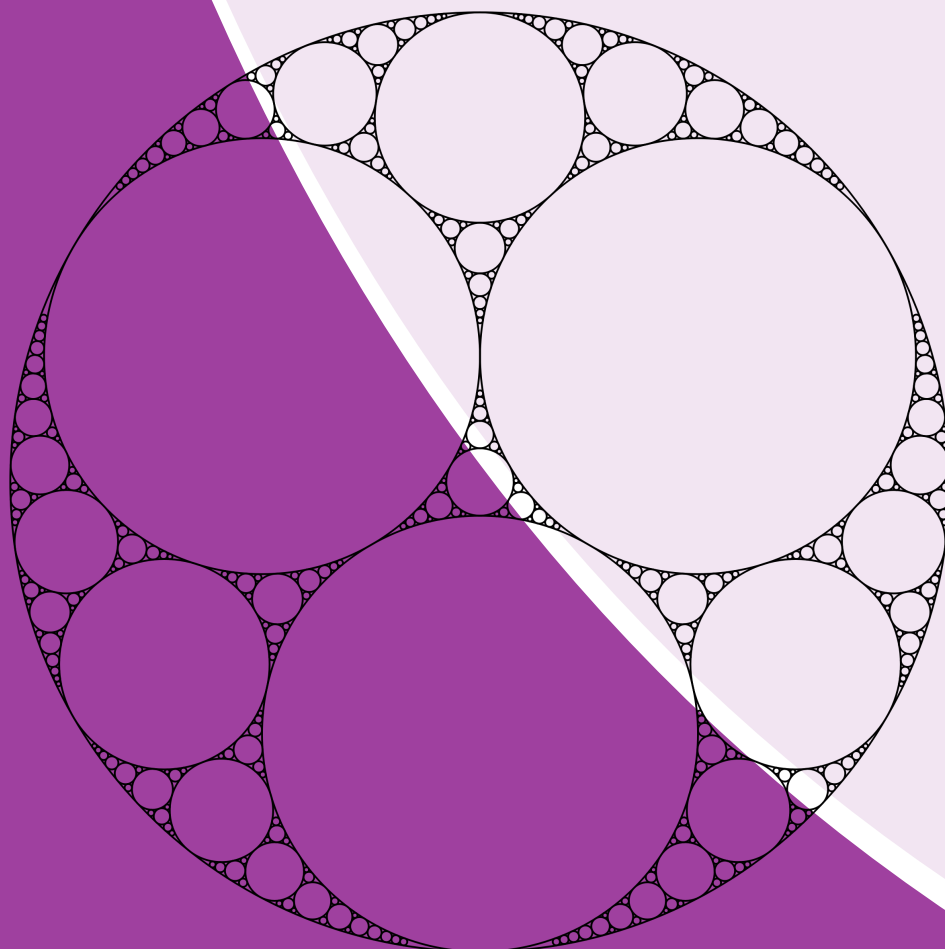


KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG  
NĂM HỌC 2019-2020

50 DẠNG TOÁN  
PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 1



NĂM 2020

50 DẠNG TOÁN  
PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 1  
MỤC LỤC

|   |                                              |    |
|---|----------------------------------------------|----|
| 1 | PHÉP ĐẾM                                     | 13 |
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                            | 13 |
| 2 | Bài tập mẫu                                  | 13 |
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển               | 14 |
| 2 | CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN                    | 17 |
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                            | 17 |
| 2 | Bài tập mẫu                                  | 18 |
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển               | 18 |
| 3 | SỬ DỤNG CÁC CÔNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH NÓN | 21 |
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                            | 21 |
| 2 | Bài tập mẫu                                  | 21 |
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển               | 22 |
| 4 | XÉT SỰ ĐƠN ĐIỀU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN      | 26 |
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                            | 26 |
| 2 | BÀI TẬP MẪU                                  | 26 |
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển               | 26 |
| 5 | THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỀU                   | 32 |
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                            | 32 |

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | BÀI TẬP MẪU | 32 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển | 32 |
|---|--------------------------------|----|

|   |                                             |    |
|---|---------------------------------------------|----|
| 6 | GIẢI PHƯƠNG TRÌNH -BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT | 36 |
|---|---------------------------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ | 36 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | BÀI TẬP MẪU | 36 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN | 37 |
|---|--------------------------------|----|

|   |                                 |    |
|---|---------------------------------|----|
| 7 | SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN | 40 |
|---|---------------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | Kiến thức cần nhớ | 40 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | Bài tập mẫu | 40 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển | 41 |
|---|--------------------------------|----|

|   |                |    |
|---|----------------|----|
| 8 | CỰC TRỊ HÀM SỐ | 47 |
|---|----------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ | 47 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | BÀI TẬP MẪU | 47 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN | 47 |
|---|--------------------------------|----|

|   |                                            |    |
|---|--------------------------------------------|----|
| 9 | KHẢO SÁT HÀM SỐ - NHẬN DẠNG HÀM SỐ, ĐỒ THỊ | 55 |
|---|--------------------------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ | 55 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | BÀI TẬP MẪU | 57 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN | 58 |
|---|--------------------------------|----|

|    |                               |    |
|----|-------------------------------|----|
| 10 | SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LOGARIT | 65 |
|----|-------------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | KIẾN THỨC CẦN NHỚ | 65 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | BÀI TẬP MẪU | 65 |
|---|-------------|----|

|    |                                                            |    |
|----|------------------------------------------------------------|----|
| 3  | BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN                             | 66 |
| 11 | TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM | 69 |
| 1  | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                                          | 69 |
| 2  | BÀI TẬP MẪU                                                | 70 |
| 3  | BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN                             | 70 |
| 12 | KHÁI NIỆM SỐ PHỨC                                          | 74 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                          | 74 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                | 75 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                             | 75 |
| 13 | BÀI TOÁN TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ     | 79 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                          | 79 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                | 80 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                             | 80 |
| 14 | XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU    | 85 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                          | 85 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                | 85 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                             | 86 |
| 15 | XÁC ĐỊNH VECTO PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG                    | 89 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                          | 89 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                | 89 |

