

# CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

## A. Kiến thức cần nhớ

### 1. Nguyên lý cực hạn.

Nguyên lý cực hạn được phát biểu đơn giản như sau:

**Nguyên lý 1:** Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

**Nguyên lý 2:** Trong một tập khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Nhờ nguyên lý này ta có thể xét các phần tử mà một đại lượng nào đó có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, chẳng hạn :

- Xét đoạn thẳng lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn đoạn thẳng
- Xét góc lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn góc.
- Xét đa giác có diện tích hoặc chu vi nhỏ nhất ( hoặc lớn nhất) trong một số hữu hạn đa giác
- Xét khoảng cách lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong một số hữu hạn khoảng cách giữa hai điểm hoặc khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng
- Xét các điểm là đầu mút của một đoạn thẳng, xét các điểm ở phía trái nhất hoặc phải nhất của một đoạn thẳng( giả thiết là đoạn thẳng nằm ngang).

Nguyên lý cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát chỉ tập hợp hữu hạn( nguyên lý 1) hoặc có thể có vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất (nguyên lý 2).

### 2. Các bước áp dụng nguyên lý cực hạn khi giải toán

Khi vận dụng nguyên lý này, ta phải tiến hành các bước sau:

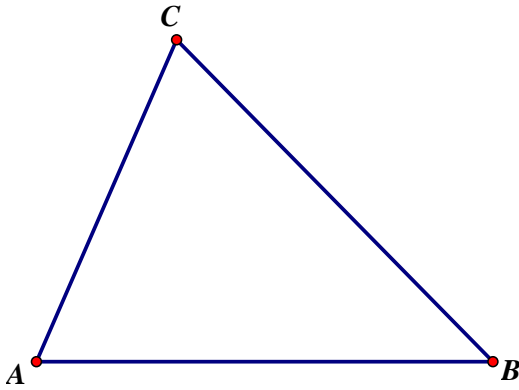
- **Bước 1.** Chứng minh rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát luôn tồn tại giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.
- **Bước 2.** Xét bài toán trong trường hợp riêng khi nó nhận giá trị này (nhỏ nhất hoặc lớn nhất)
- **Bước 3.** Chỉ ra một mâu thuẫn, chỉ ra một giá trị còn nhỏ hơn (hay lớn hơn) giá trị ta đang khảo sát .

Theo nguyên lý của phương pháp phản chứng, ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

## B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài toán 1.** Tồn tại hay không tồn tại 100 điểm sao cho với bất kì hai điểm A; B nào trong 100 điểm đó cũng tồn tại một điểm C trong các điểm còn lại mà góc  $\widehat{ACB} < 60^\circ$

### Hướng dẫn giải



Giả sử tồn tại 100 điểm có tính chất như đề bài. Gọi A; B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong 100 điểm này và tồn tại điểm C mà góc  $\widehat{ACB} < 60^\circ$

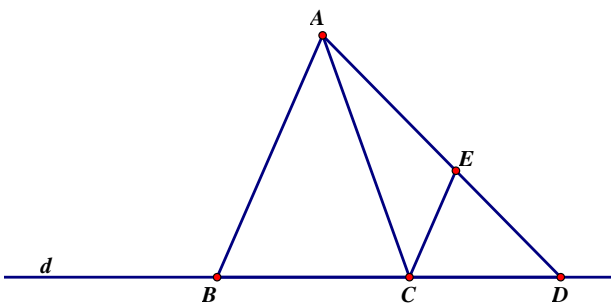
Điểm C không thể thuộc đường thẳng AB

Xét tam giác ABC có cạnh AB lớn nhất nên góc C là lớn nhất, mà góc  $\widehat{ACB} < 60^\circ$  nên góc A và B cũng  $< 60^\circ$

Do đó  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$  vô lý nên không tồn tại 100 điểm trên

**Bài toán 2.** Cho 10 đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song. Biết qua giao điểm của 2 đường thẳng bất kì trong 10 đường thẳng đó có ít nhất một đường thẳng trong các đường thẳng còn lại đi qua. Chứng minh 10 đường thẳng đó đồng qui.

### Hướng dẫn giải



Giả sử 10 đường này không đồng qui. Xét đường thẳng d, có 1 hoặc nhiều giao điểm của 2 đường thẳng đã cho nằm ngoài d, ta gọi A là điểm nằm gần d nhất. Theo giả thiết có ít nhất 3 đường thẳng qua A.

do không có hai đường thẳng nào // nên ba đường thẳng này cắt d tại 3 điểm khác nhau B; C; D và giả sử C nằm giữa B và D

Cũng theo giả thiết qua C còn có một đường thẳng nữa, đường thẳng này cắt đoạn AB, AD tại E; F, chẳng hạn cắt AB tại E nằm giữa A và D, khi đó dễ thấy khoảng cách từ E đến d < khoảng cách từ A đến d, điều này trái với cách chọn điểm A và đường thẳng d

Vậy 10 đường thẳng này đồng qui.

**Bài toán 3.** Cho một đa giác lồi n cạnh ( $n > 3$ ). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh lấy từ đỉnh đa giác đã cho mà đường tròn ngoại tiếp tam giác chứa tất cả các đỉnh còn lại của đa giác

*Hướng dẫn giải*

Với đa giác  $A_1A_2...A_n$ , xét tất cả các góc  $A_1A_iA_2$  (Với i từ 3 đến n) ta chọn góc có số đo nhỏ nhất  $\widehat{A_1A_kA_2}$  đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_1A_kA_2$  chứa tất cả các đỉnh khác của đa giác.

Thật vậy nếu có đỉnh  $A_j$  (j từ 3 đến n) mà ở ngoài đường tròn thì  $\widehat{A_1A_jA_2} < \widehat{A_1A_kA_2}$

Mâu thuẫn, vậy bài toán được chứng minh.

**Bài toán 4.** Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. chứng minh rằng, trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

*Hướng dẫn giải*

Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách MN là lớn nhất trong các cạnh của tam giác MON, do đó  $\widehat{MON} > 60^\circ$ .

Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay  $M_1, M_2, \dots, M_n$  đến sân bay O thì một trong các góc  $\widehat{M_iOM_j}$  không lớn hơn  $\frac{360^\circ}{n}$  ( $i, j, n = 1, 2, 3, \dots, 80$ ) vì tổng các góc đã cho

bằng  $360^\circ$ . Vậy:  $\frac{360^\circ}{n} > 60^\circ \Rightarrow n < 6$ ; suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 5.** Trong tam giác ABC có ba góc nhọn. lấy một điểm P bất kỳ; chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh

của tam giác đó.

*Hướng dẫn giải*

Dựng  $PA_1, PB_1, PC_1$  tương ứng vuông góc với các cạnh  $BC, CA, AB$ . Vì tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nên các điểm  $A_1, B_1, C_1$  tương ứng nằm trong đoạn  $BC, CA$  và  $AB$ . Nối  $PA, PB, PC$  ta có:

$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ$ . Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn  $60^\circ$ . Không mất tính tổng quát, ta giả sử góc  $APC_1$  là lớn nhất, khi đó  $\widehat{APC_1} \geq 60^\circ$ . Xét  $\Delta APC_1$  vuông tại  $C_1$ , ta có:  $\frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Từ đó ta có:  $AP \geq 2PC_1$ . Nếu thay  $PA$  bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ  $P$  đến các đỉnh và thay  $PC_1$  bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ  $P$  đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của tam giác đều nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

*Hướng dẫn giải*

Gọi  $A$  là góc nhỏ nhất của tam giác  $ABC$ , suy ra:  $\hat{A} \leq 60^\circ$ . Ta có:

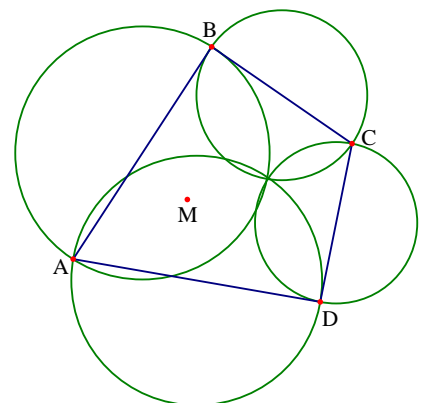
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH.AC = \frac{1}{2} AB.\sin A.AC. \text{ Do đó: } S_{ABC} < \frac{1}{2} AB.AC.\sin 60^\circ < \frac{1}{2} .1.1. \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Bài toán 7.** Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .

*Hướng dẫn giải*

Lấy  $M$  là một điểm tùy ý của tứ giác lồi  $ABCD$ . Có hai khả năng xảy ra:

- Nếu  $M$  nằm trên biên của đa giác (tức  $M$  nằm trên một cạnh của tứ giác  $ABCD$ ). Khi đó  $M$  nằm trong hình tròn có đường kính là cạnh ấy. Trong trường hợp này kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.



- Nếu M nằm bên trong tứ giác lồi ABCD .

Khi đó ta có  $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^\circ$

Theo nguyên lí cực hạn thì trong các góc  $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMD}, \widehat{DMA}$  luôn tồn tại một góc có số đo lớn nhất.

Giả sử  $\text{Max} \widehat{BMC} = \{ \widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMD}, \widehat{DMA} \}$ . Khi đó  $\widehat{BMC} \geq 90^\circ$

Từ đó suy ra M nằm trong (hoặc cùng lắm là nằm trên) đường tròn đường kính BC. Vậy dĩ nhiên M bị phủ bởi đường tròn này. Như thế do M là điểm tùy ý của tứ giác ABCD, ta suy ra bốn hình tròn nói trên phủ kín tứ giác lồi đã cho. Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài toán 8.** Trên mặt phẳng cho  $2 \times 2000$  điểm; trong đó không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2000 điểm bằng màu đỏ và tô 2000 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng; bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2000 đoạn thẳng không có điểm nào chung.

### Hướng dẫn giải

Xem tất cả các cách nối 2000 cặp điểm ( đỏ với xanh) bằng 2000 đoạn thẳng. Các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại và do chỉ có 2000 cặp điểm nên số tất cả các cạnh nối như vậy là hữu hạn.

Do đó, ắt tìm được một cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta chứng minh rằng đây là cách nối phải tìm.

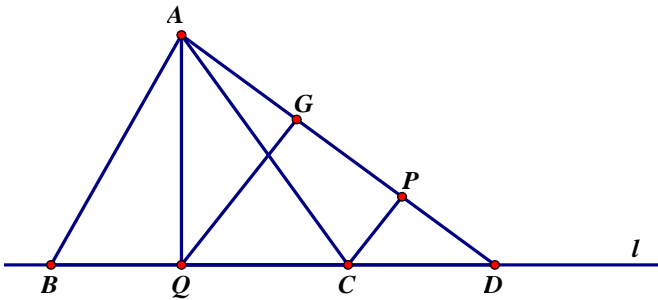
Thật vậy; giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O ( Giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). Khi đó, nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$$AY + BX < (AO + OY) + (BO + OX) = (AO + OX) + (BO + OY) \Rightarrow AY + BX < AX + BY$$

Như vậy; việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất. Điều vô lý đó chứng tỏ: Cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

**Bài toán 9.** Cho 2000 đường thẳng phân biệt, trong đó ba đường thẳng bất kỳ trong số chúng đồng qui. Chứng minh rằng: cả 2000 đường thẳng đã cho đồng qui tại một điểm.

*Hướng dẫn giải*



Bằng phương pháp phản chứng: Giả sử ngược lại các đường thẳng đã cho không đi qua một điểm. Xét các giao điểm tạo nên bởi 2000 đường thẳng đã cho. Xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ các giao điểm này đến các đường thẳng đã cho

Giả sử A là một giao điểm trong số đó và gọi AQ là khoảng cách nhỏ nhất trong số đó vẽ từ A đến đường thẳng l trong số 2000 đường thẳng. Qua A theo giả thiết, phải có ít nhất ba đường thẳng này cắt l lần lượt tại B, C và D.

Vẽ  $AQ \perp l$ , thì hai trong ba điểm B, C, D phải nằm về cùng một phía của điểm Q, chẳng hạn là C và D.

Giả sử  $QC < QD$ ; vẽ  $CP \perp AD, QK \perp AD \Rightarrow CP < QK < AQ$ . Vô lí, vì trái với giả sử AQ là khoảng cách bé nhất. Điều vô lí đó chứng tỏ 2000 đường thẳng đã cho đồng qui tại một điểm.

