CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH
BA ĐIỂM THẲNG HÀNG - BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

A. CÁC BÀI TOÁN VỀ BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

I. Một số phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp 1: *Sử dụng góc bù nhau*

Nếu có $ABx + xBC = 180^0$ *thì 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.*

Phương pháp 2: *Sử dụng tiên đề về đường thẳng song song*

Tiên đề Ơclít: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Do đó, nếu qua điểm A ta kẻ được AB và AC cùng song song với một đường thẳng d nào đó thì A, B, C thẳng hàng.

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chứng minh AB và AC cùng song song với một đườngthẳng d.

Phương pháp 3: *Sử dụng tiên đề về đường thẳng vuông góc*

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta đi chứng minh AB và AC cùng vuông góc với một đường thẳng d.

Phương pháp 4: *Sử dụng 2 tia trùng nhau hoặc đối nhau*

Nếu hai tia MA, MB trùng nhau hoặc đối nhau thì 3 điểm M, A, B thẳng hàng.

Phương pháp 5: *Thêm điểm*

Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng có thể xác định thêm điểm D khác A, B, C sau đó chứng minh hai trong ba bộ ba điểm A, B, D; A, C, D; B, C, D thẳng hàng.

Phương pháp 6: *Phương pháp sử dụng hình duy nhất*

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng với C thuộc hình H nào đó. Ta gọi C′ là giao điểm của AB với hình H và tìm cánh chứng minh hai điểm C và C′ trùng nhau.

Phương pháp 7: *Sử dụng định lý Menelaus*

Cho tam giác ABC. Các điểm A′, B′, C′ lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng 2 điểm thuộc các cạnh của tam giác ABC. Khi đó A′, B′, C′ thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$

Chứng minh

+ Trường hợp 1: Trong 3 điểm A′, B′, C′ có đúng 2 điểm thuộc cạnh tam giác ABC. Giả sử là B′, C′

- Điều kiện cần: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng B′C′ tại M.

Ta có $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B};\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}$. Vậy $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}.\frac{A'B}{A'C}=1$

- Điều kiện đủ: Gọi A′′ là giao của B′C′ với BC.

Áp dụng định lý Menelaus (phần thuận) ta có $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ mà $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$

nên $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$. Do B′, C′ lần lượt thuộc cạnh CA, AB nên A′′ nằm ngoài cạnh BC.

Vậy $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$ và A′, A′′ nằm ngoài cạnh BC suy ra $A''\equiv A'$. Do đó A′, B′, C′ thẳng hàng

+ Trường hợp 2: Trong 3 điểm A′, B′, C′ không có điểm thuộc cạnh tam giác ABC được chứng minh tương tự.

II. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hình thang ABCD có AB//CD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AD. Gọi E là trung điểm của PN. Chứng minh rằng ba điểm M, O, E thẳng hàng.

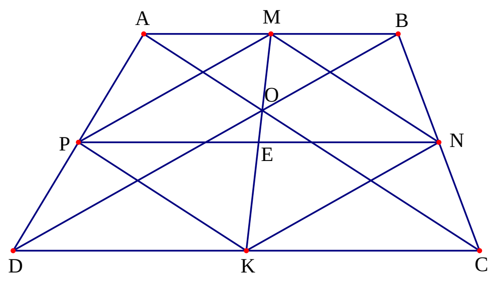
Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ và các yếu tố trung điểm ta nhận thấy nếu gọi K là trung điểm của CD thì tứ giác MNKP là hình bình hành, khi đó ba điểm M, O, E thẳng hàng. Để có được M, O, E ta cần chỉ ta được M, K, O thẳng hàng. Do O là giao điểm của hai đường chéo nên ta thấy có các tam giác đồng dạng. Do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến chứng minh $KOM=180^0$.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của CD. Khi đó trong tam giác ABD có M và P là trung điểm của AB và AD nên PM là đường trung bình, do đó PM//BD và $PM=\frac{1}{2}BD$.

Từ đó suy ra tứ giác MNKP là hình bình hành, do đó hai đường chéo NP và MK cắt nhau tại E hay ba điểm M, K, E thẳng hàng .



Dễ thấy hai tam giác OAB và OCD đồng dạng nên ta được $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}$. Mà lại có

$AM = \frac{1}{2}AB, CK = \frac{1}{2}CD$ nên ta được

$\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CK}$.

Xét hai tam giác OAM và OCK có $OAM = OCK$ và $\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CK}$ nên ta được $\Delta OAM \backsim \Delta OCK$.

Từ đó suy ra $AOM = COK$.

Mà ta có $AOM = MOC = AOC = 180^0$ nên ta được $MOK = COK + MOC = AOM + MOC = 180^0$

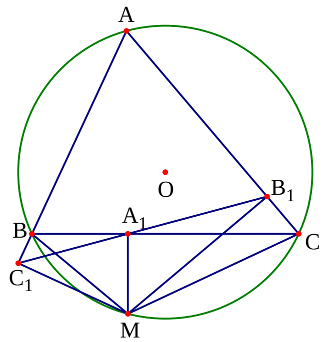
Do đó ba điểm M, O, K thẳng hàng. Từ đó dẫn đến ba điểm M, O, E thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm tuỳ ý thuộc đường tròn (O). Gọi $A_1;B_1;C_1$ theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh ba điểm $A_1;B_1;C_1$ thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ và giả thiết của bài toán ta nhận thấy các tứ giác nội tiếp. Điều này cho ta các góc nội tiếp bằng nhau. Do đó từ yêu cầu chứng minh ba điểm $A_1;B_1;C_1$ thẳng hàng ta nghĩ đến chứng minh $C_1A_1B + BA_1B_1 = 180^0$. Muốn vậy ta cần chỉ ra được $C_1A_1B = B_1A_1C$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát giả sử điểm M thuộc cung nhỏ BC .

Ta có $BC_1M = BA_1M = 90^0$ nên tứ giác MA_1C_1B nội tiếp.

Do đó ta được $BA_1C_1 = BMC_1$. Lại có $MA_1C = MB_1C = 90^0$ nên tứ giác MA_1CB_1 nội tiếp. Do đó ta được

$CA_1B_1 = CMB_1$

Mặt khác ta lại có $BAC + BMC = BAC + B_1MC_1 = 180^0$ nên

$BMC = B_1MC_1$

Từ đó ta được $B_1MC = C_1MB$. Kết hợp các kết quả trên ta được $C_1A_1B = B_1A_1C$

Từ đó suy ta $C_1A_1B + BA_1B_1 = B_1A_1C + BA_1B_1 = 180^0$ nên ba điểm $A_1;B_1;C_1$ thẳng hàng

Nhận xét: Đường thẳng chứa ba điểm $A_1;B_1;C_1$ gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm M. Nếu M trùng với đỉnh của tam giác ABC thì đường thẳng Simson chính là đường cao tương ứng.

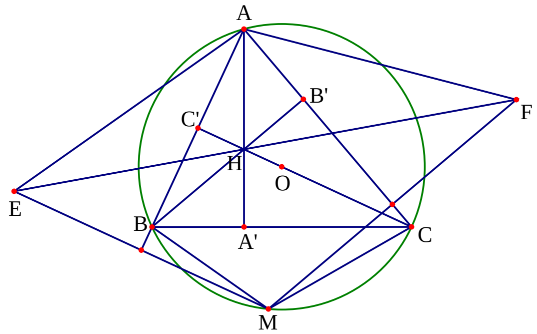
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F thứ tự là các điểm đối xứng của M qua AB, AC. Gọi H là trực tâm trực tâm ABC. Chứng minh rằng E, H, F thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ, tính tính đối xứng và các tứ giác nội tiếp ta suy ra được các cặp góc bằng nhau như $BHA' = BEA$, $EHB = EAB = MAB$ hay $A'HC = ABC$ và $CHF = MAC$. Do đó để chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng ta đi chứng minh

$EHB + BHA' + A'HC + CHF = 180^0$.

Lời giải



Gọi B′ là giao điểm của BH và AC, A′ là giao điểm của AH và BC. Khi đó tứ giác HA′CB′ nội tiếp nên

$BHA' = A'CB' = BCA = AMB = BEA$.

Từ đó ta được tứ giác AHBE nội tiếp nên suy ra $EHB = EAB = MAB$. Hoàn toàn tương tự ta có $A'HC = ABC$ và

$CHF = MAC$.

Từ đó ta được

$$EHB + BHA' + A'HC + CHF = MAB + ACB + ABC + MAC = ABC + BAC + ACB = 180^0$$

Suy ra $EHF = 180^0$ nên ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Nhận xét: Đường thẳng đi qua 3 điểm E, H, F nói trên có tên là đường thẳng Steiner ứng với điểm M.

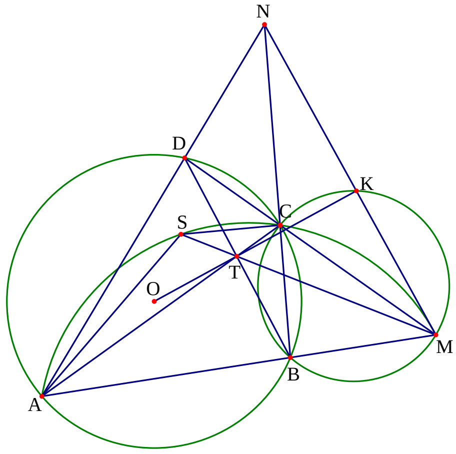
Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O; R). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AD, BC cắt nha tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC cắt MN tại K khác M. Gọi T là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm O, T, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Quan sát hình vẽ ta nhận thấy OK và TK cùng vuông góc với MN. Do đó ta hướng đến sử dụng quan hệ vuông góc để chứng minh ba điểm thẳng hàng. Ta gọi S là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM với MT. Các tứ giác AMCS và ABTS nội tiếp nên $MT.TS = R^2 - OT^2$ và $MT.MS = OM^2 - R^2$.

Từ đó $MT^2 = OM^2 + OT^2 - 2R^2$. Hoàn toàn tương tự ta cũng được $NT^2 = ON^2 + OT^2 - 2R^2$. Do đó suy ra $MT^2 - NT^2 = OM^2 - ON^2$ nên $OT \perp MN$. Như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $OK \perp MN$.Muốn vậy ta cần chỉ ra được $OKM = 90^0$.

Lời giải



Gọi S là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM với MT. Khi đó tứ giác AMCS nội tiếp đường tròn nên dễ dàng suy ra được $MT.TS = AT.TC = R^2 - OT^2$ Và $MSA = MCA$, $MCA = MBD$ nên ta được $MBD = MSA$. Do đó tứ giác ABTS nội tiếp đường tròn, do đó ta được $MT.MS = OM^2 - R^2$. Từ đó ta được

$$MT.MS - MT.TS = OM^2 + OT^2 - 2R^2$$

Suy ra $MT^2 = OM^2 + OT^2 - 2R^2$.

Tương tự ta cũng được $NT^2 = ON^2 + OT^2 - 2R^2$

Do đó ta được $MT^2 - NT^2 = OM^2 - ON^2$. Từ đó ta được $OT \perp MN$.

Mặt khác ta lại có $MBC = ADC$ và $CKN = MBC$ nên ta được $ADC = CKN$

Từ đó suy ra tứ giác DCKN nội tiếp đường tròn, do đó $DKN = DCN$ Mà ta lại có $DCN = MAD$ nên ta được $DKN = MAD$, suy ra tứ giác AMKD nội tiếp đường tròn. Nên ta được $AKM = ADM = CKN$.

Do đó $AOC + AKC = 2ADM + AKC = AKM + CKN + AKC = 180^0$. Suy ra tứ giác AOCK nội tiếp đường tròn. Mà ta có $OA = OC$ nên $OA = OC$, suy ra $AKO = OKC$

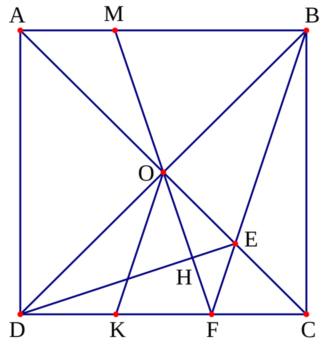
Do đó $OKM = AKO + AKM = 90^0$ hay $OK \perp MN$. Như vậy ta có $OT \perp MN$ và $OK \perp MN$ nên OT và OK trùng nhau. Vậy ba điểm O, T, K thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Đường thẳng qua D và vuông góc với đường thẳng MO cắt AC tại E. Gọi F là giao điểm của MO và CD. Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Lấy K là trung điểm của DF khi đó ta nhận thấy OK song song với BF. Để chứng minh ba điểm B, E, F thẳng hàng ta cần chỉ ra được EF vuông góc với OK. Muốn vậy ta cần chứng minh EF là đường trung bình của tam giác COK hay đi chứng minh E là trung điểm của OC.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của MO và DE, khi đó ta được $HO \perp DE$ tại H, do đó tam giác OHE vuông tại H. Từ đó ta được $HOE + OEH = 90^0$, mà ta có $MOA + BOM = 90^0$ và $HOE = MOA$ nên ta suy ra được $OEH = BOM$.

Ta lại có $MBO = \frac{1}{2}ABC;\ DAE = \frac{1}{2}DAB$.

Xét hai tam giác MBO và DAE có $MBO = DAE$ và $BOM = AED$ nên $\Delta MBO \backsim \Delta DAE$

Do đó ta được $\frac{BO}{AE} = \frac{MB}{AD}$. Ta có $AM + MB = AB$ và $AM = \frac{1}{3}AB$ nên ta được $MB = \frac{2}{3}AB$, suy ra $MB = \frac{2}{3}AD$. Do đó ta được $\frac{MB}{AD} = \frac{2}{3}$. Mà ta có $AE = AO + OE$ và $OA = OB$ nên ta được $BO = \frac{2}{3}\left(OB + OE\right) \Rightarrow OB = 2OE$. Do đó $OE = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OC$, nên E là trung điểm của OC

Xét hai tam giác COF và AOM có $FOC = MOA$, $OA = OC$ và $OCF = OAM$

Do đó ta được $\Delta COF = \Delta AOM$ nên $CF = AM$. Mà $AM = \frac{1}{3}AB$ nên $CF = \frac{1}{3}CD \Rightarrow FD = \frac{2}{3}CD$.

Gọi K là trung điểm của FD, khi đó ta được $FK = KD = \frac{1}{2}FD = \frac{1}{3}CD$

Trong tam giác BDF có O là trung điểm của BD và K là trung điểm của FD nên OK là đường trung bình của tam giác DBF. Do đó OK//BF. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được EF//OK

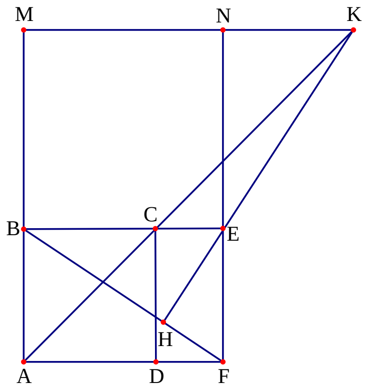
Do đó theo tiên đề Ơclit thì BF và EF trùng nhau hay ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 6. Cho hình vuông ABCD . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E, trên tia đối của tia DA lấy điểm F sao cho $AF = BE$. Vẽ EH vuông góc với BF lại H. Trên tia đối của tia EH lấy điểm K sao cho $EK = BF$. Chứng minh rằng ba điểm A, C, K thẳng hàng.

Lời giải

Kẻ KM vuông góc với AB tại M. Gọi N là giao điểm của EF với KM. Trong tứ giác ABEF có BE//AF và $BE = AF$ nên tứ giác ABEF là hình bình hành. Lại có $ABF = 90^0$ nên ABEF là hình chữ nhật. Từ đó ta được $BEN = 90^0$. Tứ giác BENM có $BMN = MBE = BEN = 90^0$ nên tứ giác BENM là hình chữ nhật.

Từ đó $MNE = 90^0$ nên $ENK = 90^0$.



Xét hai tam giác vuông EBF và NEK có $BF = EK$ và $EBF = NEK$. Do đó ta được $\Delta EBF = \Delta NEK$, suy ra $BE = EN, EF = NK$ Hình chữ nhật BENM có $BE = EN$ nên tứ giác BENM là hình vuông. Do đó suy ra $BM = MN$.

Mặt khác $AB = NK = EF$. Nên ta được

$MA = MB + AB = MN + NK = MK$.

Tam giác AMK vuông tại M có $MA = MK$ nên nó là tam giác vuông cân. Suy ra $MAK = 45^0$

Mặt khác $BAC = 45^0$. Như vậy hai tia AK và AC trùng nhau hay ba điểm A, C, K thẳng hàng.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Gọi G, I, K, H lần lượt là điểm đối xứng của B, A, C, A qua AD, BE, AD, CF. Lấy điểm M trên đoạn CK sao cho $\frac{BI}{CI} = \frac{GB}{CM}$. Chứng minh rằng ba điểm G, I, M thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

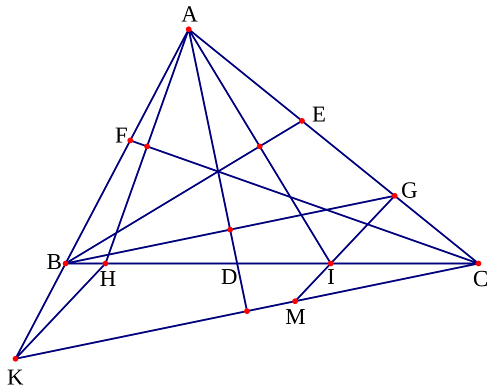
Từ các giả thiết và $\frac{BI}{CI} = \frac{GB}{CM}$ ta suy ra được $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$ nên $\Delta BGI \backsim \Delta CKH$. Từ đó ta được GI//HK. Như vậy để chứng minh ba điểm G, I, M thẳng hàng ta cần chỉ ra được MI//KH. Muốn có được điều đó ta đi chứng minh $\frac{CM}{CK} = \frac{CI}{CH}$.

Lời giải

Ta có AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Gọi G, I, K, H lần lượt là điểm đối xứng của B, A, C, A qua AD, BE, AD, CF. Khi đó ta được

$$AG = AB, G \in AC;\ AB = BI, I \in BC$$

$$AK = AC, K \in AB; CH = AC, H \in BC$$



Trong tam giác ACK có $\frac{AB}{AK} = \frac{AG}{AC}$ nên suy ra được BG//CK. Do đó ta được $\frac{BG}{CK} = \frac{AG}{AC}$ và $GBC = KCN$.

Do $AG = AB = BI, AC = CH$ nên $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$

Xét hai tam giác BGI và CKH có $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$ và $GBI = KCH$ nên $\Delta BGI \backsim \Delta CKH$

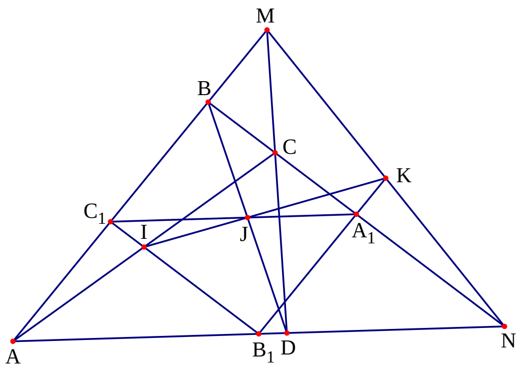
Từ đó ta được $BIG = CHK$ nên suy ra GI//HK. Do $\frac{BI}{CI} = \frac{GB}{CM}$ và $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$ nên ta được $\frac{CM}{CI} = \frac{BG}{BI}$ và $\frac{BG}{BI} = \frac{CK}{CH}$. Điều này dẫn đến $\frac{CM}{CI} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{CM}{CK} = \frac{CI}{CH}$. Trong tam giác CHK có $\frac{CM}{CK} = \frac{CI}{CH}$ nên ta được MI//HK. Từ đó ta có GI//KH và MI//HK nên hai đường thẳng GI và MI trùng nhau. Do đó ba điểm G, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 8. Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M và các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Trên cở sở giả thiết và hình vẽ của bài toán ta nhận thấy nếu lấy A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của NB, NA, AB thì xuất hiện các bộ ba điểm thẳng hàng nên ta nghĩ đến định lí Menelaus. Do đó ý tưởng đầu tiên để chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng đó là đi chứng minh $\frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$. Ngoài ra ta lại thấy nếu gọi K' là giao điểm của IJ và MN mà ta chứng minh được $S_{NIJ} = S_{MIJ}$ thì suy ra được hai điểm K và K' trùng nhau.

Lời giải



Cách 1: Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của NB, NA, AB. Ta có A_1K là đường trung bình của tam giác NBM nên ta được $A_1K // BM$. Ta có B_1K là đường trung bình của tam giác NAM nên ta được $B_1K // BM$. Theo tiên đề Ơclit ta được hai đường thẳng A_1K và B_1K trùng nhau hay ba điểm A_1, B_1, K thẳng hàng. Như vậy $K \in A_1B_1$..

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $J \in A_1C_1$ và $I \in B_1C_1$

Ta có $IC_1 = \frac{1}{2}BC;\ IB_1 = \frac{1}{2}CN;\ KB_1 = \frac{1}{2}AM;\ KA_1 = \frac{1}{2}BM;\ JA_1 = \frac{1}{2}DN;\ JC_1 = \frac{1}{2}AD$

Xét tam giác NAB với M thuộc AB, C thuộc B, D thuộc NA và ba điểm M, C, D thẳng hàng.

Áp dụng định lí Menelaus ta có $\frac{AM}{MB}.\frac{BC}{CN}.\frac{DN}{AD}=1$ Suy ra $\frac{BC}{CN}.\frac{AM}{BM}.\frac{DN}{DA}=1$ hay $\frac{IC_1}{IB_1}.\frac{KB_1}{KA_1}.\frac{JA_1}{JC_1}=1$

Trong tam giác $A_1B_1C_1$ có $K\in A_1B_1$, $J\in A_1C_1$, $I\in B_1C_1$ và $\frac{IC_1}{IB_1}.\frac{KB_1}{KA_1}.\frac{JA_1}{JC_1}=1$.

Như vậy theo định lí Menelaus thì ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Cách 2: Ta có $S_{NAI}=\frac{1}{2}S_{MAC}$; $S_{NBJ}=\frac{1}{2}S_{NBD}$; $S_{BIJ}=\frac{1}{2}S_{BDI}$; $S_{ABI}=\frac{1}{2}S_{ABC}$

Và lại có $S_{MAC}=S_{NCD}+S_{ACD}$; $S_{NBD}=S_{NCD}+S_{BCD}$; $S_{BDI}=S_{ABD}-S_{ABID}$. Do đó ta được

$$\begin{aligned}S_{NIJ}&=S_{NAB}-S_{NAI}-S_{NBJ}-S_{BIJ}-S_{ABI}=S_{NAB}-\frac{1}{2}S_{MAC}-\frac{1}{2}S_{NBD}-\frac{1}{2}S_{BDI}-\frac{1}{2}S_{ABC}\\&=S_{NAB}-\frac{1}{2}\left(S_{NCD}+S_{ACD}\right)-\frac{1}{2}\left(S_{NCD}+S_{BCD}\right)-\frac{1}{2}\left(S_{ABD}-S_{ABID}\right)-\frac{1}{2}S_{ABC}\\&=\left(S_{NAB}-S_{NCD}\right)-\frac{1}{2}\left(S_{ACD}+S_{ADC}\right)-\frac{1}{2}\left(S_{BCD}+S_{ABD}\right)+\frac{1}{2}S_{ABID}\\&=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}+\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng được $S_{MIJ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Từ đó suy ra $S_{NIJ}=S_{MIJ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

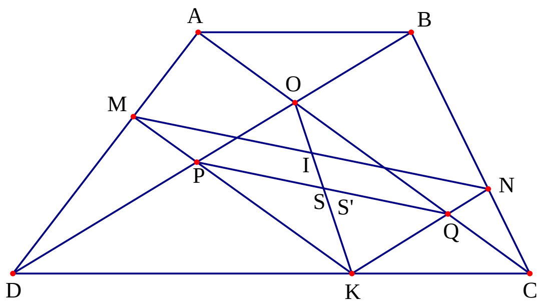
Gọi K' là giao điểm của IJ và MN. Gọi khoảng cách tứ M, N đến IJ lần lượt là h_1,h_2. Khi đó ta được $S_{NIJ}=S_{MIJ}\Rightarrow\frac{1}{2}h_1.IJ=\frac{1}{2}h_2.IJ\Rightarrow h_1=h_2$. Từ đó $\frac{1}{2}h_1.JK'=\frac{1}{2}h_2.JK'$ hay $S_{JMK'}=S_{JNK'}$ nên ta được $K'M=K'N$ hay K' là trung điểm của MN. Do đó hai điểm K và K' trùng nhau. Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 8. Cho hình thang ABCD có AB//CD. Trên các cạnh AD và BC lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD}=\frac{CN}{BC}$. Đường thẳng qua M song song với AC cắt BD tại P và cắt CD tại K. Gọi I là trung điểm của MN, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Gọi Q là giao điểm của KN và AC, S là giao điểm của OK và PQ. Dễ thấy tứ giác KPOQ là hình bình hành nên S là trung điểm của PQ. Như vậy để chứng minh ba điểm O, I, K thẳng hàng ta cần chứng minh được MN song song với PQ.

Lời giải



Gọi Q là giao điểm của KN và AC, S là giao điểm của OK và PQ. Trong tam giác ACD có MK//AC nên theo định lí Talets ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CK}{CD}$. Mà theo giả thiết ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CN}{BC}$ nên ta được $\frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC}$

Trong tam giác BCD có $\frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC}$ nên theo định lí Talets đảo ta được KN//BD.

Do đó tứ giác POQK là hình bình hành, suy ra S là trung điểm của PQ. Trong tam giác DAO có MP//OA nên $\frac{MP}{OA} = \frac{DP}{OD}$ và trong tam giác DOC có PK//OC nên $\frac{PK}{OC} = \frac{DP}{OD}$. Do đó $\frac{MP}{OA} = \frac{PK}{OC} \Rightarrow \frac{MP}{PK} = \frac{NQ}{QK}$ nên suy ra PQ//MN. Gọi S' là giao điểm của KI và MN. Chứng minh tương tự ta được $\frac{PS'}{MI} = \frac{S'Q}{IN} = \frac{KS'}{KI}$

Mà ta có $IN = IM$ nên suy ra $PS' = QS'$. Điều này dẫn đến hai điểm S và S' trùng nhau, do đó ba điểm K, I, S thẳng hàng. Mà ba điểm K, S, O thẳng hàng nên suy ra bốn điểm S, K, I, O thẳng hàng.

Vậy ba điểm O, I, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

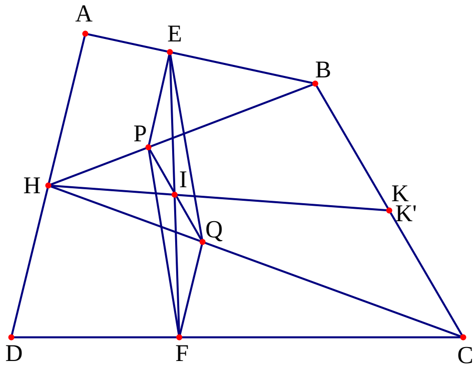
Ví dụ 10. Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm E và F trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{CD}$. Gọi I là trung điểm của EF, H là trung điểm của AD, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy tứ giác PEQF là hình bình hành nên I là trung điểm của PQ. Để chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng ta gọi K' là giao điểm của HI với BC và chứng minh K' là trung điểm của BC.

Lời giải

Vẽ EP//AD với P thuộc BH, vẽ FQ//AD với Q thuộc CH. Trong tam giác ABH có EP//AH nên theo định lí Talets ta có $\frac{EP}{AH}=\frac{EB}{AB}$. Trong tam giác CDH có FQ//HD nê theo định lí Talets ta có $\frac{FQ}{HD}=\frac{FC}{CD}$



Mà ta có $\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{CD}$ nên ta được $\frac{EP}{AH}=\frac{FQ}{HD}$.

Mà ta có $AH=HD$ nên suy ra $EP=FQ$

Mặt khác ta có EP//FQ nên tứ giác PEQF là hình bình hành. Do I là trung điểm của EF nên I cũng là trung điểm của PQ.

Trong tam giác ABH có EP//AH nên $\frac{EB}{AB}=\frac{BP}{BH}$ và trong tam giác CDH có FQ//HD nên $\frac{FC}{CD}=\frac{CQ}{CH}$

Mà ta có $\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{CD}$ nên $\frac{BP}{BH}=\frac{CQ}{CH}$. Trong tam giác HBC có $\frac{BP}{BH}=\frac{CQ}{CH}$ nên suy ra PQ//BC.

Gọi K′ là giao điểm của HI và BC. Trong tam giác HBK′ có IP//K′B nên ta có $\frac{IP}{K'B}=\frac{IH}{HK'}$

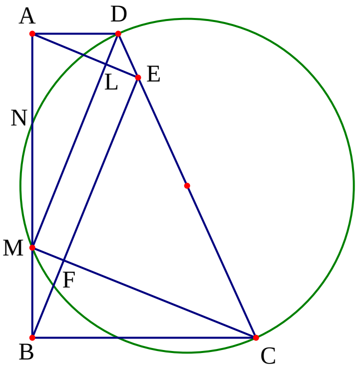
Trong tam giác HCK′có IQ//K′C nên ta có $\frac{IQ}{K'C}=\frac{HI}{HK'}$. Từ đó ta được $\frac{IP}{BK'}=\frac{IQ}{CK'}$, mà ta có $IP=IQ$ nên suy ra $BK'=CK'$. Điều này dẫn đến hai điểm K và K′ trùng nhau. Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Ví dụ 11. Cho hình thang vuông ABCD có $A=D=90^0$. Đường trong đường kính CD cắt AB tại M và N (M nằm giữa N và B). Đường thẳng qua A song song với MD cắt đường thẳng qua B song song với MC tại E. Chứng minh rằng ba điểm C, E, D thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy tứ giác MLEF là hình chữ nhật. Khi đó tam giác FCE và MCD có $EFC=CMD$ và $\frac{FC}{MC}=\frac{EF}{MD}$ nên $\Delta FCE\backsim\Delta MCD$ do đó ta được $FCE=MCD$. Điều này dẫn đến hai tia DE và DC trùng nhau, tức là điểm E, C, D thẳng hàng.