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển | 90 |
|---|--------------------------------|----|

|    |                          |    |
|----|--------------------------|----|
| 16 | PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG | 93 |
|----|--------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | Kiến Thức Cần Nhớ | 93 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | Bài Tập Mẫu | 93 |
|---|-------------|----|

|   |                                |    |
|---|--------------------------------|----|
| 3 | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển | 94 |
|---|--------------------------------|----|

|    |                                                                            |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 17 | XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, HAI MẶT PHẪNG | 98 |
|----|----------------------------------------------------------------------------|----|

|   |                   |    |
|---|-------------------|----|
| 1 | Kiến Thức Cần Nhớ | 98 |
|---|-------------------|----|

|   |             |    |
|---|-------------|----|
| 2 | Bài Tập Mẫu | 99 |
|---|-------------|----|

|   |                                |     |
|---|--------------------------------|-----|
| 3 | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển | 100 |
|---|--------------------------------|-----|

|    |                                             |     |
|----|---------------------------------------------|-----|
| 18 | ĐẾM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN | 105 |
|----|---------------------------------------------|-----|

|   |                   |     |
|---|-------------------|-----|
| 1 | kiến thức cần nhớ | 105 |
|---|-------------------|-----|

|   |             |     |
|---|-------------|-----|
| 2 | bài tập mẫu | 105 |
|---|-------------|-----|

|   |                                |     |
|---|--------------------------------|-----|
| 3 | Bài tập tương tự và phát triển | 105 |
|---|--------------------------------|-----|

|    |                                                                 |     |
|----|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 19 | TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN | 113 |
|----|-----------------------------------------------------------------|-----|

|   |                   |     |
|---|-------------------|-----|
| 1 | Kiến Thức Cần Nhớ | 113 |
|---|-------------------|-----|

|   |             |     |
|---|-------------|-----|
| 2 | Bài Tập Mẫu | 113 |
|---|-------------|-----|

|   |                                |     |
|---|--------------------------------|-----|
| 3 | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển | 114 |
|---|--------------------------------|-----|

|    |                            |     |
|----|----------------------------|-----|
| 20 | BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC LÔGARIT | 118 |
|----|----------------------------|-----|

|   |                   |     |
|---|-------------------|-----|
| 1 | Kiến Thức Cần Nhớ | 118 |
|---|-------------------|-----|

|   |             |     |
|---|-------------|-----|
| 2 | Bài Tập Mẫu | 118 |
|---|-------------|-----|

|    |                                              |     |
|----|----------------------------------------------|-----|
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 119 |
| 21 | PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT | 123 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                            | 123 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                  | 123 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 124 |
| 22 | Khối trụ                                     | 127 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                            | 127 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                  | 127 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 128 |
| 23 | LIÊN QUAN GIAO ĐIỂM TỪ HAI ĐỒ THỊ            | 133 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                            | 133 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                  | 133 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 134 |
| 24 | NGUYÊN HÀM CƠ BẢN                            | 141 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                            | 141 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                  | 141 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 142 |
| 25 | TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG HÀM MŨ VÀ LOGARIT       | 146 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                            | 146 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                  | 146 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển               | 147 |

|    |                                                             |     |
|----|-------------------------------------------------------------|-----|
| 26 | TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG                            | 152 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                           | 152 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                 | 153 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                              | 154 |
| 27 | TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ                                  | 160 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                           | 160 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                                 | 160 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                              | 161 |
| 28 | TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ - HÀM SỐ - ĐẠO HÀM                         | 166 |
| 1  | Bài Tập Mẫu                                                 | 166 |
| 2  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                              | 167 |
| 29 | Ứng dụng tích phân                                          | 174 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                           | 174 |
| A  | Tóm tắt lí thuyết                                           | 174 |
| 1  | Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành | 174 |
| 2  | Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong                      | 174 |
| 3  | Thể tích vật thể                                            | 174 |
| 4  | Thể tích khối tròn xoay                                     | 175 |
| 5  | Bài Tập Mẫu                                                 | 176 |
| 6  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 176 |

|    |                                                  |     |
|----|--------------------------------------------------|-----|
| 30 | CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC                            | 184 |
| 1  | Kiến Thức Cần Nhớ                                | 184 |
| 2  | Bài Tập Mẫu                                      | 184 |
| 3  | Bài Tập Tương Tự và Phát Triển                   | 185 |
| 31 | BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC                   | 188 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                | 188 |
| 2  | Bài tập mẫu                                      | 188 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                   | 188 |
| 32 | Tích vô hướng của hai vecto trong không gian     | 193 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                | 193 |
| 2  | Bài tập mẫu                                      | 194 |
| 3  | Bài tập tương tự và mở rộng                      | 194 |
| 33 | VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU                        | 198 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                | 198 |
| 2  | Bài tập mẫu                                      | 198 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                   | 199 |
| 34 | Phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng | 203 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                | 203 |
| 2  | Bài tập mẫu                                      | 203 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                   | 204 |



