CHỦ ĐỀ 3

SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số nguyên tố, hợp số.

1) Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19....

2) Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Ví dụ: 4 có 3 ước số: 1 ; 2 và 4 nên 4 là hợp số.

3) Các số 0 và 1 không phải là só nguyên tố cũng không phải là hợp số.

4) Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố.

2. Một số tính chất.

- Có vô hạn số nguyên tố.
- Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q thì $p = q$.
- Nếu tích abc chia hết cho số nguyên tố p thì ít nhất một thừa số của tích abc chia hết cho số nguyên tố p.
- Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p .
- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.

Chứng minh. Vì n là hợp số nên $n = ab$ với $a, b \in \mathbb{Z}, 1 < a \le b < n$ và a là ước nhỏ nhất của n. Thế thì $n \ge a^2$. Do đó $a \le \sqrt{n}$.

3. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó.

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố, phân tích này là duy nhất nếu không tính thứ tự các thừa số.

Chẳng hạn $A = a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in N^*$

Khi đó số các ước số của A được tính bằng $(\alpha + 1)(\beta + 1)...(\gamma + 1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng $\dfrac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}.\dfrac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}...\dfrac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}$

4. Số nguyên tố cùng nhau.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=1$.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b,c)=1$.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$.

5. Cách nhận biết số nguyên tố.

Cách 1

Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7...

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không là số nguyên tố.
- Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là số nguyên tố.

Cách 2

- Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.
- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.
- Với quy tắt trên trong một khoảng thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì ta nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là nguyên tố hay không.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số

Bài toán 1. Nếu p và p^2+8 là các số nguyên tố thì p^2+2 là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Xét $p=3k+1$ (k nguyên) thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Xét $p=3k+2$ thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Vậy $p=3k$, mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Khi đó $p^2+2=11$, là số nguyên tố.

Bài toán 2. Chứng minh rằng n^4+4 là một số nguyên tố khi $n=1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-\left(2n\right)^2$

$=\left(n^2+2-2n\right)\left(n^2+2+2n\right)=\left[\left(n-1\right)^2+1\right].\left[\left(n+1\right)^2+1\right]$

Nếu $n>1$ thì cả hai thừa số trên đều lớn hơn 1. Như vậy n^4+4 là một số nguyên tố khi $n=1$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>1$ thì n^5+n^4+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^5+n^4+1=\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)$.

Mà $n>1$ nên $n^2+n+1>1$ và suy ra n^5+n^4+1 là hợp số.

Bài toán 4. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Trong ba số nguyên $2^n-1;\ 2^n;\ 2^n+1$ có một số chia hết cho 3. Mặt khác, 2^n không chia hết cho 3, do đó một trong hai số $2^n-1;\ 2^n+1$ phải có một số chia hết cho 3, nghĩa là một trong hai số này phải có một hợp số. Để cho 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ nên chắn chắn rằng 2^n+1 là một hợp số.

Bài toán 5. Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh $8p+1$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Vì $8p-1$ là số nguyên tố nên $p\neq 2$.

Nếu $p=3$ thì $8p+1=25$ là hợp số.

Nếu $p>3$ thì $8p(8p-1)(8p+1)\,\vdots\,3$. Vì p và $8p-1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $8p+1$ chia hết cho 3 hay $8p+1$ là hợp số.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, luôn chọn được $n^{2020}+n^{2019}+1$ số nguyên dương liên tiếp mà tất cả đều là hợp số.

Hướng dẫn giải

Xét $A_1=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+2\,\vdots\,2$

$A_2=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+3\,\vdots\,3$

....

$A_{n^{2020}+n^{2019}+1}=\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)!+\left(n^{2020}+n^{2019}+2\right)\vdots\, n^{2020}+n^{2019}+2$

Dãy $A_1,A_2,...,A_{n^{2020}+n^{2019}+1}$ là các hợp số liên tiếp.

🗁 **Dạng 2: Chứng minh một số bài toán có liên quan đến tính chất của số nguyên tố**

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu p và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Hướng dẫn giải

Ta có : $p+(p+2)=2(p+1)$

- p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ, suy ra :

$$p+1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4 \qquad (1)$$

- $p, p+1, p+2$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p + 2 không chia hết cho 3 nên :

$$p+1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2(p+1) \vdots 12$. (đpcm)

Bài toán 2. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $2014!-1$ đều lớn hơn 2014.

Hướng dẫn giải

Gọi p là ước nguyên tố của $2014!-1$

Giả sử $p \le 2014 \Rightarrow 1.2.3...2014 \vdots p \Rightarrow 2014! \vdots p$

Mà $(2014!-1) \vdots p$ nên $1 \vdots p$. Điều này mâu thuẫn dẫn đến $p > 2014$.

Bài toán 3. Cho các số $p=b^c+a, q=a^b+c, r=c^a+b$ là các số nguyên tố $(a,b,c \in N^*)$. Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Trong 3 số a, b, c có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c + 1$ và $r = c + 1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài toán 4. Cho số tự nhiên $n \ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^3-1=(n-1).(n^2+n+1) \vdots p$; $(p-1) \vdots n \Rightarrow p-1 \ge n \Rightarrow p \ge n+1$

Vì $p \ge n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1) \vdots p \Leftrightarrow (n^2+n+1) \vdots p$

Đặt : $p-1=kn, \quad k \ge 1 \Rightarrow p=kn+1 \quad (*)$

Suy ra $(n^2+n+1)\vdots(kn+1) \Rightarrow kn+1 \le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn \le n^2+n \Leftrightarrow k \le n+1 \quad (1)$

Ta có: $k(n^2+n+1)-n(kn+1)\vdots(kn+1) \Rightarrow [(k-1)n+k]\vdots(kn+1)$

Do $k \ge 1$nên $(k-1)n+k > 0$

Suy ra $(k-1)n+k \ge kn+1 \Rightarrow k \ge n+1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện nào đó

Đối với dạng toán tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước, chúng ta thường sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên sau để giải:

* Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho *n*.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $3n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

Chứng minh:

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 2

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 4n – 1; 4n ; 4n + 1; 4n + 2 .

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và 4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 4. 4 - 1 = 15 không là số nguyên tố .

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 3

+) Ta thấy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều phải có dạng $3n \pm 1$ vì nếu có dạng 3k thì sẽ chia hết cho 3 nên không thể là số nguyên tố.

Không phải mọi số có dạng $3n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 3. 5 + 1 = 16 không là số nguyên tố.

+) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 6n – 1; 6n ; 6n + 1; 6n + 2 ; 6n + 3

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 6n và 6n; 6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đề có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn 6. 4 + 1 = 25 không là số nguyên tố.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2 và p + 4 là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Với p = 2 thì p + 2 = 4 và p + 4 = 6 không phải là các số nguyên tố.

Với p = 3 thì p + 2 = 5 và p + 4 = 7 là các số nguyên tố.

Với p > 3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng p = 3k + 1 hoặc p = 3k + 2

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(3k + 1) \vdots 3$ không là số nguyên tố.

Nếu p = 3k + 2 thì $p + 4 = 3k + 6 = 3(3k + 2) \vdots 3$ không là số nguyên tố;

Vậy với $p = 3$ thì p + 2 và p + 4 là số nguyên tố.

Bài toán 2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2; p + 6; p + 8; p + 14 đều là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: p = 5k mà p nguyên tố nên p = 5, khi đó:

p + 2 = 7; p + 6 = 11; p + 8 = 13; p + 14 = 19 đều là số nguyên tố nên p = 5 thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: p = 5k + 1, khi đó: p + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 14) nên p + 14 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 1 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 3: p = 5k + 2, khi đó: p + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 10) nên p + 10 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 2 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 4: p = 5k + 3, khi đó: p + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 2) nên p + 2 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 3 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 5: p = 5k + 4, khi đó: p + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 6) nên p + 6 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 4 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Do đó p = 5 là số cần tìm.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{n^3 - 1}{9}$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

$n^3-1 \vdots 9 \Rightarrow n^3-1 \vdots 3 \Rightarrow n$ chia cho 3 dư 1 (vì nếu n chia cho 3 dư 0 hoặc 2 thì n^3 chia hết cho 3 dư 0 hoặc 2). Đặt $n=3k+1\ (k\in N)$. Ta có

$$\frac{n^3-1}{9}=\frac{(3k+1)^3-1}{9}=\frac{27k^3+27k^2+9k}{9}=3k^3+3k^2+k=k(3k^2+3k+1)$$

Để $\frac{n^3-1}{9}$ là số nguyên tố, phải có $k=1$. Khi đó $n=4$ và $\frac{n^3-1}{9}=\frac{64-1}{9}=7$, là số nguyên tố.

Đáp số: $n=4$.

Bài toán 4. Tìm số nguyên tố p sao cho $43p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Đặt $43p+1=n^3\ (n\in N)$ thì $43p=(n-1)(n^2+n+1)$

Số $43p$ có bốn ước nguyên dương là $1, 43, p, 43p$ nên có ba trường hợp:

a) $\begin{cases} n-1=1 \\ n^2+n+1=43p \end{cases}$ Khi đó $n=2$ và $43p=2^2+2+1=7$, loại.

b) $\begin{cases} n-1=43 \\ n^2+n+1=p \end{cases}$ Khi đó $n=44$ và $p=44^2+44+1=1981 \vdots 7$, loại.

c) $\begin{cases} n^2+n+1=43 \\ n-1=p \end{cases}$ Khi đó $n(n+1)=42 \Rightarrow n=6, p=5$ (là số nguyên tố).

Đáp số: $p=5$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các số nguyên tố p để p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện đề bài.

Khi đó p là số nguyên tố lẻ và $p=p_1+p_2=p_3-p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố.

Vì p là số nguyên tố lẻ nên p_1, p_2 không cùng tính chẵn lẻ. Nhưng vậy sẽ có một số nguyên tố là 2 và giả sử $p_2=2$.

Lại vì p là số nguyên tố lẻ nên p_3, p_4 không thể cùng tính chẵn lẻ. Cũng sẽ có một số nguyên tố là 2. Do $p_3>p_4$ nên $p_4=2$.

Từ $p=p_1+2=p_3-2$ ta suy ra p, p_1, p_3 là ba số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Chỉ có bộ ba số 3; 5; 7 là thỏa mãn $p=5=3+2=7-2$.

🗁 Dạng 4: Nhận biết số nguyên tố, sự phân bố nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ ba có 16 số nguyên tố, … Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có 145 số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có 127 số nguyên tố, … Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Nếu $p \geq 5$ và $2p+1$ là các số nguyên tố thì $4p+1$ là số nguyên tố hay là hợp số?

Hướng dẫn giải

Xét ba số tự nhiên liên tiếp: $4p, 4p+1, 4p+2$. Để ý rằng trong ba số này chắc chắn có một số chia hết cho 3.

Vì $p \geq 5$ là số nguyên tố nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

+) Nếu $p = 3k+1$ thì $2p+1 = 6k+3 = 3(2k+1) \vdots 3$, mâu thuẫn với giả thiết.

+) Nếu $p = 3k+2$ thì $4p+1 = 4(3k+2)+1 = 12k+9 = 3(4k+3) \vdots 3$ hay $4p+1$ là hợp số.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k để dãy : $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Hướng dẫn giải

- Với $k = 0$ ta có dãy 1, 2, 3, ..., 10 chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.
- Với $k = 1$ ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.
- Với $k = 2$ ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.
- Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, ..., k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này đều lớn hơn 3 nên có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy có ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại với $k = 1$ thì dãy $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong 30 số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 5, có ít nhất 22 hợp số.

Hướng dẫn giải

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp đã cho, có 15 số chẵn, chúng đều lớn hơn 5 nên là hợp số. Ta tìm được 15 hợp số.

Chia 15 số lẻ còn lại thành 5 nhóm, mỗi nhóm gồm ba số lẻ liên tiếp. Trong ba số lẻ liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 3, số đó lớn hơn 5 nên là hợp số. Có 5 nhóm nên ta tìm thêm được 5 hợp số.

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia cho 30 dư 5, một số chia cho 30 dư 25, giả sử $a = 30m+5$ và $b = 30n+25$. Các số a và b là hợp số (vì chia hết cho 5 và lớn hơn 5), đồng thời không trùng với các hợp số đã tìm được (vì a và b không chia hết cho 2, không chia hết cho 3). Ta tìm thêm được 2 hợp số.

Vậy có ít nhất $15+5+2 = 22$ (hợp số).

Bài toán 4. Có tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số không?

Hướng dẫn giải

Gọi $A = 2.3.4....1001$.

Ta có: $A_1 = A + 2 = 2.3.4...1001 + 2 \vdots 2$

$A_2 = A + 3 = 2.3.4...1001 + 3 \vdots 3$

.....

$A_{1000} = A + 1001 = 2.3.4....1001 \vdots 1001$

Dãy $A_1, A_2, ...A_{1000}$ gồm 1000 hợp số liên tiếp.

Vậy tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp là hợp số.

Bài toán 5. (Tổng quát bài số 4)

Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp (n > 1) không có số nào là số nguyên tố ?

Hướng dẫn giải

Ta chọn dãy số sau:

$a_1 = (n+1)! + 2$ $\quad$ $a_1 \vdots 2,\ a_1 > 2$ nên a_1 là hợp số

$a_2 = (n+1)! + 3$ $\quad$ $a_2 \vdots 3,\ a_2 > 3$ nên a_2 là hợp số

....

$a_n = (n+1)! + (n+1)$ $\quad$ $a_n \vdots (n+1),\ a_n > n+1$ nên a_n là hợp số

Dãy $a_1, a_2, a_2, ..., a_n$ ở trên sẽ gồm có n số tự nhiên liên tiếp trong đó không có số nào là số nguyên tố cả.

Nhận xét: Một vấn đề được đặt ra: Có những khoảng rất lớn các số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số. Vậy có thể đến một lúc nào đó không còn số nguyên tố nữa không? Có số nguyên tố cuối cùng không? Từ thế kỉ III trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hi Lạp Ơ – clit (*Euclde)* đã chứng minh rằng: Tập các số nguyên tố là vô hạn.

Bài toán 6. Chứng minh rằng không thể có hữu hạn số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_n$ trong đó p_n là số lớn nhất trong các số nguyên tố.

Xét số $A = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ thì A chia cho mỗi số nguyên tố $p_i\ (1 \le i \le n)$ đều dư 1 (1).

Mặt khác A là hợp số (vì nó lơn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó A phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó, tức là A chia hết cho một trong các số $p_i\ (1 \le i \le n)$ (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố (đpcm).

Dạng 5: Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng $ax+b$ (với $x \in N$ và $(a,b)=1$)

Đây là dạng toán tương đối khó, chúng ta thường giải bằng phương pháp phản chứng.Với dạng toán này, ở trình độ THCS các em chỉ giải quyết được những bài tập ở dạng đơn giản như $3x-1$ và $4x+3$. Việc chứng các bài tập ở dạng này phức tạp hơn, các em sẽ gặp nhiều khó khăn chứ không thể dễ dàng chứng minh được. Chẳng hạn chứng minh về vô số số nguyên tố có dạng 4a + 1; 6a + 1......... phức tạp hơn nhiều.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng $3k-1$.

Hướng dẫn giải

● ***Nhận xét:*** Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3k; 3k+1$ hoặc $3k-1$. Những số có dạng $3k$ (với $k>1$) là hợp số, vậy nếu là số nguyên tố thì phải có dạng $3k+1$ hoặc $3k-1$. Xét 2 số có dạng $3k+1$: đó là số $(3k_1+1)$ và số $(3k_2+1)$

Vì với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ thì $(3k_1+1)(3k_2+1) = 9k_1k_2+3k_1+3k_2+1 = 3(3k_1k_2+k_1+k_2)+1 = 3k_3+1$, do đó tích của những số nguyên có dạng $3k+1$ là số có dạng $3k+1$.

● ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng $3k-1$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $3k+1$ (vì khi đó theo chứng minh trên thì p sẽ có dạng $3k+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $3k-1$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $3k-1$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $3k-1$.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng $3k-1$ là $p_1, p_2, ..., p_n$.

Xét số $N = 3p_1p_2...p_n - 1$ thì N có dạng $3k-1$

Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $3k-1$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $3k-1$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $3k-1$.

Bài toán 2. Chứng minh rằn tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Hướng dẫn giải

● ***Nhận xét:*** Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 là số nguyên tố thì phải có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$. Xét 2 số có dạng $4k+1$: đó là số $(4k_1+1)$ và số $(4k_2+1)$

thì $(4k_1+1)(4k_2+1)=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1=4k_3+1$, do đó tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$.

● ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng $4k+3$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $4k+1$ (vì khi đó theo chứng minh trên thì p sẽ có dạng $4k+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $4k+3$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng $4k+3$ là $p_1, p_2, ..., p_n$.

Xét số $N=4p_1p_2...p_n-1$ thì N có dạng $4k+3$. Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $4k+3$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $4k+3$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

🗁 Dạng 6: Sử dụng nguyên lý Dirichlet trong bài toán số nguyên tố

Bài toán 1. Cho $p>5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111…11 chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta xét dãy số: $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{p}$

Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho p thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia. Tập hợp các số dư chỉ có $1, 2, 3, \ldots, p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập này).

Nhưng vì chúng ta có p số ở dạng trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử các số đó là: $\underbrace{111\ldots1}_{m}$ và $\underbrace{111\ldots1}_{n}$ với $m>n$.

Khi đó $1\le n<m\le p$ .Như vậy: $\underbrace{111\ldots1}_{m}-\underbrace{111\ldots1}_{n}=\underbrace{111\ldots1}_{m-n}\underbrace{000\ldots0}_{n}=\underbrace{111\ldots1}_{m-n}.10^n$

Tích này chia hết cho p vì $(p,10)=1$ suy ra $\underbrace{111\ldots1}_{m-n}$ chia hết cho p và nó cũng nằm trong dãy trên. Mà $1\le m-n\le p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots1800$.

Hướng dẫn giải

Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2,3,5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1 - p_2) \vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1 - p_2) \vdots 3$ dẫn đến $(p_1 - p_2) \vdots 15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3 - p_4) \vdots 5$. Rõ ràng $(p_3 - p_4) \vdots 2$ và $(p_3 - p_4) \vdots 3$. Vì $(5;3;2) = 1$ nên ta có $(p_3 - p_4) \vdots 30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5 + p_6) \vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 30.30.2 = 1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5 - 1) \vdots 5$, $(p_6 - 4) \vdots 5$ thì $(p_5 + p_5 - 5) \vdots 5$ hay $(p_5 + p_6) \vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3, p_4 thì rõ ràng $(p_3 - p_4) \vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3; p_4; p_5; p_6$ lẻ nên $(p_5 + p_6) \vdots 2, (p_3 - p_4) \vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5 + p_6) \vdots 10$ và $(p_3 - p_4) \vdots 6$.

Do đó $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 30.10.6 = 1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biên sao cho $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 1800$.

🗁 Dạng 7: Áp dụng định lý Fermat

Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên sao cho $(a, p) = 1$. Khi đó: $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

Chứng minh

Xét các số a, $2a$, …, $(p-1)a$. Dễ thấy, không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p. Vậy khi chia $p-1$ số nói trên cho p, ta nhận được các số dư là 1, 2, …, $p-1$. Suy ra $a.(2a).(3a)...((p-1)a) \equiv 1.2.3.(p-1)$ (mod p) hay $(1.2.3...(p-1)).a^{p-1} \equiv 1.2.3...(p-1)$ (mod p)

Vì $(1.2.3...(p-1), p) = 1$ nên $a^{p-1} = 1$(mod p).

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Theo Định lí Fermat: $2^p \equiv 2 \pmod p \Rightarrow 2^p - 2 \vdots p \Rightarrow 3 = (2^p + 1) - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3$.

Với $p = 3$ ta có $2^p + 1 = 9 \vdots 3$.

Bài toán 2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ta tìm $n = m(p-1)$ sao cho $n.2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta có: $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)} \equiv m(p-1) \pmod{p} \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow m = kp - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Vậy, với $n = (kp-1)(p-1)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì $n.2^2 - 1 \vdots p$

Bài toán 3. Cho p là số nguyên tố, chứng ming rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk + 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo Định lí Fermat:

$2^{q-1} - 1 \vdots q \Rightarrow (2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p,q-1)} - 1 \vdots q \Rightarrow q - 1 \vdots p$, vì nếu $(q-1, p) = 1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác, $q - 1$ chẵn suy ra $q - 1 \vdots 2p \Rightarrow q = 2pk + 1$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a, k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

Bài 10. Cho $n \in N^*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) $A = 2^{2^{2n+1}} + 3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}} + 7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}} + 13$.

Bài 11. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

Bài 12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

Bài 13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Bài 14. Tìm $n \in N^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 15. Tìm các số $x, y \in N^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

Bài 16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ $(n \geq 1)$.

Bài 17. Cho $n \in N^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với $n > 1$.

Bài 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b) + b - a = y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

Bài 19. Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bắc Ninh 2017-2018)

Bài 20. Chứng minh rằng nếu $a, a+m, a+2m$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì m chia hết cho 6.

Bài 21. Cho tập $A = \{6;12;18;24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A cũng là nguyên tố.

Bài 22. Tìm số nguyên tố p sao cho $p^4 + 2$ cũng là số nguyên tố.

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

Bài 23. Cho các biểu thức $A = x^4 + 4; B = x^4 + x + 1$. Tìm các số tự nhiên x để A và B đều là các số nguyên tố.

Bài 24. Giả sử phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $a^2 + b^2$ là hợp số.

Bài 25. Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$ biết phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là các số nguyên tố.

Bài 26. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2013-2014)*

Giả sử n là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng $\frac{2013n^2+3}{8}$ là số nguyên dương.

Bài 27. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr = p + q + r + 160$.

Bài 28. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Bài 29. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố *p, q* sao cho $8q + 1 = p^2$.

Bài 30. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thái Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 31. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Cho số nguyên tố $p(p > 3)$ p và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Bài 32. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2017-2018)*

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Bài 33. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2016-2017)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

Bài 34. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1.$$

Bài 35. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014-2015)*

Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số

Bài 36. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Vĩnh Long năm học 2015-2016)*

Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

Bài 37. *(Thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong năm 1981)*

Chứng minh rằng nếu p và $p^2 + 2$ là hai số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 38. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của $n+1$ hợp số.

Bài 39. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2014-2015)*

Tìm tất cả các số nguyên tố *p, q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn: $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$.

Bài 40. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2014-2015)*

Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 41. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Cẩm Thủy năm học 2011-2012)*

Tìm số tự nhiên n để $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố

Bài 42. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Tiền Hải năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$\frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}$ là số hữu tỉ và $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố

Bài 43. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Gia Lộc năm học 2015-2016)*

Tìm số nguyên tố k để k^2+4 và k^2+16 đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 44. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Lục Nam năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100

Bài 45. Giả sử a, b là các số tự nhiên sao cho $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất của p.

Bài 46. *(Trích đề chọn học sinh giỏi lớp 9 Amsterdam năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Bài 47. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Hải Phòng năm học 2019-2020)*

Tìm các số nguyên tố *p, q* thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p

Bài 48. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Quảng Bình năm học 2019-2020)*

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. *(Trích đề thi HSG TP. Hà Nội năm học 2013-2014)*

Tìm số tự nhiên *n* để $25^{n^2-3n+1}-12$ là số nguyên tố

Bài 50. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2015-2016)*

Cho dãy số tự nhiên 2; 6; 30; 210; ... được xác định như sau: số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên $(k = 1; 2; 3; ...)$. Biết rằng có hai số hạng của dãy số đó có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Bài 51. *(Vòng 2 , THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2009 - 2010)*

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn : $\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$

Bài 52. *(Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

Bài 53. *(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Dương năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n, k để $n^8 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố

Bài 54. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vĩnh Long năm học 2018-2019)*

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $P = -x^4 + x^2 + 14x + 49$ là số nguyên tố

Bài 55. *(Trích đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm học 2015-2016)*

Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn n^2+4 và n^2+16 là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Bài 56. *(Trích đề vào 10 Chuyên Amsterdam năm học 2014-2015)*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1) \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1 = 2x(x+2) \\ p^2-1 = 2y(y+2) \end{cases}$

Bài 57. *(Trích đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm học 2014-2015)*

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Bài 58. *(Trích đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm học 2014-2015)*

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. *(Trích đề HSG lớp 8 Gia Viễn năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$.

Bài 60. *(Trích đề HSG lớp 8 Thanh Chương năm học 2012-2013)*

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Bài 61. *(Trích đề HSG lớp 8 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 62. *(Trích đề HSG lớp 8 Trực Ninh năm học 2017-2018)*

Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Bài 63. Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2015-2016)*

Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p+q = 2\left(p-q\right)^2$.

Bài 65. *(Trích đề HSG lớp 6 Hoằng Hóa 2018-2019)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p+q$ và $pq+11$ đều là số nguyên tố.

Bài 66. *(Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô 2018-2019)*

Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab}; \overline{cd}$ cũng là các số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

Bài 67. *(Trích đề Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội năm 2009-2010)*

Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số

n + 1, n + 5, n + 7, n + 13, n + 17, n + 25, n + 37 đều là nguyên tố.

Bài 68. *(Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình 2018-2019)*

Giả sử p và p^2+2 là các số nguyên tố. Chứng tỏ p^3+p^2+1 cũng là số nguyên tố.

Bài 69. *(Trích đề HSG lớp 6 Nghĩa Đàn 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 45$.

Bài 70. *(Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh 2018-2019)*

1) Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.
2) Tìm các số x, y nguyên tố để $x^2+23 = y^3$.

Bài 71. *(Trích đề HSG lớp 6 Nông Cống 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a > b > 0)$, biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Bài 72. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p\left(p-1\right) = q\left(q^2-1\right)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p\left(p-1\right) = q\left(q^2-1\right)$.

(Trích đề vào 10 Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội 2017-2018)

Bài 74. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - q^2 + r^2 - s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2 - 2q^2 = 1$.

Bài 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 77. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^q + q^p = r$

Bài 78. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn các điều kiện sau:

$$5 \le p < q < r; 49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$$

Bài 79. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$20abc < 30(ab + bc + ca) < 21abc$$

Bài 80. Tìm các số nguyến tố p, q và số nguyên x thỏa mãn $x^5 + px + 3q = 0$

Bài 81.Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Bài 82. Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương thì x là hợp số.

Bài 83. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p - 2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 84. Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a, b, c, a + b + c, a + b - c, a + c - b, b + c - a$ trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể nhận là bao nhiêu.

Bài 85. Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2 - pk}$ là số nguyên dương

Bài 86. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2016 viết được thành $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2016 bằng số 2017.

Bài 87. Tìm tất cả số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Bài 88. Cho số tự nhiên $n \ge 2$, xét các số $a_1; a_2; ...; a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1; p_2; ...; p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1|$. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bài 89. Tồn tại hay không số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$.

Bài 90.Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mỗi số nguyên tố p đó luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Bài 91. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3+8n^2+1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 92. Cho p là số nguyên tố sao cho $A = \frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Khi đó $A = p+1$.

Bài 93. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Bài 94. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95. Tìm các số nguyên không âm a, b sao cho $a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$ là số nguyên tố.

Bài 96. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương. Biết $f(5) - f(4) = 2012$. Chứng minh rằng $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Bài 97. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5) - f(3) = 2010$. Chứng minh rằng $f(7) - f(1)$ là hợp số.

Bài 98. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m; p; q)$ sao cho p, q là số nguyên tố và $2^m.p^2 + 1 = q^5$.

Bài 99.Tìm sáu số nguyên tố $p_1; p_2; p_3; p_4; p_5; p_6$ thỏa mãn $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^3 + p_5^2 = p_6^2$.

Bài 100. Cho số nguyên tố p dạng $4k+3$. Tồn tại hay không số nguyên a nào thỏa điều kiện $(a^2+1) \vdots p$

Bài 101. *(Trích đề thi HSG thành phố Hà Nội năm 2019-2020)*
Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn

$$x^2 + p^2y^2 = 6(x+2p).$$

Bài 102. Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh $a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ không phải là số nguyên tố.

(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên TP Hà Nội, 2017).

Bài 103.
a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố khác 2 và khác 3 có dạng: $6m+1$ hoặc $6m-1$.
b) Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố có dạng $6m-1$.

(Thi học sinh giỏi quốc gia 1991 – 1992)

Bài 104. Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y + 1 = z$.

Bài 105. Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n (n \in N^*)$ là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in N$.

Bài 106. Cho $a, b, c, d \in N^*$ thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng: $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1 \quad (n \geq 1)$.

Bài 108. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Bài 109. a) Cho 2^k+1 là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng $k=0$ hoặc $k=2^n$.

b) Cho 2^k-1 là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Bài 110. *(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh 1995 – 1996)*

1) Cho biết x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$. Chứng minh rằng ta có: $x+y+z$ là bội số của 27.

2) Chứng minh rằng với k nguyên dương và a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^{4k}-1$ chia hết cho 240.

Bài 111. Chứng minh rằng: (p – 1)! chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Bài 112. Chứng minh rằng: mọi ước nguyên tố của 1994! – 1 đều lớn hơn 1994.

Bài 113. Chứng minh rằng: n > 2 thì giữa n và n! có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).

Bài 114. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\frac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1$ (mod m).

Bài 115. Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Bài 116. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Bài 117. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p=a^2+b^2+c^2$ với *a, b, c* là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p.

(Trích đề toán 10 chuyên sư phạm Hà Nội năm 2011-2012)

Bài 118. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Bài 119. Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Bài 120. Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

Bài 121. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho chúng là hợp số.

Bài 122. Cho số nguyên dương n thỏa mãn 2^n-1 là số nguyên tố. Chứng minh rằng n là số nguyên tố.

Bài 123. Tìm số nguyên tố p để 2^p+p^2 cũng là số nguyên tố.

Bài 124. Cho p,q là các số nguyên tố và phương trình $x^2-px+q=0$ có nghiệm nguyên dương. Tìm p và q .

Bài 125. Cho p,q,r là các số nguyên tố và n là các số tự nhiên thỏa $p^n+q^n=r^2$. Chứng minh rằng $n=1$.

Bài 126. Cho p là số nguyên tố dạng $4k+3$. Chứng minh rằng x^2+y^2 chia hết cho p khi và chỉ khi x và y chia hết cho p .

Bài 127. Tìm các số tự nhiên m,n sao cho $x=3^{3m^2+6n-61}+4$ là số nguyên tố.

Bài 128. Tìm tất cả các số tự nhiên a,b,c sao cho $a^3+b^3+c^3-3abc$ là số nguyên tố.

Bài 129. *(Trích đề thi HSG quận Thanh Xuân năm 2019-2020)*

Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

Bài 130. Tìm các số nguyên tố a,b,c và số nguyên dương k sao cho $a^2+b^2+16c^2=9k^2+1$.

Bài 131. Tìm các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 \mid q^3+1$ và $q^2 \mid p^6-1$.

Bài 132. Ta gọi p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2+q^2+r^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 133. Cho số $A=\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$. Chứng minh A là một hợp số.

Bài 134. Cho p và $p+2$ là số nguyên tố ($p>3$). Chứng minh rằng $p+1 \vdots 6$.

Bài 135. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố $(p>3)$. Chứng minh rằng $p+8$ là hợp số.

Bài 136. *(Chuyên Vũng Tàu 2016-2017)*

Tìm các cặp số nguyên tố (p,q) thỏa mãn $p^2-5q^2=4$.

Bài 137. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6) \vdots 1800$.

Bài 138. *(Đề thi HSG Toán TP.HCM năm học 2004 – 2005)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 139. Cho p,q là hai số nguyên tố sao cho $p>q>3$ và $p-q=2$. Chứng minh rằng: $(p+q) \vdots 12$.

Bài 140. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Bài 141. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2007-p^2$ chia hết cho 24.

(Đề tuyển sinh Chuyên Toán Amsterdam 2017).

Bài 142. Tìm ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

Bài 143. a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là một số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n,30)=1$.

Bài 144. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

Bài 145. Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1a_2...a_{n-1} + 1$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng $a_k \ne 5$ với mọi k.

Bài 146. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 147. Tìm $n \in \mathbb{N}*$ để: $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 148. a) Tìm các số nguyên tố p để $2p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 149. Cho $a,b,c,d \in N$ thỏa mãn a > b > c > d và $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$

Chứng minh rằng $ab + cd$ là hợp số.

Bài 150. Cho các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số .

(Trích đê thi HSG lớp 9 Nghệ An 2014-2015)

Bài 151. Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Bài 152. Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của n + 1 hợp số.

(Trích đê thi HSG lớp 9 Nghệ An 2014-2015)

Bài 153. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ $(n \ge 1)$.

Bài 154. Chứng minh rằng số $A = 2^{2^{2n+1}} + 31$ là hợp số với mọi số tự nhiên n.

(Trích đê thi HSG lớp 9 Nghệ An 2017-2018)

Bài 155. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng $2^{2^{10n+1}} + 19$ và $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là những hợp số.