Lời giải



Gọi L là giao điểm của AE và MD, gọi F là giao điểm của MC và BE. Do tam giác MCD nội tiếp đường tròn đường kính CD nên ta được $CMD = 90^0$. Do AE//MC và $CM \perp MD$ nên ta được $AE \perp DM$. Từ đó suy ra $ALM = MLE = 90^0$

Do BE//MD và $CM \perp MD$ nên ta được $BE \perp MC$. Từ đó suy ra $BFC = EFM = 90^0$. Xét hai tam giác BMC và ADM có $MBC = DAM$ và $BMC = ADM$.

Suy ra $\Delta BMC \backsim \Delta ADM$ nên $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{MA}$ và

$BCF = AML$

Xét hai tam giác BCF và AML có $BFC = ALM$ và $BCF = AML$

Suy ra $\Delta BCF \backsim \Delta AML$ nên $\frac{BC}{AM} = \frac{FC}{ML}$. Tứ giác MLEF có $LMF = EFM = MLE = 90^0$ nên là hình chữ nhật. Do đó ta được $EF = ML$. Do vậy $\frac{FC}{EF} = \frac{FD}{ML} = \frac{BC}{MA} = \frac{MC}{MD}$ nên $\frac{FC}{MC} = \frac{EF}{MD}$

Xét hai tam giác FE và MCD có $EFC = CMD$ và $\frac{FC}{MC} = \frac{EF}{MD}$

Suy ra $\Delta FCE \backsim \Delta MCD$ nên ta được $FCE = MCD$. Điều này dẫn đến hai tia CE và CD trùng nhau

Vậy ba điểm E, C, D thẳng hàng.

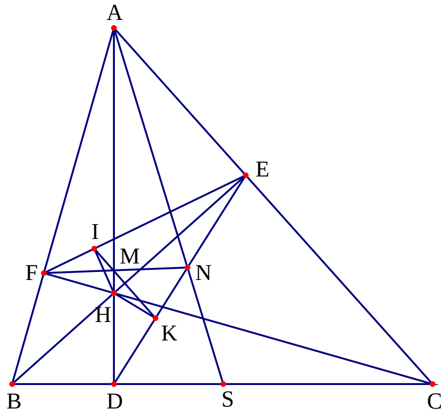
Ví dụ 12. Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ HI vuông góc với EF tại I, HK vuông góc với DE tại K. Gọi giao điểm của IK và AD là M, giao điểm của FM và DE là N. Gọi S là điểm đối xứng với B qua D. Chứng minh rằng ba điểm A, N, S thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Do các tứ giác FAEH và ABDE nội tiếp nên $HEF = BED$. Từ đây ta được $\Delta HIE = \Delta HKE$ nên tam giác EIK cân tại F và tam giác HIK cân tại H. Từ đó ta được các tứ giác FIMH và HMNK nội tiếp.

Để chứng minh ba điểm N, A, S thẳng hàng ta cần chứng minh $MAN = DAS$ hay ta chứng minh $\Delta AMN \backsim \Delta ADS$. Muốn vậy ta cần có $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$. Chú ý là từ các tứ giác nội tiếp trên ta suy ra được tam giác HFN cân nên MF//BD, do đó ta được $\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{BD}$. Kết hợp với $MF = MN$ và $BD = DS$ thì ta được $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$. Như vậy ta có thể trình bày bài toán như sau.

Lời giải



Tứ giác FAEH có $AFH = AEH = 90^0$ nên tứ giác FAEH nội tiếp. Suy ra $HEF = FAH$

Tứ giác ABDE có $ADB = AEB = 90^0$ nên tứ giác ABDE nội tiếp. Suy ra $BAD = BED$

Từ đó ta được $HEF = BED$

Xét hai tam giác vuông HIE và HKE có EH chung và $HEI = HEK$ nên $\Delta HIE = \Delta HKE$

Từ đó suy ra $IE = EK$ và $HI = HK$. Suy ra tam giác EIK cân tại F và tam giác HIK cân tại H

Duy ra $KIE = \frac{1}{2}\left(180^0 - IEK\right) = 90^0 - IEH \Rightarrow KIE + FAH = 90^0$. Mà ta có $NHF + FAH = 90^0$, do đó ta được $KIE = MHF$ nên tứ giác FIMH nội tiếp đường tròn. Nên suy ra

$HMF = HIF = 90^0$

Tứ giác HMNK có $HMN = HKN = 90^0$ nên tứ giác HMNK nội tiếp đường tròn.

Ta có $HFN = HIK, HNM = HKI, HIK = HKI \Rightarrow HFN = HNM$

Từ đó suy ra tam giác HFN cân tại H nên $HF = HN$. Mà ta có $HM \perp FN$ nên HM là đường trung trực của tam giác HFN. Ta có $FM \perp AD, BD \perp AD$ nên ta được FM//BD.

Trong tam giác ABD có FM//BD nên theo định lí Talets ta có $\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{BD}$

Lại có $MF = MN$ và $BD = DS$ nên ta được $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$

Xét hai tam giác AMN và ADS có $AMN = ADS$ và $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$ nên $\Delta AMN \backsim \Delta ADS$

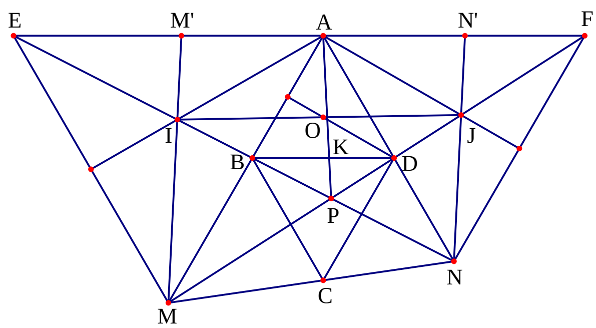
Từ đó suy ra $MAN = DAS$, suy ra hai tia AN và AS trùng nhau. Vậy ta có ba điểm A, N, S thẳng hàng.

Ví dụ 13. Cho hình thoi ABCD có $BAD = 60^0$. Đường thẳng d đi qua C cắt các cạnh AB, AD lần lượt tại M, N khác A. Đường thẳng d' đi qua A và song song với BD cắt các đường thẳng BN, Dm lần lượt tại E và F. Gọi P là giao điểm của BN với DM. Chứng minh rằng các trọng tâm của các tam giác ABD, AME, AFN thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ và giả thiết của bài toán ta nhận định được tam giác AFN đều. Điều này dẫn đến $ANB = AFD$ hay tứ giác ADNF nội tiếp và nếu gọi J là trọng tâm tam giác AFN thì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABNF nên $JA = JP$. Ta lại thấy tam giác MAE đều nên nếu gọi I là trọng tâm tam giác AME thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác EAPM nên suy ra $IA = IP$. Gọi O là trọng tâm tam giác ABD. Để chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh được $OA = OP$, tức là ta cần chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABPD.

Lời giải



Tam giác ABD cân có $BAD = 60^0$ nên tam giác ABD đều. Trong tam giác MAF có BD//AF nên ta có $\frac{BD}{AF} = \frac{MB}{MA}$.

Trong tam giác MAN có BC//NA nên ta có $\frac{BC}{AN} = \frac{MB}{MA}$

Suy ra $\frac{BD}{AF} = \frac{BC}{AN}$. Mà ta có $BD = BC$ nên ta được $AF = AN$

Ta lại có $FAN = ADB = 60^0$ và tam giác AFN cân, có $AFN = 60^0$ nên là tam giác đều.

Từ đó ta được $AF = AN = FN$ và $AFN = FNA = 60^0$

Do đó ta được $\Delta ABN = \Delta ADF$ nên suy ra $ANB = AFD$. Từ đó suy ra tứ giác ADNF nội tiếp đường tròn. Gọi J là trọng tâm tam giác AFN, khi đó J là tâm đường trong ngoại tiếp tam giác AFN. Do đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABNF, suy ra $JA = JP$

Ta có $NPF = NAF = 60^0$ nên ta được $EPM = NPF = 60^0$

Mà ta lại có $EAM = ABD = 60^0$ nên ta được $EAM = EPM = 60^0$, do đó tứ giác EAPM nội tiếp đường tròn. Từ đó suy ra $AEM = APN = ANF = 60^0$.

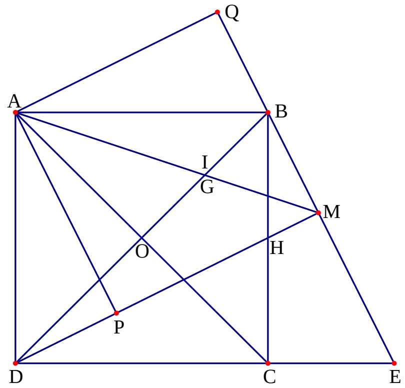
Trong tam giác MAE có $MAE = AEM = 60^0$ nên là tam giác đều. Gọi I là trọng tâm tam giác AME. Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác EAPM, suy ra $IA = IP$.

Ta có $NPD = ABD = 60^0$ nên tứ giác ABPD nội tiếp đường tròn. Gọi O là trọng tâm tam giác ABD, khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABPD, nên ta được $OA = OP$

Như vậy ta có $JA = JP$, $IA = IP$ và $OA = OP$, suy ra ba điểm J, I, O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AP. Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 14. Cho hình vuông ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{2}CB$. Vẽ DM vuông góc với BE tại M. Gọi I là trung điểm của OB. Chứng minh rằng ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Lời giải



Cách 1: Hình vuông ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo nên O là trung điểm của AC, BD và AC vuông góc với BD tại O. Ta có $\frac{OI}{OA} = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2}$, mà ta lại có $CE = \frac{1}{2}CB$ nên ta được $\frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}$. Do đó $\frac{OI}{OA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{OI}{CE} = \frac{OA}{CB}$

Hai tam giác AOI và BCE có $AOI = BEC$ và $\frac{OI}{CE} = \frac{OA}{CB}$ nên $\Delta AOI \backsim \Delta BCE$, suy ra $AIO = BEC$.

Gọi H là giao điểm của BC và DM. Đặt $BC = 2a\left(a > 0\right)$

Hai tam giác DCH và BCE có $DCH = BCE$ và $CDH = CBE$ nên $\Delta DCH \backsim \Delta BCE$

Do đó $\frac{DC}{BC} = \frac{CH}{CE} \Rightarrow CD.CE = BC.CH$. Mà ta có $CD = BC$ nên $CH = CE$, suy ra $CH = \frac{1}{2}CB$.

Do H là trung điểm của CB nên ta được $BH = \frac{1}{2}CB \Rightarrow BH.BC = 2a^2$

Hai tam giác BMH và BCE có $BMH = BCE$ và $MBH = CBE$ nên $\Delta BMH \backsim \Delta BCE$

Do đó ta được $\frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE} \Rightarrow BM.BE = BH.BC$, suy ra $BM.BE = 2a^2$.

Trong tam giác BCD vuông tại C ta tính được $BD = 8a^2$

Ta có $BI = \frac{1}{2}OB$ và $OB = \frac{1}{2}BD$ nên $BI = \frac{1}{4}BD$, do dó ta được $BI.BD = \frac{1}{4}BD^2 \Rightarrow BI.BD = 2a^2$

Do đó ta được $BM.BE = BI.BD = 2a^2 \Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{BM}{BD}$

Hai tam giác BIM và BED có $IBM = EBD$ và $\frac{BI}{BE} = \frac{BM}{BD}$ nên ta được $\Delta BIM \backsim \Delta BED$

Do đó ta được $BIM = BED$, mà ta có $AID = BED$ nên ta được $BIM = AID$

Từ đó suy ra $AID + DIM = BIM + DIM = 180^0$ nên $AIM = 180^0$. Vậy ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Cách 2: Vẽ AP vuông góc với MD tại P và AQ vuông góc với MB tại Q. Từ đó suy ra tứ giác APMQ là hình chữ nhật nên $PAQ = 90^0$. Mà ta có $DAB = 90^0$ nên ta được $DAP = BAQ$.

Hai tam giác vuông DAP và BAQ có $AD = AB$ và $DAP = BAQ$ nên $\Delta DAP = \Delta BAQ$

Do đó $AP = AQ$, suy ra tứ giác APMQ là hình vuông. Nên MA là phân giác của góc BMD.

Gọi H là giao điểm của BC và DM. Đặt $AB = 2a$, suy ra $CE = a$ và $CD = 2a$ nên $DE = 3a$.

Tam giác BCE và CDH có $BCE = DCH$ và $CBE = CDH$ nên $\Delta BCE \backsim \Delta DCH$

Do đó ta được $\frac{CE}{CH} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow CE = CH$. Mà ta có $CE = \frac{1}{2}BC$ nên $CH = \frac{1}{2}CB$ nên H là trung điểm của BC, suy ra $BH = a$. Hai tam giác BMH và DME có $BMH = DME$ và $MBH = MDE$

Suy ra $\Delta BMH \backsim \Delta DME$ nên ta được $\frac{MB}{MD} = \frac{BH}{DE} = \frac{1}{3}$

Ta có $\frac{IB}{ID} = \frac{IB}{IO + OD} = \frac{IB}{IB + OB} = \frac{IB}{IB + 2IB} = \frac{1}{3}$, do đó $\frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MD}$

Vẽ MG là đường phân giác của tam giác BMD.

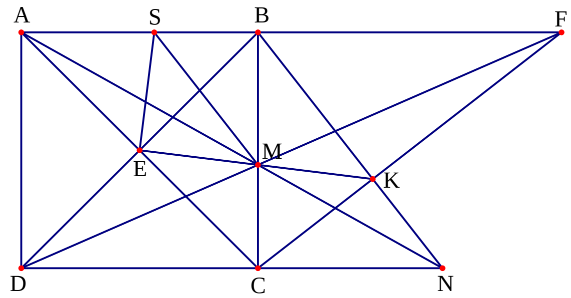
Ta có $\frac{GB}{GD} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{GB}{GD}$, suy ra $\frac{IB}{GB} = \frac{ID}{GD} = \frac{IB + ID}{GB + GD} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow IB = GB$

Từ đó suy ra hai điểm I và G trùng nhau, nên MI là phân giác của góc BMD

Từ đó ta được hai tia MA và MI trùng nhau, nên ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 15. Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Đường thẳng qua A cắt cạnh BC và cắt đường thẳng CD lần lượt tại M và N. Gọi giao điểm của EM và BN là K, giao điểm của CK và AB là F. Chứng minh rằng ba điểm D, M, F thẳng hàng.

Lời giải



Hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E nên ta được E là trung điểm của hai đường chéo và AC, BD vuông góc với nhau tại E.

Ta có $EB = EC$ và $EBA = ECB$. Trên cạnh AB lấy điểm S sao cho $BS = CM$.

Hai tam giác BES và CEM có $BS = CM$, $EBS = ECM$ và $EB = EC$ nên $\Delta BES = \Delta CEM$

Do đó ta được $ES = EM$ và $SEM = MEC$. Suy ra tam giác SEM cân tại E.

Lại có $SEM = SEB + BEM = MEC + BEM = BEC = 90^0$.Do đó tam giác SEM vuông cân tại E, do đó $SME = 45^0$. Tam giác AND có MC//AD nên theo định lí Talets ta có

$\frac{AN}{MN} = \frac{AD}{MC} \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AB}{SB}$

Do đó ta được SM//BN, suy ra $BKE = SME = 45^0$.

Hai tam giác BKE và BDN có $KBE = DBN$ và $BKE = BDN$ nên $\Delta BKE \backsim \Delta BDN$

Do đó ta được $\frac{BK}{BD} = \frac{BE}{BN} \Rightarrow BK.BN = BE.BD$

Hai tam giác BEC và BCD có $EBC = CBD$ và $BEC = BCD$ nên $\Delta BEC \backsim \Delta BCD$

Do đó ta được $\frac{BE}{BC}=\frac{BC}{BD}\Rightarrow BC^2=BE.BD$. Từ đó suy ra $BK.BN=BC^2\Rightarrow\frac{BK}{BC}=\frac{BC}{BN}$

Hai tam giác BKC và BCN có $KBC=CBN$ và $\frac{BK}{BC}=\frac{BC}{BN}$ nên $\Delta BKC\backsim\Delta BCN$

Do đó ta được $BKC=BCN$ nên $BKC=90^0$

Hai tam giác BCN và FBC có $CBN=BFC$ và $BCN=FBC$ nên $\Delta BCN\backsim\Delta FBC$

Do đó ta được $\frac{BC}{BF}=\frac{CN}{BC}\Rightarrow\frac{BC}{CN}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow\frac{AB}{CN}=\frac{BF}{CD}$

Trong tam giác MNC có AB//CN nên ta có $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CN}$. Do đó ta được $\frac{MB}{MC}=\frac{BF}{CD}$.

Hai tam giác MBF và MCD có $MBF=MCD$ và $\frac{MB}{MC}=\frac{BF}{CD}$ nên $\Delta MBF\backsim\Delta MCD$

Từ đó suy ra $DMF=CMD\Rightarrow BMF+BMD=CMD+BMD$ hay $DMF=90^0$

Vậy ba điểm D, M, F thẳng hàng.

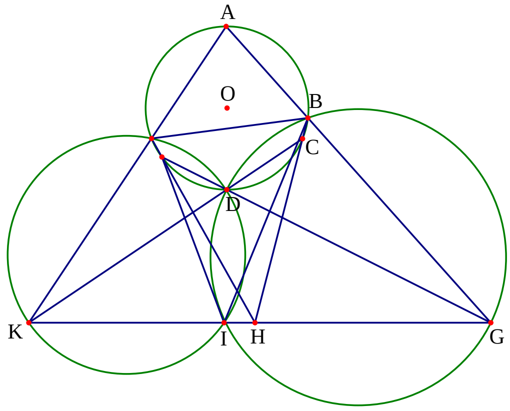
Ví dụ 16. Cho sáu điểm bất kì A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Gọi G, H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DE, BC và EF, CD và AF. Chứng minh rằng ba điểm G, H, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Ta nhận thấy $BIF=\frac{1}{2}\left(sdBAF-sdCDE\right)$ và $BHF=\frac{1}{2}\left(sdBAF-sdCDE\right)$ nên ta được tứ giác BIHF nội tiếp, từ đó suy ra $BIH+BFH=180^0$. Như vậy để chứng minh được G, H, K thẳng hàng ta cần chứng minh được $BIH+BIG=180^0$. Muốn vậy ta cần chỉ ra được $BIG=BFH$. Ngoài ra nếu gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của AB và EF, AB và CD, CD và EF. Khi đó ta thấy bộ các điểm thẳng hàng, từ đó ta liên tưởng đến định lí Menelaus.

Lời giải

Cách 1: Gọi I là giao điểm của hai đường trong ngoại tiếp tam giác GBD và tam giác KDF(I khác D). Khi đó ta có



$$BIF=BID+DIF=BGD+DKF$$
$$=\frac{1}{2}\left(sdAFE-sdBCD\right)+\frac{1}{2}\left(sdABC-sdCDF\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(sdCAE-sdBCF\right)=\frac{1}{2}\left(sdBAF-sdCDE\right)$$

Mà ta có $BHF=\frac{1}{2}\left(sdBAF-sdCDE\right)$

Do đó $BIF=BHF$, do đó tứ giác BIHF nội tiếp đường tròn. Từ đó suy ra $BIH+BFH=180^0$.

Mặt khác ta lại có $BIG=BDG=\frac{1}{2}sdBG$. Mà ta có $BDG=BFE$

Nên ta được $BIH + BIG = BIH + BFH = 180^0$, suy ra $HIG = 180^0$

Do đó ba điểm H, I, G thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được I, H, K thẳng hàng.

Như vậy bốn điểm H, I, G, K thẳng hàng. Do đó ba điểm G, H, K thẳng hàng.

Cách 2: Gọi A’, B’, C’ lần lượt là giao điểm của AB và EF, AB và CD, CD và EF.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác A’B’C’ có ba điểm B, C, H thẳng hàng ta được

$$\frac{BA'}{BB'}.\frac{CB'}{CC'}.\frac{HC'}{HA'} = 1$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác A’B’C’ với ba điểm D, G, E thẳng hàng ta được

$$\frac{DB'}{DC'}.\frac{EC'}{EA'}.\frac{GA'}{GB'} = 1$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác A’B’C’ với ba điểm A, F, K thẳng hàng ta được

$$\frac{AA'}{AB'}.\frac{KB'}{KC'}.\frac{FC'}{FA'} = 1$$

Xét hai tam giác A’AF và A’EB có $AA'F$ chung và $A'AF = A'EM$

Do đó ta được ΔA’AF $\backsim$ ΔA’EB, suy ra $\frac{AA'}{EA'} = \frac{FA'}{BA'} \Rightarrow AA'.BA' = EA'.FA'$

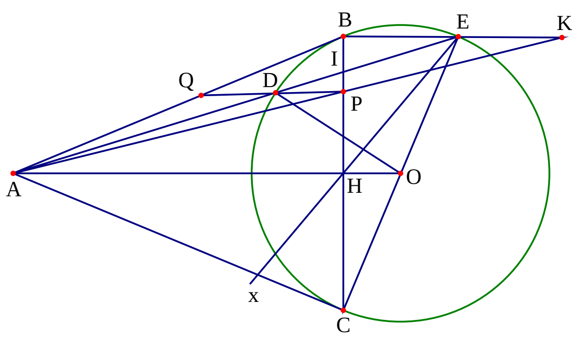
Hoàn toàn tương tự ta được $AB'.BB' = CB'.DB'$ và $FC'.EC' = CC'.DC'$

Từ đó ta được $\frac{HC'}{HA'}.\frac{GA'}{GB'}.\frac{KB'}{KC'} = 1$.

Trong tam giác A’B’C’ có các điểm G, H, K thỏa mãn $\frac{HC'}{HA'}.\frac{GA'}{GB'}.\frac{KB'}{KC'} = 1$, nên theo định lí Menelaus ta được ba điểm G, H, K thẳng hàng.

Ví dụ 17. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC(B, C là hai tiếp điểm) và cát tuyến ADE với đường tròn (O) sao cho tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Đường thẳng qua D và song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại và Q. Gọi K đối xứng với B qua E. Chứng minh rằng ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Lời giải



Gọi H, I lần lượt là giao điểm của BC với OA, DE. Ta có AB, AC là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $AB = AC$ và AO là phân giác của góc BAC. Do đó AO là đường cao của tam giác ABC. Xét hai tam giác ABD và AEB có $ABD = AEB$ và BAD chung, suy ra $\Delta AEB \backsim \Delta ABD$.

Từ đó $AB^2 = AD.AE$

Trong tam giác ABO vuông có BH là đường cao nên $AB^2 = AH.AO$

Từ đó ta được $AD.AE = AH.AO \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$. Từ đó $\Delta AHD \backsim \Delta AEO$ nên ta được

$AHD = AEO$

Do đó tứ giác OEDH nội tiếp đường tròn, suy ra $OHE = ODE$

Tam giác ODE có $OD = OE$ nên cân tại O, suy ra $ODE = OED$

Từ đó ta được $OHE = AHD$. Ta có $OHE + EHI = AHD + IHD = 90^0$ nên ta được $EHI = IHD$, do đó HI là tia phân giác của góc HED. Gọi Hx là tia đối của tia HE, khi đó ta có

$xHA = AHD = OHE$

Do đó HA là đường phân giác của HED. Từ đó ta được $\frac{ID}{ED} = \frac{AD}{AE}$

Trong tam giác ABE có DQ//BE nên theo định lí Talets ta có $\frac{DQ}{BE} = \frac{AD}{AE}$

Trong tam giác IBE có BE//PD nên ta có $\frac{DP}{BE} = \frac{ID}{IE}$. Từ đó ta được $\frac{DQ}{BE} = \frac{DP}{BE}$ nên $DQ = DP$.

Trong tam giác ABE có DQ//BE nên ta có $\frac{AQ}{AB} = \frac{QD}{BE}$. Do đó ta được $\frac{AQ}{AB} = \frac{2DQ}{2BE} = \frac{PQ}{BK}$

Hai tam giác APQ và AKB có $\frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BK}$ và $AQP = ABK$ nên $\Delta APQ \backsim \Delta AKB$

Từ đó ta được $QAP = BAK$ nên hai tia AP và AK trùng nhau. Vậy ba điểm A, P, K thẳng hàng.

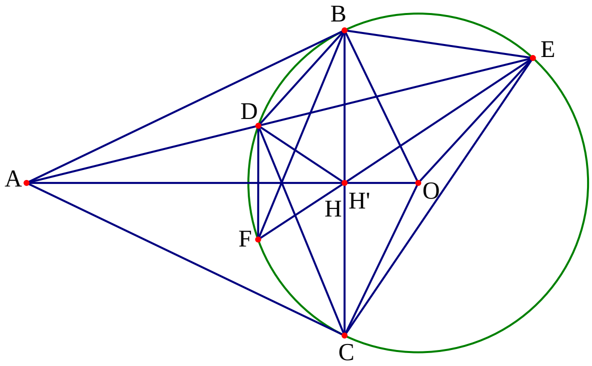
Ví dụ 18. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O)(B, C thuộc đường tròn (O)). Vẽ cát tuyến ADE với đường tròn (O)(D, E thuộc đường tròn (O)) và D nằm giữa A, E. Tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Gọi F là điểm đối xứng với D qua AO, H là giao điểm của EF với BC. Chứng minh rằng A, H, O thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Gọi H' là giao điểm của OA với BC. Để chứng minh A, H, O thẳng hàng ta cần chứng minh được hai điểm H và H' trùng nhau. Muốn vậy ta cần chứng minh $EH'F = AH'F + AH'E = 180^0$. Ngoài ra ta cũng thấy A, O cùng thuộc đường trung trực của BC nên để chứng minh được A, H, O thẳng hàng ta cần chứng minh H thuộc đường trung trực AO hay $HB = HC$.

Lời giải

Cách 1: Gọi H′ là giao điểm của AO và BC. Do D và F đối xứng với nhau qua AO nên ta được $OF = OD = R$. Suy ra F thuộc đường tròn (O) và có $AH'D = AH'F$. Do AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta được $AB = AC$ và AO là tia phân giác của góc BAC. Do đó tam giác ABC cân tại A và $AO \perp BC$. Xét hai tam giác ABD và AEB có $ABD = AEB$ và BAD chung



Do đó ta được $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ nên $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$.

Tam giác ABO vuông tại B có BH′ là đường cao nên $AB^2 = AH'.AO$.

Từ đó ta được $AD.AE = AH'.AO \Rightarrow \frac{AD}{AO} = \frac{AH'}{AE}$

Xét hai tam giác ADH′ và AOE có $\frac{AD}{AO} = \frac{AH'}{AE}$ và DAH' chung nên $\Delta ADH' \backsim \Delta AOE$

Từ đó ta được $ADH' = AOE$ nên tứ giác DH′OE nội tiếp. Suy ra $AH'D = OED$ và $OH'E = ODE$

Mà ta có $OE = OD = R$ nên tam giác ODE cân tại O, suy ra $OED = ODE$

Do đó $AH'D = OH'E$, vì vậy ta được $AH'F = OH'E$.

Ta có $EH'F = AH'F + AH'E = OH'E + AH'E = 180^0$. Điều này dẫn đến ba điểm E, H′, F thẳng hàng, suy ra hai điểm H và H′ trùng nhau. Vậy ba điểm A, H, O thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Do AB, AC là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên ta được $AB = AC$ và AO là tia phân giác của góc BAC. Do đó tam giác ABC cân tại A và $AO \perp BC$. Do D và F đối xứng với nhau qua AO nên ta suy ra $OF = OD = R$ và $DF \perp AO$. Ta có DF//BC nên tứ giác DBCF là hình thang, mà tứ giác DBCF nội tiếp đường trong (O) nên DBCF là hình thang cân. Từ đó ta được $BD = CE, BF = CD$.

Xét hai tam giác ABD và AEB có $ABD = AEB$ và BAD chung.

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ nên ta được $\frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $\Delta ACD \backsim \Delta AEC$ nên suy ra $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{CE}$.

Xét hai tam giác HBF và HEC có $BHF = EHC$ và $BFH = HCE$

Do đó ta được $\Delta HBF \backsim \Delta HEC$ nên ta được $\frac{HB}{HE} = \frac{BF}{CE}$

Tương tự ta cũng được $\Delta HFE \backsim \Delta HBE$ nên suy ra $\frac{CF}{BE} = \frac{HC}{HE}$

Từ đó suy ra $\frac{HB}{HE} = \frac{BF}{CE} = \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE} = \frac{CF}{BF} = \frac{HC}{HE}$. Do đó ta được $HB = HC$.

