha$.

Đặt $MN = x$ khi đó ta được $S_{MNKL} = 2S_{NKL} = 2 \cdot \frac{1}{2}NK \cdot KL \cdot \sin \alpha$. Từ đó ta được $\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2x^2}{ab}$

Gọi P là giao điểm của KL và CA, khi đó $\widehat{LOD} = \widehat{PLO}$ và $\widehat{POL} = \widehat{LOD}$ nên $\widehat{POL} = \widehat{PLO}$. Điều này dẫn đến tam giác OPL cân tại P. Chứng minh tương tự ta được tam giác OPK cân tại P.

Từ đó suy ra $KP = PL = PO$ hay $OP = \frac{1}{2}KL = \frac{x}{2}$.

Mặt khác do $KL \parallel BD$ nên ta có $\frac{KP}{BO} = \frac{PL}{OD} = \frac{CP}{CO}$ suy ra $\frac{CP}{CO} = \frac{KP + PL}{BO + OD}$

Hay ta được $\frac{CP}{CO} = \frac{KL}{BD} \Rightarrow \frac{\frac{a-x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$. Từ đó suy ra $\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$

Ví dụ 19. Cho thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh định lí

Ptoleme dưới dạng bổ đề: Cho tứ giác ABC và một điểm D nằm khác phía với B so với AC, khi đó ta luôn có $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$

Thật vậy, xác định điểm M trong tứ giác sao cho $\widehat{MDA} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{MAD} = \widehat{BAC}$.

Khi đó $\triangle ADM \sim \triangle ACB$ suy ra $AD \cdot BC = AC \cdot MD$

Từ kết quả trên có $\triangle ABM \sim \triangle ADC$ suy ra $AB \cdot CD = AC \cdot BM$

Do đó ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = (BM + MD) AC \geq AC \cdot BD$$

Trở lại bài toán: Đặt $A_1A_2 = a$; $A_1A_3 = b$; $A_1A_4 = c$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm M ta được $(A_1M + A_3M) \cdot a \geq MA_2 \cdot b$

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_5A_6A_7$ và điểm M ta được $(A_5M + A_7M) \cdot a \geq MA_6 \cdot b$

Từ đó ta được $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M) \cdot a \geq (MA_2 + A_6M) \cdot b$

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $A_2A_4A_6$ và điểm M ta được $(A_2M + A_6M) \cdot b \geq MA_4 \cdot c$

Từ đó ta lại có $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M) \cdot a \geq A_4M \cdot c$

Từ đó ta suy ra $(A_1M + A_3M + A_5M + A_7M) \cdot a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq A_2M + A_4M + A_6M$

Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ nội tiếp ta được $ab + ac = bc \Rightarrow a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$

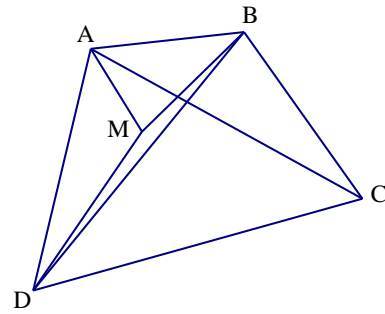
Do đó ta được $MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tất cả các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra, tức là M nằm trên cung nhỏ $\widehat{A_1A_7}$ của đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

Ví dụ 20. Cho đa giác ABCDEF có $\widehat{CAB} = \widehat{CED} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = \widehat{ECD} = 20^\circ$, $\widehat{FEA} = \widehat{FAE} = 40^\circ$.

Chứng minh rằng tam giác BDF là tam giác đều.

Lời giải



Vẽ tam giác đều AFQ sao cho FQ cắt đường thẳng AE.

$$\text{Ta có } \widehat{EAQ} = \widehat{FAQ} - \widehat{FAE} = 60^\circ - 40^\circ$$

$$\text{Và lại có } \widehat{QFE} = \widehat{AFE} - \widehat{AFQ} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

Tam giác EFQ có $EF = FA = AQ$ nên ta được

$$\widehat{EQF} = \widehat{QEF} = \frac{180^\circ - \widehat{QFE}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \quad (1)$$

$$\text{Do đó ta được } \widehat{QEA} = \widehat{QEF} - \widehat{FEA} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

Xét ba tam giác ABC, EDC và EQA có

$$\widehat{BAC} = \widehat{DEC} = \widehat{QEA} = 30^\circ \text{ và } \widehat{BCA} = \widehat{DCE} = \widehat{QAE} = 20^\circ$$

$$\text{Nên ta được } \triangle ABC \sim \triangle EDC \sim \triangle EQA, \text{ suy ra } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{CE} = \frac{EQ}{EA} \quad (2)$$

$$\text{Xét hai tam giác ACE và QED có } \widehat{ACE} = \widehat{QEC} + 30^\circ = \widehat{QED} \text{ và } \frac{AE}{CE} = \frac{EQ}{ED}$$

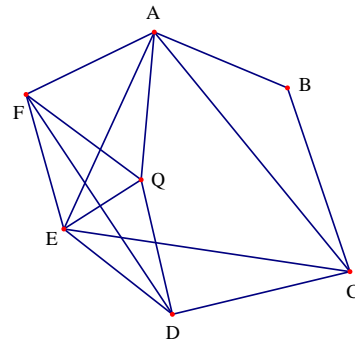
$$\text{Do đó ta được } \triangle ACE \sim \triangle QED \text{ nên ta được } \frac{QD}{AC} = \frac{ED}{EC} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) ra được } QD = AB. \text{ Ta có } \widehat{FAB} = \widehat{EAC} + 70^\circ = \widehat{EQD} + 70^\circ = \widehat{FQD}$$

$$\text{Ta có } \triangle AFB = \triangle QFD \text{ vì có } AB = QD, AF = QF \text{ và } \widehat{FAB} = \widehat{FQD}$$

$$\text{Từ đó ta được } FB = FD \text{ và } \widehat{QFD} = \widehat{AFB}. \text{ Mà ta lại có } \widehat{DFB} = \widehat{QFD} + \widehat{QFB} = \widehat{AFB} + \widehat{QFB} = 60^\circ$$

Do đó tam giác BDF là tam giác đều.



Ví dụ 21. Cho đa giác ABCDEF thỏa mãn các điều kiện $\widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{F} = 360^\circ$ và

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{AF} = 1. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$

Lời giải

Lấy điểm P nằm ngoài đa giác sao cho

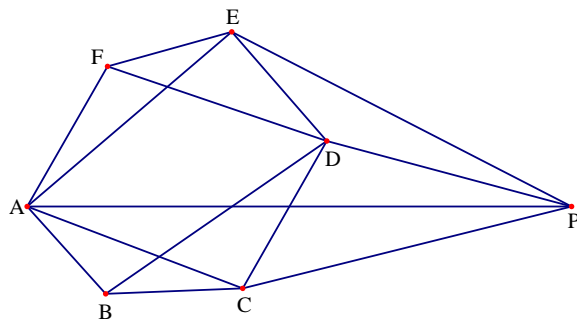
$$\widehat{FEA} = \widehat{DEP} \text{ và } \widehat{AFE} = \widehat{EDP}$$

Khi đó ta được $\triangle FEA \sim \triangle DEP$, suy ra ta được

$$\frac{FA}{EF} = \frac{DP}{DE}; \frac{EF}{ED} = \frac{EA}{EP}$$

Từ giả thiết $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{AF} = 1$ ta được

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} \cdot \frac{AF}{FE} = \frac{DE}{DC} \cdot \frac{DP}{DE} = \frac{DP}{DC}$$



Từ giả thiết $\widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{F} = 360^\circ$ ta được $\widehat{ABC} = \widehat{CDP}$

Lại có $\frac{AB}{BC} = \frac{DP}{DC}$ nên ta được $\triangle ABC \sim \triangle PDC$ suy ra $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CP}$

Từ $\widehat{FEA} = \widehat{DEP}$ ta được $\widehat{FED} = \widehat{AEP}$, lại có $\frac{EF}{ED} = \frac{EA}{EP}$ nên ta được $\triangle FED \sim \triangle AEP$

Do đó ta được $\frac{FD}{FE} = \frac{AP}{AE}$. Mặt khác ta có $\triangle ABC \sim \triangle PDC$ nên $\widehat{BCA} = \widehat{DCP} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{PCA}$

Do đó ta được $\triangle BCD \sim \triangle ACP$, suy ra $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AP}$

Từ đó suy ra $\frac{FD}{FE} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AP}{AE} \cdot \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{AE}$ hay $\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$.

Ví dụ 22. Cho đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ có các cạnh là các số hữu tỉ và các góc của đa giác bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy các tam giác $AA_1A_8, BA_2A_3, CA_4A_5, DA_6A_7$ là các tam giác vuông cân nên ta tính được $AA_1 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}}; BA_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}; CA_4 = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}}; DA_6 = \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$. Do đó tứ giác

$ABCD$ là hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Ta cần chứng minh được $A_1A_2 = A_5A_6$ và áp dụng tương tự. Ta tính được

$AB = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}$ và $CD = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$ nên suy ra

$A_1A_2 - A_5A_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7)$. Chú ý là các cạnh của đa giác là các số

hữu tỉ nên $A_1A_2 - A_5A_6 = 0$ hay $A_1A_2 = A_5A_6$. Đến đây ta trình bày lời giải như sau.

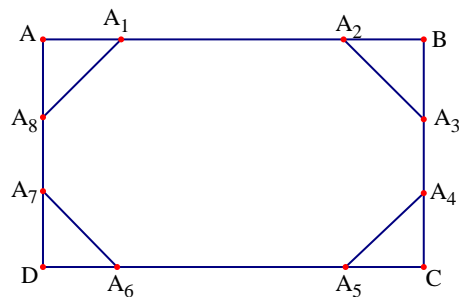
Lời giải

Do đa giác có các góc ở các đỉnh bằng nhau nên

mỗi góc có số đo là $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{6 \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$.

Kéo dài các cạnh của đa giác, chúng cắt nhau tại các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

Khi đó ta có $\widehat{AA_1A_8} = 45^\circ$, hoàn toán tương tự ta được các góc ngoài của đa giác đều có số đo là 45° .



Nên các tam giác AA_1A_8 , BA_2A_3 , CA_4A_5 , DA_6A_7 là các tam giác vuông cân. Từ đó ta được tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Suy ra các cạnh đối diện của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ song song với nhau.

Xét tam giác AA_1A_8 ta có $AA_1 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}}$. Tương tự ta có

$$BA_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}; CA_5 = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}}; DA_6 = \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$$

Khi đó ta được $AB = AA_1 + A_1A_2 + A_2B = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}}$

Tương tự ta cũng có $CD = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$

Do $AB = CD$ nên ta được $\frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + A_1A_2 = \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}} = \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} + A_5A_6 + \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}}$

Suy ra $A_1A_2 - A_5A_6 = \frac{A_1A_8}{\sqrt{2}} + \frac{A_2A_3}{\sqrt{2}} - \frac{A_4A_5}{\sqrt{2}} - \frac{A_6A_7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7)$

Do các cạnh của đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ là các số hữu tỉ nên $A_1A_2 - A_5A_6$ là số hữu tỉ

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7)$ là số hữu tỉ.

Do đó $\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1A_8 + A_2A_3 - A_4A_5 - A_6A_7) = 0$, nên ta được $A_1A_2 - A_5A_6 = 0$ hay

$$A_1A_2 = A_5A_6$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $A_2A_3 = A_6A_7$; $A_3A_4 = A_7A_8$; $A_4A_5 = A_8A_1$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 23. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Gọi P là giao điểm của AN và BM , Q là giao điểm của DN và CM . Chứng minh rằng

$$\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \geq 4.$$

Lời giải

Cách 1: Ta có nhận xét như sau: Nếu hai tam giác có cạnh đáy hoặc chiều cao bằng nhau thì tỉ số diện tích bằng tỉ số chiều cao hoặc cạnh đáy tương ứng.

Từ nhận xét đó và đó M, N là trung điểm của AD và BC nên ta được $S_{BAD} + S_{CAD} = 2S_{NAD}$ và $S_{ABC} + S_{DBC} = 2S_{MBC}$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} &= \frac{2S_{ABM}}{2S_{NBM}} + \frac{2S_{ABN}}{2S_{MAN}} + \frac{2S_{CDN}}{2S_{MDN}} + \frac{2S_{CDM}}{2S_{CNM}} \\ &= \frac{S_{ABD}}{S_{MBC}} + \frac{S_{ABC}}{S_{NAD}} + \frac{S_{DBC}}{S_{NAD}} + \frac{S_{CAD}}{S_{MBC}} = 2 \left(\frac{S_{NAD}}{S_{MBC}} + \frac{S_{MBC}}{S_{NAD}} \right) \geq 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_{NAD} = S_{MBC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S_{MAN} = 2S_{MBN} \\ 2S_{NDM} = 2S_{MCN} \end{cases}$ hay $AB // MN // CD$.

Cách 2: Gọi giao điểm của MN và PQ là O. Các đường thẳng qua A, B, C, D song song với MN cắt PQ lần lượt tại E, F, H, K. Theo định lí Talets ta có

$$\begin{aligned} \frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} &= \frac{AE}{ON} + \frac{BF}{OM} + \frac{CH}{OM} + \frac{DK}{ON} = \frac{AE + DK}{ON} + \frac{BF + CH}{OM} \\ &= \frac{2OM}{ON} + \frac{2ON}{OM} = 2 \left(\frac{OM}{ON} + \frac{ON}{OM} \right) \geq 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

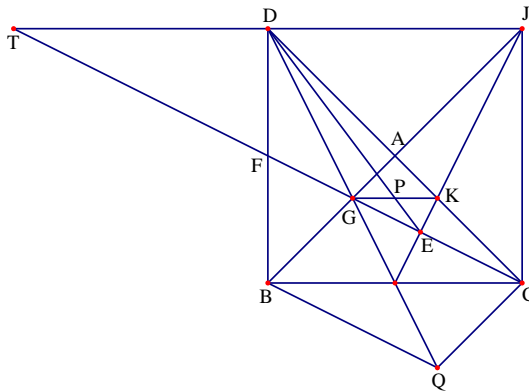
$$AB // MN // CD \quad OM = ON \Leftrightarrow \begin{cases} AE = AE' \\ DK = KD' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BF = AE' \\ CH = KD' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \equiv A' \\ C \equiv D' \end{cases} \text{ hay } AB // MN // CD$$

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, gọi G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng $DE = BC$ và $PG = PE$.

Lời giải

Lấy điểm Q đối xứng với G qua M. Khi đó tứ giác BQCG là hình bình hành. Suy ra $CQ // AB$.

Mà ta có $AG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}QC$ nên AG là đường trung bình của tam giác DQC. Do đó A là trung điểm của DC và G là trọng tâm của tam giác BCD.



Gọi J là điểm đối xứng với B qua A. Khi đó tứ giác BCJD là hình vuông. Đường thẳng CG cắt BD tại F và cắt đường thẳng JD tại T. Dễ thấy F là trung điểm của BD, từ đó suy ra $BC = DT = DJ$.

Mặt khác hai tam giác vuông JMC và CFB bằng nhau nên ta được $MJ \perp FC$. Do đó ba điểm M, E, J thẳng hàng. Do đó tam giác TEJ vuông tại E và D là trung điểm của TJ, nên ta được $TD = DJ = DE$.

Suy ra $DE = BC$. Hơn nữa do K là trọng tâm tam giác BCJ nên ta được $AK = \frac{1}{2}KC$.

Do đó ta được $GK \parallel BC \parallel TJ$. Nên theo định lí Talets ta được $\frac{GP}{TD} = \frac{EP}{ED} = \frac{PK}{DJ}$

Do đó ta được $PG = PK$, suy ra $PG = PK = PE$. Vậy ta được $DE = BC$ và $PG = PE$.

Ví dụ 25. Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R và S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC và CD. Chứng minh rằng đường thẳng PQ và RS vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo hình chữ nhật.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu không chứng minh bổ đề sau:

Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Từ giả thiết dễ thấy các tứ giác APMQ, MRBQ, MRCS, PMSD là các hình chữ nhật và P, M, R cũng như M, Q, S là các cặp điểm thẳng hàng.

Đặt

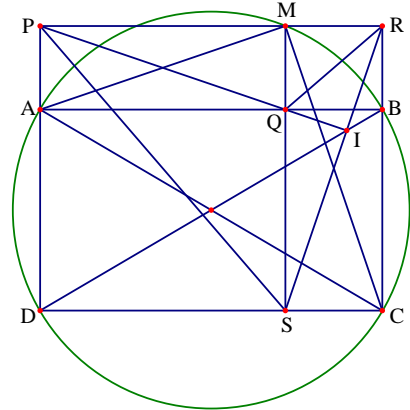
$$AQ = PM = a; MQ = RB = x; BC = QS = b; MR = QB = y$$

Ta có $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ do đó $\triangle AQM \sim \triangle CRM$

$$\text{Suy ra } \frac{AQ}{CR} = \frac{QM}{RM} \Rightarrow \frac{a}{b+x} = \frac{x}{y} \Rightarrow ay = x^2 + bx$$

Sử dụng định lý Pytago ta có

$$\begin{aligned} PS^2 + QR^2 &= (MS^2 + PM^2) + (RB^2 + QB^2) = (b+x)^2 + a^2 + x^2 + y^2 \\ &= b^2 + 2bx + x^2 + a^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + y^2 + 2(x^2 + bx) \end{aligned}$$



$$PR^2 + QS^2 = (a + y)^2 + b^2 = a^2 + 2ay + y^2 + b^2 = a^2 + b^2 + y^2 + 2ay$$

Từ đó ta được $PS^2 + QR^2 = PR^2 + QS^2$. Như vậy theo bổ đề trên ta được $PQ \perp RS$.

Gọi giao điểm của PQ và RS là I . Do PQ vuông góc với RS nên năm điểm M, R, B, I, Q thuộc đường tròn đường kính QR . Suy ra $\widehat{BIR} = \widehat{BQR}$. Tương tự năm điểm P, M, I, S, D thuộc đường tròn đường kính PS nên $\widehat{DIS} = \widehat{PSM}$. Do $MS \perp PR$ tại M nên Q là trực tâm của $\triangle PSR$. Do đó ta được $QR \perp PS$, từ đó suy ra $\widehat{PSM} = \widehat{BQR}$. Nên ta được $\widehat{BIR} = \widehat{DIS}$. Do đó D, I, B thẳng hàng hay I thuộc đường chéo BD .

Ví dụ 26. Cho hình thang $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BD và AC . Điểm K đối xứng với O qua MN . Đường thẳng qua K và song song với MN cắt AD, BC, BD, CA lần lượt tại P, Q, E, F . Chứng minh rằng $PE = QF$.

Phân tích tìm lời giải

Qua O kẻ đường thẳng song song với MN cắt AD, BC lần lượt tại I và H . Ta có K và O đối xứng với nhau qua MN nên ta có $MO = ME$ và $ON = NF$. Lại có $MB = MD$ và $NA = NC$ do đó $OB = DE$ và $OA = FC$. Từ đó ta được $\frac{PE}{OI} = \frac{DE}{DO} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow PE = \frac{OB \cdot OI}{OD}$ và tương tự thì $QF = \frac{OA \cdot OH}{OC}$. Như vậy để chứng minh được $PE = QF$ ta cần phải chỉ ra được

$\frac{OB}{OD \cdot OH} = \frac{OA}{OC \cdot OI}$. Chú ý theo định lí Talets ta thu được

$\frac{MI}{OI} = \frac{DM}{DO} = \frac{BD}{2OD}$; $\frac{ON}{OI} = \frac{AN}{AO} = \frac{AC}{2AO}$ nên $\frac{MN}{OI} = \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{AO} - \frac{BD}{BO} \right)$. Tương tự ta cũng được

$\frac{MN}{OH} = \frac{1}{2} \left(\frac{BD}{BO} - \frac{AC}{OC} \right)$. Do đó ta được

$$\frac{OB}{OD \cdot OH} = \frac{OA}{OC \cdot OI} \Leftrightarrow \frac{OB \cdot MN}{OD \cdot OH} = \frac{OA \cdot MN}{OC \cdot OI} \Leftrightarrow \frac{OB}{OD} \left(\frac{BD}{OB} - \frac{AC}{OC} \right) = \frac{OA}{OC} \left(\frac{AC}{OA} - \frac{BD}{OD} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{OD} + \frac{OA \cdot BD}{OC \cdot OD} = \frac{AC}{OC} + \frac{OB \cdot AC}{OC \cdot OD} \Leftrightarrow \frac{BD(OA + OC)}{OC \cdot OB} = \frac{AC(OB + OD)}{OC \cdot OD} = \frac{BD \cdot AC}{OC \cdot OD}$$

Đến đây bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải

Qua O kẻ đường thẳng song song với MN cắt AD, BC lần lượt tại I và H. Ta có K và O đối xứng với nhau qua MN nên ta có $MO = ME$ và $ON = NF$. Lại có $MB = MD$ và $NA = NC$ do đó ta được $OB = DE$ và $OA = FC$

$$\text{Suy ra } \frac{PE}{OI} = \frac{DE}{DO} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow PE = \frac{OB \cdot OI}{OD}.$$

Chứng minh tương tự ta được $QF = \frac{OA \cdot OH}{OC}$.