|    |                                                 |     |
|----|-------------------------------------------------|-----|
| 35 | Tìm véc-tơ chỉ phương của đường thẳng           | 208 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                               | 208 |
| 2  | Bài tập mẫu                                     | 209 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                  | 210 |
| 36 | Tính xác suất của biến cố bằng định nghĩa       | 214 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                               | 214 |
| 2  | Bài tập mẫu                                     | 214 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                  | 215 |
| 37 | Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau      | 221 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                               | 221 |
| 2  | Bài tập mẫu                                     | 223 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                  | 224 |
| A  | SỬ DỤNG PP TỌA ĐỘ ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH.          | 228 |
| 38 | Tích phân cơ bản (a), kết hợp (b)               | 230 |
| 1  | kiến thức cần nhớ                               | 230 |
| 2  | Bài tập mẫu                                     | 231 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                  | 232 |
| 39 | Tìm tham số để hàm số bậc 1 trên bậc 1 đơn điệu | 239 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                               | 239 |
| 2  | BÀI TẬP MẪU                                     | 241 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                  | 242 |

|    |                                                |     |
|----|------------------------------------------------|-----|
| 40 | KHỐI NÓN                                       | 248 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                              | 248 |
| 2  | Bài tập mẫu                                    | 249 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                 | 250 |
| 41 | Lôgarit                                        | 256 |
| 1  | kiến thức cần nhớ                              | 256 |
| 2  | Bài tập mẫu                                    | 256 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                 | 257 |
| 42 | Max, min của hàm trị tuyệt đối có chứa tham số | 262 |
| 1  | kiến thức cần nhớ                              | 262 |
| 2  | Bài tập mẫu                                    | 262 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                 | 263 |
| 43 | Phương trình logarit có chứa tham số           | 268 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                              | 268 |
| 2  | Bài tập mẫu                                    | 268 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                 | 269 |
| 44 | Nguyên hàm từng phần                           | 275 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                              | 275 |
| 2  | Bài tập mẫu                                    | 276 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                 | 276 |

|    |                                                             |     |
|----|-------------------------------------------------------------|-----|
| 45 | Liên quan đến giao điểm của hai đồ thị.                     | 283 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                           | 283 |
| 2  | Bài tập mẫu                                                 | 283 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 285 |
| 46 | Tìm cực trị của hàm số hợp $f(u(x))$ khi biết đồ thị hàm số | 296 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                           | 296 |
| 2  | Bài tập mẫu                                                 | 297 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 301 |
| 47 | Ứng dụng phương pháp hàm số giải phương trình mũ và logarit | 312 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                           | 312 |
| 2  | Bài tập mẫu                                                 | 312 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 313 |
| 48 | Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn                 | 319 |
| 1  | Kiến thức cần nhớ                                           | 319 |
| 2  | Bài tập mẫu                                                 | 320 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 322 |
| 49 | Tính thể tích khối chóp biết góc giữa hai mặt phẳng         | 330 |
| 1  | Bài tập mẫu                                                 | 330 |
| 2  | Bài tập tương tự và phát triển                              | 332 |

|    |                                   |     |
|----|-----------------------------------|-----|
| 50 | TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ LIÊN KẾT | 338 |
| 1  | KIẾN THỨC CẦN NHỚ                 | 338 |
| 2  | BÀI TẬP MẪU                       | 339 |
| 3  | Bài tập tương tự và phát triển    | 342 |

# DẠNG 1. PHÉP ĐẾM

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### Quy tắc đếm cơ bản

1. **Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có  $m$  cách thực hiện, hành động kia có  $n$  cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có  $m + n$  cách thực hiện.

☑ Nếu  $A$  và  $B$  là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

2. **Quy tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có  $m$  cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có  $n$  cách thực hiện hành động thứ hai thì có  $m.n$  cách hoàn thành công việc.

☑ Dạng toán tìm số các số tạo thành: Gọi số cần tìm có dạng:  $\overline{abc\dots}$ , tùy theo yêu cầu bài toán:

Nếu số lẻ thì số tận cùng là số lẻ.

Nếu số chẵn thì số tận cùng là số chẵn.

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Từ một nhóm học sinh 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

(A) 14.

(B) 48.

(C) 6.

(D) 8.

### Lời giải.

#### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán quy tắc đếm, cụ thể là quy tắc cộng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Số cách chọn 1 học sinh nữ từ 8 học sinh nữ có 8 cách.

B2: Số cách chọn 1 học sinh nam từ 6 học sinh nam có 6 cách.

B3: Số cách chọn ra một học sinh là  $8 + 6 = 14$ .

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Cách 1. Số cách chọn 1 học sinh nữ từ 8 học sinh nữ có 8 cách.

Số cách chọn 1 học sinh nam từ 6 học sinh nam có 6 cách Số cách chọn ra một học sinh là  $8 + 6 = 14$ .

Cách 2. Tổng số học sinh là  $8 + 6 = 14$ .

Số cách chọn 1 học sinh nữ từ 14 học sinh có 14 cách.