Bài 156. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn: $m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}$

(Trích đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Nội 2017-2018)

Bài 157. Tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ là số nguyên tố và $A = 2n+7$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 158. Chứng minh rằng nếu b là số nguyên tố lớn hơn 3 thì số $A = 3n + 1 + 2009b^2$ là hợp số, với mọi số tự nhiên n.

(THPT chuyên Quảng Ngãi, năm học 2009-2010)

CHỦ ĐỀ 3. SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Bài 1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 (k$\in$N).

Bài 2. n = 3.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)\vdots 3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy (p - 1)(p + 1) $\vdots$ 24.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r (k, r $\in$N, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r (k,r $\in$N,0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p=1010...101=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9.Tất cả đều là hợp số.

a) $A=\underbrace{11...1}_{2001}=\underbrace{1+1+...+1}_{2001}\vdots 3$.

b) $B=\underbrace{11...1}_{2000}\vdots 11$.

c) $C=1010101\vdots 101$.

d) $D=1112111=1111000+1111\vdots 1111$.

e) $E \vdots 3$ vì $1!+2!=3 \vdots 3$, còn $3!+4!+...+100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

Bài 10. Chứng minh $A \vdots 7; B \vdots 11; C \vdots 29$.

Bài 11. 240 = 2^4. 3. 5.

Bài 12. n = 6k + 4, k$\in$N.

Bài 13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

Bài 14. $n^3-n^2+n-1=(n-1)(n^2+1)$, n =2.

Bài 15.

$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+y^2)$

$x=y=1$ thì $x^4+4y^4=5$ là số nguyên tố.

Bài 16. $p=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n \geq 4$ thì n +3 >6 và n^2 + 2 > 17.

n + 3 và n^2 +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

Bài 17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 (k$\in$N*), ta có:

$$\begin{aligned}n^4+4^n&=n^4+4^{2k+1}=(n^2+2^{2k+1})^2-2.n^2.2^{2k+1}\\&=(n^2+2^{2k+1}-n.2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}+n.2^{k+1})\\&=\left[(n-2^k)^2+2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2+2^{2k}\right]\end{aligned}$$

Bài 18. Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b)>0$, suy ra b < x <a. Đặt $a-x=m, x-b=n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn-m-n=y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow (4m-1)(4n-1)=4y^2+1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1) \vdots p$ hay $4y^2 \equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow \left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 (\text{mod } p) \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Bài 19. Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2 , do đó $k \geq 9$

Xét các cặp số sau:

$A = \{1;4\} \cup \{3;2\} \cup \{5;16\} \cup \{6;15\} \cup \{7;12\} \cup \{8;13\} \cup \{9;10\} \cup \{11;14\}$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T| = 9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

Vậy $k_{\min} = 9$

Bài 20. Các số nguyên tố lớn hơn 3 đều là số lẻ. Nếu m là số lẻ thì $a+m$ là số chẵn lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố. Vậy m là số chẵn, $m = 2p$ (p là số nguyên dương).

Nếu $p = 3k+1$ thì ba số đã cho là $a, a+6k+2, a+12k+4$.

Nếu a chia cho 3 dư 1 thì $a+6k+2 \vdots 3$ (loại).

Nếu a chia cho 3 dư 2 thì $a+12k+4 \vdots 3$ (loại).

Vậy p không có dạng $3k+1$.

Tương tự p không có dạng $3k+2$. Vậy $p = 3k \Rightarrow m = 6k$.

Kết luận: m chia hết cho 6.

Bài 21. Ta thấy $p = 2$ và $p = 3$ không thỏa mãn.

Nếu $p = 5k+1 (k \ge 1)$ thì $p+24 = 5k+25 = 5(k+1)$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+2$ thì $p+18 = 5k+20 = 5(k+4)$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+3$ thì $p+12$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k+4$ thì $p+6$ không là số nguyên tố;

Nếu $p = 5k$ là số nguyên tố thì $k = 1$, nên $p = 5$.

Khi đó $p+6 = 11, p+12 = 17, p+18 = 23, p+24 = 29$.

Vậy $p = 5$ là số nguyên tố thỏa mãn đề bài.

Bài 22. Đặt $A = p^4 + 2$, nếu $p = 2$ thì $A = 18$ không là số nguyên tố.

Nếu $p = 3$ thì $A = 83$ là số nguyên tố.

Nếu $p > 3$ thì p lẻ nên có dạng $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$.

Khi đó $A = p^4 + 2$ chia hết cho 3 và $A > 3$ nên A không là số nguyên tố. $p = 3$ là số nguyên tố thỏa mãn đề bài.

Bài 23. $A = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$

Nếu $x = 0$ thì $A = 4$ không là số nguyên tố.

Nếu $x = 1$ thì $A = 5, B = 3$ là các số nguyên tố.

Nếu $x \ge 2$ thì $A = \left[x(x-2)+2\right](x^2+2x+2)$ là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên A là hợp số. Vậy $x = 1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 24. Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 $\left(x_1, x_2 \in N^*\right)$ thì ta phải có :

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(b+1) \ge 0$$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-(x_1+x_2) \\ b=x_1x_2-1 \end{cases}$$

Ta có: $a^2+b^2=\left[-(x_1+x_2)\right]^2+(x_1x_2-1)^2$

$$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$$

Do $x_1,x_2\in N^*$ nên suy ra:

$$\begin{cases} x_1^2+1\in N \\ x_1^2+1\geq 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2^2+1\in N \\ x_2^2+1\geq 2 \end{cases}$$

Vậy $a^2+b^2\in N, a^2+b^2\geq 4; a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)\Rightarrow a^2+b^2$ là hợp số.

Bài 25. Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=n \end{cases}.$$

Do m,n là các số nguyên tố suy ra $x_1=1,x_2=n$ (giả sử x_1,x_2).

Từ $x_1+x_2=m\Rightarrow 1+n=m\Rightarrow m,n$ là hai số nguyên tố liên tiếp $\Rightarrow n=2,m=3$.

Ta có phương trình: $x^2-3x+2=0$, phương trình này có hai nghiệm là 1 và 2.

Bài 26. Vì n là số nguyên tố lớn hơn 2 nên $2013n^2+3=2008n^2+5(n-1)(n+1)+8\,\vdots\,8$

Vì n là số nguyên tố lẻ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 27.

1. Không mất tổng quát giả sử $p\leq q\leq r$.

Với $p=2$: $2qr=q+r+162\Leftrightarrow 4qr-2q-2r=324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1)-(2r-1)=325\Leftrightarrow (2q-1)(2r-1)=325=5^2\cdot 13.$

$3\leq 2q-1\leq 2r-1\Rightarrow 9\leq (2q-1)^2\leq (2r-1)(2q-1)\Leftrightarrow 9\leq (2q-1)^2\leq 325\Leftrightarrow 3\leq 2q-1\leq 18.$

Do $2q-1$ là ước của $5^2\cdot 13$ nên $2q-1\in\{5;13\}$.

Nếu $2q-1=5\Leftrightarrow q=3\Rightarrow r=33$ (loại).

Nếu $2q-1=13\Leftrightarrow q=7\Rightarrow r=13$ (thỏa mãn).

$pqr=p+q+r+160\Leftrightarrow p(qr-1)-q-r=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+qr-1-q-r=160\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+q(r-1)-(r-1)-2=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)=162.$

Nếu p lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)\,\vdots\,4$ mà 162 không chia hết cho $4\Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

Bài 28. Đặt $p^3-4p+9=t^2 (t\in N)$

Biến đổi thành $p\left(p^2-4\right)=(t-3)(t+3)\quad (1)\Rightarrow p\,|\left(t-3\right)\vee p\,|\left(t+3\right)$

Trường hợp 1: Nếu $p\,|\,t-3$

Đặt $t-3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p\left(p^2-4\right)=pk(pk+6)\Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4+4\left(6k+4\right)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2\right)^2<k^4+24k+16<\left(k^2+4\right)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=\left(k^2+1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2\Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2\Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3)\Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4\Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2\Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p\,|\,t+3$

Đặt $t+3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6)\Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 29. Ta có p^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét p^2 chia cho 3 dư 0, vì p là số nguyên tố nên $p=3$, suy ra $q=1$, vô lí.

Xét p^2 chia cho 3 dư 1, suy ra $8q$ chia hết cho 3 mà $(8;3)=1$nên $q=3\Rightarrow p=5$thỏa mãn.

Vậy $p=5\,;q=3$ thỏa mãn bài.

Bài 30. Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$

$\Rightarrow mx-my=(mz-ny)\sqrt{2019} \Rightarrow \begin{cases} nx-my=0 \\ mz-my=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}\Rightarrow xz=y^2$

$x^2+y^2+z^2=\left(x+z\right)^2-2xz+y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x+y+z\right)\left(x+z-y\right)$.

Vì $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x+y+z \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$.

Thử lại $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận $\left(x;y;z\right)=\left(1;1;1\right)$.

Bài 31. Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b + a = b – a = p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b + a = p^2$ và $b – a = 1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a = (p –1)(p + 1)$.

Từ p lẻ suy ra $p + 1$, $p –1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p –1)(p + 1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p + 1$; $p –1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2\left(p+a+1\right)=2\left(p+\dfrac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=\left(p+1\right)^2$ là số chính phương.

Bài 32. Do $p-5\,\vdots\,8$ nên $p=8k+5$ $(k\in\mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2}\vdots\left(ax^2-by^2\right)\vdots\, p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}\vdots\, p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots\left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4}\vdots p$ (*)

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\text{mod } p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Bài 33. Ta có :

$p^{2016}-1=(p^4)^{504}-1^{504}=(p^4-1).A=(p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A\in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1)\vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k\pm 1;\quad 5k\pm 2$

- Nếu $p=5k\pm 1$ thì $p^2=25k^2\pm 10k+1=5n+1$

- Nếu $p=5k\pm 2$ thì $p^2=25k^2\pm 20k+4=5l-1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4-1=5q\vdots 5$ (4) ($(n,l,q\in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016}-1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

Bài 34. Không mất tính tổng quát giả sử $\mathrm{m}<\mathrm{n}<\mathrm{p}<\mathrm{q}$.

Nếu $\mathrm{m}\ge 3$ thì $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3.5.7.11}<1.$

Vậy $\mathrm{m}=2$ và (1) trở thành $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}=\frac{1}{2}$ (2).

Nếu $\mathrm{n}\ge 5$ ta có $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2npq}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2.5.7.11}<\frac{1}{2}.$

Vậy $\mathrm{n}=3$ và (2) trở thành $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{6pq}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow(p-6)(q-6)=37$

suy ra $\mathrm{p}=7$ và $\mathrm{q}=43$.

Vậy $(m;n;p;q)$ là $(2;3;7;43)$ và các hoán vị của nó.

Bài 35. Ta có:

$2A=2^{3n+2}+2^{3n}+2=5.8^n+2$

$Do\ 8\equiv 1(\text{mod } 7)\Rightarrow 8^n\equiv 1(\text{mod } 7)\Rightarrow A\equiv 5+2\equiv 0(\text{mod } 7)\Rightarrow A\vdots 7$

Mặt khác ta chứng minh được A > 0 nên A là hợp số.

Bài 36. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in N^*$.

+ Nếu $q = 3k+1$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q = 3k+2$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q = 6(k+1) \vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Bài 37. $p^2+2 = p^2-1+3 = (p-1)(p+1)+3$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp: $p-1, p, p+1$ có một số chia hết cho 3. Số đó không thể là $p-1$ hoặc $p+1$ vì nếu giả sử ngược lại, ta suy ra p^2+2 chia hết cho 3 và $p^2+2>3$, vô lý, vì p^2+2 là số nguyên tố. Vậy p phải chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố, do đó $p=3$.

Khi $p=3 \Rightarrow p^3+2 = 3^3+2 = 29$ là số nguyên tố.

Bài 38. Giả sử $2015 = a_1+a_2+...+a_n$, trong đó $a_1;a_2;...;a_n$ là các hợp số

Theo bài ra ta có

+ Mỗi số hạng $a_1;a_2;...;a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)

+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)

Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.

Nếu có hợp số lẻ $a_1 \geq 15 \Rightarrow a_1 = 9-(a_1-9)$ với $(a_1-9) \geq 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)

Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)

Do đó: $2015 = 9+a_2+a_3+...+a_n$ với $a_2;a_3;..;a_n$ là các hợp số chẵn

$\Rightarrow a_2+a_3+...+a_n = 2006 \quad (3)$

$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.

Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2 \geq 8 \Rightarrow a_2 = 4-(a_2-4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)

Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4

Giả sử $a_2 = 6 \Rightarrow a_3 = a_4 = ...a_n = 4 \Rightarrow (n-2).4 = 2000 \Rightarrow n = 502$

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 502$

Bài 39. Nếu $p=q$ thì $p = \dfrac{2(m^2+1)}{m+1} = 2m-2+\dfrac{4}{m+1}$.

Do $m \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4 \vdots (m+1) \Rightarrow m=0; m=1; m=3 \Rightarrow p=2;\ p=5.$

Nếu $p \neq q$ thì pq và $p+q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p+q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1 \Rightarrow [(m+1)(m-1)] \vdots r \Rightarrow (m^2-1) \vdots r$

$\Rightarrow \left[(m^2+1)-(m^2-1)\right] \vdots r \Rightarrow 2 \vdots r \Rightarrow r=1$ hoặc $r=2$.

+) $r=1$ suy ra $p+q=m+1,\ pq=m^2+1 \Rightarrow p,q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do $\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-(2m^2+2)<0$

+) $r=2$ suy ra $2pq=m^2+1$ và $2(p+q)=m+1 \Rightarrow p,\ q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

$\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-(6m^2+6)<0$.

Vậy bộ các số nguyên tố $(p;\ q)$ cần tìm là $(p;q)=(2;2);\ \ (p;q)=(5;5)$.

Bài 40.

+) Nếu p=7k + i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2

Xét $p>2 \Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$

Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT

+) Xét p=2 thì $3p^2+4=16$ (loại)

+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p = 7 là nguyên tố, có:

$2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy p = 7

Bài 41. Xét n = 0 thì A = 1 không phải số nguyên tố

n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố

Xét n > 1 ta có:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1=n^2\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]+n\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^3-1\right)$ suy ra $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Tương tự: $\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Do đó với n > 1 thì A chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$ nên A là hợp số.

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm.

Bài 42.

Đặt $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}=\dfrac{x}{y}$ (x, y $\in$ Z, xy $\neq$ 0) $\Rightarrow$ ay – bx = (by – cx)$\sqrt{2}$ (*)

Vì a, b, c, x, y $\in$ Z $\Rightarrow$ ay – bx $\in$ Z $\Rightarrow$ (by – cx)$\sqrt{2}$ $\in$ Z

Mà $\sqrt{2}$ $\in$ I nên từ (*)$\Rightarrow \begin{cases} ay-bx=0 \\ by-cx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay=bx \\ cx=by \end{cases}$

$\Rightarrow$ acxy = b^2xy $\Rightarrow$ ac = b^2 (vì xy $\neq$ 0)

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac + b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+c+b)$

Vì $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố và a + c – b < a + c + b

$\Rightarrow$ a + b – c = 1 $\Rightarrow$ a + b + c = $a^2 + b^2 + c^2$ (1)

Mà a, b, c nguyên dương nên a $\leq a^2$, b $\leq b^2$, c $\leq c^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = b = c = 1, thử lại: Thỏa mãn, kết luận

Bài 43. Vì k là số nguyên tố suy ra $k^2 + 4 > 5; k^2 + 16 > 5$

-Xét k = 5n $(n \in N)$ mà k là số nguyên tố nên k = 5.

Khi đó $k^2 + 4 = 29$; $k^2 + 16 = 41$ đều là các số nguyên tố.

-Xét k = 5n+1 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 10n + 1 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 2 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 = 20n + 4 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n +3 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 30n + 9 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 4 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 40n + 16 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

Vậy để $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ là các số nguyên tố thì k = 5.

Bài 44. Ta có $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2 + 1$ và $p^2 - 1$ là các số chẵn

$\Rightarrow p^4 - 1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20} - 1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4;25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Bài 45. Từ giả thiết suy ra b chẵn, ta đặt $b = 2c$ thì $p = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a-c}{b-c}} \Leftrightarrow \frac{4p^2}{c^2} = \frac{a-c}{a+c}$, đặt $\frac{2p}{c} = \frac{m}{n}$

với $(m,n) = 1$ và $k = (a-c, a+c) \Rightarrow \begin{cases} a - c = km^2 \\ a + c = kn^2 \end{cases} \Rightarrow 2c = k(n^2 - m^2)$ và $4pn = km(n^2 - m^2)$.

