Chủ đề 4

CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

D. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

MỤC LỤC

Trong bài hình học trong đề thi tuyển sinh vào 10, sẽ có những yêu cầu chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau hoặc các đoạn thẳng tỷ lệ mà ta gọi chung là đẳng thức hình học.

Chủ đề dưới đây sẽ hệ thống một số biện pháp chứng minh đẳng thức hình học. Hãy nắm vững kiến thức đã học trong những năn học Toán THCS để phục vụ cho lời giải nhé!

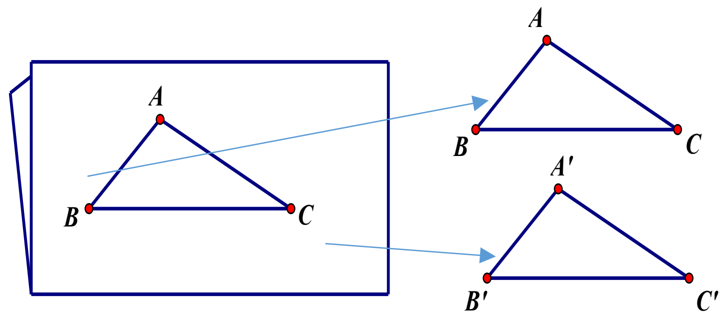
Chúc các em đạt kết quả cao trong học tập!

🗁. LÝ THUYẾT CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

A. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

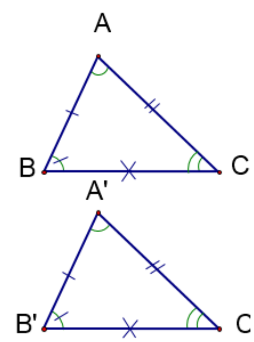
Phương pháp 1: Hai tam giác bằng nhau

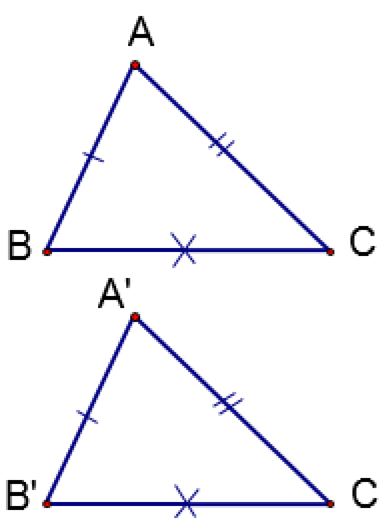
Lấy một tờ bìa mỏng, gấp đôi lại. Trên nửa tờ bìa vẽ một tam giác. Vẫn gấp đôi tờ bìa, cắt lấy tam giác, ta được hai miếng tam giác có thể đặt trùng khít lên nhau. Đó là hình ảnh của hai tam giác bằng nhau.



a) Định nghĩa: *Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.*

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B'; AC = A'C', BC = B'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$





b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

****) Trường hợp 1:*** *Cạnh - Cạnh - Cạnh* **(c.c.c)**

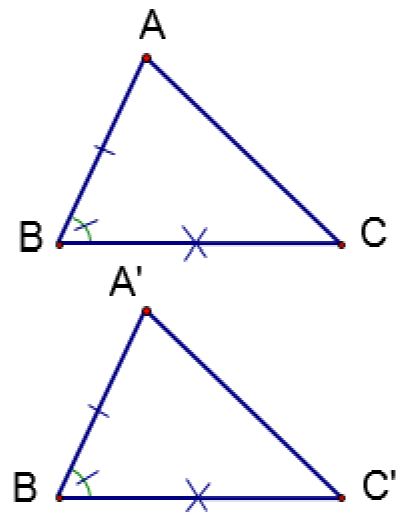
- Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'(c.c.c)$$

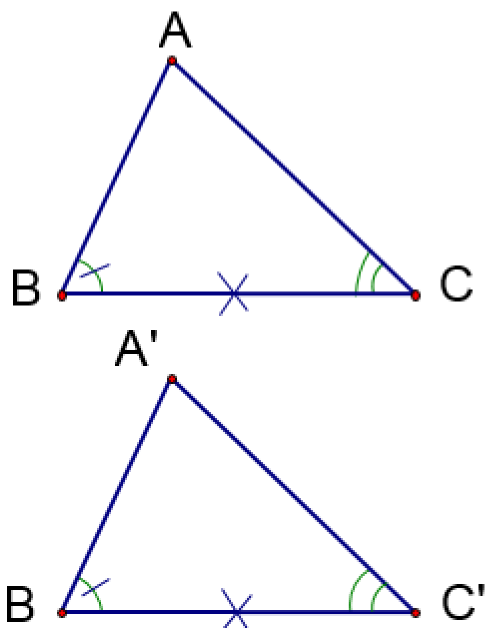
****) Trường hợp 2:** Cạnh - Góc - Cạnh* ***(c.g.c)***

- Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau



Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có:

$$\left.\begin{array}{r} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (c.g.c)$$



****) Trường hợp 3:** Góc - Cạnh - Góc* ***(g.c.g)***

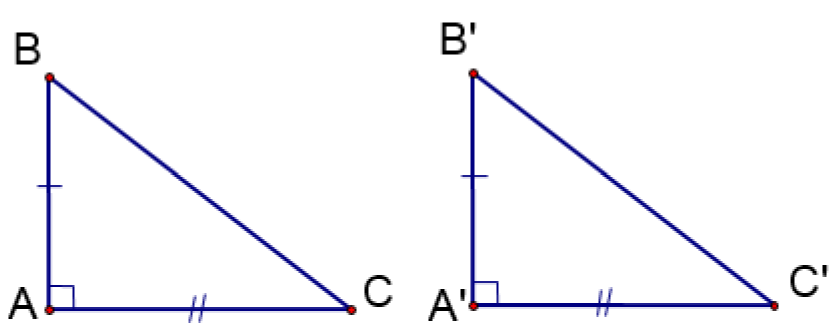
- Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có:

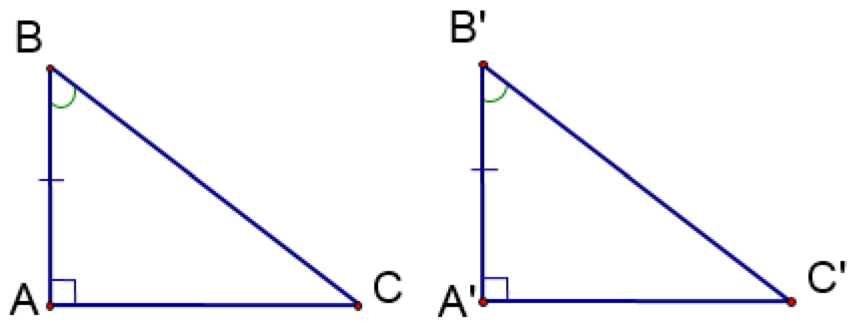
$$\left.\begin{array}{r} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (g.c.g)$$

c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông

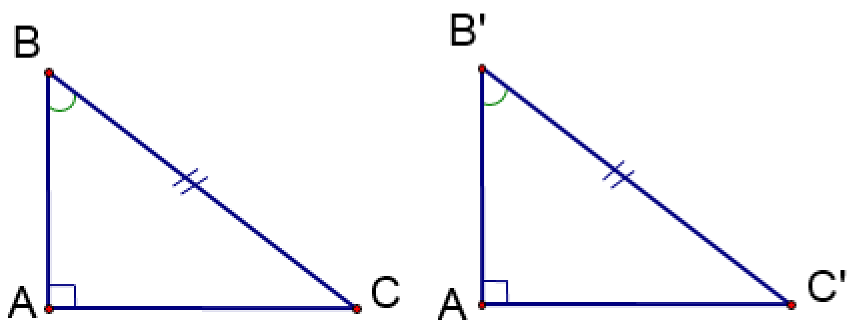
- ***Trường hợp 1:*** *Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



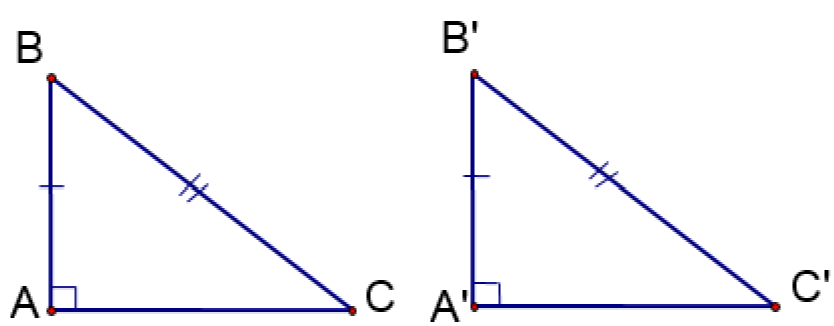
- ***Trường hợp 2***: *Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai giác vuông đó bằng nhau.*



- ***Trường hợp 3:*** *Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



- ***Trường hợp 4:*** *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



Phương pháp 2: Sử dụng tính chất của các hình đặc biệt

(chỉ khai thác yếu tố bằng nhau, tránh nhầm sang dấu hiệu nhận biết)