**Bài toán 10.** Trên mặt phẳng đã cho 2000 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2000 điểm này với điểm ở gần nhất. Chứng minh rằng, với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

*Hướng dẫn giải*

Giả sử ngược lại, chúng ta nhận được một đường gấp khúc khép kín. Gọi AB là mắt lớn nhất của đường gấp khúc khép kín này.

Giả sử AC và BD là hai mắt kề với mắt AB, ta có:

- $AC < AB$  nên B không là điểm gần nhất của A.

- $BD < AB$  nên A không là điểm gần nhất của B. Chứng tỏ rằng A và B không được nối với nhau. Vô lí! Điều vô lí này chứng tỏ không nhận được một đường gấp khúc khép kín với cách nối như vậy.

*Cách khác:* Nếu có đoạn nối AB thì B là điểm gần nhất của A ( các khoảng cách khác nhau ) Vậy không tồn tại đoạn nối A với 1998 điểm còn lại. như thế các đoạn nối không thể tạo thành đường gấp khúc ( đường gấp khúc không tồn tại kể cả khi có hai đoạn).

### C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1:** Bên trong đườn tròn tâm O bán kính  $R = 1$  có 8 điểm phân biệt, chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất hai điểm tron số chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.

**Bài 2.** Trên các cạnh của tam giác  $ABC$  lấy điểm  $C_1, A_1, B_1$  lần lượt thuộc  $AB, BC, CA$ . Biết rằng, độ dài các đoạn thẳng  $AA_1, BB_1, CC_1$  không lớn hơn 1. Chứng minh rằng:  $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  (đơn vị diện tích).

**Bài 3:** Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng  $\sqrt{2}$ , có tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong số các điểm nói trên sao chúng đều thuộc vào phần chung của ba hình tròn có các tâm cũng chính là ba điểm đó?

**Bài 4.** Trên mặt phẳng cho 2000 điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba trong số 2000 điểm đã cho mà đường tròn này không chứa bất kì điểm nào trong số 1997 điểm còn lại.

**Bài 5.** Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng các đường chéo  $AC, BD$  giao nhau tại O thì tứ giác  $ABCD$  là hình thoi.

**Bài 6.** Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, nằm trong một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác mà đỉnh là ba trong 19 điểm trên có ít nhất một góc không lớn hơn  $45^\circ$  và nằm trong đường tròn bán kính nhỏ hơn  $\frac{3}{5}$ .

**Bài 7.** Cho tứ giác  $ABCD$  thỏa mãn: bán kính các đường tròn nội tiếp bốn tam giác  $ABC, BCD, CDA$  và  $DAB$  bằng nhau. Chứng minh rằng:  $ABCD$  là hình chữ nhật.

**Bài 8.** Cho 2000 đường thẳng phân biệt; trong đó có ba đường thẳng bất kì trong số chúng thì đồng quy. Chứng minh rằng cả 2000 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

**Bài 9.** Trên mặt phẳng đã cho 2000 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2000 điểm này với điểm ở gần nhất. Chứng minh rằng với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

## I CHỦ ĐỀ 9: CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

**Bài 10.** Trên mặt phẳng cho 2000 điểm thoả mãn ba điểm bất kì trong số chúng đều thẳng hàng. Chứng minh rằng 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

**Bài 11.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng nếu các bán kính của 4 đường tròn nội tiếp các tam giác  $EAB, EBC, ECD, EDA$  mà bằng nhau thì tứ giác  $ABCD$  là hình thoi.

(Đề thi học sinh giỏi quốc gia lớp 9 năm 1986 – 1987 Bảng A)

**Bài 12.** Trong tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Lấy một điểm  $P$  bất kì, chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm  $P$  đến các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm  $P$  đến các cạnh của tam giác đó.

(Thi chọn học sinh giỏi lớp 9 quốc gia năm 1991 – 1993 bảng B)

**Bài 13.** Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác thì phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .

**Bài 14.** Gọi  $O$  là giao điểm của tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh rằng nếu các tam giác  $AOB, BOC, COD, DOA$  có chu vi bằng nhau thì tứ giác  $ABCD$  là hình thoi.

**Bài 15.** Bên trong hình vuông cạnh 1 cho  $n$  điểm. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho hoặc đỉnh của hình vuông sao cho diện tích  $S$  của nó thoả mãn

$$\text{bất đẳng thức } S \leq \frac{1}{2(n+1)}$$

**Bài 16.** Trong mặt phẳng cho  $n$  đường thẳng mà đôi một không song song với nhau, sao cho qua giao điểm của mỗi cặp đường thẳng thì có một đường thẳng thứ ba. Chứng minh rằng tất cả  $n$  đường thẳng đã cho đồng quy.

**Bài 17.** Trên mặt phẳng cho  $n$  điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường gấp khúc với các đỉnh là  $n$  điểm đã cho mà chúng không tự cắt nhau.

**Bài 18.** Trong dãy số gồm 6 số nguyên dương sắp theo thứ tự tăng dần thoả mãn số đứng sau là bội của số đứng trước nó và tổng của sáu số đó là 79. Tìm dãy số mà số thứ sáu có giá trị lớn nhất.



**Bài 19.** Cho 21 số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện tổng của 11 số nguyên tùy ý trong chúng lớn hơn tổng của 10 số nguyên còn lại. Biết rằng trong 21 số đó có một số là 101 và số lớn nhất là 2014. Tìm 19 số còn lại.

**Bài 20.** Chọn 100 số tự nhiên khác nhau bất kì sao cho mỗi số đều không vượt qua 2015 và mỗi số đều chia 17 dư 10. Chứng minh rằng trong 100 số trên luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999.

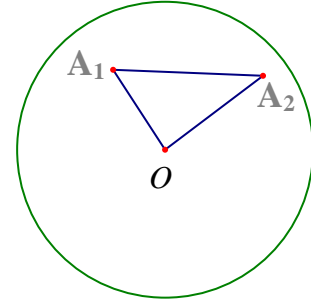
## CHỦ ĐỀ 9 . SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC

**Bài 1:** Nhận xét: ít nhất 7 điểm trong số 8 điểm đã cho là khác tâm O.

Gọi các điểm đó là  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ .

Ta có góc nhỏ nhất trong số các góc  $\widehat{A_iOA_k}$  ( $i \neq k, 1 \leq i, k \leq 8$ )

là không lớn hơn  $\frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$ .



Giả sử  $\widehat{A_1OA_2}$  là bé nhất.

Xét  $\Delta A_1OA_2$ , vì  $\widehat{A_1OA_2} < 60^\circ$

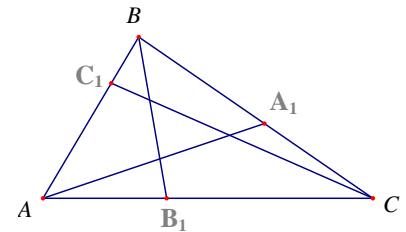
nên  $\widehat{OA_1A_2} > 60^\circ$  hoặc  $\widehat{OA_2A_1} > 60^\circ$

Suy ra, hoặc  $OA_2 > A_1A_2$  hoặc  $OA_1 > A_1A_2$

Mà  $OA_1 \leq 1$  hoặc  $OA_2 \leq 1 \Rightarrow A_1A_2 < 1$ .

**Bài 2.** Không mất tính tổng quát, giả sử  $\widehat{C} \leq \widehat{B} \leq \widehat{A}$ . Xét hai trường hợp:

TH1: Tam giác ABC có ba góc nhọn, khi đó:  $\widehat{A} \geq 60^\circ$  và  $\widehat{A} < 90^\circ$ .



Ta có:  $h_b \leq BB_1 \leq 1, h_c \leq CC_1 \leq 1$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c.h_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b.h_c}{\sin A} \leq \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

TH2: Tam giác ABC không là tam giác nhọn, khi đó:  $\widehat{A} \geq 90^\circ$

$$\Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1, AC \leq CC_1 \leq 1 \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AB.AC \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**Bài 3:** Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn ba điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng  $\sqrt{2}$ .

**I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 9: NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC**

Gọi  $O_1, O_2, O_3$  là ba điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó. Vẽ ba đườn tròn tâm  $O_1, O_2, O_3$  cùng bán kính là  $\sqrt{2}$ . Chắc chắn cả ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  đều nằm trong cả ba đường tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của ba hình tròn có tâm tại chính các điểm  $O_1, O_2, O_3$ .

**Bài 4.** Nối hai điểm bất kì trong số 2000 điểm đã cho bằng 1 đoạn thẳng. Ta có tất cả 1999000 đoạn thẳng như vậy. Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài bé nhất.

Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB  $\Rightarrow$  1998 điểm còn lại nằm ngoài đường tròn tâm O. Gọi C là điểm trong số 1998 điểm còn lại thỏa mãn góc ACB là lớn nhất trong số các góc nhìn 2 điểm A và B.

Xét  $\triangle ABC$ . Ta có đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  không chứa điểm nào trong số 1997 điểm còn lại.

**Bài 5.** Không mất tính tổng quát, ta giả sử:  $OC \leq OA, OB \leq OD$

Gọi  $B_1, C_1$  lần lượt là các điểm đối xứng của B và C qua O.

$$\Rightarrow OB = OB_1, OC = OC_1$$

Bởi vì BC là tiếp tuyến của (O)

nên  $B_1C_1$  cũng tiếp xúc với (O)

Mặt khác, AD cũng tiếp xúc với (O)

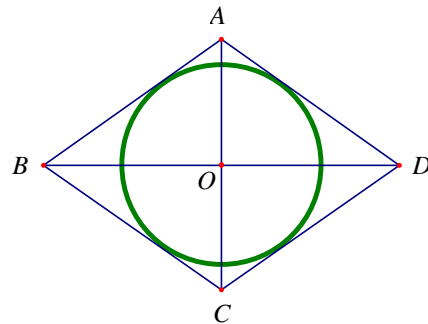
$$\Rightarrow A \equiv C_1, D \equiv B_1$$

$$\Rightarrow OA = OC, OB = OD$$

$\Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

Mặt khác, ABCD ngoại tiếp (O)

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow 2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD \Rightarrow ABCD \text{ là hình thoi.}$$



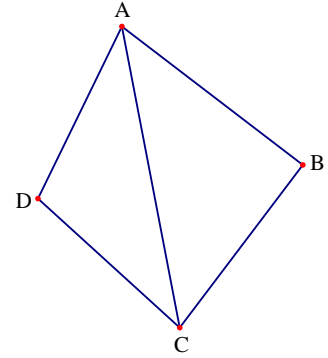
**Bài 6.** Vẽ các đường chéo của lục giác đều. Các đường chéo này chia lục giác đều thành 6 tam giác bằng nhau mỗi cạnh tam giác có độ dài bằng 1. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 19 điểm luôn tồn tại bốn điểm nằm tròn một tam giác đều.

Giả sử bốn điểm cùng nằm trong một tam giác đều là A, B, C, D. Ta xét các vị trí của bốn điểm A, B, C, D theo các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ giác lồi.

Khi đó ta có  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ .

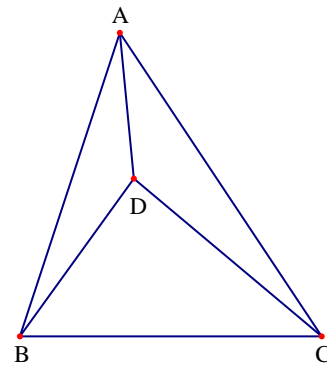
Như vậy trong bốn góc trên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$ , giả sử đó là góc A. Khi đó ta có  $\widehat{DAC} + \widehat{CAB} \leq 90^\circ$  nên một trong hai góc  $\widehat{DAC}; \widehat{CAB}$  có một góc không lớn hơn  $45^\circ$ .



Như vậy một trong hai tam giác ADC và ABD có một góc không lớn hơn  $45^\circ$ .

- Trường hợp 2: Trong bốn điểm A, B, C, D có một điểm nằm trong tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại. Giả sử điểm D nằm trong tam giác ABC.

+ Nếu  $\widehat{BDC} \geq 90^\circ$  thì ta được  $\widehat{DBC} + \widehat{DCB} \leq 90^\circ$  nên một trong hai góc  $\widehat{DBC}; \widehat{DCB}$  không lớn hơn  $45^\circ$ . Suy ra tam giác BCD thỏa mãn yêu cầu bài toán.