Nếu m, n cùng lẻ thì $4pn = km\left(n^2 - m^2\right) \vdots 8 \Rightarrow p$ chẵn, tức là $p = 2$.

Nếu m, n không cùng lẻ thì m chia 4 dư 2. (do $2p$ không là số chẵn không chia hết cho 4 và $\dfrac{2p}{c}$ là phân số tối giản). Khi đó n là số lẻ nên $n^2 - m^2$ là số lẻ nên không chia hết cho 4 suy ra k là số chia hết cho 2. Đặt $k = 2r$ ta có $2pn = rm\left(n^2 - m^2\right)$ mà $\left(n^2 - m^2, n\right) = 1 \Rightarrow r \vdots n$ đặt $r = ns$ ta có $2p = s(n-m)(n+m)m$ do $n-m$, $n+m$ đều là các số lẻ nên $n+m = p$, $n-m = 1$, suy ra s, $m \le 2$ và $(m;n) = (1;2)$ hoặc $(2;3)$. Trong cả hai trường hợp đều suy ra $p \le 5$. Với $p = 5$ thì $m = 2$, $n = 3$, $s = 1$, $r = 3$, $k = 6$, $c = 15$, $b = 30$, $a = 39$.

Bài 46. Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.

Trường hợp 1: $p = 2$

$\Rightarrow p(p+3) = 2(2+3) = 2.5 = 10$

$\Rightarrow 10 + q(q+3) = n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = \left(n^2 - q^2\right) + (3n - 3q)$

$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \ge 2$.

$\Rightarrow n + q + 3 > 2 + 2 + 3 = 7$

Mà $10 = 1.10 = 2.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3 = 10 \\ n-q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q = 7 \\ n-q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ q = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p = 3$

$\Rightarrow p(p+3) = 3.(3+3) = 3.6 = 18$

$\Rightarrow 18 + q(q+3) = n(n+3) \Leftrightarrow 18 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = \left(n^2 - q^2\right) + (3n - 3q)$

$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \ge 3$.

$\Rightarrow n + q + 3 > 3 + 3 + 3 = 9$

Mà $18 = 1.18 = 2.9 = 3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3 = 18 \\ n-q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q = 15 \\ n-q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ q = 7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

Vì $q\ge p>3 \Rightarrow p\nmid 3; q\nmid 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n\nmid 3$) hoặc $n(n+3)\vdots 3$ nếu $n\vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3)\ne n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47. Ta có:

$p^2q+p\vdots p^2+q \Rightarrow q(p^2+q)-(p^2q+p)=q^2-p\vdots p^2+q.$

$pq^2+q\vdots q^2-p \Rightarrow (pq^2+q)-p(q^2-p)=p^2+q\vdots q^2-p.$

$q^2-p=-(p^2+q) \Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0 (VN).$

$q^2-p=p^2+q \Leftrightarrow (q+p)(q-p-1)=0 \Leftrightarrow q-p-1=0 \Leftrightarrow q=p+1.$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p=2, q=3$ (thỏa mãn bài toán)

Bài 48. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó

$\Delta=b^2-4ac=m^2, (m\in\mathbb{N})$.

Suy ra $b^2>m^2$ hay $b>m$. (1)

Ta có $4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac$

$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$

$=(20a+b+m)(20a+b-m)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m)\vdots\overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m)\vdots\overline{abc}$, suy ra $20a+b+m\ge\overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m \ge 100a+10b+c > 100a+10b$

Do đó

$20a+2b > 100a+10b \Leftrightarrow 2(10a+b) > 10(10a+b) \Leftrightarrow 2 > 10$ (vô lý)

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. Ta có $2n^2-6n+2 = 2\left[n(n-3)+1\right]$

Vì n(n – 3) chẵn nên n(n – 3) + 1 = 2k +1 với $k \in N \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2}-12 = 25^{2k+1}+1-13 \vdots 13$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2}-12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2}-12=13$

nên n(n – 3) + 1 = 1 , suy ra n = 0 hoặc n = 3.

Bài 50. Xét dãy số có dạng $2; 2.3; 2.3.5; ...$

Giả sử hai số cần chọn là $a = 2.3.4.5...p_n; b = 2.3.5...p_m$ với p_n, p_m $(n<m)$ là các số nguyên tố thứ n và thứ m.

Ta có $b-a = 2.3.5...p_m - 2.3.5...p_n = 30000 \Leftrightarrow 2.3.5.p_n\left(p_{n+1}.p_{n+2}...p_m - 1\right) = 2.3.5.10000$

Ta thấy $2.3.5.1000$ tồn tại ước của 3 nên a và b có chữa số nguyên tố 3 nên $p_n \ge 3$ và 1000 không có ước nguyên tố khác 2 và 5 nên a không có ước khác 2 và 5 nên $p_n \le 5$. Từ đó ta được

+ Nếu $p_n = 3$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m = 10000,$ không tồn tại p_m thỏa mãn

+ Nếu $p_n = 5$ ta được $p_{n+1}.p_{n+2}...p_m = 1001 = 7.11.13 \Rightarrow p_m = 13,$ từ đó ta được

$a = 2.3.5 = 30; b = 2.3.5.7.11.13 = 30030$

Bài 51. Giả sử tồn tại số nguyên tố p lẻ sao cho:

$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow p.(m^2+n^2) = m^2n^2 \Rightarrow m^2n^2 \vdots p$,

Mà p là số nguyên tố nên $m \vdots p$ hoặc $n \vdots p$.

Nếu $m \vdots p$ thì $m = kp (k \in N^*)$

$\Rightarrow p.(m^2+n^2) = (kpn)^2 \Rightarrow m^2+n^2 = pk^2n^2 \Rightarrow \left(m^2+n^2\right) \vdots p$

Mà $m \vdots p$ nên $n \vdots p$.

Vậy $m \ge p, n \ge p \Rightarrow m^2 \ge p^2, n^2 \ge p^2$

Suy ra $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \le \frac{2}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} \le \frac{2}{p^2} \Rightarrow p \le 2$. Vô lí vì p là số nguyên tố lẻ.

Bài 52. Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b\in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b\ge 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k\in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a\ge 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Bài 53.

Ta có:

$$n^8+4^{2k-1}=n^8+\left(2^{2k-1}\right)^2=\left(n^2\right)^4+2.2^{k-1}n^2+\left(2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$$

$$=\left(n^2+2^{2k-1}-2^{k-1}.n\right)\left(n^2+2^{2k-1}+2^{k-1}.n\right)$$

Do n,k là các số tự nhiên và n^8+4^{2k+1} là một số nguyên tố nên

$$n^8+4^{2k+1}=\left(n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n\right)\left(n^2+2^{2k+1}+2^{k+1}.n\right)$$

$$\Rightarrow n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n=1$$

$$\Leftrightarrow n^2-2.2^k.n+2.\left(2^k\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left(n-2^k\right)^2+\left(2^k\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n-2^k=0 \\ 2^k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow n^8+4^{2k+1}=1+2+2=5 \\ \begin{cases} n-2^k=1 \\ 2^k=0 \end{cases} (VN) \\ \begin{cases} n-2^k=-1 \\ 2^k=0 \end{cases} (VN) \end{array}\right.$$

Vậy $n=1, k=0$ là các giá trị cần tìm.

Bài 54. Ta có:

$P=\left(7+x+x^2\right)\left(7+x-x^2\right)$

Ta có $7+x+x^2>1$

Vì P là số nguyên tố nên $7+x-x^2=1 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \quad (\text{L}) \end{array}\right.$

Vậy $x=3 \Rightarrow P=19$ (thỏa mãn).

Bài 55. Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1 \Rightarrow n^2+4=5k+5 \vdots 5$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

nên n^2+4 không là số nguyên tố.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4 \Rightarrow n^2+16=5k+20 \vdots 5$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 \vdots 5$ hay n chia hết cho 5.

Nhận xét. Bài toán áp dụng tính chất chia hết, chia có dư của một số chính phương khi chia cho 5; tính chất số nguyên tố, hợp số,…

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ tồn tại số dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Chứng minh:
  + $m=5k \Rightarrow m^2=25k^2$ chia 5 dư 0 (đúng).
  + $m=5k+1 \Rightarrow m^2=25k^2+10k+1$ chia 5 dư 1 (đúng).
  + $m=5k+2 \Rightarrow m^2=25k^2+20k+4$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+3 \Rightarrow m^2=25k^2+30k+9$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+4 \Rightarrow m^2=25k^2+40k+16$ chia 5 dư 1 (đúng).
- Áp dụng tính chất chia hết, chia có dư vào bài toán; "Số nguyên tố" là số chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
  + n chia 5 dư 1 thì $\left(n^2+4\right) \vdots 5$ nên $\left(n^2+4\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).
  + n chia 5 dư 4 thì $\left(n^2+16\right) \vdots 5$ nên $\left(n^2+16\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).
  + Do đó nếu $\left(n^2+4\right)$ và $\left(n^2+16\right)$ là số nguyên tố thì chỉ còn tồn tại trường hợp n^2 chia hết cho 5. Khi đó n chia hết cho 5.

Bài 56.

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1) \vdots 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

⇒ n chỉ có thể có dạng 10k ± 1 và 10k ± 3 với k ∈ ℕ.

Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Do n lẻ nên $n-1 \vdots 2$; $n+1 \vdots 2$ và $n^2+1 \vdots 2 \Rightarrow n^4-1 \vdots 8$. (1)

• Nếu $n=10k \pm 1 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^2-1 \vdots 10 \Rightarrow n^4-1 \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1 \vdots 40$

• Nếu $n=10k \pm 3 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)2 = 9 \pmod{10} \Rightarrow n^2+1 \vdots 10 \Rightarrow n^4-1 \vdots 5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4-1 \vdots 40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.
Trừ từng vế của (2) cho (1) ta
được $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 + 4y - 4x \Leftrightarrow p(p-1) = 2(y-x)(y+x+2)(*)$
$\Rightarrow 2(y - x)(y + x + 2) \vdots p$. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:
• $y - x \vdots p \Rightarrow y - x = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Khi đó từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(x + y + 2) \Rightarrow kp - k = 2k^2(x + y + 2) \Rightarrow y - x - k = 2k^2(x + y + 2)$
(loại vì $x + y + 2 > y - x - k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x + y + 2) > y - x - k$)
• $y + x + 2 \vdots p \Rightarrow x + y + 2 = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(y - x) \Rightarrow kp - k = 2k^2(y - x) \Rightarrow x + y + 2 - k = 2k^2(y - x)$ (**)
Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu $k \ge 2$ thì từ (**) ⇒ $x + y = 2k^2(y - x) + k - 2 \ge 8(y - x)$ (vì $y - x > 0$)
$\Rightarrow 9x \ge 7y \Rightarrow 7y < 14x \Rightarrow y < 2x$
Do đó từ (2) ⇒ $(p - 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p - 1)$
(vì $2x(x + 2) = p - 1$ theo (1))
$\Rightarrow p + 1 < 4 \Rightarrow p < 3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.
Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay $p - 1 = 4x + 2$ vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$
⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)
Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

Bài 57. a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} => \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} => c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ $ab \vdots (a + b) \Rightarrow a \vdots (a + b)$ hoặc $b \vdots (a + b)$
Điều này mâu thuẫn do $0 < a < a + b$, $0 < b < a + b$.
Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ $c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c) \Rightarrow a(b+c)\vdots b\ (**)$
Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1
Do đó từ (**) suy ra $a \vdots b$.
Chứng minh tương tự ta có $b(a + c) = a(2b – c) \Rightarrow b \vdots a$
Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c
Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)
Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 58. Ta có

$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 => a^2+2ab+b^2=c^2+2xd+d^2+ab-cd$$
$$<=> ab-cd=(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(*)$$

Nếu $ab-cd=0$. Do a + b + c + d > 0 => a + b – c – d = 0 => a + b + c + d = 2(c + d) là hợp số do $c + d \in \mathbb{N}^*$ và c + d > 1

Nếu $ab - cd \neq 0$. Từ (*) ⇒ ab – cd ⋮ (a + b + c + d).

$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow 3(ab - cd) + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2cd + d^2$

$\Rightarrow 3(ab - cd) = (c - d)^2 - (a - b)^2 = (c - d + a - b)(c - d - a + b) \neq 0$

⇒ (c – d + a – b)(c – d – a + b) ⋮ (a + b + c + d)

Giả sử a + b + c + d là số nguyên tố thì ta có

c – d + a – b ⋮ a + b + c + d hoặc c – d – a + b ⋮ a + b + c + d

Điều này mâu thuẫn do –(a + b + c + d) < c – d + a – b < a + b + c + d ;

–(a + b + c + d) < c – d – a + b < a + b + c + d và (c – d + a – b)(c – d – a + b) ≠ 0

Vậy a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. Biến đổi được $p = \left(n^2 + 1\right)\left(n - 1\right)$

Nếu $n = 0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề bài vì $p = \left(2^2 + 1\right)\left(2 - 1\right) = 5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 60.

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = \left(n+1\right)\left(n^2 - n + 1\right) + \left(n + 1\right) = \left(n+1\right)\left(n^2 - n + 2\right)$

Do $\forall n \in N^*$ nên $n + 1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$. Vậy $n^3 + n + 2$ là hợp số

Bài 61. Ta có: $\dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{c} \Leftrightarrow \left(a - c\right)\left(b^2 - ac\right) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = \left(a + c\right)^2 - b^2 = \left(a + c + b\right)\left(a + c - b\right)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1) a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow \left(a - 1\right)^2 + \left(c - 1\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$2) a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow \left(a - 1\right)^2 + \left(c - 1\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$3) a + c + b = -1, a + c - b = -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

$\Rightarrow \left(a + 1\right)^2 + \left(c + 1\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

$4) a + c - b = -1, a + c + b = -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

$\Rightarrow \left(a + 1\right)^2 + \left(c + 1\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \qquad (ktm)$

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

Bài 62. Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1; p = 3k - 1$ với $k > 1$

+ Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3.(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Bài 63. Do p là số nguyên tố và p > 3 nên p không chia hết cho 3. (*)

p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.

Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n.

Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = $90 \vdots 3$ nên $p^n \vdots 3$

Điều này mâu thuẫn (*).

Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. Rõ ràng p, q phân biệt. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q$. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $p = 2$. Không thỏa mãn vì $p + q$ lẻ, còn $2(p - q)^2$ chẵn.

Trường hợp 2. $p = 3$. Khi đó tìm được $q = 5$.

Trường hợp 3. $p \geq 5$. Gọi r_1, r_2 lần lượt là số dư của phép chia p, q cho 3.

Rõ ràng $r_1, r_2 \in \{1, 2\}$.

Nếu $r_1 = r_2$ thì $3 \nmid p + q$ và $3 \mid 2(p - q)^2$. Không thỏa mãn.

Nếu $r_1 \neq r_2$ thì $3 \mid p + q$ và $3 \nmid 2(p - q)^2$. Không thỏa mãn.

Vậy $(p; q) = (3; 5), (5; 3)$.

Bài 65. Ta có: p, q là số nguyên tố nên $pq + 11$ là số nguyên tố lớn hơn 11

$\Rightarrow pq + 11$ là số lẻ suy ra pq là số chẵn.

Do $7p + q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p và q không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p = 2$ thì $7p + q = 14 + q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu q chia hết cho 3, do q là số nguyên tố nên $q = 3$.

$7p + q = 17$; $pq + 11 = 17$ (T/m)

+) Nếu q chia cho 3 dư 1 thì $14 + q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p + q$ là hợp số

+) Nếu q chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq + 11 = 2q + 11$ chia hết cho 3

$\Rightarrow pq + 11$ là hợp số.

*) TH2: $q = 2$ thì $7p + q = 7p + 2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p+q=23; pq+11=17$ (Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên 2p chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow pq+11=2p+11$ chia hết cho 3 nên $pq+11$ là hợp số.

Vậy: $p=2,\ q=3$ hoặc $p=3,\ q=2$.

Bài 66. Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên b,d lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2=\overline{cd}+b-c \Leftrightarrow b^2-b=9c+d \Leftrightarrow b(b-1)=9c+d$

Nếu $b=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=3$ nên $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; \mathrm{d}=6$ (loại)

Nếu $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Leftrightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1;2;7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$

Bài 67. Trong 3 số $a,\ b,\ c$ có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c+1$ và $r = c+1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số $p,\ q,\ r$ có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 68. +) Với $p=2$ thì $p^2+2=8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p=3$ thì $p^2+2=11$ và $p^3+p^2+1=37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p>3 \Rightarrow p=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}, k\geq 2)$

$\Rightarrow p^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1)\ \vdots\ 3$ nên p^2+2 là hợp số.