1. Hai cạnh bên của tam giác cân, tam giác đều. (Hình học lớp 7)

Tam giác cân: *Hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau.*

Tam giác đều: *Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau.*

2. Sử dụng tính chất về cạnh và đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi. (Hình học lớp 8)

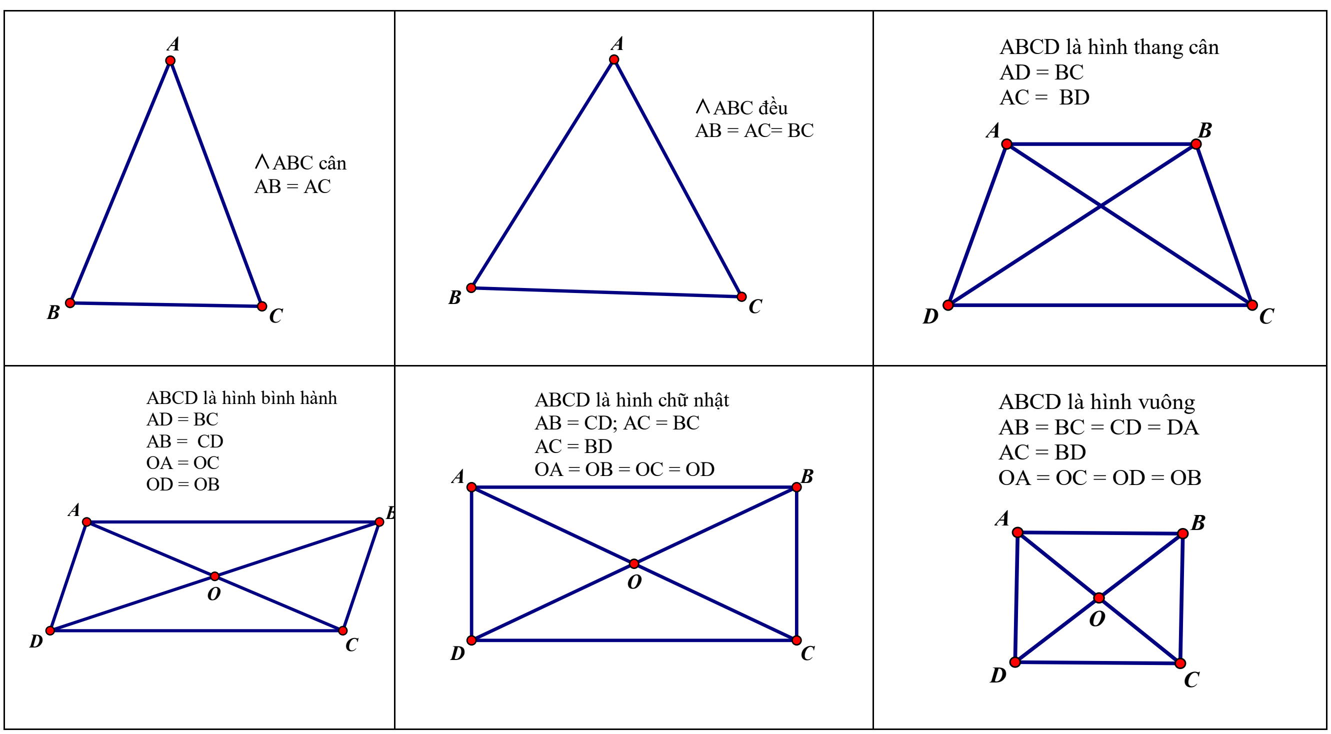
Hình thang cân: *Hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.*

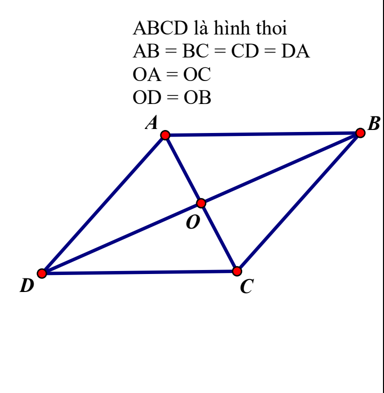
Hình bình hành: *Hai cặp cạnh đối bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

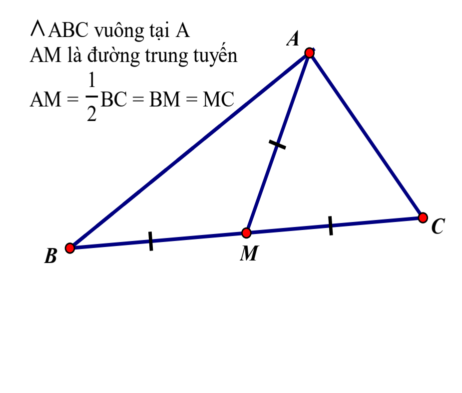
Hình chữ nhật: *Hai cặp cạnh đối bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

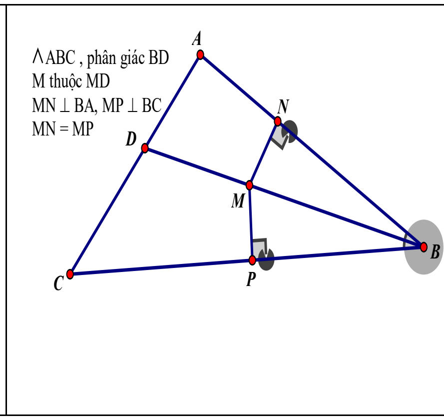
Hình vuông: *Bốn cạnh bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau, giao điểm của hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

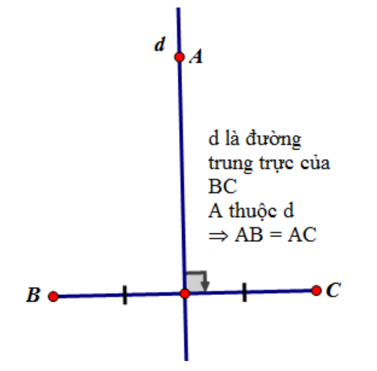
Hình thoi: *Bốn cạnh bằng nhau, giao điểm của hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

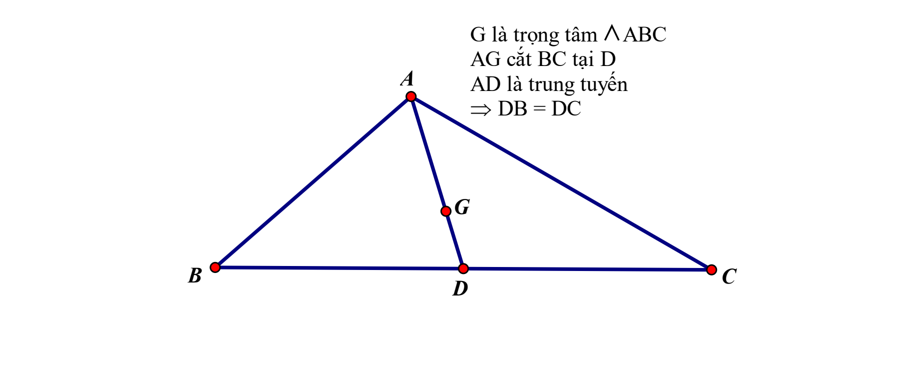


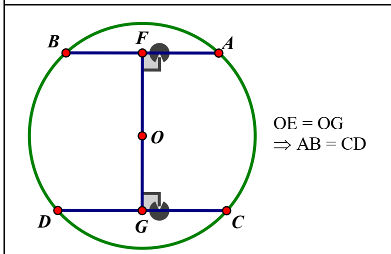


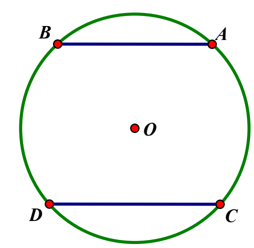




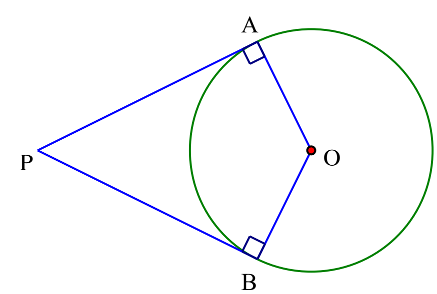








$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$$



PA, PB là tiếp tuyến của (O)

PA = PB

Phương pháp 3: Sử dụng tính chất của các đường đặc biệt, điểm đặc biệt.

1. Sử dụng tính chất đường trung tuyến (*đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác*), đường trung tuyến của tam giác vuông, đường trung bình trong tam giác, các đường đồng quy trong tam giác đặc biệt.

+ Trung tuyến của một tam giác là một đoạn thẳng nối từ đỉnh của tam giác tới trung điểm của cạnh đối diện

+ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

- "Đường thẳng xuất phát từ một đỉnh và đi qua trọng tâm của một tam giác là đường trung tuyến của tam giác đó" ⇒ đi qua trung điểm cạnh đối diện.

- Về các đường đồng quy trong tam giác đặc biệt: *ví dụ: 2 đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau, các đường trung tuyến trong tam giác đều bằng nhau, …..* (phần này khi sử dụng phải chứng minh)

+ Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Định lí 1*: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.*

2. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

- Điểm nằm trên tia phân giác thì cách đều 2 cạnh của góc đó

3. Khoảng cách từ một điểm trên đường trung trực của một đoạn thẳng đến hai đầu đoạn thẳng. (Hình học 7):

- ***Định lý thuận****: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.*

Nếu điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB thì MA = MB

4. Sử dụng tính chất trung điểm. (Hình học 7)

- ***Trung điểm*** *là điểm nằm chính giữa đoạn thẳng, chia đoạn thẳng ra làm hai đoạn dài bằng nhau.*

5. Hình chiếu của hai đường xiên bằng nhau và ngược lại. (Hình học 7)

- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất liên quan đến đường tròn.

