CHỦ ĐỀ 10 NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN TRONG GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nguyên lý bất biến.

Cho a, b, c là những số thực ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c, c cho a, thì tổng S luôn luôn chỉ là một (không đổi). Tổng này không thay đổi đối với thứ tự phép cộng. Dù a, b, c có thay đổi thứ tự như thế nào chăng nữa S vẫn không thay đổi, nghĩa là S bất biến đối với việc thay đổi các biến khác. Trong thực tế cũng như trong toán học, rất nhiều vấn đề liên quan đến một số đối tượng nghiên cứu lại bất biến đối với sự thay đổi của nhiều đối tượng khác.

2. Các bước áp dụng nguyên lý bất biến khi giải toán

Để giải toán được bằng đại lượng bất biến ta thực hiện theo các bước sau:

+ **Bước 1:** Ta phải phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán. Bước này tương đối khó nếu ta không luyện tập thường xuyên.

+ **Bước 2:** Xử lý tiếp đại lượng bất biến để tìm ra các điểm mâu thuẫn.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1. Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kỳ. Ta thực hiện xóa 2 dấu bất kỳ trong đó và viết vào đó 1 dấu cộng nếu xóa 2 dấu giống nhau và 1 dấu trừ nếu xóa 2 dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì nếu ta thực hiện thao tác trên 24 lần?

Hướng dẫn giải

Ta thay mỗi dấu cộng là số 1 và mỗi dấu trừ là -1. Ta thấy tích của các số trên bảng là -1. Mà theo cách thực hiện của bài thì ta xóa đi 2 số và viết vào đó tích của 2 số đó, đồng thời ta chỉ thực hiện 24 lần nên suy ra tích của tất cả các số trên bảng sẽ không đổi như vậy tích các số trên bảng luôn bằng -1. Do đó, khi thực hiện thao tác 24 lần thì trên bảng còn lại dấu - .

Bài toán 2. Giả sử n là 1 số lẻ ta viết lên bảng các số từ 1 đến 2n, sau đó chọn ra 2 số bất kỳ a và b và viết lại 1 số bằng $|a-b|$. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại trên bảng là 1 số lẻ.

Hướng dẫn giải

Tổng của các số trên bảng ban đầu là: S = 1 + 2 +….+ 2n = n(2n + 1). Ta thấy n lẻ nên S lẻ. Mà với các thao tác trong bài thì tổng sẽ giảm đi $2.\min\{a;b\}$ do đó tính chẵn lẻ của tổng không đổi. Vì ban đầu S là số lẻ nên số cuối cùng còn lại trên bảng là số lẻ.

Bài toán 3. Cho các số 2,8,1,0,1,9,9,5 được viết trên 1 vòng tròn. Cứ 2 số cạnh nhau ta cộng thêm 1 vào 2 số đó. Hỏi sau 1 số lần thực hiện thao tác trên các số trên vòng tròn có thể đều bằng nhau được không?

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy tổng các số trong vòng tròn là 1 số lẻ nên khi thực hiện các thao tác trên thì tổng tăng lên 2 nên tính chẵn lẻ của tổng không đổi. Mặt khác số các số trên vòng tròn là chẵn nên nếu các số đều bằng nhau thì tổng của nó bây giờ là số lẻ suy ra mâu thuẫn.

Bài toán 4. Một tờ giấy bị cắt nhỏ thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh. Các mảnh nhận được lại có thể chọn để cắt (thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh nhỏ hơn) ... Cứ như vậy ta có thể nhận được 2005 mảnh cắt không ?

Hướng dẫn giải

Sau mỗi lần cắt một mảnh giấy thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh thì số mảnh giấy tăng lên là 5 hoặc 10. Như vậy tính bất biến của bài toán là "số mảnh giấy luôn tăng lên một bội số của 5". Vậy số mảnh giấy sau các lần cắt có dạng 1 + 5k, mặt khác 2005 có dạng 5k nên với cách cắt như trên, từ một tờ giấy ban đầu, ta không thể cắt được thành 2005 mảnh.