Vậy chỉ có $p=3$ thì p^2+2 và p^3+p^2+1 đều là số nguyên tố.

Bài 69. Ta có: $x^2=45+y^2$.

Ta thấy $x^2>45$ và x là số nguyên tố nên x phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra x^2 là số lẻ.

Từ đó suy ra y^2 là số chẵn, mà y là số nguyên tố. Suy ra $y=2$; $x=7$

Vậy $x=7$ và $y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 70. 1) Đặt $d=UCLN(2n+1, 10n+7)$

Suy ra $2n+1 \vdots d$. Vì vậy $5(2n+1) \vdots d$.

Mà $10n+7 \vdots d$ nên $10n+7-5(2n+1) \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

Do đó $d = 2$ hoặc $d = 1$.

Nếu $d = 2$ thì $2n+1 \vdots 2$ (vô lý).

$\Rightarrow d = 1$.

$1 = UCLN(2n+1, 10n+7)$

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

2)

- Nếu là số nguyên tố lẻ thì $y^3 = x^2 + 23$ là số chẵn. Vậy $y^3 = 2$ (loại).
- Nếu $x = 2$ thì $y^3 = 2^2 + 23 = 27$. Vậy $y = 3$.

Bài 71. Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b)$

$=> \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a-b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương khi $a - b$ là số chính phương

Do a, b là các chữ số và $0 < a, b \le 9 => 1 \le a - b \le 8$

$=> (a-b)$ là số chính phương khi $(a-b) \in \{1, 4\}$

+Nếu $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 43$

+Nếu $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $=> \overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 72. Vì p là số nguyên tố do đó ta được $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$

Đặt $x = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$; $y = 6p^2 + 1 \Rightarrow 4y = 25p^2 - (p-2)(p+2)$

Khi đó

- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5

Suy ra x chia hết cho 5 mà $x > 5$ nên x không là số nguyên tố.

- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5

Suy ra 4y chia hết cho 5 mà $(4,5) = 1$ nên y chia hết cho 5 mà $y > 5$

Do đó y không là số nguyên tố

Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố nên $p = 5$.

Thử với $p = 5$ thì $x = 101$; $y = 151$ là các số nguyên tố

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. 1. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p(p-1) = q(q^2-1)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.

Nếu $p=q$ thì ta có $p-1=q^2-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=q=0 \\ p=q=1 \end{array}\right.$, điều này vô lí vì p, q là các số nguyên tố.

Do vậy $p \neq q$, khi đó do p và q là các số nguyên tố nên $p-1 \vdots q$ và $q^2-1 \vdots p$.

Như vậy tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn $p-1=mq; q^2-1=np$, thay vào đẳng thức đã cho ta được $m=n$. Do vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $\begin{cases} p-1=kq \\ q^2-1=kp \end{cases}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức $p(p-1)=q(q^2-1)$.

Thế $p=kq+1$ vào hệ thức $q^2-1=kp$ ta được $q^2-1=k(kq+1) \Leftrightarrow q^2-k^2q-k-1=0$.

Xem phương trình là phương trình bậc hai ẩn q, khi đó để phương trình có nghiệm nguyên dương thì

$\Delta=k^4+4(k+1)=k^4+4k+4$ phải là số chính phương.

Ta có $k^4<k^4+4k+4<(k^2+2)^2$ nên ta được $\Delta=(k^2+1)^2$.

Từ đó ta được $k^4+4k+4=(k^2+1)^2 \Leftrightarrow k=k^2 \Leftrightarrow k=1$.

Thay vào hệ thức đã cho ta được $q^2-q-2=0 \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow p=3$.

Vậy các số $p=3; q=2$ là các số nguyên tố cần tìm.

Bài 74. Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Suy ra ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p-1)p(p+1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3.

Để ý là $(3;8)=1$ nên ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2-1; r^2-1; s^2-1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2-q^2+r^2-s^2=(p^2-1)-(q^2-1)+(r^2-1)-(s^2-1)$.

Do đó ta được $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Từ $p^2-2q^2=1$ ta được $p^2=2q^2+1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p=2k+1$ với $k\in N^*$.

Khi đó ta được $(2k+1)^2=2q^2+1\Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2q^2+1\Leftrightarrow 2k(k+1)=q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q=2$.

Thay vào $p^2-2q^2=1$ ta suy ra được $p=3$.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)=(3;2)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

Bài 76.

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$ suy ra $p^3+\frac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2: Nếu $p=4k+1$, khi đó ta được $p^3+\frac{p-1}{2}=(4k+1)^3+2k$ là số lẻ nên

$p^3+\frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

- Trường hợp 3: Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3+\frac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3+\frac{p-1}{2}=x(x+1)\Leftrightarrow 2p(2p^2+1)=(2x+1)^2+1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2+1\,\vdots\,p$ vô lí vì $p=4k+3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 77. Do p và q là các số nguyên tố nên $p;q\ge 2$, do đó suy ra $r\ge 3$, mà r là số nguyên tố nên r là số lẻ.

Từ đó suy ra p^q và q^p khác tính chẵn lẻ nên p và q khác tính chẵn lẻ.

Như vậy trong hai số p, q có một số chẵn, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là q.

Khi đó $q=2$ nên ta được $p^2+2^p=r$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=3$, khi đó ta có $3^2+2^3=r$ hay $r=17$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p>3$, do p là số nguyên tố nên có dạng $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với k là số

nguyen dương.

Từ đó suy ra p^2 chia 3 dư 1 hay $p^2 = 3n + 1\left(n \in N^*\right)$.

Lại có p là số lẻ nên $2^p = \left(3-1\right)^p = 3m - 1\left(m \in N^*\right)$.

Từ đó ta được $p^2 + 2^p = 3n + 1 + 3m - 1 = 3\left(m+n\right) \vdots 3$ nên là hợp số. Do đó trường hợp này loại.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $\left(p;q;r\right) = \left(2;3;17\right),\left(3;2;17\right)$.

Bài 78. Từ $49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$ ta có $2q^2 - 193 \le r^2 \le 2p^2 - 49$, do đó $q^2 - p^2 \le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5 \le p < q < r$ ta được $r \ge 11$, do đó $2p^2 \ge 49 + 121 = 170$ hay $p \ge 11$.

Vì $\left(q-p\right)\left(q+p\right) \le 72$ nên $q - p = 2$ hoặc $q - p \ge 4$. Xét hai trường hợp sau:

- Với $q - p = 2$ và $q + p \le 36$, khi đó ta được $p = 11; q = 13$ hoặc $p = 17; q = 19$.

+ Nếu $p = 11; q = 13$ thì $145 \le r^2 \le 193$, suy ra $r = 13 = q$ (loại)

+ Nếu $p = 17; q = 19$ thì $529 \le r^2 \le 529$, suy ra $r = 23$ (nhận).

- Với $q - p \ge 4$ và $q + p \le 18$, không tồn tại vì $p \ge 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p = 17; q = 19; r = 23$.

Bài 79. Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$.

Suy ra $\frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$, do đó $c \in \left\{2;3\right\}$

- Với $c = 2$ suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b} < \frac{1}{5}$

Do đó $b \in \left\{7;11\right\}$

+ Với $b = 7$, khi đó từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \left\{19;23;29;31;37;41\right\}$

+ Với $b = 11$ từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a = 13$, do $a > b$

- Với $c = 3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b = 5$ (do $b > c$)

Thay $b = 5$ vào $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30}$ ta được $6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a = 7$.

Vậy có các bộ ba số nguyên tố khác nhau $\left(a;b;c\right)$ thoả mãn là:

CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 80. Ta có $x^5+px+3q=0 \Leftrightarrow x(x^4+p)=-3q$.

Vì q là số nguyên tố và x là số nguyên nên từ phương trình trên suy ra $x \in \{-1;-3;-q;-3q\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x=-1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1+p=3q$. Do q là số nguyên tố nên

- Khi $q=2$ thì ta được $p=5$
- Khi $q>2$ thì $3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn, do đó $p=2$ nên $q=1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x=-3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81=q$, do đó p là số nguyên tố chẵn và q là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p=2;q=83$.

+ Nếu $x=-q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+p^4=3$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+q^4>3$.

+ Nếu $x=-3q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81p^4=1$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+81q^4>1$.

Vậy các bộ số $(x;p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-1;5;2),(-3;2;83)$.

Nhận xét: Từ phương trình $x(x^4+p)=-3q$ ta suy ra được x chia hết cho 3 hoặc x^4+p chia hết cho 3. Đến đây ta xét các trường hợp như trên. Tuy nhiên với cách làm này việc lý luận sẽ phức tạp hơn.

Bài 81. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2}=x^2$ và $\frac{p^2+1}{2}=y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p+1=2x^2 & (1) \\ p^2+1=2y^2 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ (3)

Suy ra ta được $2(y+x)(y-x) \vdots p$ (4).

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x>1>$ Ta có $p+1=2x^2=x^2+x^2>x+1\Rightarrow p>x$.

Từ (2) ta lại có $y>1$ nên $p^2+1=2y^2=y^2+y^2>y^2+1\Rightarrow p>y$.

Từ (3) ta suy ra được $y>x$. Từ đó ta được $0<y-x<p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x=y\vdots p$.

Mà ta lại có $0<x+y<2p$ nên ta được $x+y=p$. Thay vào (30 ta được $p-1=2(y-x)$.

Từ đó suy ra $y-x=\frac{p+1}{2}$ nên ta được $x=\frac{p+1}{4};y=\frac{3p-1}{4}$.

Thay $x=\frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p+1=2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2\Leftrightarrow p=7$.

Thay $p=7$ vào (2) ta được $7^2+1=2y^2\Rightarrow y=5$.

Vậy $p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p:

Với p chẵn không xẩy ra, với $p=4k+1$ khi đó ta được $\frac{p^2+1}{2}=\frac{(4k\pm1)^2+1}{2}=8k^2\pm4k+1$.

Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2\pm4k+1$ là các số chính phương.

Bài 82. Giả sử tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q để $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}=q^2$ hay $(x+1)(2x+1)=2012q^2$.

Vì 2012 chia hết cho 4 nên $(x+1)(2x+1)\vdots 4$. Mà $2x+1$ là số lẻ nên $x+1\vdots 4$.

Từ đó ta được $x=4k-1$ với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình trên ta được $4k(8k-1)=2012q^2\Leftrightarrow k(8k-1)=503q^2$.

Để ý là $(k,8k-1)=1$ và 503 là số nguyên tố. Nên tồn tại các số nguyên dương a và b sao

cho $q=ab$ và $(a,b)=1$. Từ đó ta có các hệ $\begin{cases}k=503a^2\\8k-1=b^2\end{cases}$ và $\begin{cases}k=a^2\\8k-1=503b^2\end{cases}$.

+ Với $\begin{cases}k=503a^2\\8k-1=b^2\end{cases}$, hệ này vô nghiêm vì b^2 chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4.

+ Với $\begin{cases}k=a^2\\8k-1=503b^2\end{cases}$. Khi đó ta được $x=4k-1=4a^2-1=(2a-1)(2a+1)$.

Nếu $a=1$ thì $x=3$, khi đó ta được $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}=\frac{7}{503}$ không phải là số nhính phương.

Nếu $a\ge 2$ khi đó $x=(2a-1)(2a+1)$ là một hợp số. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 83. Đặt $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p=2$, khi đó ta được $n=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p>2$, khi đó ta có $\frac{p^2-p-2}{2}=n^3 \Leftrightarrow p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$.

Từ đó ta được $n+1\vdots p$ hoặc $n^2-n+1\vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n+1\vdots p$ thì ta được $n+1\ge p$. Từ đó ta được $2(n^2-n+1)\ge n^2+(n-1)^2+1>n>p-1$.

Từ đó ta được $p(p-1)<2(n+1)(n^2-n+1)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2-n+1\vdots p$, khi đó ta đặt $n^2-n+1=kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p(p-1)=2(n+1)(n^2-n+1)$ ta được $p=2(n+1)k+1$.

Từ đó suy ra $n^2-n+1=2(n+1)k^2+k$ hay $n^2-(2k^2+1)n-(2k^2+k-1)=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2+1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $(2k^2+1)^2<\Delta<(2k^2+4)^2$. Do đó $\Delta=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)=(2k^2+3)^2$.

Từ đó ta tính được $k=3$ suy ra $n=20$ nên $p=127$. Thử lại ta thấy $p=127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p=2$ và $p=127$.

Bài 84. Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

Khi đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$.

Do đó ta được $d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$, nên để có d lán nhất ta cần chọn được số nguyên tố c lớn nhất.

Chú ý rằng a, b, c là các số nguyên tố lẻ vì nếu $a = 2$ thì khi đó $b + c - a$ là số chẵn lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Do đó cả bảy số nguyên tố đã cho đều là số lẻ.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $a + b = 800$, khi đó số nguyên tố $a + b - c \ge 3$ nên ta được $c \le 797$. Vì 797 là số nguyên tố và ta cần lấy c lớn nhất nên ta chọn $c = 797$.

Khi đó ta được $a + b + c = 1597$ và $a + b - c = 3$. Vì 1597 và 3 đều là các số nguyên tố nên ta cần chọn các số nguyên tố a, b sao cho $797 + a - b$ và $797 + b - a$ là các số nguyên tố.

La chọn $a = 13$ thì ta được $b = 787$ và $797 + a - b = 23; 797 + b - a = 1571$ đều là các số nguyên tố.

Lúc đó ta được $d = 2c = 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 2: Nếu $b + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $b = 3$.

Mà ta lại có $a < b$ nên $a = 2$ không thỏa mãn. Do đó $c < 797$ nên $d < 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 3: Nếu $a + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $a = 3$.

Từ đó ta được $a + b - c \ge 5$ nên suy ra $b \ge 799$, do đó $b > c$ không thỏa mãn.

Do đó $c < 797$ nên $d = 2c < 1594$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là 1594 với các số nguyên tố được chọn trong trường hợp 1 và $a + b = 800$.

Bài 85. Khi $p = 2$ ta có: $\sqrt{k^2 - pk} = \sqrt{k^2 - 2k} = \sqrt{(k-1)^2 - 1}$ do $(k-1)^2 - 1$ không thể là số chính phương lớn hơn 0.

Khi $p \ge 3$ ta xét hai trường hợp.

+ Nếu k chia hết cho số nguyên tố p thì ta đặt $k = np$ khi đó ta có:
$k^2 - pk = n^2p^2 - p^2n = p^2n.(n-1)$ do $n.(n-1)$ không thể là số chính phương nên trường hợp này ta loại.

+ Nếu k không chia hết cho p, tức là $(k, p) = 1$ suy ra $(k, k-p) = 1$. Do đó $k^2 - pk = k(k-p)$ là số chính phương khi và chỉ khi k, $k - p$ là số chính phương. Tức là: $k = m^2$, $k - p = n^2 \Rightarrow p = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ mà p là số nguyên tố nên ta suy ra

$\begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = p \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{p+1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{(p+1)^2}{4}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $k = \dfrac{(p+1)^2}{4}$ với p là số nguyên tố lẻ.

Bài 86. Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A > 3)$ viết được thành tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A = 4a + r$, trong đó a là số nguyên dương và $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $r = 0$, khi đó $A = 4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n = a$
- Trường hợp 2: Nếu $r = 1$, khi đó $A = 4a + 1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 1 + 4 > 4a + 1 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 1 = 4(a-2) + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

- Trường hợp 3: Nếu $r = 2$, khi đó $A = 4a + 2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n \le a$.

Xét $n = a$ ta có $A = 4a + 2 = 4(a-1) + 6$ nên số n lớn nhất là $n = a$

- Trường hợp 4: Nếu $r = 3$, khi đó $A = 4a + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$.

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a-1) = 4a + 3 + 2 > 4a + 3 = A$$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 3 = 4(a-3) + 15 = 4(a-3) + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A > 3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số.

Với số nguyên dương $A > 3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a - 1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.

Áp dụng: Với $A = 2016 = 4.504$ thì ta được n lớn nhất là 504 và $A = 2016 = 504.4$.

Với $A = 2017 = 4.504 + 1$ thì ta được n lớn nhât là 503 và $A = 2017 = 502.4 + 9$.

Bài 87. Giả sử p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Ta có $p, q, r \ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $r = 2$, khi đó phương trình trên trở thành $5(p+1)(q+2) = 8pq$.

Do $(5,8) = 1$ và 5 là ước nguyên tố của pq nên ta được $p = 5$ hoặc $q = 5$.

+ Với $p = 5$, khi đó ta được $5(5+1)(q+2) = 8.5q \Rightarrow q = 6$ không phải là số nguyên tố.