1. Sử dụng tính chất hai dây cách đều tâm trong đường tròn. (Hình học 9)

- Trong một đường tròn: Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau

2. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến giao nhau trong đường tròn. (Hình học 9)

- Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm

3. Sử dụng quan hệ giữa cung và dây cung trong một đường tròn. (Hình học 9)

- Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau: Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau

Phương pháp 5: Sử dụng tỉ số, đoạn thẳng trung gian …

1. Dùng tính chất bắc cầu: Hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba.

2. Có cùng độ dài (*cùng số đo*) hoặc cùng nghiệm đúng một hệ thức.

3. Đường thẳng song song cách đều:

- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

3. Sử dụng tính chất của các đẳng thức, hai phân số bằng nhau.

4. Sử dụng kiến thức về diện tích. (Hình học 8)

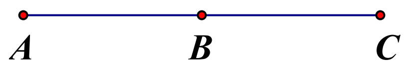
5. Sử dụng bình phương của chúng bằng nhau (*có thể sử dụng định lí Pitago, tam giác đồng dạng, hệ thức lượng trong tam giác, trong đường tròn để đưa về bình phương của chúng bằng nhau*).

B. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

1. Tính chất trung điểm của đoạn thẳng

Trung điểm *là điểm nằm chính giữa đoạn thẳng, chia đoạn thẳng ra làm hai đoạn dài bằng nhau.*

B là trung điểm của đoạn thẳng AC



$$AB = BC;\ \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

2. Tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ *độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy:* $\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$

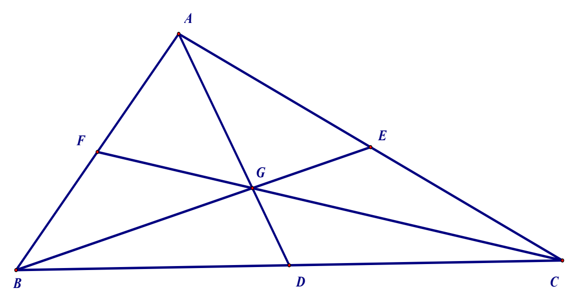
G là trọng tâm của tam giác ABC

Khai thác thêm:

$AG = 2GD$; CG=2GF; BG=2GE

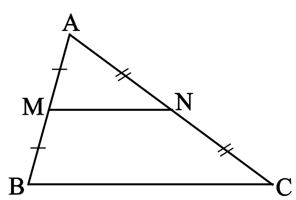
$$\frac{GD}{AD} = \frac{GE}{BE} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{GD}{AG} = \frac{GF}{CG} = \frac{GE}{BG} = \frac{1}{2}$$

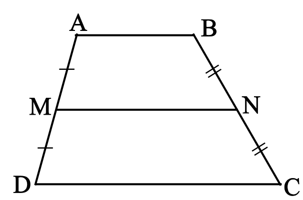


3. Đường trung bình.

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h.3.1).
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang (h.3.2).



Hình 3.1



Hình 3.2

Tính chất

• Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Trên hình 3.1 thì MN // BC và $MN = \frac{BC}{2}$.

• Đường trung bình của hình thang thì song song với hai cạnh đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Trên hình 3.2 thì MN // AB // CD và $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Định lí

• Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

• Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

4. Định lý Talet:

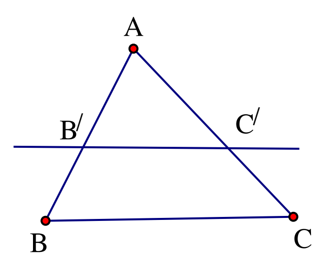
Tỉ số của hai đoạn thẳng. Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Đoạn thẳng tỉ lệ. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

Định lí Ta-lét trong tam giác. Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình bên

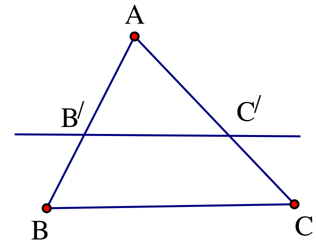
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ B'C'//BC\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \ \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$$



Định lí Ta-lét đảo. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác .

Trong hình bên

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ \dfrac{AB'}{B'B}=\dfrac{AC'}{C'C}\end{array}\right\}\Rightarrow B'C'//BC.$$

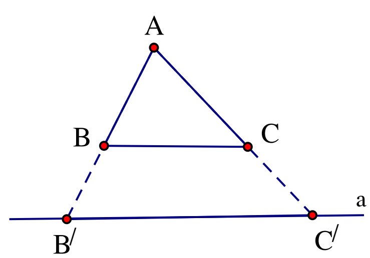


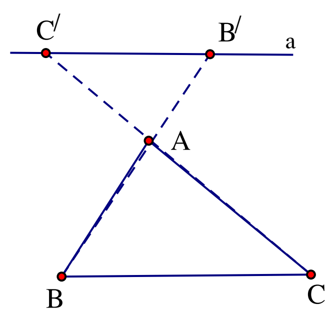
Hệ quả của định lí Ta-lét. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Trong hình trên: $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ B'C'//BC\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$

* ***Chú ý***. Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại .

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$



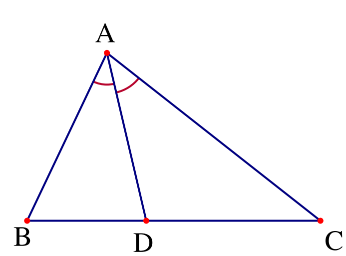


5. Tính chất đường phân giác của tam giác.

Định lý

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỷ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

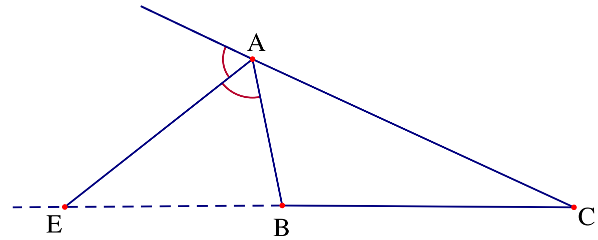
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ \widehat{BAD}=\widehat{CAD}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$



Chú ý

Định lý vẫn đúng đối đường phân giác góc ngoài của tam giác.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\,(AB \neq AC) \\ \widehat{BAE} = \widehat{CAE}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



Các định lý trên có định lý đảo

$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow$ AD là đường phân giác trong của tam giác.

$\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow$ AE là đường phân giác ngoài của tam giác.

6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

Khái niệm hai tam giác đồng dạng

a. Định nghĩa

$\Delta\ A'B'C'$ gọi là đồng dạng với Δ ABC nếu : $\widehat{A'} = \widehat{A};\ \widehat{B'} = \widehat{B};\ \widehat{C'} = \widehat{C}$;

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

b. Tính chất

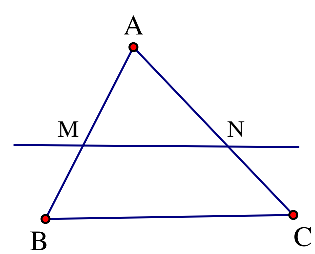
- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.

- Nếu Δ $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

- Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

c. Định lí

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

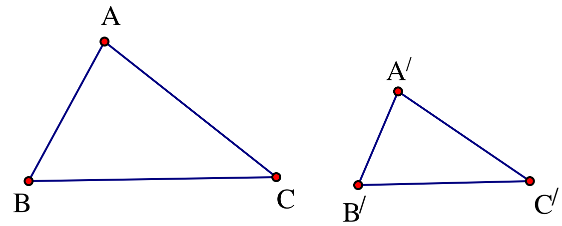


$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ MN\,//\,BC\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC\,.$$

Chú ý. Định lí cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.



Nếu Δ ABC và $\Delta\ A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

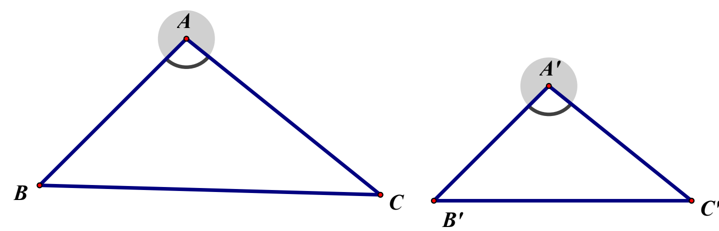
Trường hợp đồng dạng thứ hai

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đồng dạng.

Nếu Δ ABC và $\Delta\ A'B'C'$ có:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ và $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.



