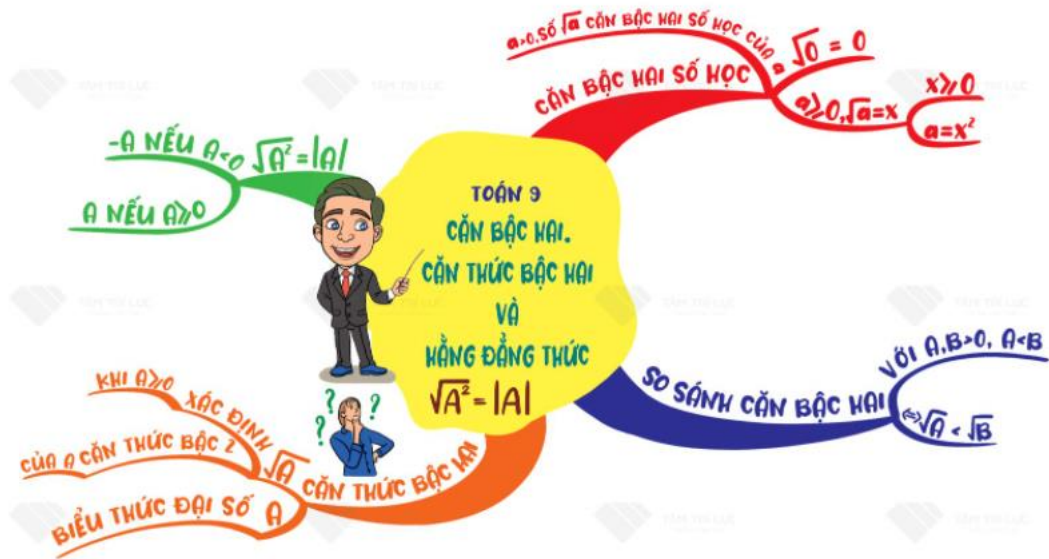




TOÁN 9: CĂN BẬC HAI, CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC  $\sqrt{A^2} = |A|$



**BÀI 1: KHÁI NIỆM CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC HAI SỐ HỌC**

**A- BÀI GIẢNG**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**1. Căn bậc hai số học**

- \*  $a > 0$  có căn bậc hai số học là  $\sqrt{a}$
- \*  $a = 0$  có một căn bậc hai số học là  $\sqrt{0} = 0$
- \*  $a < 0$  không có căn bậc hai số học

\* Công thức tổng quát

Với  $a \geq 0$  ta có  $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tìm căn bậc hai số học của các số sau

a) 16

b)  $\frac{1}{64}$

c)  $\frac{1}{100}$

d)  $\frac{4}{9}$

**Ví dụ 2:** Tìm căn bậc hai của các số sau:

a) 5

b)  $\frac{1}{25}$

c) 81

d)  $\frac{121}{100}$



**3. Chú ý**  $x^2 = a (a \geq 0) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

**Ví dụ 3:** Giải phương trình

a)  $x^2 - 2 = 0$

b)  $x^2 - 5 = 0$



c)  $(x + 1)^2 = 5$

d)  $(x - 1)^2 - 3 = 0$

$$e) (1 - 2x)^2 - 9 = 0$$

$$f) (2 - 5x)^2 - 49 = 0$$

**Ví dụ 4:** Tính

$$a) \sqrt{25} + 2\sqrt{9} - 3\sqrt{16}$$

$$b) 2\sqrt{81} : 9 + \sqrt{100} - 2\sqrt{36}$$

## B- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 1

**Bài 1.** Tìm căn bậc hai số học rồi suy ra căn bậc hai của các số: 25, 144, 361 .

**Bài 2:** Tính

$$a) A = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$$

$$b) B = \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{16}{25}}$$

**Bài 3:** Tìm x biết

$$a) x^2 = 4$$

$$b) x^2 - 7 = 0$$

$$c) 3x^2 - 1 = 8$$

$$d) 4x^2 + 19 = 0$$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** Tìm căn bậc hai số học rồi suy ra căn bậc hai của các số: 25, 144, 361 .

**Bài 2:** Tính

$$a) A = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$$

$$b) B = \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{16}{25}}$$

**Bài 3:** Tìm x biết

a)  $x^2 = 4$

b)  $x^2 - 7 = 0$

c)  $3x^2 - 1 = 8$

d)  $4x^2 + 19 = 0$

**BÀI 2: SO SÁNH CĂN BẬC HAI SỐ HỌC**



**A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**B- CÁC VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1:** So sánh

a) 2 và  $\sqrt{3}$

b) 5 và  $\sqrt{23}$

c) 4 và  $\sqrt{17}$

**Ví dụ 2:** So sánh

a) 4 và  $\sqrt{37} - 2$

b)  $\sqrt{10} + 3$  và 6

c) 4 và  $\sqrt{26} - 1$

d)  $\sqrt{5} + 1$  và 3

e) 4 và  $\sqrt{17} - 2$

**Ví dụ 3:** Tìm số x không âm biết

a)  $\sqrt{x} = 4$

b)  $\sqrt{x} > 1$

c)  $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$



## C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 2

**Bài 1:** So sánh

a) 3 và  $\sqrt{8}$

b)  $\sqrt{15}$  và 4

**Bài 2:** So sánh

a) 4 và  $\sqrt{3} + 2$

b)  $\sqrt{15} - 2$  và 2

**Bài 3:** So sánh

a)  $2\sqrt{31}$  và 10

b)  $-3\sqrt{11}$  và -12

**Bài 4:** Tìm số x không âm biết

a)  $\sqrt{x} = 13$

b)  $3\sqrt{x} = 15$

c)  $2\sqrt{x} - 1 = 5$

d)  $5 - 3\sqrt{x} = 2$

**Bài 5:** Tìm số x không âm biết

a)  $\sqrt{x} > 3$

b)  $\sqrt{x} < \sqrt{3}$

c)  $\sqrt{4x} < 4$

d)  $\sqrt{5x} \geq 2$

**Bài 6\*:** So sánh

a)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  và 12

b)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  và 2

c)  $\sqrt{35}$  và  $\sqrt{10} + \sqrt{5} + 1$

d)  $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$  và 2



### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** So sánh

a) 3 và  $\sqrt{8}$

b)  $\sqrt{15}$  và 4

**Bài 2:** So sánh

a) 4 và  $\sqrt{3} + 2$

b)  $\sqrt{15} - 2$  và 2

**Bài 3:** So sánh

a)  $2\sqrt{31}$  và 10

b)  $-3\sqrt{11}$  và -12

**Bài 4:** Tìm số x không âm biết

a)  $\sqrt{x} = 13$

b)  $3\sqrt{x} = 15$

c)  $2\sqrt{x} - 1 = 5$

d)  $5 - 3\sqrt{x} = 2$

**Bài 5:** Tìm số x không âm biết

a)  $\sqrt{x} > 3$

b)  $\sqrt{x} < \sqrt{3}$

c)  $\sqrt{4x} < 4$

d)  $\sqrt{5x} \geq 2$

**Bài 6\*:** So sánh

a)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  và 12

b)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  và 2

c)  $\sqrt{35}$  và  $\sqrt{10} + \sqrt{5} + 1$

d)  $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$  và 2

**BÀI 3: CĂN THỨC BẬC HAI VÀ BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH****A- MỤC TIÊU**

\* Biết cách tìm điều kiện xác định của  $\sqrt{A}$

**B- BÀI GIẢNG**

\*  $\sqrt{A}$ : Gọi là căn thức bậc hai của A

\*  $\sqrt{A}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \geq 0$

**Cách Tìm điều kiện xác định**

✎  $A(x)$  là một đa thức  $\Rightarrow A(x)$  luôn có nghĩa.

✎  $\frac{A(x)}{B(x)}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

✎  $\sqrt{A(x)}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$

✎  $\frac{1}{\sqrt{A(x)}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A(x) > 0$



**Ví dụ 1:** Tìm điều kiện xác định của biểu thức

a)  $\sqrt{x - 3}$

b)  $\sqrt{5 + x}$

c)  $\sqrt{-5x}$



**Ví dụ 2:** Tìm điều kiện xác định của biểu thức

a)  $\sqrt{\frac{2}{x-5}}$

b)  $\sqrt{\frac{-3}{2-x}}$

c)  $\sqrt{\frac{7}{2x-1}}$

**Ví dụ 3:** Tìm điều kiện xác định

a)  $\sqrt{x^2 + 1}$

b)  $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$

### C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 3

**Bài 1:** Tìm ĐKXD

a)  $\sqrt{\frac{x}{5}}$

b)  $\sqrt{-7x}$

c)  $\sqrt{6-x}$

d)  $\frac{2}{\sqrt{2x+5}}$

**Bài 2:** Tìm ĐKXD

a)  $\sqrt{(x-1)^2}$

b)  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

c)  $\sqrt{3x^2 + 1}$

**Bài 3:** Tìm ĐKXD

a)  $\sqrt{(x-1)(x-3)}$

b)  $\sqrt{x^2-9}$

c)  $\sqrt{\frac{1+x}{3-x}}$

d)  $\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$

**Bài 4:** Tìm ĐKXD

a)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}$

b)  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

**Bài 5\*:** Tìm ĐKXD

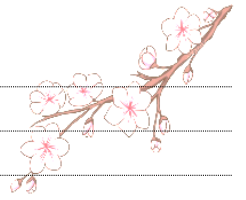
a)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}$