Chọn phương án (A)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số từ 7 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

- (A) 1. (B) 3. (C) 6. (D) 9.

**Lời giải.**

Mỗi quả cầu được đánh một số khác nhau, nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần.

Số quả cầu là  $6 + 3 = 9$ .

Tương ứng với 9 cách.

Chọn phương án (D)

**Câu 2.** Lớp 12A có 43 học sinh, lớp 12B có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ lớp 12A và 12B. Hỏi có bao nhiêu cách

- (A) 43. (B) 30. (C) 73. (D) 1290.

**Lời giải.**

Tổng số học sinh 2 lớp là  $43 + 30 = 73$ .

Số cách chọn là 73.

Chọn phương án (A)

**Câu 3.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 1 chữ số?

- (A) 5. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

**Lời giải.**

Số tự nhiên cần lập có 1 chữ số được lấy ra từ 4 số trên, do đó có 4 cách.

Chọn phương án (D)

**Câu 4.** Bạn muốn mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau, các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Như vậy bạn có bao nhiêu cách

- (A) 16. (B) 2. (C) 64. (D) 3.

**Lời giải.**

Mua một cây bút mực có 8 cách.

Mua một cây bút chì có 8 cách.

Công việc mua bút là hành động liên tiếp, theo quy tắc nhân ta có  $8.8 = 64$  cách.

Chọn phương án (C)

**Câu 5.** Bạn cần mua một cây bút để viết bài. Bút mực có 8 loại khác nhau, bút chì có 8 loại khác nhau. Như vậy bạn có bao nhiêu cách

- (A) 16. (B) 2. (C) 64. (D) 3.

**Lời giải.**

Công việc mua bút có 2 phương án độc lập nhau.

Phương án 1 mua một cây bút mực có 8 cách.

Phương án 2 mua một cây bút chì có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có:  $8 + 8 = 16$  cách.

Chọn phương án (A)

**Câu 6.** Từ thành phố A có 10 con đường đến thành phố B, từ thành phố B có 7 con đường đến thành phố C. Từ A đến C phải qua B, hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?

(A) 10.

(B) 7.

(C) 17.

(D) 70.

**Lời giải.**

Công việc đi từ A đến C gồm 2 hành động liên tiếp.

Hành động 1: đi từ A đến B có 10 cách.

Hành động 2: đi từ B đến C có 7 cách.

Theo quy tắc nhân, đi từ A đến C có  $10 \cdot 7 = 70$  cách.

Chọn phương án (D)

**Câu 7.** Từ thành phố A có 10 con đường đi đến thành phố B, từ thành phố A có 9 con đường đi đến thành phố C, từ thành phố B đến thành phố D có 6 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 11 con đường và không có con đường nào nối B với C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố D.

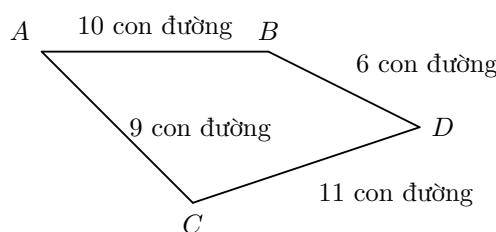
(A) 156.

(B) 159.

(C) 162.

(D) 176.

**Lời giải.**



Phương án 1: đi từ A đến B rồi đến D.

Đây là hành động liên tiếp nên ta áp dụng quy tắc nhân:  $10 \cdot 6 = 60$ .

Phương án 2: đi từ A đến C rồi đến D.

Tương tự ta áp dụng quy tắc nhân:  $9 \cdot 11 = 99$ .

Hai phương án độc lập nhau nên ta áp dụng quy tắc cộng.

$60 + 99 = 159$  cách.

Chọn phương án (B)

**Câu 8.** Trong một giải đấu bóng đá có 20 đội tham gia với thể thức thi đấu vòng tròn. Cứ hai đội thì gặp nhau đúng một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu xảy ra?

(A) 120.

(B) 39.

(C) 380.

(D) 190.

**Lời giải.**

Mỗi đội phải đấu với 19 đội còn lại, nên theo quy tắc nhân ta có  $19 \cdot 20 = 380$  trận.

Nhưng đội A gặp đội B thì được tính hai lần. Do đó số trận đấu thực tế là  $\frac{380}{2} = 190$  trận.

Chọn phương án (D)

**Câu 9.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại, 1 loại nước uống trong 3 loại. Hỏi có bao nhiêu cách lập thực đơn?

(A) 73.

(B) 75.

(C) 85.

(D) 95.

**Lời giải.**

Lập thực đơn gồm 3 hành động liên tiếp:

Chọn món ăn có 5 cách.

Chọn quả có 5 cách.

Chọn nước uống có 3 cách.

Theo quy tắc nhân:  $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$  cách.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho hai tập hợp  $A = \{a, b, c, d\}$ ;  $B = \{e, f, g\}$ . Kết quả của  $n(A \cup B)$  là  
**(A)** 7. **(B)** 5. **(C)** 8. **(D)** 9.

**Lời giải.**

Ta có  $A \cap B = \emptyset$  nên  $A$  và  $B$  rời nhau.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 3 = 7.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Cho hai tập hợp  $A = \{a, b, c, d\}$ ;  $B = \{c, d, e\}$ . Kết quả của  $n(A \cup B)$  là  
**(A)** 7. **(B)** 5. **(C)** 8. **(D)** 9.