+ Nếu  $\widehat{BDC} < 90^\circ$  thì ta được  $\widehat{BAC} < 90^\circ$ , do đó  $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} < 90^\circ$

Từ đó ta được một trong hai góc  $\widehat{CAD}; \widehat{BAD}$  không lớn hơn  $45^\circ$  hay một trong hai tam giác ADC và ADB thỏa mãn yêu cầu bài toán.

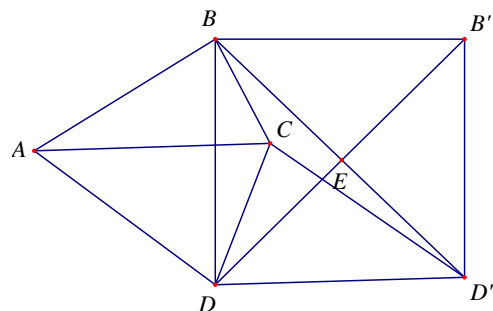
Mặt khác tam giác đều có cạnh bằng một nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều

là  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Mà  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}$  nên ta có điều phải chứng minh.

**Bài 7.** Giả sử:  $r_{ABC} = r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB}$

Vẽ các hình bình hành  $ABB'C$ ,  $ADD'C$  suy ra tứ giác  $BB'D'C$  là hình bình hành.

Do đó:  $\Delta ABC = \Delta B'CB$ ;  $\Delta ADC = \Delta D'CD$



## I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 9: NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC

$$\Rightarrow r_{ABC} = r_{B'CB}; r_{ADC} = r_{D'CD}$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle ABD = \triangle CB'D' (\text{c.c.c}) \Rightarrow r_{ABD} = r_{CB'D'}$$

Theo giả thiết:

$$r_{ABC} = r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB} \Rightarrow r_{B'CB} = r_{CB'D'} = r_{D'CD} = r_{CBD}$$

Gọi  $E$  là giao điểm của  $BD'$  và  $DB'$ . Ta chứng minh  $C \equiv E$ .

Giả sử  $C$  khác  $E \Rightarrow E$  thuộc vào một trong 4 tam giác  $EBD, EBB', EB'D', ED'D$ .

Giả sử  $C$  thuộc vào miền tam giác  $BDE \Rightarrow r_{BCD} = r_{BED} = r_{B'ED} = r_{CB'D'}$  (vô lý).

Điều vô lý chứng tỏ  $E$  trùng với  $C \Rightarrow B, C, D'$  thẳng hàng và  $D, C, B'$  thẳng hàng.

Ta có:  $D'C \parallel AD \Rightarrow BC \parallel AD$

Vì:  $CB' \parallel AB \Rightarrow DC \parallel AB$

Suy ra  $ABCD$  là hình bình hành.

Xét tiếp:  $S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$  (vì  $ABCD$  là hình bình hành).

$$\Leftrightarrow r_{ABD} \cdot \frac{AB + BD + DA}{2} = r_{ADC} \cdot \frac{AD + DC + CA}{2} \Leftrightarrow AB + BD + DA = AD + DC + CA \Leftrightarrow BD = CA$$

Vậy  $ABCD$  là hình chữ nhật.

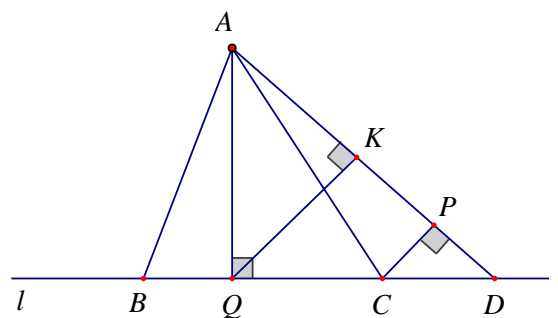
**Bài 8.** Bằng phương pháp chứng minh phản chứng:

Giải sử ngược lại các đường thẳng đã cho không đi qua một điểm. Xét các giao điểm tạo nên bởi 2000 đường thẳng đã cho. Xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ giao các giao điểm này đến các đường thẳng đã cho. Giả sử  $A$  là một giao điểm trong số đó và gọi  $AQ$  là khoảng cách nhỏ nhất trong số đó vẽ từ  $A$  đến 1 đường thẳng  $l$  trong số 2000 đường thẳng.

Qua  $A$  theo giả thiết, phải có ít nhất là 3 đường thẳng này cắt  $l$  lần lượt tại  $B, C$  và  $D$ .

Vẽ  $AQ \perp l$ , thì hai trong ba điểm  $B, C, D$  phải nằm về cùng một phía với điểm  $Q$ , chẳng hạn là  $C$  và  $D$ .

Giả sử  $QC < QD$ ; vẽ  $CP \perp AD$ , vẽ  $QK \perp AD$ .



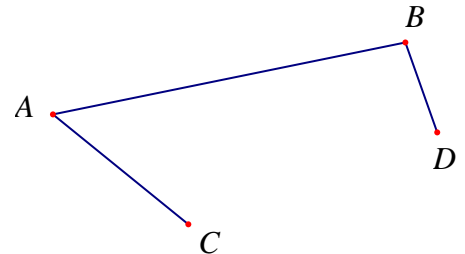
Suy ra:  $CP < QK < AQ$ . Vô lí, vì trái với giả sử AQ là khoảng cách bé nhất. Điều vô lí đó chứng tỏ 2000 đường thẳng đã cho đồng quy tại 1 điểm.

Cách khác: Lấy hai đường thẳng bất kì  $a, b$  cắt nhau tại M thì bất cứ đường thẳng tùy ý nào cũng phải qua M. Vậy 2000 đường thẳng trên sẽ đồng quy.

**Bài 9.** Giả sử ngược lại với cách nối đó, chúng ta nhận được một đường gấp khúc khép kín.

Gọi AB là mắt lớn nhất của đường gấp khúc khép kín này.

Giả sử AC, BD là hai mắt kề với mắt AB.



Ta có:

- $AC < AB$  nên B không là điểm gần nhất của A.
- $BD < AB$  nên A không là điểm gần nhất của B.