b)  $\frac{3}{1-\sqrt{x^2-5}}$

c)  $\frac{2}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$



## BÀI 4: HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$



**Ví dụ 1:** Tính

a)  $\sqrt{2023^2}$

b)  $\sqrt{(-49)^2}$

c)  $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}$

d)  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

e)  $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$

g)  $\sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2}$

**Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức sau:

a)  $A = \sqrt{(x - 2)^2} - 2x$  với  $x \geq 2$

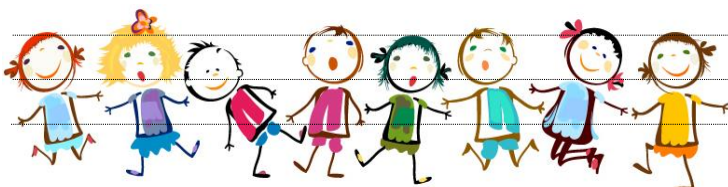
b)  $3\sqrt{x^6} - 2x^3$  với  $x < 0$

**Ví dụ 3:** Rút gọn biểu thức  $P = 3x - 2\sqrt{(x - 1)^2}$

**Ví dụ 4:** Giải phương trình

a)  $\sqrt{x^2} = 11$

b)  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 11$





## BÀI TẬP TỰ LUYỆN 4 (LẦN 2)

### Bài 1: Tính

a)  $\sqrt{36}$

b)  $\sqrt{(-27)^2}$

c)  $-(-0,5)\sqrt{4}$

### Bài 2: Tính

a)  $\sqrt{(\sqrt{5} + 3)^2}$

b)  $\sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$

c)  $\sqrt{(5 + 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2}$

### Bài 3: Rút gọn

a)  $A = \sqrt{(x - 7)^2} + (2x + 7)$  với  $x \geq 7$

b)  $B = 2\sqrt{x^2 - 10x + 25} - (2x - 1)$

### Bài 4: Giải phương trình

a)  $\sqrt{(x - 5)^2} = 10$

b)  $\sqrt{49x^2 - 14x + 1} = 3$

c)  $\sqrt{x^2 - 14x + 49} = 2x - 3$

### Bài 5: Rút gọn (dùng bảng xét dấu)

a)  $A = \sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(x + 3)^2}$

b)  $B = \sqrt{(x - 2)^2} - \sqrt{(5 - x)^2}$



## HƯỚNG DẪN GIẢI BTTL 4

### Bài 1: Tính

a)  $\sqrt{12^2}$

b)  $\sqrt{(-13)^2}$

c)  $-0,2\sqrt{(-5)^2}$

d)  $-(-0,6)\sqrt{(-0,6)^2}$

### Bài 2: Tính

a)  $\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}$

b)  $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$

c)  $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$

d)  $\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$

e)  $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2}$

g)  $\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$

**Bài 3:** Rút gọn

a)  $A = 3\sqrt{16x^2} - 10x$  với  $x \geq 0$

b)  $B = 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} - (3x + 1)$  với  $x \leq 1$

**Bài 4:** Rút gọn

a)  $A = \sqrt{(x - 5)^2} + 2x$

b)  $B = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3x$

c)  $C = \sqrt{49x^6} - 2x^3$

d)  $D = \sqrt{25x^4} - 2x^2$

**Bài 5.** Giải phương trình

a)  $\sqrt{x^2} = 5$

b)  $\sqrt{(x - 1)^2} = 11$



$$c) \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 11$$

$$d) \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 4$$

**Bài 6:** giải phương trình

$$a) \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1$$

$$b) \sqrt{x^2 - 8x + 16} = x + 1$$

**Bài 7:** Giải phương trình  $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} - 1$  với  $x \geq 1$

**Bài 8:** Rút gọn

$$a) A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} \quad \text{với } x > 2$$

$$b) B = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} \quad \text{với } x \geq 1$$

$$c) C = 1 + 2x - \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x - 4}$$

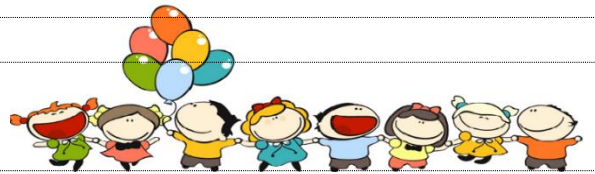
**Bài 9:** Rút gọn

$$a) A = \sqrt{(x + 1)^2} + \sqrt{(x + 5)^2}$$

$$b) B = \sqrt{(x - 1)^2} - \sqrt{(x + 2)^2}$$

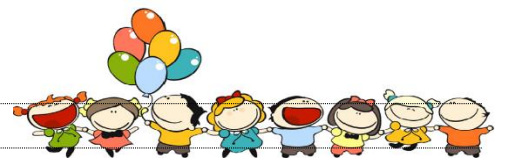
**Bài 10:** Rút gọn

$$a) A = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$



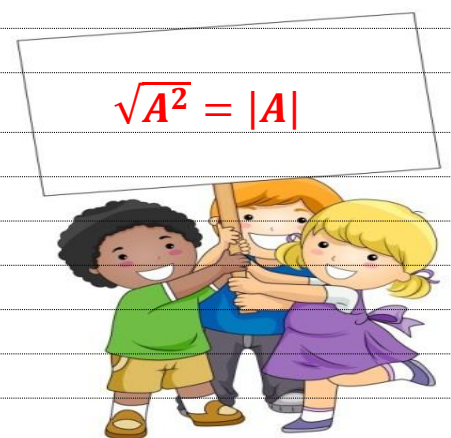


$$b) B = \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}}$$



## BÀI 5: ỨNG DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ ĐỂ TÍNH TOÁN

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ



## B- CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

### Ví dụ 1: Tính

a)  $\sqrt{16 + 2\sqrt{15}}$

b)  $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

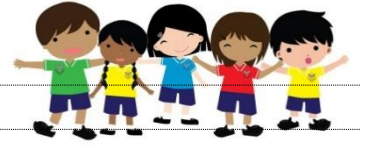
c)  $\sqrt{18 - 2\sqrt{17}}$

d)  $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}}$

e)  $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

## Ví dụ 2: Tính

a)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$



b)  $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$

c)  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

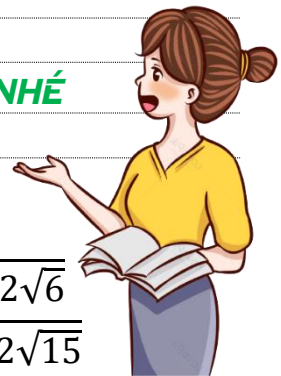
d)  $\sqrt{46 - 6\sqrt{5}}$

Ví dụ 3: Tính  $A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}}$

**Ví dụ 4: Tính**  $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} \cdot \sqrt{2005 - 2\sqrt{2007 - 2\sqrt{2006}}}$



**NHỚ LÀM BÀI TẬP CỦA CÔ THU NHÉ**



**BÀI TẬP TỰ LUYỆN 5**

**Bài 1: Tính**

a)  $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b)  $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$

c)  $C = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

d)  $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

e)  $E = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$

f)  $F = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

**Bài 2: Tính**

a)  $A = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

b)  $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c)  $C = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

d)  $D = \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$

e)  $E = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$

f)  $F = \sqrt{24 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

**Bài 3: Tính**

a)  $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$B = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

**Bài 4: Tính**

a)  $A = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

b)  $B = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1: Tính

a)  $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b)  $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$

c)  $C = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

d)  $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

e)  $E = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$

f)  $F = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

### Bài 2: Tính

a)  $A = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

b)  $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c)  $C = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

d)  $D = \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$

e)  $E = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$

$$f) F = \sqrt{24 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

### Bài 3: Tính

$$a) A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$B = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$$

### Bài 4: Tính

$$a) A = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

$$b) B = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$$





## BÀI 6: LIÊN HỆ PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG



Quy tắc khai phương một tích:

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

Quy tắc nhân các căn bậc hai:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$$

**Ví dụ 1: Tính**

a)  $\sqrt{0,09 \cdot 64}$

b)  $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$

**Ví dụ 2: Tính**

a)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{200}$

b)  $\sqrt{12,1} \cdot \sqrt{360}$

### Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức chứa x

a)  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x}$  với  $x \geq 0$

b)  $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{32xy^4}$  với  $x \geq 0$

### Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức

a)  $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b)  $\frac{2\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}-2}$  với  $a \geq 0; a \neq 4$

c)  $\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

### Ví dụ 5: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính

a)  $\sqrt{20^2 - 16^2}$

b)  $\sqrt{2,25 \cdot 19 - 2,25 \cdot 3}$

### Ví dụ 6: Tìm x

a)  $\sqrt{2x} = 10$

b)  $\sqrt{9(x-2)^2} - 2 = 0$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN 6

### Bài 1: Tính

a)  $\sqrt{14,4 \cdot 8,1}$

b)  $\sqrt{7^4 \cdot (-3)^2}$

c)  $\sqrt{4 \cdot 1,44 \cdot 225}$

d)  $\sqrt{3 \cdot 30 \cdot 6,4}$

### Bài 2: Tính

a)  $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{0,4}$

b)  $\sqrt{6,4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{0,5}$

### Bài 3: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính

a)  $\sqrt{117^2 - 108^2}$

b)  $\sqrt{1,21 \cdot 17 - 1,21 \cdot 8}$

### Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 2x$  với  $x \geq 0$

b)  $(x-3)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$

### Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $\frac{x+10\sqrt{x}+25}{x-25}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$

b)  $\frac{4x-12\sqrt{x}}{x-9}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

c)  $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

d)  $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a+b+2\sqrt{ab}}$  với  $a > 0; b > 0$



## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1: Tính

a)  $\sqrt{14,4 \cdot 8,1}$

b)  $\sqrt{7^4 \cdot (-3)^2}$

c)  $\sqrt{4 \cdot 1,44 \cdot 225}$

d)  $\sqrt{3 \cdot 30 \cdot 6,4}$

### Bài 2: Tính

a)  $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{0,4}$

b)  $\sqrt{6,4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{0,5}$

### Bài 3: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính

a)  $\sqrt{117^2 - 108^2}$

b)  $\sqrt{1,21 \cdot 17 - 1,21 \cdot 8}$

### Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 2x$  với  $x \geq 0$

b)  $(x - 3)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$

### Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

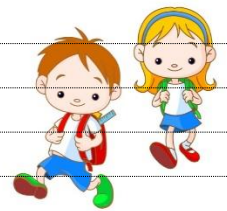
a)  $\frac{x+10\sqrt{x}+25}{x-25}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$

b)  $\frac{4x-12\sqrt{x}}{x-9}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

$$c) \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$d) \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a+b+2\sqrt{ab}} \text{ với } a > 0; b > 0$$

## BÀI 7: LIÊN HỆ PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG



Quy tắc khai phương một thương:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$  ĐK:  $A \geq 0; B > 0$

Quy tắc chia các căn bậc hai:  $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$  ĐK:  $A \geq 0; B > 0$

### Ví dụ 1: Tính

$$a) \sqrt{\frac{289}{225}}$$

$$b) \sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$$

### Ví dụ 2: Tính

$$a) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$$

$$b) \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$$

### Ví dụ 3: Rút gọn

$$a) \sqrt{\frac{2x^4y^2}{50}} \text{ với } y \geq 0$$

$$b) \frac{\sqrt{3x^3y^2}}{\sqrt{48x}} \text{ với } x > 0; y > 0$$

### Ví dụ 4: Tính

$$a) \sqrt{\frac{125^2-61^2}{101^2-85^2}}$$

$$b) (\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} + (3 + \sqrt{5})^2$$

$$c) (\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} - 3\sqrt{xy}) : \sqrt{xy}$$

### Ví dụ 5: Giải phương trình

$$a) \sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 1$$

$$b) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+3}} = 1$$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN 7

### Bài 1: Tính

$$a) \sqrt{\frac{169}{289}}$$

$$b) \sqrt{3\frac{13}{81}}$$

$$c) \sqrt{14,4 : 8,1}$$

$$d) \sqrt{\frac{4,9}{2,5}}$$

### Bài 2: Tính

$$a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$$

$$b) \frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}}$$

$$c) \frac{\sqrt{25,6}}{\sqrt{12,1}}$$

$$d) \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{5^2 \cdot 3}}$$

### Bài 3: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính

$$a) \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$$

$$b) \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$$

### Bài 4: Thực hiện phép tính

$$a) (\sqrt{48} - \sqrt{27} + 4\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$

$$b) (5\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 3\sqrt{112}) : \sqrt{7}$$

### Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{x^4}}$  với  $x \neq 0; y > 0$

c)  $\frac{3x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{9x^6}}$  với  $x < 0; y > 0$

e)  $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2 - 2xy + y^2}}$  với  $x > 0; y > 0$

b)  $2x^2 \cdot \sqrt{\frac{y^4}{4x^2}}$  với  $x < 0$

d)  $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$  với  $x \neq 0; y \neq 0$

f)  $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$  với  $x \neq 1; y \neq 1; y > 0$

### Bài 6: Giải phương trình

a)  $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

b)  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}} = 1$

### Bài 7: Tính

a)  $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1: Tính

a)  $\sqrt{\frac{169}{289}}$

b)  $\sqrt{3\frac{13}{81}}$

c)  $\sqrt{14,4: 8,1}$

d)  $\sqrt{\frac{4,9}{2,5}}$

### Bài 2: Tính

a)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

b)  $\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}}$

c)  $\frac{\sqrt{25,6}}{\sqrt{12,1}}$

d)  $\frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{5^2 \cdot 3}}$

### Bài 3: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính

a)  $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$

b)  $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$

#### Bài 4: Thực hiện phép tính

a)  $(\sqrt{48} - \sqrt{27} + 4\sqrt{3}) : \sqrt{3}$

b)  $(5\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 3\sqrt{112}) : \sqrt{7}$

#### Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{x^4}}$  với  $x \neq 0; y > 0$

b)  $2x^2 \cdot \sqrt{\frac{y^4}{4x^2}}$  với  $x < 0$

c)  $\frac{3x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{9x^6}}$  với  $x < 0; y > 0$

d)  $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$  với  $x \neq 0; y \neq 0$

e)  $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2 - 2xy + y^2}}$  với  $x > 0; y > 0$

f)  $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$  với  $x \neq 1; y \neq 1; y > 0$

## Bài 6: Giải phương trình

a)  $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

b)  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}} = 1$

## Bài 7: Tính

a)  $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

### TOÁN 9: BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI



## § 8: ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

### I- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad (B \geq 0)$$

### II- BÀI TẬP TRÊN LỚP

#### Ví dụ 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a)  $\sqrt{5^2 \cdot 3}$

b)  $\sqrt{(-11)^2 \cdot 7}$

c)  $\sqrt{x^2y}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$

d)  $\sqrt{ab^2}$  với  $a \geq 0; b < 0$



### Ví dụ 2: Tính

a)  $\sqrt{20}$

b)  $\sqrt{48}$

c)  $\sqrt{45}$

d)  $\sqrt{125}$

e)  $\sqrt{27}$

f)  $\sqrt{1200}$

g)  $\sqrt{162}$

h)  $\sqrt{0,9}$

### Ví dụ 3: Rút gọn

a)  $A = 2\sqrt{125} - 3\sqrt{45} + 5\sqrt{180}$

b)  $B = 2\sqrt{18x} + \sqrt{200x} - \sqrt{50x}$  với  $x \geq 0$

### Ví dụ 4: Giải phương trình

a)  $\sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} = 4$

b)  $2\sqrt{9x-27} + \sqrt{x-3} - \sqrt{16x-48} = 1$



$$c) \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = \sqrt{x+1}$$

$$d) \sqrt{4x-20} - 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} = \sqrt{1-x}$$

### III- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 8

#### Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a)  $\sqrt{18x^3}$  với  $x \geq 0$ .

b)  $\sqrt{32 \cdot (x-y)^2}$  với  $x < y$ .

#### Bài 2: Tính

a)  $3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{72}$

b)  $\sqrt{180} - 2\sqrt{45} + \sqrt{245}$

c)  $\frac{1}{2}\sqrt{72} + \frac{1}{7}\sqrt{98} - \sqrt{50}$

d)  $\frac{9}{2}\sqrt{108} + \sqrt{125} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 2\sqrt{27}$

#### Bài 3: Rút gọn biểu thức

a)  $A = \sqrt{27x} + \sqrt{75x} - \frac{1}{4}\sqrt{48x}$

b)  $B = \frac{1}{2}\sqrt{16x-16} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4x-4}{9}} - \sqrt{25x-25}$

#### Bài 4: Rút gọn biểu thức

a)  $A = 2\sqrt{9x} - 3\sqrt{\frac{4x}{81}} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{16}}$  với  $x > 0$

b)  $B = \frac{3}{y^2-x^2} \cdot \sqrt{\frac{(x-y)^2}{6}}$  với  $x > y > 0$





#### IV- HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN 8

##### Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a)  $\sqrt{18x^3}$  với  $x \geq 0$ .

b)  $\sqrt{32 \cdot (x-y)^2}$  với  $x < y$ .

##### Bài 2: Tính

a)  $3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{72}$

b)  $\sqrt{180} - 2\sqrt{45} + \sqrt{245}$

c)  $\frac{1}{2}\sqrt{72} + \frac{1}{7}\sqrt{98} - \sqrt{50}$

d)  $\frac{9}{2}\sqrt{108} + \sqrt{125} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 2\sqrt{27}$

##### Bài 3: Rút gọn biểu thức

a)  $A = \sqrt{27x} + \sqrt{75x} - \frac{1}{4}\sqrt{48x}$

b)  $B = \frac{1}{2}\sqrt{16x-16} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4x-4}{9}} - \sqrt{25x-25}$

## Bài 4: Rút gọn biểu thức

a)  $A = 2\sqrt{9x} - 3\sqrt{\frac{4x}{81}} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{16}}$  với  $x > 0$

b)  $B = \frac{3}{y^2-x^2} \cdot \sqrt{\frac{(x-y)^2}{6}}$  với  $x > y > 0$



## § 9 ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

### I- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad \text{Với } A \geq 0; B \geq 0$$

$$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad \text{Với } A < 0; B \geq 0$$



### II. BÀI TẬP TRÊN LỚP

#### Ví dụ 1: Tính

a)  $\frac{1}{2}\sqrt{8}$

b)  $-3\sqrt{5}$

c)  $x\sqrt{\frac{1}{x}}$  ( $x > 0$ )

d)  $y\sqrt{\frac{-2}{3y}}$  ( $y < 0$ )

## Ví dụ 2: So sánh

a)  $4\sqrt{5}$  và  $\sqrt{45}$



b) 8 và  $3\sqrt{7}$

## III – BÀI TẬP TỰ LUYỆN 9

### Câu 1: Đưa thừa số vào trong dấu căn

a)  $8\sqrt{7}$

$2\sqrt{5}$

$4\sqrt{2}$

b)  $-2\sqrt{3}$

$\frac{-1}{2}\sqrt{5}$

$-7\sqrt{3}$

c) với  $x \geq 0$ :  $3\sqrt{x}$

$-7\sqrt{x}$

$-9\sqrt{3x}$

### Câu 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) Với  $x > 0$ :

$x\sqrt{\frac{11}{x}}$

$2x\sqrt{\frac{7}{2x}}$

$3x\sqrt{\frac{1}{6x^3}}$

b) Với  $a < 0$ :

$\frac{3}{a}\sqrt{\frac{-6a}{5}}$

$\frac{2}{a}\sqrt{\frac{-a}{8}}$

$\frac{1}{3a}\sqrt{-3a}$

### Câu 3: So sánh

a)  $2\sqrt{5}$  và  $\sqrt{18}$

b)  $3\sqrt{5}$  và  $2\sqrt{13}$

c) 7 và  $3\sqrt{5}$

d)  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$  và  $5\sqrt{\frac{1}{3}}$