**Lời giải.**

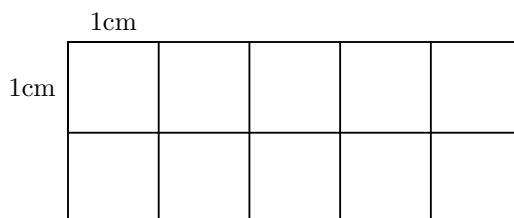
$$\text{Ta có } A \cap B = \{c, d\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2.$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

$$n(A \cup B) = 4 + 3 - 2 = 5.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Có bao nhiêu hình vuông trong hình dưới đây?



**(A)** 14. **(B)** 12. **(C)** 10. **(D)** 5.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp hình vuông có cạnh  $1cm$ .

$B$  là tập hợp hình vuông có cạnh  $2cm$ .

$A$  và  $B$  là hai tập hợp rời nhau.

Số hình vuông trong hình là  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 10 + 4 = 14$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100?  
**(A)** 42. **(B)** 54. **(C)** 62. **(D)** 36.

**Lời giải.**

TH1: Số tự nhiên có một chữ số: 6 số.

TH2: Số tự nhiên có hai chữ số:

Ta đặt là  $\overline{ab}$ .



Ta có:  $6 \cdot 6 = 36$  số thoả mãn.

Vậy số số tự nhiên thoả yêu cầu bài toán là  $6 + 36 = 42$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt lấy 3, 4, 5 điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục toạ độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ và nối chúng lại, hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng cắt hai trục toạ độ, biết đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì không qua  $O$ .

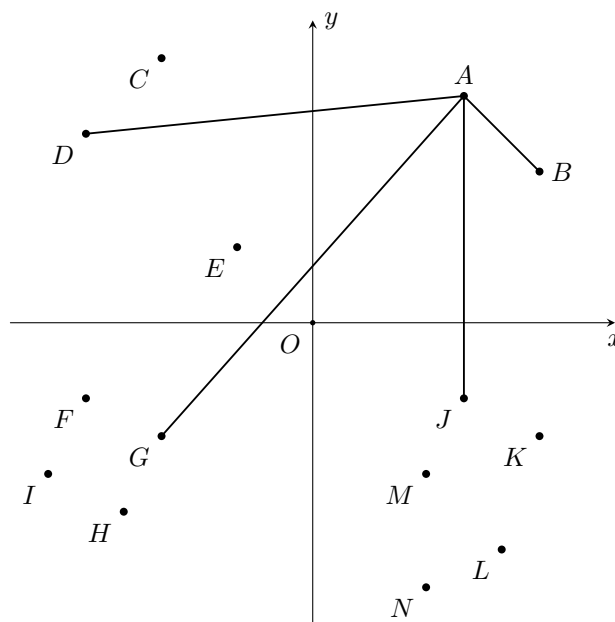
**(A)** 91.

**(B)** 42.

**(C)** 29.

**(D)** 23.

**Lời giải.**



Để chọn 2 điểm trong 14 điểm đã cho nối lại cắt hai trục toạ độ thì hai điểm đó phải thuộc hai góc phần tư đối đỉnh với nhau.

TH1: Chọn 1 điểm ở góc phần tư thứ I và 1 điểm ở góc phần tư thứ III.

Số đoạn thẳng tạo thành:  $2.4 = 8$ .

TH2: Chọn 1 điểm ở góc phần tư thứ II và 1 điểm ở góc phần tư thứ IV.

Số đoạn thẳng tạo thành:  $3.5 = 15$ .

Theo quy tắc cộng ta có  $8 + 15 = 23$  đoạn thẳng.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 15.** Cho tập hợp số  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Hỏi có thể lập thành bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

**(A)** 114.

**(B)** 144.

**(C)** 146.

**(D)** 148.

**Lời giải.**

Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

Trong tập  $A$ , các tập con có 4 chữ số chia hết cho 3 là

$\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 6\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}$ .

Xét bộ số  $\{0, 1, 2, 3\}$ , số số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ bộ này là  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ .

Tương tự các bộ  $\{0, 1, 2, 6\}$ ,  $\{0, 2, 3, 4\}$ ,  $\{0, 3, 4, 5\}$  cũng lập được 18 số.

Xét bộ số  $\{1, 2, 4, 5\}$ , số số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ bộ này là  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

Tương tự cách bộ  $\{1, 2, 3, 6\}$ ,  $\{1, 3, 5, 6\}$  cũng lập được 24 số.

Vậy số số thỏa yêu cầu bài toán là  $18 \cdot 4 + 24 \cdot 3 = 144$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

**(A)** 24.

**(B)** 9.

**(C)** 64.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số cần lập có dạng  $\overline{abc}$ .

$a$  có 4 cách chọn (từ 1, 2, 3, 4).

$b$  có 3 cách chọn (từ 1, 2, 3, 4 trừ số  $a$  đã chọn).

$c$  có 2 cách chọn (từ 1, 2, 3, 4 trừ số  $a, b$  đã chọn).

Theo quy tắc nhân, ta có:  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  cách.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số chia hết cho 5?

**(A)** 180.

**(B)** 120.

**(C)** 360.

**(D)** 216.

**Lời giải.**

Gọi số có 4 chữ số cần lập có dạng  $\overline{abcd}$ .

Để số lập được chia hết cho 5 thì số tận cùng phải chia hết cho 5, khi đó

$d = 5$ , có 1 cách chọn.