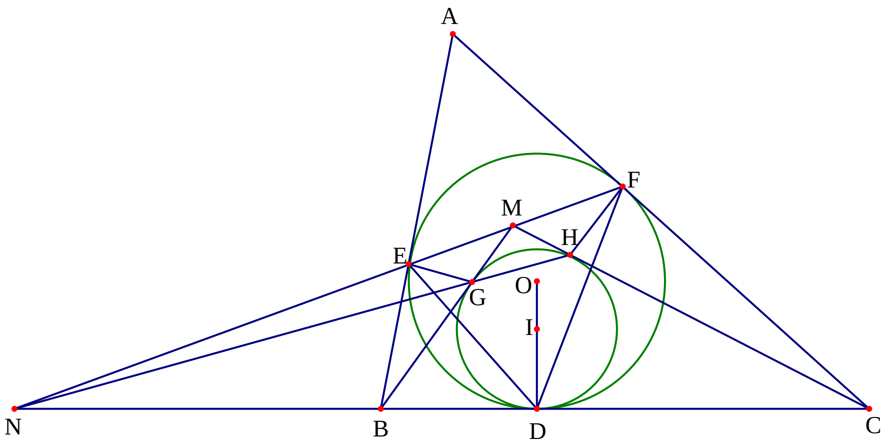
Ta có $HB = HC$, $AB = AC$ và $OB = OC$ nên ba điểm H, A, O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC. Do đó ba điểm H, A, O thẳng hàng.

Ví dụ 19. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Trên đoạn OD lấy điểm I, vẽ đường tròn tâm I bán kính ID. Vẽ BG, CH là các tiếp tuyến của đường tròn (I) với G và H thuộc đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của BG và CH, N là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng ba điểm N, G, H thẳng hàng.

Phân tích tìm lời gải

Nhận thấy tứ giác EFHG nội tiếp đường tròn. Để chứng minh được ba điểm N, H, G thẳng hàng ta gọi giao điểm của NG với đường tròn (I) là H_1, giao điểm của NG với đường tròn ngoại tiếp tứ giác EFHG là H_2 và ta đi chứng minh hai điểm H_1 và H_2 trùng nhau.

Lời giải



Từ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = AF, BG = BD = BF, CE = CH = CD, MG = MH$

Tam giác AEF cân tại A nên $AEF = AFE$, suy ra $2AEF + BAC = 180^0$

Trong tam giác ABC có $BAC + ABC + ACB = 180^0$. Do đó ta được $AEF = \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right)$

Tam giác CEH cân tại C có $AEH = 90^0 + \frac{1}{2}ECH$

Do đó ta được $HEF = AEH - AEF = 90^0 + \frac{1}{2}\left(ECH - ABC - ACB\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được $MGH = \frac{1}{2}MBC + MCB; MGF = 90^0 + \frac{1}{2}GBF$

Do đó $HGF = 90^0 + \frac{1}{2}\left(MBC + MCB + GBF\right)$. Suy ra $HEF + HGF = 180^0$ nên tứ giác EHGF nội tiếp

Gọi giao điểm của NG với đường tròn (I) là H_1, giao điểm của NG với đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHGF là H_2. Khi đó ta có $\Delta NGD \backsim \Delta NDH_1$ nên ta được

$\frac{NG}{ND} = \frac{ND}{NH_1} \Rightarrow NG.NH_1 = ND^2$

Ta cũng có $\Delta NFG \backsim \Delta NH_2E$ nên ta được $\frac{NF}{NH_2} = \frac{NG}{NE} \Rightarrow NE.NF = NH_2.NG$

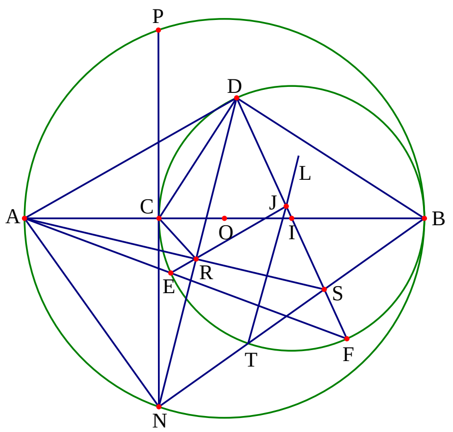
Và $\Delta NDF \backsim \Delta NED$ nên ta có $\frac{ND}{NE} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow ND^2 = NE.NF$

Do đó ta được $NH_1 = NH_2$, suy ra hai điểm H_1 và H_2 trùng nhau. Nên ba điểm H, H_1 và H_2 trùng nhau.

Vậy ba điểm N, G, H thẳng hàng.

Ví dụ 20. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Lấy điểm C nằm giữa hai điểm O và A. Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến ACF với đường tròn (I)(E nằm giữa A và F) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD và AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại N và P(N và P thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Giao điểm của DI và NB là S. Gọi J là trung điểm của SD. Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC và SEF. Chứng minh rằng ba điểm J, L, K thẳng hàng.

Lời giải



Xét tam giác ADC và ABD có $ADC = ABD$ và DAC nên $\Delta ADC \backsim \Delta ABD$. Do đó $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AC$

Tam giác ANB vuông tại N có NC là đường cao nên $AN^2 = AB.AC$. Từ đó ta được $AN = AD$.

Gọi R là giao điểm của DN và AS. Hai tam giác vuông DAS và NAS có AS chung và $AD = AN$ nên $\Delta ADS = \Delta NAS$. Từ đó suy ra $DAS = NAS$.

Ta giác AND có $AD = AN$ nên cân tại A, AR là đường phân giác nên đồng thời là đường cao của tam giác AND.

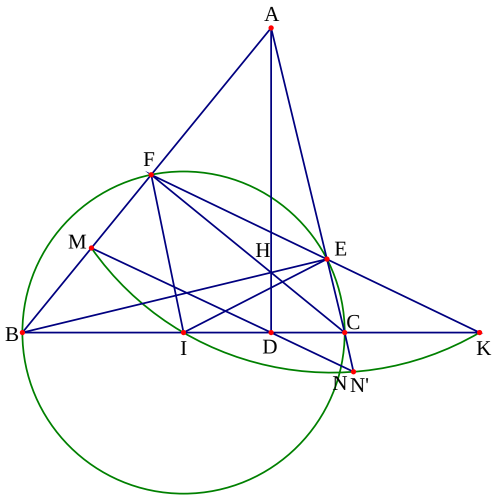
Tam giác ADS vuông tại D nên ta có $AD^2 = AR.AS$. Do đó $AR.AS = AB.AC \Rightarrow \frac{AC}{AS} = \frac{AR}{AB}$.

Xét hai tam giác ACR và ASB có CAR chung và $\frac{AC}{AS}=\frac{AR}{AB}$ nên $\Delta ACR \backsim \Delta ASB$

Từ đó ta được $ACR = ASB$, do đó tứ giác CBSR nội tiếp đường tròn. Suy ra L thuộc đường trung trực của SR. Chứng minh tương tự ta được tứ giác RSEF nội tiếp đường tròn, suy ra T thuộc đường trung trực của đoạn thẳng SR. Mặt khác ta có tam giác RDS vuông tại R có RJ là đường trung tuyến nên ta được $RJ = SJ = DJ$. Do đó J cũng thuộc đường trung trực của SR. Vậy ba điểm J, L, T thuộc đường trung trực của SR nên ba điểm J, L, T thẳng hàng.

Ví dụ 21. Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Giao điểm của BE và CF là H, giao điểm của AH và BC là D, giao điểm của EF và BC là K. Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IMK cắt AC tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, D, N thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $BFC = BEC = 90^0$ nên tam giác ABC có hai đường cao BE và CF, do đó ta được $AD \perp BC$

Tứ giác BFHD có $BFH = BDH = 90^0$ nên nội tiếp được đường tròn. Suy ra ra được $DBH = DFH$

Mà ta có $DBH = CFE$ nên $DBH = \frac{1}{2}DFE$, lại có $DBH = \frac{1}{2}CIE$, suy ra ta được $CIE = DFE$

Từ đó dẫn đến tứ giác IFED nội tiếp. Suy ra $IDF = IEF$, mà $IEF = IFE$ nên ta được $IDF = IFK$. Hai tam giác IDF và IFK có DIF chung và $IDF = IFK$ nên $\Delta IDF \backsim \Delta IFK$

Do đó $\frac{ID}{IF}=\frac{IF}{IK} \Rightarrow IF^2 = ID.IK$ nên $ID.IK = IC^2$

Gọi N′ là giao điểm của MD và AC. Ta có $DN'C = AEF$ và $AEF = MBD$ nên $DN'C = MBD$

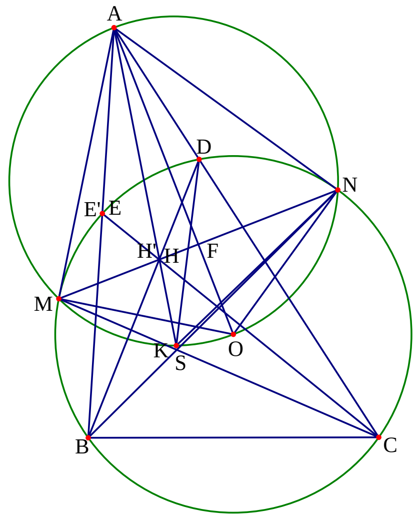
Từ đó ta được $\Delta DN'C \backsim \Delta DBM$, suy ra $\frac{DN'}{DB}=\frac{DC}{DM} \Rightarrow DB.DC = DM.DN'$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} DM.DN' = DB.DC &= \left(IB + ID\right)\left(IC - ID\right) = \left(IC + ID\right)\left(IC - ID\right) = IC^2 - ID^2 \\ &= ID.IK - ID^2 = ID\left(IK - ID\right) = ID.KD \end{aligned}$$

Do đó $\frac{DM}{DK}=\frac{DI}{DN'}$, kết hợp với $MDI = KDN'$ ta được $\Delta DMI \backsim \Delta DKN'$ nên $DMI = DKN'$, suy ra tứ giác IMKN′ nội tiếp đường tròn. Suy ra N và N′ trùng nhau. Vậy ba điểm M, D, N thẳng hàng.

Ví dụ 22. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ các cát tuyến AEB, ADC với đường tròn (O)(E, B, C, D thuộc đường tròn (O), E nằm giữa A và B, D nằm giữa A và C). Gọi H là giao điểm của BD và CE. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường trong (O) (M, N là cá tiếp điểm, B và M nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AH). Gọi K là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng ba điểm A, H, S thẳng hàng.

Lời giải



Gọi H′ là giao điểm của MN và BD, E′ là giao điểm của CH′ với đường tròn (O). Ta có $AMO = ANO = 90^0$, nên tứ giác AMON nội tiếp đường tròn (I) đường kính OA. Gọi S là giao điểm của AH′ với dường tròn (I). Khi đó dễ dàng chứng minh được $H'E'.H'C = H'M.H'N = H'A.H'S$. Từ đó suy ra tứ giác AE′SC nọi tiếp đường tròn, nên ta được $AE'C = ASC$. Gọi F là giao điểm của OA với MN. Ta cũng chứng minh được $AH'.H'C = AF.AO = AN^2 = AC.AD$. Do đó tứ giác H′SCD nội tiếp, suy ra $H'SC + H'DC = 180^0$. Mà ta lại có $BE'C = H'DC$, từ đó ta suy ra được $AE'C + BE'C = 180^0$. Do đó ba điểm A, E′, B thẳng hàng, suy ra hai điểm E và E′ trùng nhau, H và H′ trùng nhau.

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng. Gọi K′ là giao điểm của AH và CM.

Xét đường tròn (I) có $ASN = MNA$ và trong đường tròn (O) có $MCN = MNA$

Do đó ta được $ASN = MCN$, suy ra tứ giác K′SNC nội tiếp. Nên ta có $K'SC + K'NC = 180^0$

Ta cũng chứng minh được $HB.HD = HM.HN = HA.HS$, nên tứ giác ABSD nội tiếp đường tròn.

Suy ra ta có $ABD = ASD$. Trong đường tròn (O) ta có $ABD = HCD$ nên ta được $ASD = HCD$, do đó tứ giác SHDC nội tiếp. Suy ra $HSC + HDC = 180^0$. Mà ta lại có $HDC = BNC$, do đó $K'NC = BNC$

Suy ra hai tia NK′ và NB trùng nhau, do đó ba điểm B, K, N thẳng hàng. Ta có hai điểm K và K′ trùng nhau nên A, K, S thẳng hàng. Vậy ba điểm A, H, S thẳng hàng.

Ví dụ 23. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, AB, CA lần lượt tại D, E, F. Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Gọi giao điểm của EF và DI là K. Chứng minh rằng ba điểm A, K, M thẳng hàng.

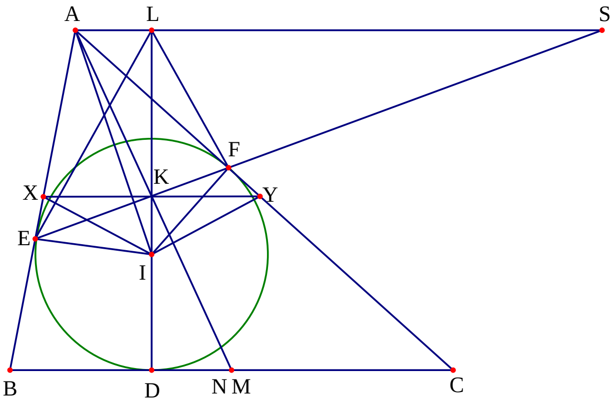
Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ và giả thiết của bài toán ta có hai nghĩa đến hai hướng chứng minh ba điểm A, K, M thẳng hàng là.

+ Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X và Y. Gọi N là giao điểm của AK và BC. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, định lí Talets và tính chất đường phâm giác ta đi chứng minh $NB = NC$. Điều này sẽ dẫn đến M và N trùng nhau.

+ Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X và Y. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, định lí Talets và tính chất đường phân giác ta đi chứng minh hai tia AK và AM trùng nhau.

Lời giải



Cách 1: Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có AE và AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên ta được $EAI = FAI$. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt DI tại L và cắt EF tại S. Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X và Y.

Ta có $DI \perp BC$ và AS//BC nên $AL \perp LI$. Do đó ta được

$ALI = AEI = AFI = 90^0$

Từ đó suy ra các điểm A, E, I, F, L cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó ta được $ELI = EAI = IAF = ILF$, suy ra LK là phân giác của tam giác LEF.

Do đó LK và LS là đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác LEF.

Nên ta được $\frac{KE}{KF} = \frac{SE}{SF} \Rightarrow \frac{KE}{SE} = \frac{KF}{SF}$

Ta có XK//AS và KY//AS nên ta có $\frac{XK}{AS} = \frac{KE}{SE}$ và $\frac{KY}{AS} = \frac{KF}{SF}$. Từ đó suy ra $KX = KY$

Trong tam giác ABN có XK//BN nên theo định lí Talets ta có $\frac{XK}{BN} = \frac{AK}{AN}$

Trong tam giác ACN có KY//CN nên theo định lí Talets ta có $\frac{KY}{CN} = \frac{AK}{AN}$

Kết hợp với $KX = KY$ ta suy ra được $BN = CN$ hay N là trung điểm của BC.

Từ đó suy ra M và N trùng nhau. Vậy ba điểm A, K, M thẳng hàng.

Cách 2: Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X và Y.

Ta có $DI \perp BC$ và XY//BC nên ta được $DI \perp XY$

Ta có $XEI = XKI = 90^0$ nên tứ giác EXKI nội tiếp đường tròn, suy ra $IEK = IXK$

Hoàn toàn tương tự ta được tứ giác IKFY nội tiếp nên $IFK = IYK$

Mà tam giác IEF cân tại I nên $IEK = IFK$, do đó ta được $IXK = IYK$

Tam giác IXY cân tại Y có IK là đường cao nên IK cũng là đường trug tuyến.

Do đó ta được $XK = YK = \frac{XY}{2}$. Suy ra $\frac{XK}{BM} = \frac{2XK}{2BM} = \frac{XY}{BC}$

Trong tam giác ABC có XY//BC nên theo định lí Talets ta có $\frac{AX}{AB} = \frac{XY}{BC}$

Hai tam giác AXK và ABM có $\frac{AX}{AB} = \frac{XK}{BM}$ và $AXK = ABM$ nên $\Delta AXK \backsim \Delta ABM$

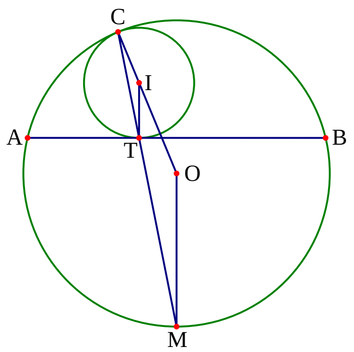
Điều này dẫn đến $XAK = BAM$, suy ra hai tia AK và AM trùng nhau. Vậy ba điểm A, K, M thẳng hàng

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm D trên cạnh BC. Đường tròn tâm P tiếp xúc với AD, DC và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn tâm Q tiếp xúc với AD, BD và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: *Cho đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại C. AB là dây bất kì của đường tròn (O) và tiếp xúc với đường tròn (I) tại T. Khi đó CT đi qua điểm chính giữa của cung AB không chứa C.*



Chứng minh

Gọi M là giao điểm của CT với đường tròn (O)(M khác C).

Do hai đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau nên ba điểm C, O, I thẳng hàng. Tam giác CIT có $ICT = ITC$

và tam giác OCM có $OCM = OMC$

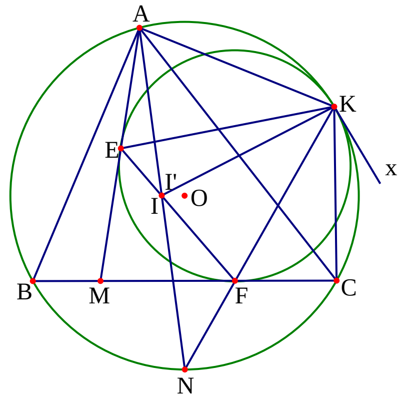
Do đó ta được $ITC = OMC$ nên suy ra IT//OM

Mà ta có $IT \perp AB$ nên suy ra $OM \perp AB$. Do đó M là điểm chính giữa cung AB không chứa C.

Bổ đề 2: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M thuộc BC. Đường tròn (O′) tiếp xúc với hai đoạn thẳng MA, MC lần lượt tại E, F đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại K. Khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên đoạn thẳng EF.*

Chứng minh

Vẽ tiếp tuyến Kx của đường tròn (O). Gọi N là giao điểm của KF với đường tròn (O). Khi đó theo bổ đề 1 thì điểm N nằm chính giữa cung BC của đường tròn (O). Gọi I′ là gao điểm của AN và EF, khi đó ta có $BN = CN$ nên ta được $BAN = CAN$ và $NB = NC$.



Do đó AN là phân giác của góc BAC

Ta có $I'EK = FKx$ và $I'AK = NHx$ suy ra $I'EK = I'AK$ nên tứ giác AKI′e nội tiếp đường tròn. Do đó suy ra ta được $AI'K = AEK$, mà ta có $AEK = EFK$ nên $AI'K = EFK$

Ta có $NI'K = NFI'$.

Xét hai tam giác NI′K và NFI′ có $NI'K = NFI'$ và $I'NK$ nên ta được $\Delta NI'K \backsim \Delta NFI'$

Do đó ta được $\dfrac{NI'}{NF} = \dfrac{NK}{NI'} \Rightarrow NI'^2 = NK.NF$

Xét hai tam giác NCF và NKC có $NCF = NKC$ và CNF chung nên ta được $\Delta NCF \backsim \Delta NKC$

Do đó ta được $\dfrac{NC}{NK} = \dfrac{NF}{NC} \Rightarrow NC^2 = NF.NK$

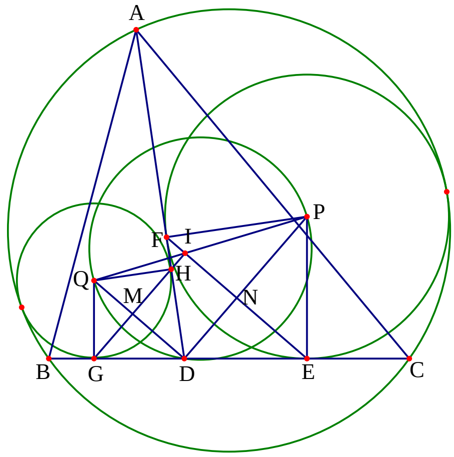
Từ đó ta được $NC = NI'$ hay tam giác NCI′cân tại N, do đó ta được $NI'C = NCI'$

Từ đó suy ra $I'CA + I'AC = BCN + BCI' \Rightarrow I'CA = BCI'$ hay CI′ là phân giác của góc ACB

Do đó I′ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, suy ra hai điểm I và I′ trùng nhau.

Vậy I nằm trên đoạn thẳng EF.

Trở lại bài toán: Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (P) với BC, AD. Gọi G, H lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (Q) với BC, AD. Gọi I là giao điểm của EF với GH. Từ bổ đề 2 suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi M là giao điểm của GH và QD, N là giao điểm của EF và PD. Dễ thấy MDNI là hình chữ nhật. Hai tam giác QDG và DPE có $QGD = PEF$ và $QDG = DPE$. Nên



$\Delta QDG \backsim \Delta DPE \Rightarrow \dfrac{QD}{PD} = \dfrac{QG}{DE}$,

Xét hai tam giác QMG và DNE có

$QMG = DNE$ và $MQG = NDE$. Nên ta được

$\Delta QMG \backsim \Delta DE$,

Suy ra $\dfrac{QG}{DE} = \dfrac{QM}{DN}$. Mà ta có $DN = MI$ nên $\dfrac{QM}{MI} = \dfrac{QG}{DE}$ Từ đó $\dfrac{QM}{MI} = \dfrac{QD}{DP} = \dfrac{QG}{DE}$, suy ra $\dfrac{QM}{QD} = \dfrac{MI}{DP}$

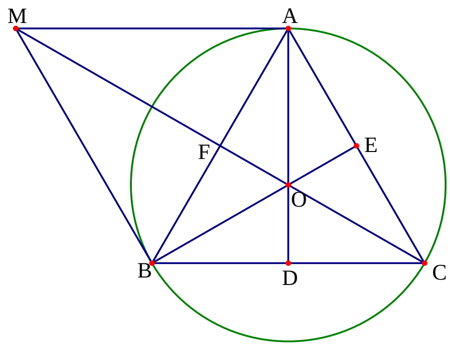
Xét hai tam giác QMI và QDP có $\dfrac{QM}{QD} = \dfrac{MI}{DP}$ và $QMI = QDP$. Nên ta được $\Delta QMI \backsim \Delta QDP$, do đó ta được $IQM = PQD$. Từ đó suy ra hai tia QI và QP trùng nhau hay ba điểm Q, I, P thẳng hàng.

Nhận xét: *Bổ đề 2 trong ví dụ 23 chính là nội dung định lí Lyness. Ba điểm P, I, Q thẳng hàng trong ví dụ 23 nằm trên một đường thẳng có tên là đường thẳng The'bault.*

Ví dụ 25. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Các tia AO, BO, CO cắt cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O). Chứng minh rằng nếu có $DE + BE + CF = \dfrac{9}{2}R$ thì ba điểm C, F, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\dfrac{S_{ABD}}{S_{AOB}} = \dfrac{AD}{AO}$ và $\dfrac{S_{ACD}}{S_{AOC}} = \dfrac{AD}{AO}$. Do đó ta được



$$\frac{AD}{AO} = \frac{S_{ABD}}{S_{AOB}} = \frac{S_{ACD}}{S_{AOC}} = \frac{S_{ABD} + S_{ACD}}{S_{AOB} + S_{AOC}}$$
$$= \frac{S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} = 1 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}}$$

Từ đó ta được $\frac{AD}{R} = 1 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{BE}{R} = 1 + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}}$; $\frac{CF}{R} = 1 + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}}$

Từ đó ta được $\frac{AD + BE + CF}{R} = 3 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}} + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}}$

Theo bất đẳng thức Neibitz ta có $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}} + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}} \ge \frac{3}{2}$

Từ đó suy ra $\frac{AD + BE + CF}{R} \ge \frac{9}{2}$ hay $AD + BE + CF \ge \frac{9}{2}R$

Mà ta lại có $DE + BE + CF = \frac{9}{2}R$, tức là dấu bằng của bất đẳng thức trên xẩy ra,

Do đó ta được $S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC}$, điều này xẩy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2}OA.OB.\sin\left(180^0 - AOB\right) = \frac{1}{2}OB.OC.\sin\left(180^0 - BOC\right) = \frac{1}{2}OC.OA.\sin\left(180^0 - COA\right)$$

Hay $AOB = BOC = COA$. Do đó ba tam giác AOB, BOC, COA bằng nhau nên $AB = BC = AC$

Vậy tam giác ABC đều. Mà ta lại có $OA = OB$ và $MA = MB$ nên C, O, M thuộc đường trung tực của đoạn thẳng AB. Do đó ba điểm C, O, M thẳng hàng. Mà ba điểm C, O, F thẳng hàng. Từ đó ba điểm C, F, M thẳng hàng.

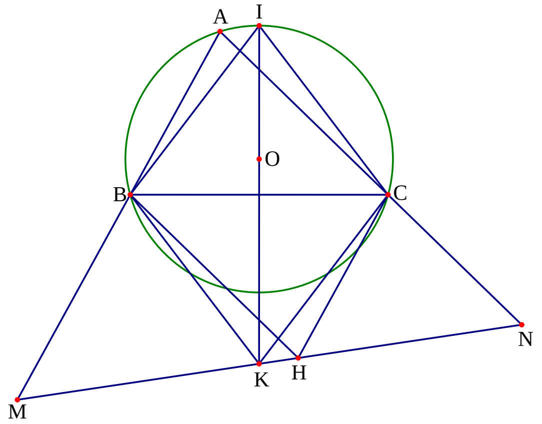
Ví dụ 26. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Trên các tia đối của tia BA, CA lấy các điểm M, N sao cho $BM = AC; CN = AB$. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn BC. Gọi K là điểm đối xứng với I qua BC. Chứng minh ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy tam giác AMN cân tại A, tam giác BIC cân tại I và tam giác BKC cân tại K. Lấy điểm H sao cho tứ giác ABHC là hình bình hành thì ta được $BHC = BAC$ nên $BHC = BKC$, điều này dẫn đến BCHK nội tiếp đường tròn. Từ đó để chứng minh ba điểm M, N, K thẳng hàng ta đi chứng minh ba điểm H, N, H thẳng hàng và ba điểm M, N, H thẳng hàng. Tất nhiên ta cũng có thể lấy điểm H trên MN thỏa mãn CH//AB rồi chứng minh tứ giác ABHC là hình bình hành cũng được.

Lời giải

Ta có $BM = AC; CN = AB$ nên ta suy ra được $AM = AN$, do đó tam giác AMN cân tại A. Do I và K đối xứng với nhau qua BC nên $BIC = BKC$.



Mà ta có $BIC = BAC$ nên ta được $BKC = BAC$

Tam giác BIC cân tại I.

Mà ta lại có $\Delta BKC = \Delta BIC$ nên tam giác BKC cân tại K.

Trên đoạn MN lấy điểm H sao cho CH//AB. Ta có $CHN = AMN$. Mà ta lại có $AMN = CNH$ nên ta được $CHN = CNH$

Do đó tam giác CHN cân tại C, suy ra $CH = CN$. Lại có $CN = AB$ nên ta được $CH = AB$

Tứ giác ABHC có CH//AB và $CH = AB$ nên là hình bình hành.

Do đó ta được $BHC = BAC$ nên suy ra $BHC = BKC$. Từ đó suy ra tứ giác BCHK nội tiếp đường tròn.

Ta có $HCN = BAC$ và $BKC = BAC$ nên ta được $HCN = BKC$

Do hai tam giác HCN và BKC cân nên ta được $\Delta HCN \backsim \Delta BKC$

Do đó ta được $CHN = KBC$ nên suy ra $CHN + CHK = KBC + CHK$

Mà ta lại có $CHN + CHK = NHK; KBC + CHK = 180^0$ nên ta được $NHK = 180^0$.

Do đó ba điểm H, N, H thẳng hàng. Mà ta lại có M, N, H thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Ví dụ 27. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$, AH là đường cao. Lấy điểm M nằm giữa A và H. Trên các đoạn MC, MB lấy các điểm E và F sao cho $BE = BA$ và $CF = CA$. Gọi I là giao điểm của BE và CF. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BHF và CHE. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

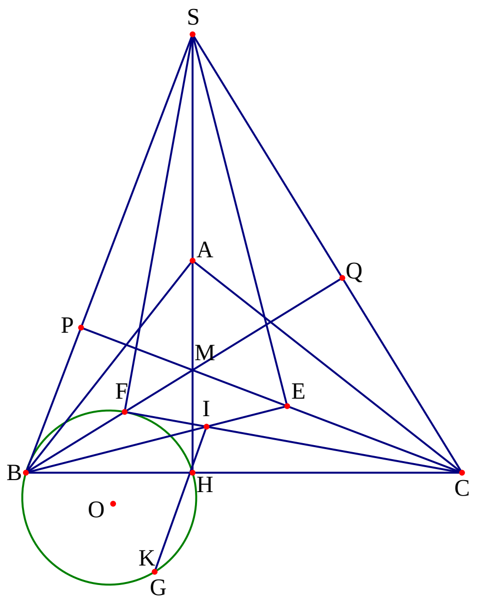
Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng ta gọi G là giao điểm thứ hai của IH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BFH và đi chứng minh hai điểm G và K trùng nhau. Muốn vậy ta đi chứng tứ giác GHEC nội tiếp đường tròn. Vẽ BP vuông góc với CM tại P, BP cắt AH tại S, BM cắt SC tại Q. Khi đó tam giác nhọn SBC có A là trực tâm. Từ đó ta chứng minh được $SE = SF$ nên dẫn đến $IE = IF$. Ta lại nhận thấy $\Delta BEH \backsim \Delta BCE$ nên suy ra

$BEH = BCE$ và tương tự ta được $CFH = CBF$ nên từ đó ta suy ra được $CFH = IGF$. Điều này dẫn đến $\Delta IFH \backsim \Delta IGF$ nên $IF^2 = IH.IG \Rightarrow IE^2 = IH.IG \Rightarrow \frac{IE}{IG} = \frac{IH}{IE}$.