+ Với $q = 5$, khi đó ta được $5(p+1)(5+2) = 8.5p \Rightarrow p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r = 3$, khi đó phương trình trên trở thành $(p+1)(q+2) = 2pq$

Từ đó ta được $(p-1)(q-2) = 4 = 1.4 = 2.2$. Do p và q là các số nguyên tố nên $q - 2 \ne 2; q - 2 \ne 4$.

Nên từ đó ta suy ra được $\begin{cases} p - 1 = 4 \\ q - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 5 \\ q = 3 \end{cases}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r > 3$, khi đó ta có $4pqr = (p+1)(q+2)(r+3) < 2r(p+1)(p+2)$

Hay ta được $2pq < (p+1)(q+2) \Rightarrow (p-1)(q-2) < 4$.

Do đó $p - 1 < 4; q - 2 < 4$ và p là số nguyên tố nên ta được $p = 2$ hoặc $p = 3$.

+ Với $p = 2$ thì từ phương trình đã cho ta được $3(q+2)(r+3) = 8qr$.

Do $(3,8) = 1$ nên 3 phải là ước nguyên tố của qr, mà q và r là các số nguyên tố, lại có $r > 3$ nên suy ra được $q = 3$. Từ đó ta được $r = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p = 3$ thì từ phương trình đã cho ta được $(q+2)(r+3) = 3qr$

Hay ta được $2qr - 3q - 2r = 6 \Leftrightarrow (q-1)(2r-3) = 9 = 1.9 = 3.3$.

Lại có $r > 3$ nên $2r - 3 > 3$, do đó từ phương trình trên ta được $\begin{cases} 2r - 3 = 9 \\ q - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 6 \\ q = 2 \end{cases}$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các bộ ba số nguyên tố $(p; q; r)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(7; 5; 2), (5; 3; 3), (2; 3; 5)$.

Bài 88. Đặt $p_1|a_1-a_2|=p_2|a_2-a_3|=...=p_n|a_n-a_1|=k$ với k là một số không âm.

Khi đó ta được $|a_1-a_2|=\frac{k}{p_1}; |a_2-a_3|=\frac{k}{p_2};...; |a_n-a_1|=\frac{k}{p_n}$

Hay $a_1-a_2=\frac{kt_1}{p_1}; a_2-a_3=\frac{kt_2}{p_2};...; a_n-a_1=\frac{kt_n}{p_n}$ với $t_1;t_2;...;t_n$ nhận giá trị là 1 hoặc -1.

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$

Đặt $M=\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\Rightarrow M-\frac{t_1}{p_1}=\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}=\frac{Q}{p_2.p_3...p_n}$. Suy ra Q là một số nguyên. Từ đó ta được $p_2.p_3...p_n(Mp_1-t_1)=Qp_1$. Hay ta được

$p_1(p_2.p_3...p_n.M-Q)=t_1.p_2.p_3...p_n$

Nếu M là số nguyên thì từ đẳng thức trên suy ra vế trái chia hết cho p_1 còn vế phải không chia hết cho p_1, điều này vô lí. Do đó M không thể là số nguyên, suy ra $M\neq 0$.

Do đó từ $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$ ta suy ra được $k=0$

Điều này dẫn đến $p_1|a_1-a_2|=p_2|a_2-a_3|=...=p_n|a_n-a_1|=0$

Hay suy ra được $|a_1-a_2|=|a_2-a_3|=...=|a_n-a_1|=0$ nên $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 89. Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c=2$, khi đó $a^b+2011=2$, điều này vô lí do a, b lớn hơn 1.
- Nếu $c>3$, khi đó do c là số nguyên tố nên c là số lẻ.

Từ $a^b+2011=c$ ta suy ra được a^b+2011 là số lẻ nên a^b là số chẵn hay a là số chẵn.

Do a là số nguyên tố nên ta được $a=2$. Như vậy 2^b+2011 là số nguyên tố. Ta xét các khả năng sau

+ Khi $b=2$ thì ta được $2^b+2011=2015$ là một hợp số.

+ Khi $b\geq 3$, do b là số nguyên tố nên b là số lẻ. Ta đặt $b=2k+1, k\in N^*$.

Khi đó ta có $2^b+2011=2^{2k+1}+2011=2.2^{2k}+2011=2.4^k+2011=2.(3+1)^k+2011$

Dễ thấy $2(3+1)^k$ chia 3 dư 2 và 2011 chia 3 dư 2 nên ta được $2.(3+1)^k+2011$ chia hết cho 3.

Do đó $2^b + 2011$ chia hết cho 3. Suy ra $2^b + 2011$ là một hợp số.

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, c để $a^b + 2011 = c$.

Bài 90. Ta xét các trường hợp sau

- Với $p = 2$, khi đó tồn tại $n = 1$ và $x = y = 1$ để $2^1 = 1^3 + 1^3$.
- Với $p = 3$, khi đó tồn tại $n = 2$ và $x = 1; y = 2$ để $3^2 = 1^3 + 2^3$.
- Với $p > 3$, khi đó giả sử tồn tại các số nguyên dương n, x, y với n bé nhất thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Do $p > 3$ nên suy ra $(x;y) \neq (1;1)$, do đó $x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy > 1$ và $x + y > 1$.

Ta có $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ nên $(x^3 + y^3) \vdots (x+y)$ và $(x^3 + y^3) \vdots (x^2 - xy + y^2)$.

Do đó suy ra $(x+y)$ và $(x^2 - xy + y^2)$ phải cùng chia hết cho p.

Suy ra $(x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$ chia hết cho p. Do p là số nguyên tố và $p^n = x^3 + y^3$ nên ta được x và y chia hết cho p.

Từ đó suy ra $n > 3$, khi đó chia cả hai vế của $p^n = x^3 + y^3$ cho p^3 ta được

$$p^{n-3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3.$$

Từ đó suy ra tồn tại số tự các số nguyên dương $n-3; \frac{x}{p}; \frac{y}{p}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Tuy nhiên điều này lại mâ thuẫn với việc nhọn n nhỏ nhất.

Vậy với $p > 3$ thì không tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Do đó các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p = 2$ và $p = 3$.

Bài 91. Đặt $A = \frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} = \frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3} + \frac{1}{3n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $n = 3k$ với k là một số nguyên dương, khi đó ta được

$$A = 3k^3 + 8k + \frac{1}{9k}$$

Dễ thấy $3k^2 + 8k < A < 3k^2 + 8k + 1$ nên suy ra $[A] = \left[3k^2 + 8k + \frac{1}{9k}\right] = 3k^2 + 8k = k(3k+8)$.

Để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k=1$, khi đó $\left[A\right]=11$ là đó nguyên tố. Từ đó ta tìm được $n=3$

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+1$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+2k+\frac{1}{3}+8k+\frac{8}{3}+\frac{1}{9k+3}=3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}$$

Dễ thấy $3k^2+10k+3<A<3k^2+10k+3+1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}\right]=3k^2+10k+3=\left(k+3\right)\left(3k+1\right).$$

Như vậy để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k+3=1$ hoặc $3k+1=1$, từ đó ta tìm được $k=1$.

Khi đó $\left[A\right]=3$ là một số nguyên tố và $n=1$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+2$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+4k+\frac{4}{3}+8k+\frac{16}{3}+\frac{1}{9k+6}=3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}$$

Ta thấy $0<\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}<1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}\right]=3k^2+12k+6=3\left(k^2+4k+2\right)$$

Suy ra với mọi k thì $\left[A\right]$ luôn là số nguyên tố.

Vậy để $\left[A\right]$ là số nguyên tố thì $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 92. Gọi d là ước chung lớn nhất của x, y ta suy ra $\begin{cases} x=m \\ y=nd \\ \left(m,n\right)=1 \end{cases}$.

Ta có: $A=\frac{x^2+py^2}{xy}=\frac{m^2d^2+pn^2d^2}{mnd^2}=\frac{m^2+pn^2}{mn}\Rightarrow m^2+pn^2\,\vdots\,mn\Rightarrow\begin{cases} m^2+pn^2\,\vdots\,n \\ m^2+pn^2\,\vdots\,m \end{cases}\Rightarrow m^2\,\vdots\,n$.

Mặt khác ta có $\left(m,n\right)=1$ suy ra $n=1$ do đó $m^2+p\,\vdots\,m\Rightarrow p\,\vdots\,m$ mà p là số nguyên tố nên $m=1$ hoặc $m=p$.

\+ Nếu $m=1$ thì $x=y=d\Rightarrow A=p+1$.

\+ Nếu $m=p\Rightarrow x=dp, y=d$ khi đó $A=\frac{\left(dp\right)^2+pd^2}{d^2p}=p+1$.

Áp dụng vào bài toán ta suy ra đpcm.

Bài 93. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^3-q^5=\left(p+q\right)^2$. Khi đó ta được $p^3-q^5>0$.

Từ đó ta được $p^3>q^5\ge 2^5$ nên ta được $p>3$.

Suy ra p không chia hết cho 3. Ta xét các trường hợp sau:

• Nếu $q=3$, khi đó $p^3-3^5=\left(p+3\right)^2 \Leftrightarrow p^3-p^2-6p-252=0 \Leftrightarrow \left(p-7\right)\left(p^2+6p+36\right)=0$.

Do $p^2+6p+36>0$ nên ta được $p-7=0 \Rightarrow p=7$.

• Nếu $q\ne 3$ khi đó $p=3m\pm 1; q=3n\pm 1$ với m, n là các số nguyên dương.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n+1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $\left(p+q\right)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n-1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 2 và $\left(p+q\right)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n+1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 1 và $\left(p+q\right)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n-1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $\left(p+q\right)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $\left(p;q\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(3;7\right)$.

Bài 94. Ta có $2a^2b=a\left(a+b\right)^2-a\left(a^2+b^2\right)$.

Do p^4 là ước của a^2+b^2 và $a\left(a+b\right)^2$ nên p^4 cũng là ước của $2a^2b$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên suy ra p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 không vượt quá 2, khi đó a^2 không chia hết cho p^4. Do đó b phải chứa p^2, điều này có nghĩa là b chia hết cho p^2, từ đó ta được b^2 chia hết cho p^4. Từ đó suy ra a^2+b^2 không chia hết cho p^4, điều này mâu thuẫn vơi giả thiết.

Do vậy a phải chia hết cho p^2 nên a^2 không chia hết cho p^4. Từ a^2+b^2 không chia hết cho p^4 ta suy ra được b^2 chia hết p^4, do đó b chia hết cho p^2

Dẫn đến $a+b$ chia hết cho p^2 nên suy ra $a\left(a+b\right)$ chia hết cho p^4.

Vậy p^4 cũng là ước của $a\left(a+b\right)$.

Bài 95. Đặt $A=a^2-b^2-5a+3b+4$, dễ thấy A là số chẵn. Do đó A là số nguyên tố khi và chỉ khi A = 2, hay $A=a^2-b^2-5a+3b+4=2$, suy ra $\left(a+b-4\right)\left(a-b-1\right)=2$.

Ta xét các trường hợp sau :

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=1 \\ a-b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=4; b=1$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=2 \\ a-b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=4;\ b=2$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-1 \\ a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2$.

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-2 \\ a-b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=1$

Bài 96. Ta có $f\left(5\right)-f\left(4\right)=2012 \Leftrightarrow 61a+9b+c=2012$

$$\begin{aligned} f\left(7\right)-f\left(2\right) &= \left(343a+49b+7c+d\right)-\left(8a+4b+2c+d\right)=335a+45b+5c \\ &= 305a+45b+5c+30a=2012+30a=2\left(1006+15a\right) \end{aligned}$$

Vì a là số nguyên nên ta được $f\left(7\right)-f\left(2\right)$ chia hết cho 2 và $1006+15a$ khác 1

Do đó $f\left(7\right)-f\left(2\right)$ là hợp số

Bài 97. Theo bài ra f(x) có dạng $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a nguyên dương.

Ta có $2010=f\left(5\right)-f\left(3\right)=\left(5^3-3^3\right)a+\left(5^2-3^2\right)b+\left(5-3\right)c=98a+16b+2c$

$$\Rightarrow 16b+2c=\left(2010-\ 98a\right)$$

Lại có:

$$\begin{aligned} f\left(7\right)-f\left(1\right) &= \left(7^3-1^3\right)a+\left(7^2-1^2\right)b+\left(7-1\right)c=342a+48b+6c=342a+3\left(16b+2c\right) \\ &= 342a+3\left(2010-98a\right)=48a+6030=3\left(16a+2010\right) \end{aligned}$$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$. Vậy $f\left(7\right)-f\left(1\right)$ là hợp số

Bài 98. Biến đổi $2^m.p^2+1=q^5$ thành $2^m.p^2=\left(q-1\right)\left(q^4+q^3+q^2+q+1\right)$

Do $q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ nên $q-1=2^m.p^k$ với $k=0;1;2$

+ Nếu $k=0$ khi đó ta có $q-1=2^m$ Từ đó ta được

$$p^2=\frac{\left(2^m+1\right)^5-1}{2^m}=2^{4m}+5.2^{3m}+10.2^{2m}+10.2^m+5$$

Nếu $m>1$ thì $p^2\equiv 5\left(\bmod 8\right)$ vô lí nên suy ra $m=1$, từ đó ta được $p=11;q=3$.

+ Nếu $k=1$ khi đó ta có $q-1=2^m.p$ do đó ta được $p=\left(q-1\right)\left(q^4+q^3+q^2+q+1\right)$

Do đó để p là số nguyên tố thì $q-1=1\Rightarrow q=2$, từ đó suy ra $q=31$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $2^m.31^2+1=2^5$, phương trình không có m nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $k=2$ khi đó ta có $q-1=2^m.p^2$ do đó ta được $1=q^4+q^3+q^2+q+1$ điều này vô lí do q là số nguyên tố

Vậy bộ $\left(m;p;q\right)=\left(1;11;3\right)$ là bộ duy nhất cần tìm.

Bài 99. Từ giả thiết suy ra $p_6>2\Rightarrow p_6^2\equiv 1\left(\bmod 8\right)$.

Mà $p_i^2\equiv 1;4\left(\bmod 8\right)$ nên trong 5 số $p_i\left(i=\overline{1;5}\right)$ có bốn số bằng 2, một số lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử k là số số chẵn trong dãy p_1,p_2,p_3,p_4,p_5. Suy ra

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2=4k+A \text{ (A là tổng bình phương của 5-k số lẻ)}$$

$$\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 4k+\left(5-k\right).1\left(\bmod 8\right)\equiv 3k+5\left(\bmod 8\right)$$

Mà $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\equiv 1\left(\bmod 8\right)$ nên $3k+4\,\vdots\,8\Rightarrow k=4$.

Nhận xét được chứng minh xong.

Bây giờ ta giả sử $p_1=p_2=p_3=p_4=2;\ p_5>2$

Từ đó suy ra $p_6^2-p_5^2=16\Leftrightarrow\left(p_6-p_5\right)\left(p_6+p_5\right)=16$

Từ đó giải được $p_6=5;p_5=3$.

Vậy bộ các số nguyên tố các số cần tìm là $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6\right)$ trong đó $\left(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5\right)$ được xác định là $\left(2;2;2;2;3\right)$ và các hoán vị, còn có định $p_6=5$.

Bài 100. Giả sử có số nguyên a để $\left(a^2+1\right)\,\vdots\,p$ hay ta có $a^2\equiv -1\left(\bmod p\right)$

Suy ra $a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ hay $a^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod p$

Nhưng theo định lí Fecmat thì $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$

Nên ta được $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p$ mà p là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow -2 \equiv 0 \pmod p\text{, điều này vô lí.}$$

Nên không tồn tại số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 101. Do 6(x + 2p) chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3. Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và p^2y^2 cùng chia hếtt cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt x = 3a với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$9a^2 + p^2y^2 = 18a + 12p$ (1)

Do $9a^2, p^2y^2$ và 18a chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra 12p chia hết cho 9, tức là p chia hết cho 3. Mà p là số nguyên tố nên p = 3. Khi đó, phương trình (1) có thể viết lại thành $a^2 + y^2 = 2a + 4$.

Hay $(a-1)^2 + y^2 = 5$ $\qquad (2)$

Vì $(a-1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1, 2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a, y) thỏa mãn phương trình (2) là (3,1) và (2,2). Từ đó suy ra, có hai bộ (x, y, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (9, 1, 3) và (6, 2, 3).

Bài 102.

Đặt $p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$, giả sử $a \geq b$.

Cách 1: Xét $p \notin \mathbb{Z}$ thì p không là số nguyên tố.