$a$  có 6 cách

$b$  có 5 cách

$c$  có 4 cách

Theo quy tắc nhân ta có:  $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  cách.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

**(A)** 180.

**(B)** 480.

**(C)** 360.

**(D)** 120.

**Lời giải.**

Gọi số có 4 chữ số cần lập có dạng  $\overline{abcd}$ .

Số lập được là số lẻ thì số tận cùng là số lẻ  $\Rightarrow d \in \{1, 3, 5, 7\}$ , suy ra:

$d$  có 4 cách

$a$  có 6 cách

$b$  có 5 cách

$c$  có 4 cách

Theo quy tắc nhân ta có:  $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$  cách.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 19.** Cho tập hợp  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 5.

(A) 660.

(B) 420.

(C) 679.

(D) 523.

**Lời giải.**

Gọi số có 5 chữ số cần lập có dạng  $\overline{abcde}$ .

Trường hợp 1:  $e = 0$ , suy ra

$a$  có 6 cách chọn

$b$  có 5 cách chọn

$c$  có 4 cách chọn

$d$  có 3 cách chọn

$e$  có 1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có:  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 360$  cách.

Trường hợp 2:  $e = 5$ , suy ra

$a$  có 5 cách chọn

$b$  có 5 cách chọn

$c$  có 4 cách chọn

$d$  có 3 cách chọn

$e$  có 1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có:  $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 300$  cách.

Theo quy tắc cộng, ta có  $360 + 300 = 660$  cách.

Chọn phương án (A)

**Câu 20.** Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

(A)  $10^{2010} - 16151 \cdot 9^{2008}$ .

(B)  $10^{2010} - 16153 \cdot 9^{2008}$ .

(C)  $10^{2010} - 16148 \cdot 9^{2008}$ .

(D)  $10^{2010} - 16161 \cdot 9^{2008}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $A_1 = \{0; 9\}; A_2 = \{1\}; A_3 = \{2\}; A_4 = \{3\}; A_5 = \{4\}; A_6 = \{5\}; A_7 = \{6\}; A_8 = \{7\}; A_9 = \{8\}$ .

Gọi số cần tìm là  $n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{2010} a_{2011}}$  ( $a_1 \neq 0$ ).

☑ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số

+ Mỗi vị trí từ  $a_2$  đến  $a_{2011}$  đều có 10 cách chọn.

+  $a_1$  phụ thuộc vào tổng  $(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011})$  nên có 1 cách chọn.

Vậy có  $10^{2010}$  số.

☑ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số nhưng không có mặt chữ số 9

+  $a_1$  có 8 cách chọn.

+ Từ  $a_2$  đến  $a_{2010}$ , mỗi vị trí đều có 9 cách chọn.

+  $a_{2011}$  có 1 cách chọn.

Vậy có  $8 \cdot 9^{2009}$  số.

☑ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số trong đó có đúng 1 chữ số 9

+ Trường hợp  $a_1 = 9$  ta có:

. Từ  $a_2$  đến  $a_{2010}$ , mỗi vị trí đều có 9 cách chọn.

.  $a_{2011}$  có 1 cách chọn.

Do đó có  $9^{2009}$  số.

+ Trường hợp  $a_1 \neq 9$  ta có:

.  $a_1$  có 8 cách chọn.

. Có 2010 cách xếp chữ số 9.

. Ở 2008 vị trí còn lại, mỗi vị trí có 9 cách chọn.

. Vị trí cuối cùng có 1 cách chọn.

Do đó có  $8 \cdot 2010 \cdot 9^{2008}$  số.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$10^{2010} - (8 \cdot 9^{2009} + 9^{2009} + 8 \cdot 2010 \cdot 9^{2008}) = 10^{2010} - 16161 \cdot 9^{2008} \text{ số.}$$

Chọn phương án **D**

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. A  | 3. D  | 4. C  | 5. A  | 6. D  | 7. B  | 8. D  | 9. B  | 10. A |
| 11. B | 12. A | 13. A | 14. D | 15. B | 16. A | 17. B | 18. B | 19. A | 20. D |

## DẠNG 2.

## CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN



## KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## 1. CẤP SỐ CỘNG

**Định nghĩa:** Nếu  $(u_n)$  là cấp số cộng với công sai  $d$ , ta có:  $u_{n+1} = u_n + d$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Số hạng tổng quát:**

**Định lý 1:** Nếu cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:  $u_n = u_1 + (n - 1)d$  với  $n \geq 2$ .

**Tính chất:**

**Định lý 2:** Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số đứng kề với nó, nghĩa là  $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$  với  $k \geq 2$ .

Tổng  $n$  số hạng đầu tiên của một cấp số cộng:

**Định lý 3:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2u_1 + (n - 1)d)}{2}$$

## 2. CẤP SỐ NHÂN

**Định nghĩa:** Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân với công bội  $q$ , ta có:  $u_{n+1} = u_n \cdot q$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Số hạng tổng quát:**

**Định lý 1:** Nếu cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$  với  $n \geq 2$ .

**Tính chất:**

**Định lý 2:** Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là  $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$  với  $k \geq 2$ .

Tổng  $n$  số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:

**Định lý 3:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q \neq 1$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

## CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội  $q$  sao cho  $|q| < 1$ .

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

Cho  $(u_n)$  là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội  $q$ . Khi đó tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

### Ví dụ 1 (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020).

Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 2$  và  $u_2 = 6$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 3.