### Câu 4:

a) Sắp xếp theo thứ tự giảm dần :  $3\sqrt{5}$ ;  $2\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{29}$ ;  $4\sqrt{2}$

b) Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:  $6\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{38}$ ;  $3\sqrt{7}$ ;  $2\sqrt{14}$

c) Sắp xếp theo thứ tự giảm dần:  $-2\sqrt{\frac{11}{3}}$ ;  $-\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{81}}$ ;  $\frac{-2}{3}\sqrt{21}$

## IV – HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN 9

### Câu 1: Đưa thừa số vào trong dấu căn

a)  $8\sqrt{7}$

$2\sqrt{5}$

$4\sqrt{2}$

b)  $-2\sqrt{3}$

$\frac{-1}{2}\sqrt{5}$

$-7\sqrt{3}$

c) với  $x \geq 0$ :  $3\sqrt{x}$

$-7\sqrt{x}$

$-9\sqrt{3x}$

**Câu 2:** Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) Với  $x > 0$ :  $x\sqrt{\frac{11}{x}}$

$$2x\sqrt{\frac{7}{2x}}$$

$$3x\sqrt{\frac{1}{6x^3}}$$

b) Với  $a < 0$ :  $\frac{3}{a}\sqrt{\frac{-6a}{5}}$

$$\frac{2}{a}\sqrt{\frac{-a}{8}}$$

$$\frac{1}{3a}\sqrt{-3a}$$

**Câu 3: So sánh**

a)  $2\sqrt{5}$  và  $\sqrt{18}$

b)  $3\sqrt{5}$  và  $2\sqrt{13}$

c) 7 và  $3\sqrt{5}$

d)  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$  và  $5\sqrt{\frac{1}{3}}$

**Câu 4:**

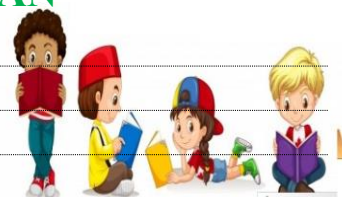
a) Sắp xếp theo thứ tự giảm dần :  $3\sqrt{5}$ ;  $2\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{29}$ ;  $4\sqrt{2}$

b) Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:  $6\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{38}$ ;  $3\sqrt{7}$ ;  $2\sqrt{14}$

c) Sắp xếp theo thứ tự giảm dần:  $-2\sqrt{\frac{11}{3}}$ ;  $-\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{81}}$ ;  $-\frac{2}{3}\sqrt{21}$

## § 10 KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN

### I- KIẾN THỨC CẦN NHỚ



### II. BÀI GIẢNG

#### Ví dụ 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b)  $\sqrt{\frac{7}{2}}$

c)  $\sqrt{\frac{3}{125}}$

d)  $\sqrt{\frac{11}{48}}$

## Ví dụ 2: Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a)  $\sqrt{\frac{7x}{5y}}$  ( $x; y > 0$ )

b)  $\sqrt{\frac{5x}{28y^3}}$  ( $x; y > 0$ )

## III- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 10

### Bài 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a)  $\sqrt{\frac{2}{5}}$

b)  $\sqrt{\frac{7}{3}}$

c)  $\sqrt{\frac{5}{27}}$

d)  $\sqrt{\frac{1}{300}}$

### Bài 2: Khử mẫu của biểu thức lấy căn (với $a > 0; b > 0$ )

a)  $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$

b)  $\sqrt{\frac{5a}{18b}}$

c)  $\sqrt{\frac{2}{a^3}}$

d)  $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$

e)  $\sqrt{\frac{4a^3}{25b}}$

f)  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$

### Bài 3: Tính giá trị của biểu thức

a)  $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} - 3\sqrt{5}$

b)  $3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}$

### Bài 4: Rút gọn với $x \geq 0$

a)  $A = \sqrt{\frac{2x}{7}} + 7\sqrt{\frac{7x}{2}} - 3\sqrt{14x}$

b)  $B = \sqrt{24x} - \sqrt{\frac{8x}{3}} + \sqrt{\frac{3x}{8}}$



## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a)  $\sqrt{\frac{2}{5}}$

b)  $\sqrt{\frac{7}{3}}$

c)  $\sqrt{\frac{5}{27}}$

d)  $\sqrt{\frac{1}{300}}$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Bài 2: Khử mẫu của biểu thức lấy căn (với $a > 0; b > 0$ )

a)  $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$

b)  $\sqrt{\frac{5a}{18b}}$

c)  $\sqrt{\frac{2}{a^3}}$

d)  $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$

e)  $\sqrt{\frac{4a^3}{25b}}$

f)  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$

## Bài 3: Tính giá trị của biểu thức

a)  $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} - 3\sqrt{5}$

b)  $3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}$

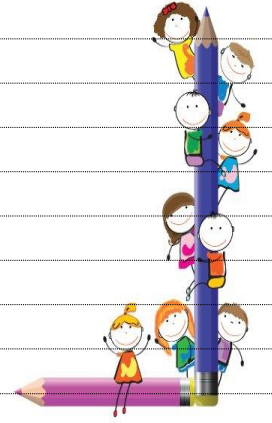
## Bài 4: Rút gọn với $x \geq 0$

a)  $A = \sqrt{\frac{2x}{7}} + 7\sqrt{\frac{7x}{2}} - 3\sqrt{14x}$

b)  $B = \sqrt{24x} - \sqrt{\frac{8x}{3}} + \sqrt{\frac{3x}{8}}$

## § 11 TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

### \* KHÁI NIỆM BIỂU THỨC LIÊN HỢP



### \* CÁC DẠNG TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

DẠNG 1:  $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B}\cdot\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$  Với  $B > 0$

DẠNG 2:  $\frac{C}{\sqrt{A\pm B}} = \frac{C(\sqrt{A\mp B})}{(\sqrt{A+B})\cdot(\sqrt{A-B})} = \frac{C(\sqrt{A\mp B})}{A-B^2}$  HOẶC  $\frac{C}{\sqrt{A\pm\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A\mp\sqrt{B}})}{(\sqrt{A+\sqrt{B}})(\sqrt{A-\sqrt{B}})} = \frac{C(\sqrt{A\mp\sqrt{B}})}{A-B}$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN 11

### Bài 1: Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c)  $\frac{7}{2\sqrt{3}}$

b)  $\frac{5}{\sqrt{7}}$

d)  $\frac{4}{\sqrt{20}}$

### Bài 2: Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

c)  $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

e)  $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

b)  $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$

d)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

f)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

### Bài 3: Trục căn thức ở mẫu với $x > 0; y > 0$

a)  $\frac{x}{\sqrt{x}}$

c)  $\frac{x}{\sqrt{2x^3}}$

e)  $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

g)  $\frac{3}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$

b)  $\frac{x}{\sqrt{xy}}$

d)  $\frac{-3y}{2\sqrt{9x^5}}$

f)  $\frac{2}{2\sqrt{x}+1}$

h)  $\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}$

### Bài 4: Tính

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b)  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1: Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c)  $\frac{7}{2\sqrt{3}}$

b)  $\frac{5}{\sqrt{7}}$

d)  $\frac{4}{\sqrt{20}}$

### Bài 2: Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

b)  $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$



c)  $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

d)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

e)  $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

f)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

**Bài 3: Trục căn thức ở mẫu với  $x > 0; y > 0$ )**

a)  $\frac{x}{\sqrt{x}}$

b)  $\frac{x}{\sqrt{xy}}$

c)  $\frac{x}{\sqrt{2x^3}}$

d)  $\frac{-3y}{2\sqrt{9x^5}}$

e)  $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

f)  $\frac{2}{2\sqrt{x}+1}$

g)  $\frac{3}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$

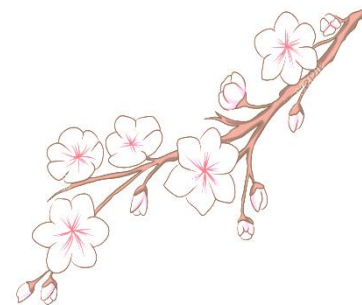
h)  $\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}$

**Bài 4: Tính**

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b)  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

## § 12: CĂN BẬC BA



### I- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Khái niệm căn bậc ba

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a$$

- Lưu ý:
- Mọi số đều có căn bậc ba
  - Căn bậc ba của số dương là số dương
  - Căn bậc ba của số âm là số âm
  - $\sqrt[3]{0} = 0$

#### Ví dụ 1: Tính

a)  $\sqrt[3]{8}$

b)  $\sqrt[3]{27}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

d)  $\sqrt[3]{0,001}$

#### Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức sau

$$A = \sqrt[3]{8} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{64} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$$

#### 2. Hằng đẳng thức $\sqrt[3]{A^3} = A$

#### Ví dụ 3: Tính

a)  $\sqrt[3]{5^3}$

b)  $\sqrt[3]{(-11)^3}$

#### Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức



$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-24)^3} + \sqrt[3]{(14)^3} - 3\sqrt[3]{3^3}$$

#### Ví dụ 5: Rút gọn $B = \sqrt[3]{64x^3} - 5x$

### 3. So sánh các căn bậc ba

Ví dụ 6: So sánh 3 và  $\sqrt[3]{25}$

Ví dụ 7: Giải phương trình

a)  $\sqrt[3]{3x+1} = 2$

b)  $\sqrt[3]{1-2x} = -3$

### 4. Liên hệ giữa phép nhân, chia và tìm căn bậc ba

Ví dụ 8: Tính

a)  $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}} =$

b)  $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{-54}}$

c)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-54}$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN 12

### Bài 1: Rút gọn

$$a) A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[3]{4^3} - 3\sqrt[3]{3^3}$$

$$b) B = \sqrt[3]{8} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{27}$$

$$c) C = \frac{1}{\sqrt[3]{(-6)^3}} + \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}}$$

$$d) D = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{-1}{125}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{-27}}$$