Đường thẳng MN cắt AD và BC lần lượt tại G và J.

$$\text{Theo định lí Talet ta có } \frac{MG}{OI} = \frac{DM}{DO} = \frac{BD}{2OD}; \frac{OG}{OI} = \frac{AN}{AO} = \frac{AC}{2AO}$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên ta được $\frac{MN}{OI} = \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{AO} - \frac{BD}{BO} \right)$. Tương tự ta được

$$\frac{MN}{OH} = \frac{1}{2} \left(\frac{BD}{BO} - \frac{AC}{OC} \right).$$

Ta có $\frac{BD \cdot AC}{OC \cdot OD} = \frac{BD(OA + OC)}{OC \cdot OB} = \frac{AC(OB + OD)}{OC \cdot OD}$. Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{BD}{OD} + \frac{OA \cdot BD}{OC \cdot OD} &= \frac{AC}{OC} + \frac{OB \cdot AC}{OC \cdot OD} \Leftrightarrow \frac{BD}{OD} - \frac{OB \cdot AC}{OC \cdot OD} = \frac{AC}{OC} - \frac{OA \cdot BD}{OC \cdot OD} \\ \Leftrightarrow \frac{OB}{OD} \left(\frac{BD}{OB} - \frac{AC}{OC} \right) &= \frac{OA}{OC} \left(\frac{AC}{OA} - \frac{BD}{OD} \right) \Leftrightarrow \frac{OB \cdot MN}{OD \cdot OH} = \frac{OA \cdot MN}{OC \cdot OI} \Leftrightarrow \frac{OB}{OD \cdot OH} = \frac{OA}{OC \cdot OI} \end{aligned}$$

Vậy ta được $PE = QF$.

Ví dụ 28. Cho tứ giác ABCD, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $\frac{AM}{MB} = m; \frac{BN}{NC} = n; \frac{CP}{PD} = p; \frac{DQ}{QA} = q$ thỏa mãn điều kiện $(1 - mp)(1 - nq) \leq 0$.

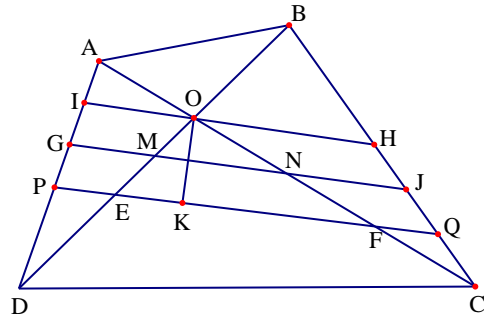
Chứng minh rằng:

$$S_{MNPQ} \leq \text{Max} \{ S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB} \}$$

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{AQM} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ})$. Từ yêu cầu cần phải chứng minh ta đi tìm mối liên hệ tính diện tích các tam giác AQM, BMN, CNP, DPQ với các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Dễ dàng tính được

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{n}{(m+1)(n+1)}; \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} = \frac{p}{(p+1)(n+1)}; \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} = \frac{p}{(p+1)(q+1)}; \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} = \frac{m}{(q+1)(m+1)}$$



Đặt $S = \text{Max}\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$; $s = \text{Min}\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$, do đó ta được $S + s = S_{ABCD}$, từ đó ta cần chứng minh $S_{MNPQ} \leq S_{ABCD} - s = S$.

Nhận thấy $S_{AQM} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} \geq s \left(\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} + \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} + \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} + \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} \right)$ nên bài toán sẽ được

chứng minh khi ta chỉ ra được $\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} + \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} + \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} + \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} \geq 1$. Điều này tương đương với

$$\frac{n}{(m+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(q+1)} + \frac{m}{(q+1)(m+1)} \geq 1$$

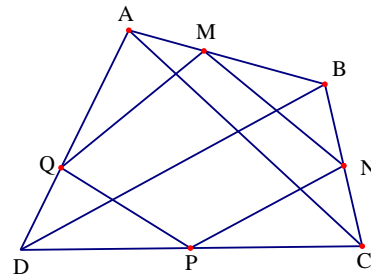
Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $(1-mp)(1-nq) \leq 0$ tức là bài toán được chứng minh.

Lời giải

Ta có

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BM+MA} \cdot \frac{BN}{BN+NC} = \frac{1}{1+m} \cdot \frac{n}{1+n}$$

Do đó ta được $\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{n}{(m+1)(n+1)}$.



Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} = \frac{p}{(p+1)(n+1)}; \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} = \frac{p}{(p+1)(q+1)}; \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} = \frac{m}{(q+1)(m+1)}$$

Do đó ta được

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} + \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} + \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} + \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} = \frac{n}{(m+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(q+1)} + \frac{m}{(q+1)(m+1)}$$

Ta đi chứng minh $\frac{n}{(m+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(q+1)} + \frac{m}{(q+1)(m+1)} \geq 1$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} n(p+1)(q+1) + p(m+1)(q+1) + q(m+1)(n+1) + m(n+1)(p+1) \\ \geq (m+1)(n+1)(p+1)(q+1) \Leftrightarrow (1-mp)(1-nq) \leq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Đặt $S = \text{Max}\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$; $s = \text{Min}\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$

Do đó ta được $S + s = S_{ABCD}$, từ đó suy ra

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= S_{ABCD} - (S_{AQM} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ}) \leq S_{ABCD} - s \left(\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} + \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} + \frac{S_{PDQ}}{S_{DCA}} + \frac{S_{AQM}}{S_{ADB}} \right) \\ &= S_{ABCD} - s \left(\frac{n}{(m+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(n+1)} + \frac{p}{(p+1)(q+1)} + \frac{m}{(q+1)(m+1)} \right) \\ &\leq S_{ABCD} - s = S \end{aligned}$$

Do đó ta được $S_{MNPQ} \leq \text{Max}\{S_{ABC}; S_{BCD}; S_{CDA}; S_{DAB}\}$.

Ví dụ 29. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leq \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$$

Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng minh $\frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leq \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$ ta cần biểu diễn $AC^2 + BD^2$

theo AB, BC, CD, DA.

Điều này làm ta liên tưởng đến định lí Pitago hoặc công thức đường trung tuyến, tuy nhiên ở đây ta chọn sử dụng công thức đường trung tuyến hơn vì để tính được AC^2 và BD^2 là chỉ cần xác định M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD và áp dụng công thức. Ngoài ra để sử dụng định lí Pitago ta cần có tam giác vuông, mà trong trường hợp này ta không biết nên kẻ đường vuông góc từ điểm nào cả.

Như phân tích ở trên khi áp dụng công thức đường trung tuyến ta được

$$4BM^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2 \text{ và } 4DM^2 = 2(AD^2 + DC^2) - AC^2 \text{ nên}$$

$$2(BM^2 + DM^2) = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2. \text{ Lại áp dụng công thức đường trung tuyến}$$

thì ta được $4MN^2 = 2(BM^2 + DM^2) - BD^2$. Đến đây thì ta thu được

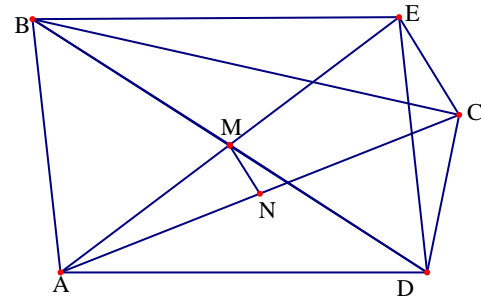
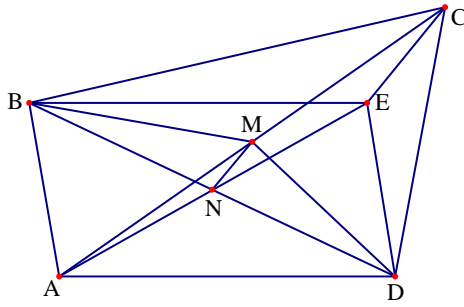
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2 \geq AC^2 + BD^2 \text{ từ đó suy ra}$$

$$\frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}}{2} \leq \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$$

+ Để chứng minh $\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$ ta áp dụng công thức về

đường trung tuyến. Để chứng minh $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \leq AC^2 + BD^2$ và chú ý là khi M, N trùng nhau thì bất đẳng thức xảy ra dấu bằng nên ta sẽ chứng minh $AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 + BC^2 - kMN^2$. Để được như vậy ta lấy điểm E sao cho ABED là hình bình hành, khi đó có hai trường hợp xảy ra là E nằm trong hoặc E nằm ngoài tứ giác ABCD. Với E nằm trong tứ giác ABCD, khi đó đó trong tam giác BDE ta cần có $BC^2 \geq BE^2 + EC^2 \Rightarrow BC^2 - 2MN^2 \geq BE^2 = AD^2$ điều này hoàn toàn xảy ra nếu $\widehat{BEC} \geq 90^\circ$. Tất nhiên không mất tính tổng quát ta có thể chọn $\widehat{BEC} \geq 90^\circ$. Hoàn toàn tương tự với E nằm ngoài tứ giác ABCD. Đến đây bài toán được giải quyết.

Lời giải



+ Trước hết ta chứng minh $\frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leq \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$

Trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Trong tam giác ABC có BM là đường trung tuyến nên $4BM^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2$

Trong tam giác ADC có DM là đường trung tuyến nên $4DM^2 = 2(AD^2 + DC^2) - AC^2$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} 4BM^2 + 4DM^2 &= 2(AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2) - 2AC^2 \\ \Leftrightarrow 2(BM^2 + DM^2) &= AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2 \end{aligned}$$

Trong tam giác MBD có MN là đường trung tuyến nên $4MN^2 = 2(BM^2 + DM^2) - BD^2$

Do đó ta được $4MN^2 = 2(BM^2 + DM^2) - BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2 - BD^2$

Hay $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2 \geq AC^2 + BD^2$

Do đó ta được $\frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}}{2} \leq \text{Max}\{AB, BC, CD, DA\}$

+ Chứng minh $\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} \geq 180^\circ$; $\widehat{DAB} \geq 90^\circ$

Dựng hình bình hành ABED, khi đó có hai trường hợp xảy ra

+ Trường hợp 1: Điểm E nằm trong tứ giác ABCD, khi đó N là giao điểm của hai đường

chéo AE và BD và NM là đường trung bình của tam giác ACE. Trong hai góc \widehat{BEC} và

\widehat{CED} tồn tại một góc không nhỏ hơn 90° . Giả sử đó là $\widehat{BEC} \geq 90^\circ$. Ta có

$$BC^2 \geq BE^2 + EC^2 \Rightarrow BC^2 - 2MN^2 \geq BE^2 = AD^2$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + AD^2 + CD^2 + (BC^2 - 4MN^2) \geq AB^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2 \\ &\geq 4[\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\}]^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$

+ Trường hợp 2: Điểm E nằm ngoài tứ giác ABCD, khi đó M là giao điểm của hai đường chéo AE và BD và NM là đường trung bình của tam giác ACE. Ta có

$$\widehat{BEC} \geq \widehat{BED} = \widehat{DAB} \geq 90^\circ, \text{ do đó ta được}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + AD^2 + CD^2 + (BC^2 - 4MN^2) \geq AB^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2 \\ &\geq 4[\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\}]^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$$

Vậy ta luôn có $\text{Min}\{AB, BC, CD, DA\} \leq \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 31. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Lấy điểm M trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = AD$. Đường thẳng DM cắt BC tại N. Gọi H là hình chiếu của D trên AC và K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$

Lời giải

Trong tam giác ADC có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ và DH là đường cao nên ta được $AD^2 = AH.AC$

Mà theo giả thiết ta có $AM = AD$ nên ta được

$$AM^2 = AH.AC \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}$$

Xét hai tam giác AMH và ACM có $\widehat{MAH} = \widehat{CAM}$ và

$$\frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}. \text{ Suy ra } \triangle AMH \sim \triangle ACM, \text{ do đó ta được}$$

$$\widehat{AHN} = \widehat{AMC} \text{ nên } \widehat{MHC} = \widehat{CMB}$$

Tam giác ADM có $AM = AD$ nên cân tại A, suy ra

$$\widehat{ADM} = \widehat{AMD} = \widehat{BMN}$$

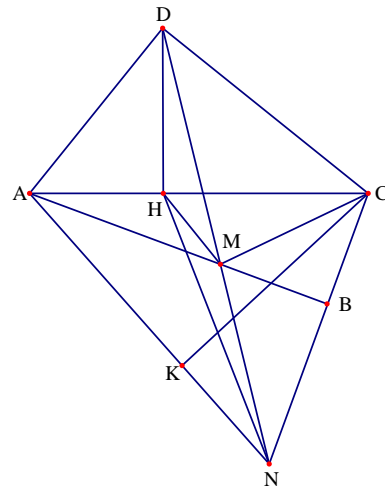
Mà ta có $\widehat{MDC} = 90^\circ - \widehat{ADM}$; $\widehat{MNB} = 90^\circ - \widehat{BMN}$ nên $\widehat{MDC} = \widehat{MNB}$, suy ra tam giác CDN cân tại C. Do đó ta được $CD = CN$. Trong tam giác vuông ADC có DH là đường cao nên $CD^2 = CH.CA$

Từ đó ta được $CN^2 = CH.CA \Leftrightarrow \frac{CN}{CH} = \frac{CA}{CN}$. Xét hai tam giác CNH và CAN có $\frac{CN}{CH} = \frac{CA}{CN}$

và \widehat{ACN} chung nên $\triangle CNH \sim \triangle CAN$. Do đó ta được $\widehat{CHN} = \widehat{CNA}$

Từ $\widehat{MHC} = \widehat{CMB}$ và $\widehat{CHN} = \widehat{CNA}$ ta được $\widehat{MHN} = \widehat{CHN} - \widehat{MHC} = \widehat{CNA} - \widehat{CMB}$

Mà ta có $CK \perp AN$ và $\widehat{B} = 90^\circ$ nên ta được $\widehat{MCK} = \widehat{CNA} - \widehat{CMB}$



Do đó ta được $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 32. Cho hình vuông ABCD có cạnh a và M là một điểm tùy ý trên cạnh AB ($M \neq A, B$). Nối MC cắt BD tại P, MD cắt AC tại Q. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD.

Phân tích tìm lời giải

Để ý ta thấy $\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{MD}{MQ} \cdot \frac{MC}{MP}$ và $S_{MCD} = \frac{1}{2}a^2$ không đổi nên tam giác MPQ có diện

tích lớn nhất thì tứ giác CPQD có diện tích nhỏ nhất. Do đó ta chỉ cần tìm vị trí M để tam giác MPQ có diện tích lớn nhất là được. Dự đoán tam giác MPQ có diện tích lớn nhất khi $AM = MB$ nên ta cần biểu diễn tỉ số diện tích của hai tam giác MPQ và MCD theo AM và BM. Chú ý theo định lý Talets ta có

$$\frac{MD}{MQ} = 1 + \frac{QD}{MQ} = 1 + \frac{CD}{AM} = \frac{AM+a}{AM} \text{ và } \frac{MC}{MP} = 1 + \frac{PC}{PM} = 1 + \frac{CD}{MB} = \frac{MB+a}{MB}$$

$$\text{Đến đây ta được } \frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{AM \cdot BM + a(AM+BM) + a^2}{AM \cdot BM} = 1 + \frac{2a^2}{AM \cdot BM} \geq 1 + \frac{2a^2 \cdot 4}{(AM+BM)^2} = 9$$

Như vậy bài tam xem như được giải quyết xong.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } S_{MCD} = \frac{1}{2}a^2 \text{ và } \frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{MD}{MQ} \cdot \frac{MC}{MP} (*)$$

Do AB song song với CD nên theo định lý Talet ta có các kết quả sau

$$\frac{MD}{MQ} = 1 + \frac{QD}{MQ} = 1 + \frac{CD}{AM} = \frac{AM+a}{AM}$$

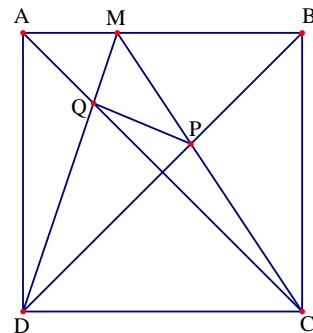
$$\frac{MC}{MP} = 1 + \frac{PC}{PM} = 1 + \frac{CD}{MB} = \frac{MB+a}{MB}$$

Khi đó ta được

$$\frac{S_{MCD}}{S_{MPQ}} = \frac{(AM+a)(BM+a)}{AM \cdot BM} = \frac{AM \cdot BM + a(AM+BM) + a^2}{AM \cdot BM}$$

$$= 1 + \frac{2a^2}{AM \cdot BM} \geq 1 + \frac{2a^2 \cdot 4}{(AM+BM)^2} = 9$$

Do đó $S_{MPQ} \leq \frac{1}{9}S_{MCD} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{18}$. Ta lại có $S_{CPQD} = S_{MCD} - S_{MPQ} \geq \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{18}a^2 = \frac{4}{9}a^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$.



Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ là $\frac{a^2}{18}$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD là $\frac{4a^2}{9}$, các giá trị này đạt được tại $MA = MB$.

Ví dụ 33. Cho hình bình hành ABCD và O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ tia Ax đối xứng với tia AD qua AC và tia By đối xứng với tia BC qua BD. Gọi giao điểm của hai tia Ax và By là E.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$$

Phân tích tìm lời giải

Chú ý là $\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB}$ nên để chứng minh $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$ ta sẽ đi chứng minh

$\frac{AE}{BE} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$. Chú ý đến giả thiết của bài toán ta thấy được $\triangle OEA \sim \triangle BEO$ nên

$\frac{EA}{EO} = \frac{OE}{EB} = \frac{OA}{OB}$, từ đó ta suy ra được điều cần phải chứng minh. Tuy nhiên để ý là điểm E

có thể nằm trong hoặc ngoài hình bình hành nên ta cần chia trường hợp để chứng minh bài toán.

Lời giải

Do giao điểm E của hai tia Ax và By có thể nằm trong hình bình hành và cũng có thể nằm bên ngoài hình bình hành. Do đó ta cần xét cả hai trường hợp.

+ Trường hợp 1: Điểm E nằm trong hình bình hành ABCD.

Vì AC là trục đối xứng của hai tia AD và

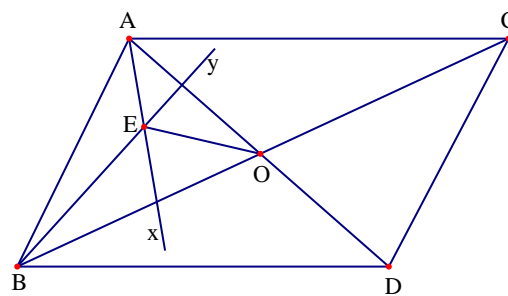
Ax nên AC là tia phân giác của góc \widehat{DAX}

Tương tự ta có BD là tia phân giác của góc \widehat{CBy}

Do đó OE là phân giác của góc \widehat{xEy} nên ta được $\widehat{AEO} = \widehat{BEO}$

Mà ta có $\widehat{AOE} + \widehat{EOB} = \widehat{OAD} + \widehat{ADO} = \widehat{AOE} + \widehat{ADO}$ và $\widehat{AOE} = \widehat{OBE}$

Do đó hai tam giác OEA và BEO đồng dạng với nhau.



Suy ra $\frac{EA}{EO} = \frac{OE}{EB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{EA}{EO} \cdot \frac{OE}{EB} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$. Do đó ta được $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$.

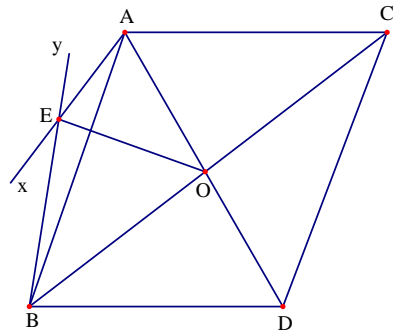
+ Trường hợp 2: Điểm E nằm ngoài hình bình hành ABCD.