Từ đó suy ra hai tam giác IEG và EIH đồng dạng với nhau, nên ta được $IEH = IGE$ nên $HGE = HCE$, tức là tứ giác GHEC nội tiếp. Vậy bài toán được chứng minh.

Lời giải



Vẽ BP vuông góc với CM tại P, BP cắt AH tại S, BM cắt SC tại Q. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHF. HI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G. Trong tam giác SBC có SH, CP là các đường cao cắt nhau tại M nên M là trực tâm của tam giác SBC, do đó $BM \perp SC$.

Hai tam giác BHS và BPC có HBS chung và $BHS = BPC$ nên $\Delta BHS \backsim \Delta BPC$. Suy ra ta được $\frac{BH}{BP} = \frac{BS}{BC}$ nên suy ra $BH.BC = BP.BS$. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH nên ta được $AB^2 = BH.BC$. Từ đó suy ra $BE^2 = BH.BC$, mà ta có $BH.BC = BP.BS$ nên $BE^2 = BP.BS \Rightarrow \frac{BE}{BP} = \frac{BS}{BE}$. Hai tam giác BES và BPE có EBS chung và $\frac{BE}{BP} = \frac{BS}{BE}$ nên $\Delta BES \backsim \Delta BPE$

Do đó ta được $BES = BPE$, mà ta có $BPE = 90^0$ nên $BES = 90^0$ hay tam giác BES vuông tại E.

Trong tam giác BES vuông tại E có EP là đường cao nên $SE^2 = SP.SB$

Hoàn toàn tương tự ta được $SF^2 = SQ.SC$.

Hai tam giác SPC và SQ có PSC chung và $SPC = SQB$ nên $\Delta SPC \backsim \Delta SQB$

Do đó ta được $\frac{SP}{SQ} = \frac{SC}{SB} \Rightarrow SQ.SC = SP.SB$. Từ đó ta được $SE = SF$. Từ đó suy ra hai tam giác IES và IFS bằng nhau nên $IE = IF$.

Hai tam giác BEH và BCE có EBH chung và $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BE}$ nên ta được $\Delta BEH \backsim \Delta BCE$

Do đó ta được $BEH = BCE$. Hoàn toàn tương tự ta được $CFH = CBF$

Mà ta có $CBF = IGF$ nên suy ra $CFH = IGF$

Hai tam giác IFH và IGF có FIH chung và $IFH = IGF$ nên $\Delta IFH \backsim \Delta IGF$

Do đó ta được $\frac{IF}{IG} = \frac{IH}{IF} \Rightarrow IF^2 = IH.IG \Rightarrow IE^2 = IH.IG \Rightarrow \frac{IE}{IG} = \frac{IH}{IE}$.

Từ đó suy ra hai tam giác IEG và EIH đồng dạng với nhau, nên ta được $IEH = IGE$

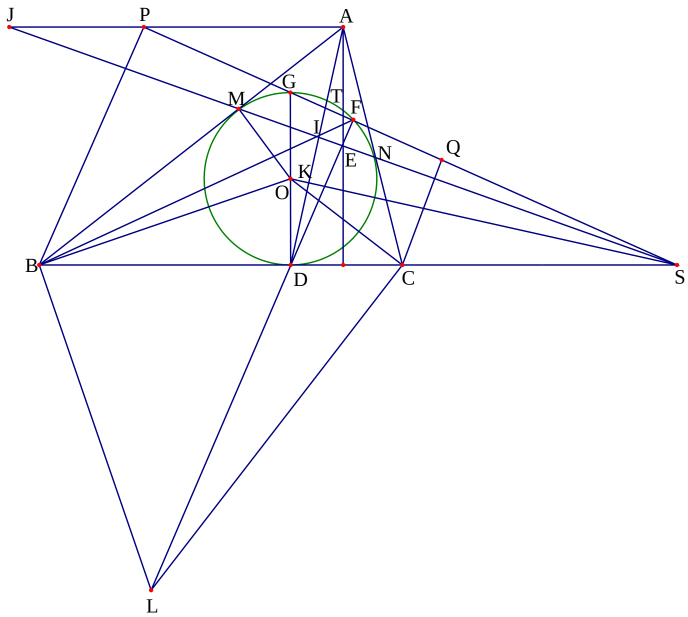
Do đó $IGE = HCE$ hay $HGE = HCE$, suy ra tứ giác ECGH nội tiếp đường tròn hay đường tròn ngoại tiếp tam giác CHE đi qua điểm G. Do đó G là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHF và CHE. Suy ra hai điểm G và K trùng nhau. Vậy ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Ví dụ 28. Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, đường cao AH. Đường tròn (O; R) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Gọi E là trung điểm của AH, tia DE cắt đường trog (O) tại F. Gọi L là tâm đường tròn bàng tiếp góc F của tam giác FBC. Chứng minh rằng ba điểm F, D, L thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại T khác D. DO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G. Vẽ OK vuông góc với DT tại K, OK cắt BC tại S. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN tại J, BP vuông góc với GF tại P, CQ vuông góc với GF tại Q và I là giao điểm của OA với MN. Ta có FL là phân giác của góc BFC. Nếu ta chứng minh được FD cũng là phân giác của góc BFC thì ba điểm F, D, L thẳng hàng. Như vậy ta đi chứng minh FD là phân giác của góc BFC. Muốn vậy ta cần chứng minh được $BFD = CFD$. Để ý là $BFP + BFD = CFQ + CFD = 90^0$ nên ta cần chứng minh được $BFP = CFQ$. Như vậy ta cần chứng minh được $\Delta BPF \backsim \Delta CQF$. Lại chu ý là $BPF = CQF$ nên ta sẽ đi chứng minh $\frac{BP}{CQ} = \frac{PF}{QF}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại T khác D. DO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G. Vẽ OK vuông góc với DT tại K, OK cắt BC tại S. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN tại J, BP vuông góc với GF tại P, CQ vuông góc với GF tại Q và I là giao điểm của OA với MN.

Khi đó dễ dàng chứng minh được OA là đường trung trực của đoạn thẳng MN nên $MN \perp OA$ tại I. Ta có OK vuông góc với DT tại K nên K là trung điểm của DT.

Tam giác ODS vuông tại D có DK là đường cao nên $OD^2 = OK.OS$

Tam giác OMA vuông tại M có MI là đường cao nên $OM^2 = OI.OA$

Mà ta có $OM = OD$ nên ta được $OK.OS = OI.OA \Rightarrow \frac{OK}{OI} = \frac{OA}{AS}$

Từ đó suy ra $\Delta OIS \backsim \Delta OKA$ nên $OIS = OKA = 90^0$

Do IS và MN cùng vuông góc với OA tại I nên IS và MN trùng nhau, suy ra ba điểm M, N, S thẳng hàng.

Hai tam giác DTG và AHD có $DTG = AHD$ và $GDT = DAH$ nên $\Delta DTG \backsim \Delta AHD$

Từ đó ta được $\frac{TG}{HD} = \frac{TD}{HA} = \frac{2TK}{2HE} = \frac{TK}{HE}$, suy ra $\Delta GKT \backsim \Delta DEH$

Do đó suy ra $GKT = DEH$, mà ta có $GKT + OKG = 90^0$ và $DEH + EDH = 90^0$ nên $OKG = EDH$

Mặt khác ta có $EDH = OGF$ nên ta được $OKG = OGF$

Ta có $OK.OS = OD^2$ và $OD = OG$ nên ta được $\Delta OKG \backsim \Delta OGS$

Từ đó suy ra $OKG = OGS$, do đó ta được $OGF = OGS$ nên $GF \equiv GS$

Do đó ba điểm G, F, S thẳng hàng nên BP//DF//CQ. Áp dụng định lí Talets và tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta được $\frac{BP}{CQ} = \frac{BS}{CS} = \frac{BS}{AJ}.\frac{AJ}{CS} = \frac{BM}{AM}.\frac{AN}{CN} = \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{CD} = \frac{PF}{QF}$

Kết hợp với $BPF = CQF$ nên $\Delta BPF \backsim \Delta CQF$, từ đó ta được $BFP = CFQ$

Mà ta có $BFP + BFD = CFQ + CFD = 90^0$ nên ta được $BFD = CFD$, suy ra FD là phân giác của góc BFC. Mặt khác ta có FL cũng là phân giác của góc BFC. Do đó FD và FL trùng nhau hay ba điểm F, D, L thẳng hàng.

Ví dụ 29. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M bất lì trên cung AB koong chứa điểm C. Đường thẳng AM cắt tiếp tuyến tại B, tiếp tuyến tại C với đường tròn (O) và đường thẳng BC lần lượt tại E, F, H. Chứng minh rằng giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và O, H là các điểm thẳng hàng

Lời giải

Cách 1: Gọi N là giao điểm của BF và CE. Kéo dại MN cắt BC tại S. Khi đó ta có

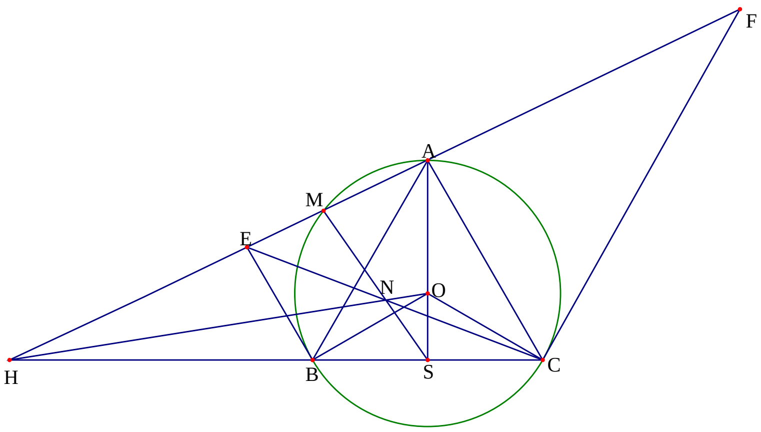
$ABE = ACB$ và $ACB = BAC$

nên ta suy ra được

$ABE = BAC$. Từ đó

BE//AC. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} EBC &= ABE + ABC \\ &= BAC + ABC = 120^0 \end{aligned}$$



Hoàn toàn tương tự ta được CF//AB và $BCF = 120^0$

Hai tam giác ABE và FCA có $\Delta BAE \backsim \Delta CFA$ và $BEA = CAF$ nên $\Delta ABE \backsim \Delta FCA$

Do đó ta được $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow AB.AC = BE.CF \Rightarrow BC^2 = BE.CF \Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$

Hai tam giác EBC và BCF có $EBC = BCF$ và $\frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$ nên $\Delta EBC \backsim \Delta BCF$

Do đó $CEB = FBC$ hay $NBC = CEB$. Hai tam giác CBN và CEB có $NBC = CEB$ và CBN chung nên $\Delta CBN \backsim \Delta CEB$. Suy ra $BNC = EBC \Rightarrow BNC = 120^0$ nên $BNE = 180^0 - BNC = 60^0$

Mặt khác ta lại có $BME = ACB = 60^0$ nên $BNE = BME$

Từ đó suy ra tứ giác BEMN nội tiếp đường tròn. Chứng minh tương tự ta được tứ giác CFMN nội tiếp đường tròn. Từ đó ta có $NEB = NMB$ và $NBS = NEB$ nên $NBS = NMB$ hay $SBN = SMB$

Hai tam giác SBN và SMB có $BSN = MSB$ và $SBN = SMB$ nên $\Delta SBN \backsim \Delta SMB$

Từ đó ta được $\frac{SB}{SM} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow SB^2 = SM.SN$. Hoàn toàn tương tự ta cũng được $SC^2 = SM.SN$

Từ đó ta được $SB = SC$ hay S là trung điểm của BC.

Dễ dàng chứng minh được $AB = BC = CA = R\sqrt{3}$. Tam giác OBC cân tại O có OS là đường OS cũng là đường cao và đường phân giác của tam giác BOC. Từ đó ta suy ra $SO = \frac{R}{2}$ và $SA = \frac{3R}{2}$

Từ đó ta được $SB^2 = SO.SA$, mà ta có $SB^2 = SM.SN$ nên ta được $SO.SA = SM.SN$ hay $\frac{SN}{SA} = \frac{SO}{SM}$.

Xét hai tam giác SON và SMA có $\frac{SN}{SA} = \frac{SO}{SM}$ và MSA chung nên $\Delta SON \backsim \Delta SMA$

Do đó ta được $SON = SMA$. Suy ra tứ giác AONM nội tiếp đường tròn. Mặt khác tứ giác BNOC cũng nội tiếp đường tròn. Gọi N_1 là giao điểm của OH với đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, gọi N_2 là giao điểm của DH với đường tròn ngoại tiếp tam giác OAM. Khi đó $HN_1.HO = BH.HC$ và $HN_2.HO = HM.HA$

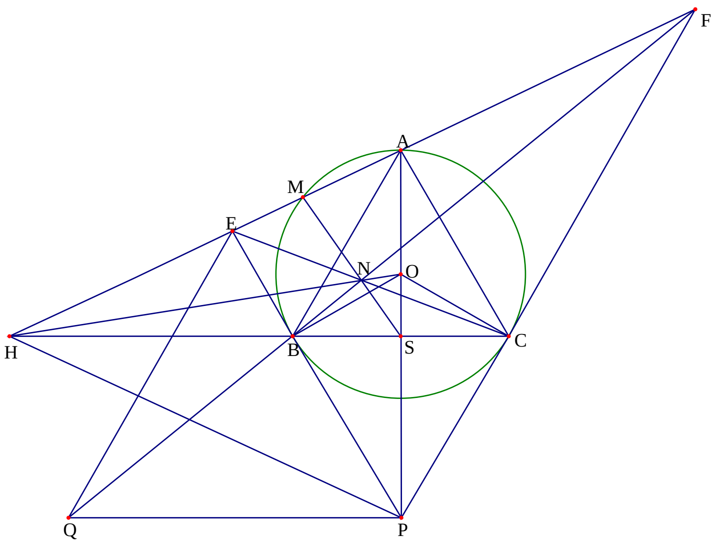
Mà ta có $HB.HC = HM.HA$ nên ta được $HN_1.HO = HN_2.HO \Rightarrow HN_1 = HN_2 \Rightarrow N_1 \equiv N_2$

Khi đó giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OBC và OAM là $N_1 \equiv N_2$

Mà N là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OBC và OAM nên $N_1 \equiv N_2 \equiv N$.

Mà N_1 thuộc OH nên N cũng thuộc OH. Ta có N thuộc các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAM, MCF nên N là giao điểm của ba đường tròn đó. Từ đó ta được giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và O, H là các điểm thẳng hàng.

Cách 2: Gọi N là giao điểm của BF và CE. Kéo dài MN cắt BC tại S. Hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở P. Từ P kẻ đường thẳng song song với BC cắt FB tại Q. Chứng minh tương tự cách 1 ta được



$$\Delta ABE \backsim \Delta FCA$$
$$\Delta EBC \backsim \Delta BCF$$
$$\Delta CBN \backsim \Delta CEB$$
$$\Delta SBN \backsim \Delta SMB$$

Từ đó ta được S là trung điểm của BC.

Ta có $BCP = ABC$ nên CP//AB.

Tương tự ta cũng có AC//BP. Nên tứ giác ABPC là hình bình hành. Mà ta có $AB = AC$ nên tứ giác ABPC là hình thoi. Do đó S là trung điểm của AP. Điều này dẫn đến các điểm A, O, S, P thẳng hàng.

Ta có $OBP = OCP = 90^0$ nên các điểm B, C, O, P thuộc đường tròn đường kính OP.

Ta có $EPQ = PBC$ và $PBC = ACB$ nên $EPQ = ACB = 60^0$

Áp dụng định lí Talets cho các FPQ và FPE ta được $\frac{BC}{PQ} = \frac{FC}{FP}; \frac{AC}{FE} = \frac{FC}{FP}$ nên ta được $\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{FE}$

Mà ta có $AC = BC$ nên $PQ = PE$. Mặt khác ta có $EPQ = 60^0$ nên tam giác EPQ đều.

Ta có $NBC = NQP$ và $NBC = NEP$ nên $NQP = NEP$, do đó tứ giác ENPQ nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được $BNP = BCP = 60^0$, suy ra tứ giác BNCP nội tiếp đường tròn, nên N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP. Mà O cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP nên năm điểm O, N, B, C, P cùng thuộc đường tròn đường kính OP. Do đó ta được $ONP = 90^0 \Rightarrow SNP + SNO = 90^0$.

Tam giác HAP có HS là đường cao cũng là đường trung tuyến nên cân tại H.

Ta có $HPS = HAS$ và $HAS = SNO$ nên $HPS = SNO$

Ta có $SHP + HPS = 90^0; SNP + SNO = 90^0; HPS = SNO$ nên ta được $SHP = SNP$

Từ đó suy ra tứ giác BNSP nội tiếp đường tròn. Suy ra $HNP = 90^0$.

Ta có $OHN = OHP + HNP = 180^0$ nên ba điểm O, H, N thẳng hàng.

Tứ giác BNOC nội tiếp đường tròn nên $BNC = BOC = 120^0$

Mặt khác ta có $BNE = 180^0 - BNC = 60^0$, mà ta lại có $BME = ACB = 60^0$

Từ đó ta được $BNE = BME$ nên tứ giác BEMN nội tiếp đường tròn. Chứng minh tương tự ta được tứ giác CFMN nội tiếp. Như vậy N thuộc các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBE, MCF. Vậy giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và O, H là các điểm thẳng hàng.

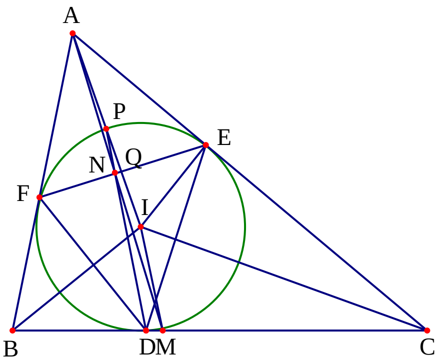
Ví dụ 30. Cho tam giác ABC và đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại F, D, E. Gọi M là giao điểm của BC với đường phân giác trong của góc BIC và N là giao điểm của EF với đường phân giác trong của góc EDF. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Nếu ABC cân tại A thì hiển nhiên ba điểm A, M, N thẳng hàng. Như vậy ta cần chứng minh trong trường hợp tam giác ABC không cân tại A thì ba điểm A, M, N thẳng hàng. Chú ý đến tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có

$$IMC = 90^0 + \frac{ABC}{4} - \frac{ACB}{4}; NDC = 90^0 + \frac{ABC}{4} - \frac{ACB}{4}$$

nên ta suy ra được IM//DN hay IM//PN. Như vậy để chứng minh được ba điểm A, M, N thẳng hàng thì ta cần chứng minh được $\frac{IM}{PN} = \frac{AP}{IA} = \frac{AN}{AM}$.



Lời giải

+ Trường hợp tam giác ABC cân tại A, khi đó hiển nhiên ba điểm A, M, N thẳng hàng

+ Xét trường hợp tam giác ABC không cân tại A, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $AB < AC$.

Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của AI với (I) và EF. Dễ thấy ba điểm D, N, P thẳng hàng nên ta có

- $IMC = MIB + MBI = \frac{1}{2}BIC + MBI = \frac{1}{2}\left(180^0 - IBC - ICB\right) + MBI$
$$= \frac{1}{2}\left(180^0 - \frac{ABC}{2} - \frac{ACB}{2}\right) + \frac{ABC}{2} = 90^0 + \frac{ABC}{4} - \frac{ACB}{4}$$
- $NDC = NDE + EDC = \frac{1}{2}FDE + EDC = \frac{1}{2}\left[180^0 - \left(90^0 - IBD\right) - \left(90^0 - ICD\right)\right]$
$$= \frac{1}{2}\left(180^0 - FDB - EDC\right) + EDC$$
$$= 90^0 + \frac{IBD}{2} - \frac{ICD}{2} = 90^0 + \frac{ABC}{4} - \frac{ACB}{4}$$

Do đó ta được $IMC = NDC$ do đó ta được IM//ND. Do đó ta suy ra IM//PN (*). Để ý là $ID = IP$ nên ta được $MID = IDP = QPN$. Do BC tiếp xúc với (I) tại D và P là điểm chính giữa cung EF nên ta được

$$IDM = PDM - IDP = \frac{1}{2}sdPED - IDP = \frac{1}{2}sdPE + \frac{1}{2}sdED - IDP$$
$$= \frac{1}{2}sdPF + \frac{1}{2}sdED - IDP = PNF - QPN = PQN$$

Do đó ta được $\Delta IDM \backsim \Delta PQN$, suy ra $\frac{IM}{PN} = \frac{DI}{QP}$ mà ta lại có $ID = IP$ do đó $\frac{IM}{PN} = \frac{PI}{QP}$

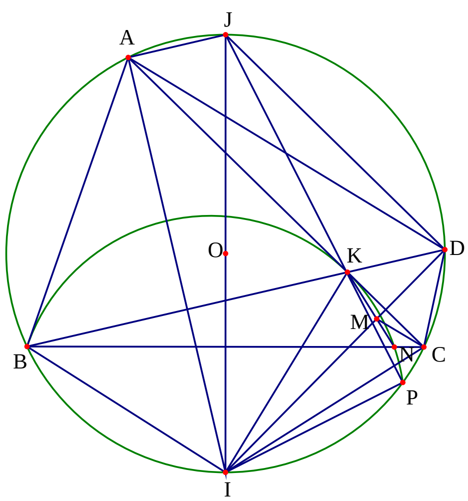
Mặt khác ta có $IAE = 90^0$, $EQ \perp IP$ và $IE = IP$ nên ta được $IQ.IA = IE^2 = IP^2$

Do đó ta có $\frac{QP}{IP} = 1 - \frac{IQ}{IP} = 1 - \frac{IP}{IA} = \frac{PA}{IA} \Rightarrow \frac{IP}{PQ} = \frac{IA}{AP}$, nên ta được $\frac{IM}{PN} = \frac{AP}{IA}$ (**)

Từ (*) và (**) ta được A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 31. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Trên AC lấy K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại D khác B. Trên DI lấy M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại P khác B. Chứng minh rằng PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD.

Phân tích và lời giải



Do I là điểm chính giữa cung BC và theo giả thiết ta được $IB = IC = IK$. Do đó ta được

$IKD = 180^0 - IKB = 180^0 - IBK = CID$

Cũng do I là điểm chính giữa cung BC nên DI là tia phân giác của góc BDC. Do đó ta được $KID = CID$

Xét hai tam giác KID và CID có ID là cạnh chung, $KID = CID$ và $IK = IC$ nên $\Delta KID = \Delta CID$ nên ta được $DK = DC$. Từ đó ta được AI là đường trung trực của đoạn thẳng BK. Gọi IJ là đường kính của (O), ta có AJ//DH và DJ//AK. Nên tứ giác AJDK là hình bình hành. Do đó KJ đi qua trung điển của AD.

Như vậy để chứng minh PK đi qua trung điểm của AD ta chỉ cần chứng minh ba điểm J, K, P thẳng hàng là được. Thật vậy, ta có $\mathrm{IPK} = \mathrm{IPB} + \mathrm{BPK}$. Do $\mathrm{DBC} = \mathrm{DIC} = \mathrm{DIK}$ nên tứ giác BKNP nội tiếp, suy ra $\mathrm{BPK} = \mathrm{BNK}$. Lại có $\mathrm{BPI} = \mathrm{BAI}$. Do đó ta được

$$\mathrm{IPK} = \mathrm{BAI} + \mathrm{BNK} = \mathrm{BAI} + \left(\mathrm{NKC} + \mathrm{NCK}\right)$$

Do ID là đường trung trực của CK nên ta được

$$\mathrm{IPK} = \mathrm{BAI} + \left(\mathrm{NKC} + \mathrm{NCK}\right) = \mathrm{BAI} + \mathrm{MCK} + \mathrm{BCK}$$

Lại có CM//AD nên ta được $\mathrm{IPK} = \mathrm{BAI} + \mathrm{MCK} + \mathrm{BCK} = \mathrm{BAI} + \mathrm{CAD} + \mathrm{BCK}$

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên $\mathrm{IPK} = \mathrm{BAI} + \mathrm{CAD} + \mathrm{BCK} = \mathrm{BAI} + \mathrm{CBD} + \mathrm{BCK} = \mathrm{IAK} + \mathrm{AKB}$

Do $\mathrm{BK} \perp \mathrm{AI}$ nên ta được $\mathrm{IPK} = 90^0 = \mathrm{IPJ}$. Từ đó ta được ba điểm P, K, J thẳng hàng. Vậy PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD.

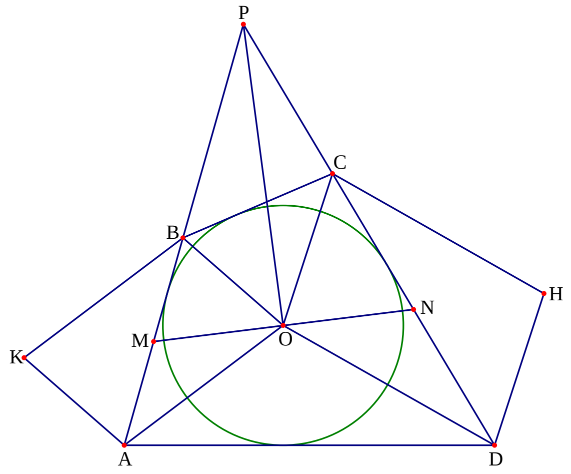
Ví dụ 32. Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối diện không song song với nhau, ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\mathrm{OA.OC} = \mathrm{OB.OD}$.

Phân tích tìm lời giải

Giả sử ba điểm M, O, N thẳng hàng. Khi đó gọi R và S lần lượt là trung điểm của AD và BC thì ta được tứ giác MRNS là hình bình hành nên MN và SR cắt điểm O. Gọi giao điểm của AB và CD là P khi đó tam giác MPN cân tại P. Để chứng minh được $\mathrm{OA.OC} = \mathrm{OB.OD}$ ta cần chứng minh $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}$. Chú ý là $\mathrm{NC} = \mathrm{ND}$ ta cần chứng minh được $\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NC}}$ và $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{NO}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{DN}}$ hay ta cần chứng minh được hai tam giác BMO và ONC đồng dạng, hai tam giác OMA và DNO đồng dạng.

Lời giải

+ Điều kiện cần: Giả sử ba điểm M, O, N thẳng hàng. Khi đó gọi R và S lần lượt là trung điểm của AD và BC. Dễ dàng chứng minh được tứ giác MRNS là hình bình hành nên MN và SR cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó chính là điểm O. Gọi giao điểm của AB và CD là P. Do đường tròn (O) nội tiếp tứ giác ABCD nên đường tròn (O) nội tiếp ta giác APD. Từ đó suy ra PO là phân giác của góc MPN, đồng thời PO là đường trung tuyến của tam giác MPN. Do đó tam giác MPN cân tại P.



Mặt khác ta có $MBC = BPC + BCP = BPC + 180^0 - BCN$ hay ta được

$MBC + BCN + BPC = 180^0$

Suy ra $\frac{1}{2}\left(MBC + BCN\right) = \frac{1}{2}\left(MPC + 180^0\right) \Leftrightarrow MBO + NCO = BPO + 90^0$

Ta lại có $\begin{cases} MBO = BPO + BOP \\ MOB = 90^0 - BOP \end{cases} \Rightarrow MBO + MOB = BPO + 90^0$

Kết hợp các kết quả trên ta được $MBO + NCO = MBO + MOB \Rightarrow NCO = MOB$

Điều này dẫn đến hai tam giác BMO và ONC đồng dạng với nhau nên ta được

$\frac{BO}{OC} = \frac{BM}{ON} = \frac{MO}{NC}$

Chứng minh tương tự ta cũng có hai tam giác OMA và DNO đồng dạng với nhau nên

$\frac{OA}{OD} = \frac{MA}{NO} = \frac{OM}{DN}$

Để ý là $NC = ND$ nên ta được $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$ hay ta được $OA.OC = OB.OD$.

+ Điều kiện đủ: Giả sử ta có $OA.OC = OB.OD$. Khi đó để ý là

$$AOB + COD = \left(180^0 - OAB - OBA\right) + \left(180^0 - OCD - ODC\right)$$
$$= 360^0 - \frac{1}{2}\left(DAB + ABC + BCD + CDA\right) = 180^0$$

Vẽ các hình bình hành OAKB và OCHD. Khi đó ta có $\frac{OA}{AK} = \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OD}$

Từ đó hai tam giác OMB và CNO đồng dạng nên $MOB = OCN = OCB$ và

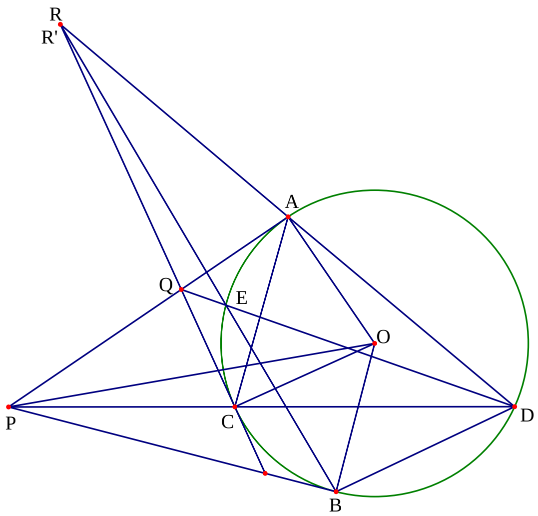
$CON = MBO = OBC$

Suy ra ta được $MOB + BOC + CON = OCB + BOC + OBC = 180^0$.