Xét $p \in \mathbb{Z}$: Giả sử thì p là số nguyên tố $\Rightarrow ab + c^2$ là số chính phương

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4(ab + c^2) = p.\left(a + b + 2\sqrt{ab + c^2}\right) \vdots p \Rightarrow (a - b + 2c)(a - b - 2c) \vdots p$.

TH1: $(a - b + 2c) \vdots p \Rightarrow a - b + 2c \geq p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2} \Rightarrow c \geq b + \sqrt{ab + c^2} > c$ (loại)

TH2: $(a - b - 2c) \vdots p \Rightarrow a - b - 2c = 0$ hoặc $p \leq |a - b - 2c|$

Nếu $a - b - 2c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{a-b}{2} \Rightarrow p = 2(a+b) \Rightarrow a + b = 1$ (loại).

Nếu $p \leq |a - b - 2c| \leq a + b + 2c \Rightarrow \sqrt{ab + c^2} \leq c$ (vô lí) (loại).

Vậy p không thể là số nguyên tố.

Cách 2: TH1: $\sqrt{ab + c^2} \notin \mathbb{Z}$ suy ra đpcm.

TH2: $\sqrt{ab + c^2} = d \notin \mathbb{Z}^+ \Rightarrow ab = (d - c)(d + c)$ voi $d > c$.

$\Rightarrow \exists r, s$ sao cho $(r, s) = 1$ và $\dfrac{a}{d-c} = \dfrac{d+c}{b} = \dfrac{r}{s}$.

+) $as \vdots r, (r,s)=1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}^+, a = pr, d-c = ps$.

+) $br \vdots s, (r,s)=1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}^+, b = qs, d+c = qr$.

Từ đó $K = a+b+2d = pr+qs+(ps+qr) = (p+q)(r+s)$ là hợp số.

Bài 103. a) Mỗi số tự nhiên đều có thể viết dưới dạng: $6m, 6m\pm1, 6m\pm2, 6m+3$.

Mọi số nguyên tố khác 2 và khác 3 đều không chia hết cho 2 và cho 3 suy ra chúng chỉ có thể có một trong 2 dạng $6m+1$ hoặc $6m-1$.

b) Gọi p là số nguyên tố lớn nhất có dạng $6m-1$.

Đặt $A = 2.3.5...p$ là tích các số nguyên tố từ 2, 3, 5,… đến p.

Gọi $D = A+1$

Nếu D là số nguyên tố thì bài toán được chứng minh vì $D > p$, $D = 2.3.5...p-1 = 6m-1$.

Nếu D là hợp số thì D có ít nhất một ước số nguyên tố chinh là p_1. Ta có nếu $p_1 \le p$ thì p_1 là ước số của D và p_1 là ước số của A.

$\Rightarrow p_1$ là ước số của $A-D=1$ (vô lý vì p_1 là số nguyên tố).

Nếu $p_1 > p$ ta có p_1 cũng có dạng $6m-1$.

Vì nếu không một ước số nguyên tố nào của D có dạng $6m-1$ mà chỉ có dạng $6m+1$ thì tích của chúng có dạng $6m+1$, vô lý vì trái với cách đặt $D = 6m-1$. Tóm lại ta luôn luôn tìm được số nguyên tố dạng $6m-1$ lớn hơn p.

Vậy có vô số số nguyên tố có dạng $6m-1$.

Bài 104. Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \ge 2, y \ge 2$ suy ra $z \ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x = 2, khi đó $z = 2^y + 1$.

Nếu y lẻ thì $2^y + 1 \vdots 3$, suy ra $z \vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z = 2^2+1 = 5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x = y = 2; z = 5$.

Bài 105. Đặt $n = 3^k.m$ với (m, 3) = 1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp:

i) $m = 3l+1 (l \in N^*)$. Ta có: $1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)} = 1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a = 2^{3^k}$),

suy ra $1+2^n+4^n = a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1 \vdots a^2+a+1 \Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m = 3l+2, (l \in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)} = 1+a^{3l+2}+a^{6l+4} = a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1 \vdots a^2+a+1$

(với $a = 2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 106. Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a = ta_1, c = tc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1b = c_1d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt: $b = kc_1 \Rightarrow c_1d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó: $A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^na_1^n + k^nc_1^n + t^nc_1^n + k^na_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N*$ nên A là hợp số.

Bài 107. Ta có: $p = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = \dfrac{n^2 + n - 2}{2} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\dfrac{n-1}{2} > 1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 108. Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\dfrac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố. (*)

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2,3,5,7\}$.

Từ (*) ta có ab = ap - bp $(a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 109. a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó k = 2^n . t, với t lẻ > 1. Vô lí với $2^k + 1$ là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó 2^k - 1 = $\left(2^t\right)^m - 1 \vdots 2^t - 1 \Rightarrow 2^k - 1$ là hợp số vì 2^t-1 >1.

Vậy k là số nguyên tố.

Bài 110. 1) Xét ba số dư của x, y, z khi chia cho 3.

* Nếu cả ba số là khác nhau: $(0,1,2)$ thì $x + y + z \vdots 3$ nhưng khi đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3 (vô lý).

* Nếu có hai số dư bằng nhau thì $x + y + z$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu $x - y; y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3 (vô lý) vì $(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z$.

Vậy chỉ còn trường hợp cả 3 số x, y, z đều có cùng số dư khi chia cho 3.

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \vdots 3.3.3 = 27$

Mà: $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z \Rightarrow x+y+z \vdots 27$

2) Ta có: $a^{4k} - 1 = (a^4)^k - 1^k = (a^4 - 1).P$

Ta có: $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp $a - 1 > 4$ vì a là số nguyên tố $a > 5$.

$\Rightarrow$ Ắt có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4.

$\Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 8$

Xét ba số liên tiếp: $a-1, a, a+1$; ắt có một số chia hết cho 3 vì a không chia hết cho 3.

$\Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 3 \Rightarrow (a-1)(a+1) \vdots 24$

Ta có: $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)$ và a là số lẻ.

$\Rightarrow a^2 + 1$ là số chẵn $\Rightarrow (a^2+1) \vdots 2$

$\Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 48$

Lại vì a không chia hết cho 5.

$\Rightarrow a$ có dạng $5k+1, 5k-1, 5k+2, 5k-2$ $\Rightarrow a^4$ có dạng $5m+1 \Rightarrow a^4 - 1 \vdots 5$

Vì $(5,4,8) = 1 \Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 240$

Bài 111. +) Xét trường hợp p là hợp số:

Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các luỹ thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các luỹ thừa ấy chứa trong (p – 1)!.

Vậy: (p – 1) !: p (điều phải chứng minh).

+) Xét trường hợp p là số nguyên tố:

Vì p ∈ P => p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của (p –1)!

(vì p > p - 1 => (p – 1)! : p (điều phải chứng minh)

Bài 112. Gọi p là ước số nguyên tố của (1994! – 1)

Giả sử p ≤1994 => 1994. 1993 ..... 3. 2. 1 chia hết cho p

<=> 1994! Choa hết cho p

mà (1994! – 1) : p => 1 : p (vô lý)

Vậy: p không thể nhỏ hơn hoặc bằng 1994 hay p > 1994 (điều phải chứng minh).

Bài 113. Vì n > 2 nên k = n! – 1 > 1, do đó k có ít nhất một ước số nguyên tố p.

Ta chứng minh p > n .Thật vậy: nếu p ≤ n thì n! chia hết cho p

Mà k chia hết cho p => (n! – 1) chia hết cho p.Do đó: 1 chia hết cho p (vô lý)

Vậy: p > n => n < p < n! – 1 < n! (Điều phải chứng minh)

Bài 114. Ta có: $m=\frac{3^p-1}{2}.\frac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\frac{3^p-1}{2}, b=\frac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).

Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9 \vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9 \vdots 8p \Rightarrow m-1 \vdots \frac{9^p-9}{8} \vdots p$.

Vì $m-1 \vdots 2$ nên $m-1 \vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \frac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 115. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p = 2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p = 3 có $2003+23.8=3^7$

Với p = 4 có $2003+23.6=2141$

Với p = 2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 116. Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}....., p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6\equiv 1(\text{mod } 7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6+ 7^6$ thỏa mãn (*).

Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

Bài 117. Giả sử $a \geq b \geq c$.Ta có $a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \geq 3$, suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ khi chia hết cho p hay

$a^2b^2 + c^2\left(a^2 + b^2\right) \vdots p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 \vdots p \Leftrightarrow \left(ab - c^2\right)\left(ab + c^2\right) \vdots p.$

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và p = 3.

Bài 118. Giả sử $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$.

Theo giả thiết $x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d = k.t$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v < u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2 + v^2) = 5m(u - v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$t(u^2 + v^2) = 5(u - v)$ (2)

Từ (2) có $u^2 + v^2 \leq 5(u - v)$

$A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \leq 0$ (3)

Mặt khác

$4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50 = (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \geq 1^2 + 7^2 - 50 \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u - 5 = \pm 1$ và v = 1,

nghĩa là $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t = 1 \Rightarrow d = m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x = 3m \\ y = m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2m \\ y = m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 119. Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a + n) + 10(b - n) + (c - n) = n(100a + 10b + c)$ hay

$100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$.

Từ đó ta được: $100a + 10b + c = \dfrac{89n}{n - 1}$.

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1. Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 120. Gọi 3 số nguyên tố phải tìm là; a, b, c ta có: a.b.c = 5(a + b + c) => abc ⋮ 5

Vì a, b, c có vai trò bình đẳng

Giả sử: a ⋮ 5, vì a ∈ P => a = 5

Khi đó: 5bc = 5(5 + b + c)

<=> 5 + b + c = bc

<=> bc – b - c + 1 = 6

<=> b(c - 1) – (c - 1) = 6

<=> (c - 1)(b - 1) = 6

Do vậy: b-1 = 1=> b = 2

và c-1 = 6 và c = 7

b-1 = 2=> b = 3 (loại vì c = 4 ∉ P)

và c-1 = 3 và c = 4

Vai trò a, b, c, bình đẳng

Vậy bộ số (a ;b ;c) cần tìm là (2 ;5 ;7)

Bài 121. Đặt $a = 2.3.4...n(n+1) = (n+1)!$

Xét n số $a+2, a+3, ..., a+n+1$. Ta thấy $a+i \vdots i$ với mọi $i = 2,3,...,n+1$. Suy ra n số này đều là hợp số.

Bài 122. Giả sử n là hợp số, ta có $n = ab$ với $2 \le a \le b < n$. Khi đó

$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + ... + 1)$ là hợp số. Điều này trái với giả thiết. Vậy n là số nguyên tố.

Bài 123. Ta xét các trường hợp sau

+) p = 2, khi đó $2^p + p^2 = 8$ là hợp số.

+) p = 3, khi đó $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố.

+) p > 3, khi đó $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$.

Vì p lẻ và không chia hết cho 3 nên $2^p + 1 \vdots 3$ và $p^2 - 1 \vdots 3$.

Suy ra $2^p + p^2 \vdots 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 124. Gọi x_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - px + q = 0$, ta có $q \vdots x_0$ nên $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = q$.

+) $x_0 = 1$ ta có $1 - p + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

+) $x_0 = q$ ta có $q^2 - pq + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

Vậy $(p, q) = (3, 2)$.

Bài 125. Giả sử $n \geq 2$.

Trong ba số p, q, r có một số chẵn.

* $r = 2$, khi đó $p^n + q^n = 4$ điều này không xảy ra

* $p > q = 2$, ta có: $p^n + 2^n = r^2$.

+) n lẻ. Suy ra: $(p+2)\left(p^{n-1} - 2p^{n-2} + ... + 2^{n-1}\right) = r^2$.

Vì $p + 2 > 1$ và $p^{n-1} - 2p^{n-2} + ... + 2^{n-1} > 2^{n-1} > 1$

Nên ta có $r = p + 2$, suy ra $p^n + 2^n = (p+2)^2 = p^2 + 4p + 4$. Điều này không thể xảy ra với $n \geq 3$.

+) $n = 2k$, ta có: $p^{2k} + 2^{2k} = r^2$. Theo phương trình Pitago ta có:

$p^k = a^2 - b^2$, $2^k = 2ab$, $r = a^2 + b^2$ với $a, b \in Z, a > b, (a, b) = 1$.

Ta có: $b = 1, a = 2^{k-1}$, suy ra $p^k = 4^{k-1} - 1 < 4^k \Rightarrow p = 3$.

Hay $3^k = 4^{k-1} - 1$ phương trình này vô nghiệm.

Do đó ta có $n = 1$.

Bài 126. *) Nếu x hoặc y chia hết cho p thì hiển nhiên số còn lại cũng chia hết cho p.

*) Xét x, y cùng không chia hết cho p . Vì p là số nguyên tố nên $(x; p) = (y; p) = 1$.

Do đó, theo định lí Fecma ta có:

$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hay $x^{4k+2} \equiv y^{4k+2} \pmod{p}$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^{2k+1} \equiv \left(y^2\right)^{2k+1} \pmod{p}$.

Suy ra $x \equiv y \pmod{p}$, do đó $x^2 + y^2 \equiv 2x^2 \pmod{p} \Rightarrow 2 \vdots p$ vô lí.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 127. Ta có $3m^2 + 6n - 61 = 3k + 2$

Nếu $k \ge 1$ ta có $x = 3^{3k+2} + 4 = 9.27^k + 4 \vdots 13$.

Suy ra $k = 0$ hay $3m^2 + 6n - 61 = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2n - 21 = 0$.

Vì m^2 lẻ và $m^2 < 21$ nên $m^2 = 1, m^2 = 9$.

* $m = 1 \Rightarrow n = 10$

* $m = 3 \Rightarrow n = 6$.

Bài 128. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \ge b \ge c$.
Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố khi xảy ra một trong các trường hợp sau:
$a + b + c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ là số nguyên tố.

Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1, b = c = 0$, khi đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ không là số nguyên tố.

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$ và $a + b + c$ là số nguyên tố.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2$.

Suy ra $\begin{cases} a = b \\ b - c = 1 \\ c - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 3b - 1$

Hoặc $\begin{cases} a - b = 1 \\ b - c = 0 \\ a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = a - 1$.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(k; k; k-1)$ và các hoán vị với $3k - 1$ là số nguyên tố.

Hoặc $(k; k-1; k-1)$ và các hoán vị với $3k - 2$ là số nguyên tố.

Bài 129. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p = 3k \pm 1$ hoặc $p = 3k$

+Nếu $p = 3k \pm 1$ thì $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3) \vdots 3$ nên vô lý.

+Nếu $p = 3k$. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p = 3$, rõ ràng $8.9 + 1 = 73$ là số nguyên tố mà $8p^2 + 2p + 1 = 72 + 6 + 1 = 79$ là số nguyên tố.

Bài 130. Từ phương trình ta suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \pmod 3$. Suy ra , trong ba số a, b, c có hai số chia hết cho 3.

$a = b = 3,$ ta có $18 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \Leftrightarrow (3k - 4c)(3k + 4c) = 17$

Suy ra $\begin{cases} 3k + 4c = 17 \\ 3k - 4c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

$c = 3$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = 3$. Khi đó ta có $(3k - b)(3k + b) = 152 = 19.8$

+) $\begin{cases}3k+b=19\\3k-b=1\end{cases}$ vô nghiệm +) $\begin{cases}3k+b=38\\3k-b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=7\\b=17\end{cases}$

+) $\begin{cases}3k+b=76\\3k-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=13\\b=37\end{cases}$ +) $\begin{cases}3k+b=152\\3k-b=2\end{cases}$ vô nghiệm.

Bài 131. Nếu $p=3$, ta có $q^2\,|\,3^6-1=2^3.7.11$ nên $q=2$.

Xét $p\neq 3$, ta có $p^2\,|\,(q+1)\left(q^2-q+1\right)$.

Mà $\left(q+1,q^2-q+1\right)=(q+1,3)=1$ hoặc 3. Suy ra hoặc $p^2\,|\,q+1$ hoặc $p^2\,|\,q^2-q+1$. Từ đây , suy ra $p<q$.

Nếu $q=p+1$ ta có $p=2,q=3$.

Xét $q\geq p+2$. Vì $q^2\,|\,(p-1)(p+1)\left(p^2-p+1\right)$.

Do $(q,p+1)=(q,p-1)=1$ và $\left(p^2-p+1,p^2+p+1\right)=\left(p^2+p+1,2p\right)=1$ nên ta có hoặc $q^2\,|\,p^2+p+1$ hoặc $q^2\,|\,p^2-p+1$.

Mà $q\geq p+2$ nên $q^2\geq(p+2)^2>p^2+p+1>p^2-p+1$. Suy ra $q^2\,|\,p^6-1$.