### Bài 2: Rút gọn

$$a) A = \sqrt[3]{(x-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(1-2x)^3} + 3x$$

$$b) B = 2 \cdot \sqrt[3]{1^3 - 3x + 3x^2 - x^3} - x$$

### Bài 3: Rút gọn

$$a) \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$b) \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}$$

$$c) \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$$

$$d) \sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16}$$

### Bài 4: Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{3x-1} = 4$$

$$b) \sqrt[3]{1-x} = -2$$

$$c) \sqrt[3]{x-2} + 2 = x$$

$$d) \sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$$

## HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN 12

### Bài 1: Rút gọn

$$a) A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[3]{4^3} - 3\sqrt[3]{3^3}$$

$$b) B = \sqrt[3]{8} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{27}$$

$$c) C = \frac{1}{\sqrt[3]{(-6)^3}} + \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}}$$

$$d) D = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{-1}{125}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{-27}}$$

### Bài 2: Rút gọn

$$a) A = \sqrt[3]{(x-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(1-2x)^3} + 3x$$

$$b) B = 2 \cdot \sqrt[3]{1^3 - 3x + 3x^2 - x^3} - x$$

### Bài 3: Rút gọn

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$

b)  $\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}$

c)  $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$

d)  $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16}$

### Bài 4: Giải phương trình

a)  $\sqrt[3]{3x - 1} = 4$

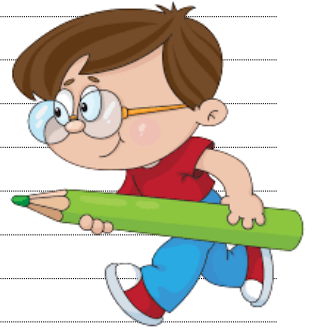
b)  $\sqrt[3]{1 - x} = -2$

c)  $\sqrt[3]{x - 2} + 2 = x$

d)  $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$

## CHUYÊN ĐỀ 2: MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ



## B- BÀI TẬP GIẢNG TRÊN LỚP

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  $\sqrt{2x - 1} = 3$

b)  $\sqrt{4x - 20} - 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} = 3 - \sqrt{x - 5}$

c)  $\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 6$

d)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

e)  $\sqrt{x^2 - 4x - 6} = \sqrt{15}$

f)  $\sqrt{(x - 2)(x + 3)} = 5$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a)  $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$

b)  $\sqrt{\frac{x-7}{x-3}} = \sqrt{x + 3}$

c)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 3)(x - 2)}$



**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a)  $\sqrt{(2x+3)^2} = x-5$

b)  $\sqrt{2x-3} = x-1$

c)  $\sqrt{x^2-5x-6} = x-2$

**C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 13****Bài 1:** Giải các phương trình sau

1)  $x - 2\sqrt{x} = 0$

2)  $6 + \sqrt{x} - x = 0$

3)  $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

4)  $-2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$

5)  $7x - 2\sqrt{x} - 5 = 0$

6)  $(2\sqrt{x} + 3)(2\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(-3 + 4\sqrt{x}) = 0$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

1)  $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$

2)  $\sqrt{16x} = 8$

3)  $2\sqrt{x} = \sqrt{9x} - 3$

4)  $\sqrt{3x-1} = 4$

5)  $\sqrt{-3x+4} = 12$

6)  $\sqrt{2-3x} = 10$

7)  $\sqrt{4-5x} = 12$

8)  $\sqrt{9(x-1)} = 21$

9)  $\sqrt{5x+3} = \sqrt{3-\sqrt{2}}$

10)  $\sqrt{3x^2-5} = 2$

11)  $\sqrt{\frac{1}{4}-2x} = 3$

12)  $\sqrt{\frac{12x+5}{3}} = 2$

13)  $\sqrt{\frac{-3}{2+x}} = 2$

14)  $\sqrt{\frac{-6}{1+x}} = 5$

15)  $\sqrt{(x-3)^2} = 3$

16)  $\sqrt{(\sqrt{x}+7)(\sqrt{x}-7)} = 2$

17)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}.x} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$

18)  $\sqrt{4(1-x)^2} - \sqrt{3} = 0$

19)  $\sqrt{x^2-8x+16} = 4$

20)  $\sqrt{4x+8} + 2\sqrt{x+2} - \sqrt{9x+18} = 1$

21)  $\sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} = 4$

22)  $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

1)  $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3-x}$

2)  $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x-1}$

3)  $\sqrt{x^2-3x} = \sqrt{16-3x}$

4)  $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

5)  $\sqrt{(2x-7)(x-2)} - \sqrt{x-2} = 0$

6)  $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{3x-1}$

7)  $\sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3}$

8)  $\sqrt{\frac{2x-1}{x-2}} = \sqrt{x+2}$

9)  $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$

10)  $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$

11)  $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{4x^2-12x+9}$

**Bài 4:** Giải các phương trình sau

1)  $\sqrt{x + 10} = x - 2$

3)  $\sqrt{2x^2 - 9} = -x$

5)  $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2x + 1$

7)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = |2x + 1|$

9)  $\sqrt{3x^2 - 4x + 3} = 1 - 2x$

11)  $\sqrt{1 - x^2} = x - 1$

2)  $x - \sqrt{5x + 4} = 2$

4)  $\sqrt{-4x^2 + 25} = x$

6)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x = 11$

8)  $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 2$

10)  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$

12)  $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$

**Bài 5:** Giải các phương trình sau

1)  $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$

3)  $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$

5)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$

7)  $\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = 2 - x$

9)  $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

11)  $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$

2)  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$

4)  $\sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1 = 0$

6)  $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1$

8)  $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 1} = 0$

10)  $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + |x + 2| = 0$

**D- HƯỚNG DẪN GIẢI BTTL 13**

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

1)  $x - 2\sqrt{x} = 0$

2)  $6 + \sqrt{x} - x = 0$



3)  $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

4)  $-2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$

5)  $7x - 2\sqrt{x} - 5 = 0$

6)  $(2\sqrt{x} + 3)(2\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(-3 + 4\sqrt{x}) = 0$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

1)  $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$

2)  $\sqrt{16x} = 8$

3)  $2\sqrt{x} = \sqrt{9x} - 3$

4)  $\sqrt{3x - 1} = 4$

5)  $\sqrt{-3x + 4} = 12$

6)  $\sqrt{2 - 3x} = 10$

7)  $\sqrt{4 - 5x} = 12$

8)  $\sqrt{9(x - 1)} = 21$

9)  $\sqrt{5x + 3} = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$

10)  $\sqrt{3x^2 - 5} = 2$

11)  $\sqrt{\frac{1}{4} - 2x} = 3$

12)  $\sqrt{\frac{12x+5}{3}} = 2$

13)  $\sqrt{\frac{-3}{2+x}} = 2$

14)  $\sqrt{\frac{-6}{1+x}} = 5$

15)  $\sqrt{(x - 3)^2} = 3$

$$16) \sqrt{(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} - 7)} = 2$$

$$17) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot x} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

$$18) \sqrt{4(1-x)^2} - \sqrt{3} = 0$$

$$19) \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 4$$

$$20) \sqrt{4x + 8} + 2\sqrt{x + 2} - \sqrt{9x + 18} = 1$$

$$21) \sqrt{16(x + 1)} - \sqrt{9(x + 1)} = 4$$

$$22) \sqrt{4x - 20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} = 4$$

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3 - x}$$

$$2) \sqrt{2x - 5} = \sqrt{x - 1}$$

$$3) \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{16 - 3x}$$

$$4) \sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3}$$

$$5) \sqrt{(2x-7)(x-2)} - \sqrt{x-2} = 0$$

$$6) \sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{3x - 1}$$

$$7) \sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$$

$$8) \sqrt{\frac{2x-1}{x-2}} = \sqrt{x+2}$$

$$9) \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$$

$$10) \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{x^2}$$

$$11) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$



**Bài 4:** Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt{x+10} = x-2$$

$$2) x - \sqrt{5x+4} = 2$$

$$3) \sqrt{2x^2 - 9} = -x$$

$$4) \sqrt{-4x^2 + 25} = x$$

$$5) \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2x + 1$$

$$6) \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x = 11$$

$$7) \sqrt{x^2 + 4x + 4} = |2x + 1|$$

$$8) \sqrt{x^2 + x + 1} = x + 2$$

$$9) \sqrt{3x^2 - 4x + 3} = 1 - 2x$$

$$10) \sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$$

$$11) \sqrt{1 - x^2} = x - 1$$

$$12) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$$

**Bài 5:** Giải các phương trình sau

1)  $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$

2)  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$

3)  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$

4)  $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$

5)  $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2 - 1$

6)  $\sqrt{x^4-2x^2+1} = x - 1$

7)  $\sqrt{x^4-8x^2+16} = 2-x$

8)  $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$

$$9) \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$$

$$10) \sqrt{x^2 - 8x + 16} + |x + 2| = 0$$

$$11) \sqrt{x - 2} - 3\sqrt{x^2 - 4} = 0$$





## CHUYÊN ĐỀ 3: TÍNH GIÁ TRỊ (RÚT GỌN) BIỂU THỨC SỐ CHỨA CĂN

- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Hằng đẳng thức



### 2. Các phép biến đổi căn

### 3. Các phép biến đổi khử căn ở mẫu

## B- BÀI GIẢNG TRÊN LỚP

### Ví dụ 1: Thực hiện tính

a)  $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

b)  $\sqrt{147} + \sqrt{54} - 4\sqrt{27}$



$$c) 2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{98} - \sqrt{18}$$

$$d) 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$$

$$e) \frac{3}{4}\sqrt{50} - \frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{2}\sqrt{32}$$

### Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức

$$a) (2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$$

$$b) 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$$

$$c) (\sqrt{50} - 3\sqrt{98}) : \sqrt{2} - \sqrt{162} : \sqrt{2}$$

$$d) \left( 2\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{5\frac{1}{16}} \right) : \sqrt{16}$$

### Ví dụ 3: Thực hiện phép tính

$$a) 2\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}\sqrt{75}$$

$$b) (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$$

**Ví dụ 4: Thực hiện phép tính**

a)  $(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5}$

b)  $3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$

**Ví dụ 5: Thực hiện tính**

a)  $\sqrt{5} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

d)  $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

**Ví dụ 6: Rút gọn**

a)  $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - (\sqrt{7} + \sqrt{3})$

b)  $\frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - 2\sqrt{2}$

$$c) \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$d) \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3+\sqrt{3}}$$

## C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 14

### Bài 1: Thực hiện tính

$$a) 3\sqrt{50} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{18}$$



$$b) 2\sqrt{80} - 2\sqrt{245} + 2\sqrt{180}$$

$$b) \sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 7\sqrt{112}$$

$$d) \sqrt{20} - 2\sqrt{10} + \sqrt{45}$$

$$e) 2\sqrt{12} - \sqrt{48} + 3\sqrt{27} - \sqrt{108}$$

$$f) 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$$

$$g) \sqrt{49} - 5\sqrt{28} + \frac{1}{2}\sqrt{63}$$

Ôn bài

Ngày này bọn nó đi chơi, mình ở nhà học, mình phải học giỏi hơn mấy đứa đi chơi. Cố lên chiaki !!!!



## Bài 2: Rút gọn

a)  $(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{8}) \cdot 3\sqrt{6}$

b)  $(\sqrt{48} - 3\sqrt{27} - \sqrt{147}) : \sqrt{3}$

c)  $(2\sqrt{1\frac{9}{10}} - \sqrt{5\frac{1}{10}}) : \sqrt{10}$

d)  $2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$

## Bài 3: Thực hiện phép tính

a)  $\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{4}\sqrt{120} - \sqrt{\frac{15}{2}}$

b)  $(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{5} + \sqrt{3})$

## Bài 4: Rút gọn biểu thức

a)  $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - (\sqrt{2} - 1)$

# CHUYÊN ĐỀ 3 : BÀI TOÁN RÚT GỌN VÀ CÂU HỎI LIÊN QUAN

## Bài 1 : RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ BIẾN

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Cho  $x \geq 0, y \geq 0$ . Ta có các công thức biến đổi sau:

$$x = (\sqrt{x})^2; \quad x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$$

$$1. (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$1. (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$2. (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$2. (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$$

$$3. A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$3. x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$4. (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$4. x \pm \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} \pm 1)$$

$$5. (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$5. x\sqrt{y} \pm y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$$

$$6. A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$6. x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$$

$$7. A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$7. x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)$$

---

---

---

---

---

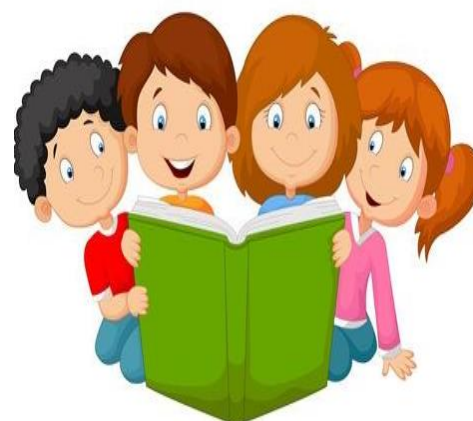
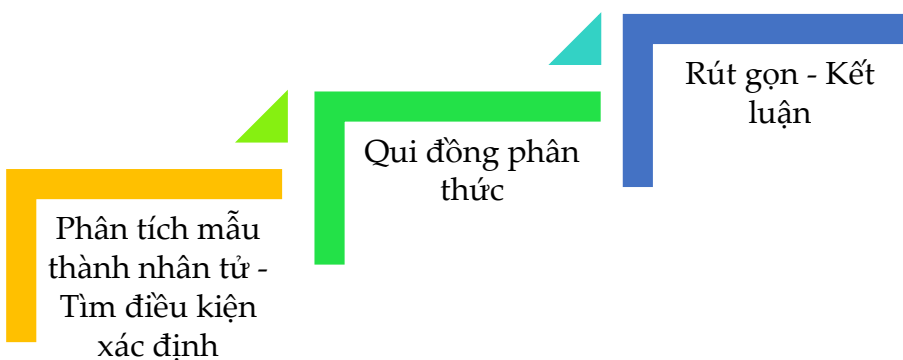
---

---

---



### B- Bài tập trên lớp :

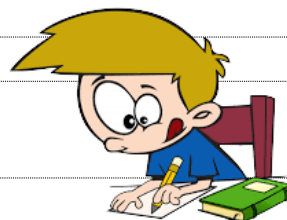


## Bài 1: Rút gọn biểu thức

a)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$

b)  $\left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$

c)  $\left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{3}{2-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$



$$d) \left( \frac{2\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}+1} \right) \left( 1 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : (1 - \sqrt{x})$$

$$e) \left( \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$f) \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



## Bài 2: Rút gọn biểu thức



$$\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}-1\right):\left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}-\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$$



$$\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+3}{x-9}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right)$$



$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\left( \frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left( \frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$$

**Bài 1 :** Rút gọn các biểu thức sau :

$$1 \left( \frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$$

$$3 \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$$

$$4 \left( \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$5 \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN 15

LÀM NHIỀU BÀI TẬP SẼ GIỎI



## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1 :** Rút gọn các biểu thức sau :

$$1 \left( \frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$2 \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$3 \quad \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$$



$$4 \quad \left( \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

5

$$\frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$$



## BÀI 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- + Nếu bài cho trước giá trị của x (thỏa mãn điều kiện), suy ra x rồi thay vào biểu thức rút gọn.
- + Nếu số x đã cho là một biểu thức số chứa căn thì ta cần biến đổi thu gọn x rồi mới thay vào biểu thức
- + Nếu số x cho thỏa mãn một phương trình nào đó, thì ta tiến hành giải phương trình để tìm x (chỉ nhận nghiệm x thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức rút gọn và phương trình) . Thay giá trị x tìm được vào biểu thức rút gọn

### B- VÍ DỤ TRÊN LỚP

**Ví dụ 1:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$  khi  $x = 9$

**Ví dụ 2:** Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+7}{2\sqrt{x}-1}$  khi  $x = 7 - 2\sqrt{6}$

**Ví dụ 3:** Tính giá trị của biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$  khi  $x = \frac{8}{3+\sqrt{5}}$

**Ví dụ 4:** Tính giá trị của biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$  khi  $x = 2 \left( 1 - \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right) \left( \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - 1 \right)$

**Ví dụ 5:** Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\sqrt{x}-11}{6-\sqrt{x}}$  khi  $|2\sqrt{x} - 5| = \sqrt{x} + 1$

**Ví dụ 6:** Tính giá trị của biểu thức  $F = \frac{7-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$  khi  $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

### C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 16

**Bài 1:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-3}$  với  $x = 16$

**Bài 2:** Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}$  khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$

**Bài 3:** Tính giá trị của biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$  khi  $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$

**Bài 4:** Tính giá trị của biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}-7}{5-\sqrt{x}}$  khi  $|2\sqrt{x} - 1| = 3$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2}\right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$

c) Tính giá trị của A khi  $x = 4 + 2\sqrt{3}$

**Bài 6:** Cho biểu thức  $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+12}{x-9}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tính giá trị của B khi  $x = 36$

c) Tính giá trị của B khi  $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$

**Bài 7:** Cho biểu thức  $C = \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tính giá trị của C khi  $x = 9$

**Bài 8:** Rút gọn biểu thức  $D = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$  với  $x > 0$



## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{5\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$  với  $x = 16$



**Bài 2:** Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}$  khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$

**Bài 3:** Tính giá trị của biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$  khi  $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$



**Bài 4:** Tính giá trị của biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}-7}{5-\sqrt{x}}$  khi  $|2\sqrt{x} - 1| = 3$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2}\right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$
- Tính giá trị của A khi  $x = 4 + 2\sqrt{3}$



**Bài 6:** Cho biểu thức  $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+12}{x-9}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tính giá trị của B khi  $x = 36$

c) Tính giá trị của B khi  $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$



**Bài 7:** Cho biểu thức  $C = \left( \frac{x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tính giá trị của C khi  $x = 9$

**Bài 8:** Rút gọn biểu thức  $D = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$  với  $x > 0$

## BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA BIỂU THỨC RÚT GỌN

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**Bước 1:** Đặt điều kiện

**Bước 2:** Thay biểu thức đã rút gọn vào phương trình về một trong các dạng phương trình sau:

1. Phương trình  $a\sqrt{f(x)} = b$

2. Phương trình tích:  $f(x).g(x) = 0$

3. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

\*  $|f(x)| = k$  (với  $k$  là số đã biết,  $k$  dương) thì giải hai trường hợp  $f(x) = \pm k$

\*  $|f(x) = g(x)|$  (với  $g(x)$  là biểu thức có chứa  $x$ ) thì thường giải theo cách sau:

+ Điều kiện  $g(x) \geq 0$

+ Giải hai trường hợp  $f(x) = \pm g(x)$

4. Phương trình dạng tổng các biểu thức không âm bằng 0, thường gặp hai dạng sau:

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0 \quad \text{hoặc} \quad (f(x))^2 + \sqrt{g(x)} = 0$$

**Cách lập luận :**

+ Vì  $(f(x))^2 \geq 0$ ;  $(g(x))^2 \geq 0$  hoặc  $\sqrt{g(x)} \geq 0$  nên phương trình thỏa mãn khi  $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