Bài toán 5. Mỗi số trong dãy $2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{2005}$

đều được thay thế bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số đều có 1 chữ số. Chứng minh trong dãy này : số các số 2 nhiều hơn số các số 1.

Hướng dẫn giải

Ta thấy : "Số tự nhiên A và tổng các chữ số của A luôn cùng số dư trong phép chia cho 9".

Mặt khác ta có : 2^1 chia cho 9 dư 2 ;

2^2 chia cho 9 dư 4 ; 2^3 chia cho 9 dư 8 ;

2^4 chia cho 9 dư 7 ; 2^5 chia cho 9 dư 5 ;

2^6 chia cho 9 dư 1 ; 2^7 chia cho 9 dư 2 ; ...

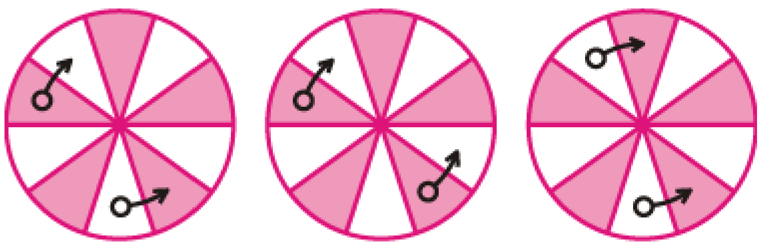
Do đó 2^{6k+r} lần lượt nhận các số dư trong phép chia cho 9 là 2, 4, 8, 7, 5, 1 tương ứng với các giá trị của r là 1, 2, 3, 4, 5, 0. Dãy cuối cùng nhận được gồm 2005 số thuộc tập hợp {2 ; 4 ; 8 ; 7 ; 5 ; 1}.

Ta có 2005 = 334 x 6 + 1 nên dãy cuối cùng có 335 số 2 (nhiều hơn số các số khác 1 số). Vậy số các số 2 nhiều hơn số các số 1 đúng 1 số.

Bài toán 6. Một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt, trên mỗi ô người ta đặt 1 viên bi. Nếu ta cứ di chuyển các viên bi theo quy luật : mỗi lần lấy ở 2 ô bất kì mỗi ô 1 viên bi, chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau thì có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô hay không ?

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy sẽ có 5 ô được tô màu (ô màu) và 5 ô không được tô màu (ô trắng). Ta có nhận xét :



Nếu di chuyển 1 bi ở ô màu và 1 bi ở ô trắng thì tổng số bi ở 5 ô màu không đổi.

Nếu di chuyển ở 2 ô màu, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu giảm đi 2. Nếu di chuyển ở 2 ô trắng, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu tăng lên 2.

Vậy tổng số bi ở 5 ô màu hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 2. Nói cách khác, tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ so với ban đầu.

Ban đầu tổng số bi ở 5 ô màu là 5 viên (là số lẻ) nên sau hữu hạn lần di chuyển bi theo quy luật trên thì tổng số bi ở 5 ô màu luôn khác 0 và khác 10, do đó không thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:Một tờ giấy được xe thành 6 mảnh, lại xé 1 trong 6 mảnh nhỏ đó thành 6 mảnh nhỏ khác. Cứ tiếp tục như vậy hỏi có khi nào được 1995 hoặc 2011 mảnh nhỏ hay không?

Bài 2: Trong một bảng ô vuông 100x100 ô được điền dấu(+)và dấu (-) . Một bước thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở 1 hàng hoặc 1 cột nào đó sang dấu ngược lại hỏi sau hữu hạn bước làm như trên bảng ô vuông nhận được đúng 1970 dấu (–) không.

Bài 3: Trên bảng có các số $\frac{1}{96};\frac{2}{96};...,\frac{96}{96}$. Mỗi 1 lần thực hiện cho phép xóa đi 2 số a;b bất kỳ trên bảng và thay bằng a + b - 2ab hỏi sau 95 lần thực hiện phép xóa thì số còn lại trên bảng là số nào?