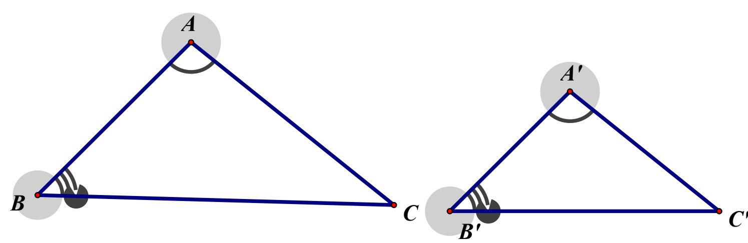
Trường hợp đồng dạng thứ ba

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu Δ ABC và $\Delta\ A'B'C'$ có:

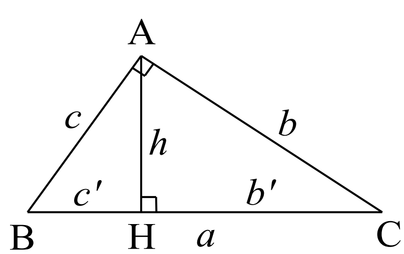
$\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$

thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$



7. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2) $AC^2 = CH.BC$
3) $AB^2 = BH.BC$
4) $AH^2 = HB.HC$
5) $AH.BC = AB.AC$
6) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

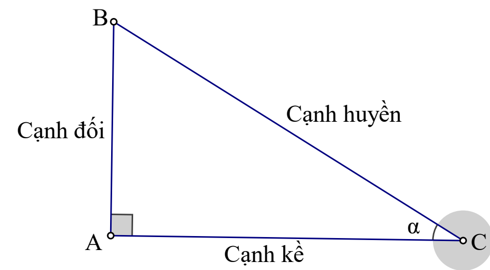


1) $a^2 = b^2 + c^2$
2) $b^2 = a.b'$
3) $c^2 = a.c'$
4) $h^2 = b'.c'$
5) $h.a = b.c$
6) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

8. Tỉ số lượng giác của góc nhọn.

• Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}; \cos\alpha = \frac{AC}{BC}; \tan\alpha = \frac{AB}{AC}; \cot\alpha = \frac{AC}{AB}$



+ Nếu α là một góc nhọn thì

$0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1;$

$\tan\alpha > 0; \cot\alpha > 0$

• Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^0$,

ta có: $\sin\alpha = \cos\beta; \cos\alpha = \sin\beta; \tan\alpha = \cot\beta; \cot\alpha = \tan\beta$.

• Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha = \sin\beta$ hoặc $\cos\alpha = \cos\beta$ thì $\alpha = \beta$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; tg\alpha . \cot g\alpha = 1$.

• Với một số góc đặc biệt ta có: $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^0 = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}};$ $\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1; \cot 30^0 = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

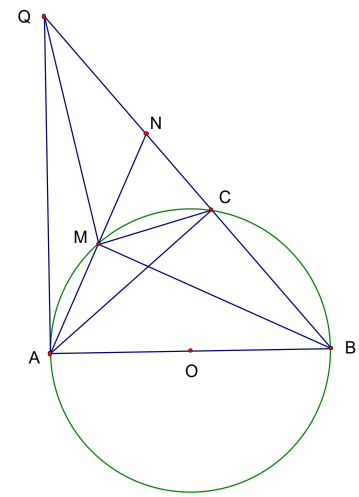
Dạng toán đẳng thức hình học là một dạng toán cũng không khó nhưng nó đòi hỏi người giải phải có cái nhìn nhanh (tiết kiệm thời gian) và chuẩn (giải đúng kiếm điểm), xác định đúng phương pháp vô cùng quan trọng. Chính vì vậy việc tự luyện giải nhiều bài toán hình học sẽ giúp cho các em có kỹ năng giải. Hãy cùng bắt đầu với các bài tập ^^.

🗁. PHẦN BÀI TẬP.

Bài 1: (Một bài nhẹ nhàng để bắt đầu) Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đường tròn $(C \neq A\,;\, C \neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C , kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N.

Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân .

Hướng dẫn giải



a) Xét ΔABM và ΔNBM .

Ta có: AB là đường kính của đường tròn (O)

nên : $\widehat{AMB} = \widehat{NMB} = 90^o$.

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC

nên $\widehat{ABM} = \widehat{MBN}$. Tam giác ABN có MB vừa là đường cao, đồng thời là đường phân giác nên => ΔBAN cân đỉnh B.

. Tứ giác AMCB nội tiếp.

=> $\widehat{BAM} = \widehat{MCN}$ (cùng bù với $\widehat{MCB}$).

=> $\widehat{MCN} = \widehat{MNC}$ (cùng bằng $\widehat{BAM}$).

=> Tam giác MCN cân đỉnh M

Bài 2: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I . Chứng minh:

a/ $MAOB$ nội tiếp.

b/ $MC.MD = MA^2$

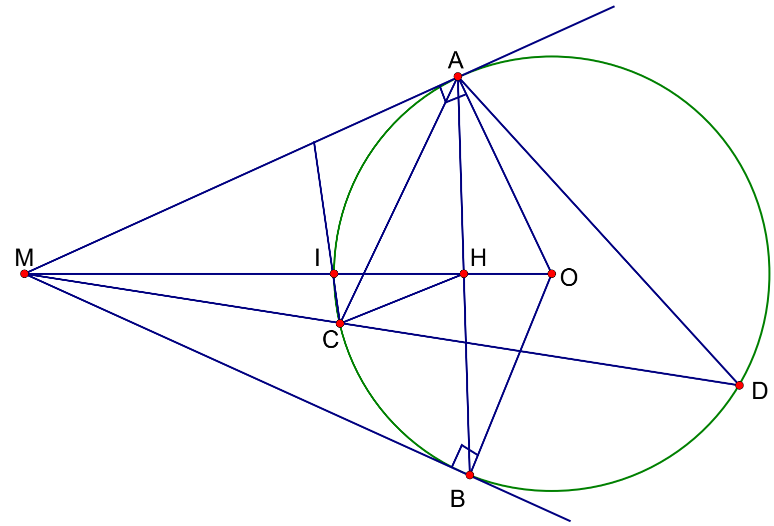
c/ $OH.OM + MC.MD = MO^2$

d/ CI là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$.

Hướng dẫn giải

a/ Ta có: $\begin{cases}\widehat{MAO}=90^\circ\\ \widehat{MBO}=90^\circ\end{cases} \Rightarrow \widehat{MAO}+\widehat{MBO}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ nội tiếp



b/ Ta có: $\widehat{AMD}$ chung

$\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta MAC$ đồng dạng ΔMDA

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MA}$

$\Rightarrow MA^2=MC.MD$

c/ Ta có: $OA = OB$

$\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O

Mà OH là đường phân giác nên cũng là đường cao

$\Rightarrow OH \perp AB$

$\Rightarrow OA^2=OH.OM$

Ta lại có: $MA^2=MC.MD$

$OM^2=MA^2+OA^2$

$\Rightarrow OM^2=MC.MD+OH.OM$

d/ Từ $MH.OM = MA^2$, $MC.MD = MA^2$

$\Rightarrow MH.OM = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$ (*)

Xét ΔMHC *và* ΔMDO có:

$\dfrac{MH}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$ và $\widehat{DMO}$ chung

$\Rightarrow \Delta\ MHC$ đồng dạng $\Delta\ MDO \Rightarrow \dfrac{MC}{MO}=\dfrac{MH}{\text{MD}}=\dfrac{HC}{DO} \Rightarrow \dfrac{MC}{CH}=\dfrac{MO}{\text{OD}} \Rightarrow \dfrac{MC}{CH}=\dfrac{MO}{OA}$ (1)

Ta lại có $\widehat{MAI}=\widehat{IAH}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau)$\Rightarrow$ AI là phân giác của $\widehat{MAH}$.

Theo t/c đường phân giác của tam giác, ta có: $\frac{MI}{IH}=\frac{MA}{AH}$ (2)

$\Delta\, MHA$ và $\Delta\, MAO$ có $\widehat{OMA}$ chung và $\widehat{MHA}=\widehat{MAO}=90^0$ do đó đồng dạng (g.g)$\Rightarrow$ $\frac{MO}{OA}=\frac{MA}{AH}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{MC}{CH}=\frac{MI}{IH}$ suy ra CI là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$.

Bài 3: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M $(M \neq A)$. Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB $(H \in AB)$, MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Chứng minh rằng:

a/ $AKNH$ nội tiếp.

b/ $AM^2 = MK.MB$.

c/ $\widehat{KAC}=\widehat{OMB}$.

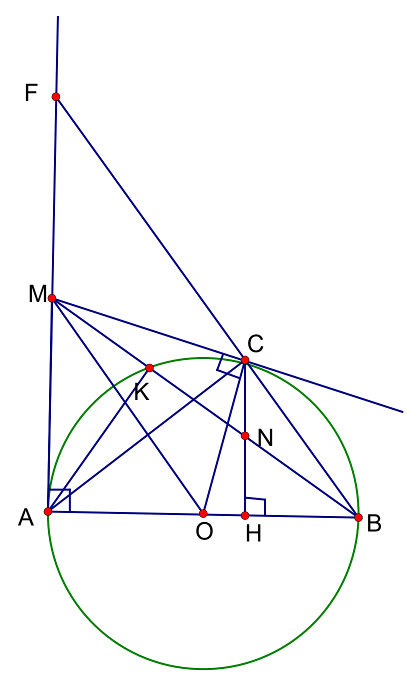
d/ N là trung điểm của CH.

Hướng dẫn giải

a/ Ta có:

$$\begin{cases}\widehat{AKN}=90^\circ\\ \widehat{AHN}=90^\circ\end{cases}\Rightarrow \widehat{AKN}+\widehat{AHN}=180^\circ$$

Vậy tứ giác $AKNH$ nội tiếp.