(B) -4.

(C) 4.

(D)  $\frac{1}{3}$ .

Lời giải.

#### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm các yếu tố của cấp số cộng và cấp số nhân.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa vào định nghĩa cấp số nhân để tìm công bội.

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau: Ta có  $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$ .

Chọn phương án (A)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_3 = 2$  và  $u_4 = 6$ . Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) -4.

(B) 4.

(C) -2.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có  $u_4 = u_3 + d \Rightarrow d = u_4 - u_3 = 6 - 2 = 4$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

(A) 1; 2; 3; 4; 5.

(B) 1; 2; 4; 8; 16.

(C) 1; 3; 9; 27; 81.

(D) 1; -2; 4; -8; 16.

Lời giải.

Dãy 1; 2; 3; 4; 5 là cấp số cộng với công sai  $d = 1$ .

Dãy 1; 2; 4; 8; 16 không là cấp số cộng vì  $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ .

Dãy 1; 3; 9; 27; 81 không là cấp số cộng vì  $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ .

Dãy 1; -2; 4; -8; 16 không là cấp số cộng vì  $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 3.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_1 = 2$  và công sai  $d = 1$ . Khi đó  $u_3$  bằng

(A) 3.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có  $u_3 = u_1 + 2d = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_{10} = 25$  và công sai  $d = 3$ . Khi đó  $u_1$  bằng

(A)  $u_1 = 2$ .

(B)  $u_1 = 3$ .

(C)  $u_1 = -3$ .

(D)  $u_1 = -2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $u_{10} = u_1 + 9d \Rightarrow u_1 = u_{10} - 9d = 25 - 9 \cdot 3 = -2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 5.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_2 = 5$  và công sai  $d = 3$ . Khi đó  $u_{81}$  bằng  
**(A)** 242. **(B)** 239. **(C)** 245. **(D)** 248.

**Lời giải.**

Ta có:  $u_2 = u_1 + d \Rightarrow u_1 = u_2 - d = 2$ .

Lại có:  $u_{81} = u_1 + 80d = 2 + 80 \cdot 3 = 242$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với số hạng đầu  $u_1 = 1$  và công sai  $d = 3$ . Hỏi số 34 là số hạng thứ mấy?

**(A)** 12. **(B)** 9. **(C)** 11. **(D)** 10.

**Lời giải.**

Ta có  $u_n = u_1 + (n - 1)d \Leftrightarrow 34 = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow (n - 1) \cdot 3 = 33 \Leftrightarrow n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 12$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_1 = -21$  và công sai  $d = 3$ . Tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

**(A)**  $S_{16} = 24$ . **(B)**  $S_{16} = -24$ . **(C)**  $S_{16} = 26$ . **(D)**  $S_{16} = -25$ .

**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính tổng  $n$  số hạng đầu tiên ta có:

$$S_{16} = \frac{n(2u_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{16[2 \cdot (-21) + (16-1) \cdot 3]}{2} = 24.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ :  $2, a, 6, b$ . Khi đó tích  $a \cdot b$  bằng

**(A)** 22. **(B)** 40. **(C)** 12. **(D)** 32.

**Lời giải.**

Theo tính chất của cấp số cộng:  $\begin{cases} 2 + 6 = 2a \\ a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = 32$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_9 = 5u_2$  và  $u_{13} = 2u_6 + 5$ . Khi đó số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  bằng

**(A)**  $u_1 = 3, d = 5$ . **(B)**  $u_1 = 4, d = 5$ . **(C)**  $u_1 = 3, d = 4$ . **(D)**  $u_1 = 4, d = 3$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $S_7 = 77$  và  $S_{12} = 192$ . Với  $S_n$  là tổng  $n$  số đầu tiên của nó. Khi đó số hạng tổng quát  $u_n$  của cấp số cộng đó là



$$\textcircled{A} u_n = 5 + 4n.$$

$$\textcircled{B} u_n = 2 + 3n.$$

$$\textcircled{C} u_n = 4 + 5n.$$

$$\textcircled{D} u_n = 3 + 2n.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_7 = 77 \\ S_{12} = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7(2u_1 + 6d)}{2} = 77 \\ \frac{12(2u_1 + 11d)}{2} = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 22 \\ 2u_1 + 11d = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2. \end{cases}$$

$$\text{Nên } u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1)2 = 2n + 3.$$

Chọn phương án  $\textcircled{D}$

**Câu 11.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = -2$  và công bội  $q = 3$ . Khi đó  $u_2$  bằng

$$\textcircled{A} u_2 = 1.$$

$$\textcircled{B} u_2 = -6.$$

$$\textcircled{C} u_2 = 6.$$

$$\textcircled{D} u_2 = -18.$$

Lời giải.

$$\text{Số hạng } u_2 \text{ là } u_2 = u_1 \cdot q = -6.$$

Chọn phương án  $\textcircled{B}$

**Câu 12.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với số hạng đầu  $u_1 = -3$  và công bội  $q = \frac{2}{3}$ . Số hạng thứ năm của cấp số nhân bằng

$$\textcircled{A} \frac{27}{16}.$$

$$\textcircled{B} -\frac{16}{27}.$$

$$\textcircled{C} -\frac{27}{16}.$$

$$\textcircled{D} \frac{16}{27}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_5 = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{16}{27}.$$