Điều này có nghĩa là điểm O nằm trên đường thẳng MN. Hay ta được ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Ví dụ 33. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm P nằm trên đường thẳng AC sao cho PB và PD là hai tiếp tuyến của đường tròn. Tiếp tuyến tại C cắt PD và AD lần lượt tại Q và R. Gọi E là giao điểm thứ hai cả AQ với đường tròn (O). Chứng minh rằng ba điểm B, E, R thẳng hàng.

Phân tích và lời giải



Gọi giao điểm của BE với AD là R', ta cần chứng minh R và R' trùng nhau.

Thật vậy, ta có $APD = PAC$ và DPC chung nên $\Delta PAD \backsim \Delta PDC$. Lại có

$PAB = PBC$ và BPC chung nên ta được

$\Delta PAB \backsim \Delta PBC$

Từ đó ta được $\frac{AD}{CD} = \frac{PA}{PD} = \frac{PA}{PB} = \frac{AB}{BC}$, do đó suy ra $AD.BC = AB.CD$.

Tương tự ta được $AC.DE = AD.CE$

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác ABCD nội tiếp ta được

$AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Từ đó suy ra $AD.BC = AB.CD = \frac{1}{2}AC.BD$

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác ACED nội tiếp ta được $AC.DE + AD.CE = AE.CD$

Suy ra ta được $AC.DE = AD.CE = \frac{1}{2}AE.CD$. Từ đó ta được $\frac{BD}{AB} = \frac{2CD}{CA}$ và $\frac{CD}{CA} = \frac{2ED}{EA}$

Hoàn toàn tương tự như trên ta chứng minh được $\Delta RDC \backsim \Delta RCA$ nên suy ra $\frac{RD}{RC} = \frac{CD}{CA} = \frac{RC}{RA}$.

Từ đó ta được $\frac{RD}{RA} = \frac{RD.RA}{RA^2} = \left(\frac{RC}{RA}\right)^2 = \left(\frac{CD}{CA}\right)^2 = \left(\frac{2ED}{AE}\right)^2$

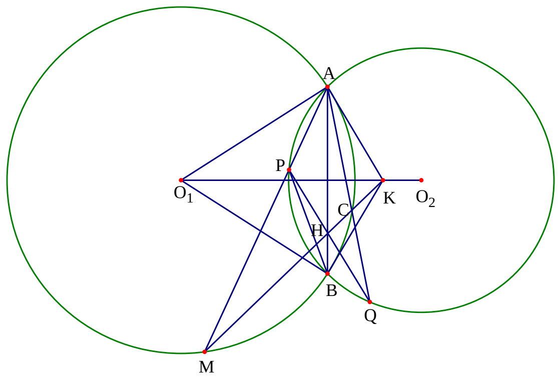
Ta cũng có $\Delta ABR' \backsim \Delta DR'$ và $\Delta DBR' \backsim \Delta EAR'$ nên ta được $\frac{R'D}{R'B} = \frac{ED}{AB}$ và $\frac{R'A}{R'B} = \frac{EA}{BD}$

Suy ra $\frac{R'D}{R'A} = \frac{ED.BD}{EA.AB} = \left(\frac{2ED}{AE}\right)^2$. Từ đó ta được $\frac{RD}{RA} = \frac{R'D}{R'A}$ nên hai điểm R và R′ trùng nhau.

Vậy ba điểm B, E, R thẳng hàng

Ví dụ 34. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Lấy điểm M trên đường tròn (O_1) không trùng với A và B. Gọi P là giao điểm thứ hai của MA với đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của MK với đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA với đườn tròn (O_2). Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng CM.

Lời giải



Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung lớn AB, trường hợp M thuộc cung nhỏ AB được chứng minh tương tự. Gọi H là giao điểm của PQ và BC. Ta cần chứng minh được $PH = QH$.

Do BK là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) và KCM là cát tuyến của tương ứng nên ta dễ dàng chứng minh được $\Delta BCK \backsim \Delta MBK$ suy ra $\frac{BC}{BM} = \frac{CK}{BK}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{AC}{AM} = \frac{CK}{AK}$

Mà ta lại có $KA = KB$, nên từ các tỉ số trên ta được $\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{BM}$. Ta lại có tứ giác AMBC nội tiếp đường tròn (O_1) nên ta được $AMB = BCQ \Rightarrow PMB = BCQ$

Mặt khác tứ giác AQB nội tiếp đường tròn (O_2) nên ta được $BPM = AQB \Rightarrow BPM = CQB$

Do đó ta được $\Delta BMP \backsim \Delta BCQ \Rightarrow \frac{MP}{CQ} = \frac{BM}{BC}$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác APQ với ba điểm C, M, H thẳng hàng ta được

$$\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HP}.\frac{MP}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{HP}{HQ} = \frac{AC}{AM}.\frac{MP}{CQ} = \frac{BC}{BM}.\frac{BM}{BC} = 1 \Rightarrow HP = HQ$$

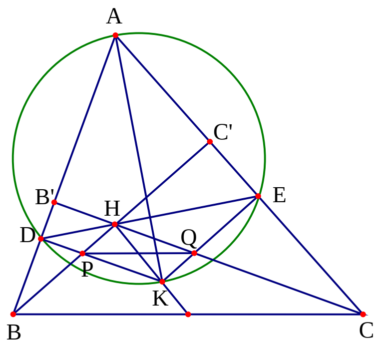
Hay H là trung điểm của PQ. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại K. Chứng minh rằng K, H và trung điểm của BC thẳng hàng.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy tam giác ADE cân tại A. Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC. Khi đó tứ giác HPKQ là hình bình hành. Để chứng minh H, K và trung điểm của BC thẳng hàng ta cần chỉ ra được PQ song song với BC. Muốn vậy ta đi chứng minh $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH}$

Lời giải



Trước hết ta chứng minh tam giác ADE cân tại A.

Thật vậy, vì HD là phân giác ngoài của góc BHC nên ta có

$$DHB = \frac{1}{2}\left(HBC + HCB\right) = \frac{1}{2}\left[\left(90^0 - ABC\right) + \left(90^0 - ACB\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}BAC$$

Do đó ta được

$$ADE = DBH + DHB = 90^0 - BAC + \frac{1}{2}BAC = 90^0 - \frac{1}{2}BAC$$

Tương tự ta cũng có $AED = 90^0 - \frac{1}{2}BAC$, từ đó suy ra $ADE = AED$ hay tam giác ADE cân tại E.

Mặt khác ta có AK là phân giác của góc DAE nên cũng là đường trung trực của đoạn DE, từ đó suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Từ đó $KD \perp AB$, tương tự ta cũng có $KE \perp AC$.

Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC. Ta có $KP \perp AB$ và $HQ \perp AB$, từ đó suy ra KP//HQ. Tương tự ta cũng được KQ//HP, do đo tứ giác KPKQ là hình bình hành.

Gọi BB′ và CC′ là các đường cao của tam giác ABC, ta có DP//HC′ và QE//HB′

Nên theo định lí Talet ta có $\frac{PB}{PH} = \frac{DB}{DC'}; \frac{QC}{QH} = \frac{EC}{EB'}$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{DB}{DC'} = \frac{HB}{HC'}; \frac{EC}{EB'} = \frac{DB}{HB'}$

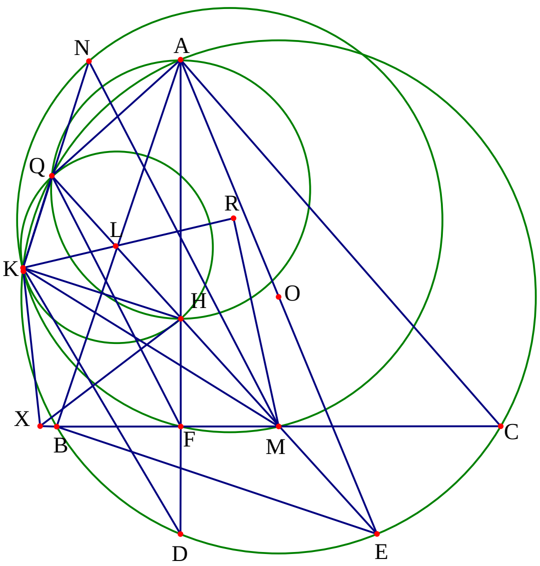
Vì B, C, B′, C′ cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên ta được $\Delta BHC' \backsim \Delta CHB'$

Từ đó ta được $\frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$. Kết hợp với các kết quả trên ta được $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH}$, nên theo định Talet ta được PQ song song với BC. Do HK đi qua trung điểm của PQ nên HK cũng đi qua trung điểm của BC.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn O) tại Q khác A.

Đường tròn đường kính HQ cắt đường tròn (O) tại K khác Q. Đường thẳng KQ cắt dường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của AQ.

Phân tích và lời giải



Gọi L và R lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KMF. Ta cần chứng minh ba điểm K, L, R thẳng hàng.

Thật vậy, gọi AE là đường kính của đường tròn (O) và D đối xứng với H qua BC. Khi đó dễ thấy tứ giác HBEC là hình hình hành nên ba điểm H, M, E thẳng hàng. Lại có Q thuộc đường tròn đường kính AE nên ta được $AQF = 90^0$. Mà Q lại thuộc đường tròn đường kính AH nên ta được $QAH = 90^0$

Từ đó $AQH = AQF = 90^0$ nên ba điểm Q, H, E thẳng hàng. Do vậy bốn điểm Q, H, M. E thẳng hàng.

Gọi tiếp tuyến tại K và H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X.

Khi đó ta có $XKH = XHK = KQH$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung). Mà ta lại có $KQH = KAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE của đường tròn (O)). Từ đó ta có

$$KXH = 180^0 - 2KHX = 180^0 - 2KQH = 2\left(90^0 - KQH\right) = 2\left(90^0 - KAE\right) = 2AEK = 2KDH$$

Lại có $XH = XK$ nên X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD.

Do D và H đối xứng nhau qua BC nên BC là đường trung trực của DH, từ đó suy ra X thuộc đường thẳng BC. Do XH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính QH nên ta có $XH \perp QH$

Xét tam giác XHM vuông tại H có đường cao HF nên ta có $XK^2 = XH^2 = XF.XM$

Từ đó suy ra XK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngại tiếp tam giác KQH và KFM với tiếp điểm K là giao điểm của hai đường tròn. Do đó ta suy ra hai đường tròn ngại tiếp tam giác KQH và KFM với tiếp xúc nhau K. Từ đó suy ra hai tâm đường tròn và tiếp điểm cùng nằm trên một đường thẳng hay ba điểm L, K, R thẳng hàng. Gọi P là trung điểm của AQ, ta cần chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Thật vậy, ta có bốn điểm Q, H, M, E thẳng hàng, từ đó suy ra $KQH = KAE$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng. Từ đó suy ra hai tam giác KQA và KHF đồng dạng Mà ta lại có KP và KM lần lượt là hai trung tuyến của hai tam giác KQA và KHE nên ta được hai tam giác KQP và KHM đồng dạng, suy ra $QPK = QMK$ và $QKP = HKM$.

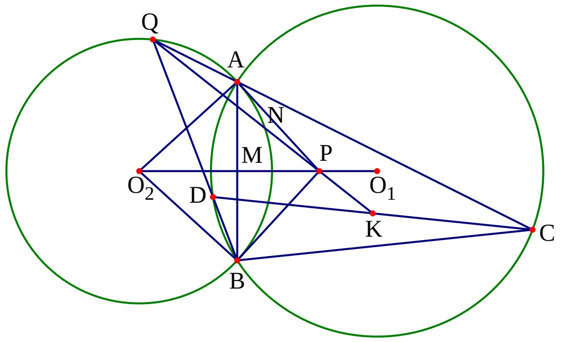
Từ đó suy ra tứ giác QPMK nội tiếp đường tròn. Ta có biến đổi góc sau

$$CMN = QKF = QMK + LKM + MKF = KPQ + RMK + 90^0 - RMF$$
$$= 90^0 - PMK + RMK + 90^0 - RMF = 180^0 - BMP = CMP$$

Do đó ba điểm M, P, N thẳng hàng hay MN đi qua trung điểm của AQ. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 37. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A và B. Lấy điểm Q nằm trên đường tròn (O_2). Các đường thẳng AQ, BQ cắt đường tròn (O_1) lần lượt tại C, D. Các tiếp tuyến tại A, B với đường tròn (O_2) cắt nhau tại P. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của CD

Phân tích và lời giải



Gọi M là giao điểm của AB và O_1O_2, khi đó M là trung điểm của AB. Để chứng minh PQ đi qua trung điểm của CD ta cần chứng minh $MQB = PQC$.

Thật vậy, giả sử ta có $MQB = PQC$. Khi đó ta gọi K là giao điểm của PQ và CD. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên ta có $QBM = KCQ$, kết hợp với $MQB = PQC$ ta suy ra được hai tam giác MQB và KQC đồng dạng.

Từ đó ta được $\frac{MB}{KC} = \frac{QB}{QC}$. Cũng do tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên ta có $\Delta QCD \backsim \Delta QBA$ do đó $\frac{AB}{CD} = \frac{QB}{QC}$. Từ đó ta được $\frac{MA}{KC} = \frac{AB}{CD}$, mà ta lại có $MA = \frac{1}{2}AB$ nên ta thu được $KC = \frac{1}{2}DC$ hay K là trung điểm của DC. Do đó PQ đi qua trung điểm của CD.

Để bài toán sẽ được chứng minh hoàn tất ta cần chứng minh được $MQB = PQC$. Thật vậy, gọi N là giao điểm của PQ với đường tròn (O_2).

Do PA là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O_2\right)$ nên ta suy ra được $\Delta PAN \backsim \Delta PQA$

Từ đó suy ra $\frac{PA}{PQ}=\frac{AN}{AQ}=\frac{PN}{PA}$. Tương tự ta cũng có $\frac{PB}{PQ}=\frac{BN}{QB}=\frac{PN}{PB}$.

Mà ta lại có $PA=PB$ nên từ các kết quả trên ta thu được $\frac{BN}{QB}=\frac{AN}{AQ}\Rightarrow AQ.BN=BQ.AN$.

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ ANBQ nội tiếp ta được $AN.BQ+BN.AQ=AB.NQ$

Do đó ta được $NB.AQ=AN.BQ=\frac{1}{2}AB.QB=BM.QN$. Do đó $\frac{BQ}{BM}=\frac{QN}{AN}$, kết hợp với $QBM=QNA$ ta được $\Delta QBM \backsim \Delta QAN$. Từ đó suy ra $MQB=PQC$. Vậy bài toán được chứng minh.

B. CÁC BÀI TOÁN VỀ BA ĐƯỜNG ĐỒNG QUY

I. Một số phương pháp chứng minh ba đường đồng quy

Phương pháp 1: *Chuyển bài toán chứng minh ba đường thẳng đông quy về bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng.*

Phương pháp 2: *Chứng minh ba đường thẳng là đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường cao, ba đường trung trực trong tam giác.*

Phương pháp 3: *Gọi giao điểm của hai đường thẳng là M và chứng minh đường thẳng còn lại cũng đi qua điểm M.*

Phương pháp 4: *Sử dụng định lí Ceva.*

Cho tam giác ABC. Các điểm A′, B′, C′ lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ đồng quy khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$.

Chứng minh

+ Điều kiện cần: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BB′, CC′ tại M, N.

Ta có $\frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{AM};\frac{C'A}{C'B}=\frac{AN}{BC};\frac{A'B}{A'C}=\frac{AM}{AN}$. Vậy ta có $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{AN}.\frac{BC}{AM}.\frac{AN}{BC}=1$

+ Điều kiện đủ: Gọi I là giao của BB′ và CC′. Giải sử AI cắt BC tại A′′, suy ra A′′ cũng thuộc BC.

Theo định lý Ceva (phần thuận) ta có $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ mà $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$

Nên $\frac{A'B}{A'C}=\frac{A''B}{A''C}$. Từ đó suy ra $A''\equiv A'$. Do đó AA′, BB′, CC′ đồng quy

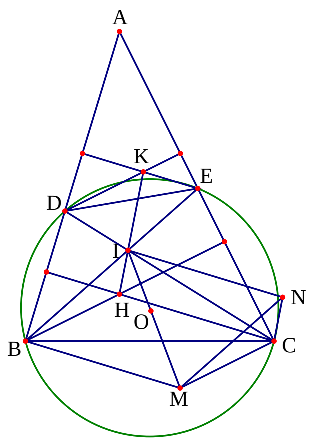
II. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường tròn (O) đi qua hai điểm B, C cắt AB, AC lần lượt tại D, E$\left(D \neq B; E \neq C\right)$. Gọi K là trực tâm tam giác ADE. Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CD, HK đồng quy.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh BE, CD, HK đồng quy ta sẽ đi chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng. Muốn vậy ta cần phải chứng minh được $BIK + BIH = 180^0$

Lời giải



Vẽ các hình bình hành HBMC và IHCN. Khi đó ta có

$ADE = ECB$ và $ADE = ABH = ACH$. Từ đó ta được

$KDE = HCB$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $KED = HBC$

Xét hai tam giác KED và HCB có $KDE = HCB$ và

$KED = HBC$ nên $\Delta KED \backsim \Delta HCB$, từ đó $\dfrac{KE}{BH} = \dfrac{DE}{BC}$. Lại

chứng minh được $\Delta IDE \backsim \Delta IBC$ nên ta được $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{IE}{IC}$.

Suy ra $\dfrac{IE}{IC} = \dfrac{KE}{KH} = \dfrac{KE}{CM}$

Lại có

$IEK = IED + KED = ICH + HBC = ICH + BCM = ICM$

Xét hai tam giác IEK và ICM có $IEK = ICM$ và $\dfrac{IE}{IC} = \dfrac{KE}{CM}$ nên ta được $\Delta IEK \backsim \Delta ICM$

Từ đó suy ra $KIE = MIC$. Ta có $NMC = IBH = ABH - ABI = ACH - ACI = NIC$

Do đó tứ giác MINC nội tiếp đường tròn nên ta được $BIH = MNC = MIC = KIE$

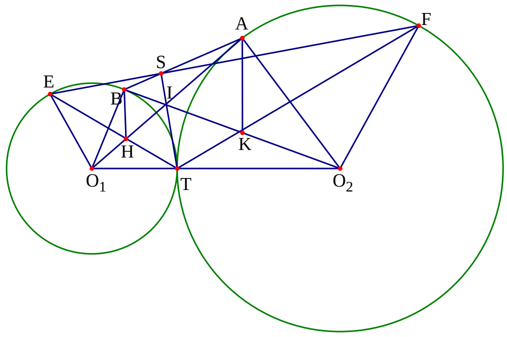
Nên suy ra $BIK + BIH = BIK + KIE = 180^0$. Từ đó ta được ba điểm H, I, K thẳng hang hay BE, CD, KH đồng quy.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ không bằng nhau và tiếp xúc ngoài tại T. Kẻ O_1A tiếp xúc với $\left(O_2\right)$ tại A và O_2B tiếp xúc với $\left(O_1\right)$ tại B sao cho các điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là O_1O_2. Lấy H thuộc O_1A và K thuộc O_2B sao cho BH và AK cùng vuông góc với O_1O_2. Đường thẳng TK cắt đường tròn $\left(O_2\right)$ tai điểm thứ hai là F và TH cắt đường tròn $\left(O_1\right)$ tại điểm thứ hai là E. Biết EF cắt AB tại S. Chứng minh rằng ba đường thẳng O_1A, O_2B và TS đồng quy tại một điểm.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy tứ giác O_1O_2AB nội tiếp đường tròn nên ta suy ra được IT là đường phân giác của góc O_1IO_2. Để chứng minh được ba đường thẳng O_1A, O_2B và TS đồng quy tại một điểm.Ta đi chứng minh ba điểm T, I, S thẳng hàng. Muốn vậy ta cần chứng minh được $\frac{SB}{SA} = \frac{IB}{IA}$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của O_1A và O_2B. Xét tứ giác O_1O_2AB có $O_1AO_2 = O_1BO_2 = 90^0$ nên nội tiếp đường tròn. Do đó

$O_1I.IA = O_2I.IB \Rightarrow \frac{O_1I}{O_2I} = \frac{IB}{IA}$ nên ta có

$\Delta AIO_2 \backsim \Delta BIO_1$. Từ đó $\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1B}{O_2A} = \frac{O_1I}{O_2I}$, do đó IT là đường phân giác của góc O_1IO_2

Dễ thấy $O_1BH = O_1O_2B$ và từ tứ giác O_1O_2AB nội tiếp nên ta có $O_1O_2B = O_1AB$

Nên ta được $\Delta O_1BH \backsim \Delta O_1AB$ suy ra $\frac{O_1B}{O_1H} = \frac{O_1A}{O_1B} \Rightarrow \frac{O_1T}{O_1H} = \frac{O_1A}{O_1T}$

Từ đó ta được $\Delta O_1TH \backsim \Delta O_1AT$ nên ta được $O_1AT = O_1TH = O_1ET$. Do vậy tứ giác O_1TAE nội tiếp được. Suy ra $EO_1A = ETA = 180^0 - O_1TH - O_2TA = 180^0 - O_1AT - O_2AT = 90^0$

Từ đó ta được $EO_1 // AO_2$. Chứng minh tương tự ta được $BO_1 // FO_2$. Tứ đó

$\Delta O_1BE \backsim \Delta O_2FA$ và có $\Delta AIO_2 \backsim \Delta BIO_1$ nên ta suy ra $\frac{EB}{FA} = \frac{O_1E}{O_2A} = \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{IB}{IA}$ và

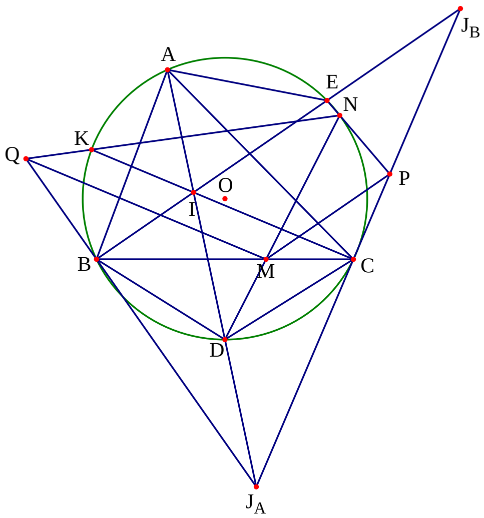
$O_1BE = O_2FA$

Mà ta có $BO_1 // FO_2$ nên ta được BE // FA. Áp dụng định lí Talet ta được $\frac{SB}{SA} = \frac{EB}{FA} = \frac{IB}{IA}$, suy ra IS là đường phân giác trong của góc AIB .Mà hai góc O_1IO_2 và AIB đối đỉnh với nhau nên ba điểm T, I, S thẳng hàng. Do đó ta được ba đường thẳng O_1A, O_2B và TS đồng quy tại điểm I.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại D, E, K. Trên cạnh BC lấy điểm M. Hai điểm P và Q thỏa mãn MP song song với BE, CP vuông góc với CK, MQ song song với CK và BQ vuông góc với BE. Chứng minh PE, QK, DM đồng quy.

Lời giải

Từ M kẻ đường thẳng song song với BE cắt đường phân giác ngoài của góc C, đó chính là điểm P, thỏa mãn $CP \perp CK$ và MP song song với BE. Tương tự điểm Q thỏa mãn nằm trên đường phân giác ngoài góc B nên $BQ \perp BE$ và MQ song song với CK. Đường thẳng AD và BE cắt đường phân giác ngoài tại hai điểm J_A, J_B. Giả sử DM cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại N. Khi đó ta có $DAE = \frac{1}{2}\left(A+B\right) = 90^0 - \frac{1}{2}C$ và cũng có $BCJ_B = 90^0 + \frac{1}{2}C \Rightarrow BJ_Bc = \frac{1}{2}A$ Lại có MP song song với BJ_B nên ta được $MPC = \frac{1}{2}A$.



Mặt khác ta có $DNC = \frac{1}{2}A$ nên ta được $MPC = MNC = \frac{1}{2}A$ suy ra tứ giác MNPC là tứ giác nội tiếp đường tròn. Do đó suy ra $BCJ_B + MNP = 180^0$.

Tứ giác BEND nội tiếp nên ta được $END = 180^0 - EBD = 180^0 - \frac{1}{2}\left(A+B\right) = 90^0 + \frac{1}{2}C$

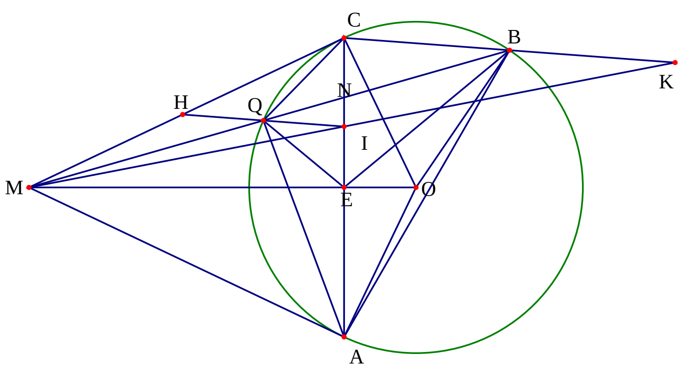
Từ $BCJ_B = 90^0 + \frac{1}{2}C \Rightarrow END + MNP = BCJ_B + MNP = 180^0$ suy ra ba điểm P, N , E thẳng hàng.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được Q, K, N thẳng hàng. Vậy PE, QK, DM đồng quy.

Ví dụ 4. Cho đường tròn tâm O. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MA, MC(A, C là tiếp điểm), B thuộc cung lớn AC sao cho MB nằm giữa MO và MC. Tia MB cắt đường tròn tại Q(Q khác B), cắt CA tại N. Gọi K là điểm đối xứng với C qua B. Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt CM tại H. Chứng minh rằng QH, AC, MK đồng quy.

Bài giải

Gọi giao điểm của MO với AC là E. Gọi giao điểm của QH với BC là I. Vì MA, MC là hai tiếp tuyến tại A, C của đường tròn tâm O nên $MA = MC$ nên M nằm trên đường trung trực của AC. Mặt khác $OA = OC$ nên O



nằm trên đường trung trực của

AC. Vì vậy OM là đường trung

trực của AC nên OM vuông góc

với AC tại E.

Vì MC vuông góc với OC nên tam giác MCO vuông tại C và $OM \perp EC$ nên $MC^2 = ME.MO$

Mặt khác xét tam giác MQC và MCB có CMQ là góc chung và $MCQ = MBQ$

Nên ta được $\Delta MQC \backsim \Delta MCB$ do đó suy ra $\dfrac{MQ}{MC} = \dfrac{MC}{MB} \Rightarrow MQ.MB = MC^2$

Từ đó $MQ.MB = ME.MO \Rightarrow \dfrac{MQ}{MO} = \dfrac{ME}{MB}$. Suy ra $\Delta MQE \backsim \Delta MOB$ nên ta được $MEQ = MBO$

hay $MEQ = QBO$. Lại có tứ giác QEOB có $MEQ = MBO$ nên tứ giác QEOB là tứ giác nội tiếp

Do đó ta được $BEO = BQO$. Mà tam giác BQO cân tại O nên $QBO = BQO \Rightarrow BEO = BQO$

Từ đó ta được $MEQ = BEO$. Mà $QEC + MEQ = 90^0, BEO + CEB = 90^0$ nên $QEC = CEB$ do đó

EC là tia phân giác của QEB. Mà HA là phân giác ngoài QEB nên theo tính chất phân giác suy ra

$$\frac{NQ}{NB} = \frac{EQ}{EB}, \frac{MQ}{MB} = \frac{EQ}{EB} \Rightarrow \frac{NQ}{NB} = \frac{MQ}{MB}$$

Mặt khác QH//BC nên ta có $\dfrac{MQ}{MB} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{HQ}{BC}$ và QI//CB nên ta có $\dfrac{QI}{CB} = \dfrac{NQ}{NB}$

Từ đó ta được $\dfrac{HQ}{BC} = \dfrac{QI}{CB}$ nên Q là trung điểm của HI. Trong tam giác MCB có HQ//BC nên

$\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{QH}{BC}$ hay $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{2QH}{2BC} = \dfrac{HI}{CK}$ nên $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{HI}{CK}$. Kết hợp với $MHI = MCK$ ta được

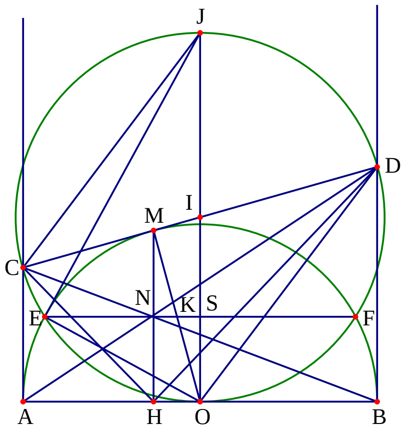
$\Delta MHI \backsim \Delta MCK$ suy ra $HMI = CMK$ nên hai tia MI, MK trùng nhau. Do đó M, I, K thẳng hàng hay QH, AC, MK đồng quy.

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy điểm M nằm trên nửa đường tròn(M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Đường trong ngoại tiếp tam giác OCD cắt nửa đường tròn (O) tại E và F. Chứng minh rằng AD, BC và EF đồng tại một điểm.

Phân tích và lời giải

Gọi N là giao điểm của AD và BC. Ta đi chứng minh rằng ba điểm E, F, N thẳng hàng.