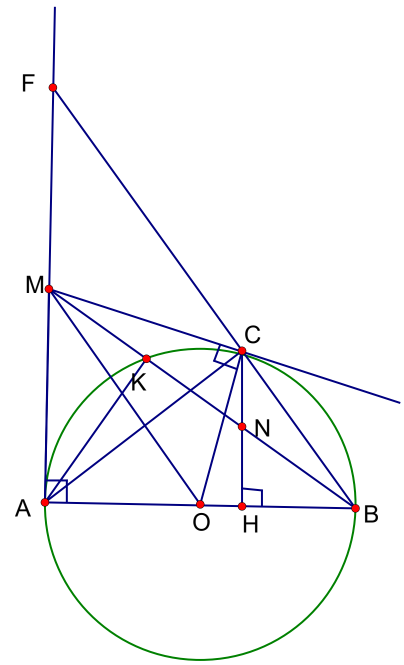
b/ Ta có: $\widehat{MAB}=\widehat{AKM}=90^0$

$\widehat{AMK}$ chung

$\Rightarrow \Delta MKA$ đồng dạng ΔMAB

$$\Rightarrow \frac{MK}{MA}=\frac{MA}{MB}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MK.MB$$



c/ Ta có: $\widehat{CBA}=\dfrac{\overset{\frown}{COA}}{2}$

$\widehat{MOA}=\dfrac{\overset{\frown}{COA}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{MOA}=\widehat{CBA}$

$\Rightarrow\ MO\ //\ CB$

$\Rightarrow \widehat{OMB}=\widehat{MBC}$

Mà $\widehat{MBC}=\widehat{KAC}$ nên $\widehat{KAC}=\widehat{OMB}$

d/ Ta có: $NH\ //\ AM\ \Rightarrow \dfrac{NH}{AM}=\dfrac{BN}{BM}$

$CN//FM\ \Rightarrow \dfrac{CN}{MF}=\dfrac{BN}{BM}\Rightarrow \dfrac{NH}{AM}=\dfrac{CN}{MF}$ (1)

Ta lại có: $MA=MC\ \Rightarrow \Delta AMC$ cân tại $M\ \Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{MCA}$

$\widehat{F}+\widehat{MAC}=90^\circ$

$\widehat{FCM}+\widehat{MCA}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{F}=\widehat{FCM}$

$\Rightarrow \Delta FMC$ cân tại M.

$\Rightarrow MC=MF$ mà $MC = MA$ nên $MA = MF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $NH = CN$

Vậy N là trung điểm CH.

Bài 4: Cho đường tròn (O), từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tia tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Kẻ dây $CD//AB$. Nối AD cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh:

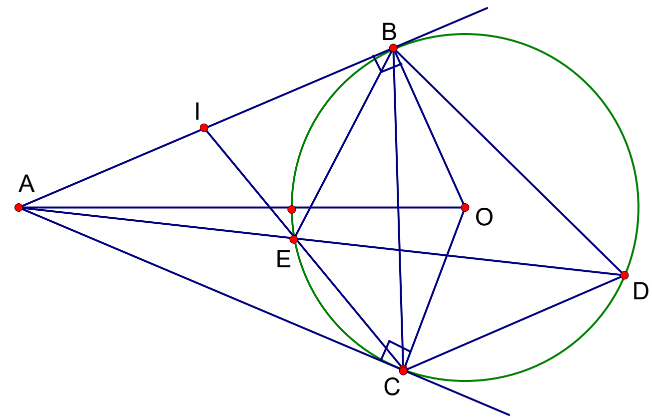
a/ $ABOC$ nội tiếp.

b/ $AB^2=AE.AD.$

c/ ΔBDC cân.

d/ CE kéo dài cắt AB ở I. Chứng minh $IA=IB$.

Hướng dẫn giải



a/ Ta có:

$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^\circ \\ \widehat{ACO} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$

Vậy $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b/ Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{ADB}$

$\widehat{BAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABE$ đồng dạng ΔADB.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AB}$

$\Rightarrow AB^2 = AD.AE$

c/ Ta có: $AB//CD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$

$\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$

Vậy ΔBDC cân tại B.

d/ Ta có: $AB\ //\ CD \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{EDC}$ mà $\widehat{EDC} = \widehat{ECA}$ nên $\widehat{IAE} = \widehat{ECA}$

$\widehat{AIE}$ chung

$\Rightarrow \Delta AIE$ đồng dạng ΔCIA

$\Rightarrow \dfrac{AI}{CI} = \dfrac{IE}{IA} \Rightarrow AI^2 = CI.IE$

Ta lại có: $\widehat{IBE} = \widehat{BCI}$

$\widehat{BIE}$ chung

$\Rightarrow \Delta BIE$ đồng dạng ΔCIB

$\Rightarrow \dfrac{BI}{CI} = \dfrac{IE}{IB} \Rightarrow BI^2 = IE.CI$

Mặt khác: $AI^2 = CI.IE$ nên $AI^2 = BI^2 \Rightarrow AI = BI$.

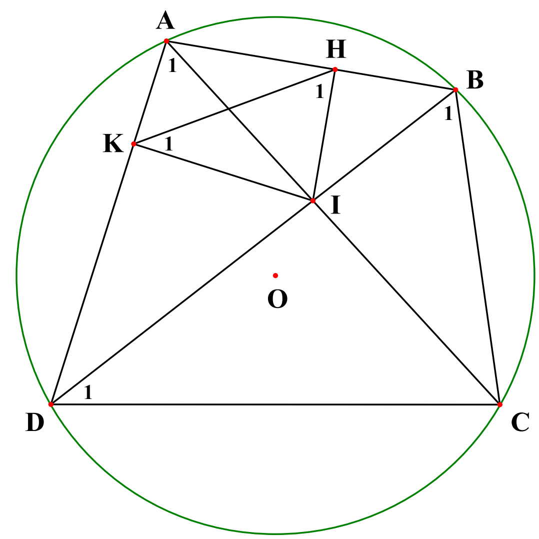
Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi I là giao điểm AC và BD. Kẻ IH vuông góc với AB; IK vuông góc với AD ($H \in AB; K \in AD$).

a) Chứng minh tứ giác $AHIK$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng $IA.IC = IB.ID$.

c) Chứng minh rằng tam giác HIK và tam giác BCD đồng dạng.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh tứ giác $AHIK$ nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác $AHIK$ có:

$\widehat{AHI} = 90^\circ$ ($IH \perp AB$)

$\widehat{AKI} = 90^\circ$ ($IK \perp AD$)

$\Rightarrow \widehat{AHI} + \widehat{AKI} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHIK$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $IA.IC = IB.ID$.

Xét ΔIAD và ΔIBC có:

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC của (O))

$\widehat{AID} = \widehat{BIC}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow$ ΔIAD” ΔIBC (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{ID}{IC} \Rightarrow IA.IC = IB.ID$

c) Chứng minh rằng tam giác HIK và tam giác BCD đồng dạng.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHIK$ có

$\widehat{A}_1 = \widehat{H}_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{B}_1$

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{K}_1 = \widehat{D}_1$

ΔHIK và ΔBCD có: $\widehat{H}_1 = \widehat{B}_1$; $\widehat{K}_1 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta HIK$ ” ΔBCD (g.g)

Bài 6: Cho ΔABC có ba góc nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm D và E. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng CD và BE.

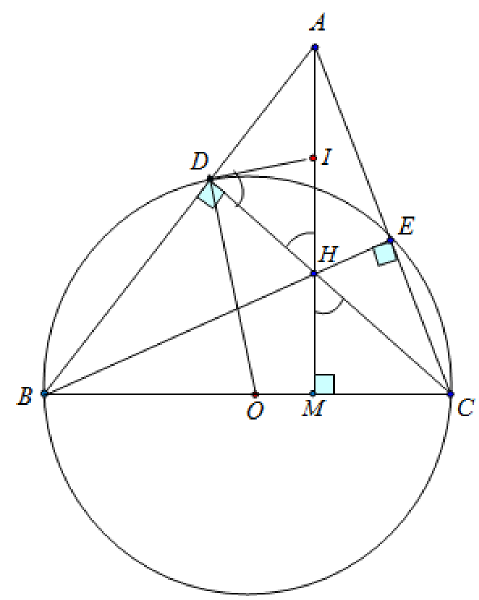
a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.

b) Gọi M là giao điểm của AH và BC. Chứng minh $CM.CB = CE.CA$.

c) Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.



Ta có : $\widehat{BDC} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn)

$\widehat{BEC} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn)

Suy ra : $\widehat{ADH} = \widehat{BDC} = 90^\circ$, $\widehat{AEH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ADHE$ có:

$\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Tứ giác $ADHE$ có hai góc đối bù nhau.

Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn.

Tâm I là trung điểm cạnh AH.

b) Chứng minh $CM.CB = CE.CA.$

Xét hai tam giác CBE và CAM có :

$\widehat{ACM}$ là góc chung

$\widehat{AMC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (chứng minh trên)

Suy ra hai tam giác CBE và CAM đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CM.CB = CE.CA.$$

c) Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ta có : $\widehat{IDH} = \widehat{IHD}$ (do ΔIDH cân tại I) (1)

$\widehat{IHD} = \widehat{CHM}$ (đối đỉnh) (2)

Mặt khác : $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ (do ΔODC cân tại O) (3)

Ngoài ra, trong tam giác vuông MHC có :

$\widehat{CHM} + \widehat{MCH} = 90°$ (4)

Từ $(1), (2), (3), (4)$ suy ra: $\widehat{IDH} + \widehat{ODC} = 90°$

Suy ra : $ID \perp DO$

Vậy ID là tiếp tuyến của (O).

Bài 7: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao CD của ΔABC cắt đường tròn (O) tại E. Từ B kẻ $BF \perp AE$ tại F.