Chúng minh hoàn toàn tương tự ta được OE là phân giác của góc \widehat{AEB} . Từ đó lập luận như trên ta được $\Delta AEO \sim \Delta OEB$

Suy ra $\frac{EA}{EO} = \frac{OE}{EB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{EA}{EO} \cdot \frac{OE}{EB} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$

Hay $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$.

Vậy trong cả hai trường hợp ta luôn có $\frac{AE}{BE} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2$



Ví dụ 34. Cho đa giác ABCDE có $DC = DE$ và $\widehat{E} = \widehat{C} = 90^\circ$. Trên AB lấy M sao cho

$\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM}$. Chứng minh rằng $\widehat{MCE} = \widehat{ADE}$

Phân tích tìm lời giải

Bài toán cho biết $\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM}$ nên từ A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt tia BM tại N thì ta sẽ được $\frac{BC}{BM} = \frac{AN}{AM}$, điều này dẫn đến $AE = AN$ và $\widehat{NEA} = \widehat{AEN}$. Để chứng minh $\widehat{MCE} = \widehat{ADE}$ ta cần chứng minh được $\frac{AE}{NE} = \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{CE}$, tức là ta cần chỉ ra $\Delta AEN \sim \Delta DCE$. Giả sử AE cắt BC tại S, khi đó ta được SD là đường trung trực của CE nên suy ra $\widehat{NEA} = \widehat{ESD}$ hay $\Delta AEN \sim \Delta DCE$.

Đến đây ta có thể trình bày lại lời giải bài toán như sau.

Lời giải

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt tia BM tại N,

Theo định lý Talet ta có $\frac{BC}{BM} = \frac{AN}{AM}$, mà theo giả thiết ta lại

có $\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM}$. Do đó ta được

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AE}{AM} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow AE = AN$$

Do đó tam giác AEN cân tại A, nên ta được $\widehat{NEA} = \widehat{AEN}$

Kéo dài AE cắt BC tại S. Ta có $\widehat{AED} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ mà lại có

$DC = DE$ và DS là cạnh chung nên hai tam giác SED và

SCD bằng nhau, từ đó suy ra $SE = SC$

Do vậy SD là đường trung trực của CE nên $SD \perp CE$

Ta có $AN \parallel SC$ nên ta được $\widehat{ASC} = \widehat{SAN} = 2\widehat{NEA} = 2\widehat{ESD}$. Suy ra $\widehat{NEA} = \widehat{ESD}$ nên ta được

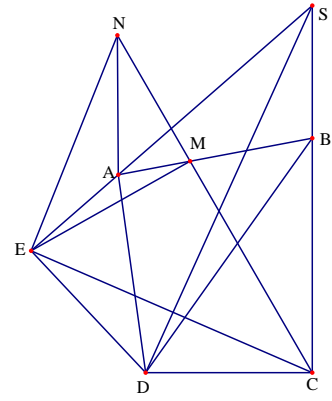
$NE \parallel SD$, mà lại có $SD \perp CE$ nên ta được $NE \perp EC$. Từ đó ta được $\widehat{AEN} = \widehat{DCE}$, suy ra

$\triangle AEN \sim \triangle DCE$

Nên ta được $\frac{AE}{NE} = \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{CE}$, điều này dẫn đến hai tam giác vuông EDA và ECN đồng

dạng

Do đó ta được $\widehat{MCE} = \widehat{ADE}$.



Ví dụ 35. Chứng minh rằng trong một tứ giác nếu hai đường chéo và hai đường thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện đồng quy tại một điểm thì tứ giác đó là hình bình hành

Phân tích tìm lời giải

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, DA. Khi đó nhận thấy tứ giác MPNQ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của MN và PQ. Do đó O là giao điểm của AC và BD. Khi đó ta cần chứng minh được $OB = OD$ và $OA = OC$. Chú ý là $\triangle OMK = \triangle ONE$ nên ta suy ra được MP là đường trung bình của tam giác ABC nên $DE = EO$, đến đây thì ta thấy được $OB = OD$. Như vậy bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, DA.

Theo giả thiết ta có AC, BD, MN, PQ đồng quy tại O .

Vì M và P lần lượt là trung điểm của AB và

BC nên ta được $MP \parallel AC$ và $MP = \frac{1}{2}AC$

Tương tự ta cũng có $NQ \parallel AC$ và $NQ = \frac{1}{2}AC$

Do đó $MP \parallel NQ$ và $MP = NQ$ nên tứ giác

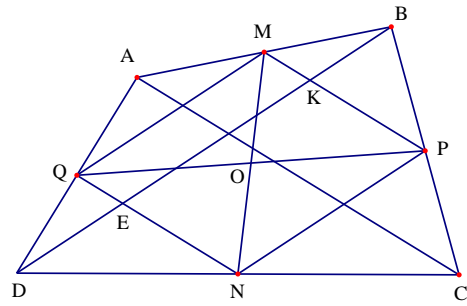
$MPNQ$ là hình bình hành. Nên ta được

$OM = ON; OP = OQ$.

Gọi K và E lần lượt là giao điểm của BD với MP và NQ .

Xét hai tam giác OMK và ONE có $OM = ON$, $\widehat{MOK} = \widehat{NOE}$ và $\widehat{OMK} = \widehat{ONE}$

Suy ra $\triangle OMK = \triangle ONE$ nên ta được $OK = OE$. Mặt khác do MP là đường trung bình của tam giác ABC nên ta được $BK = KO$. Tương tự ta được $DE = EO$, từ đó suy ra $OB = OD$ và $OA = OC$. Như vậy tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $ABCD$ là hình bình hành.



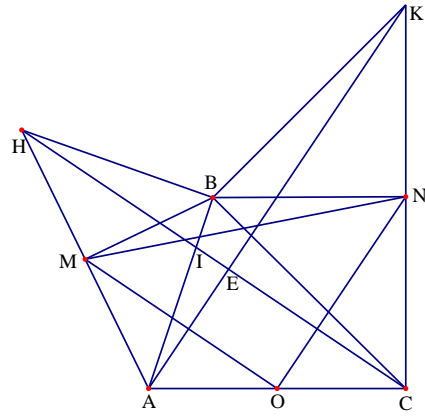
Ví dụ 36. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng về phía ngoài tứ giác các tam giác AMB, BNC, CPD, DQA vuông cân lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng MP và NQ vuông góc với nhau và bằng nhau.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh được MP và NQ vuông góc với nhau và bằng nhau ta cần chỉ ra được hai tam giác MOP và NOQ bằng nhau. Muốn vậy ta cần chứng minh được các tam giác MON và POQ vuông cân. Ta có thể phát biểu điều cần chứng minh trên dưới dạng bổ đề: Cho tam giác ABC , về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác MAB và NBC lần lượt vuông cân tại M và N . Gọi O là trung điểm của AC . Khi đó ta được tam giác MON vuông cân.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bài toán sau: Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác MAB và NBC lần lượt vuông cân tại M và N. Gọi O là trung điểm của AC. Khi đó ta được tam giác MON vuông cân. Thật vậy, từ điểm B vẽ các đường thẳng vuông góc với AB và BC, cắt AM và CN lần lượt tại H và K.



Do AB vuông góc với BH nên ta được $\widehat{MBH} = 45^\circ$ nên tam giác MBH vuông cân tại M, suy ra M là trung điểm của AH. Từ đó ta được OM là đường trung bình của tam giác ACH

Suy ra $OM \parallel CH$ và $OM = \frac{1}{2}CH$.

Chứng minh tương tự ta được $ON \parallel AK$ và $ON = \frac{1}{2}AK$. Gọi I là giao điểm của AB và CH.

Xét hai tam giác ABK và BCH có $AB = BH$, $BC = BK$ và $\widehat{ABH} = \widehat{CBK} = 90^\circ + \widehat{ABC}$

Do đó ta được $\triangle ABH = \triangle CBK$. Từ đó ta được $AK = CH$ nên ta suy ra $OM = ON$

Mặt khác ta cũng có $\widehat{BHC} = \widehat{BAK}$.

Hai tam giác BHI và AIE có $\widehat{BHC} = \widehat{BAK}$ và

$\widehat{HIB} = \widehat{EIA}$ nên $\widehat{HBA} = \widehat{IEA} = 90^\circ$

Do đó $AK \perp CH$, suy ra $OM \perp ON$. Vậy tam giác OMN vuông cân tại O.

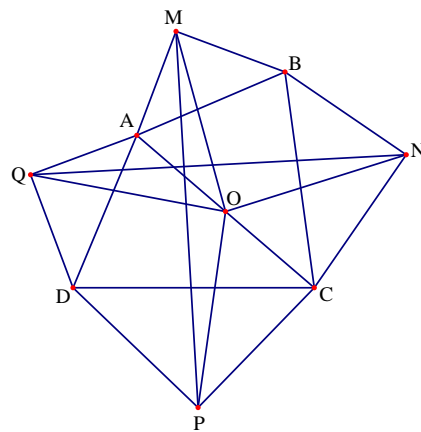
Trở lại bài toán: Gọi O là trung điểm của AC, áp dụng kết quả bài toán trên cho tam giác ABC ta được $OM = ON$ và $OM \perp ON$

Tương tự áp dụng kết quả bài toán trên cho tam giác DAC ta được $OP = OQ$ và $OP \perp OQ$

Xét hai tam giác OMP và ONQ có $OM = ON$, $OP = OQ$ và $\widehat{MOP} = \widehat{MOQ} + 90^\circ = \widehat{NOQ}$

Do đó ta được $\triangle MOP = \triangle NOQ$, suy ra $MN = PQ$ và $\widehat{ONQ} = \widehat{OMP}$

Mà ta có $\widehat{MON} = 90^\circ$ do đó ta được $MP \perp NQ$.



Ví dụ 37. Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng đường thẳng nối trọng tâm của hai tam giác OAD và OBC vuông góc với đường thẳng nối trực tâm của hai tam giác OAB và OCD.

Phân tích tìm lời giải

Gọi G, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OAD, OBC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm tam giác AOB, COD. Ta cần chứng minh HK vuông góc với GP. Trước hết gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD thì ta được IJ song song với GP nên ta sẽ chứng minh HK song song với IJ. Chú ý là I, J là các trung điểm nên ta chọn điểm S sao cho IJ là đường trung bình của tam giác ADS. Ta có thể lấy điểm S trên tia AI sao cho I là trung điểm của AS hoặc vẽ đường thẳng qua C song song với AB và cắt AI tại S, cả hai cách lấy này đều cho ta hình bình hành ABSC. Khi đó ta được IJ song song với DS và ta cần chứng minh DS vuông góc với HK. Chú ý đến $KO \perp CD$ nên để chứng minh được $HK \perp DS$ ta cần chứng minh được hai tam giác OHK và CSD đồng dạng. Lại có $\widehat{HOK} = \widehat{SCD}$ nên ta cần chỉ ra được $\frac{OH}{OK} = \frac{CS}{CD}$ hay $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$. Ta thấy $\triangle OHN \sim \triangle OAE$ nên $OH.OE = OA.ON$ và

$\triangle OMK \sim \triangle OFC$ nên $OK.OF = OC.OM$ do đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OA}{OC}$. Mặt khác ta có

$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{OE.AB}{OF.CD}$ và $\triangle OMD \sim \triangle ONB$ suy ra $\frac{OM}{ON} = \frac{OB}{OD}$ nên suy ra được

$\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{OE.AB}{OF.CD} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$. Đến đây ta có thể trình bày lời giải như sau.

Lời giải

Gọi H là trực tâm tam giác AOB, khi đó ta

có $OH \perp AB$ tại E và $BH \perp OA$ tại N.

Tam giác ONH và tam giác OEA là hai

tam giác vuông có $\widehat{HON} = \widehat{AOE}$ nên

$$\triangle OHN \sim \triangle OAE$$

Từ đó suy ra

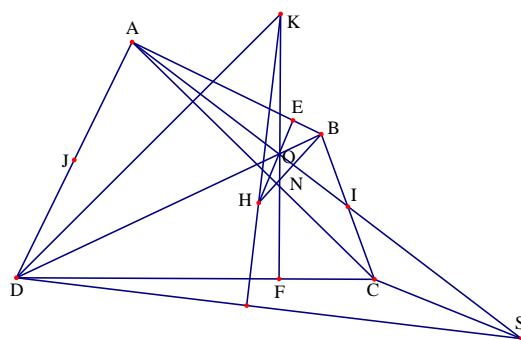
$$\frac{OH}{OA} = \frac{ON}{OE} \Rightarrow OH.OE = OA.ON$$

Gọi K là trực tâm của tam giác OCD, khi

đó $OK \perp CD$ tại F và $DK \perp AC$ tại M.

Khi đó hoàn toàn tương tự ta được $\triangle OMK \sim \triangle OFC$ nên ta được

$$\frac{OK}{OC} = \frac{OM}{OF} \Rightarrow OK.OF = OC.OM$$



Từ đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OA}{OC}$

Hai tam giác vuông OMD và ONB có $\widehat{MOD} = \widehat{NOB}$ nên $\triangle OMD \sim \triangle ONB$ suy ra $\frac{OM}{ON} = \frac{OB}{OD}$

Từ đó ta lại có $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OA}{OC}$. Mà ta lại có $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{OE.AB}{OF.CD}$

Do đó ta được $\frac{OH.OE}{OK.OF} = \frac{OE.AB}{OF.CD} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt đường thẳng đi qua A và trung điểm I của cạnh BC tại S.

Khi đó ta có $OH \perp CS, OK \perp CD$ nên ta được $\widehat{HOK} = \widehat{SCD}$ và $AC = SC$ Từ đó ta suy ra

$\frac{OH}{OK} = \frac{CS}{CD}$ nên hai tam giác HOK và SCD đồng dạng. Khi đó ta được $HK \perp SD$. Gọi J là

trung điểm của AD, ta có $JI \parallel DS$ nên ta được $KH \perp JI$. Mặt khác đường thẳng nối trọng tâm của hai tam giác OBC và OAD song song với JI nên đường thẳng đó vuông góc với HK.

Ví dụ 38. Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn $(O; R)$ với các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng $\frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$. Từ đó hãy tính tỷ số $\frac{EB}{EA}$ khi biết $AB = \frac{4R}{3}$ và

$BC = 3R$.

b) Trên cạnh CD lấy điểm M nằm giữa hai điểm D và C sao cho chân đường vuông góc kẻ từ M đến DO là điểm K nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng HK cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là T. Chứng minh rằng $MT = MG$.

Phân tích tìm lời giải

a) Nhận thấy các tam giác AOD và BOC vuông nên ta được $HA.HD = FB.FC = R^2$. Để chứng minh được $\frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$ ta cần chỉ ra được $EA.GD = EB.GC$. Chú ý là

$HA = EA; BE = FB; CF = CG; DG = HD$ nên $EA.GD = EB.GC$ hiển nhiên đúng. Đặt $\frac{EB}{EA} = k$

và ta cần tính được k. Chú ý là bài toán cho biết $AB = \frac{4R}{3}$ và $BC = 3R$. Lại thấy

$\frac{EB}{EB+EA} = \frac{k}{k+1}$ và $ED^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$ nên để tính được k ta cần tính được ED, CG,

EB theo k và R từ đó thay vào hệ thức trên để được phương trình ẩn k.

b) Chú ý đến MG là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên để chứng minh $MT = MG$ ta cần chỉ ra được OT vuông góc với TM.

Lời giải

a) Do ABCD là hình thang nên ta có

$\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$. Do DO, AO theo thứ tự là đường phân giác của các góc

\widehat{CDA} ; \widehat{DAB} . Do đó ta được

$\widehat{ODA} + \widehat{OAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$ nên ta giác AOD vuông tại O.

Tương tự tam giác BOC cũng vuông tại O.

Nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được $HA.HD = FB.FC = R^2$.

Mặt khác ta có $HA = EA; BE = FB; CF = CG; DG = HD$ nên $EA.GD = EB.GC \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$.

Đặt $\frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC} = k$. Ta có OE vuông góc với AB, OG vuông góc với CD nên ba điểm E, O, G thẳng hàng. Từ đó ta được $EG = 2R$ và $ED^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$.

Ta lại có $\frac{EB}{EB+EA} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EB = \frac{kAB}{k+1} = \frac{4kR}{3(k+1)}$ nên $BF = \frac{4kR}{3(k+1)}$

Từ đó ta được $CF = BC - BF = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)}$ nên $CG = 3R - \frac{4kR}{3(k+1)}$

Thay các kết quả trên vào $ED^2 = BC^2 - (GC - EB)^2$ ta được

$$4R^2 = 9R^2 - \left[3R - \frac{4kR}{3(k+1)} \right]^2 \Rightarrow 5 = \frac{(k+9)^2}{9(k+1)^2} \Rightarrow k = \frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$$

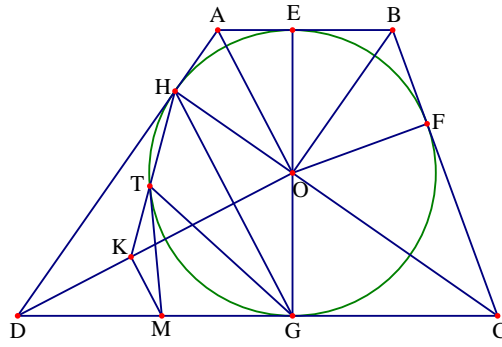
Vậy $\frac{EB}{EA} = \frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$.

b) Ta có $DH = DG$ nên tam giác DGH cân tại D. Mà OD là đường phân giác của góc \widehat{HDG} nên suy GH vuông góc với DO. Lại có MK vuông góc với DO nên MK song song với HG.

Từ đó suy ra $\widehat{KMG} = \widehat{HGC}$, mà GC là tiếp tuyến của đường tròn (O) và góc \widehat{HTG} là góc nội tiếp của đường tròn (O). Do đó ta được $\widehat{HTG} = \widehat{HGC} \Rightarrow \widehat{KMG} = \widehat{HTG}$ nên tứ giác KTGM nội tiếp.

Lại có $\widehat{OKM} = \widehat{OGM} = 90^\circ$ nên bốn điểm O, K, G, M thuộc một đường tròn đường kính MO.

Do đó năm điểm O, K, G, M, T thuộc đường tròn đường kính MO. Do đó $\widehat{MIO} = 90^\circ$ nên OT vuông góc với MT. Do đó MT là tiếp tuyến của đường tròn (O). Ta có MT, MG là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MT = MG$.



Ví dụ 39. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm M, N, P, Q sao cho MN và PQ cùng song song với AC và $\widehat{AMQ} = 30^\circ$.

a) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua MQ và C' là điểm đối xứng với C qua NP. Gọi giao điểm của QA' với NP là E và giao điểm của PC' với MQ là F chứng minh rằng các điểm E, F, Q, D, P cùng nằm trên một đường thẳng tròn.

b) Biết $AC = 3MN$, tính diện tích hình thang MNPQ theo a.

Phân tích tìm lời giải

a) Nhận thấy $\widehat{PDQ} = 90^\circ$ nên đường tròn đi qua ba điểm P, Q, D có đường kính PQ. Do đó để chứng minh năm điểm E, F, D, P, Q cùng thuộc một đường tròn ta chỉ cần chứng minh được $\widehat{PEQ} = \widehat{PFQ} = 90^\circ$.

b) Khi cho $AC = 3MN$ ta dễ dàng tính được $BM = \frac{a}{3}$, $AM = \frac{2a}{3}$ và $MB = BN = \frac{a}{3}$, $CN = \frac{2a}{3}$. Dễ thấy $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - S_{MBN} - S_{DPQ} - 2S_{AQM}$ nên để tính được S_{MNPQ} ta cần tính được S_{MBN} ; S_{DPQ} ; S_{AQM} . Chú ý đến các tam giác vuông và vuông cân thì ta chỉ cần tính được DQ bài toán xem như được giải quyết.