Dễ thấy AC//BD, $AC = CM, BD = DM$ và $\widehat{COD} = 90^0$.



Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của MN với AB, K và S lần lượt là giao điểm của EF với OM và OI. Trong tam giác NBO có AC//BD nên ta có

$\frac{CN}{MN} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{CN}{MB} = \frac{CM}{MD}$. Từ đó suy ra MN//BD//AC.

Ta có $\frac{MN}{AC} = \frac{DM}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{HN}{AC}$ nên ta được $MN = NH$.

Vẽ đường kính OJ của đường tròn (I) đường kính CD. Hai đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại E và F. Suy ra OI là đường trung trực của EF, nên ta được $OI \perp EF$, do đó EF//AB.

Tam giác EOJ vuông tại E có ES là đường cao nên $OE^2 = OS.OJ$.

Từ đó ta được $2OS.OI = OM^2 \Rightarrow OS.OI = \frac{1}{2}OM^2$.

Mà ta có $\Delta OSK \backsim \Delta OMI$ nên ta được $\frac{OS}{OM} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OS.OI = OM.OK$.

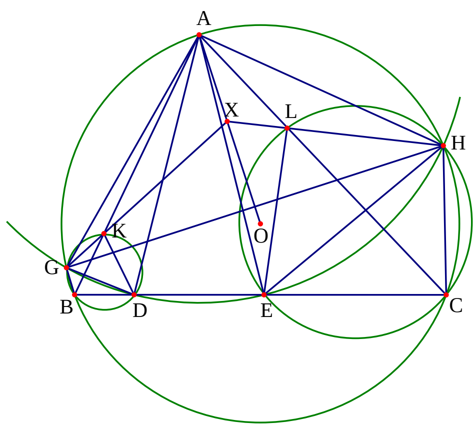
Do đó ta được $OM.OK = \frac{1}{2}OM^2 \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OM$ hay K là trung điểm của MO.

Mà ta lại có EF//AB, do đó EF đi qua N. Vậy ba điểm E, F, N thẳng hàng.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn tâm A cắt BC tại D, E và cắt đường tròn (O) tại G, H sao cho D nằm giữa hai điểm B, E và tia AB nằm giữa hai tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDG và CEH cắt lần lượt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau tại một điểm trên OA.

Trích đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2015

Phân tích và lời giải



Gọi giao điểm của GK với LH là X. Ta cần chứng minh X thuộc OA.

Thật vậy, dễ thấy AG và AH là bán kính đường tròn tâm A nên ta được $AG = AH$, đồng thời G và H thuộc đường tròn (O) nên ta có $OG = OH$ từ đó suy ra AO là đường trung trực của GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc đường trung trực của GH là bài toán được chứng minh.

Thật vậy, dễ thấy tứ giác HCBG nội tiếp đường tròn (O) nên ta được $\widehat{GHC} = 180^0 - \widehat{GBD}$ và tứ giác GHED nội tiếp đường tròn tâm A nên ta

được $GDE = 180^0 - GHE$

Khi đó ta có biến đổi sau $EHC = GHC - GHE = 180^0 - GBD - GDB = BGD$

Do tứ giác KGBD nội tiếp nên ta có $KGD = KBD$ và do tứ giác HGDE nội tiếp đường tròn tâm A nên ta có $HGD = HEC$. Lại có $GBA = HCA$ (hai goác nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) và $EHC = BGD$

Lại do tứ giác GDEH nội tiếp nên $EHG = GDB$.Khi đó ta có biến đổi sau

$$XGH = XGD - HGD = KBD - HEC = 180^0 - \left(GBA + BGD + BDG\right) - HEC$$
$$= 180^0 - \left(HCA + EHC + EHG\right) - HEC = ACB - GHE = XHE - GHE = XHG$$

Do đó ta được tam giác XGH cân tại X hay X tuộc đường trung trực của GH. Vậy X thuộc AO nên GK và HL cắt nhau tại một điểm trên OA.

Ví dụ 7. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng MN và các đường phân giác của các góc $ABD;\ ACE$ đồng quy tại một điểm.

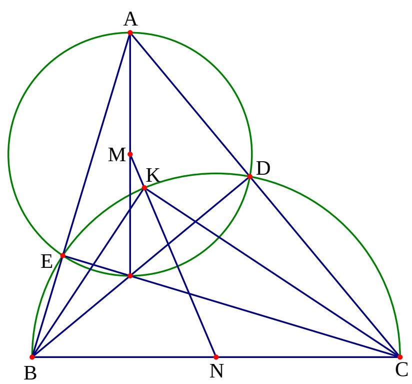
Phân tích tìm lời giải

Gọi K là giao điểm của các đường phân giác của các góc $ABD;\ ACE$ khi đó $KBD = KCD$. Lại thấy $BEC = BKC = BDC = 90^0$. Nên các điểm B, E, K, D, C cùng nằm trên đường tròn tâm N. Mà ta lại có $ECK = KCD$ nên điểm K nằm chính giữa cung DE của đường tròn tâm N đường kính BC. Mà ta lại thấy các điểm A, E, H, D nằm trên đường tròn tâm M. Nên hai đường tròn tâm M và tâm N cắt nhau tại D và E. Như vậy MN đi qua điểm chính giữa cung DE của đường tròn tâm N hay MN đi qua điểm K. Vậy MN và các đường phân giác của các góc $ABD;\ ACE$ đồng quy tại một điểm.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của các đường phân giác của ABD và ACE. Dễ thấy $ABH = ACH$ do cùng phụ với góc BAC.

Mà BK và CK là phân giác của các góc $ABD;\ ACE$ nên ta được $KBD = \dfrac{ABH}{2} = \dfrac{ACH}{2} = KCD$. Từ đó ta được



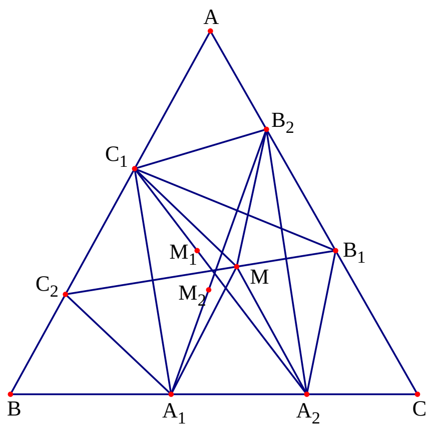
$$KBC + KCB = DBC + KBD + KCB$$
$$= DBC + KCD + KCB = 90^0$$

Suy ra $BKC = 90^0$ nên ta được $BEC = BKC = BDC = 90^0$. Từ đó suy ra các điểm B, E, K, D, C cùng nằm trên đường tròn tâm N. Mà ta lại có $ECK = KCD$ nên điểm K nằm chính giữa cung DE của đường tròn tâm N đường kính BC. Mặt khác ta lại có $AEH = ADH = 90^0$ nên các điểm A, E, H, D nằm trên đường tròn tâm M. Như vậy hai đường tròn tâm M và tâm N cắt nhau tại D và E. Như vậy MN đi qua điểm chính giữa cung DE của đường tròn tâm N hay MN đi qua điểm K. Vậy MN và các đường phân giác của các góc $ABD;\ ACE$ đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 8. Chọn sáu điểm trên các cạnh của một tam giác đều ABC sao cho $A_1; A_2$ trên BC, $B_1; B_2$ trên CA, $C_1;\ C_2$ trên AB. Những điểm này là đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ với các cạnh bằng nhau.
Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng qui.

Lời giải

Bên trong tam giác đều ABC lấy điểm M sao cho tứ giác $C_1C_2A_1M$ là hình thoi. Khi đó $C_2A_1 = A_1M = MC_1$. Điều này dẫn đến tam giác A_1MA_2 đều. Nên $A_1M = A_2M$. Suy ra $MA_2B_1B_2$ cũng là hình thoi. Do đó $MA_2 = MB_2$. Từ đó $MA_1 = MA_2 = MB_2 = MC_1$. Như vậy tứ giác $A_1A_2B_2C_1$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $A_1C_1A_2 = \frac{1}{2}A_1MA_2 = 30^0$. Hoàn toàn tương tự ta được $C_1A_1B_2 = \frac{1}{2}C_1MB_2 = 30^0$.



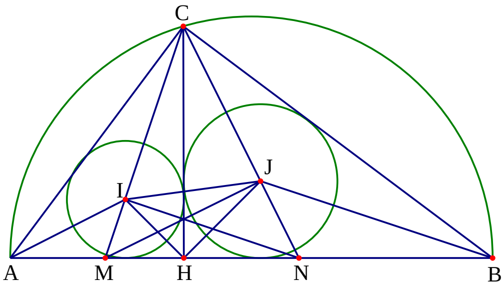
Trong tam giác đều ABC lấy các điểm M_1 và M_2 sao cho các tứ giác $B_2M_1C_1C_2$ và $B_1M_2B_2C_1$ là các hình thoi. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được hai tứ giác $A_1B_1B_2C_2$ và $A_2B_1C_1C_2$ nội tiếp. Từ đó ta được $A_1B_1C_2 = B_1A_1B_2 = B_1C_1A_2 = C_1B_1C_2 = 30^0$. Xét tam giác $A_1B_1C_1$ có $A_1B_2,\ B_1C_2,\ C_1A_2$ là các đường phân giác trong nên chúng đồng quy. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R\left(A \ne C,\ B \ne C\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI và CJ cắt AB lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh ba đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy ta đi chứng minh MJ, NI, CH là ba đường cao của tam giác CMN. Muốn vậy ta cần chứng minh được $CIN = CJM = 90^0$. Điều này sẽ được khẳng định khi ta chứng minh được các tứ giác CIHN và CMHJ nội tiếp đường tròn

Lời giải



Vì I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACH và BCH nên $ICH = \frac{1}{2}ACH$ và $JCH = \frac{1}{2}BCH$. Ta có

$$MCN = MCH + NCH = \frac{1}{2}\left(ACH + BCH\right) = 45^0$$

Lại có HI là đường phân giác của góc AHC nên suy ra $MHI = \frac{1}{2}AHC = \frac{1}{2}90^0 = 45^0$

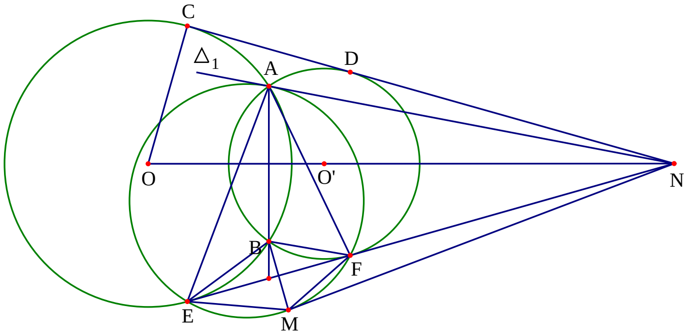
Từ đó ta được $MCN = MHI$ nên tứ giác CIHN nội tiếp nên suy ra được $CIN = CHN = 90^0$. Do đó ta được NI vuông góc với CM. Chứng minh tương tự ta được tứ giác CJHM nội tiếp suy ra $CJM = CHM = 90^0$ nên MJ vuông góc với CN. Trong tam giác CMN có các đường cao CH, MJ, NI chúng đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Giả sử CD và EF là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này $\left(C, E \in (O); D, F \in (O')\right)$ và điểm A gần CD hơn. Gọi Δ_1 là đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và Δ_2 là đường thẳng qua B tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng các đường thẳng Δ_1, Δ_2, CD, EF đồng quy.

Phân tích tìm lời giải

Gọi M là điểm đối xứng với B qua EF. Khi đó ta có $EMF = EBF$ nên $EMF + EAF = 180^0$ nên tứ giác MEAF nội tiếp đường tròn. Gọi N là giao điểm của các tiếp tuyến tại A, M của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEAF. Ta sẽ chứng minh các đường thẳng Δ_1, Δ_2, CD, EF. Muốn vậy ta cần chứng minh được ba điểm E, F, N thẳng hàng. Khi đó N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Do đó N thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB nên N thuộc đường thẳng OO′. Chứng minh tương tự ta có Δ_2 và CD cắt nhau tại một điểm N′ thuộc đường thẳng OO′. Do tính chất đối xứng CD và EF cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng OO′, do đó hai điểm N và N′ trùng nhau. Vậy các đường thẳng CD, EF, Δ_1 và Δ_2 đồng quy tại N.

Lời giải



Gọi M là điểm đối xứng với B qua EF. Khi đó ta có $EMF = EBF$. Mà ta có

$$\begin{aligned} EBF + EAF &= EBF + EAB + FAB \\ &= EBF + BEF + BFE = 180^0 \end{aligned}$$

Do đó ta được $EMF + EAF = 180^0$ nên tứ giác MEAF nội tiếp đường tròn. Gọi N là giao điểm của các tiếp tuyến tại A, M của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEAF.

Ta cần chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng. Thật vậy, gọi F′ là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEAF với NE. Khi đó dễ thấy hai tam giác NAE và NF′A đồng dạng nên $\frac{AE}{AF'} = \frac{NA}{NF'}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{ME}{MF'} = \frac{MN}{NF'} = \frac{NA}{NF'}$. Từ kết quả trên ta được $\frac{AE}{AF'} = \frac{ME}{MF'}$ nên $\frac{AF'}{MF'} = \frac{AE}{ME}$.

Gọi I là giao điểm của AB và EF, ta có $IE^2 = IA.IB = IF^2$ nên $IE = IF$

Ta lại có $\Delta IEB \backsim \Delta IAE$ nên ta được $\frac{EB}{EA} = \frac{IF}{IA} = \frac{IE}{IA}$. Tương tự ta có $\frac{BF}{AF} = \frac{IF}{IA}$ nên $\frac{EB}{EA} = \frac{BF}{AF}$.

Do vậy ta có $\frac{ME}{AE} = \frac{MF}{AF}$ hay $\frac{AE}{ME} = \frac{AF}{MF}$. Kết hợp với $\frac{AF'}{MF'} = \frac{AE}{ME}$ ta được hai điểm F và F′ trùng nhau. Do đó ba điểm N, E, F thẳng hàng. Ta có N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Do đó N thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra N thuộc đường thẳng OO′. Chứng minh tương tự ta có Δ_2 và CD cắt nhau tại một điểm N′ thuộc đường thẳng OO′. Do tính chất đối xứng CD và EF cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng OO′, do đó hai điểm N và N′ trùng nhau. Vậy các đường thẳng CD, EF, Δ_1 và Δ_2 đồng quy tại N.

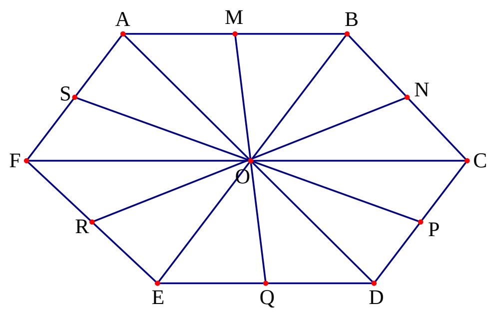
Ví dụ 11. Cho lục giác ABCDEF có các cặp cạnh đối diện song song với nhau. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NR, PS đồng quy.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy nếu lục giác ABCDEF có AD, BE, CF đồng quy tai một điểm O khi đó hiển nhiên đường thẳng MQ, NR, PS đồng quy. Để ý là khi AD, BE, CF không đồng quy thì chúng cắt nhau theo đôi một tạo thành một tam giác nằm trong lục giác. Khi đó gọi O là giao điểm của MQ và NR(điểm O nằm trong tam giác XYZ) và ta cần chứng minh PS đi qua điểm O. Chú ý đến các trung điểm ta được $S_{OQD} = S_{OQE}$ và $S_{XQD} = S_{XQE}$ nên $S_{OXE} = S_{OXD}$. Tương tự ta được $S_{OXA} = S_{OXB}$ nên $S_{OAD} = S_{OBE}$. Cũng tương tự như trên thì ta được $S_{OBE} = S_{OCF}$. Do đó nên ta được $S_{OAD} = S_{OCF}$. Lại để ý là khi điểm O không thuộc PS thì ta thấy $S_{OAD} \neq S_{OCF}$. Nên ta sử dụng phép phản chứng để chứng minh tiếp bài toán.

Lời giải

Ta xét các trường hợp có thể xẩy ra như sau:

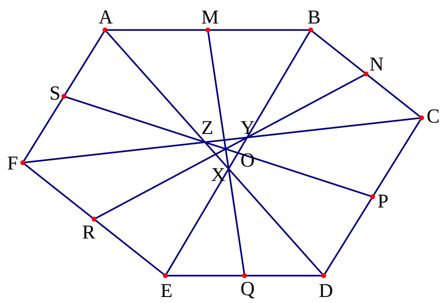


+ Trường hợp 1: Nếu AD, BE, CF đồng quy tại một điểm O. Khi đó theo định lí Talets ta có

$$\frac{OB}{OE} = \frac{AB}{ED} = \frac{2BM}{2EQ} = \frac{BM}{EQ}$$

Mặt khác ta có BM//EQ và B, O, E thẳng hàng nên suy ra M, O, Q hay MQ đi qua điểm O. Hoàn toàn tương tự ta cũng có NR, SP đi qua điểm O. Vậy MQ, NR, PS đồng quy tại O.

+ Trường hợp 2: Nếu AD, BE, CF không đồng quy. Khi đó chứng cắt nhau tạo thành tam giác XYZ.



Lập luận tương tự trường hợp 1 ta MQ, NR, PS lần lượt đi qua X, Y, Z. Gọi O là giao điểm của MQ và NR(điểm O nằm trong tam giác XYZ).

Ta có $S_{OQD} = S_{OQE}$ và $S_{XQD} = S_{XQE}$ nên ta suy ra được $S_{OXE} = S_{OXD}$. Tương tự ta được $S_{OXA} = S_{OXB}$ nên ta được $S_{OAD} = S_{OBE}$. Cũng tương tự ta chứng minh được $S_{OBE} = S_{OCF}$ nên ta được $S_{OAD} = S_{OCF}$

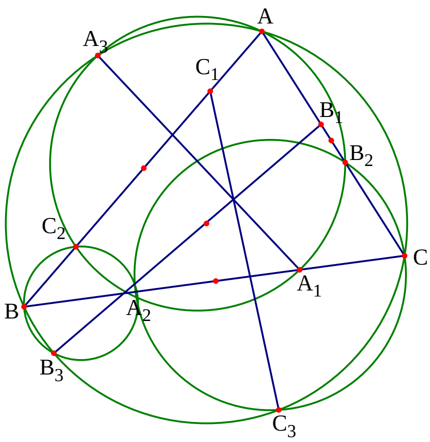
Giả sử điểm O không thuộc đường thẳng SZP, không mất tính tổng quát ta xem điểm A, O, C cùng nằm một phía so với SP. Khi đó ta được $S_{OASX} > S_{OFSZ}$ mà ta lại có $S_{ZAS} = S_{ZSF}$ nên suy ra $S_{OAZ} > S_{OFZ}$

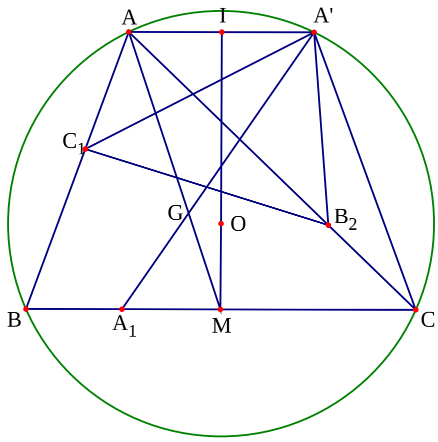
Tương tự ta cũng có $S_{PDZ} > S_{OPCZ}$ mà $S_{OPD} = S_{OCP}$ nên ta được $S_{ODZ} > S_{OCZ}$

Do đó ta được $S_{OAD} > S_{OCF}$, điều nay mâu thuẫn với $S_{OAD} = S_{OCF}$. Suy ra điểm O phải thuộc đường thẳng SP hay SP đi qua O. Vậy ba đường thẳng MQ, NR, PS đồng quy tại O.

Ví dụ 12. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C và các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp $\Delta AB_2C_2, \Delta BA_2C_2$ và ΔCA_2B_2 với đường tròn (O). Chứng minh rằng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Phân tích và lời giải





Ta sẽ chứng minh A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 cùng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC, A′ là điểm đối xứng với A qua trung trực của BC. Ta sẽ chứng minh A′ trùng với A_3. Thật vậy, gọi I là giao điểm của AA′ và trung trực của BC.

Ta có A, A' đối xứng nhau qua trung trực của BC nên $CA = BA', CA' = BA \Rightarrow \Delta CAA' = \Delta BA'A$. Suy ra $ACA' = ABA'$ nên ta được A′ thuộc đường tròn (O). Mà $\Delta ABB_1 \backsim \Delta ACC_1$ nên suy ra $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$. Do A, B và C_1, C_2 cùng đối xứng nhau qua trung điểm của AB nên $BC_2 = AC_1$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $B_2C = AB_1$.

Ta có $\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{BA'}{CA'}$. Mà ta lại có $C_2BA' = B_2CA'$ nên ta được $\Delta C_2BA' \backsim \Delta B_2CA'$

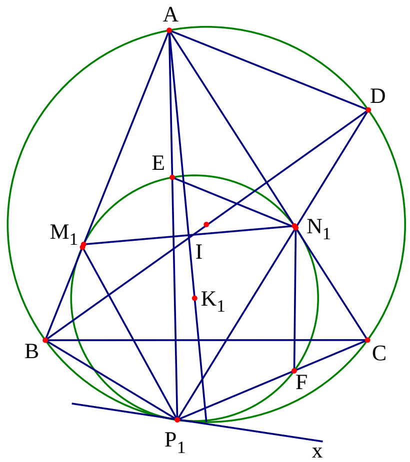
Từ đó suy ra $A'C_2B = A'B_2C \Rightarrow AC_2A' = AB_2A'$ nên tứ giác AC_2B_2A' là tứ giác nội tiếp. Suy ra $A_3 \equiv A'$. Gọi G là giao điểm của AM và A_1A_3. Lại có $AA_1 // MI$ và $AI // MA_1$ từ đó ta được tứ giác $AIMA_1$ là hình bình hành. Do đó $AI = MA_1 = \frac{1}{2}AA_3 \Rightarrow \frac{MA_1}{AA_3} = \frac{1}{2}$. Vì $MA_1 //$

AA_3 nên theo định lí Talets ta được $\frac{MG}{GA} = \frac{MA_1}{AA_3} = \frac{1}{2}$. Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC. Vậy A_1A_3 đi qua G. Tương tự B_1B_3, C_1C_3 đi qua G. Suy ra A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy tại G.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K_1) tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại M_1, N_1, P_1. Các điểm M_2, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 đượcxác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Phân tích và lời giải

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AP_1, CP_1 với đường tròn (K_1). Gọi D là giao điểm của N_1P_1 với đường tròn (O). Ta sẽ chứng minh D là điểm chính giữa cung nhỏ AC



Thật vậy, gọi P_1x là tiếp tuyến của đườngtròn (O) tại P_1, khi đó ta có

$NAE = CAP_1 = CAx = FP_1X = FN_1P_1$

Ta lại có tứ giác EN_1FP_1 nội tiếp nên $N_1EA = N_1FP_1$.

Từ đó ta được $\Delta AEN_1 \backsim \Delta N_1FP_1$ nên

$FP_1N_1 = AN_1E = AP_1N_1$

Do đó P_1N_1 là phân giác của AP_1C nên D là điểm chính giữa cung nhỏ AC

Từ đó ta suy ra BD là phân giác của góc ABC. Gọi I là giao điểm của M_1N_1 và BD. Khi đó ta suy ra được $IM_1P_1 = N_1M_1P_1 = N_1P_1x = DP_1x = DBP_1 = IBP_1$. Suy ra tứ giác IM_1BP_1 nên ta được $P_1IB = P_1M_1B$ mà ta lại có $P_1M_1B = P_1N_1M_1$. Do đó $P_1IB = P_1N_1M_1 \Rightarrow DIP_1 = DN_1I$ nên $\Delta DIP_1 \backsim \Delta DN_1I$ suy ra $\frac{DI}{DN_1} = \frac{DP_1}{DI} \Rightarrow DI^2 = DN_1.DP_1$. Ta cũng có $DAN_1 = CP_1N_1 = DP_1N_1$ nên $\Delta DAN_1 \backsim \Delta DP_1A$ suy ra $\frac{DA}{DP_1} = \frac{DN_1}{DA} \Rightarrow DA^2 = DN_1.DP_1$. Do đó ta được $AD = DI$ nên tam giác ADI cân tại D

Suy ra $DIA = DAI \Rightarrow ABI + IAB = DAN_1 + N_1AI \Rightarrow \frac{ABC}{2} + IAB = \frac{ABC}{2} + N_1AI$

Do đó ta được $IAB = N_1AI$ nên AI là phân giác của góc BAC. Vậy I là giao điểm hai đường phân giác trong của tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Dễ thấy

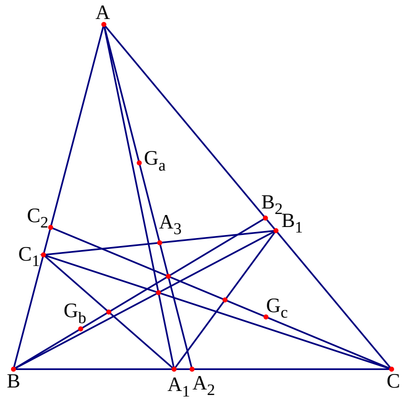
ΔAM_1N_1 cân tại A và AI là phân giác của góc BAC nên AI là đường trung tuyến của M_1N_1. Nên I là trung điểm của M_1N_1. Hoàn toàn tương tự ta cũng được I là trung điểm của M_2N_2, M_3N_3. Vậy các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC và các điểm $A_1; B_1; C_1$ lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi $G_a; G_b; G_c$ lần lượt là trọng tâm các tam giác AB_1C_1; BC_1A_1; CA_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng $AG_a; BG_b; CG_c$ đồng quy khi và chỉ khi AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy.

Phân tích và lời giải

Theo định lí Ceva thì ba đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{AC_1}{BC_1}.\frac{BA_1}{CA_1}.\frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$



Gọi giao điểm tương ứng của $AG_a; BG_b; CG_c$ với BC, CA, AB lần lượt là $A_2; B_2; C_2$. Khi đó ba đường thẳng $AG_a; BG_b; CG_c$ đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{AB_2}{CB_2} = 1.$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{CA_2}{BA_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{AB_2}{CB_2} = 1$$

Thật vậy, gọi A_3 là trung điểm của B_1C_1, gọi $h_1; h_2$ lần lượt là đường cao của các tam giác AA_2C và AA_3B_1 tương ứng hạ từ A_2; A_3. Khi đó ta có $\frac{S_{AA_2C}}{S_{AA_3B_1}} = \frac{h_1.AC}{h_2.AB_1} = \frac{AA_2.AC}{AA_3.AB_1}$. Tương tự ta cũng có $\frac{S_{AA_2B}}{S_{AA_3C_1}} = \frac{AA_2.AB}{AA_3.AC_1}$. Từ đó $\frac{S_{AA_2C}}{S_{AA_3B_1}} : \frac{S_{AA_2B}}{S_{AA_3C_1}} = \frac{AA_2.AC}{AA_3.AB_1} : \frac{AA_2.AB}{AA_3.AC_1}$ hay

$$\frac{S_{AA_2C}}{S_{AA_3B_1}}.\frac{S_{AA_3C_1}}{S_{AA_2B}} = \frac{AC}{AB}.\frac{AC_1}{AB_1}$$

Mặt khác do A_3 là trung điểm của B_1C_1 nên $S_{AA_3B_1} = S_{AA_3C_1}$. Từ đó suy ra $\frac{S_{AA_2C}}{S_{AA_2B}} = \frac{AC}{AB}.\frac{AC_1}{AB_1}$.

Mà ta cũng có $\frac{S_{AA_2C}}{S_{AA_2B}} = \frac{A_2C}{A_2B}$. Do đó ta được $\frac{A_2C}{A_2B} = \frac{AC}{AB}.\frac{AC_1}{AB_1}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $\frac{BC_2}{AC_2} = \frac{CB}{CA}.\frac{CB_1}{CA_1}$; $\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{BA}{BC}.\frac{BA_1}{BC_1}$

Nhân theo vế các đẳng thức trên thì ta được $\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{CA_2}{BA_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{AB_2}{CB_2} = 1$.

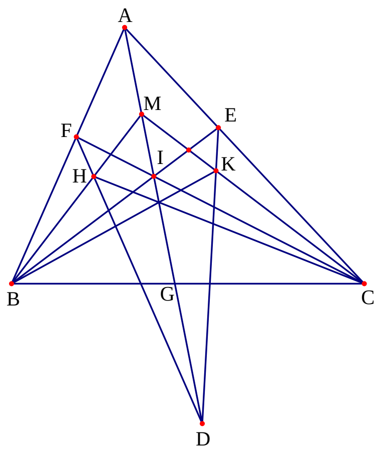
Suy ra các đường thẳng $AA_2; BB_2; CC_2$ đồng quy, điều này dẫn đến ba đường thẳng $AG_a; BG_b; CG_c$ đồng quy. Vậy các đường thẳng $AG_a; BG_b; CG_c$ đồng quy khi và chỉ khi AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì không thuộc các đường thẳng AB và AC. Trên đoan thẳng AD lấy điểm M(M khác A, D). Gọi I một điểm thuộc đoạn AD(I khác A, D và khác giao điểm của AD với BC). Gọi giao điểm của BI, CI lần lượt với AC, AB là E, F. Gọi giao điểm của DE, DF lần lượt với CM, BM là K, H. Chứng minh rằng các đường thẳng CM, AD, BK đồng quy.