Bài 4: Hai người chơi 1 trò chơi với 2 đống kẹo. Đống thứ nhất có 12 cái và đống thứ 2 có 13 cái mỗi người chơi được lấy 2 cái kẹo từ 1 trong 2 đống kẹo hoặc chuyển 1 cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ 2. Người chơi nào không thể thực hiện các thao tác trên là như thua. Hãy chứng minh rằng người chơi thứ 2 không thể thua, người đó có thể thắng không?

Bài 5. Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100}. Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không ? Tại sao ?

Bài 6. Giả sử rằng n là một số lẻ. Đầu tiên ta viết các số từ 1 tới 2n trên một bảng đen. Sau đó ta chọn ra hai số bất kì a, b và xoá chúng, rồi thay thế chúng bởi $|a-b|$. Chứng minh rằng số còn lại cuối cùng là một số lẻ

Bài 7. Người ta viết trên bảng dãy các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Thực hiện trò chơi như sau: Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Thực hiện trò chơi như trên cho đến khi trên bảng còn lại một số. Hỏi số còn lại trên bảng có thể là 9876543212016 không.

Bài 8. Có 2010 viên sỏi. Hai người chơi thay phiên nhau bốc sỏi, mỗi lượt đi người chơi được quền bốc một số lượng viên sỏi là luỹ thừa với số mũ tự nhiên bất kì của 2(1, 2, 4, ...). Ai bốc được viên sỏi cuối cùng là thắng cuộc. Giả sử cả hai người chơi đều là người thông minh. Hỏi ai là người thắng cuộc?

Bài 9. Trong một hộp có 2010 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Bài 10. Trên bảng có ghi 2013 số $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{2013}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì trên bảng thì ta thay bằng số $z=\frac{xy}{x+y+1}$ và giữ nguyên các số còn lại. Sau 2012 lần thực hiện thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

Bài 11. Cho một hình tròn được cia thành 10 ô hình quạt. Trêm mỗi ô hình quạt ta đặt một hòn bi. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần lấy ở hai ô bất kì mỗi ô một hòn bi và chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau. Hỏi sau một số lần thực hiện trò chơi có thể chuyển tất cỏ các viên bi về cùng một ô được không.

Bài 12. Cho một bảng ô vuông chứa số như hình 4a. Ta thực hiện một thuật toán T như sau: Chọn ra 2 số bất kì nằm ở hai ô vuông cạnh nhau và cộng 2 số đó với một số nguyên nào đó. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện thuật toán T thì bảng hình vuông chứa các số như hình 4a có thể thành bảng hình vuông như hình 4b hay không ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Hình a

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Hình b

Bài 13. Cho một bàn cờ quốc tế 8.8 . Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không. Với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần

Bài 14. Mỗi số trong các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ nhận một trong hai giá trị là -1 hoặc 1.

Biết rằng $S=a_1.a_2.a_3.a_4+a_2.a_3.a_4.a_5+\ldots+a_n.a_1.a_2.a_3=0$. Chứng minh rằng n chia hết cho 4

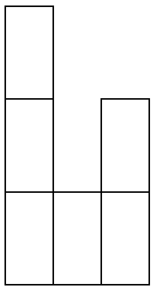
Bài 15. Trên mặt phẳng cho 2011 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong 2011 điểm này. Vẽ đường thẳng d không đi qua điểm nào trong số 2011 điểm nói trên. Chứng minh rằng nếu đường thẳng d cắt một số đoạn thẳng xét ở trên thì số đoạn thẳng bị đường thẳng d cắt là một số chẵn.

Bài 16. Cho trước số nguyên dương n lẻ. Tại mỗi ô vuông của bàn cờ kích thước $n \times n$ người ta viết một số $+1$ hoặc -1. Gọi a_k là tích của tất cả những số ghi trên hàng thứ k (tính từ trên xuống) và b_k là tích của tất cả những số ghi trên cột thứ k (tính từ trái sang).