Lời giải

Vì PQ song song với AC nên

$$\widehat{DQP} = \widehat{DAC} = 45^\circ.$$

Mặt khác ta lại có $\widehat{AMQ} = 30^\circ$ do đó

$$\widehat{AQM} = 60^\circ \text{ và } \widehat{MQP} = 75^\circ.$$

Do A và A' đối xứng với nhau qua QM nên

$$\widehat{A'QF} = \widehat{AQF} = 60^\circ, \text{ do đó suy ra } \widehat{EQP} = 15^\circ$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

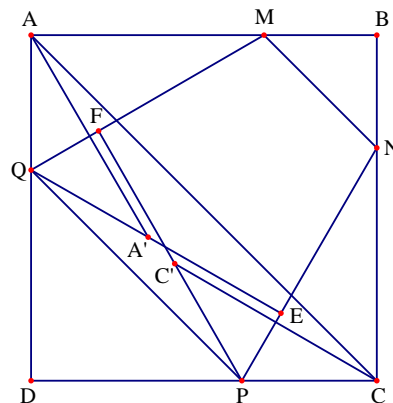
$$\widehat{QPF} = 15^\circ.$$

Từ đó suy ra

$$\widehat{QFP} = 180^\circ - \widehat{QPE} - \widehat{PQF} = 180^\circ - 15^\circ - 75^\circ = 90^\circ$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{QEP} = 90^\circ$, lại có $\widehat{PDQ} = 90^\circ$ nên các tam giác DQP, EPQ và EPQ có chung cạnh huyền PQ. Do đó E, F, D cùng nằm trên đường tròn đường kính PQ hay năm điểm E, F, D, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có MN song song với AC và $MN = \frac{1}{3}AC$ nên suy ra $\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC}$



Do đó ta được $BM = \frac{MN \cdot AB}{AC} = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$ và $AM = \frac{2a}{3}$.

Mặt khác tam giác BMN vuông cân nên ta được $MB = BN = \frac{a}{3}$ nên suy ra $CN = \frac{2a}{3}$.

Đặt $AQ = x$ thì $MQ = 2x$, khi đó ta được $x^2 + AM^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{4}{9}a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4a^2}{27}$.

Từ đó suy ra $x = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$ và $DQ = a - \frac{2a}{3\sqrt{3}} = \frac{a(3\sqrt{3}-2)}{3\sqrt{3}}$.

Đến đây ta được $DQ = DP = \frac{a(3\sqrt{3}-2)}{3\sqrt{3}}$

Do đó suy ra $S_{BMN} = \frac{1}{2}BM^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$ và $S_{PDQ} = \frac{1}{2}QD^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{a(3\sqrt{3}-2)}{3\sqrt{3}} \right]^2 = \frac{a^2(31-4\sqrt{27})}{54}$

Lại có $S_{AQM} = S_{CPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{27}$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= A_{ABCD} - S_{MBN} - S_{DPQ} - 2S_{AQM} = a^2 - \left[\frac{a^2}{18} + \frac{a^2(31-4\sqrt{27})}{54} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}a^2}{27} \right] \\ &= \frac{54a^2 - 34a^2 + 4\sqrt{3}a^2}{54} = \frac{a^2(10+2\sqrt{3})}{27} \end{aligned}$$

Ví dụ 40. Cho ngũ giác ABCDE, mà mỗi đường chéo song song với một cạnh của ngũ giác. Chứng minh rằng tỉ số giữa cạnh của ngũ giác và đường chéo song song với nó là một hằng số.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của CE và BD. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại P, từ đó ta thấy O nằm trong ngũ giác và P nằm ngoài ngũ giác ABCDE.

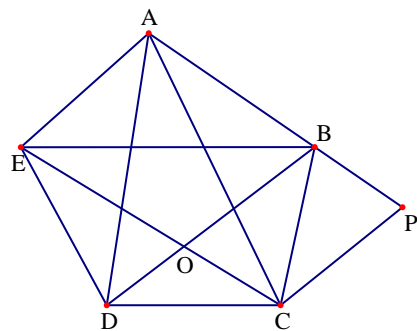
Đặt $\frac{OC}{AM} = k (k > 0)$. Do $AE // BD$, $AB // CE$ và

$BE // CD$ nên ta được $\triangle OBE = \triangle AEB$ và

$\triangle OCD \sim \triangle AEB$

Do đó ta được $\triangle OCD \sim \triangle ABE$ suy ra

$$\frac{OC}{AB} = \frac{OD}{AE} = k \Rightarrow OD = k \cdot AE$$



Dễ thấy các tứ giác ABOE, APCE và BPCO là các hình bình hành, nên ta được $AB = OE$; $CP = AE$ và $BP = OD = k \cdot AB$.

Xét hai tam giác EOD và APC có $\widehat{PAC} = \widehat{ACE} = \widehat{CED}$ và $\widehat{EOD} = \widehat{OEA} = \widehat{APC}$

$$\text{Do đó } \triangle EOD \sim \triangle APC \text{ suy ra } \frac{OD}{PC} = \frac{OE}{PA} \Rightarrow \frac{AE \cdot k}{AE} = \frac{AB}{AB + BP} = \frac{AB}{AB + k \cdot AB}$$

$$\text{Từ đó ta được } k = \frac{1}{1+k} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{Do đó ta có } \frac{EC}{AB} = \frac{OE + OC}{AB} = \frac{AB + OC}{AB} = 1 + k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Tương tự ta tính được } \frac{AC}{DE} = \frac{AD}{BC} = \frac{BE}{CD} = \frac{BD}{AE} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và AB song song với CD. Lấy điểm P thuộc cạnh AD và điểm Q thuộc tia đối của tia BC. Biết rằng $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$ và $\widehat{AQB} + \widehat{CQD} = 180^\circ$. Chứng minh rằng $OP = OQ$.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi giao điểm của AB với CD là F, giao điểm của BC với AD là E. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $\frac{IJ}{OE} = \frac{1}{2} \left| \frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB} \right|$

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có $AB = BC$ và $\widehat{A} = \widehat{D} < 90^\circ$. Gọi I là trung điểm của CD. Đường thẳng BI cắt AD tại E. Chứng minh rằng $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BCD} = \widehat{CDA}$ và đường phân giác của góc \widehat{ABC} cắt CD tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = 90^\circ$ khi và chỉ khi $AB = AD + BC$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD và điểm M bất kì nằm trên đường chéo AC. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại M, qua O kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2} \geq \frac{1}{OM^2 + ON^2}$$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có độ dài bằng cạnh a. Trong hình vuông đo lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều. Các đường thẳng BK và AD cắt nhau ở P.

a) Tính độ dài KC theo a

b) Trên AD lấy I sao cho $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, CI cắt BP ở H. Chứng minh tứ giác CHDP nội tiếp.

c) Gọi M và L lần lượt là trung điểm CP và KD. Chứng minh $LM = \frac{a}{2}$

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Gọi K, L, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Đường thẳng KM cắt AC, BD lần lượt tại P và Q. Đường thẳng LN cắt đường thẳng AC, BD lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng $PA \cdot PC = QB \cdot QD$ khi và chỉ khi $RA \cdot RC = SB \cdot SD$.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AD, BC, AB, CD thỏa mãn các điều kiện $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = k$ và $\frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QC} = m$. Chứng minh rằng hai đoạn

thẳng MN và PQ cắt nhau tại điểm I thỏa mãn $\frac{IP}{IQ} = k$ và $\frac{IM}{IN} = m$.

Bài 9. Tính diện tích của ngũ giác lồi ABCDE, biết các tam giác ABC, BCD, CDE, DEA, EAB cùng có diện tích bằng 1.

Bài 10. Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng

- a) Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP} = 45^\circ$
 b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
 c) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Bài 11. Cho hình chữ nhật ABCD với $AB = a, AD = b$. Trên các cạnh AD, AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho luôn tạo thành tứ giác EFGH. Gọi P là chu vi của tứ giác EFGH. Chứng minh rằng $P \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài 12. Cho tứ giác lồi ABCD thỏa mãn điều kiện $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Lấy điểm M, N lần lượt trên cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{NAB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng nếu MN và BD cắt nhau tại I thì IA vuông góc với AC.

Bài 13. Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Trên các cạnh AB, BC lấy lần lượt các điểm M và N thay đổi sao cho $\widehat{MDN} = 45^\circ$. Xác định vị trí của M và N để độ dài MN ngắn nhất.

Bài 14. a) Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A, cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN. Chứng minh rằng: $CK \perp BN$.

b) Cho đường tròn (O) bán kính $R = 1$ và một điểm A sao cho $OA = \sqrt{2}$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một góc xOy có số đo bằng 45° có cạnh Ox cắt đoạn thẳng AB tại D và cạnh Oy cắt đoạn thẳng AC tại E. Chứng minh rằng $2\sqrt{2} - 1 \leq DE < 1$

Bài 15. Cho hình thoi ABCD. Gọi H là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng a và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng b.

a) Chứng minh rằng $\frac{AH}{BH} = \frac{a}{b}$

b) Tính diện tích hình thoi ABCD theo các bán kính a, b

Bài 16. Cho ABCD là một hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và điểm N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi ABCD

Bài 17. Cho tứ giác ABCD có điểm M là giao điểm của AC và BD thỏa mãn điều kiện $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $MA = MD$. Lấy điểm E bất kì trên cạnh BC. Qua E vẽ đường thẳng song song với AC, BD cắt lần lượt AB, CD tại F và G. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFG nằm trên AD.

Bài 18. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia AD và BC lần lượt lấy hai điểm F, E sao cho $DF = CE = DC$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh rằng $AE \perp FH$.

Bài 19. Cho hình bình hành ABCD và một điểm M nằm trong hình bình hành thỏa mãn các điều kiện $\widehat{MAB} = 40^\circ$; $\widehat{MBC} = 25^\circ$; $\widehat{MCD} = 65^\circ$; $\widehat{MDA} = 50^\circ$. Tính số đo các góc của hình bình hành.

Bài 20. Cho hình bình hành ABCD và một điểm E nằm trên cạnh CD. Biết rằng các tam giác BCE, BED và DAB là tam giác cân. Tính số đo của góc \widehat{BAD} .

Bài 21. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. Tìm điểm M sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$

Bài 22. Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $MC + CN + MN = 2a$. Đường chéo BD cắt AM, AN lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng các đoạn thẳng BP, PQ, QD là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 23. Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc \widehat{BAD} cắt đường thẳng BC, CD lần lượt tại M và N. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và CMN. Chứng minh $AE \perp CE$

Bài 24. Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy E, F thuộc cạnh AB; G, H thuộc cạnh BC; I, J thuộc cạnh CD; K, M thuộc cạnh DA sao cho hình 8 - giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình 8 - giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ thì $EF = IJ$.

- **Bài 25.** Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tia Ax tạo với tia AB một góc $\widehat{BAx} = 15^\circ$ và cắt cạnh BC tại M, cắt đường thẳng CD tại N. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = AB^2 \left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \right).$$

Bài 26. Cho hình chữ nhật có cạnh là 3 và 4. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y, z, t. Chứng minh rằng $25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 50$.

Bài 27. Cho hình vuông ABCD có cạnh a, hai điểm M và N lần lượt nằm trên cạnh AB và BC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB} = x$ với $0 < x < 1$. Các đường thẳng qua M và N song song với BD cắt AD và CD lần lượt tại Q và P. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x, tìm x để diện tích này lớn nhất.

Bài 28. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Một đường tròn có thể nội tiếp đường tứ giác và $AB = AD$. Chứng minh rằng diện tích tứ giác không vượt quá 2 và bán kính đường tròn nội tiếp không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 29. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB, AD lấy lần lượt hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

a) Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.

b) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC = 2EF$.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Bài 30. Cho hình vuông ABCD và tứ giác MNPQ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông.

a) Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{AC}{4}(MN + NP + PQ + QM)$.

b) Xác định vị trí của M, N, P, Q để chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

Bài 31. Cho hình thang ABCD với $AD \parallel BC$. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD, AM, BM. Tìm điều kiện về độ dài hai cạnh đáy của hình thang để giao điểm của hai đường thẳng DP và CQ nằm trong tam giác ABM.

Bài 32. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại F.

Chứng minh rằng $AB \cdot DE = BC \cdot CE$ và $2AC^2 < AD \cdot AF + AB \cdot AE$

Bài 33. Cho tứ giác ABCD và điểm M nằm trong tứ giác thỏa mãn các điều kiện

$\widehat{AMB} = \widehat{MBA} + \widehat{MCD}$, $\widehat{CMD} = \widehat{MCB} + \widehat{MAB}$ và $MA = MC$. Chứng minh rằng:

$AB \cdot MC = BC \cdot MD$ và $AD \cdot MB = CD \cdot MA$.

Bài 34. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a, biết hai đường chéo cắt nhau tại O. Lấy điểm I thuộc cạnh AB, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{IOM} = 90^\circ$ (I và M không trùng các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh $\triangle BIO = \triangle CMO$ và tính diện tích tứ giác BIOM theo a.

b) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC, K là giao điểm của BN và tia OM.

Chứng minh tứ giác IMNB là hình thang và $\widehat{BKM} = \widehat{BCO}$.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Bài 35. Cho hình vuông ABCD cạnh a, điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc cạnh AD sao cho CE = AF. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại M, N.

a) Chứng minh rằng $CM \cdot DN = a^2$

b) Gọi K là giao điểm của NA và MB. Chứng minh rằng $\widehat{MKN} = 90^\circ$

c) Các điểm E và F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất

Bài 36. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Qua C kẻ đường thẳng cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng:

a) Tích BE.DF có giá trị không đổi

b) Gọi I là giao điểm của DE và BF. Tính số đo của góc \widehat{BID}

c) Tính diện tích của hình thoi ABCD biết $S_{BEC} = 3\text{cm}^2, S_{CDF} = 12\text{cm}^2$.

Bài 37. Cho M là một điểm bất kỳ nằm trong hình vuông ABCD có cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$.

b) Xét điểm M nằm trên đường chéo AC. Kẻ MN vuông góc với AB tại N. Gọi O là trung điểm của AM. Chứng minh rằng $CN^2 = 2 \cdot OB^2$.

Bài 38. Cho đoạn thẳng AB, gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy điểm C trên tia Ax, điểm D trên tia By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$. Kẻ $OI \perp CD$ ($I \in CD$). Gọi K là giao điểm của AD và BC, gọi E là giao điểm của OD với IK. Chứng minh rằng $IK \parallel AC$ và $IE = BD$

Bài 39. Cho ngũ giác lồi ABCDE có tất cả các cạnh bằng nhau và $\widehat{ABC} = 2\widehat{DBE}$. Tính số đo góc \widehat{ABC} .

Bài 40. Chứng minh rằng nếu trong một lục giác lồi mà mỗi một trong ba đường chéo chính nối các cặp đỉnh đối diện chia lục giác thành phần có diện tích bằng nhau thì đường chéo này đồng quy.

Bài 41. Cho hình chữ nhật ACD có tâm O, cạnh $AB = 3a$ và $\widehat{ABD} = 30^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác AOD, AG cắt CD tại E.

a) Chứng minh tứ giác AOED nội tiếp

b) Cho DG cắt AB tại F. Tính diện tích tứ giác AFOE

c) Đường tròn tâm J nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với BD, CD lần lượt tại I và K.

Gọi H là giao điểm của IK và AC. Tính \widehat{IOJ} và độ dài đoạn HE.

Bài 42. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên cạnh BC lấy điểm E ($E \neq B$; $E \neq C$), trên cạnh CD lấy điểm F sao cho góc $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Đường chéo BD cắt AE và AF lần lượt tại H và G.

a) Gọi I là giao điểm của EG và FH. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác AEF.

b) Chứng minh rằng $\frac{GH}{EF}$ không đổi.

c) Đường thẳng AI cắt EF tại K. Chứng minh rằng hai đường thẳng BK, HF song song.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AEF khi E thay đổi trên đoạn BC ($E \neq B$; $E \neq C$), F thay đổi trên đoạn CD thỏa điều kiện góc $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

Bài 43. Cho ngũ giác đều ABCDE. Chứng minh rằng $AB^2 + AC \cdot AE = AD^2$ và từ kết quả đó hay suy ra

$$4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho

$$AB = BE.$$

Tam giác ABE cân tại B nên $\widehat{BEA} = \widehat{BAE}$

Do AB song song với CD nên $\widehat{BAE} = \widehat{CDP}$. Từ

đó ta được $\widehat{BEA} = \widehat{CDP}$. Mà ta có $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$

nên suy ra $\triangle BEP \sim \triangle CDP$. Do đó

$$\frac{DP}{EP} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{BA} = \frac{DO}{BO}$$

Từ đó theo định lí Talets đảo ta được OP song

song với BE, nên $\frac{OP}{BE} = \frac{DO}{DB}$. Suy ra

$$OP = BE \cdot \frac{DO}{BD} = BA \cdot \frac{OD}{BD}.$$

Hoàn toàn tương tự ta lấy K trên tia đối của tia

BC sao cho $AB = AK$.

Khi đó từ $\widehat{AQB} + \widehat{CQD} = 180^\circ$ ta suy ra được $\widehat{AQK} = \widehat{DQC}$.

Từ đó ta được hai tam giác AKQ và DCQ đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra OQ song song với AK.

Do đó ta được $\frac{OQ}{AK} = \frac{CO}{CA} = \frac{DO}{DB}$ nên ta suy ra được $OQ = AK \cdot \frac{OD}{BD} = AB \cdot \frac{OD}{BD}$

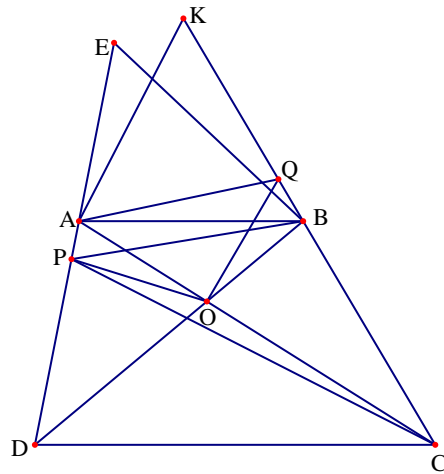
Kết hợp hai kết quả trên ta được $OP = OQ$.

Bài 2. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tứ giác ABCD. Gọi giao điểm của AB với CD là N và giao điểm của AD với BC là M. Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, MN. Khi đó ba điểm I, E, F thẳng hàng. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{NIE} &= S_{NBC} - S_{NBI} - S_{NCI} - S_{NEI} - S_{NEC} = S_{NBC} - \frac{1}{2}(S_{NBD} + S_{CBD} + S_{IAC} + S_{NAC}) \\ &= S_{NBC} - \frac{1}{2}(S_{NBD} + S_{ABC} - S_{IAB} - S_{BCI} + S_{NAC}) = S_{NBC} - \frac{1}{2}(S_{ABI} + S_{BCI}) = \frac{1}{4}S_{ABCD} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $S_{MIE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ nên khoảng cách từ M, N đến I bằng nhau

hay EI đi qua trung điểm của MN. Do đó ba điểm I, E, F thẳng hàng.



Trở lại bài toán: Giả sử $AB < CD$ và $AD < BC$.

Gọi P là trung điểm của OE , khi đó áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $AEBO$ ta được ba điểm P, I, J thẳng hàng.