+ Giải tìm  $x$  rồi đối chiếu với điều kiện và kết luận

5. Phương trình giải theo cách đánh giá từng vế

### B- VÍ DỤ TRÊN LỚP

**Ví dụ 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$  Tìm  $x$  để  $A = \frac{1}{2}$



**Ví dụ 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{2\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ . Tìm  $x$  để  $B = -2\sqrt{x} + 5$

**Ví dụ 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}-10}$  Tìm  $x$  để  $C(\sqrt{x} - 5) + 2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x-2)} + 7$

**Ví dụ 4:** Cho hai biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-7}$  và  $E = \frac{2}{\sqrt{x}-7}$  Tìm  $x$  để  $2D : E = |x - 9|$

### C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 17

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Tìm  $x$  để  $A = \frac{1}{3}$

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ . Tìm  $x$  để  $B = -2$

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$  với  $x > 0; x \neq 4$ . Tìm  $x$  để  $\sqrt{2c-1} = \sqrt{c^2-1}$

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Tìm  $x$  để  $D = \frac{\sqrt{x}}{2}$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $E = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ . Tìm  $x$  để  $D = \frac{13}{3}$

**Bài 6\*** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$ . Tìm  $x$  để  $A = B|x-4|$

**Bài 7\*** Cho biểu thức  $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  Tìm  $x$  để  $A = B|\sqrt{x}-3|$

**Bài 8\*** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x$  để  $x.A + 9 = 3\sqrt{x} - \sqrt{x-9}$

**Bài 9\*:** Cho biểu thức  $B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$

a) Chứng minh  $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

b) Tìm  $x$  thỏa mãn  $B\sqrt{x} + (2\sqrt{3} + 3)\sqrt{x} = 3x - 4\sqrt{x+1} + 10$



### D- HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Tìm  $x$  để  $A = \frac{1}{3}$

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ . Tìm  $x$  để  $B = -2$

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$  với  $x > 0; x \neq 4$ . Tìm  $x$  để  $\sqrt{2c-1} = \sqrt{c^2-1}$

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Tìm  $x$  để  $D = \frac{\sqrt{x}}{2}$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $E = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ . Tìm  $x$  để  $D = \frac{13}{3}$

**Bài 6\*** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$ . Tìm  $x$  để  $A = B|x - 4|$



**Bài 7\*** Cho biểu thức  $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  Tìm  $x$  để  $A = B|\sqrt{x} - 3|$

**Bài 8\*** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x$  để  $x.A + 9 = 3\sqrt{x} - \sqrt{x-9}$



**Bài 9\*:** Cho biểu thức  $B = \left( \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left( \frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$

a) Chứng minh  $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

b) Tìm  $x$  thỏa mãn  $B\sqrt{x} + (2\sqrt{3} + 3)\sqrt{x} = 3x - 4\sqrt{x+1} + 10$



# BÀI 4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA BIỂU THỨC RÚT GỌN

## A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

\*Các dạng bất phương trình thường gặp:



## B- BÀI GIẢNG TRÊN LỚP

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ . Tìm  $x$  để  $A < 1$



**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm  $x$  để  $B \geq \frac{1}{2}$

**Bài 3:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm  $x$  để  $\sqrt{B} < \frac{1}{2}$



**Bài 4:** Cho hai biểu thức  $M = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$  và  $N = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ . Tìm  $x$  để  $\frac{x}{4} \leq \frac{M}{N} - 5$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$ . Tìm  $x$  để  $\frac{4A}{B} > \frac{x}{\sqrt{x-3}}$

## C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 18

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}$ . Tìm  $x$  để  $A > -3$

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ . Tìm  $x$  để  $B \geq \frac{2}{5}$

**Bài 3:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{3x+9\sqrt{x}}{x-9}$ . Tìm  $x$  để  $A \cdot B > \sqrt{x}$

**Bài 4:** Cho biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ . Tìm  $x$  để  $C < 2$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}$ . Tìm  $x$  để  $D \leq -\frac{3}{4}$

**Bài 6:** Cho biểu thức  $E = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm  $x$  để  $\sqrt{E} < \frac{2}{3}$

**Bài 7:** Cho biểu thức  $F = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ . Tìm  $x$  để  $F \cdot (x - 3\sqrt{x} + 2) \leq 5\sqrt{x} - 10$

**Bài 8:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $\frac{4A}{B} \leq \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

**Bài 9:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ . Đặt  $P=A \cdot B$ . Tìm  $x$  để  $|P + 1| > P + 1$

**Bài 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm  $x$  để  $B \cdot (x - 5\sqrt{x} - 14) < 81$

**Bài 11:** Cho biểu thức  $A = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{x-25}$ . Tìm số nguyên  $x$  nhỏ nhất thỏa mãn  $|A| = A$

**Bài 12:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ . Tìm  $x$  để  $\frac{4}{p} \cdot (\sqrt{x} + 2) + 16 \geq x + \sqrt{x-4}$

## D- HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN 18

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}$ . Tìm  $x$  để  $A > -3$



**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ . Tìm  $x$  để  $B \geq \frac{2}{5}$



**Bài 3:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{3x+9\sqrt{x}}{x-9}$ . Tìm  $x$  để  $A \cdot B > \sqrt{x}$

**Bài 4:** Cho biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ . Tìm  $x$  để  $C < 2$

**Bài 5:** Cho biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$ . Tìm  $x$  để  $D \leq -\frac{3}{4}$

**Bài 6:** Cho biểu thức  $E = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm  $x$  để  $\sqrt{E} < \frac{2}{3}$



**Bài 7:** Cho biểu thức  $F = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$ . Tìm  $x$  để  $F \cdot (x - 3\sqrt{x} + 2) \leq 5\sqrt{x} - 10$

**Bài 8:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $\frac{4A}{B} \leq \frac{x}{\sqrt{x-3}}$

**Bài 9:** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ . Đặt  $P=A.B$ . Tìm  $x$  để  $|P + 1| > P + 1$

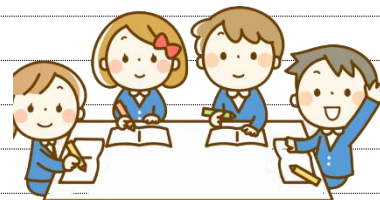
**Bài 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm  $x$  để  $B.(x - 5\sqrt{x} - 14) < 81$

**Bài 11:** Cho biểu thức  $A = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{x-25}$ . Tìm số nguyên  $x$  nhỏ nhất thỏa mãn  $|A| = A$

**Bài 12:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ . Tìm  $x$  để  $\frac{4}{p} \cdot (\sqrt{x} + 2) + 16 \geq x + \sqrt{x-4}$

## BÀI 5: SO SÁNH HAI BIỂU THỨC BẰNG CÁCH XÉT HIỆU

### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ



### B- BÀI GIẢNG TRÊN LỚP

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$  so sánh  $A$  với  $B$

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ . So sánh  $B$  với  $\frac{1}{2}$

**Bài 3:** Cho biểu thức  $Q = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ . So sánh Q và 4

**Bài 4:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ . So sánh A với  $A^2$ .



**Bài 5:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ . So sánh P và  $\sqrt{P}$

**Bài 6:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$  với  $x > 0; x \neq 9$ . Đặt  $M = A:B$ , so sánh  $M$  và  $|M|$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---





## C- BÀI TẬP TỰ LUYỆN 19

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ . So sánh A với 1

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{x+12}{\sqrt{x+2}}$ . Chứng minh  $B \geq 4$

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ . So sánh C với  $-2\sqrt{x}$

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{x}{x+\sqrt{x+1}}$ . Chứng minh  $\frac{1}{D} \cdot x \geq 3\sqrt{x}$

**Bài 5:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$  và  $B = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ . Khi  $A > 0$ , hãy so sánh B với 6

**Bài 6:** Cho biểu thức  $E = \frac{1-\sqrt{x+x}}{\sqrt{x}}$ . So sánh E với  $\sqrt{E}$  (hoặc  $E^2$  với E)

**Bài 7:** Cho biểu thức  $F = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ . So sánh F với  $F^2$ .

**Bài 8:** Cho hai biểu thức  $M = \frac{2x-\sqrt{x}-15}{2x-2}$  và  $N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ . Đặt  $P=N.M$ , so sánh P với  $P^3$ .



## D- HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN 19

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ . So sánh A với 1

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{x+12}{\sqrt{x+2}}$ . Chứng minh  $B \geq 4$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ . So sánh C với  $-2\sqrt{x}$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{x}{x+\sqrt{x+1}}$ . Chứng minh  $\frac{1}{D} \cdot x \geq 3\sqrt{x}$

**Bài 5:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$  và  $B = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ . Khi  $A > 0$ , hãy so sánh B với 6

**Bài 6:** Cho biểu thức  $E = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$ . So sánh E với  $\sqrt{E}$  (hoặc  $E^2$  với E)

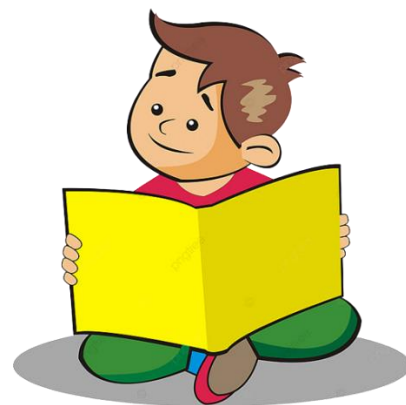
**Bài 7:** Cho biểu thức  $F = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ . So sánh F với  $F^2$ .

**Bài 8:** Cho hai biểu thức  $M = \frac{2x-\sqrt{x}-15}{2x-2}$  và  $N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ . Đặt  $P=N.M$ , so sánh P với  $P^3$ .