Chứng minh rằng với mọi cách điền số như trên, đều có:

$$a_1 + a_2 \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0 .$$

Bài 17. Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây hoặc hình nhận được do lật hình đó(sanh trái, sang phải,...) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc. Xác định các hình chữ nhật kích thước m.n với m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát được bằng các viên gạnh hình móc câu



Bài 18. Cho các bảng ô vuông 6x6 dưới đây:

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

Bảng 1

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	−	+	+

Bảng 2

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+

Bảng 3

Thực hiện thao tác biến đổi như sau: Mỗi bước biến đổi cho phép đảo ngược dấu tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc một cột hoặc một đường chéo hoặc dọc theo một đường bất kì song song với một trong hai đường chéo. Hỏi sau một số bước biến đổi có thể đưa một trong các bảng trên về bảng không có dấu trừ được không.

Bài 19. Trên bảng đen viết ba số $\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào 2 vị trí vừa xoá hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

Bài 20. Trên bảng cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xoá đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{1}{2}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

Bài 21. Trên bảng viết các số $\frac{1}{2015}, \frac{2}{2015}, ..., \frac{2014}{2015}, \frac{2015}{2016}$. Mỗi lần biến đổi, xóa đi hai số a, b bất kỳ và thay bằng số $a+b-5ab$. Hỏi sau 2014 lần thực hiện phép biến đổi trên bảng còn lại số nào?

CHỦ ĐỀ 10. CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

Bài 1: Sau mỗi lần xé số mảnh tăng thêm 5, nên số mảnh sau mỗi lần xé có dạng 5k + 1 và 1995 khác dạng 5k + 1 còn 2011 có dạng 5k +1

Bài 2: Không

Bài 3: Gọi các số trên bảng là $a_1; a_2; ....; a_k$ xét tích sau: $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_k-1)$.Khi xóa đi 2 số $a_i; a_j$ thì tích mất đi 2 thừa số $(2a_i-1)(2a_j-1)$ nhưng lai nhân thêm thừa số : $2(a_i+a_j-2a_ia_j)-1=(2a_i-1)(2a_j-1)$, nên giá trị tuyệt đối của tích trên không đổi…Đáp số: còn lai số n và 2n – 1 = 0 nên n = $\frac{1}{2}$

Bài 4: Tính bất biến trong bài là tính chẵn hay lẻ của tổng hay hiệu hai đống kẹo. Tổng số kẹo của hai đống giảm đi hoặc số kẹo của đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải kết thúc , nên người thứ hai sẽ thắng.

Bài 5. Chẳng hạn như số ban đầu trên bảng là số

$$x=10a+b,\ a\in\{1;\ 2;\ 3;...;\ 9\};\ b\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;...;\ 9\}$$

Số mới thu được sau các thao tác như đề bài là $y=a+7b$

Ta thấy $y=x-9a+6b$

Số ban đầu ghi trên bảng là 6^{100} chia hết cho 3.

Theo như trên thì sau một số bước thực hiện thao tác như đề bài, số mới thu được cũng là một số cũng chia hết cho 3.

Vậy nên sau một số bước thực hiện thao tác như đề bài, thì không thể nào thu được 100^6, là một số không chia hết cho 3.

Bài 5. Gọi S là tổng của tất cả các số trên bảng. Lúc đầu ta có $S=1+2+3+\ldots+2n=n(2n+1)$ là một số lẻ vì n là một số lẻ. Ta cần tìm đại lượng bất biến.

Hai số bị xóa đi là a và b, không mất tính tổng quát ta giả sử $a>b$.

Khi đó số được thay vào là $|a-b|=a-b$.

Như vậy sau mỗi lần thực hiện thuật toán như trong đầu bài đã nói thì S sẽ bị giảm đi một một đại lượng có giá trị bằng $a+b-(a-b)=2b$ là một số chẵn. Vì thế tính chẵn lẻ của S được giữ nguyên sau mỗi lần thực hiện xáo hai số trên bảng. Trong trường hợp trên thì S luôn là một số lẻ và vì thế khi trên bảng còn lại một số thì số đó là số lẻ .