Để dàng chứng minh được tam giác OAB đồng dạng với tam giác DOC nên ta được

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}. \text{ Lại có tam giác } EAB \text{ đồng dạng}$$

$$\text{với tam giác } ECD \text{ nên } \frac{AB}{CD} = \frac{EA}{EC}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{EA}{EC}. \text{ Gọi } Q \text{ là điểm}$$

đối xứng với O qua J . Khi đó tứ giác $ODQC$ là hình bình hành nên OC song song với QD

$$\text{Do đó ta được } \widehat{QCE} = 180^\circ - \widehat{DBC} = 180^\circ - \widehat{DAC} = \widehat{CAE} \text{ và } \frac{OA}{OD} = \frac{OA}{CQ} = \frac{EA}{EC}$$

Suy ra hai tam giác OAE và QCE đồng dạng với nhau.

$$\text{Gọi } M \text{ là giao điểm của } EQ, \text{ suy ra ta được } \frac{AP}{CM} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{CM}{CD}$$

Ta lại có tam giác APE đồng dạng với tam giác CME nên suy ra $\widehat{EAP} = \widehat{ECM}$

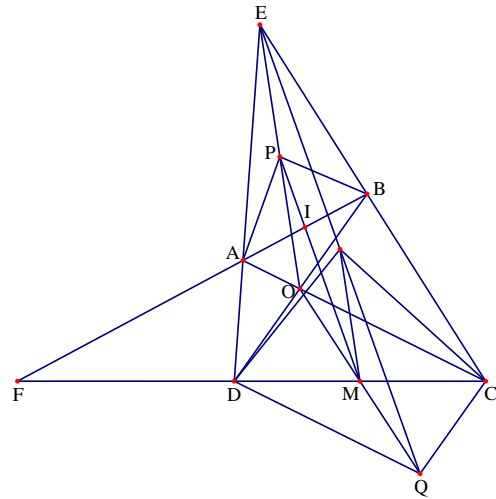
Từ đó ta có $\widehat{PAB} = \widehat{MCD}$ nên hai tam giác APB và CMD đồng dạng với nhau. Mà ta lại có

$$MJ \text{ song song với } EO \text{ và } MJ = PO. \text{ Do đó ta được } \frac{PI}{AB} = \frac{MJ}{CD} = \frac{PO}{CD}, \text{ suy ra } \frac{PI}{AB} = \frac{OE}{2CD} \text{ nên}$$

$$\text{ta được } \frac{AB}{CD} = \frac{2PI}{OE}.$$

$$\text{Tương tự ta được } \frac{CD}{AB} = \frac{2PJ}{OE}. \text{ Do đó } \frac{PJ}{OE} - \frac{PI}{OE} = \frac{1}{2} \left(\frac{CD}{AB} - \frac{AB}{CD} \right) \Rightarrow \frac{IJ}{OE} = \frac{1}{2} \left(\frac{CD}{AB} - \frac{AB}{CD} \right)$$

$$\text{Vậy ta luôn có } \frac{IJ}{OE} = \frac{1}{2} \left| \frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB} \right|.$$



Bài 3. Giả sử đường thẳng AB cắt CD tại M và AB cắt CE tại N. Do $\widehat{A} = \widehat{D} < 90^\circ$ nên tam giác MAD cân tại M, do đó ta được $MA = MD$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BIM với ba điểm N, C, E thẳng hàng ta được

$$\frac{NB}{NM} \cdot \frac{CM}{CI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1$$

Trong tam giác BIM lại có ba điểm A, D, E

thẳng hàng nên $\frac{AB}{AM} \cdot \frac{DM}{DI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1$

Từ đó ta được $\frac{NB}{NM} \cdot \frac{CM}{CI} \cdot \frac{EI}{EB} \cdot \frac{AB}{AM} \cdot \frac{DM}{DI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1$.

Để ý ta có $AB = BC$ và $ID = IC, AM = DM$ ta được $\frac{NB}{NM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{NB}{NM} = \frac{CB}{CM}$ suy ra CN

là tia phân giác của góc \widehat{BCM} nên ta được $\widehat{BCN} = \widehat{NCM}$. Ta thấy tam giác ABC cân tại B nên

$$\widehat{ACN} = \widehat{ACB} + \widehat{BCN} = \frac{1}{2}(\widehat{CBM} + \widehat{BCM}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BMC}) = \widehat{MAD}$$

Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{BCN} = \widehat{CAD}$ do đó ta có $\widehat{CAD} = \widehat{ECD}$.

Từ đó ta được $\widehat{AEC} = \widehat{DEC} = \widehat{ADC} - \widehat{ECD} = \widehat{DAB} - \widehat{CAD} = \widehat{BAC}$

Bài 4. + Điều kiện cần: Giả sử ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$,

khi đó ta được $\widehat{BEC} < 90^\circ$. Suy ra tồn tại một

điểm I trên AB sao cho $\widehat{BEI} = \widehat{BEC}$. Theo giả

thiết ta có $\widehat{CBE} = \widehat{IBE}$ nên suy ra được

$$\triangle BEC = \triangle BEI$$

Từ đó ta có $\widehat{BIE} = \widehat{BCE}$ và $IB = IC$. Do đó ta

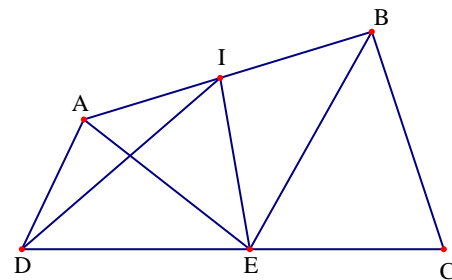
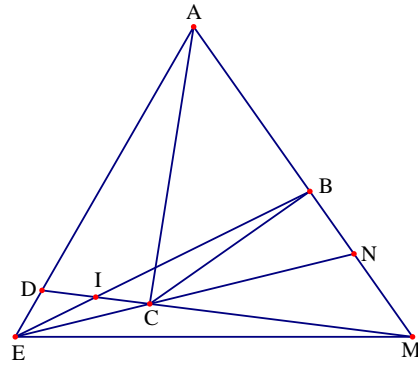
được $\widehat{BIE} = \widehat{EDA}$ nên tứ giác ADEI nội tiếp

đường tròn

Do đó $\widehat{ADI} = \widehat{AEI}$. Mặt khác ta có $\widehat{AEI} + \widehat{IEB} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEI} + \widehat{BEC} = 90^\circ$ Mà ta lại có

$\widehat{AEB} = 90^\circ$ nên suy ra $\widehat{DEA} + \widehat{BEC} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{DEA} = \widehat{AEI}$ suy ra $\widehat{ADI} = \widehat{AID}$ nên tam giác AID cân tại A.

Từ đó ta được $IA = AD$ nên ta được $AB = AD + BC$



+ Điều kiện đủ: Giả sử ta có $AB = AD + BC$, khi đó lấy điểm I trên đoạn AB sao cho $IA = ID$ và $IB = BC$. Từ đó suy ra được $\triangle BEI = \triangle AEI$, suy ra $\widehat{BIE} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{BIE} = \widehat{ADC}$.
Do đó tứ giác ADEI nội tiếp đường tròn. Mà ta có $IA = AD$ nên $\widehat{AI} = \widehat{DI}$.

Suy ra $\widehat{DEA} = \widehat{AEI}$ nên suy ra EA vuông góc với BE hay $\widehat{AEB} = 90^\circ$

Bài 5. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bất đẳng thức sau:

Cho a, b, c, d là các số thực dương, khi đó ta luôn có

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{d}\right)^2 \leq (c^2 + d^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{b} \leq \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{d^2}{a^2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{c}{b} - \frac{d}{a}\right)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $ac = bd$.

Trở lại bài toán: Từ O kẻ OM (M ∈ BC) song song với AB và từ O kẻ ON (N ∈ AD) song song với CD

Theo định lí Talet ta có $\frac{OM}{AB} = \frac{OC}{CA}$ và $\frac{ON}{CD} = \frac{OC}{AC}$. Do đó ta được $\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{OC+OA}{CA} = 1$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức trên ta được $1 = \left(\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD}\right)^2 \leq (OM^2 + ON^2)\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}\right)$

Suy ra ta được $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2} \geq \frac{1}{OM^2 + ON^2}$. Bài toán được chứng minh.

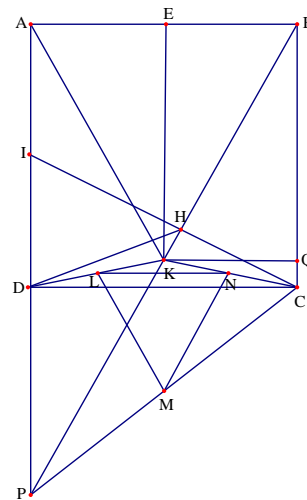
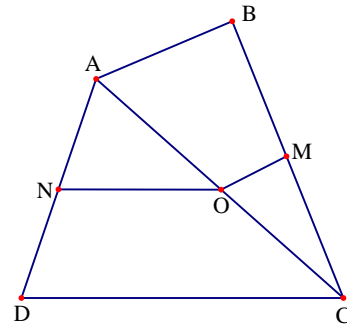
Bài 6. a) Kẻ $KQ \perp BC$, trong tam giác vuông BQK có $BK = a$; $\widehat{KBQ} = 30^\circ$ nên $KQ = \frac{a}{2}$. Áp dụng Pitago cho tam giác vuông BKQ ta được

$$BQ = \sqrt{BK^2 - KQ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Nên } CQ = BC - BQ = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$$

Áp dụng Pitago cho tam giác vuông CKQ ta có

$$KC = \sqrt{CQ^2 + KQ^2} = \sqrt{\frac{a^2(7 - 4\sqrt{3})}{4} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}}{2}$$



Từ đó ta được $QD = PC \Rightarrow \frac{QB}{QD} = \frac{QB}{PC} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow QB = PA$.

Suy ra $BQ + QD = PA + PC \Rightarrow AC = BD$. Kết hợp với $\frac{SD}{RA} = \frac{SB}{RC}$ ta được

$$\frac{BC}{SB} = \frac{AC}{RC} \Rightarrow SB = RC.$$

Do đó suy ra $\frac{SD}{SB} = \frac{SD}{RC} = \frac{RA}{RC} \Rightarrow SD = RA \Rightarrow SB \cdot SD = RA \cdot RC$

Như vậy nếu có $PA \cdot PC = QB \cdot QD$ thì ta được $RA \cdot RC = SB \cdot SD$.

+ Giả sử $RA \cdot RC = SB \cdot SD$, Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta thu được $AC = BC$.

Từ đó ta suy ra được $PA \cdot PC = QB \cdot QD$. Vậy ta có $PA \cdot PC = QB \cdot QD$ khi và chỉ khi $RA \cdot RC = SB \cdot SD$.

Bài 8.

Kết luận của bài toán là hiển nhiên nếu ABCD là hình bình hành hoặc hình thang. Ta xét trường hợp AB không song song với CD và AD không song song với BC

Dựng các hình bình hành ABEM và DCFM.

Khi đó hai đoạn BE, CF song song và

$$\frac{BE}{FC} = \frac{AM}{MD} = k. \text{ Do đó hai đoạn BC, EF cắt nhau}$$

tại điểm N' thỏa mãn

$$\frac{N'E}{N'F} = \frac{N'B}{N'C} = k = \frac{NB}{NC} \Rightarrow N' \equiv N \text{ và } \frac{NE}{NF} = k.$$

Trên các đoạn ME, MF lấy các điểm G, H tương ứng sao cho $PG \parallel AM$, $QH \parallel DM$.

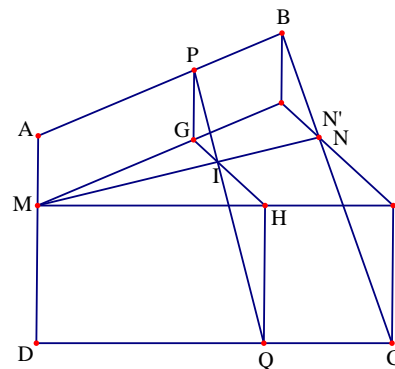
Khi đó, PG và QH song song và $\frac{PG}{QH} = \frac{AM}{MD} = k$. Do đó hai đoạn PQ và GH cắt nhau tại

điểm I thỏa mãn $\frac{IG}{IH} = \frac{IP}{IQ} = k$. Mặt khác vì $\frac{GM}{GE} = \frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QC} = \frac{HM}{HF}$ $GH \parallel FE$ nên MN cắt

đoạn GH tại điểm I' thỏa mãn $\frac{I'G}{I'H} = \frac{NE}{NF} = k = \frac{IG}{IH} \Rightarrow I' \equiv I \Rightarrow GH, MN, PQ$ cắt nhau tại

điểm I thỏa mãn $\frac{IP}{IQ} = k$.

Ngoài ra $\frac{IM}{IN} = \frac{GM}{GE} = \frac{PA}{PB} = m$.



Bài 9. Gọi $I = EC \cap BD$. Ta có $S_{BAE} = S_{DAE}$ nên khoảng cách từ B, D đến AE bằng nhau. Do B, D cùng phía đối với đường thẳng AE nên $BD \parallel AE$. Tương tự ta được $AB \parallel CE$

Do đó ABIE là hình bình hành nên

$$S_{IBE} = S_{ABE} = 1$$

Đặt $S_{ICD} = x (0 < x < 1)$

$$\Rightarrow S_{IBC} = S_{BCD} - S_{ICD} = 1 - x = S_{ECD} - S_{ICD} = S_{IED}$$

$$\text{Lại có } \frac{S_{ICD}}{S_{IDE}} = \frac{IC}{IE} = \frac{S_{IBC}}{S_{IBE}} \text{ hay } \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S_{IED} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Do đó $S_{ABCDE} = S_{EAB} + S_{EBI} + S_{BCD} + S_{IED} = 3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 10.

a) Đặt $AB = a$ ta có $AC = a\sqrt{2}$. Chứng minh được tam giác ADP đồng dạng tam giác NBM suy ra

$$\frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow BN \cdot DP = \frac{a^2}{2}, \text{ mà } OB \cdot OD = \frac{a^2}{2}$$

Chứng minh được tam giác DOP đồng dạng với tam giác BNO từ đó tính được $\widehat{NOP} = 45^\circ$

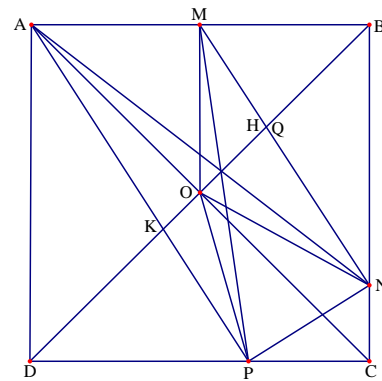
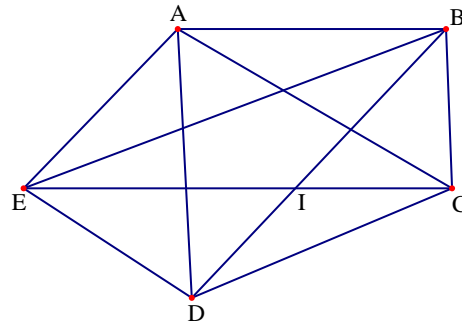
b) Ta có $\frac{OB}{DP} = \frac{ON}{OP} = \frac{OD}{DP}$ và $\widehat{PON} = \widehat{ODP} = 45^\circ$

Do đó tam giác DOP đồng dạng với tam giác ONP suy ra $\widehat{DOP} = \widehat{ONP}$ nên DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN

c) Đặt giao điểm của MN và BC là Q và AP là K nên theo tính chất phân giác cho tam giác

$$MBN \text{ và } APD \text{ ta có } \frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}; \frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AD} \Leftrightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA}$$

Giả sử MP cắt AN tại I và KI cắt MN tại H, theo định lí Talet ta được $\frac{HM}{PK} = \frac{HN}{KA}$



Từ đó ta được $\frac{HM}{HN} = \frac{QM}{QN}$ nên Q trùng H hay BD, PM, AN đồng quy

Bài 11.

Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của EF, EG và GH.

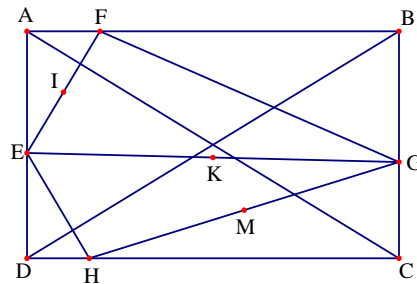
Tam giác AEF vuông tại A có AI là trung tuyến nên $AI = \frac{1}{2}.EF$. Tương tự $MC = \frac{1}{2}.GH$.

IK là đường trung bình của tam giác EFG nên

$$IK = \frac{1}{2}.FG. \text{ Tương tự } KM = \frac{1}{2}.EH$$

$$\text{Ta có } P = EF + FG + GH + HE = 2(AI + IK + KM + MC)$$

Mà ta có $AI + IK + KM + MC \geq AC$ nên suy ra $P \geq 2AC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$



Bài 12.

+ Trường hợp 1: Xét M trùng với C hoặc N trùng với C thì tương ứng I trùng với D hoặc I trùng với B.

Khi đó $\widehat{MAD} = \widehat{IAC} = 90^\circ$ khi đó IA vuông góc với AC.

+ Trường hợp 2: Xét M khác C và N khác C thì I khác D và B. Khi đó giả sử IA không vuông góc với AC, từ đó ta được

$$\widehat{IAC} \neq 90^\circ \text{ suy ra } \cos \widehat{IAC} \neq 0$$

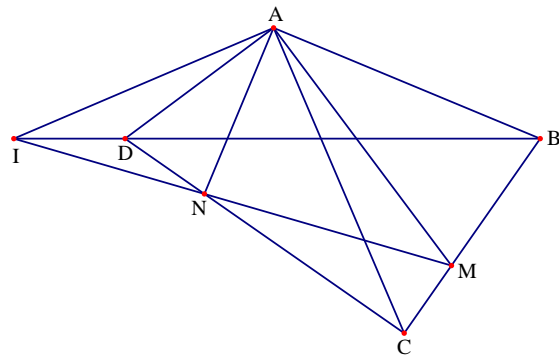
Áp dụng định lí Menelaus cho ΔBCD với ba điểm M, N, I thẳng hàng ta được

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{ID}{IB} = 1.$$

$$\text{Từ đó } \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} \cdot \frac{S_{ANC}}{S_{AND}} \cdot \frac{S_{AID}}{S_{AIB}} = 1 \text{ hay}$$

$$\frac{\frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin \widehat{MAB}}{\frac{1}{2} AC \cdot AM \cdot \sin \widehat{MAC}} \cdot \frac{\frac{1}{2} AC \cdot AN \cdot \sin \widehat{NAC}}{\frac{1}{2} AD \cdot AN \cdot \sin \widehat{NAD}} \cdot \frac{\frac{1}{2} AD \cdot AI \cdot \sin \widehat{IAD}}{\frac{1}{2} AB \cdot AI \cdot \sin \widehat{IAB}} = 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{NAC}}{\sin \widehat{NAD}} \cdot \frac{\sin \widehat{IAD}}{\sin \widehat{IAB}} = 1.$$



$$\text{Ta lại có } \begin{cases} \widehat{MAD} = \widehat{NAD} + \widehat{MAN} = 90^\circ \\ \widehat{NAB} = \widehat{MAB} + \widehat{MAN} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAD} \Rightarrow \sin \widehat{MAB} = \sin \widehat{NAD}$$

Do đó từ hệ thức $\frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{NAC}}{\sin \widehat{NAD}} \cdot \frac{\sin \widehat{IAD}}{\sin \widehat{IAB}} = 1$ ta thu được

$$\sin \widehat{NAC} \cdot \sin \widehat{IAD} = \sin \widehat{MAC} \cdot \sin \widehat{IAB}$$

Mà ta lại có $\widehat{MAC} + \widehat{DAC} = \widehat{MAD} = 90^\circ$ và $\widehat{IAB} = \widehat{IAN} + \widehat{NAB} = \widehat{IAN} + 90^\circ$

Từ đó ta được

$$\sin \widehat{NAC} \cdot \sin \widehat{IAD} = \cos \widehat{DAC} \cdot \cos \widehat{IAN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos(\widehat{NAC} - \widehat{IAD}) \cdot \cos(\widehat{NAC} + \widehat{IAD}) = \cos(\widehat{NAD} + \widehat{NAC}) \cdot \cos(\widehat{IAD} + \widehat{NAD})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos(\widehat{NAC} - \widehat{IAD}) \cdot \cos(\widehat{NAC} + \widehat{IAD}) = \frac{1}{2} [\cos(2\widehat{NAC} + \widehat{NAC} - \widehat{IAD}) - \cos(\widehat{NAC} - \widehat{IAD})]$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{NAC} + \widehat{IAD}) + \cos(2\widehat{NAC} + \widehat{NAC} + \widehat{IAD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{NAC} + \widehat{IAD} + \widehat{NAC}) \cdot \cos \widehat{NAD} = 0 \Leftrightarrow \cos \widehat{IAC} = 0$$

Điều này mâu thuẫn với $\cos \widehat{IAC} \neq 0$. Từ đó ta suy ra $\widehat{IAC} = 90^\circ$ hay IA vuông góc với AC.

Bài 13.

Ta có $\widehat{MDN} = 45^\circ$ nên ta được

$$\widehat{MDN} = \widehat{MAD} + \widehat{NDC} = 45^\circ$$

Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho

$$CK = AM$$

Vì $AD = DC$ và $\widehat{DAM} = \widehat{DCK} = 90^\circ$ nên ta được

$$\triangle DAM = \triangle DCK$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} DK = DM \\ \widehat{KDC} = \widehat{MDA} \Rightarrow \widehat{KDN} = \widehat{MDN} = 45^\circ \end{cases}$$

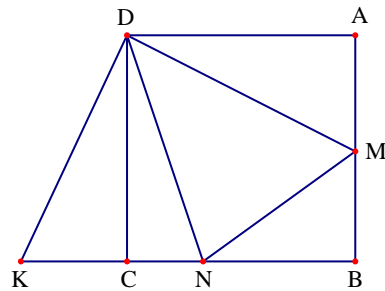
$$\text{Xét hai tam giác KDN và MDN có } \begin{cases} DK = DM \\ \widehat{KDN} = \widehat{MDN} = 45^\circ \Rightarrow \triangle KDN = \triangle MDN \\ DN \text{ chung} \end{cases}$$

Do đó ta được $KN = MN \Rightarrow MN + BM + BN = 2AB = 2a$ không đổi.