Vậy $(p,q)=(2,3);(3,2)$.

Bài 132. Nếu các số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r có dạng $3k\pm1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư là 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2\,\vdots\,3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy $p=3$, $q=5$, $r=7$, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Bài 133. Đặt $a=5^{25}$. Ta có $A=\dfrac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1$

$$=\left(a^2+3a+1\right)^2-5a\left(a+1\right)^2.$$

Thay $a=5^{25}$ ta được:

$$\begin{aligned}A&=\left(a^2+3a+1\right)^2-5^{26}\left(a+1\right)^2\\&=\left(a^2+3a+1-5^{13}\left(a+1\right)\right)\left(a^2+3a+1+5^{13}\left(a+1\right)\right)\end{aligned}$$

Từ đó có đpcm.

Bài 134.Vì p là số nguyên tố và $p>3$, nên số nguyên tố p có 1 trong 2 dạng: 3k + 1,3k + 2 với $k\in N*$.

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=(k+1)\Rightarrow p+2\,\vdots\,3$ và $p+2>3$

Do đó p +2 là hợp số (trái với đề bài $p+2$ là số nguyên tố)

Nếu $p=3k+2$ thì $p+1=3k+3=3(k+1)$ (1)

Do p là số nguyên tố và $p>3$ $\Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow k$ lẻ $\Rightarrow k+1$ chẵn $\Rightarrow k+1\,\vdots\,2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p+1\,\vdots\,6$

Bài 135. Vì p là số nguyên tố và $(p>3)$, nên số nguyên tố p có một trong hai dạng: $3k+1; 3k+2$ với $k\in\mathbb{N}^*$

Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+6=3(k+2)\Rightarrow p+4\,\vdots\,3$ và $p+4>3$

Do đó $p+4$ là hợp số (trái với đề bài $p+4$ là số nguyên tố).

Nếu $p=3k+1$ thì $p+8=3k+9=3(k+3)\Rightarrow p+8\,\vdots\,3$ và $p+8>3$

Do đó $p+8$ là hợp số.

Vậy số nguyên tố p có dạng $p=3k+1$ thì $p+8$ là hợp số.

Bài 136. Từ $p^2-5q^2=4\Leftrightarrow(p-2)(p+2)=5q^2$

Do $0<p-2<p+2, q$ nguyên tố nên $p-2$ nhận các giá trị 1, 5, q, q^2

Ta có bảng sau:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
p	$5q$	3	1
p^2	5	3	1

Vậy $(p,q)=(7;3)$ thỏa mãn.

Bài 137. Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2,3,5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1-p_2)\,\vdots\,5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1-p_2)\,\vdots\,3$ dẫn đến $(p_1-p_2)\,\vdots\,15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3-p_4)\,\vdots\,5$. Rõ ràng $(p_3-p_4)\,\vdots\,2$ và $(p_3-p_4)\,\vdots\,3$. Vì $(5;3;2)=1$ nên ta có $(p_3-p_4)\,\vdots\,30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5+p_6)\,\vdots\,2$.

Từ đó suy ra $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\,\vdots\,30.30.2=1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5-1)\vdots 5$, $(p_6-4)\vdots 5$ thì $(p_5+p_5-5)\vdots 5$ hay $(p_5+p_6)\vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3, p_4 thì rõ ràng $(p_3-p_4)\vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3; p_4; p_5; p_6$ lẻ nên $(p_5+p_6)\vdots 2, (p_3-p_4)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5+p_6)\vdots 10$ và $(p_3-p_4)\vdots 6$.

Do đó $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 30.10.6=1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biệt sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 1800$.

Bài 138.Đặt $A=\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}=\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{8n}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

- Xét $n=3k$.

  Ta có: $A=3k^2+8k+\dfrac{1}{9k}$. Suy ra $[A]=3k^2+8k=k(3k+8)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=1$. Khi đó $n=3$.

- Xét $n=3k+1$

  Ta có: $A=3k^2+2k+\dfrac{1}{3}+8k+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+10k+3+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+10k+3=(k+3)(3k+1)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=0$. Khi đó $n=1$.

- Xét $n=3k+2$.

  Ta có: $A=3k^2+4k+\dfrac{4}{3}+8k+\dfrac{16}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+12k+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+12k+6=3(k^2+4k+2)$ không phải số nguyên tố $\forall k$.

Bài 139. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $q \not\vdots 3$, vậy q có dạng $3k\pm 1$.

Nếu $q=3k+1$ thì $p=3k+3=3(k+1)\vdots 3$. Mặt khác, $p>q>3$ nên không phải là số nguyên tố. mâu thuẫn này chứng tỏ q không thể có dạng $3k+1$.

Do đó $q=3k-1 \Rightarrow p=3k+1$.

Từ đó $p+q=6k\vdots 3$.

Hơn nữa, vì p,q là hai số nguyên tố lơn hơn 3 và $(p+1)-(q+1)=2$ nên $p+1,q+1$ là hai số chẵn liên tiếp. do đó hai trong số $p+1,q+1$ có một số chia hết cho 4.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $(q+1)\vdots 4$, tức là $q+1=4m$ hay $q=4m-1$.

Suy ra: $p=4m+1$ và do đó $p+q=8m\vdots 4$.

Vì $(3,4)=1$ nên suy ra $(p+q)\vdots 12$.

Bài 140. Với $p=3$ thì $p+10=13$ và $p+14=17$ là các số nguyên tố.

Với p > 3 thì $p=3k\pm 1$.

- Nếu $p=3k+1$ thì $p+14=3k+15\vdots 3$;
- Nếu $p=3k-1$ thì $p+10=3k+9\vdots 3$.

Vậy với $p=3$ thì $p+10$ và $p+14$ là số nguyên tố.

Bài 141. Tính chất: Nếu p là số nguyên tố lớn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.
Chứng minh: $p>3$ nên p là số lẻ dẫn đến $p^2-1=(p-1)(p+1)$ là tích 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8 (*).
Lại có $(p-1)p.(p+1)$ là tích 3 số chẵn liên tiếp nên $(p-1)p.(p+1)$chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên trong 3 số $(p-1),p,(p+1)$ phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Do p không chia hết cho 3 suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3 (**). Từ (*), (**) suy ra $p^2-1\vdots 24$.
Ta có: $2007-p^2=2016-(p^2-1)\vdots 24$ (đpcm).

Bài 142. Giả sử có ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q+q^p=r$. Khi đó $r>3$nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử $p=2$ và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q+q^2=r$. Nếu $q$không chia hết cho 3 thì $q^2\equiv 1(\text{mod}3)$. Mặt khác, vì q lẻ nên $2^q\equiv -1(\text{mod}3)$, từ đó suy ra $2^q+q^2\vdots 3\Rightarrow r\vdots 3$, vô lí. Vậy $q=3$, lúc đó $r=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Vậy $p=2$, $q=3$, $r=17$ hoặc $p=3$, $q=2$, $r=17$.

Bài 143. a) Giả sử p là số nguyên tố và $p=30k+r$ với $0<r<30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q\le\sqrt{30}\Rightarrow q=2;3;5$ thì qlần lượt chia hết cho $2;3;5$, vô lí. Vậy $r=1$ hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn $p=109=60.1+49$, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với r = 1, 11, 19, 29 thì $p^2\equiv 1(\text{mod}30)$.

Với $r=7,13,17,23$ thì $p^2\equiv 19$ (mod 30).

Suy ra $p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + ... p_n^4 \equiv n$ (mod 30) $\Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên $(n, 30) = 1$.

Nhận xét: với p là số nguyên tố lớn hơn 5 ta có thể chứng minh $p^4 \equiv 1$ (mod 30) bằng cách áp dụng Định lí Fermat.

Ta có $p^2 \equiv 1$ (mod 2), $p^2 \equiv 1$ (mod 3), $p^4 \equiv 1$ (mod 5) $\Rightarrow p^4 \equiv 1$ (mod 30).

Bài 144. Vì a, b, c đóng vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó $ab + bc + ca \le 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố).

Với $a = 2$, ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \le 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$.

- Nếu $b = 2$ thì $4c < 2 + 4c$ thỏa với c là số nguyên tố bất kì.
- Nếu $b = 3$ thì $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 2, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 145. Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3...a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$, suy ra $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3...a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_3, ..., a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố lớn nhất là 5, tức là $a_k \ne 5$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 146. Với $p = 2$ ta có $2^p + p^2 = 8$ không là số nguyên tố.

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 147. Ta có: $n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$.

Với $n > 1$ ta có: $n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1$,
Do đó: $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^3 + n + 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số.
Với $n = 1$ thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 148.

a) Giả sử $2p+1=n^3$ (với $n\in N$); n là số lẻ nên $n=2m+1(m\in N)$, khi đó

$$2p+1=(2m+1)^3 \Rightarrow p=m(4m^2+6m+3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại, $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3(n\in N); p\geq 2$ suy ra $n\geq 3$.

$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743 \Rightarrow p=221$ là số nguyên tố

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13 \Rightarrow n=3,$ khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy, với $p=2, p=211$ thì $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 149. Bổ đề: Nếu số nguyên dương a là một ước số của tích $A=a_1a_2...a_n$ với $a_i\in N^*$ và $a>a_i, \forall i=1,2,...,n$ thì a là hợp số.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, a là số nguyên tố. Khi đó, do $A \vdots a$ nên trong các số a_i phải có ít nhất một số a_j chia hết cho a, tức ta phải có $a_j\geq a$. Điều này mâu thuẫn với tính chất của số a, do đó nó phải là hợp số.

Trở lại bài toán: Giả thiết của bài toán có thể được viết dưới dạng như sau:

$$ac+bd=(b+d)^2-(a-c)^2,$$

hay $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$.

Ta có $(ab+cd)(ad+bc)=ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2)$

$$=ac(b^2+bd+d^2)+bd(a^2-ac+c^2)$$

$$=(ac+bd)(b^2+bd+d^2).$$

Do đó, ab + cd là ước của $(ac+bd)(b^2+bd+d^2)$. Theo bổ đề trên, để chứng minh ab + cd là hợp số, ta chỉ cần chứng minh được tính đúng đắn của hai bất đẳng thức:

$ab+cd>ac+bd \qquad (1)$

Và $ab+cd>b^2+bd+d^2. \qquad (2)$

Bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng do ta có ab + cd – ac – bd = (a – d)(b – c) > 0. Như vậy, ta chỉ còn phải xét bất đẳng thức (2). Từ giả thiết, ta thấy nếu a < b + d thì:

$$a^2-ac+c^2=a(a-c)+c^2<(b+d)(b+d-c)+c^2$$

$$=b^2+bd+d^2-(b-c)(c-d)<b^2+bd+d^2.$$

Mâu thuẫn này cho thấy $a\geq b+d$ và như thế, ta có:

$ab+cd>(b+d)b+d^2=b^2+bd+d^2.$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 150. Vì a, b, c, d $\in N^*$ $\Rightarrow$ a + b + c + d $\geq$ 4 (1)

Xét $a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)=(a^2-a)+(b^2-b)+(c^2-c)+(d^2-d)$

$=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)\vdots 2$

Mà $a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2)\vdots 2\Rightarrow a+b+c+d\vdots 2$ (2)

Từ (1)và (2) suy ra a + b + c + d là hợp số.

Bài 151. Đặt $n=3^k.m$ với $(m,3)=1$. Giả sử $m>1$, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in\mathbb{N}^*)$ Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}=1+a^{3l+1}+a^{6l+2}$ (với $a=2^{3^k}$) , suy ra
$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2(l\in\mathbb{N}^*)$, Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}$

$=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1$ (Với $a=2^{3^k}$),

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy $m=1$ tức là $n=3^k$.

Bài 152. Giả sử $2015=a_1+a_2+...+a_n$, trong đó $a_1;a_2;...;a_n$ là các hợp số
Theo bài ra ta có
+ Mỗi số hạng $a_1;a_2;...;a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)
+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)
Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.
Nếu có hợp số lẻ $a_1\geq 15\Rightarrow a_1=9-(a_1-9)$ với $(a_1-9)\geq 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)
Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)
Do đó: $2015=9+a_2+a_3+...+a_n$ với $a_2;a_3;..;a_n$ là các hợp số chẵn
$\Rightarrow a_2+a_3+...+a_n=2006$ (3)
$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.
Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2\geq 8\Rightarrow a_2=4-(a_2-4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)
Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4
Giả sử $a_2=6\Rightarrow a_3=a_4=...a_n=4\Rightarrow(n-2).4=2000\Rightarrow n=502$
Vậy số tự nhiên cần tìm là $n=502$

Bài 153. Ta có: $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

Với $n = 2$ ta có $p = 2;$

Với $n = 3$ ta có $p = 5;$

Với $n > 3$ thì $\frac{n-1}{2} > 1$ và $n + 2 > 1$ nên p là hợp số.

Vậy với $n = 2, n = 3$ thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 154. Ta có $2^{2n+1} = 2.2^{2n}$ chia 3 dư 2 $\forall n \in N$

$\Rightarrow\ 2^{2n+1} = 3k + 2, (k \in N)$

$\Rightarrow\ A = 2^{2^{2n+1}} + 31 = 2^{3k+2} + 31 = 4.(2^3)^k + 31 = 4.8^k + 31$

Mà 8^k chia 7 dư 1 $\forall k \in N \Rightarrow 4.8^k$ chia 7 dư 4 $\forall k \in N$

$\Rightarrow 4.8^k + 31 \vdots 7\ \forall k \in N$

$\Rightarrow\ A = 2^{2^{2n+1}} + 31 \vdots 7\ \forall n \in N$ Mà A >7

$\Rightarrow$ A là hợp số với mọi số tự nhiên n.

Bài 155. • Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $2^{10} \equiv 1\,(\text{mod } 1) \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2\ (\text{mod } 22) \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2\ (k \in \mathbb{N})$.

Theo Định lí Fermat: $2^{22} \equiv 1\,(\text{mod } 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} \equiv 4\ (\text{mod } 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 19 \vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}} + 19 > 23$ nên $2^{2^{10n+1}} + 19$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Ta chứng minh $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \vdots 11$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 156. Ta có $m = \frac{3^p - 1}{2}.\frac{3^p + 1}{4} = a.b$ với $a = \frac{3^p - 1}{2}, b = \frac{3^p + 1}{4}$

a,b đều là số nguyên tố lớn hơn 1 nên m là hợp số

Mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + ... + 9 + 1$ và p lẻ nên m lẻ và $m \equiv 1$ (mod 3).

Theo Định lí Fermat, ta có $9^p - 9 \vdots p$.

$(p, 8) = 1$ nên $9^p - 9 \vdots 8p \Rightarrow m - 1 \vdots \frac{9^p - 1}{8} \vdots p$.

Vì $m - 1 \vdots 2$ nên $m - 1 \vdots 2p$, khi đó $3^{m-1} - 1 \vdots 3^{2p} - 1 \vdots \frac{9^p - 1}{8} = m$ (đpcm).

Bài 156. Giả sử tồn tại bộ số $(m,\mathrm{n},\mathrm{p})$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0 < m$, $n < p$.
Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A = p^{2018}, (1)$$

trong đó $A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2017}n^2 - ... - mn^{2017} + n^{2018}$
Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A = 1$ và

$$m + n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}.$$

Từ đó dễ thấy $m = n = 1$ và $p^{2018} = 2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p .
Do $m + n > 1$ nên từ (1) suy ra $m + n$ chia hết cho p . Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0 < m < p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p , hay $p = 2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng\ $\left(m^3\right)^{673} + \left(n^3\right)^{673} = 2019^{2018}$,

hay $(m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right) = 2019^{2018}$,

trong đó, $B = \left(m^3\right)^{672} - \left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right) + ... - \left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{672}$. Do $m \neq n$ nên $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có $m^2 - mn + n^2$ chia hết cho 2019 . Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2 - mn + n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$

$$m^2 - mn + n^2 \not\equiv 0 \pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Bài 157. Đặt $n + 3 = p \Rightarrow A = 2p + 1 = a^3$.

Suy ra a là số tự nhiên lẻ nên $a = 2t + 1 \Rightarrow 2p + 1 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$.

$\Rightarrow p = t(4t^2 + 6t + 3)$ là số nguyên tố nên $t = 1 \Rightarrow p = 13$.

Suy ra $n = 10, A = 27$.

Bài 158. Ta có: $A = 3n + 1 + 2009b^2 = (3n + 2010b^2) + (1 - b^2) = 3.(n + 670b^2) + (1-b)(1+b)$.

Do b là số nguyên tố lớn hơn nên b không chia hết cho 3, do đó

$(b-1)(b+1) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3, A > 3$.

Vậy A là hợp số.