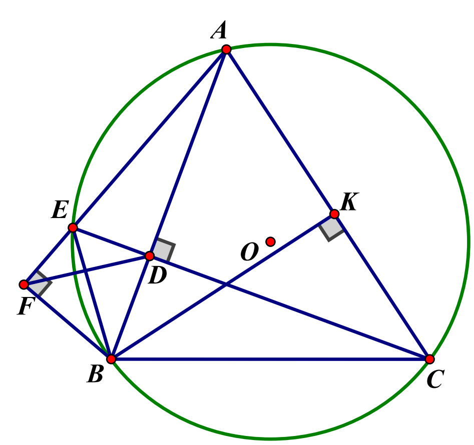
a) Chứng minh tứ giác $BDEF$ nội tiếp được đường tròn.

b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{EF}{BF} = \dfrac{CK}{BK}$.

c) Chứng minh: $\dfrac{AE}{BF} + \dfrac{AC}{BK} = \dfrac{AF}{BF} + \dfrac{AC}{BK}$.

d) Chứng minh: $\dfrac{CE}{BD} = \dfrac{AE}{BF} + \dfrac{AC}{BK}$.

Hướng dẫn giải



a) Xét tứ giác $BDEF$, ta có:

$\widehat{BDE} = 90°$ (gt)

$\widehat{BFE} = 90°$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BDE} + \widehat{BFE} = 180°$

Vậy tứ giác $BDEF$ nội tiếp được đường tròn.

b) Ta có: tứ giác $ACBE$ nội tiếp đường tròn (O).

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ACB}$ (cùng bù $\widehat{AEB}$)

$\Rightarrow \Delta BEF \backsim \Delta BCK\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{EF}{BF}=\dfrac{CK}{BK}$

c) Ta có: $\dfrac{AE}{BF}+\dfrac{AC}{BK}=\dfrac{AF-EF}{BF}+\dfrac{AK+KC}{BK}=\dfrac{AF}{BF}+\dfrac{AK}{BK}-\dfrac{EF}{BF}+\dfrac{KC}{BK}$

Mà: $\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{CK}{BK}$ (câu b)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{BF}+\dfrac{AC}{BK}=\dfrac{AF}{BF}+\dfrac{AC}{BK}\ (1)$

d) Ta có: $\Delta EDB \backsim \Delta AKB(g-g) \Rightarrow \dfrac{ED}{BD}=\dfrac{AK}{BK}$

Lại có: $\Delta CDB \backsim \Delta AFB(g-g) \Rightarrow \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AF}{BF}$

$\Rightarrow \dfrac{ED}{BD}+\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AF}{BF}+\dfrac{AK}{BK}$

$\Leftrightarrow \dfrac{CE}{BD}=\dfrac{AF}{BF}+\dfrac{AK}{BK}\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{CE}{BD}=\dfrac{AE}{BF}+\dfrac{AC}{BK}$

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D, OD cắt AC tại H.

1. Chứng minh tứ giác $CKMH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $CD = MB$ và $DM = CB$

3. Xác định vị trí điểm C trên nửa đường tròn (O) để AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn.

Hướng dẫn giải

1. Chứng minh tứ giác $CKMH$ nội tiếp.

Có $\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

$\Rightarrow AM \perp MB$

Mà $CD \parallel BM$ (gt) nên $AM \perp CD$. Vậy $\widehat{MKC} = 90°$.

Lại có $AM = CM$ (gt) $\Rightarrow OM \perp AC \Rightarrow \widehat{MHC} = 90°$.

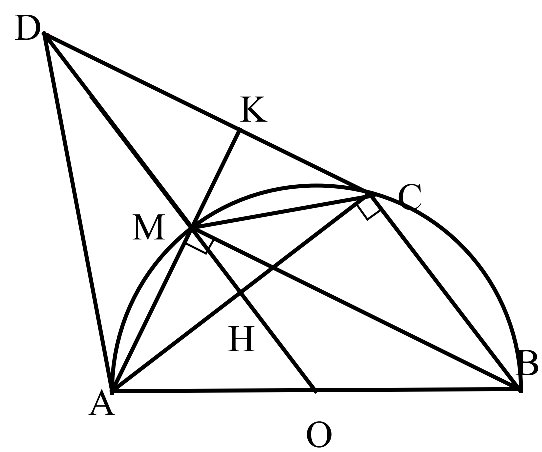
Tứ giác $CKMH$ có $\widehat{MKC} + \widehat{MHC} = 180^0$ nên tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.

2. Chứng minh $CD = MB$ và $DM = CB$

Ta có $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó $DM \parallel CB$, mà $CD \parallel MB$ (gt) nên tứ giác $CDMB$ là hình bình hành.

Suy ra: $CD = MB$ và $DM = CB$.



3. Xác định vị trí điểm C trên nửa đường tròn (O) để AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn.

AD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Leftrightarrow \Delta ADC$ có $AK \perp CD$ và $DH \perp AC$

nên M là trực tâm tam giác. Suy ra $CM \perp AD$.

Vậy $AD \perp AB \Leftrightarrow CM \parallel AB \Leftrightarrow AM = BC$

Mà $AM = MC$ nên $AM = BC \Leftrightarrow AM = MC = BC \Rightarrow \widehat{COB} = 60°$. Vậy tam giác OBC đều.

Vậy điểm C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{CBA} = 60^o$

Bài 9: Cho đường tròn tâm O đường kính A, M là một điểm nằm trên đoạn thẳng OB (M khác O và B). Đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB cắt (O) tại C, D. Trên tia MD lấy E nằm ngoài (O). Đường thẳng AE cắt (O) tại điểm I khác A, đường thẳng BE cắt (O) tại điểm K khác B. Gọi H là giao điểm của BI và. Chứng minh:

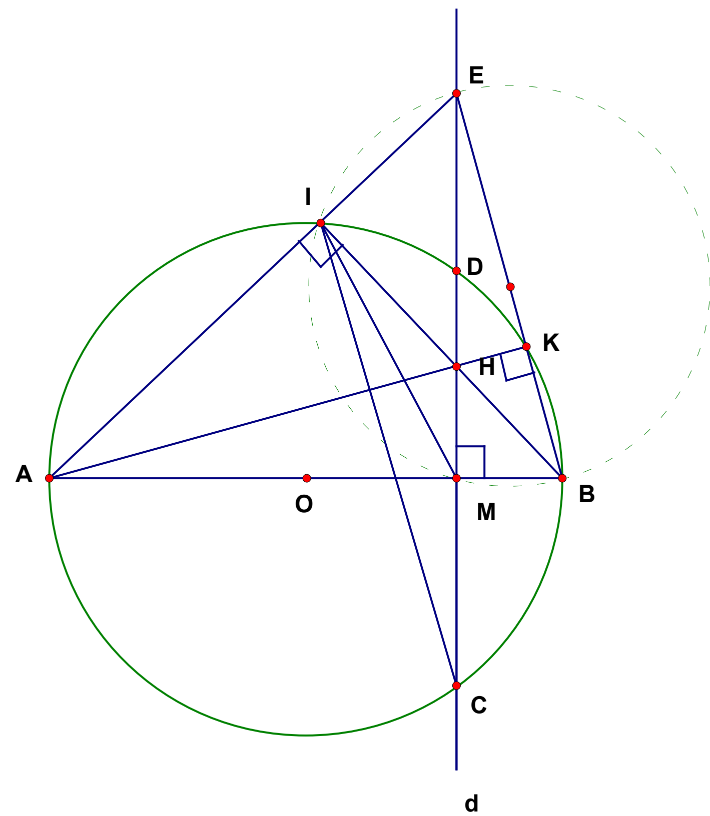
a) Tứ giác $MBEI$ nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đó.

b) Các tam giác IEH và MEA đồng dạng với nhau.

c) $EC.ED = EH.EM$.

d) Khi E thay đổi trên, đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{AIB} = \widehat{EIB} = \widehat{EMB} = 90^o$

Vậy tứ giác $MBEI$ nội tiếp đường tròn,
tâm của đường tròn là trung điểm của BE.

b) $\Delta EIH \backsim \Delta MEA$

Vì $\widehat{AEM}$ là góc chung và $\widehat{EIH} = \widehat{EMA} = 90°$

c) $\Delta EIH \backsim \Delta MEA \Rightarrow EI.EA = EH.EM$ (1)

$\Delta EAD \backsim \Delta ECI$ (g-g)$\Rightarrow EI.EA = EC.ED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $EC.ED = EH.EM$.

d) H là trực tâm của tam giác AEB nên $AH \perp EB$

Vì $\widehat{AKB} = 90°$ nên $AK \perp EB \Rightarrow$ ba điểm A, H, K thẳng hàng.
Do A cố định nên HK luôn đi qua điểm A cố định.

Bài 10: Cho đường tròn tâm O bán kính R, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn AB lấy điểm M khác O, đường thẳng CM cắt đường tròn tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến với dường tròn tại N ở điểm P.

a) Chứng minh: Tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $\Delta MCO = \Delta OPM$, suy ra $OMPD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh: $CM // OP$.