Đặt $MN = x$; $MB = y$; $BN = z$.

Áp dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ và định lí Pitago cho tam giác BMN ta được

$$2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2 \Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow \sqrt{2}x \geq 2a - x \Rightarrow x \geq \frac{2a}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow x \geq (2\sqrt{2} - 2)a$$



Vậy ta có $\text{Min}_{MN} = (2\sqrt{2} - 2)a$, đạt được tại $y = z = \frac{x}{\sqrt{2}} = a(2 - \sqrt{2})$. Khi đó DM, DN theo thứ tự là phân giác của góc \widehat{ADB} và góc \widehat{CDB}

Bài 14.

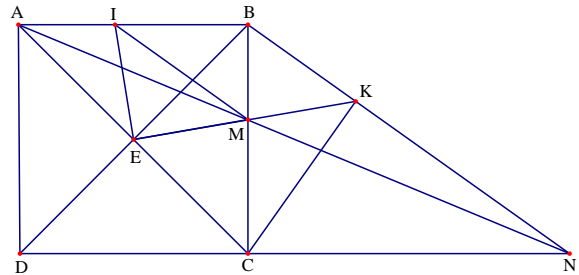
a) Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho IB = CM.

Ta có $\triangle IBE = \triangle MCE$ (c.g.c).

Suy ra $EI = EM$, $\widehat{MEC} = \widehat{BEI} \Rightarrow \triangle MEI$

vuông cân tại E. Suy ra $\widehat{EMI} = 45^\circ = \widehat{BCE}$

Mặt khác $\frac{IB}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AN}$ suy ra $IM \parallel BN$



$\widehat{BCE} = \widehat{EMI} = \widehat{BKE}$ do đó tứ giác BECK nội tiếp $\widehat{BEC} + \widehat{BKC} = 180^\circ$

Lại có: $\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BKC} = 90^\circ$. Vậy $CK \perp BN$

b) Vì $OA = \sqrt{2}$, $OB = OC = 1$ và $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ suy

ra OBAC là hình vuông

Trên cung nhỏ BC lấy điểm M sao cho

$\widehat{DOM} = \widehat{DOB} \Rightarrow \widehat{MOE} = \widehat{COE}$

Suy ra $\triangle MOD = \triangle BOD$ do đó ta được $\widehat{DME} = 90^\circ$

$\triangle MOE = \triangle COE$ do đó ta được $\widehat{EMO} = 90^\circ$

Suy ra D, M, E thẳng hàng, do đó DE là tiếp tuyến của (O).

Vì DE là tiếp tuyến của (O) suy ra $DM = DB$, $EM = EC$

Ta có $DE < AE + AD \Rightarrow 2DE < AD + AE + BD + CE = 2$ nên ta được $DE < 1$

Đặt $DM = x$, $EM = y$, khi đó ta có

$$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow 1 - (x+y) = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

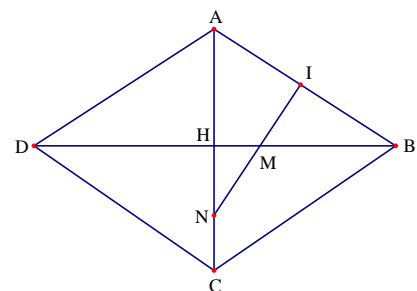
Suy ra $DE^2 + 4.DE - 4 \geq 0 \Leftrightarrow DE \geq 2\sqrt{2} - 2$. Vậy $2\sqrt{2} - 2 \leq DE < 1$

Bài 15.

a) Qua trung điểm I của AB, dựng đường vuông góc với AB cắt BD và AC lần lượt tại M và N. Khi đó ta được

$$MA = MB = a; NA = NB = b$$

Ta có $\triangle TAN \sim \triangle IMB$ nên ta có $\frac{IN}{IB} = \frac{NA}{MB}$, mà $IA = IB$



nên ta được $\frac{IN}{IB} = \frac{NA}{MB} = \frac{b}{a}$.

Ta có $\triangle HAB \sim \triangle IAN$ suy ra $\frac{HA}{HB} = \frac{IA}{IN} = \frac{a}{b}$

b) Vì $\frac{IN}{IA} = \frac{b}{a}$, suy ra $IN = \frac{b}{a} \cdot IA$, mà $IA^2 + IN^2 = NA^2$, do đó ta được $IA^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = b^2$.

Suy ra $IA = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $IN = \frac{b}{a} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $AB = 2 \cdot IA = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Mà ta có $\triangle HAB \sim \triangle IAN$ nên ta được $AH = \frac{AI \cdot AB}{AN} = \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}$.

Tương tự ta được $BH = \frac{NI \cdot AB}{AN} = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}$

Do vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2AH \cdot AB = \frac{8a^3b^3}{(a^2 + b^2)^2}$ (đvdt)

Bài 16.

Trong nửa mặt phẳng bờ AD lấy điểm E sao cho

$$AE = AM \text{ và } \widehat{DAE} = \widehat{BAM}.$$

Ta được $\triangle ADE = \triangle ABM$ suy ra $DE = BM$; $\widehat{ADE} = \widehat{ABM}$

Để thấy tứ giác ABCD là hình thoi nên $\widehat{ADN} = \widehat{ABM}$

suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ADN}$. Ta có $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$ do đó ta được

$$\widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{NAD} = \widehat{DAE} + \widehat{NAD} = \widehat{ADN}$$

Mặt khác $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}$; $NE = NM$

Suy ra $\triangle ANM = \triangle ANE \Rightarrow NE = NM$. Ta có $2 = CM + CN + MN = CM + CN + NE$

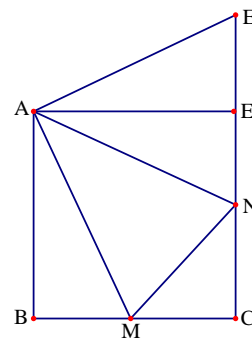
Mà $2 = CD + CB = CM + MB + CN + ND = CM + DE + CN + ND$

Suy ra $CM + CN + NE = CM + DE + CN + ND \Rightarrow NE = ND + ED$, do đó N thuộc DE (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ADN} = 90^\circ$. Do đó hình thoi ABCD là hình vuông.

Vậy các góc của hình thoi đều vuông

Bài 17.



Qua G vẽ đường thẳng song song với AC cắt AD tại H.

Áp dụng định lí Talets cho các tam giác ta được

$$\frac{AH}{DH} = \frac{CG}{DG} = \frac{CE}{BE} = \frac{AF}{BF}$$

Trong tam giác ABD có $\frac{AH}{DH} = \frac{AF}{BF}$ nên ta được HF song song với BD

Do đó ta được HF//GE và HG//EF nên tứ giác EGHF là hình bình hành.

Từ đó ta được $\widehat{GEF} = \widehat{GHF} = \widehat{AMD} = 120^\circ$

Gọi S là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác

HGF với AD (S khác H). Khi đó ta có $\widehat{GSF} = \widehat{GHF} = 120^\circ$.

Do đó suy ra

$$\widehat{SFG} = \widehat{DHG} = \widehat{DAC} = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$$\widehat{SGF} = \widehat{SHF} = \widehat{ADM} = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

Tam giác SFG có $\widehat{SFG} = \widehat{SGF} = 30^\circ$ nên cân tại S, suy ra $\widehat{GSF} = 120^\circ$ và $SG = SF$

+ Nếu $SE > SF = SG$ thì ta được $\widehat{SEF} > \widehat{SFE}$ và $\widehat{SEG} > \widehat{SGE}$ nên ta được $\widehat{GEF} > 120^\circ$

Điều này vô lí vì $\widehat{GEF} = 120^\circ$

+ Nếu $SE < SF = SG$ thì ta được $\widehat{SEF} < \widehat{SFE}$ và $\widehat{SEG} < \widehat{SGE}$ nên ta được $\widehat{GEF} < 120^\circ$

Điều này vô lí vì $\widehat{GEF} = 120^\circ$. Như vậy ta được $SE = SF = SG$, điều này có nghĩa S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFG nằm trên AD.

Bài 18. Trước hết ta phát biểu bổ đề: Trong tứ giác ABCD, thì hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (Bổ đề chính là nội dung ví dụ 1)

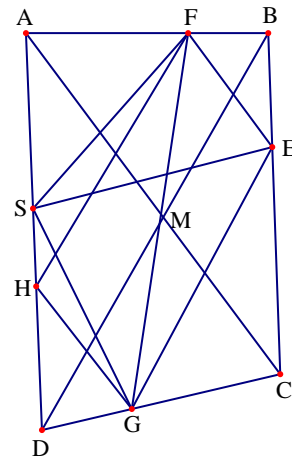
Đặt $AB = x$; $BC = y$. Theo bài ra ta có $DF = CE = CD = x$ và $CH = CB = y$.

Dễ thấy tứ giác CDFE là hình vuông nên $EF = x$. Sử dụng định lý Pytago ta có :

$$AH^2 + EF^2 = (AD^2 + DH^2) + EF^2 = y^2 + (x+y)^2 + x^2 \Leftrightarrow AH^2 + EF^2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$\text{Do đó ta được } AF^2 + HE^2 = (AD + DF)^2 + (CH^2 + CE^2) = (y+x)^2 + y^2 + x^2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

Từ suy ra $AH^2 + EF^2 = AF^2 + HE^2$. Bài toán bổ đề ta được $AE \perp FH$.



Bài 19. Trước hết ta phát biểu và không chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC không cân tại A có đường cao AD (D thuộc cạnh BC). Điểm H thuộc đoạn thẳng AD thỏa mãn điều kiện $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$. Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Trả lại bài toán: Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu $MA = MD$, khi đó tam giác AMD cân tại M nên ta được

$$\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 50^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{DAB} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$. Từ đó suy ra hình bình hành ABCD có một góc vuông nên ABCD là hình chữ nhật.

+ Trường hợp 2: Nếu $MA \neq MD$, khi đó gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Vì $\widehat{MAB} = 40^\circ < 65^\circ = \widehat{MCD}$ nên ta được $\widehat{MAB} < \widehat{CAB} = \widehat{ACD} < \widehat{MCD}$.

Từ đó suy ra điểm M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có điểm M nằm trong tam giác BCD. Từ đó suy ra điểm M nằm trong tam giác OBC.

Gọi N là điểm đối xứng với M qua O. suy ra điểm M nằm trên tam giác AOD. Để dạng chứng minh được các tứ giác AMCN, BMDN là các hình bình hành. Mặt khác

$$\widehat{MCN} = \widehat{MCD} - \widehat{MAB} = 65^\circ - 40^\circ = 25^\circ$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\widehat{MDN} = 50^\circ - 25^\circ = 25^\circ$. Do đó suy ra $\widehat{MCN} = \widehat{MDN}$ nên tứ giác

CMDN nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được $\widehat{NMD} = \widehat{NCD} = \widehat{MAB} = 40^\circ$, suy ra

$$\widehat{NMD} + \widehat{MDA} = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$$

Do đó MN vuông góc với AD. Mà ta lại có $\widehat{MAN} = \widehat{MCN} = \widehat{MDA}$ và $MA \neq MD$. Do đó theo bổ đề trên ta được N là trực tâm tam giác MAD. Từ đó suy ra

$$\widehat{NAD} = 90^\circ - \widehat{MDA} = 40^\circ.$$

Do đó ta được $\widehat{BAD} = \widehat{NAD} + \widehat{NAB} = \widehat{NAD} + \widehat{MCD} = 40^\circ + 65^\circ = 105^\circ$.

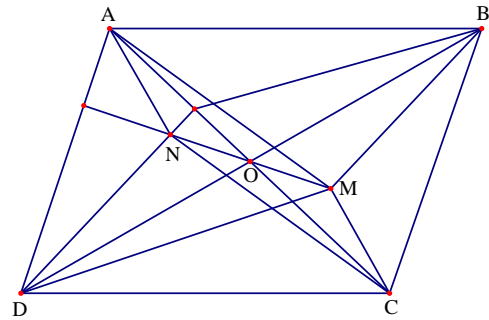
Suy ra $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Vậy hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 105^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{D} = 75^\circ$.

Tóm lại: + Nếu $MA = MD$ thì hình bình hành ABCD có bốn góc vuông

+ Nếu $MA \neq MD$ thì hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 105^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{D} = 75^\circ$.

Bài 20. Đặt $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \alpha$; $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \delta$; $\widehat{ADB} = \varphi$; $\widehat{EBC} = \beta$; $\widehat{BED} = \gamma$



Nếu $\alpha > 90^\circ$, khi đó chỉ có

$AB = AD, BC = CE$, mâu thuẫn với giả thiết

E nằm trên đoạn CD .

Do đó $\alpha < 90^\circ$, khi đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu $BC = CE$, khi đó ta được

$$\widehat{CBE} = \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Lại có $\widehat{BED} = \gamma = 180^\circ - \beta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} > 90^\circ$

Do đó ta được $EB = ED$ nên tam giác BED cân tại E

Suy ra $\widehat{EDB} = \widehat{EBD} = \delta = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$

Do đó ta được $\varphi = \frac{3}{4}(180^\circ - \alpha)$

- Nếu $\alpha = \delta$ thì ta được $\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ hay $\widehat{BAD} = 36^\circ$

- Nếu $\alpha = \varphi$ thì ta được $\alpha = \frac{3 \cdot 180^\circ}{7}$ hay $\widehat{BAD} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{7}$

+ Trường hợp 2: Nếu $BC = BE$, khi đó ta được $\gamma = 180^\circ - \alpha > 90^\circ$ do đó $EB = ED$

Suy ra tam giác BDE cân tại E nên ta được $\widehat{BDE} = \delta = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ và $\varphi = \beta + \delta > \delta$

Ta có tam giác ABD cân và $\alpha \neq \delta$ nên ta được $\alpha = \varphi$

Do đó $180^\circ = \alpha + \varphi + \delta = \frac{5}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ$ hay $\widehat{BAD} = 72^\circ$

+ Trường hợp 3: Nếu $EC = EB$, khi đó ta được $\alpha = \beta, \gamma = 2\alpha$

- Nếu $\delta = \varphi = 2\alpha, \varphi > \beta = \alpha$ ta được $\varphi = \delta = 2\alpha$

Do đó ta được $180^\circ = \alpha + \varphi + \delta = 5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ hay $\widehat{BAD} = 36^\circ$

- Nếu $\delta = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$ suy ra $\varphi = \beta + \delta = \alpha + \delta = 90^\circ$

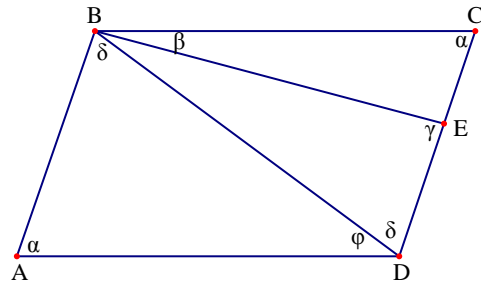
Do đó $\alpha = \delta = 45^\circ$ hay $\widehat{BAD} = 45^\circ$

- Nếu $\gamma = 2\alpha$ thì $\varphi = 3\alpha$ do đó ta được $\alpha = \delta$ hoặc $\delta = \varphi$

Do đó ta được $\alpha = 36^\circ$ hoặc $3\alpha = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7}$

Hay $\widehat{BAD} = 36^\circ$ hoặc $\widehat{BAD} = \frac{180^\circ}{7}$

Vậy ta được $\widehat{BAD} = \alpha \in \left\{ \frac{180^\circ}{7}; 36^\circ; 45^\circ; 72^\circ; \frac{3 \cdot 180^\circ}{7} \right\}$



Bài 21. Giả sử tìm được điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AM và từ D kẻ đường thẳng song song với BM, hai đường thẳng này cắt nhau tại N. Dễ dàng nhận thấy hai tam giác AMB và CND đồng dạng.

Do đó ta được $\widehat{AMB} = \widehat{CND}$ mà lại có $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ nên ta được $\widehat{CND} = \widehat{CMD}$

Suy ra bốn điểm M, N, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Với bốn điểm A, B, C, D, khi đó ta có

$AB = CD$ hoặc $AB \neq CD$, do đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Khi $AB = CD$, ta có

$\triangle AMB = \triangle CND$ nên ta được $MB = ND$

Do đó tứ giác MNDB là hình bình hành, suy ra $NM \parallel BD$

Từ đó ta được MNDC là hình thang mà nội tiếp được nên MNDC là hình thang cân.

Suy ra $MB = MC$. Vậy điểm M cần tìm nằm trên đường trung trực của BC.

+ Trường hợp 2: Khi $AB \neq CD$.

Gọi E là giao điểm của MN và đường thẳng AB, khi đó theo định lý Talet ta có

$$\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{NC}$$

Mà ta lại có $\widehat{CND} = \widehat{CMD}$ nên

$$\triangle AMB \sim \triangle CND$$

Từ đó suy ra $\frac{AM}{NC} = \frac{AB}{CD}$, do đó ta có

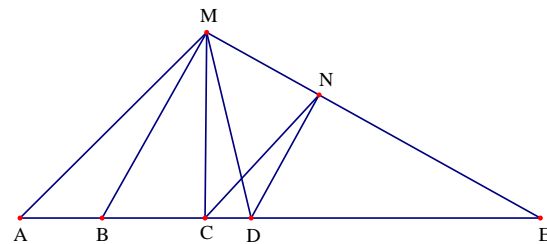
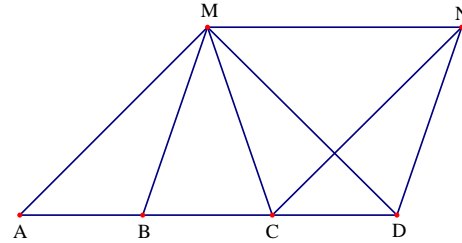
$$\frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CD}$$

Mặt khác do tứ giác MNDC nội tiếp được nên ta có $\widehat{NMD} = \widehat{NCD} = \widehat{MAB}$

Do đó ta có $\triangle EMD \sim \triangle EAM$, suy ra $\frac{EM}{EA} = \frac{ED}{EM} \Rightarrow EM^2 = EA \cdot ED$. Từ đó ta xác định được

điểm M.

Bài 22.



Qua điểm A kẻ đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng đó cắt CD tại K. Vẽ $AH \perp MN$ tại H.

Xét hai tam giác vuông AMB và ADK có

$$AB = AD; \widehat{BAM} = \widehat{DAK} \text{ nên } \triangle ABM = \triangle ADK$$

Suy ra $BM = DK; AM = AK$.

Theo giả thiết $MC + CN + MN = 2a$ ta được

$$MN = BM + DN = DK + ND = KN$$

Xét hai tam giác AMN và AKN có AN chung, $AM = AK$ và $MN = KN$

Suy ra $\triangle AMN = \triangle AKN$ nên ta được $\widehat{AKN} = \widehat{AMN} = \widehat{AMB}$ và $\widehat{AND} = \widehat{ANH}$

Xét hai tam giác vuông AND và AHN có AN chung và $\widehat{AND} = \widehat{ANH}$

Suy ra $\triangle AND = \triangle ANH$ nên ta được $DN = HN; AD = AH = AB$

Do đó ta được $HM = MN - HN = DN + MB - DN = MB$

Như vậy AM là đường trung trực của HB, nên ta được $PB = PH$ và $\widehat{AHP} = \widehat{ABP} = 45^\circ$.

Hoàn toàn tương tự ta được $QD = QH$ và $\widehat{QHN} = \widehat{QDN} = 45^\circ$

Từ đó ta được $\widehat{QHP} = 180^\circ - \widehat{PHM} - \widehat{QHN} = 90^\circ$

Do đó tam giác QHP vuông tại H nên ta có $PQ^2 = QH^2 + HP^2$

Do đó ta được $PQ^2 = DQ^2 + PB^2$ hay các đoạn thẳng BP, PQ, QD là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 23. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác CMN và BCD.

Để thấy $\widehat{BAM} = \widehat{BMA} = \widehat{MAD}$ nên tam giác ABM cân tại B, suy ra $AB = BM$ hay $BM = CD$

Lại có $\widehat{NMC} = \widehat{CNM} = \widehat{BAM}$ nên tam giác CMN cân tại C, suy ra $CM = CN$.