Bài 7. Với dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 ta có tổng $1+2+3+...+100=\dfrac{(100+1).100}{2}=5050$

Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Khi đó tổng dãy số trên bảng tăng một đại lượng $(a^3+b^3)-(a+b)$.

Ta thấy $1+2+3+...+100=5050$ chia 3 có số dư là 1.

Lại thấy $(a^3+b^3)-(a+b)=(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)$.

Do đó đại lượng tăng lên luôn chia hết cho 3. Như vậy sau mỗi lần tiến hành trò chơi thì tổng dãy số trên bảng luôn chia cho 3 có số dư là 1. Mà ta lại có 9876543212016 chia hết cho 3. Do đó sau một số lần tiến hành trò chơi thì trên bảng không thể còn lại số 9876543212016.

Bài 8. Cách đi của người đi sau như sau: Khi người đi trước bốc 2^k viên sỏi.

+ Nếu k là số lẻ thì 2^k chia 3 dư 2, người đi sau bốc 1 viên sỏi.

+ Nếu k là số chẵn thì 2^k chia 3 dư 1. người đi sau bốc 2 viên sỏi.

Như vậy người đi trước luôn đối mặt với tình huống số viên sỏi còn lại chia hết cho 3 và không bao giờ bốc được viên sỏi cuối cùng. Vậy người đi sau luôn thắng.

Bài 9. Để đảm bảo thắng cuộc, ở nước đi cuối cùng của mình người bốc sỏi đầu tiên phải để lại trong hộp 11 viên sỏi. Ở nước đi trước đó phải để lại trong hộp $11+(20+11)=42$ viên sỏi.

Suy ra người bốc sỏi đầu tiên phải đảm bảo trong hộp lúc nào cũng còn $11+31k$ viên sỏi.

Ta có $(2010-11):31=65$ dư 15. Như vậy người bốc sỏi đầu tiên ở lần thứ nhất của mình phải bốc 15 viên.

Tiếp theo, khi đối phương bốc k viên sỏi ($k=1, 2, ..., 20$) thì người bốc sỏi đầu tiên phải bốc $31-k$ viên sỏi, cuối cùng sẽ để lại 11 viên sỏi cho đối phương.

Bài 10.

Ta có $\frac{1}{z}=\frac{1+x+y}{xy}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Khi đó ta được $\frac{1}{z}+1=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$.

Như vậy sau mỗi lần xóa đi $\frac{1}{x}+1$ và $\frac{1}{y}+1$ thì ta thay bằng số $\frac{1}{z}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$.

Như vậy tích các số sau mỗi lần xóa và thay số mới là không đổi.

Do đó nếu k là số cuối cùng thì ta được $\frac{1}{k}+1=\left(\frac{1}{\frac{1}{1}}+1\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)...\left(\frac{1}{\frac{1}{2013}}+1\right)=2014!$

Từ đó ta được $k=\frac{1}{2014!-1}$.

Bài 11. Trước hết ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy ta có 5 ô được tô màu và 5 ô không được tô màu. Nếu di chuyển một viên bi ở ô màu và một viên bi ở ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở các ô màu cũng như ô không màu là không thay đổi. Nếu di chuyển hai viên bi ở mỗi ô màu sang ô không màu thì tổng số viên bi ở ô màu bị giảm đi 2. Còn nếu di chuyển hai viên bi ở hai ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở ô màu được tăng lên 2. Như vậy sau mỗi lần thực hiện trò chơi thỉ tổng số viên bi ở các ố màu không thay đổi tính chẵn lẻ so với lúc đầu. Mà ban đầu tổng số viên bi trong các ô màu là 5, như vây sau hữu nhạn lần thực hiện trò chơi thì tổng số viên bi trong các o màu luôn là số lẻ. Do đó tổng số viên bi trong các ô màu luôn khác 0 và khác 10. Như vậy sau một số lần thực hiện trò chơi ta không thể được tất cả các viên bi về cùng một ô được.