Chúng ta chứng tỏ rằng A và B không được nối với nhau. Vô lí!

Điều vô lí này chứng tỏ không thể nhận được một đường gấp khúc nào khép kín với cách nối như vậy.

*Cách khác:* Nếu có đoạn nối AB thì B là điểm gần nhất của A (các khoảng cách khác nhau). Vậy không tồn tại đoạn nối A với 1998 điểm còn lại. Như vậy các đoạn nối không thể tạo thành đường gấp khúc (đường gấp khúc không tồn tại kể cả khi có 2 đoạn).

**Bài 10.** Giả sử ngược lại 2000 điểm đã cho không thẳng hàng.

Dựng qua mỗi cặp hai điểm trong số 2000 điểm này một đường thẳng. Số các đường thẳng được nối như vậy là hoàn toàn xác định, hữu hạn. Xét các khoảng cách khác 0 nhỏ nhất từ 2000 điểm đã cho đến các đường thẳng vừa dựng. Số các khoảng cách như vậy tồn tại và hữu hạn.

Gọi khoảng cách từ A đến đường thẳng BC là bé nhất (A, B, C là ba điểm trong số 2000 điểm đã cho). Theo giả thiết, trên BC còn có 1 điểm thứ 3 là D khác B và C.

Vẽ  $AQ \perp BC$ , khoảng cách AQ là bé nhất (theo giả sử), ta có trong ba điểm B, C, và D phải có ít nhất 2 điểm nằm về cùng một phía với của điểm Q, giả sử là C và D.

Giả sử  $CQ < DQ$ ; vẽ  $CR \perp AD$ , dễ thấy  $CR < AQ$  (vô lí).

Điều vô lí chứng tỏ 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

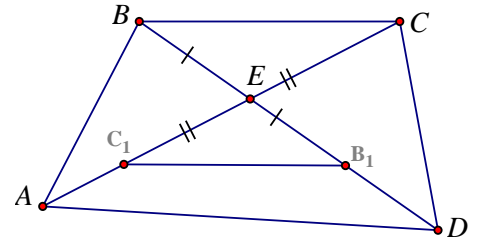
Cách khác: Lấy hai điểm cố định A, B bất kì thì một trong số 1998 điểm còn lại cũng đều nằm trên đường thẳng AB. Vậy 2000 điểm đã cho thẳng hàng.

**I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 9: NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC**

**Bài 11.** Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng:  $CE \leq AE, BE \leq DE$ .

Gọi  $B_1, C_1$  tương ứng là các điểm đối xứng của  $B$  và  $C$  qua tâm  $E$ , ta có cảm giác  $C_1EB_1$  nằm trong miền tam giác  $AED$ .

Giả sử đoạn thẳng  $AD$  không trùng với đoạn thẳng  $C_1B_1$ . Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác  $C_1EB_1$  nằm bên trong đường tròn nội tiếp tam giác  $AED$ , đồng dạng (phối cảnh) với đường tròn này với tâm đồng dạng  $E$ , hệ số đồng dạng lớn hơn 1.



Như vậy:  $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$  ( $r_{AED}$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $AED$ ); vô lí vì trái với giả thiết  $r_{AED} = r_{CEB}$ , điều đó chứng tỏ  $A \equiv C_1, D \equiv B_1$ .

Khi đó  $OA = OC, OB = OD \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

Trong hình bình hành  $ABCD$  có  $p_1 r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2 r$  (trong đó,  $p_1, p_2$  là nửa chu vi của các tam giác  $AEB, BEC$ ).

$$\text{Suy ra: } p_1 = p_2 \Leftrightarrow \frac{AB + BE + EA}{2} = \frac{BC + CE + EB}{2} \Leftrightarrow AB = BC \text{ (vì } AE = CE \text{)}$$

Hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = BC$  nên  $ABCD$  là hình thoi.

**Bài 12.** Dựng  $PA_1, PB_1, PC_1$  tương ứng vuông góc với các cạnh  $BC, CA, AB$ . Vì tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nên các điểm  $A_1, B_1, C_1$  tương ứng nằm trong đoạn  $BC, CA, AB$ . Nối  $PA, PB, PC$  ta có:

$$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ$$

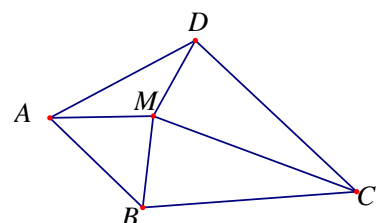
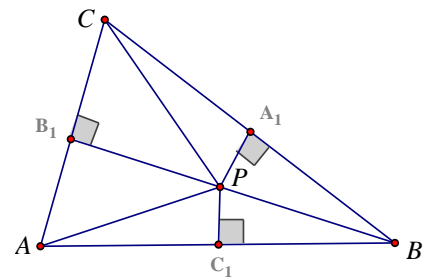
Suy ra góc lớn nhất trong các góc này không thể nhỏ hơn  $60^\circ$ .

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $\widehat{APC_1}$  là góc lớn nhất, khi đó:  $\widehat{APC_1} \geq 60^\circ$ . Xét tam giác  $APC_1$  vuông tại  $C_1$  ta có:

$$\frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta có:  $AP \geq 2PC_1$ .

Nếu thay  $PA$  bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ  $P$  đến các đỉnh và thay  $PC_1$  bằng khoảng cách nhỏ nhất trong cách khoảng cách từ  $P$  đến các cạnh thì bất đẳng



thức càng được thỏa mãn.

**Bài 13.** Gọi  $M$  là một điểm bất kì bên trong tứ giác  $ABCD$ .

Ta có:  $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^\circ$

Do đó góc lớn nhất trong bố góc này không nhỏ hơn  $90^\circ$ . Không mất tính tổng quát, giả sử góc  $BMC$  lớn nhất.

$\Rightarrow \widehat{BMC} \geq 90^\circ \Rightarrow M$  nằm trong đường tròn đường kính  $BC$ .

**Bài 14.** Không mất tính tổng quát, ta giả sử:  $AO \geq CO, DO \geq BO$ .

Gọi  $B_1, C_1$  tương ứng là các điểm đối xứng của  $B$  và  $C$  qua  $O$

$\Rightarrow OB = OB_1, OC = OC_1$

Tam giác  $B_1OC_1$  nằm trong tam giác  $AOD$ .