Mặt khác ta có $IM = IN$ nên CI là đường trung trực của đoạn thẳng MN, do đó CI

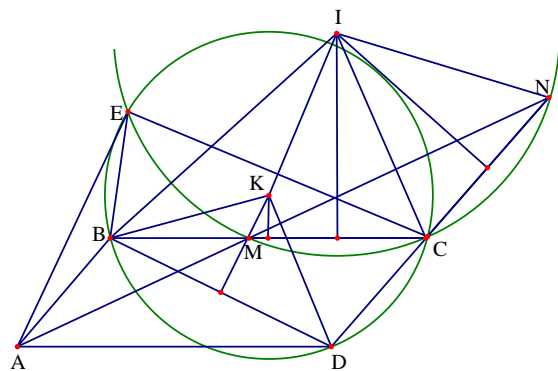
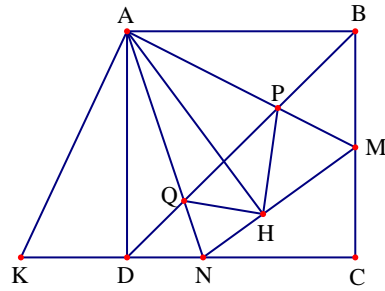
cũng là phân giác của góc \widehat{MCN} nên ta

được $\widehat{ICM} = \widehat{ICN}$. Vì $IC = IM$ nên tam

giác CIM cân tại I, suy ra $\widehat{ICM} = \widehat{IMC}$

Do đó ta được $\widehat{IMC} = \widehat{ICN}$ nên

$$\widehat{BMI} = \widehat{DCI}.$$



Từ đó ta được $\triangle BMI = \triangle DCI$, suy ra $IB = ID$. Đường tròn (K) đi qua B và D nên ta được $KB = KD$, suy ra IK là đường trung trực của đoạn thẳng BD. Từ đó $IK \perp BD$. Ta lại có CE là dây cung chung của hai đường tròn (I) và (K) nên ta được $CE \perp IK$. Từ đó ta được BD song song với CE nên tứ giác BDCE là hình thang cân. Suy ra $BC = DE$, $BE = CD$. Do ABCD là hình bình hành nên $BC = AD$, $CA = AB$

Từ đó suy ra $AD = DE$, $AB = BE$ nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng AE. Suy ra $BD \perp AE$, mà ta lại có $BD \parallel CE$ nên ta được $AE \perp CE$.

Bài 24.

Gọi $EF = a$; $FG = b$; $GH = c$; $HI = d$; $IJ = e$;

$JK = f$; $KM = g$; $ME = h$ (với a, b, c, d, e, f, g, h là các số hữu tỉ dương). Do các góc của hình 8 cạnh bằng nhau nên mỗi góc trong của hình 8 cạnh có số đo là: $\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$. Suy ra mỗi

góc ngoài của hình 8 cạnh đó là $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

Do đó các tam giác MAE; FBG; CIH; DKJ là các tam giác vuông cân.

Suy ra $MA = AE = \frac{h}{\sqrt{2}}$; $BF = BG = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $CH = CI = \frac{d}{\sqrt{2}}$; $DK = DJ = \frac{f}{\sqrt{2}}$

Ta có $AB = CD$ nên $\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (e-a)\sqrt{2} = h + b - f - d$

Nếu $e - a \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{h + b - f - d}{e - a} \in \mathbb{Q}$ (điều này vô lý do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ)

Vậy $e - a = 0 \Leftrightarrow e = a$ hay $EF = IJ$ (đpcm).

- **Bài 25.** Qua A dựng đường thẳng vuông góc Ax, cắt CD tại K. Ta có :

$$\widehat{DAK} = \widehat{DAB} - (\widehat{KAM} + \widehat{MAB}) = 15^\circ$$

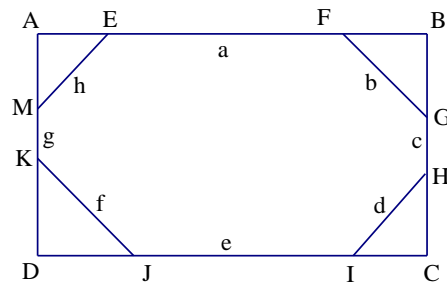
- Xét hai tam giác ADK và ABM có $DA = AB$ (cạnh hình thoi);

$$\widehat{ADK} = \widehat{ABM} = 60^\circ \left(\widehat{DAB} = 120^\circ \right);$$

- $\widehat{DAK} = \widehat{BAM} = 15^\circ \Rightarrow \triangle ADK = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = AM$

- Gọi AH là đường cao tam giác AKN vuông tại A, ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AN^2}$ (1)

- Mà $AH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$; $AK = AM$. Ta có hệ thức (1) tương đương với



$$\frac{1}{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4}{3AB^2} \Leftrightarrow T = AB^2 \left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \right) = \frac{4}{3}$$

Bài 26. Giả sử hình chữ nhật có độ dài các cạnh được

đặt như hình vẽ. Với $0 \leq a, b, e, f \leq 4$ và

$$a + b = e + f = 4$$

$$0 \leq c, d, g, h \leq 3 \text{ và } c + d = g + h = 3.$$

Ta có

$$x^2 = h^2 + a^2; y^2 = b^2 + c^2; z^2 = d^2 + e^2; t^2 = f^2 + g^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

(*)

+ Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 50$.

Vì $a, b \geq 0$ nên $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 = 16$.

Tương tự ta được $c^2 + d^2 \leq 9; e^2 + f^2 \leq 16; g^2 + h^2 \leq 9$.

Từ (*) suy ra $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 16 + 9 + 16 + 9 = 50$ (1)

+ Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 25$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2 = 8$

Tương tự $c^2 + d^2 \geq \frac{9}{2}; e^2 + f^2 \geq 8; g^2 + h^2 \geq \frac{9}{2}$.

Từ (*) suy ra $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 8 + \frac{9}{2} + 8 + \frac{9}{2} = 25$ (2)

Bài 27. Trong tam giác ABD có $MQ \parallel BD$ nên ta ta được

$$\frac{MQ}{BD} = \frac{AM}{AB} = x \Rightarrow MQ = x \cdot BD$$

Trong tam giác ABC có $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB}$ suy ra $MN \parallel AC$

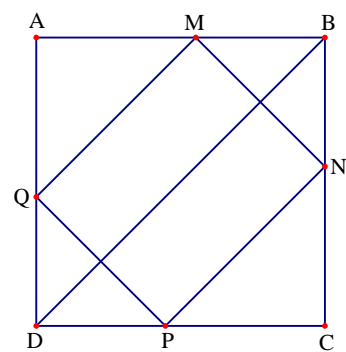
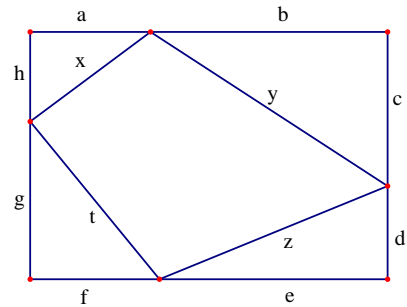
$$\Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} = 1 - \frac{AM}{AB} = 1 - x \Rightarrow MN = (1 - x)AC$$

Mà ta có $AC \cdot BD = 2S_{ABCD} = 2a^2$, nên ta được

$$S_{MNPQ} = MQ \cdot MN = x \cdot BD \cdot (1 - x)AC = 2a^2 x(1 - x)$$

Ta lại có $2a^2 x(1 - x) = -2a^2(x^2 - x) = -2a^2\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -2a^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{2}a^2$

Do đó ta được $S_{MNPQ} \leq \frac{a^2}{2}$, hay diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất là $\frac{a^2}{2}$, xảy ra tại $x = \frac{1}{2}$.



Bài 28. Vì tứ giác ABCD có đường tròn nội tiếp nên $AB + CD = AD + BC$.

Mà $AB = AD$ nên ta được $CD = CB$. Do đó

$$\Delta ABC = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}.$$

Mặt khác tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

Do đó ta suy ra được $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.

Suy ra AC là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác nên ta được $AC = 2$.

Đặt $AB = AD = x; BC = CD = y$ nên ta có $x^2 + y^2 = 4$

Gọi S, p, r lần lượt là diện tích, nửa chu vi bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Khi đó ta có $S = S_{ABC} + S_{ACD} = 2S_{ABC} = xy$. Vì $xy = \sqrt{x^2 y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = 2 \Rightarrow S \leq 2$, dấu bằng

xảy ra khi ABCD là hình vuông. Ta lại có $S = pr \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{S^2}{(x+y)^2} = \frac{S^2}{4+2S}$

Ta cần chứng minh $r \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow r^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{S^2}{4+2S} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S^2 - S - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq S \leq 2$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Do đó ta được $r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 29.

a) Ta có $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ \widehat{BAH}), $AB = AD$ và $\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ$

Từ đó ta được $\Delta ABF = \Delta DAM$. Suy ra

$$AF = DM \Rightarrow AE = DM$$

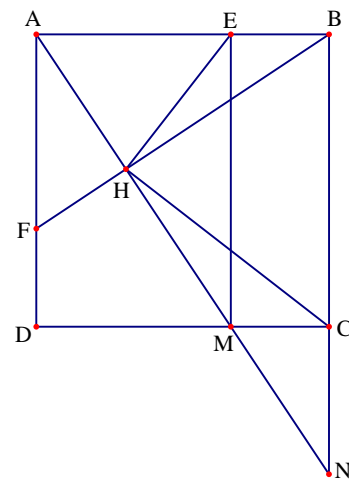
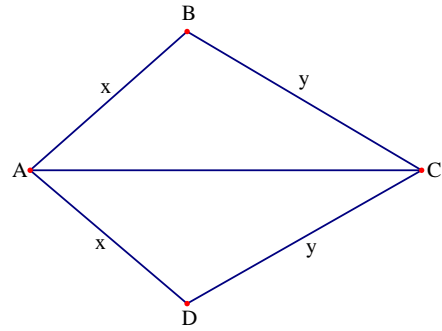
Từ giác AEND có $AE \parallel DM$ và $AE = DM$ nên AEMD là hình bình hành

Mặt khác ta có $\widehat{DAE} = 90^\circ$. Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

b) Ta có $\Delta ABH \sim \Delta FAH$ nên ta được $\frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay

$$\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \quad (\text{do } AB = BC, AE = AF)$$

Lại có $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ \widehat{ABH}). Từ đó ta được $\Delta CBH \sim \Delta EAH$



Suy ra $\frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2$, mà ta có $\frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4 \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4$ nên $BC^2 = (2AE)^2$

Từ đó ta được $BC = 2AE$ nên E là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD

Do đó $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF$.

c) Do AD song song với CN nên định lí Talets ta có $\frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$

Lại có MC song song với AB nên theo định lí Talets ta có $\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}$ hay

$$\frac{AD}{MN} = \frac{MC}{MN}$$

Do đó ta được $\left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = 1$

Suy ra $\left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1$ hay $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$

Bài 30.

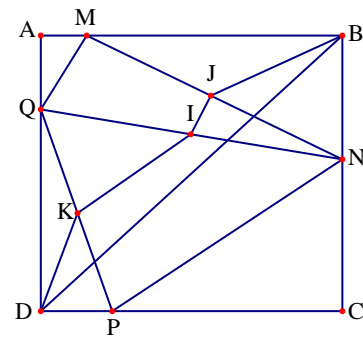
a) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của

$$QN, MN, PQ. \text{ Khi đó: } BJ = \frac{MN}{2}; DK = \frac{PQ}{2}$$

Và $IJ = \frac{QM}{2}; IK = \frac{PN}{2}$. Vì $BD \leq BJ + JI + IK + KD$.

Do đó:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{AC}{2} \cdot BD \leq \frac{AC}{2} (BJ + JI + IK + KD) \\ &= \frac{AC}{4} (MN + NP + PQ + QM) \end{aligned}$$



b) Chu vi tứ giác MNPQ là:

$$MN + NP + PQ + QM = 2BJ + 2IK + 2DK + 2IJ = 2(BJ + JI + IK + KD) \geq 2BD$$

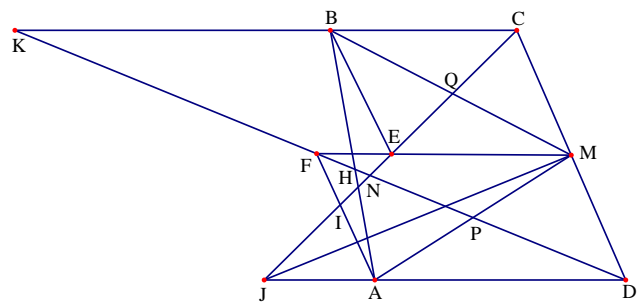
Dấu bằng xảy ra khi đường gấp khúc trùng với BD, tức là $MQ \parallel NP$, $MN \parallel PQ$, $MN = PQ$ (vì cùng là cạnh huyền 2 tam giác vuông cân bằng nhau), lúc đó MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 31.

Đặt $BC = a$; $AD = b$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CQ tại E và cắt DK tại F.

Ta có tứ giác ADMF là hình bình hành và tứ giác BCME cũng là hình bình hành.

Do đó ta $DJ = 2ME = 2a$; $CK = 2MF = 2b$



Để điểm N nằm trong tam giác AMB thì N phải thuộc đoạn PH và N thuộc đoạn IQ.

Hay ta cần có $\frac{DP}{DN} \leq 1 \leq \frac{DH}{DN}$ và $\frac{CQ}{CN} \leq 1 \leq \frac{CI}{CN}$

Do $\frac{DN}{NK} = \frac{DJ}{CK}$ nên ta suy ra $\frac{DP}{DN} = \frac{DP}{DK} \cdot \frac{DN}{DK} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2a}{2a+2b} = \frac{a+b}{4a}$

Từ đó ta được $\frac{DP}{DN} \leq 1$ khi và chỉ khi $a \geq \frac{b}{3}$

Lại có $\frac{DH}{DN} = \frac{DH}{DK} \cdot \frac{DN}{DK} = \frac{b}{3b-a} \cdot \frac{2a}{2a+2b} = \frac{b(a+b)}{a(3b-a)}$

Từ đó ta được $\frac{DH}{DN} \geq 1$ khi và chỉ khi $ab + b^2 \geq 3ab - a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \geq 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Vậy để $\frac{DP}{DN} \leq 1 \leq \frac{DH}{DN}$ thì ta cần có $a \geq \frac{b}{3}$. Hoàn toàn tương tự thì để $\frac{CQ}{CN} \leq 1 \leq \frac{CI}{CN}$ ta cần có $b \geq \frac{a}{3}$.

Như vậy điểm N nằm trong tam giác AMB khi và chỉ khi $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3$ hay $\frac{1}{3} \leq \frac{BC}{AD} \leq 3$

Bài 32.

+ Trước hết ta chứng minh $AB \cdot DE = BC \cdot CE$

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$, do đó ta được

$$\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$$

Do đó ta được $\widehat{ACB} = \widehat{ADC}$ nên ta được

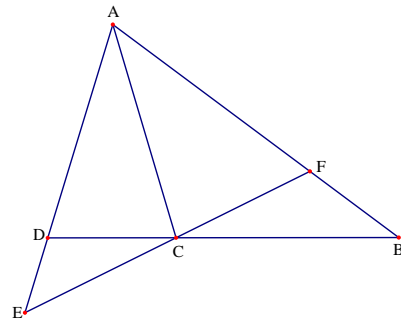
$$\widehat{EDC} = \widehat{ACE}$$

Do đó hai tam giác EAC và ECD đồng dạng với

nhau, suy ra $\frac{EA}{EC} = \frac{EC}{ED}$. Mà ta lại có $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$

nên AC là đường phân giác của tam giác ABE

Do đó ta được $\frac{EC}{ED} = \frac{AB}{BC}$. Suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{EC}{ED}$ suy ra $EC \cdot BC = ED \cdot AB$



+ Chứng minh $2AC^2 < AD.AF + AB.AE$

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Tam giác MNP có MI là đường phân giác trong, khi đó ta luôn có $MI^2 < MN.MP$.

Thật vậy, trên tia phân giác MI và bên ngoài tam giác MNP lấy điểm K sao cho $\widehat{MNI} = \widehat{MKP}$. Xét hai tam giác $\triangle MNI$ và $\triangle MKP$ có $\widehat{NMI} = \widehat{KMP}$ và $\widehat{MNI} = \widehat{MKP}$

Suy ra $\triangle MNI \sim \triangle MKP$ nên

$$\frac{MN}{MI} = \frac{MK}{MP} \Rightarrow MN.MP = MK.MI$$

Do K nằm ngoài tam giác nên ta có $MI < MK$. Từ đó ta được $MI^2 < MN.MP = MK.MI$.

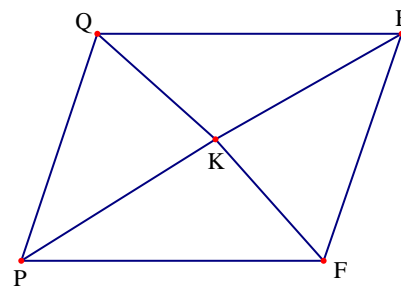
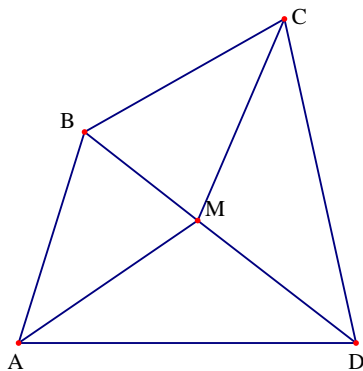
Áp dụng bổ đề trên cho tam giác ADF có AC là đường phân giác, ta có $AC^2 < AD.AF$

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác ABE có AC là đường phân giác, ta có $AC^2 < AB.AE$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $2AC^2 < AD.AF + AB.AE$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 33.



Vẽ tứ giác PQEF và điểm K nằm trong tứ giác sao cho

$$\triangle PKQ = \triangle AMB; \triangle PKF \sim \triangle CMD; \triangle QKE \sim \triangle AMD$$

Khi đó ta được $\widehat{QPK} = \widehat{BAM}$; $\widehat{KPF} = \widehat{MCD}$; $\widehat{QEK} = \widehat{MDA}$; $\widehat{PQK} = \widehat{ABM}$

Và $KM = AM = MC$, $QK = MB$ và $\frac{KE}{MD} = \frac{QK}{MA} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow KE = \frac{MB.MD}{MA}$

Lại có $\frac{KF}{KP} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow KF = \frac{KP.MD}{MC} = MD$. Do đó ta được $\frac{KE}{KF} = \frac{MD.MB}{MA.MD} = \frac{MB}{MA}$

Mà ta lại có $\widehat{FKE} = 360^\circ - \widehat{QKE} - \widehat{QKP} - \widehat{PKF} = 360^\circ - \widehat{AMD} - \widehat{AMB} - \widehat{CMD} = \widehat{BMC}$

Từ đó ta suy ra $\triangle KEF \sim \triangle BMC$ nên ta được $\widehat{KEF} = \widehat{MCB}$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\widehat{QPF} + \widehat{EFP} &= \widehat{QPK} + \widehat{KPF} + \widehat{KFP} + \widehat{KFE} = \widehat{MAB} + \widehat{MCB} + \widehat{KPF} + \widehat{KFP} \\ &= \widehat{CMD} + \widehat{KPF} + \widehat{KFP} = \widehat{PKF} + \widehat{PKF} + \widehat{KFP} = 180^\circ\end{aligned}$$

Do đó ta được $QP // EF$. Chứng minh tương tự ta được

$$\widehat{PQE} + \widehat{QPE} = \widehat{EQK} + \widehat{KQP} + \widehat{KPQ} + \widehat{KPF} = \widehat{QPK} + \widehat{KQP} + \widehat{QKP} = 180^\circ$$

Do đó ta được $QE // PF$. Từ đó ta được $PQEF$ là hình bình hành. Suy ra

$$PQ = AB = EF; \quad QE = PF$$

Vì $\triangle EKF \sim \triangle BMC$ nên $\frac{FE}{KF} = \frac{BC}{MC}$ Suy ra $AB = EF = \frac{BC \cdot KF}{MC} = \frac{BC \cdot MD}{MC} \Rightarrow AB \cdot MC = BC \cdot MD$

Lại có $\triangle QKE \sim \triangle AMD$ nên $\frac{AD}{AM} = \frac{QE}{QK} = \frac{PF}{QK}$ Mà ta có $\triangle PKF \sim \triangle CMD$ nên $\frac{PF}{KF} = \frac{CD}{MD}$ và

$$KF = MD. \text{ Do đó ta được } PF = \frac{AD \cdot QK}{AM} = \frac{CD \cdot KF}{MD} = CD$$

Suy ra $AD \cdot QK = AM \cdot CD$ nên ta được $AD \cdot BM = AM \cdot CD$

Vậy ta được $AB \cdot MC = BC \cdot MD$ và $AD \cdot MB = CD \cdot MA$.