Bài 12. Tô màu các ô của hình vuông như hình vẽ dưới đây với màu đen(Đ) và màu trắng(T)

Đ	T	Đ
T	Đ	T
Đ	T	Đ

Đặt B là tổng các số ở các ô màu đen và W là tổng các số ở các ô màu trắng. Ta thấy vì mỗi lần thực hiện thuật toán T ta cộng thêm 2 số ở 2 ô cạnh nhau với một số nguyên nên dễ thấy rằng hiệu $B-W$ là không đổi

Nhưng với giả thuyết của bài toán thì ở hình a là $B-W=5$, còn ở hình b thì $B-W=-1$. Điều này trái với quy tắc bất biến ở trên. Vậy sau những lần thực hiện thuật toán T thì từ hình a ta không thể nhận được hình b

Bài 13. Ta tô các ô trên bàn cờ xen kẽ các màu đen trắng như bàn cờ vua(hình vẽ)

Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ
Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ	T
T	Đ	T	Đ	T	Đ	T	Đ

Do sự “ bình đẳng màu “ nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng ô dưới cùng bên trái có màu trắng. Từ cách đi của con mã ta nhận thấy rằng sau mỗi nước đi con mã sẽ sang một ô khác màu với ô mà nó đang đứng . Vì thế sau một số lẻ nước đi con mã sẽ ở ô màu đen , sau một số chẵn nước đi con mã sẽ ở ô màu trắng . Đây là tính bất biến của chúng ta .

Trở lại bài toán ta thấy rằng đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phảI cần đi 63 nước đi. Vì thế ô trên cùng bên phải sẽ cần mang màu đen(Theo như tính bất biến). Điều này là vô lý. Vậy quân mã không thể đi từ ô dưới cùng bên trái nên ô trên cùng bên phải như yêu cầu của đầu bài được .

Nhận xét Bài toán đã được giải quyết nhưng xung quanh bài toán này vẫn còn rất nhiều điều cần phải suy nghĩ. Chẳng hạn như khi xét bàn cờ X.X với X là một số lẻ thì liệu có một cách đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải và thoả mãn các yêu cầu của bài toán hay không?

Bài 14. Đây là một bài toán về lý thuyết số nhưng ta vẫn sẽ dùng bất biến để giải nó.

Tính bất biến này như sau: Ta thấy S sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp

Thật vậy, nếu có 2 số dương và 2 số âm thì sẽ không có chuyện gì thay đổi, nếu có 1 số khác dấu 3 số còn lại thì khi đổi dấu thì giá trị của S sẽ thay đổi 4 hoặc -4 và điều này không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4 cả, cuối cùng nếu 4 số cùng dấu thì khi đổi dấu S sẽ thay đổi một đại lượng là 8 hay -8 điều này dĩ nhiên cũng không ảnh hưởng gì tới số dư của S khi chia cho 4 .

Bây giờ quay lại bài toán, thực hiện thuật toán đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp sao cho cuối cùng đưa tất cả n số thành số dương. Khi đó $S = n$ và theo tính bất biến thì S chia hết cho 4 (vì ban đầu $S = 0$ chia hết cho 4). Vậy n chia hết cho 4 và ta đã có kết luận cho bài toán .

Bài 15. Đường thẳng không đi qua điểm nào trong 2011 điểm trên nên khi d cắt một đoạn thẳng nào đó thì nó chia mặt phẳng thành hai nửa mà 2011 điểm trên nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau và một nửa chứa chẵn số điểm, nửa còn lại chứa lẻ số điểm(do 2011 là số lẻ). Mặt khác khi nối chẵn số điểm ở nửa bên này với lẻ số điểm bên kia ta sẽ chứng minh được là số đoạn thẳng nối được là một số chẵn. Thật vậy, giả sử d chia các điểm trên nửa thứ nhất có m điểm(m chẵn) và nửa mặt phẳng kia chứa n điểm(n lẻ). Cứ một điểm bên nửa này nối được một đoạn thẳng với nửa bên kia nên số đoạn thẳng nối được là m.n, do m chẵn nên m.n chẵn. Bài toán được chứng minh.