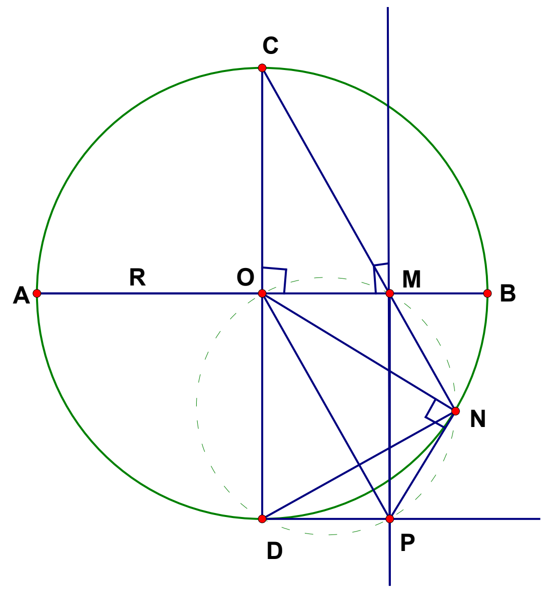
d) Tính tích $CM.CN$ theo R.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{PMO} = \widehat{PNO} = 90° \Rightarrow M, N$ cùng thuộc đường tròn đường kính PO.

Vậy tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{OPM} = \widehat{ONM}$ (tứ giác $OMNP$ nội tiếp)



$\widehat{ONM} = \widehat{OCM}$ (tam giác OCN cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{OCM} \Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{POM}$

$\Rightarrow \Delta MCO = \Delta OPM \ (g-c-g) \Rightarrow CO = MP = R$

Ta có $PM = DO = R$; $PM // DO$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow OMPD$ là hình bình hành

Mặt khác: $\widehat{MOD} = 90°$ nên $OMPD$ là hình chữ nhật

c) Ta có: $\widehat{CMO} = \widehat{POM} \Rightarrow CM // OP$.

d) ΔEAD ” ΔECI

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM.CN = CO.CD = 2CO^2 = 2R^2$$

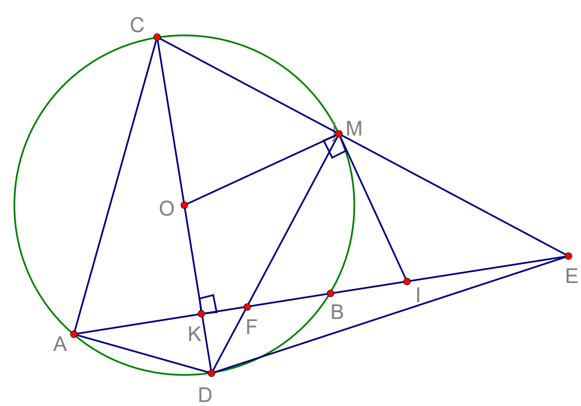
Bài 11: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB, vẽ đường kính CD vuông góc với AB tại K (D thuộc cung nhỏ AB). Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC, DM cắt AB tại F.

a. Chứng minh tứ giác $CKFM$ nội tiếp.

b. Chứng minh: $DF.DM = AD^2$.

c. Tia CM cắt đường thẳng AB tại E. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AF tại I. Chứng minh: $IE = IF$

d. Chứng minh: $\dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$.



Hướng dẫn giải

a) Vì $AB \perp CD \Rightarrow \widehat{CDF} = 90°$;

Mà $\widehat{CMF} = 90°$ (Góc n.tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ Tứ giác $CKFM$ nội tiếp

b) Ta có $DF.DM = DK.DC$ (Do $\Delta DKF \sim \Delta DMC(g-g)$)

và $DK.DC = AD^2$ (Pitago trong tam giác vuông ADC có AK đường cao)

Suy ra: $DM.DF = AD^2$.

c) $\widehat{MFI} = \widehat{CDM} = \widehat{DMI} \Rightarrow \Delta MIF$ cân tại $I \Rightarrow MI = MF$ (1)

Mà $\widehat{IME} + \widehat{IMF} = \widehat{EMF} = 90°$; $\widehat{MFI} + \widehat{MEI} = 90°$ (Vì ΔMEF vuông tại M)

Mặt khác theo c/m trên: $\widehat{IMF} = \widehat{MFI} \Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{IEM} \Rightarrow \Delta MIE$ cân tại $I \Rightarrow IE = IM$ (2) ;

Từ (1) và (2) suy ra: $IF = IE$.

d) Ta có $KA = KB$ (T/c đường kính vuông góc dây cung)

Ta có: $\Delta DKF \,\square\, \Delta EKC(g-g) \Rightarrow \dfrac{DK}{EK} = \dfrac{KF}{KC} \Leftrightarrow KE.KF = KD.KC$.

Mà $KD.KC = KB^2$ (Pitago trong tam giác vuông CBD có BK là đường cao)

$\Leftrightarrow (KB+BE)KF = KB^2 \Leftrightarrow KB.KF + BE.KF = KB^2 \Leftrightarrow BE.KF = KB^2 - KB.KF$

$= KB(KB-KF) \Leftrightarrow BE.KF = KB.FB \Leftrightarrow \dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KB} \Leftrightarrow \dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$.

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Dựng đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB tại E, cắt AC tại F. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E, F lần lượt cắt cạnh BC tại M và N.

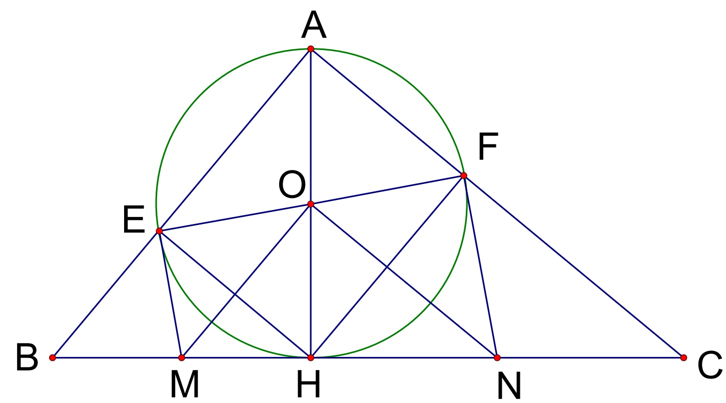
a) Chứng minh rằng tứ giác $MEOH$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $AB.HE = AH.HB$

c) Chứng minh ba điểm E,O,F thẳng hàng.

d) Cho $AB = 2\sqrt{10}cm$, $AC = 2\sqrt{15}cm$. Tính diện tích ΔMON.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh rằng tứ giác $MEOH$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{OEM} = 90^\circ$ (EM là tiếp tuyến của (O))

$\widehat{OHM} = 90^\circ$ (AH là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{OEM} + \widehat{OHM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $MEOH$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $AB.HE = AH.HB$

Xét ΔABH vuông tại H và ΔHBE vuông tại E có:

$\widehat{B}$ chung

Vậy $\Delta ABH \sim \Delta HBE(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{AH}{HE}$ hay $AB.HE = AH.HB$

c) Chứng minh ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{HFA} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật

Suy ra EF, AH là hai đường chéo

Mà O là trung điểm của AH nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.

d) Cho $AB = 2\sqrt{10}cm$, $AC = 2\sqrt{15}cm$. Tính diện tích ΔMON.

Ta có OM là đường trung bình của ΔABH nên $OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{10} = \sqrt{10}(cm)$

Tương tự, ta cũng có $ON = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{15} = \sqrt{15}(cm)$

OM là tia phân giác của $\widehat{EOH}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\widehat{EOM} = \widehat{MOH}$

Tương tự ta có $\widehat{HON} = \widehat{NOF}$

Mặt khác $\widehat{EOH} + \widehat{HOF} = 180^\circ$ (kề bù)

Suy ra $\widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MON$ vuông tại O.

$$S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OM.ON = \frac{1}{2}\sqrt{10}.\sqrt{15} = \frac{5\sqrt{6}}{2}(cm^2)$$

Bài 13: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) cắt tia CA tại D. Trên cạnh AB lấy điểm E (E không trùng với A và B). Tia CE cắt đường tròn (O) tại F và cắt BD tại K. Tia BF cắt CD tại M.

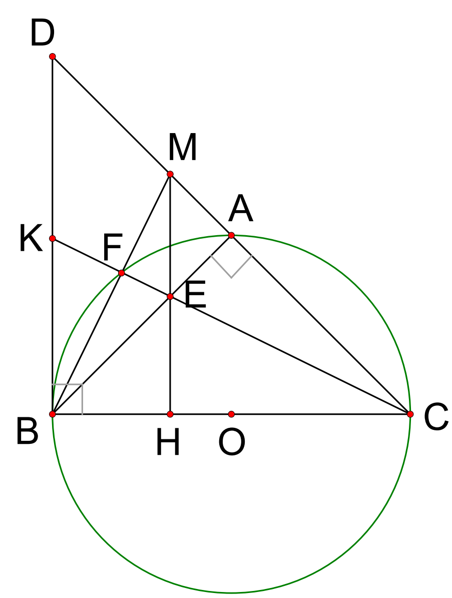
a) Chứng minh $\Delta MAB \backsim \Delta MFC$.

b) Chứng minh tứ giác $AFKD$ nội tiếp.

c) Tia ME cắt BC tại H. Tứ giác $MDBH$ là hình gì?

d) Chứng minh $AB.EB + CE.CF = BC^2$.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh ΔMAB” ΔMFC.

Ta có: $\widehat{BAM} = \widehat{CFM} = 90^\circ$

$\widehat{MBA} = \widehat{MCF}$ (cùng chắn cung AF)

Vậy ΔMAB” ΔMFC (g.g).

b) Chứng minh tứ giác $AFKD$ nội tiếp.

Do ΔABC vuông cân tại A nên $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$ (cùng chắn cung AC)

ΔDBC vuông cân tại B có $\widehat{DCB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{D}$

Lại có $\widehat{AFC} + \widehat{AFK} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{D} + \widehat{AFK} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $AFKD$ nội tiếp

c) Tứ giác $MDBH$ là hình gì?