Phân tích tìm lời giải

Trên cơ sở hình vẽ và giả thiết ta thấy có nhiều bộ ba điểm thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta sẽ lập được các đẳng thức về tỉ số như $\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}.\frac{HB}{HM}=1$ và $\frac{DM}{DA}.\frac{EA}{EC}.\frac{KC}{KM}=1$. Từ đó ta thu được $\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}$. Ta lại có ba đường thẳng AG, BE, CF đồng quy nên $\frac{GB}{GC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$. Từ đó ta rút ra được $\frac{GC}{GB}=\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}$ nên $\frac{GC}{GB}=\frac{KM}{KC}.\frac{HM}{HB}$ hay $\frac{GB}{GC}.\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}=1$. Mà theo định lí Ceva thì hiển nhiên các đường thẳng CM, AD, BK đồng quy.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của AD và BC. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMB với bộ ba điểm F, H, D thẳng hàng ta được $\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}.\frac{HB}{HM}=1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMC với bộ ba điểm K, K, D thẳng hàng ta được $\frac{DM}{DA}.\frac{EA}{EC}.\frac{KC}{KM}=1$. Từ đó ta được

$$\frac{\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}.\frac{HB}{HM}}{\frac{DM}{DA}.\frac{EA}{EC}.\frac{KC}{KM}}=1 \Rightarrow \frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}.$$

Ta lại có ba đường thẳng AG, BE, CF đồng quy nên theo định lí Ceva ta được $\frac{GB}{GC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$

Từ đó ta được $\frac{GC}{GB}=\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}$, kết hợp với hệ thức $\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}$

Suy ra $\frac{GC}{GB}=\frac{KM}{KC}.\frac{HM}{HB}$ hay ta được $\frac{GB}{GC}.\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}=1$.

Như vậy theo định lí Ceva thì các đường thẳng CH, BK, MG đồng quy.

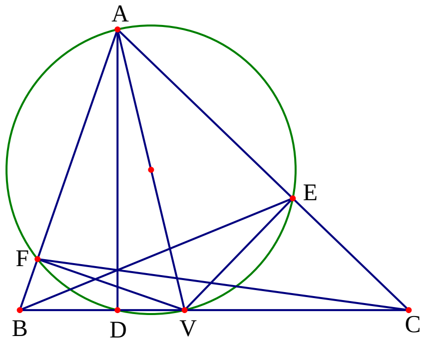
Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có $AB \neq AC$. Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại V. Gọi D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAV cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh AD, BE, CF đồng quy tại một điểm ta cần chỉ ra được $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$ hay ta cần chứng minh $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{FB}=\frac{EA}{FA}$. Chú ý là $EA=FA$ nên để kết thúc chứng minh ta cần phải chỉ ra được $\frac{DB}{DC}=\frac{FB}{EC}$

Lời giải

Ta có $ADV=90^0$ nên tam giác ADV nội tiếp đường tròn đường kính AV. Từ đó suy ra $AFV=AEV=90^0$ nên ta được $BFV=90^0$. Xét hai tam giác VFB và ABD có ABD là góc chung và $VFB=ADB$ nên $\Delta ADB \backsim \Delta VFB$. Từ đó ta được $\frac{DB}{FB}=\frac{AB}{VB} \Rightarrow \frac{FB}{DB}=\frac{VB}{AB}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\frac{EC}{DC}=\frac{VC}{AB}$.



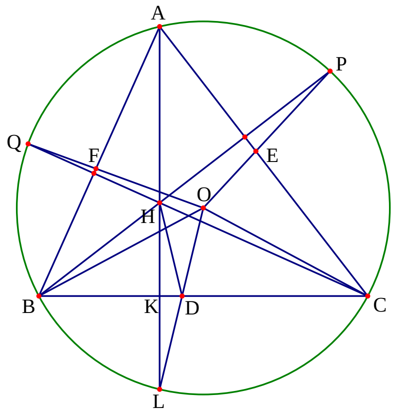
Lại có AV là đường phân giác của tam giác ABC nên ta được $\frac{VB}{AB}=\frac{VC}{AC}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{FB}{DB}=\frac{EC}{DC}$ hay ta được $\frac{DB}{DC}=\frac{FB}{EC}$. Xét hai tam giác AFV và AEV có $AFV=AEV=90^0$, AV chung và $FAV=EAV$. Từ đó $\Delta AFV=\Delta AEV$ nên suy ra $FA=EA$.

Do đó $\frac{DB}{DC}=\frac{FB}{EC} \Leftrightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{EC}{FB}=1$.

Từ đó ta được $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$. Như vậy theo định lí Ceva thì ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có H là trực tâm. Chứng minh rằng tồn tại các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $OD+HD=OE+HE=OF+HF$ và ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải



Gọi L là giao điểm của AH với đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của OL và BC. Nối D với H, khi đó ta chứng minh được $HD = DL$. Từ đó ta được

$OD + DL = OD + DH = OL = R$

Tương tự ta được $OE + EH = OF + HF = R$. Nối OB, OC và BL thì ta được $BOC = 2BAC$ và

$BOC = 180^0 - 2OBC$.

Do đó ta được

$2OBC = 180^0 - 2BAC \Rightarrow OBC = 90^0 - BAC$

Và ta lại có $CBL = CAL = 90^0 - ACB$. Từ đó ta được

$OBL = OBC + CBL = \left(90^0 - BAC\right) + \left(90^0 - ACB\right) = ABC$.

Vì $OB = L = R$ nên ta được $OLB = OBL = ABC$.

Do đó ta được $BLO = 180^0 - 2ABC \Rightarrow BOD = 180^0 - 2ABC$.

Như vậy trong tam giác BOD có $BOD = 180^0 - 2ABC$. Hoàn toàn tương tự ta được trong tam giác COD có $COD = 180^0 - 2ACB$. Theo định lí sin ta có $\dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{OD}{\sin OBD}$ và

$\dfrac{CD}{\sin COD} = \dfrac{OD}{\sin OCD}$

Mà ta có $OCD = OBD$ nên ta được $\dfrac{OD}{\sin OBD} = \dfrac{OD}{\sin OCD}$. Từ đó ta được $\dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{CD}{\sin COD}$

Hay ta được $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\sin BOD}{\sin COD} = \dfrac{\sin\left(180^0 - 2ABC\right)}{\sin\left(180^0 - 2ACB\right)}$

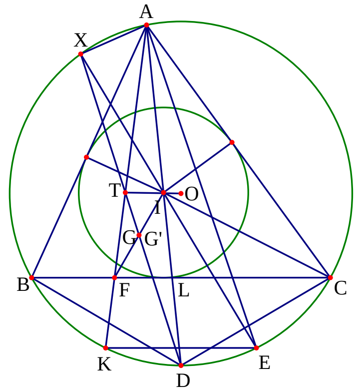
Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{\sin\left(180^0 - 2ACB\right)}{\sin\left(180^0 - 2BAC\right)}$; $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{\sin\left(180^0 - 2BAC\right)}{\sin\left(180^0 - 2ABC\right)}$.

Do đó ta được $\dfrac{BD}{CD}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{\sin\left(180^0 - 2ABC\right)}{\sin\left(180^0 - 2ACB\right)}.\dfrac{\sin\left(180^0 - 2ACB\right)}{\sin\left(180^0 - 2BAC\right)}.\dfrac{\sin\left(180^0 - 2BAC\right)}{\sin\left(180^0 - 2ABC\right)} = 1$.

Từ đó theo định lí Ceva ta được AD, BE, CF đồng quy.

Ví dụ 18. Cho tam giác nhọn ABC có I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D khác A. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh BC và cung BDC sao cho $BAF = CFE < \dfrac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng GD, EI cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải



Gọi giao điểm thứ hai của EI với đường tròn (O) là X, giao điểm của AD và BC là L. Gọi G′ và T lần lượt là giao điểm của DX cới IF và AF. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Ta có

$BAK = CAE$ nên ta được $BK = CE$ suy ra KE//BC.

Lại có $BAD = DAC$ suy ra $BAD - BAK = DAC - CAE$

hay ta được $KAD = DAE$ nên $IAT = IXT$. Từ đó suy ra tứ giác ITXA nội tiếp đường tròn. Do đó

$ITA = IXA = EXA = EKA$.

Từ đó ta được IT//KE//BC, nên suy ra $\dfrac{TF}{AT} = \dfrac{IL}{AI}$.

Vì CI là đường phân giác của tam giác ACL nên $\dfrac{IL}{AI} = \dfrac{CL}{AC}$.

Chứng minh được $\Delta CLD \backsim \Delta ACD$ nên ta được $\dfrac{CL}{AC} = \dfrac{DC}{AD}$.

Ta có $ICD = ICB + BCD = \dfrac{1}{2}\left(ACB + BAC\right) = \dfrac{1}{4}\text{sdABC};\ IDC = \dfrac{1}{2}\text{sdAC}$

Từ đó ta được $CID = 180^0 - ICD - IDC = 180^0 - \dfrac{1}{4}\text{sdABC} - \dfrac{1}{2}\text{sdAC} = \dfrac{1}{4}\text{sdACB}$

Từ đó suy ra $ICD = DIC$ nên tam giác ICD cân tại D, suy ra $DI = DC \Rightarrow \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{ID}{AD}$

Kết hợp các kết quả trên ta thu được $\dfrac{TF}{TA} = \dfrac{ID}{AD} \Rightarrow \dfrac{TF}{TA}.\dfrac{AD}{ID} = 1$.

Áp dung định lí Menelaus cho tam giác AIF với ba điểm T, D, G′ thẳng hàng ta được

$\dfrac{TF}{TA}.\dfrac{AD}{DI}.\dfrac{IG'}{G'F} = 1$.

Kết hợp với $\dfrac{TF}{TA}.\dfrac{AD}{ID} = 1$ ta được $\dfrac{G'I}{G'F} = 1 \Rightarrow G'I = G'F$ nên G′ là trung điểm của IF. Đo đó hai điểm G và G′ trùng nhau. Vậy GD, EI cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

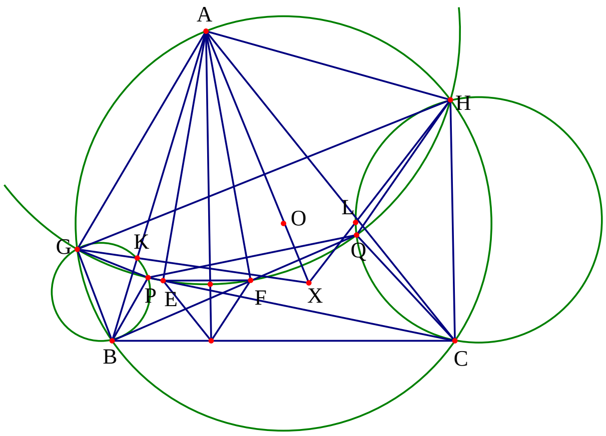
Nhận xét: *Bài toán này có đường giải quyết theo một hướng khác. Để chứng minh* $\dfrac{TF}{TA} = \dfrac{ID}{AD}$ *ta có thể quy về chứng minh* $\dfrac{TF + TA}{TA} = \dfrac{ID + AD}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{TA}{AD} = \dfrac{AF}{ID + AD}$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD. Đường tròn (A) bất kì có tâm A. Gọi E và F là hai điểm trên đường tròn (A) sao cho E, F đối xứng với nhau qua AD và tia AE nằm giữa hai tia AB, AF. Đường tròn (A) cắt đường tròn (O) tai G và H sao cho tia AB nằm giữa hai tia AG và AC. Giao điểm của CE, BF với đường tròn (O) lần lượt là P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau tại một điểm trên AO.

Phân tích tìm lời giải

Gọi X là giao điểm của GK và HL. Dễ thấy AG và AH là bán kính đường tròn tâm A nên ta được $AG = AH$, đồng thời G và H thuộc đường tròn (O) nên ta có $OG = OH$ từ đó suy ra AO là đường trung trực của GH. Ta có EF//BC nên ta được $EFB = FBC$. Lại có $EPQ = EFB$ do đó ta được $QPE = FBC$ nên tứ giác PQCB nội tiếp. Lại có $GHC = 180^0 - GBC$ và $GHE = GFE$ nên $ECH = BGF$. Do tứ giác GPEH nội tiếp nên $HGP = HEC$, mà $PGK = PBK$ từ đó $HGX = HEC - \left(GBF - GBA - PBF\right)$. Tương tự $GHX = GFB - \left(HCE - HCA - QCE\right)$. Như vậy ta cần chỉ ra $HEC - GBF = GFB - ECH$ thì ta sẽ có $HGX = GHX$ và như vậy $HX = GX$ hay X thuộc đừng trung trực của HG hay X thuộc OA, điều này có nghĩa là GK và HL cắt nhau tại X trên AO.

Lời giải



Gọi X là giao điểm của GK và HL. Ta cần chứng minh X thuộc OA.

Thật vậy, dễ thấy AG và AH là bán kính đường tròn tâm A nên ta được $AG = AH$, đồng thời G và H thuộc đường tròn (O) nên ta có $OG = OH$ từ đó suy ra AO là đường trung trực của GH. Ta có EF//BC nên ta được $EFB = FBC$. Mà ta có tứ giác PEFQ nội tiếp đường tròn tâm A nên ta lại có $EPQ = EFB$. Do đó ta được $QPE = FBC$, từ đó suy ra tứ giác PQCB nội tiếp đường tròn.

Do tứ giác GBCH nội tiếp nên ta lại có $GHC = 180^0 - GBC$. Lại có $GHE = GFE$ (hai góc nội tiếp của đường tròn tâm A). Ta có biến đổi góc sau

$$\begin{aligned} ECH &= GHC - GHE = 180^0 - GBC - GHE = 180^0 - GBP - PBC - GFE \\ &= BGP + GPB - \left(180^0 - BPC - BCP\right) + 180^0 - GPE = BGP + FEC \\ &= BGP + PGF = BGF \end{aligned}$$

Do tứ giác GPEH nội tiếp nên $HGP = HEC$, mà lại có $PGK = PBK = \left(GBF - GBA - PBF\right)$

Từ đó ta được $HGX = HGP - PGK = HEC - PBK = HEC - \left(GBF - GBA - PBF\right)$ (1)

Hoàn toàn tương tự ta được $GHX = GFB - \left(HCE - HCA - QCE\right)$ (2)

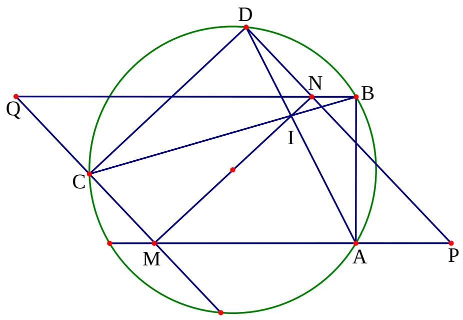
Lại có $GBA = HCA,\ PBF = QCE$ và $BGF = CHE$ nên ta được $GBF + GFB = HEC + EHC$

Hay ta được $HEC - GBF = GFB - ECH$ (3)

Từ (1), (2) và (3) nên ta được $HGX = GHX$ nên ta được $HX = GX$. Từ đó suy ra X thuộc đừng trung trực của HG hay X thuộc OA. Vậy GK và HL cắt nhau tại một điểm trên AO.

Ví dụ 20. Cho một đường tròn với hai dây AB và CD không song song. Đường vuông góc với AB kẻ từ A cắt đường vuông góc với CD kẻ từ C và từ D lần lượt tại M và P. Đường vuông góc với AB kẻ từ B cắt đường vuông góc với CD kẻ từ C và từ D lần lượt tại Q và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, MN đồng quy và các đường thẳng AC, BD, PQ đồng quy.

Lời giải



Gọi giao điểm của MN với BC và AD lần lượt là I và J. Ta có:

$$\frac{MI}{IN} = \frac{S_{MBC}}{S_{NBC}} = \frac{\frac{1}{2}MC.BC.\sin MCB}{\frac{1}{2}NB.BC.\sin NBC} = \frac{MC.\cos BCD}{NB.\cos ABC}$$

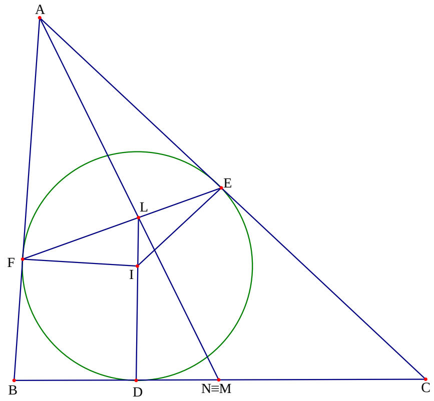
Tương tự ta có $\frac{MJ}{JN} = \frac{AM.\cos BAD}{ND.\cos ADC}$

Nhưng do $BCD = BAD,\ ABC = ADC \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta DNB$ nên $\frac{AM}{ND} = \frac{MC}{NB}$ suy ra $\frac{MI}{IN} = \frac{MJ}{JN}$ hay I và J trùng nhau. Do đó ta được AD, BC, MN đồng quy. Tương tự ta được AC, BD, PQ đồng quy

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DI, EF đồng quy tại một điểm.

Phân tích và lời giải

Để chứng minh AM, EF, ID đồng quy ta gọi L, N lần lượt là giao điểm của ID với EF và của AL với BC và chứng minh hai điểm M và N trùng nhau, tức N là trung điểm BC. Trong tam giác ABC ta có



$$\frac{NB}{NC}=\frac{S_{ABN}}{S_{ACN}}=\frac{\frac{1}{2}.AB.AN.\sin BAN}{\frac{1}{2}.AC.AN.\sin CAN}=\frac{AB}{AC}.\frac{\sin BAN}{\sin CAN}$$

Trong tam giác AEF ta có

$$\frac{\sin BAN}{\sin CAN}=\frac{2S_{AFL}}{AF.AL}:\frac{2S_{AEL}}{AE.AL}=\frac{S_{AFL}}{S_{AEL}}=\frac{FL}{EL}$$

Trong tam giác IEF ta có $\frac{FL}{EL}=\frac{S_{FIL}}{S_{EIL}}=\frac{\frac{1}{2}.IF.IL.\sin FIL}{\frac{1}{2}.IE.IL.\sin EIL}=\frac{\sin FIL}{\sin EIL}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}$

Từ đó ta có được $\frac{NB}{NC}=1$ nên suy ra N là trung điểm của BC hay hai điểm M và N trùng nhau. Vậy các đường thẳng AM, EF, ID đồng quy.

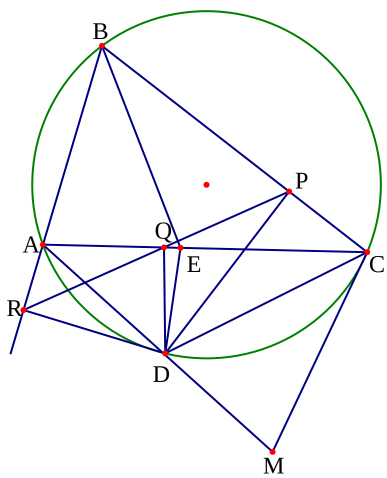
Ví dụ 22. Bài toán . Cho ADBC là tứ giác nội tiếp được được. Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng $PQ=QR$ khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc ABC và ADC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC

Đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2003

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $AQR=CQP$.

Thật vậy, dễ dàng nhận thấy các tứ giác AQRC, CDPQ và BPDR nội tiếp được. Do đó ta có $AQR=ADR$ và $CQP=CDP$. Mà ta lại có $RDP=ADC$. Do đó ta được $ADR=CDP$. Từ đó ta được $AQR=CQP$



+ Điều kiện cần:Khi các đường phân giác của các góc ABC và ADC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC. Ta cần chứng minh thì $PQ=QR$.

Thật vậy, gọi E là giao điểm trên đường thẳng AC

của hai đường phân giác của các góc ABC và ADC.

Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $AM = AD$. Áp dụng tính chất đường phân giác cho hai tam giác ABC và ADC ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EC}$. Từ đó ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DC}$.

Mặt khác do tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có $ABC = MDC$. Từ đó suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta MDC$

nên ta được $ABC = MCD$ và $CAB = CMD$. Lại có tứ giác AQDR nội tiếp nên $DQR = DAQ$

và $RDQ = CMD = CAB$. Từ đó $\Delta DRQ \backsim \Delta MAC$ suy ra $\frac{QR}{AC} = \frac{DR}{MA} = \frac{DR}{2AD}$

Dễ thấy $\Delta ADC \backsim \Delta APR$ nên $\frac{RP}{AC} = \frac{DR}{DA}$. Từ đó ta được

$\frac{QR}{AC} = \frac{PR}{2AC} \Rightarrow QR = \frac{1}{2}PR \Rightarrow PQ = QR$

+ Điều kiện đủ: Khi $PQ = QR$, ta cần chứng minh các đường phân giác của các góc ABC

và ADC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.

Thật vậy, gọi E là giao điểm của đường phân giác của góc ADC với AC, ta đi chứng minh DE cũng là đường phân giác của góc ABC. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{EC} = \frac{DM}{DC}$.

Dễ thấy $\Delta ADC \backsim \Delta APR$ nên ta được $\frac{RP}{AC} = \frac{DR}{DA}$.

Mà $PQ = QR$ nên ta được $\frac{2QR}{AC} = \frac{2DR}{2AD} \Rightarrow \frac{QR}{AC} = \frac{DR}{2AD} = \frac{DR}{MA}$ suy ra $\Delta DRQ \backsim \Delta MAC$

Suy ra $RDQ = CMD = CAB$, lại có $ABC = CDM$ nên $\Delta ABC \backsim \Delta MDC$

Do đó ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DC}$. Từ đó suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{EA}{EC}$. Do đó BE là phân giác của góc ABC.

Ví dụ 23. Cho tam giác nhọn ABC và lấy các điểm P, Q nằm trên cạnh BC sao cho $PAB = BCA$ và $CAQ = ABC$. Các điểm M và N lần lượt trên AP và AQ sao cho P là trung điểm của AM và Q là trung điểm của AN. Chứng minh rằng giao điểm của BM và CN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

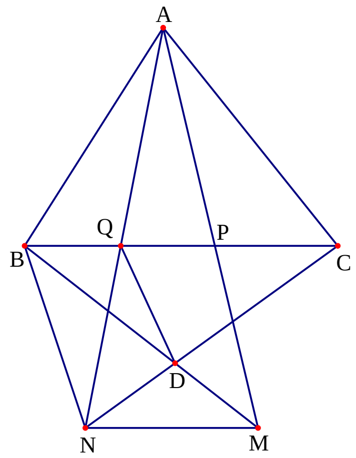
Trích đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2014

Phân tích tìm lời giải

Gọi giao điểm của MB và CN là D. Để chứng minh giao điểm của BM và CN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta đi chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn. Muốn vậy ta cần chứng minh được tứ giác BQDN nội tiếp đường tròn để có $BAC = BQN = BDN$ hoặc $BDC + A = 180^0$. Với hai kết quả trên ta đều có tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Cách 1: Gọi giao điểm của MB và CN là D. ta cần chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn. Thật vậy, theo giả thiết ta có $AP = PM$ và $AQ = QN$ do đó ta được MN//PQ. Cũng theo giả thiết $PAB = BCA$ và $CAQ = ABC$ ta có $APQ = AQP = A$



Mặt khác dễ dàng chứng minh được $\Delta ABP \backsim \Delta CAQ$

Suy ra $\frac{PB}{PA} = \frac{QA}{QC} \Rightarrow \frac{PB}{PM} = \frac{QA}{QC}$, do đó $\Delta BPM \backsim \Delta NQC$ nên $CNQ = MBP$. Do đó tứ giác BQDN nội tiếp đường tròn, suy ra $BAC = BQN = BDN$. Vậy tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Do $CAQ = ABC$ nên ta được $\Delta ABC \backsim \Delta QAC$, suy ra $\frac{AB}{AQ} = \frac{BC}{AC}$.

Gọi E và F lần lượt là điểm nằm trên tia đối của tia AB và AC sao cho $AE = AB,\ AF = AC$.

Do $\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AQ} = \frac{2AB}{2AQ} = \frac{EB}{NA}$ nên ta được $\Delta EBC \backsim \Delta NAC$, do đó ta được $BEC = ANC$

Tương tự ta được $CFB = AMB$.Mặt khác ta thấy tứ giác BFEC là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của BC thì ta có AI//CE//FB. Suy ra $BAC = BAI + IAC = BEC + CFB$.

Do đó ta được $DNM = ANM - ANC = A - BEC$. Tương tự ta được $DMN = A - CFB$.

Ta có $DNM + DMN = 2A - BEC - BFC = A$, suy ra $BDC + A = 180^0$

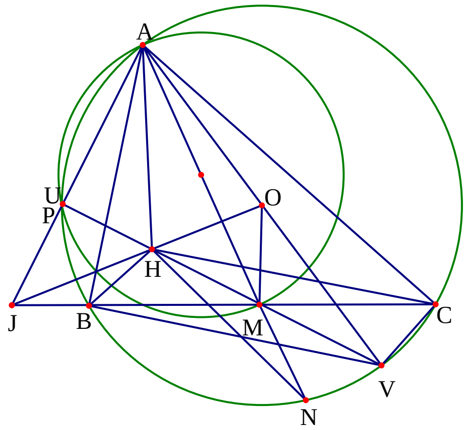
Do đó tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC có $AB \neq AC$ và H là trực tâm. Ta kí hiệu (O) là đường trong ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM cắt đường trong (O) tại điểm thứ hai là N. Đường tròn đường kính AM cắt đường tròn (O) tại P. Chướng minh rằng các đường thẳng AP, BC, OH đồng quy khi và chỉ khi $HA = HN$

Trích đề thi chọn đội tuyển IMO Pháp 2012

Lời giải

Trước hết ta sẽ chứng minh ba điểm P, H, M thẳng hàng.



Thật vậy, Gọi V là điểm đối xứng với A qua O. Khi đó ta có $BH \perp AC$ và $VC \perp AC$. Từ đó suy ra BH//VC. Hoàn toàn tương tự ta được CH//VB nên tứ giác BHCV là hình bình hành. Do M là trung điểm của BC nên M là ta có HV nhận M là trung điểm.

Do P thuộc đường tròn (O) nên ta được

$APV = 90^0$

Gọi U là giao điểm thứ hai của HV với đường tròn (O) khi đó ta có $AUV = ABV = 90^0$. Suy ra hai điểm U và P trùng nhau. Do đó ba điểm P, M, H thẳng hàng.

Gọi J là giao điểm của AP và BC. Do AH và MP là hai đường cao của tam giác AIM, do đó H là trực tâm của tam giác AJM. Từ đó suy ra OH đi qua J khi và chỉ khi OH vuông góc với AN hay $OA = ON$.

Điều này chỉ ra rằng $OH \perp AN$ khi và chỉ khi OH là đường trung trực của AN, có nghĩa là $HA = AN$.

Từ đó ta có điều khải chứng minh.

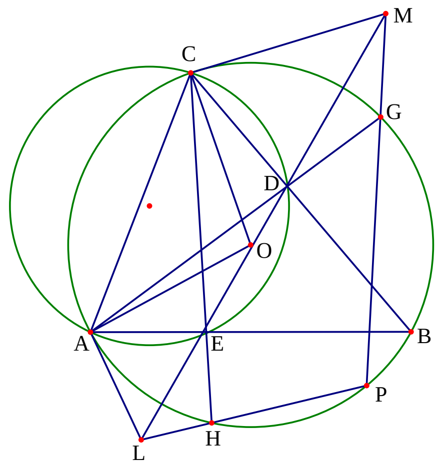
Ví dụ 25. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường tròn đi qua A và C cắt cạnh BC và BA lần lượt tại D và E. Các đường thẳng AD và CE cắt đường tròn lần thứ hai tại G và H tương ứng. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và C cắt DE lần lượt tại L và M. Chứng minh rằng các đường thẳng LH và MG cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (O).

Phân tích tìm lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng MG với đường tròn (O) là P khác G. Chú ý rằng tứ giác BPED nội tiếp đường tròn nên P là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BDE. Do đó để chứng minh các đường thẳng LH và MG cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (O) ta sẽ chứng minh LH cũng đi qua P. Muốn vậy ta gọi Q là giao điểm của đường thẳng LH với đường tròn (O) và ta cần chứng minh Q là giao điểm tứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và BDE.

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng MG với đường tròn (O) là P khác G. Do $MCD = CAE$ và $MDC = CAE$ nên ta được $MCD = MDC$, suy ra tam giác MCD cân tại M. Do đó ta được $MC = MD$.



Vì MC là tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) nên ta được $MC^2 = MD^2 = MG.MP$

Suy ra MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DGP. Từ đó ta được $DGP = EDP$.

Gọi (O′)là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Khi đó

+ Nếu B và P trùng nhau thì với $BGD = BDE$ ta được hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc trong tại B.

+ Nếu B và P khác nhau, khi đó ta có hai trường hợp sau

- Trường hợp P nằm cùng phía với G so với đường thẳng BC, khi đó ta được

$EDP + ABP = 180^0$ Mà ta có $DGP + ABP = 180^0$ nên tứ giác BPED nội tiếp đường tròn.