Bài 16. Trước hết ta chỉ ra được $a_k \in \{-1;+1\}, b_k \in \{-1;+1\}, a_k + b_l \in \{-2;0;+2\}$ $(k, l \in \{1,2,...n\})$.

+ Nếu đổi dấu của số ở một ô vuông thuộc hàng k và cột l thì các số a_k và b_l cũng đổi dấu theo, các số còn lại (của dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$) không đổi dấu. Hơn nữa, khi đó tổng $a_k + b_l$ không đổi, hoặc tăng thêm 4 hoặc giảm đi 4.

+ Mỗi bảng với một cách điền số nào đó, đều được suy ra từ bảng gồm toàn số $+1$ bằng cách thực hiện đổi dấu một số phần tử. Tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ của bảng sau khi đổi kém tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ của bảng toàn số 1 một số là bội của 4.

+ Khi đó tổng của bảng sau khi đổi $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n\equiv 2n\pmod 4$

Do n lẻ nên $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n\equiv 2\pmod 4$

Vậy với mọi cách điền số ta luôn có $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0$.

Bài 17. Nhận thấy m và n khác 1, 2, 5. Chia hình chữ nhật m.n thành m.n ô vuông đơn vị và đánh số các hàng từ dưới lên, đánh số các cột từ trái qua phải. Ta gọi ô $(p;q)$ là ô nằm ở hàng thứ p và cột thứ q. Hai hiên gạch hình móc câu có thể ghép được thành các hình dưới đây.

X	O	O	O
X	O	X	O
X	X	X	O

O	O	O	
O	X	O	
	X	O	X
	X	X	X

Do đó để lát được hình chữ nhật m.n thì tích m.n phải chia hết cho 12. Nếu một trong hai số m và n chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật m.n. Thật vậy, nếu m chia hết cho 4 và n chia hết cho 3 thì hình chữ nhật m.n có thể chia thành các hình chữ nhật 4.3 và do đó có lát được. Nếu m chia hết cho 4 và n không chia hết cho 3 thì ta có thể viết n về dạng $n=3a+4b$ với a và b là các số nguyên dương, khi đó bảng m.n có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số m và n chia hết cho 4. Giả sử ngược lại cả m và n cùng chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh được điều này không xẩy ra ta cần tạo ra một bất biến. Để tạo ra bất biến ta điền vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô $(p;q)$. Nếu hai tọa độ p và q cùng chia hết cho 4 thì ta điền vào ô $(p;q)$ số 1, nếu chỉ p hoặc q chia hết cho 4 thì ta điền vào ô $(p;q)$ số 2. Với các điền như vậy thì ta thu được bất biến là tổng các số trong các ô ở hình thứ nhất và hình số hai đều là số lẻ. Do m và n là số chẵn nên tổng các số trong các ô ở hình chữ nhật m.n là số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật m.n thì tổng số hình thứ nhất và hình thứ hai phải là số chẵn. Khi đó m.n chia hết cho 24, điều này không xảy ra vì m, n không chia hết cho 4.

Bài 18.

- Với bảng thứ nhất ta thay các dấu cộng trong bảng bằng $+1$ và các dấu trừ trong bảng bằng -1. Rõ ràng tích tất cả các số trong các ô vuông hoặc tính chẵn lẻ của các dấu trừ hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số không phải là bất biến. Mặc dù tích các số trong tất cả các ô vuông của bảng không phải là bất biến nhưng có thể tích các số trong một số ô vuông cố định lại là bất biến. Để tìm các ô vuông cố định này ta cần tìm tập hợp các ô vuông sao cho khi thực hiện biến đổi số ô vuông có thể đảo dấu luôn là số chẵn. Dễ thấy tập hợp các ô vuông được đánh dấu x trong bảng sau có tính chất như thế:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
x					x
x					x
	x	x	x	x	

Tại trạng thái xuất phát tích tất cả các số trong các ô vuông được đánh dấu nói trên là -1. Do tính nàu là bất biến nên sau một số phép biến đổi ta không thể đưa bảng về trạng thái khong có dấu trừ được(vì khi đó tích tất cả các ố được dánh dấu là $+1$).