Bài 34.

a) Xét tam giác BIO và CMO có

$$\widehat{IBO} = \widehat{MCO} = 45^\circ, \quad BO = CO \text{ và}$$

$$\widehat{BOI} = \widehat{COM}$$

Suy ra $\triangle BIO = \triangle CMO$ do đó $S_{BIO} = S_{CMO}$

Mà $S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$ nên

$$S_{BMOI} = S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$$

b) Ta có $CM = BI$ nên $BM = AI$

Vì $CN // AB$ nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{MN}$ nên $IM // BN$ hay $IMNB$ là hình thang

Vì $OI = OM$ nên tam giác IOM cân tại O do đó $\widehat{IMO} = \widehat{MIO} = 45^\circ$

Vì $IM // BN$ nên $IM // BK$ suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{IMO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BCO}$

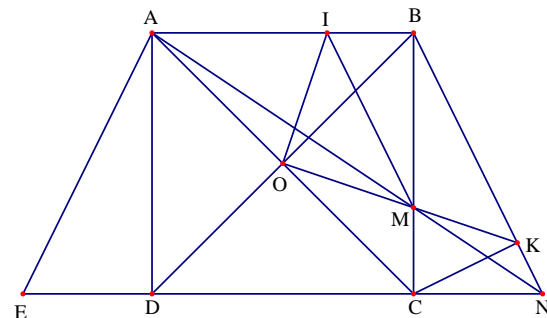
c) Qua A kẻ tia Ax vuông góc AN cắt CD tại E . Chứng minh được

$$\triangle ADE = \triangle ABM \Rightarrow AE = AM$$

Ta có tam giác ANE vuông tại A có AD là đường cao nên

$$S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE \Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ANE ta có $AN^2 + AE^2 = NE^2$



$$\text{Từ đó ta được } AD^2 (AN^2 + AE^2) = AN^2 \cdot AE^2 \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Mà } AE = AM \text{ và } DC = DA \text{ nên ta được } \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Bài 35.

a) Vì ABCD là hình vuông nên ta có $AB \parallel CD$

nên ta được $AB \parallel CN$ và $AB \parallel ND$

Mà ta có $AD = BC$ và $AF = CE$ nên ta được

$$FD = BE \Rightarrow \frac{EC}{BE} = \frac{AF}{FD}$$

Vì $AB \parallel CM$ nên theo định lí Talets ta được

$$\frac{CM}{AB} = \frac{CE}{BE}$$

Vì $AB \parallel DN$ nên theo định lí Talets ta được

$$\frac{AB}{DN} = \frac{AF}{FD}$$

$$\text{Kết hợp các kết quả trên ta được } \frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN} \Rightarrow CM \cdot DN = AB^2 = a^2$$

$$\text{b) Theo câu a ta có } \frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN} \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{AD}{DN}. \text{ Do đó } \triangle CMB \sim \triangle DAN \Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{DAN}$$

Mà ta lại có $\widehat{DAN} + \widehat{AND} = 90^\circ$ nên ta được $\widehat{CMB} + \widehat{AND} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{MKN} = 90^\circ$

$$\text{c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } DN + CM \geq 2\sqrt{DN \cdot CM} = 2\sqrt{a^2} = 2a$$

$$\text{Từ đó ta được } DN + CM + CD \geq 3a \Rightarrow MN \geq 3a$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } DN = CM = a. \text{ Khi đó } \frac{CE}{BE} = \frac{AF}{FD} = \frac{CM}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \text{ hay } \begin{cases} CE = BE \\ AF = FD \end{cases}$$

Vậy khi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD thì MN có độ dài nhỏ nhất là 3a

Bài 36. Bạn đọc tự vẽ hình

a) Vì ABCD là hình thoi nên $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ và $AB = DC$, $BC = AD$

Dễ thấy $\widehat{EBC} = \widehat{BAD}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{CDF}$ nên ta được $\widehat{EBC} = \widehat{CDF}$

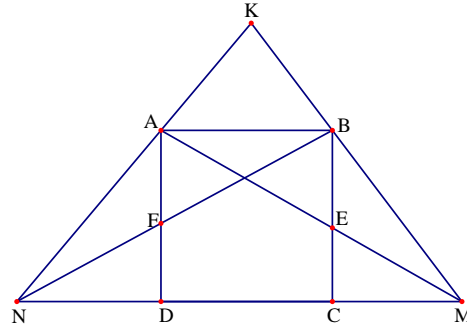
$$\text{Lại có } \widehat{BEC} = \widehat{DCF} \text{ nên suy ra } \triangle EBC \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{EB}{CD} = \frac{BC}{DF} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{AD}{DF}$$

Từ đó ta được $EB \cdot DF = AD \cdot AB$ không đổi. Vậy $BE \cdot DF$ có giá trị không đổi.

b) Vì $AB = AD$ và $\widehat{A} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều, do đó $AB = AD = BD$

$$\text{Mà ta có } \frac{EB}{AB} = \frac{AD}{DF} \text{ nên ta được } \frac{EB}{BD} = \frac{BD}{DF}. \text{ Dễ thấy } \widehat{EBD} = \widehat{BDF} = 120^\circ \text{ nên } \triangle EBD \sim \triangle BDF$$

Do đó ta được $\widehat{EDB} = \widehat{BFD}$. Từ đó suy ra $\widehat{BID} = 120^\circ$



c) Vì $\triangle BEC \sim \triangle CDF$ nên ta được $\frac{S_{BEC}}{S_{DCF}} = \left(\frac{BE}{CD}\right)^2$ Mà $\frac{S_{BEC}}{S_{DCF}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ nên $\frac{BE}{DC} = \frac{1}{2}$.

Mà $DC = AB$ nên $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2BE$. Hai tam giác BEC và ABC có $AB = 2BE$

Nên ta được $S_{ABC} = 2S_{BEC} = 6(\text{cm}^2)$. Vì $\triangle BAC = \triangle DCA \Rightarrow S_{BAC} = S_{DCA} = 6(\text{cm}^2)$

Do đó ta được $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = 6 + 6 = 12(\text{cm}^2)$

Bài 37. Do $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 1 nên

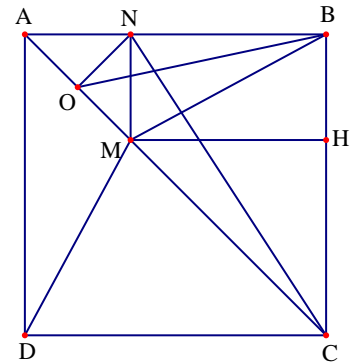
$$AC^2 = BD^2 = 2$$

Do M là điểm nằm trong hình vuông $ABCD$ nên

$$MA + MC \geq AC$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 &= \frac{2MA^2 + 2MC^2}{2} = \frac{(MA + MC)^2 + (MA - MC)^2}{2} \\ &= \frac{(MA + MC)^2}{2} + \frac{(MA - MC)^2}{2} \geq \frac{(MA + MC)^2}{2} \geq \frac{AC^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$



Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $MB^2 + MD^2 \geq 1$

Do đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

b) Kẻ MH vuông góc với BC tại H , khi đó ta được $MH = NB$

Tam giác ANM vuông cân ở N có O là trung điểm của cạnh huyền AM nên $MN^2 = 2ON^2$

Suy ra $\frac{ON^2}{MN^2} = \frac{1}{2}$. Tam giác MHC vuông cân ở H nên $\frac{MH^2}{MC^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NB^2}{MC^2} = \frac{1}{2}$

Từ đó ta được $\frac{ON}{MN} = \frac{NB}{MC}$. Kết hợp với $\widehat{ONB} = \widehat{NMC}$ nên ta được $\triangle ONB \sim \triangle NMC$

Từ đó suy ra $\frac{OB}{NC} = \frac{ON}{MN} \Rightarrow \frac{OB^2}{NC^2} = \frac{ON^2}{MN^2}$. Mà ta lại có $\frac{ON^2}{MN^2} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{OB^2}{NC^2} = \frac{1}{2}$

Do đó ta suy ra được $CN^2 = 2.OB^2$.

Bài 38. Xét ΔACO và ΔBOD có

$$\begin{cases} \widehat{CAO} = \widehat{OBD} = 90^\circ \\ \widehat{AOC} = \widehat{BDO} \end{cases}$$

Suy ra $\Delta ACO \sim \Delta BOD$. Do đó ta được

$$\frac{CO}{OD} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{CO}{OB} = \frac{OD}{BD}$$

Xét ΔOCD và ΔBOD có $\begin{cases} \frac{CO}{OB} = \frac{OD}{BD} \\ \widehat{COD} = \widehat{OBD} = 90^\circ \end{cases}$

Do đó ta được $\Delta OCD \sim \Delta BOD$.

Ta có $\Delta ACO \sim \Delta BOD$ nên $\widehat{ACO} = \widehat{BOD}$

Lại có $\Delta OCD \sim \Delta BOD$ nên ta được $\widehat{DCO} = \widehat{BOD}$.

Do đó $\widehat{ACO} = \widehat{DCO}$

Xét hai tam giác vuông CAO và CIO có $\widehat{ACO} = \widehat{DCO}$ và CO chung nên $\Delta CAO = \Delta CIO$

Từ đó suy ra $CA = CI$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\Delta BDO = \Delta DIO$ nên ta được

$$DB = DI$$

Mặt khác do $\begin{cases} CA \perp AB \\ DB \perp AB \end{cases}$ nên ta có $CA \parallel DB$. Theo định lí Talets ta được $\frac{DK}{AK} = \frac{DB}{CA} = \frac{DI}{CI}$

Từ đó ta có $\frac{DK}{AK} = \frac{DI}{CI}$, suy ra $IK \parallel AC$. Mặt khác $AC \parallel BD$ nên $IK \parallel BD$, suy ra $\widehat{IED} = \widehat{BDE}$

Lại có $\Delta BDO = \Delta DIO$ nên $\widehat{BDE} = \widehat{IDE}$. Do đó $\widehat{IED} = \widehat{IDE}$ suy ra ΔIED cân tại I

Từ đó ta được $IE = ID$ mà $ID = BD$ nên $IE = BD$

Bài 39. Từ giả thiết ta suy ra $\widehat{DBE} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Do đó ta được $\widehat{ABE} + \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

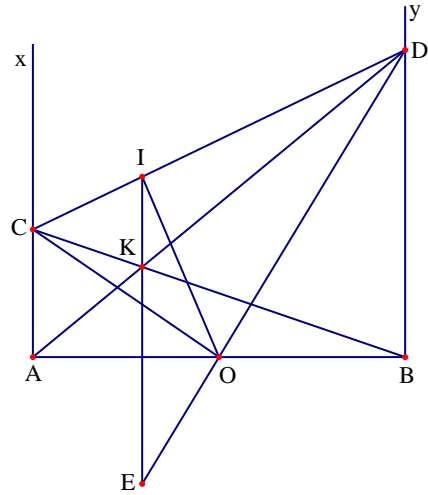
Mà $EA = AB$ nên tam giác ABE cân tại A , suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$

Do đó suy ra $\widehat{ABE} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAE}$. Lại có $CB = CD$ nên ta suy ra được $\widehat{CBD} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BCD}$

Từ đó ta được $90^\circ - \frac{\widehat{EAB}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

Suy ra $\widehat{EAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 360^\circ$ nên $\widehat{CDE} + \widehat{DEA} = 180^\circ$

Từ đó suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{BED} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{CDE} + \widehat{DEA}) = 90^\circ$ nên ta được AD vuông góc với CE .



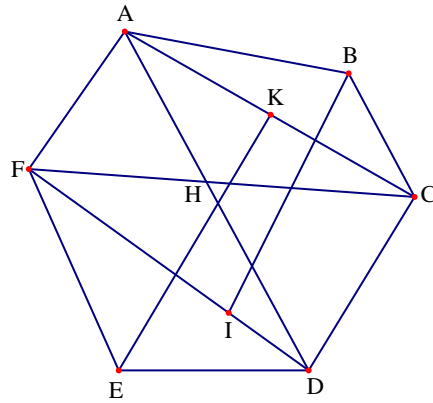
Mặt khác tam giác EAD cân tại E và tam giác CDE cân tại D nên AD và CE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Do đó AEDC là hình bình hành. Từ đó suy ra $AC = DE \Rightarrow AB = BC = CA$ hay tam giác ABC đều. Do đó ta được $\widehat{ABC} = 60^\circ$

Bài 40. Giả sử ABCDEF là lục giác đã cho. Gọi H là giao điểm của AD và CF. Ta có

$$S_{ADEF} = S_{CDEF} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$$

Suy ra ta được $S_{AFH} = S_{CDH}$ nên AC song song với BF.

+ Gọi K, I theo thứ tự là trung điểm của AC và FD.



Khi đó H thuộc KI và $\frac{HI}{KI} = \frac{FI}{CK} = \frac{FD}{AC}$

Vì $KA = KC, FI = ID$ nên ta được $S_{KICD} = \frac{1}{2} S_{ACDF}$

Mà $S_{EID} = \frac{1}{2} S_{EFD} = \frac{1}{2}$ và $S_{EID} + S_{DIKC} + S_{BKC} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$

Mặt khác ta lại có $S_{EDCB} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$ nên ta được $S_{EDCB} = S_{EDI} + S_{DIKC} + S_{BKC}$.

Gọi H' là giao điểm BE với KI, suy ra ta được $S_{BKH'} = S_{EIH'}$ nên BI song song với KE

Ta có $KE \parallel IB, KC \parallel IF, CE \parallel BF$ nên hai tam giác EKC và BIF đồng dạng với nhau

Từ đó suy ra $\frac{BI}{EK} = \frac{IF}{KC} = \frac{FD}{AC}$. Mà $BI \parallel BE$ nên ta được $\frac{BI}{KE} = \frac{H'I}{H'K}$ suy ra $\frac{H'I}{H'K} = \frac{FD}{AC}$

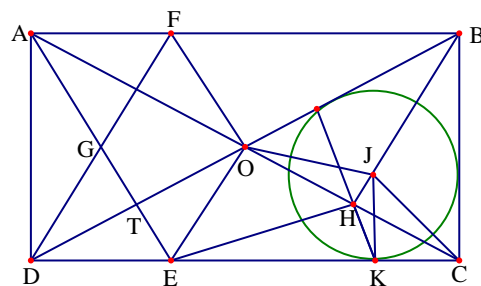
Kết hợp các kết quả lại ta được $\frac{H'I}{H'K} = \frac{HI}{HK}$ suy ra hai điểm H và H' trùng nhau. Do đó ba đường chéo AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

Bài 41.

a) Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có tâm O nên $OA = OB = OC = OD$.

Mà $\widehat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ADO} = 60^\circ$ nên tam giác AOD đều, AG là đường trung tuyến đồng thời là đường cao và đường phân giác. Do

đó $\widehat{DAE} = 30^\circ \Rightarrow AE \perp BD \Rightarrow \widehat{AED} = 60^\circ$



Tứ giác AOED có $\widehat{AED} = \widehat{AOD} = 60^\circ$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh được $\triangle ADF = \triangle ODF \Rightarrow AF = OF, \widehat{DOF} = \widehat{DAF} = 90^\circ$

Ta có $AD = AB \cdot \tan \widehat{ABD} = 3a \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}a$; $AF = AD \cdot \tan \widehat{ADF} = \sqrt{3}a \cdot \tan 30^\circ = a$

Lại tính được $AE = 2a$. Ta có $AE \perp BD, FO \perp BD$ nên $AE \parallel OF$, suy ra tứ giác AFOE là hình thang

Do đó ta được $S_{AFOE} = \frac{1}{2}(FO + AE)OT = \frac{1}{2}(a + 2a) \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ (đvdt)

c) Ta có $\triangle BOJ = \triangle BCJ \Rightarrow \widehat{BOJ} = \widehat{BCJ}$, mà $\widehat{BCJ} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = 45^\circ$ nên $\widehat{JOI} = 45^\circ$

Tam giác DKI cân tại D có $\widehat{KDI} = 30^\circ$ nên $\widehat{DKI} = 75^\circ$ do đó ta tính được $\widehat{KHC} = 45^\circ$

Ta có $\widehat{KHC} = \widehat{KJC} = 45^\circ$ nên tứ giác KHJC nội tiếp nên $\widehat{JHC} = \widehat{JKC} = 90^\circ$

Do đó $BJ \perp OC, HJ \perp OC$ nên ba điểm B, J, H thẳng hàng, suy ra H là trung điểm của OC.

Ta có $OH = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

Lại có $\triangle AOE = \triangle ADE \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{ADE}$, $OE = OD = AE \cdot \sin \widehat{DAE} = a$

Tam giác OEH vuông tại O nên $EH^2 = OE^2 + OH^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{7}a}{2}$.

Bài 42.

a) Tứ giác ABEG nội tiếp (vì $\widehat{EBG} = \widehat{EAG} = 45^\circ$)

Mà $\widehat{EBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EGA} = 90^\circ$ nên $EG \perp FA$ (1)

Tương tự tứ giác ADFH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FHA} = 90^\circ$ nên

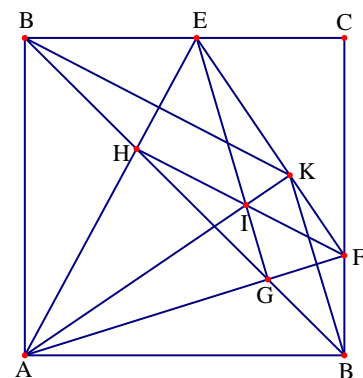
$AE \perp FH$ (2)

Từ (1) và (2) ta được I là trực tâm của tam giác AEF.

b) Tứ giác EFGH nội tiếp (vì $\widehat{G} = \widehat{H} = 90^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{AEF}$ (cùng bù góc \widehat{HGF})

Do đó ta được $\triangle AGH \sim \triangle AEF$ suy ra $\frac{GH}{EF} = \frac{AH}{AF} = \frac{AH}{AH\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



c) Ta có I là trực tâm tam giác AEF nên $AK \perp EF$. Hai tam giác vuông ABE và AKE bằng nhau nên $AK = AB = a$ và $EB = EK \Rightarrow BK \perp AE$. Do đó $BK \parallel HF$ (vì cùng vuông góc với AE)

d) Đặt $CE = x$, $CF = y$ ($0 < x, y < a$). Khi đó ta có $EF^2 = x^2 + y^2$

Mà $EF = KE + KF = BE + DF = a - x + a - y = 2a - x - y$. Suy ra $x + y = 2a - EF$

Dễ thấy $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó ta được $2a - EF = x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2EF^2} = EF\sqrt{2}$

Suy ra $EF \geq \frac{2a}{1 + \sqrt{2}} = 2a(\sqrt{2} - 1)$. Ta có $S_{AEF} = \frac{1}{2}AK \cdot EF = \frac{1}{2}a \cdot EF \leq a^2(\sqrt{2} - 1)$

Do đó diện tích tam giác AEF nhỏ nhất là $a^2(\sqrt{2} - 1)$ đạt được khi $EF = 2a(\sqrt{2} - 1)$

Bài 43. Bạn đọc tự vẽ hình

Số đo góc ở mỗi đỉnh của ngũ giác đều là $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Lại có tam giác ABC cân tại B nên ta được $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Gọi I là giao điểm của AC và BE, khi đó tam giác IAB cân tại I nên $\widehat{ABI} = 36^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{IBC} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 72^\circ$, do đó tam giác BIC cân tại C nên $CB = IC$.

Lại có $\triangle ABC \sim \triangle AIB$ nên $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AC - AB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC^2 - BC \cdot AC$

Mà ta có $AB = AD$; $AE = BC$ nên ta được $AB^2 + AC \cdot AE = AD^2$.

Ngoài ra hệ thức trên còn được viết lại là $AC^2 - AC \cdot BC - AB^2 = 0$

Chia cả hai vế cho AB^2 ta được $\frac{AC^2}{AB^2} - \frac{AC}{AB} - 1 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{AC}{2AB}\right)^2 - 2\frac{AC}{2AB} - 1 = 0$.

Mà ta lại có $\cos \widehat{BAC} = \cos 36^\circ = \frac{AC}{2AB}$ nên ta được $4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$.