Ta có E là trực tâm của ΔBMC $\Rightarrow MH \perp HB(1)$

$MH // DB$ (2) (vì cùng vuông góc với BC)

Từ $(1),(2)$ suy ra tứ giác $MDBH$ là hình thang vuông.

d) Chứng minh $AB.EB + CE.CF = BC^2$

Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta HBE$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{BC}{EB} \Rightarrow AB.EB = BC.HB$ (3)

$\Delta FCB \backsim \Delta HCE$ $\Rightarrow \dfrac{CF}{HC} = \dfrac{BC}{EC} CF.EC = HC.BC$ (4)

Cộng (3) và (4) $AB.EB + CF.EC = BC.HB + HC.BC = BC(HB + HC) = BC.BC = BC^2$

Vậy $AB.EB + CE.CF = BC^2$.

Bài 14: Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB, CD bất kì. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đường thẳng AE, AF.

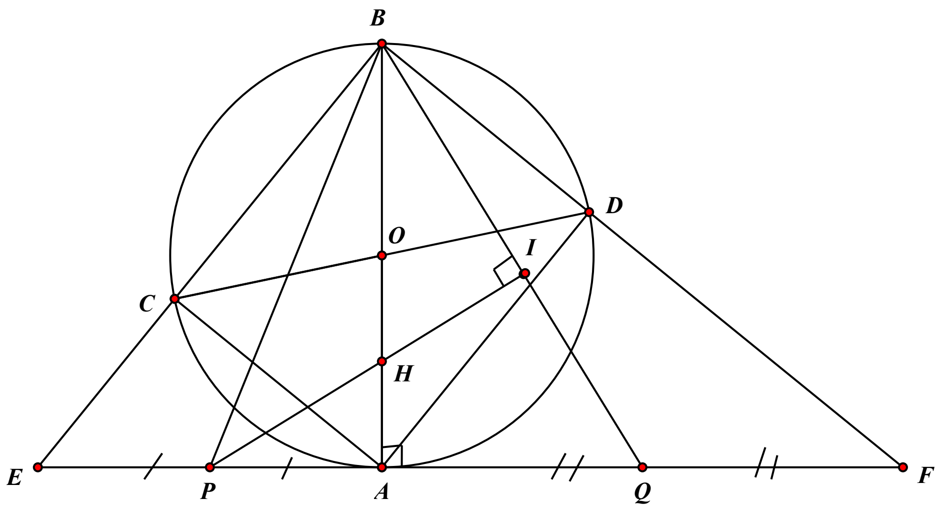
a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CE.DF.EF = AB^3$ và $\dfrac{BE^3}{BF^3} = \dfrac{CE}{DF}$

c) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

d) Hai đường kính AB và CD có vị trí như thế nào thì tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất? Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác $CDEF$ nội tiếp

$\widehat{CBD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{ABC}$ (vì cùng phụ $\widehat{ABF}$)

ΔOBC có $OB = OC = R$ nên ΔOBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{OCB}$.

Suy ra: $\widehat{EFB} = \widehat{OCB} \Rightarrow$ tứ giác $CDFE$ nội tiếp (có góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

b) $CE.DF.EF = AB^3$ và $\dfrac{BE^3}{BF^3} = \dfrac{CE}{DF}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$AE^2 = CE.BE, AF^2 = DF.BF$ và $AB.EF = BE.BF$

$AB^2 = AE.AF \Rightarrow AB^4 = AE^2.AF^2 = CE.BE.DF.BF = CE.DF.(BE.BF) = CE.DF.EF.AB$

Do đó $AB^3 = CE.DF.EF$.

Ta lại có: $\dfrac{BE^2}{BF^2} = \dfrac{EA.EF}{FA.EF} = \dfrac{EA}{FA} \Rightarrow \dfrac{BE^4}{BF^4} = \dfrac{EA^2}{FA^2} = \dfrac{CE.BE}{DF.BF}$

Vậy: $\dfrac{BE^3}{BF^3} = \dfrac{CE}{DF}$.

c) H là trung điểm AD.

Kẻ $PI \perp BQ (I \in BQ)$ và PI cắt AB tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔBPQ .

Ta có: $AB^2 = AE.AF \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AF} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB/2} = \dfrac{AB}{AF/2} \Rightarrow \dfrac{AE}{OA} = \dfrac{AB}{AQ}$

$\Rightarrow \Delta AEO \backsim \Delta ABQ \left(\widehat{EAO} = \widehat{BAQ} = 90^\circ, \dfrac{AE}{OA} = \dfrac{AB}{AQ} \right) \Rightarrow \widehat{ABQ} = \widehat{AEO}$

Mà $\widehat{IPQ} = \widehat{ABQ}$ (cùng phụ với $\widehat{BQP}$)

$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{IPQ}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $IP//OE$.

Trong ΔOAE có: $PI//OE; EP = PA(gt) \Rightarrow OH = HA.$

Bài 15: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB = 2R$, dây cung MN của (O) vuông góc với AB tại I sao cho $IA < IB$. Trên đoạn MI lấy điểm $E(E \neq M, E \neq I)$. Tia AE cắt đường tròn tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh tứ giác $IEKB$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $AM^2 = AE.AK$.

c) Chứng minh $AE.AK + BI.BA = 4R^2$.

d) Xác định vị trí điểm I sao cho chu vi ΔMIO đạt giá trị lớn nhất.

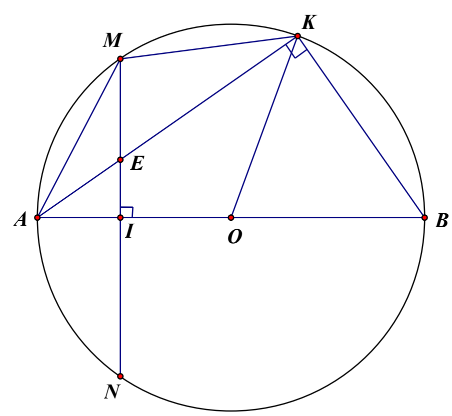
Hướng dẫn giải

a) Tứ giác $IEKB$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AKB} = 60^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AKB} + \widehat{BIE} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IEKB$ nội tiếp được đường tròn.



b) $AM^2 = AE.AK$.

Ta có: $AB \perp MN$ tại $I \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AKM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

ΔAME và ΔAKM có: $\widehat{MAK}$: chung, $\widehat{AME} = \widehat{AKM}$ (cmt).

$\Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta AKM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AK.$

c) $AE.AK + BI.AB = 4R^2$.

$\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có: $MB^2 = BI.AB.$

Do đó: $AE.AK + BI.AB = MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2.$

Bài 16: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (khác với điểm A). Tiếp tuyến kẻ từ điểm E cắt các tiếp tuyến kẻ từ điểm A và B của nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Hướng dẫn giải

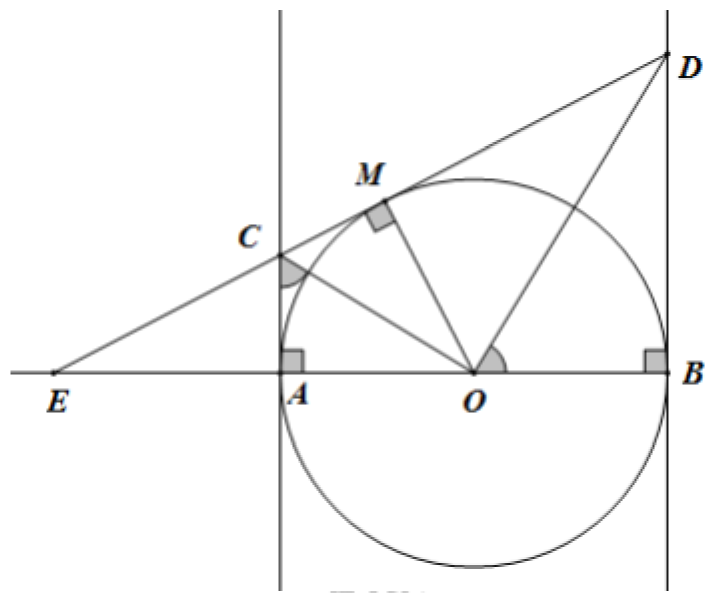
a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AC => $\widehat{OAC} = 90^o$

Vì MC là tiếp tuyến của (O) nên OM ⊥ MC => $\widehat{OMC} = 90^o$

=> $\widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 180^o$. Suy ra OACM là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$



Xét hai tam giác vuông OAC và OMC có

$\begin{cases} OA = OM = R \\ chung\ OC \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OMC$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ CA = CM $\Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{CA}{CE}$.

Tương tự ta có $\frac{DM}{DE} = \frac{DB}{DE}$

Mà AC // BD (cùng vuông góc AB) nên

$\frac{CA}{DB} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{DM}{DE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Vì $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow AOC = MOC \Rightarrow AOC = \frac{1}{2}AOM$

Tương tự: $BOD = \frac{1}{2}BOM$

Suy ra $\widehat{AOC}+\widehat{BOD}=\frac{1}{2}(\widehat{AOM}+\widehat{BOM})=90^o$

Mà $AOC+ACO=90^o \Rightarrow ACO=BOD$

$\Rightarrow \Delta AOC$” $\Delta BDO(g.g) \Rightarrow \frac{AO}{BD}=\frac{AC}{BO} \Rightarrow AC.BD=AO.BO=R^2$ (không đổi, đpcm)

Hết