*Chăm chỉ làm bài tập nên giờ em rất giỏi!*

## BÀI 7: TÌM GTLN, GTNN



### \* Lưu ý:

Các phương pháp thường dùng

- Đánh giá dựa vào điều kiện xác định  $x \geq 0$
- Dùng bất đẳng thức cosi cho hai số không âm:  
$$a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}. \text{ Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = b$$
- Đánh giá dựa vào điều kiện cho thêm ở đề bài

### \* Các ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Ví dụ 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{-5}{\sqrt{x+7}}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### **Ví dụ 3:**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $B = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$  với  $x \geq 0$

**Ví dụ 4:** Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}+10}{x-16}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-4}{2}$  với  $x \geq 0, x \neq 16$

a) Tính giá trị của B khi  $x = \frac{16}{25}$    b) Rút gọn biểu thức  $M=A.B$    c) Tìm GTLN của biểu thức M

**Ví dụ 5:**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 1$

b) Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x+5}{\sqrt{x}-2}$  với  $x > 4$

c) Tìm GTNN của biểu thức  $M = \frac{x+7}{\sqrt{x}-3}$  với  $x > 9$

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0$



**Ví dụ 6:** Cho biểu thức  $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$  và  $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{1-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1\right)$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của A khi  $x = 16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị lớn nhất của  $M = \frac{A}{B}$



**Ví dụ 7:** Với số tự nhiên  $x$  và  $x > 2$ , Hãy tìm GTNN của biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

### C\* Bài tập tự luyện 20

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3}{2\sqrt{x+5}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{-7}{\sqrt{x+11}}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức C

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+7}}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức D

**Bài 5:** Cho biểu thức  $E = \frac{11}{x+\sqrt{x+3}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức E

**Bài 6:** Cho biểu thức  $P = \frac{x+5}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm GTNN của biểu thức P

**Bài 7:** Cho biểu thức  $M = \frac{x-5}{\sqrt{x+3}}$ . Tìm GTNN của biểu thức M

**Bài 8:** Cho biểu thức  $N = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ . Tìm GTNN của biểu thức N

**Bài 9:** Cho biểu thức  $P = \frac{x-\sqrt{x+13}}{\sqrt{x+3}}$ . Tìm GTNN của biểu thức P

**Bài 10:** Cho biểu thức  $Q = \frac{\sqrt{x-5x+1}}{\sqrt{x}}$ . Tìm GTLN của biểu thức Q

**Bài 11:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+4}}$ . Tìm GTLN của biểu thức A



**Bài 12:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

**Bài 13:** Cho biểu thức  $M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ , với  $x > 4$ , hãy tìm GTNN của biểu thức M

**Bài 14:** Cho biểu thức  $N = \frac{x-4}{\sqrt{x}-3}$ . Khi  $\sqrt{N}$  xác định, Tìm GTNN và GTLN của  $\sqrt{N}$ .

**Bài 15:** Cho biểu thức  $A = \frac{4\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)^2}$ . Tìm GTLN của biểu thức A

**Bài 16:** Cho biểu thức  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm GTNN của biểu thức  $P = B(x-4) - 2\sqrt{x-3} + 8$

## D- HƯỚNG DẪN GIẢI BTTL 20

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{3}{2\sqrt{x}+5}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 2:** Cho biểu thức  $B = \frac{-7}{\sqrt{x}+11}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 3:** Cho biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức C

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bài 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+7}}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức D

**Bài 5:** Cho biểu thức  $E = \frac{11}{x+\sqrt{x+3}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức E

**Bài 6:** Cho biểu thức  $P = \frac{x+5}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm TGNN của biểu thức P

**Bài 7:** Cho biểu thức  $M = \frac{x-5}{\sqrt{x+3}}$ . Tìm GTNN của biểu thức M

**Bài 8:** Cho biểu thức  $N = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ . Tìm GTNN của biểu thức N

**Bài 9:** Cho biểu thức  $P = \frac{x-\sqrt{x}+13}{\sqrt{x+3}}$ . Tìm GTNN của biểu thức P

**Bài 10:** Cho biểu thức  $Q = \frac{\sqrt{x}-5x+1}{\sqrt{x}}$ . Tìm GTLN của biểu thức Q

**Bài 11:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+4}$ . Tìm GTLN của biểu thức A

**Bài 12:** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

**Bài 13:** Cho biểu thức  $M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ , với  $x > 4$ , hãy tìm GTNN của biểu thức M

**Bài 14:** Cho biểu thức  $N = \frac{x-4}{\sqrt{x}-3}$ . Khi  $\sqrt{N}$  xác định, Tìm GTNN và GTLN của  $\sqrt{N}$ .

**Bài 15:** Cho biểu thức  $A = \frac{4\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)^2}$ . Tìm GTLN của biểu thức A



**Bài 16:** Cho biểu thức  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ . Tìm GTNN của biểu thức  $P = B(x - 4) - 2\sqrt{x - 3} + 8$

### E- LUYỆN TẬP

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$  (với  $x \geq 0; x \neq 9$ )

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

**Bài 2:** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} \text{ và } B = \frac{4}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2x - \sqrt{x} - 13}{x - 9} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 16$
- Đặt  $P = \frac{B}{A}$ . Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P



**Bài 3:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$  và  $B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$  với  $x > 0, x \neq -3$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm  $x$  để  $P = \frac{B}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất



**Bài 4:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm  $x$  để  $A \leq 0$

c) Tìm GTLN của biểu thức  $P = A - 9\sqrt{x}$



**Bài 5:** Cho biểu thức  $P = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $P = \frac{5}{4}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = \frac{x+12}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{P}$



**Bài 6:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$  và  $B = \left( \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$  với  $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của A khi  $x^2 = 16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Với  $x \in \mathbb{Z}$ , Tìm GTLN của biểu thức  $M = A.B$

**Bài 7:** Cho biểu thức  $A = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-5\sqrt{x}+2}{x-4}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của A khi  $x = 64$

b) Rút gọn B

c) Với  $x > 4$ , Tìm GTNN của biểu thức  $M=A.B$



## BÀI 8: TÌM X NGUYÊN ĐỂ BIỂU THỨC NHẬN GIÁ TRỊ NGUYÊN

### A- BÀI GIẢNG TRÊN LỚP

**Ví dụ 1:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$  nhận giá trị là số nguyên

**Ví dụ 2:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$  nhận giá trị là số nguyên

**Ví dụ 3:** Tìm  $\in Z$  để biểu thức  $C = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  nhận giá trị nguyên

**Ví dụ 4:** Cho biểu thức  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

- a) Tìm  $\in Z$  để biểu thức D nhận giá trị là số nguyên âm  
b) Tìm  $\in Z$  để biểu thức D nhận giá trị là số nguyên dương

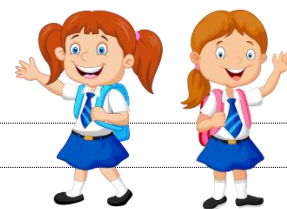


**Ví dụ 5:** Tìm  $\in Z$  để biểu thức  $A = \frac{x-7}{\sqrt{x+2}}$  nhận giá trị là số nguyên

**Ví dụ 6:** Tìm  $\in Z$  để biểu thức  $M = \frac{x-2}{\sqrt{x-3}}$  nhận giá trị nguyên



**Ví dụ 7:** Tìm  $\in Z$  để biểu thức  $M = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}-1}$  nhận giá trị nguyên





**Bài 2:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x-2}}$  nhận giá trị là một số tự nhiên

**Bài 3:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}}$  nhận giá trị là một số nguyên âm

**Bài 4:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $D = \frac{5\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$  nhận giá trị là một số nguyên

**Bài 5:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $E = \frac{x-5}{\sqrt{x}-3}$  nhận giá trị là một số nguyên tố

**Bài 6:** Tìm  $x \in Z$  để biểu thức  $P = \frac{2\sqrt{x+3}}{x-5}$  là số nguyên

**Bài 7:** Cho biểu thức  $M = \frac{3\sqrt{x}-2}{2x+1}$  Tìm các giá trị  $x$  nguyên để  $M$  là số nguyên

## BÀI 9: TÌM X ĐỂ BIỂU THỨC NHẬN GIÁ TRỊ NGUYÊN

### A- BÀI TẬP TRÊN LỚP

**Ví dụ 1:** Tìm số thực  $x$  để  $A = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$  nhận giá trị là số nguyên



**Ví dụ 2:** Tìm số thực  $x$  để biểu thức  $B = \frac{7}{2\sqrt{x}+3}$  nhận giá trị nguyên

**Ví dụ 3:** Tìm số  $x$  để biểu thức  $C = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$  nhận giá trị nguyên

**Ví dụ 4:** Tìm x để biểu thức  $D = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$  nhận giá trị là số nguyên

**Ví dụ 5:** Tìm x để biểu thức  $E = \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$  nhận giá trị nguyên





**Bài 3:** Tìm các giá trị của  $x$  để biểu thức  $A = \frac{7\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$  nhận giá trị nguyên

**Bài 4:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+1}$ . Tìm các giá trị của  $x$  để  $A$  là ước của 2000.

## BÀI 9: TÌM THAM SỐ $m$

### ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA BIỂU THỨC RÚT GỌN CÓ NGHIỆM

#### A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### B- BÀI GIẢNG TRÊN LỚP

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ . Tìm  $m$  để phương trình  $A=m$  có nghiệm

**Bài 2:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ . Đặt  $P=A:B$ , Tìm các giá trị của  $m$  để có nghiệm  $x$  thỏa mãn  $P = \frac{1}{m}$

**Bài 3:** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-4}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$ . Tìm số nguyên  $m$  nhỏ nhất để phương trình  $A:B=m+1$  có nghiệm













**Bài 6:** Cho biểu thức  $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P, biết  $x = (1 - \sqrt{3})^2$

c) Tính giá trị của x thỏa mãn  $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$