- Với bảng thứ hai ta lập luận tương tự bảng thứ nhất.

- Với bảng thứ ba ta thay các dấu cộng trong bảng bằng $+1$ và các dấu trừ trong bảng bằng -1. Rõ ràng tích tất cả các số trong các ô vuông hoặc tính chẵn lẻ của các dấu trừ hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số không phải là bất biến. Mặc dù tích các số trong tất cả các ô vuông của bảng không phải là bất biến nhưng có thể tích các số trong một số ô vuông cố định lại là bất biến. Để tìm các ô vuông cố định này ta cần tìm tập hợp các ô vuông sao cho khi thực hiện biến đổi số ô vuông có thể đảo dấu luôn là số chẵn. Dễ thấy tập hợp các ô vuông được đánh dấu x trong bảng sau có tính chất như thế:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
	x				x
		x			x
			x	x	

Tại trạng thái xuất phát tích tất cả các số trong các ô vuông được đánh dấu nói trên là -1. Do tính này là bất biến nên sau một số phép biến đổi ta không thể đưa bảng về trạng thái khong có dấu trừ được (vì khi đó tích tất cả các ố được dánh dấu là $+1$).

Bài 19. Giả sử ba số trên bảng là a, b, c, khi thay a, b bằng $x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $y = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.

Khi đó ta có $x^2 + y^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} = a^2 + b^2$.

Như vậy sau khi xoá 2 số a, b thay bởi hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương hai số mới không đổi. Do đó tổng bình phương của ba số trên bảng không đổi và bằng $2 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

Mặt khác tổng bình phương ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$ là $\left(\frac{1}{8} + 2 + 3 + 2\sqrt{2}\right) \neq \frac{13}{2}$. Vậy không thể đồng thời trên bảng ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$

Bài 20. Trong quá trình biến đổi, giả sử trên bảng có dãy số $a_1; a_2; ...; a_n$

Ta xét biểu thức sau: $P = |(a_1 - 2)(a_2 - 2)...(a_n - 2)|$. Ta chứng minh su mỗi lần xóa thì giá trị biểu thức P giảm đi hai lần.

Giả sử ta xóa đi hai số a và b khi đó tích P mất đi thừa số $(a-2)(b-2)$ nhưng khi thay bằng $a+b-\frac{1}{2}ab$ thì tích P có thêm thừa số $\left|a+b-\frac{1}{2}ab-2\right|=\frac{\left|(a-2)(b-2)\right|}{2}$ giảm đi một nửa nên P giảm đi một nửa. Khi xóa đi hai số và thay bằng một số nên sau mỗi lần xóa trên bảng giảm đi một số.

Mà trên bảng có 2014 số nên sau 2013 lần xóa thì P giảm đi 2^{2013} lần.

Khi đó ta có giá trị $P=\left|(1-2)(2-2)...(2014-2)\right|=0$

Giả sử số còn lại trên bảng là x khi đó ta có $P=\left|x-2\right|=0\Rightarrow x=2$

Vậy số cuối cùng trên bảng là 2.

Bài 21. Trong dãy số trên có số $\frac{403}{2015}=\frac{1}{5}$.

Nếu xóa hai số a và b bất kì và thay bằng số mới là $c=a+b-5ab$, như vậy sau mỗi lần xóa dãy trên giảm đi một số. Như vậy sau 2014 lần xóa trên bảng còn lại một số.

Đến một lúc nào đó ta sẽ xóa $\frac{1}{5}$ và một số b thì ta thay bằng $c=\frac{1}{5}+b-5.\frac{1}{5}b=\frac{1}{5}$

Như vậy cứ xóa số $\frac{1}{5}$ thì lại xuất hiện số $\frac{1}{5}$. Vậy số cuối cùng còn lại là $\frac{1}{5}$