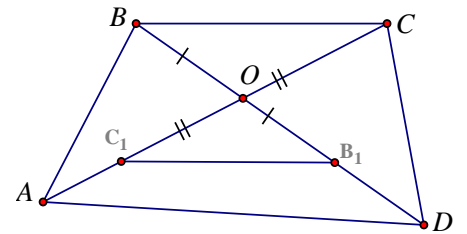
Ta có: chu vi  $(\Delta AOD) \geq$  chu vi  $(\Delta B_1OC_1) =$  chu vi  $(\Delta BOC) =$  chu vi  $(\Delta AOD)$ .

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow B_1 \equiv D, C_1 \equiv A$ .

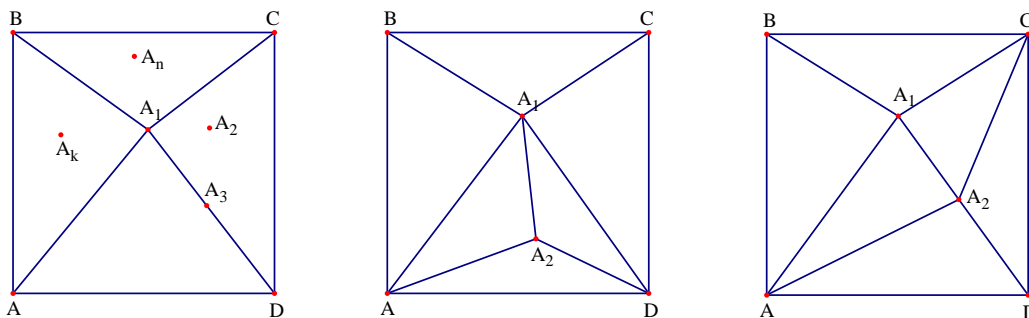
Khi đó, tứ giác  $ABCD$  có:  $OA = OC, OB = OD \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

Mặt khác: Chu vi  $(\Delta AOB) = AB + BO + OA$ , chu vi  $(\Delta BOC) = BC + BO + OA$ .

Suy ra  $AB = BC$ . Vậy  $ABCD$  là hình thoi.



**Bài 15.**



Gọi  $A, B, C, D$  là bốn đỉnh hình vuông và  $A_1; A_2; \dots; A_n$  là  $n$  điểm nằm trong hình vuông.

Nối  $A_1$  với 4 đỉnh  $A, B, C, D$ . Khi đó ta được 4 hình tam giác.



## I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 9: NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC

+ Nếu  $A_2$  nằm trong một trong 4 tam giác đó (giả sử  $A_2$  nằm trong tam giác  $ADA_1$ ) Ta nối  $A_2$  với  $A, D$  và  $A_1$ . Sau khi nối xong thì số tam giác tăng thêm 2.

+ Nếu  $A_2$  nằm trên cạnh chung nối  $A_2$  với  $A$  và  $C$ . Khi đó số tam giác cũng tăng thêm 2.

Như vậy trong mọi trường hợp, số tam giác sẽ tăng thêm 2. Với các điểm  $A_3; A_4; \dots; A_n$  ta làm tương tự.

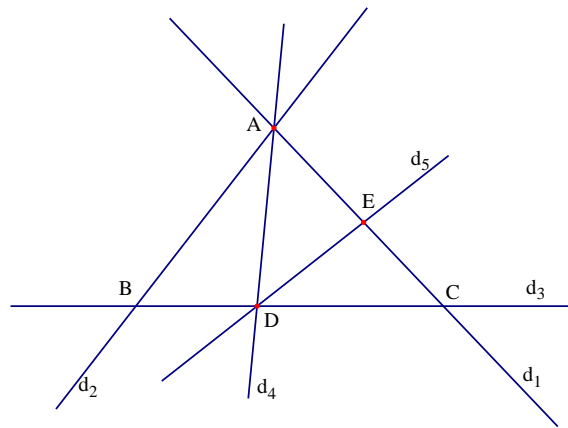
Cuối cùng số tam giác được tạo thành là  $4 + 2(n - 1) = 2n + 2$  tam giác. Các tam giác trên đều có đỉnh là đỉnh của hình vuông hoặc  $n$  điểm đã cho. Khi đó, tổng diện tích của  $2n + 2$  tam giác này bằng diện tích hình vuông (bằng 1).

Theo nguyên lý cực hạn thì tồn tại tam giác có diện tích nhỏ nhất trong  $2n + 2$  tam giác ấy.

Gọi diện tích này là  $S$  thì  $S \leq \frac{1}{2(n+1)}$ . Ta có điều cần chứng minh.

### Bài 16.

Giả sử tất cả các đường thẳng đã cho không đồng quy tại một điểm. Xét giao điểm  $A$  của hai đường thẳng tùy ý trong  $n$  đường thẳng đã cho. Kí hiệu hai đường thẳng này là  $d_1$  và  $d_2$ . Với mỗi đường thẳng  $d_3$  không đi qua điểm  $A$  ta xét khoảng cách từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $d_3$ . Trong số các cặp điểm  $A$  và đường thẳng  $d_3$  như vậy ta chọn cặp điểm  $A$  và đường thẳng  $d_3$  mà khoảng cách từ  $A$  đến  $d_3$  là nhỏ nhất.



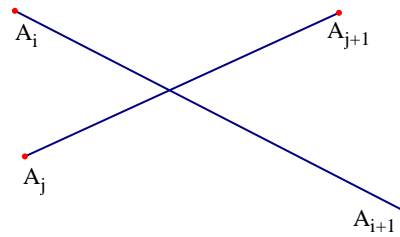
Giả sử đường thẳng  $d_3$  cắt hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $B$  và  $C$ . Theo giả thiết của bài toán thì tồn tại đường thẳng  $d_4$  đi qua  $A$  và cắt đường thẳng  $d_3$  tại  $D$ . Không mất

tính tổng quát ta có thể giả sử  $D$  thuộc đoạn  $BC$ . Qua  $D$  tồn tại đường thẳng  $d_5$  cắt phần trong của đoạn thẳng  $AB$  hoặc  $AC$ . Giả sử đường thẳng  $d_5$  cắt  $AC$  tại  $E$  nằm trong đoạn  $AC$ . Khi đó khoảng cách từ  $E$  đến đường thẳng  $d_3$  nhỏ hơn khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng  $d_3$ , điều này mâu thuẫn với khoảng cách từ  $A$  đến  $d_3$  là nhỏ nhất.