Từ đó suy ra P là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O′)(khác D và khác E)

- Trường hợp P nằm khác phía với G so với đường thẳng BC, khi đó ta có

$$EDP = DPG = AGP = ABP = EBP$$

Suy ra tứ giác PBDE nội tiếp đường tròn nên P cũng là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O′)

Hoàn toàn tương tự ta gọi Q là giao điểm của đường thẳng LH với đường tròn (O). ta cũng chứng minh được Q là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O′) (khác D và khác E). Do đó hai điểm P và Q trùng nhau,

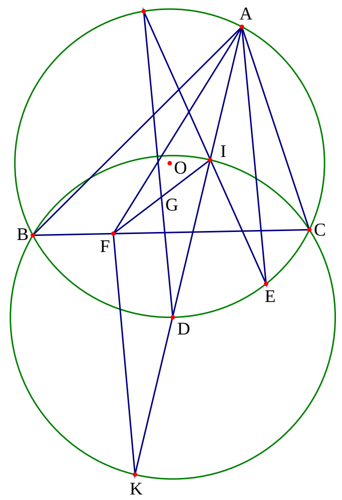
Vậy hai đường thẳng LH và MG cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (O).

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC với I là tâm nội tiếp và (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai là D (khác A). Gọi E là một điểm trên cung BDC của đường tròn (O) và F là một điểm nằm trên đoạn BC sao cho $BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$. Chứng minh rằng đường thẳng EI và DG cùng đi qua một điểm trên nằm trên (O).

Trích đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2010

Phân tích và lời giải

Gọi K là giao điểm của tia AD với đường tròn tâm D, bán kính DI. Do D là giao điểm của phân giác góc BAC với (O) nên D chính là trung điểm cung BC. Dễ thấy khi đó $DI = DB = DC$.



Suy ra bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc (D) và D là trung điểm IK. Theo giả thiết vì G là trung điểm IF nên DG là đường trung bình của tam giác IFK. Nên ta được GD // FK $\Rightarrow IDG = IKF$. Ta sẽ chứng minh $\Delta AEI \backsim \Delta AKF$.

Thật vậy, do $BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$ và $ABF = AEC$ nên suy ra $\Delta ABF \backsim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$.

Hơn nữa lại có $ABI = IBC = AKC$ và $IAB = IAC$ nên $\Delta ABI \backsim \Delta AKC \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AI}{AC}$.

So sánh hai đẳng thức ở trên ta được $AE.AF = AB.AC = AI.AK \Rightarrow \frac{AE}{AI} = \frac{AK}{AF}$.

Mặt khác $IAE = IAC - CAE = IAB - BAF = IAF$ nên $\Delta AEI \backsim \Delta AKF \Rightarrow IEA = IKF$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $IDG = IEA \Rightarrow ADG = AEI$, tức là các góc này cùng chắn một cung trên đường tròn (O) đã cho. Từ đó suy ra các đường thẳng EI và DG cùng đi qua một điểm nằm trên (O).

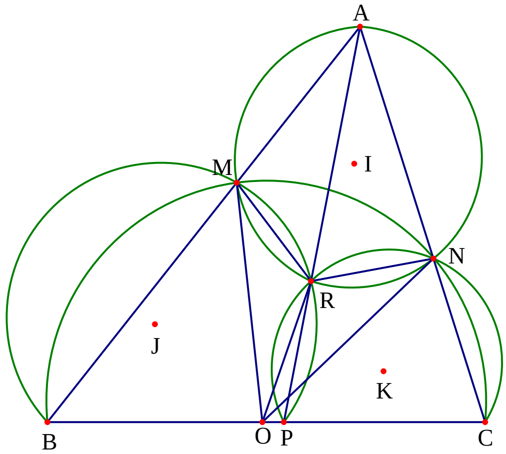
Ví dụ 27. Cho tam giác ABC với các góc nhọn và $AB \neq AC$. Đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Phân giác trong của góc BAC và MON gặp nhau tại R. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác BMR và CNR có một điểm chung nằm trên BC

Trích đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2004

Lời giải

Gọi J, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMR, CNR. Với đường tròn tâm O ta có $MNA = MBC$ (cùng chắn cung MC). Tam giác CON cân tại O nên ta được $ONC = OCN$, nên ta được $ONM = BAC$. Điều này chứng tỏ ON là tiếp tuyến của đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác AMN. Hoàn toàn tương tự ta được OM là tiếp tuyến với đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác AMN

Từ đó suy ra $OM = ON$ nên tam giác MON cân. Theo giả thiết OR là phân giác MON nên nó là trung trực của MN. Do đó ta được tam giác MRN cân, suy ra MR, NR là hai đường phân giác khác của MON.



Điều này dẫn đến R là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MON và R cũng là điểm chính giữa cung MN thuộc đường tròn tâm I. Hai đường tròn tâm J và K ngoại tiếp với hai tam giác BMR và CNR có điểm chung thứ hai là P.

Ta có AMB là cát tuyến chung của hai đường tròn tâm J và O, ANC là cát tuyến chung của hai đường tròn tâm K và O, nên ARP là cát tuyến chung của hai đường tròn tâm J và K. Vậy A, R, P thẳng hàng. Do đó các tứ giác PRMB và PRNC nội tiếp. Từ đó ta được

$$RPB + RMB = RPB + ABC + \frac{1}{2}BAC = 180^0$$

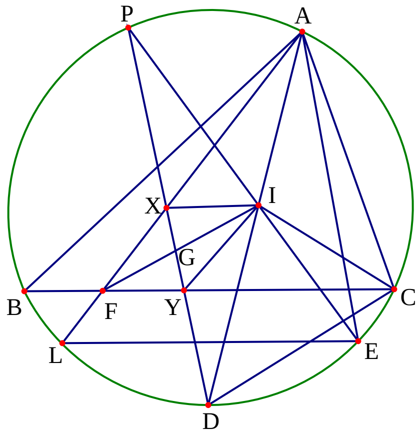
Và $RPC + RNC = RPC + ACB + \frac{1}{2}BAC = 180^0$. Từ đó ta được $BPC = RPB + RPC = 180^o$. Do đó P phải nằm trên BC. Vậy hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMR và CNR có một điểm chung trên BC

Ví dụ 28. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và Γ là đường tròn ngoại tiếp của nó. Đường thẳng AI lại cắt Γ tại D. Lấy điểm E trên cung BDC và F trên cạnh BC sao cho $BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm của IF. Chứng minh rằng các đường thẳng DG và EI cắt nhau tại một điểm trên Γ

Trích đề thi Olympic Toán Quốc tế - IMO 2010

Lời giải

Gọi giao điểm của EI với đường tròn Γ là P. Ta có thể chứng minh DP đi qua trung điểm G của FI.



Do $IPX = IAX$ nên tứ giác XPAI nội tiếp, suy ra $AXI = API = ALE = AFC$. Từ đó suy ra XI song song với BC. Ta có $DIC = DAC + ACI = DCB + BCI = DCI$ nên ta được $DI = DC = DB$. Nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Từ đó $\Delta DBP \backsim \Delta DYB$ nên suy ra

$$\frac{DB}{DY} = \frac{DP}{DB}$$

Từ đó suy ra $\frac{DI}{DY} = \frac{DP}{DI}$, nên ta được $\Delta DIP \backsim \Delta DYI$

Suy ra $DIY = DPI = DAF$ nên IY song song với XP. Từ các điều trên suy ra FXIY là hình bình hành nên hai đường chéo FI và XY cắt nhau tại trung điểm G. Vậy DG và EI cắt nhau tại một điểm trên Γ.

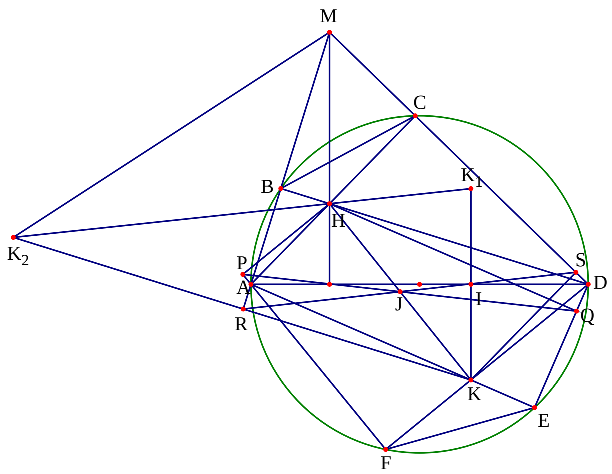
Ví dụ 29. Cho lục giác ABCDEF có $BC = EF$ và các đỉnh nằm trên đường tròn đường kính AD. Gọi H là giao điểm của AC với BD, K là giao điểm của AE với DE. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AF, DE; R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên AB, CD. Chứng minh rằng RS, PQ, HK đồng quy.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AB và CD. Vẽ KI vuông góc với AD tại I. Do $BC = EF$ và AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác ABCDEF nên được $BHC = AKD$. Mà ta lại có $BHC + BMC = 180^0$ nên suy ra $AKD + BMC = 180^0$. Do đó tứ giác MAKD nội tiếp đường tròn.

Giả sử $MAK \geq MDK$. Do các tứ giác AIKR, DSIK. AMDK nội tiếp đường tròn nên ta được

$$AIR = AKM = MAK - 90^0$$
$$= 90^0 - MDK = DKS = DIS$$



Từ đó suy ra ba điểm R, I, S thẳng hang.

Gọi K_1; K_2 lần lượt là điểm đối xứng với K qua AB, AD. Vì $AK_1M = AKM = ADM$ và

$ADM + AHM = 180^0$ nên suy ra

$AK_1M + AHM = 180^0$.

Do đó tứ giác $AHMK_1$ nội tiếp đường tròn. Suy ra $AHK_1 = AMK_1 = AMK$.

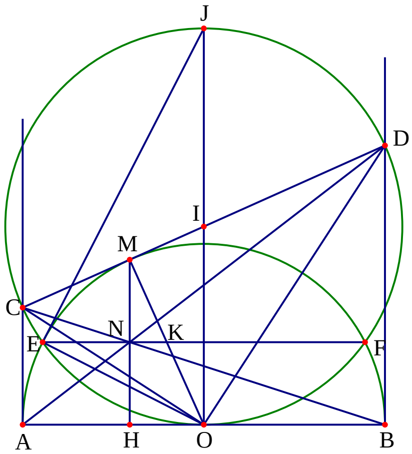
Hoàn toàn tương tự ta có tứ giác AHK_2D nội tiếp nên $DHK_2 = DAK_2 = DAK = DMK$

Từ đó ta được $AHK_1 + DHK_2 + AHD = AMK + DMK + AKD = AMD + AHD = 180^0$

Từ đó suy ra ba điểm $K_1; H; K_2$ thẳng hàng. Mà RI là đường trung bình của tam giác KK_1K_2 nên RS đi qua trung điểm J của HK. Tương tự PQ cũng đi qua trung điểm J. Do vậy RS, PQ, HK đồng quy.

Ví dụ 30. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm M trên nửa đường tròn(M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm M vẽ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD cắt đường tròn (O) tại E và F. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, EF đồng quy.

Lời giải



Dễ thấy AC//BD. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AC = CM; BD = DM$ và $COD = 90^0$. Gọi I là trung điểm của CD, N là giao điểm của AC và BC, H là giao điểm của MN và AB. Gọi K, S lần lượt là giao điểm của EF với OM, OI.

Theo định lí Talets ta có $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CM}{MD}$

Trong tam giác CBD có $\frac{CN}{NB} = \frac{CM}{MD}$ nên theo định lí Talets đảo ta suy ra MN//BD. Do đó ta được MN//AC//BD. Từ đó ta được

$\frac{MN}{AC} = \frac{DM}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{NH}{AC}$, suy ra $MN = NH$

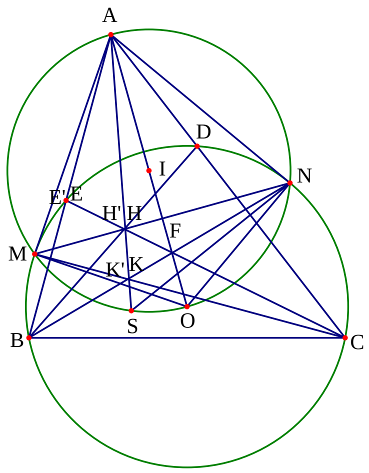
Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD là đường tròn (I) đường kính CD. Vẽ đường kính OJ của đường tròn (I). Vì đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại E, F nên OI là đường trung trực của EF. Từ đó ta được OI vuông góc với EF nên EF//AB. Tam giác EOJ vuông tại E có ES là đường cao nên $OS.OJ = OE^2$. Do đó ta được $2OS.OI = OM^2 \Rightarrow OS.OI = \frac{1}{2}OM^2$. Dễ thấy

$\Delta OSK \backsim \Delta OMI$ nên $\frac{OS}{OM} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OS.OI = OM.OK$. Từ đó $OM.OK = \frac{1}{2}OM^2 \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OM$ hay

K là trung điểm của OM. Do đó NK là đường trung bình của tam giác MHO nên KN//AB. Mà ta lại có EF//AB nên EF đi qua N. Vậy các đường thẳng AD, BC, EF đồng quy tại N.

Ví dụ 31. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn(O; R). Vẽ các cát tuyến AEB, ADC với đường tròn (O)(các điểm B, C, D, E thuộc đường tròn). Gọi H là giao điểm của BD và CE. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O)(M, N là các tiếp điểm) trong đó B và M nằm cung nửa mặt phẳng bờ AH. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BN, CM đồng quy.

Lời giải



Gọi H′ là giao điểm của giao điểm của MN và BD, E′ là giao điểm của CD′ và đường trong (O). Ta có $AMO = ANO = 90^0$ nên tứ giác AMON nội tiếp đường tròn đường kính AH. Gọi I là tâm của đường tròn đó. Gọi S là giao điểm của AH′ với đường tròn (I). Khi đó

$H'E.H'C = H'M.H'N = H'A.H'S$

Từ đó suy ra tứ giác AE′SC nội tiếp đường tròn, do đó ta được $AE'C = ASC$. Gọi F là giao điểm của AO và MN. Khi đó dễ dàng chứng minh được

$AH'.AS = AF.AO = AN^2 = AC.AD$

Từ đó suy ra tứ giác H′SCD nội tiếp đường tròn, do đó ta được $H'SC + H'DC = 180^0$. Mà ta có $BE'C = H'DC$. Từ đó ta được $AE'C + BE'C = 180^0$

Từ đó suy ra ba điểm A, E′, B thẳng hang nên hai điểm E và E′ trùng nhau, hai điểm H và H′ trùng nhau.

Như vậy ba điểm M, H, N thẳng hang. Gọi K′ là giao điểm của AH và CM.

Xét đường tròn (I) có $ASN = MNA$ và trong đường tròn (O) có $MCN = MNA$

Do đó ta được $ASN = MCN$ suy ra tứ giác K′SCN nội tiếp. Từ đó ta được

$K'CN + K'SN = 180^0$

Ta chứng minh được $HB.HD = HM.HN = HA.HS$ nên suy ra tứ giác ABSD nội tiếp đường tròn.

Do đó suy ra $ABD = ASD$. Trong đường tròn (O) có $ABD = HCD$.

Suy ra $ASD = HCD$ nên tứ giác SHDC nội tiếp đường tròn. Do đó $HSC + HDC = 180^0$.

Mà ta lại có $\widehat{HDC} = \widehat{BNC}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{K'NC} = \widehat{BNC}$, suy ra hai tia NK' và NB trùng nhau hay ba điểm B, K', N thẳng hang. Từ đó suy ra hai điểm K và K' trùng nhau.

Như vậy ba điểm A, K, S thẳng hang nên suy ra AH, BN, CM đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 32. Cho tam giác ABC có AH, BM, CD lần lượt là đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác của tam giác. Biết $\sin\widehat{BAC} = \cos\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB}$. Chứng minh rằng AH, BM, CD đồng quy.

Lời giải

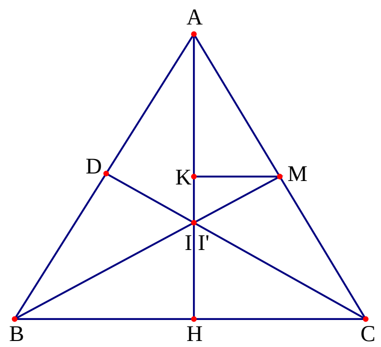
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$. Trong tam giác vuông ABH có $AH = AB.\sin\widehat{ABC}$ nên ta được $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC}$. Ta lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$. Do đó $\sin\widehat{BAC} = \frac{AH.BC}{AB.AC}$.

Trong tam giác vuông AHB có $\cos\widehat{ABC} = \frac{BH}{AB}$ và trong tam giác vuông ACH có

$$\tan\widehat{ACB} = \frac{AH}{CH}.$$

Từ giả thiết $\sin\widehat{BAC} = \cos\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB}$ ta suy ra được

$$\frac{AH.BC}{AB.AC} = \frac{AH}{AB}.\frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}.$$



Gọi I là giao điểm của AH và BM. Vẽ MK vuông góc với AH tại K.. Trong tam giác AHC có $MA = MC$ và MK//HC nên ta được $AK = KH$ nên KM là đường trung bình của tam giác AHC, do đó $HC = 2MK$.

Từ đó ta được $\frac{BC}{2CM} = \frac{BH}{2MK} \Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{BH}{MK}$.

Cũng do MK//HC nên ta được $\frac{BH}{MK} = \frac{BI}{IM}$. Do đó ta được $\frac{BC}{CM} = \frac{BI}{MI}$.

Gọi I' là giao điểm của BM và CD. Áp dụng tính chất đường phân giác cho tam giác BCM ta được

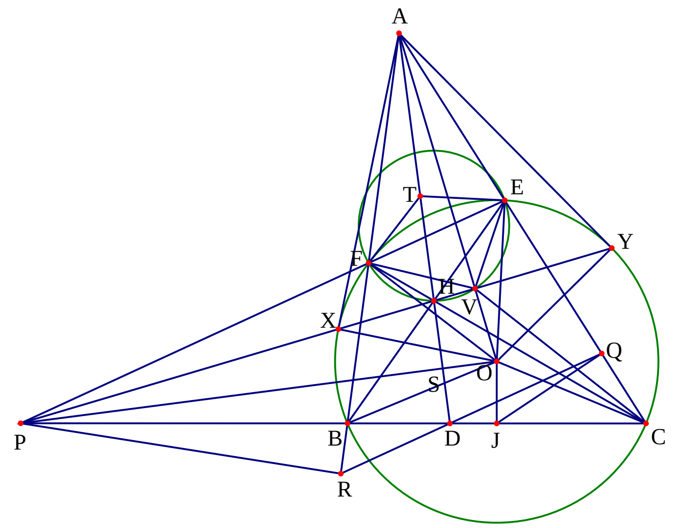
$$\frac{BC}{MC} = \frac{BI'}{MI'} \Rightarrow \frac{BI}{MI} = \frac{BI'}{MI'} \Rightarrow \frac{BI}{BI + MI} = \frac{BI'}{BI' + MI'} \Rightarrow \frac{BI}{BM} = \frac{BI'}{BM} \Rightarrow BI = BI'$$

Từ đó suy ra hai điểm I và I' trùng nhau, do đó AH, BM, CD đồng quy.

Ví dụ 33. Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn (O) đi qua hai điểm B, C cắt AB, AC lần lượt tại F và E. Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại E, F với đường tròng (O) và AH đồng quy tại một điểm.

Lời giải

Gọi giao điểm của BC và EF là P. Đường thẳng HP cắt đường tròn (O) tại X, Y(X nằm giữa P và H). Gọi giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF với OA là V. Khi đó ta chứng minh được $PH.PV = PE.PF = PB.PC$. Từ đó suy ra tứ giác BCVH nội tiếp đường tròn. Do đó $BVF = BCF + BEF = BOF$ nên tứ giác BFOV nội tiếp đương tròn. Hoàn toàn tương tự ta được tứ giác VECO nội tiếp đường tròn. Mà hai đường tròn giao nhau tại O và V nên BF và CE cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng VO. Mà ta lại có $AF.AB = AE.AC$.



Do đó ba điểm O, V, A thẳng hàng. Từ đó $BVO = AVF$ nên $OVX = 90^0$ hay PH vuông góc với OA.

Chứng minh tương tự ta được AH vuông góc với OP. Gọi S là giao điểm của AH và OP.

Khi đó ta được $\Delta OVF \backsim \Delta OFA$ nên ta có $\frac{OV}{OF} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow OF^2 = OV.OA$

Từ đó ta được $OX^2 = OV.OA$, suy ra $OXA = 90^0$. Do đó AX, AY là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Từ đó ta được $PD.PJ = PS.PO = PH.PV = PE.PE$ suy ra tứ giác EFDJ nội tiếp đường tròn.

Do đó ta thu được $PB.PC = PE.PF = PD.PJ$

Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại R, Q.

Từ đó suy ra $\Delta DBR \backsim \Delta DQC$ nên ta được $\frac{DB}{DQ} = \frac{DR}{DC} \Rightarrow DB.DC = DQ.DR$. Do đó ta được

$$\begin{aligned} DQ.DR &= DB.DC = \left(BJ - JD\right)\left(CJ + JD\right) = \left(BJ - JD\right)\left(BJ + JD\right) = BJ^2 - DJ^2 \\ &= \left(PJ^2 - DJ^2\right) - \left(PJ^2 - BJ^2\right) = PD\left(PJ + JD\right) - \left(PJ^2 - CJ^2\right) \\ &= PD\left(PJ + JD\right) - PB.PC = PD.PJ + PD.JD - PB.PC = PD.DJ \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\Delta DPR \backsim \Delta DQJ$ nên ta được $DPR = DQJ$, suy ra tứ giác RPQJ nội tiếp đường tròn.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua trung điểm J của BC.

Ta có $BEC = BFC$ nên ta được $AFH = AEH$, suy ra $HSB = HEA$

Từ đó ta chứng minh được $HC.HF = HE.HB = HA.HS$, suy ra tứ giác AFSC nội tiếp đường tròn.

Gọi T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E, F với đường tròn (O). Khi đó ta có

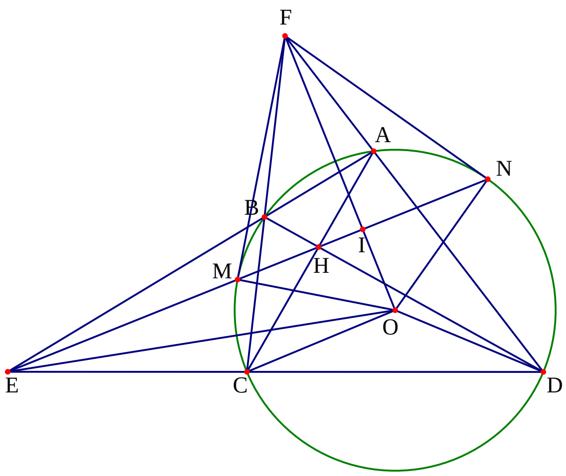
$$ESF + ETF = CSF - CSE + ETF = 180^0 - BAC - CHE + ETF$$
$$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(sdBC - sdEF\right) - \frac{1}{2}\left(sdBF + sdCE\right) + \frac{1}{2}\left(sdBF + sdBC + sdCE - sdEF\right) = 180^0$$

Từ đó suy ra tứ giác SETF nội tiếp đường tròn, suy ra $FST = FET$. Mà ta lại có $FSA = FCA = FET$, do đó suy ra $FST = FSA$. Suy ra hai tia SA, ST trùng nhau hay bốn điểm S, T, A, H thẳng hàng.

Vậy tiếp tuyến tại E, F với đường tròn (O) và AH đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 34. Cho tứ giác ABCD không phải là hình thang nội tiếp đường tròn (O). Gọi giao điểm của AB và CD là E, giao điểm của AD và BC là F, giao điểm của AC và BD là H. Đường tròn (O) cắt đường thẳng EH tại M và N. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến tại M, N với đường tròn (O) và đường thẳng OI đồng quy tại một điểm.

Lời giải



Gọi I_1 là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB và MN. Ta sẽ chứng minh ba điểm O, I_1 và F thẳng hàng, từ đó suy ra được hai điểm I và I_1 trùng nhau.

Thật vậy, do tứ giác $ABHI_1$ nội tiếp đường tròn nên ta được $BI_1H = BAH$. Lại có $BAH = BDE$ nên ta được $BI_1H = BDE$, từ đó suy ra tứ giác I_1BED nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được $I_1BH = I_1EC$.

Mà ta có $I_1AC = I_1BH$ nên ta được $I_1AC = I_1EC$.

Điều này dẫn đến tứ giác I_1AEC nội tiếp đường tròn. Ta có $HDC = HAB$ và $HAB = HI_1C$ nên ta được $HDC = HI_1C$, do đó tứ giác I_1DCH nội tiếp đường tròn. Sử dụng tính chất góc ngoài của một tứ giác nội tiếp ta được $AI_1N = ABH;\ NI_1D = HCD$. Mà ta lại có $ABH = HCD$ nên ta được $AI_1D = 2ABD$.

Mặt khác ta có $AOD = 2ABD$, do đó suy ra $AI_1D = AOD$ nên tứ giác I_1ODA nội tiếp đường tròn.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được I_1OCB nội tiếp đường tròn.

Khi đó I_1 và O là hai giao điểm của hai đường trong ngoại tiếp các tứ giác I_1ODA và I_1ODA.

Mà ta lại có $FA.FD = FB.FC$ nên suy ra F thuộc đường thẳng OI_1 hay ba điểm O, I_1 và F thẳng hang.

Ta có $\begin{cases} AI_1F = ODA \\ OAD = ODA \\ OAD = OI_1D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI_1F = OI_1D \\ OI_1D = ODF \end{cases}$

Mà ta có $AI_1N = NI_1D$ nên kết hợp với kết quả trên ta suy ra được MN vuông góc với OI_1. Mà ta lại có MN vuông góc với OI. Từ đó suy ra được hai điểm I và I_1 trùng nhau hay suy ra OI đi qua F.

Cũng từ kết quả trên ta được $\Delta OID \backsim \Delta ODF$ nên ta được $OI.OF = OD^2$.

Do đó suy ra $OI.OF = ON^2$ nên hai tam giác OIN và ONF đồng dạng với nhau.

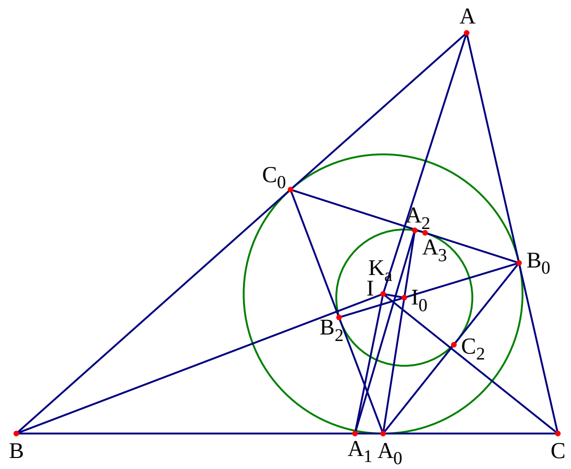
Từ đó suy ra $ONF = OIN = 90^0$ nen NF là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N. Chứng minh tương tự ta cũng được MF là tiếp tuyến của đường trong (O) tại M.

Vậy hai tiếp tuyến tại M, N với đường tròn (O) và đường thẳng OI đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại $A_0;B_0;C_0$. $IA_1;IB_1;IC_1$ theo thứ tự là phân giác cảu tam giác IBC, ICA, IAB. Các đường phân giác $A_0A_2;B_0B_2;C_0C_2$ của tam giác $A_0B_0C_0$ đồng quy tại I_0. Chứng minh rằng các đường thẳng $A_1A_2;B_1B_2;C_1C_2$ đồng quy tại một điểm trên II_0.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $AB > BC > CA$. Gọi $K_a; K_b; K_c$ lần lượt là giao điểm của các đường thẳng $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ với II_0. Gọi $A_3; B_3; C_3$ theo thứ tự là hình chiếu của I_0 trên $B_0C_0; C_0A_0; A_0B_0$ tương ứng. Gọi $r; r_0$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $A_0B_0C_0$. Chú ý là các tứ giác $AB_0IC_0; BC_0IA_0; CA_0IB_0$ nội tiếp đường tròn nên ta được



$$B_0A_0C_0 = \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right);\ A_0B_0C_0 = \frac{1}{2}\left(BAC + ACB\right);\ A_0C_0B_0 = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác và chú ý đến tam giác CA_0B_0 cân tại C.

Lại có $BAC + ABC + ACB = 180^0$ nên ta thu được

$$IA_1A_0 = IBA_1 + BIA_1 = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}\left(180^0 - \frac{ABC + ACB}{2}\right)$$

$$= \frac{ABC + ACB}{4} + \frac{1}{2}\left(180^0 - ACB\right) = A_2A_0B_0 + B_0A_0C = A_2A_0C$$

$$I_0A_2A_3 = A_2C_0A_0 + A_2A_0C_0 = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right) + \frac{1}{4}\left(ABC + ACB\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^0 - ACB\right) + \frac{1}{4}\left(ABC + ACB\right) = IA_1A_0$$

Từ các kết quả trên ta thu được IA_1 song song với I_0A_2 và $\Delta IA_1A_0 \backsim \Delta I_0A_2A_3$

Từ đó $\frac{IA_1}{I_0A_2} = \frac{IA_0}{I_0A_3} = \frac{r}{r_0}$. Chú ý là $A_1; A_2$ thuộc nửa mặt phẳng có bờ II_0 nên ta có $\frac{K_aI}{K_aI_0} = \frac{r}{r_0}$

.

Hoàn toàn tườn tự ta cũng có $\frac{K_bI}{K_bI_0} = \frac{r}{r_0}$ và $\frac{K_cI}{K_cI_0} = \frac{r}{r_0}$. Từ đó suy ra ba điểm $K_a; K_b; K_c$ trùng nhau hay các đường thẳng $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ đồng quy tại một điểm trên II_0.