Vậy tất cả các đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

**Bài 17.**

Xét hệ tất cả các đường gấp khúc kín gồm có  $n$  khúc với  $n$  đỉnh chính là  $n$  điểm đã cho. Vì số đường gấp khúc là hữu hạn nên tồn tại một đường có tổng độ dài bé nhất. Gọi đường gấp khúc có tổng độ dài bé nhất là  $A_1A_2...A_nA_1$ . Khi đó nó chính là một đường gấp khúc cần tìm và không có hai cạnh nào của đường cắt nhau.



Thật vậy, ta giả sử hai cạnh của đường gấp khúc cắt nhau tại  $O$  là  $A_iA_{i+1}$  và  $A_jA_{j+1}$ .

Từ đó ta có  $A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1} > A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1}$ . Theo bất đẳng thức tam giác thì đường gấp khúc này khép kín và  $A_1A_2...A_iA_jA_{j+1}...A_{i+1}A_{j+1}A_{j+2}...A_nA_1$  có tổng độ dài ngắn hơn đường gấp khúc đã chọn. Điều này mâu thuẫn. Do đó bài toán được chứng minh.

**Bài 18.** Giả sử sáu số nguyên dương  $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6$  thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ta có  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$  và  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 79$

Ta có nhận xét, nếu  $a_4 \geq 12$  thì  $a_5 \geq 2a_4 = 24$  và  $a_6 \geq 2a_5 = 48$ .

Khi đó  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 12 + 24 + 48 > 79$  không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó ta được  $a_4 < 12$ .

## I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 9: NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG SỐ HỌC

Để ý là trừ số đầu tiên thì các số còn lại trong dãy số trên là bội của số đứng trước nó, do đó ta có một cách chọn bốn số đầu tiên là  $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 4; a_4 = 8$ .

Ta có  $a_5 = ma_4 = 8m$  và  $a_6 = na_5 = 8mn$  với  $m, n$  là các số nguyên dương lớn hơn 1.

Mặt khác ta lại có  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 79$ . Từ đó ta được

$$1 + 2 + 4 + 8 + 8m + 8mn = 79 \Rightarrow m(1 + n) = 8$$

Giải phương trình nghiệm nguyên trên kết hợp với điều kiện số thứ sáu của dãy lớn nhất ta được  $m = 2; n = 3$  nên ta được  $a_6 = 48$ .

Vậy dãy số cần tìm là 1; 2; 4; 8; 16; 48.

**Bài 19.** Gọi 21 số đó là  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21}$ . Không mất tính tổng quát ta giả sử  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{21}$ . Khi đó ta được  $a_{21} = 2014$ .

Theo bài ra ta có  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$

Nên ta được  $a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11})$ .

Do  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21}$  là 21 số guyên đôi một khác nhau và  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{21}$  nên ta suy ra được  $a_{12} - a_2 \geq 10; a_{13} - a_3 \geq 10; \dots; a_{21} - a_{11} \geq 10$ .

Do đó ta được  $a_1 > 100$  nên suy ra  $a_1 \geq 101$ . Theo bài ra trong 21 số trên có một số là 101 nên từ các kết quả trên ta suy ra được  $a_1 = 101$ .

Và ta có  $101 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11})$

Do đó  $100 \geq (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11})$  nên  $a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = \dots = a_{21} - a_{11} = 10$

Từ đó ta được  $a_{11} = a_{21} - 10 = 2014 - 10 = 2004$ .

Từ  $a_{11} = 2004$  đến  $a_{21} = 2014$  có 11 số nguyên khác nhau nên ta được

$$a_{12} = 2005; a_{13} = 2006; \dots; a_{20} = 2013$$

Từ đó ta được  $a_2 = a_{12} - 10 = 2005 - 10 = 1995$ ;  $a_3 = a_{13} - 10 = 2006 - 10 = 1996$ ; ...;  $a_{10} = 2004$ .

Vậy 19 số cần tìm là 19 số nguyên liên tiếp từ 1995 đến 2013.

**Bài 20.** Giả sử  $n$  là số tự nhiên chia 17 dư 10, khi đó  $n \neq 0$  và  $n$  có dạng  $n = 17k + 10$  với  $k \in \mathbb{N}$ .

Gọi 100 số tự nhiên được chọn là  $17k_1 + 10; 17k_2 + 10; 17k_3 + 10; \dots; 17k_{100} + 10$ .

Không mất tính tổng quát ta giả sử  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_{100}$ .

Nếu  $k_{100} \geq 118$  thì khi đó  $17k_{100} + 10 \geq 17 \cdot 118 + 10 = 2016$ . Do đó  $k_{100} \leq 117$ .

Ta sẽ chứng minh  $k_3 \leq 20$ . Thật vậy, giả sử  $k_3 \geq 21$ .

Khi đó từ  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_{100}$  suy ra  $k_4 \geq k_3 + 1; k_5 \geq k_4 + 1; k_6 \geq k_5 + 1; \dots; k_{100} \geq k_{99} + 1$

Nên từ  $k_3 \geq 21$  suy ra  $k_4 \geq 21 + 1 = 22; k_5 \geq 22 + 1 = 23; k_6 \geq 23 + 1 = 24; \dots; k_{100} \geq 117 + 1 = 118$ , điều này trái với  $k_{100} \leq 117$ . Do đó  $k_3 \leq 20$ . Vì  $k_3 \leq 20$  nên suy ra  $k_2 \leq 19; k_1 \leq 18$ .

Với kết quả trên ta chọn ba số nhỏ nhất trong 100 số trên là  $17k_1 + 10; 17k_2 + 10; 17k_3 + 10$ .

Khi đó ta được

$$17k_1 + 10 + 17k_2 + 10 + 17k_3 + 10 \leq (17 \cdot 18 + 10) + (17 \cdot 19 + 10) + (17 \cdot 20 + 10) = 999$$

Vậy ta luôn chọn được ba số có tổng không lớn hơn 999. bài toán được chứng minh.