Chọn phương án  $\textcircled{B}$

**Câu 13.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_4 = 1$ ;  $q = 3$ . Tìm  $u_1$ ?

$$\textcircled{A} u_1 = \frac{1}{9}.$$

$$\textcircled{B} u_1 = 9.$$

$$\textcircled{C} u_1 = 27.$$

$$\textcircled{D} u_1 = \frac{1}{27}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Chọn phương án  $\textcircled{D}$

**Câu 14.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = -\frac{1}{2}$ ;  $u_7 = -32$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

$$\textcircled{A} q = \pm 2.$$

$$\textcircled{B} q = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{C} q = \pm 4.$$

$$\textcircled{D} q = \pm 1.$$

Lời giải.

$$\text{Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân ta có } u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_7 = u_1 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}.$$

Chọn phương án  $\textcircled{A}$

**Câu 15.** Một cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = 3$ , công bội  $q = 2$ . Tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng

$$\textcircled{A} S_8 = 381.$$

$$\textcircled{B} S_8 = 189.$$

$$\textcircled{C} S_8 = 765.$$

$$\textcircled{D} S_8 = 1533.$$

Lời giải.

$$\text{Áp dụng công thức tổng của cấp số nhân ta có: } S_8 = \frac{u_1(1 - q^8)}{1 - q} = \frac{3 \cdot (1 - 2^8)}{1 - 2} = 765.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 16.** Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

**(A)** 1; 2; 3; 4; 5.

**(B)** 1; 2; 4; 8; 16.

**(C)** 1; 3; 9; 27; 81.

**(D)** 1; -2; 4; -8; 16.

**Lời giải.**

Dãy 1; 2; 4; 8; 16 là cấp số nhân với công bội  $q = 2$ .

Dãy 1; 3; 9; 27; 81 là cấp số nhân với công bội  $q = 3$ .

Dãy 1; -2; 4; -8; 16 là cấp số nhân với công bội  $q = -2$ .

Dãy 1; 2; 3; 4; 5 là cấp số cộng với công sai  $d = 1$ , không phải cấp số nhân vì  $\frac{u_4}{u_3} \neq \frac{u_2}{u_1}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với số hạng đầu  $u_1 = 1$  và công bội  $q = 2$ . Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

**(A)** 11.

**(B)** 9.

**(C)** 8.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

Ta có  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 1 \cdot 2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10} \Leftrightarrow n - 1 = 10 \Leftrightarrow n = 11$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 18.** Tổng vô hạn  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$  bằng

**(A)** 2.

**(B)**  $2^n - 1$ .

**(C)** 1.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn, với  $u_1 = 1$ ;  $q = \frac{1}{2}$ .

Khi đó:  $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Viết thêm một số vào giữa hai số 5 và 20 để được một cấp số nhân. Số đó là

**(A)**  $\pm 9$ .

**(B)**  $\pm 10$ .

**(C)**  $\pm 13$ .

**(D)**  $\pm 14$ .

**Lời giải.**

$$u_3 = u_1 q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{u_3}{u_1} = 4 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2. \end{cases}$$

Với  $q = 2 \Rightarrow u_2 = 10$  (thỏa mãn).

Với  $q = -2 \Rightarrow u_2 = -10$  (thỏa mãn).

Chọn phương án **(B)**

**Câu 20.** Dãy số  $(u_n)$  có công thức số hạng tổng quát nào dưới đây là một cấp số nhân

**(A)**  $u_n = 3^{n^2}$ .

**(B)**  $u_n = 3n + 1$ .

**(C)**  $u_n = 3^n$ .

**(D)**  $u_n = \frac{1}{n}$ .

**Lời giải.**

Với  $u_n = 3^{n^2}$  thì  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{(n+1)^2}}{3^{n^2}} = 3^{2n+1}$  không phải là hằng số.

Với  $u_n = 3n + 1$  thì  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1) + 1}{3n + 1} = \frac{3n + 4}{3n + 1}$  không phải là hằng số.

Với  $u_n = \frac{1}{n}$  thì  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}$  không phải là hằng số.

Với  $u_n = 3^n$  thì  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$  là hằng số. Vậy  $u_n = 3^n$  là công thức của cấp số nhân.

Chọn phương án  C

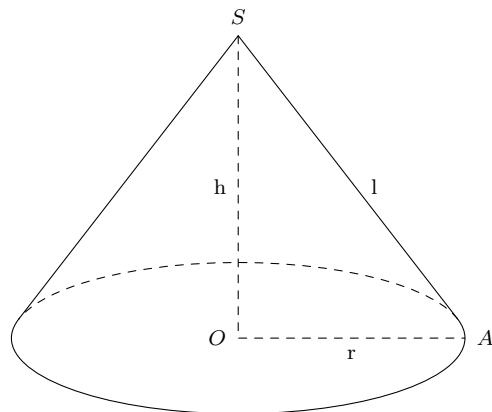
**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. A  | 3. C  | 4. D  | 5. A  | 6. A  | 7. A  | 8. D  | 9. C  | 10. D |
| 11. B | 12. B | 13. D | 14. A | 15. C | 16. A | 17. A | 18. A | 19. B | 20. C |

## DẠNG 3.

## SỬ DỤNG CÁC CÔNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH NÓN

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón:  $S_{xq} = \pi r l$ .

Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón:  $S = S_{xq} + S_{day} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ .

Công thức tính thể tích của khối nón:  $V_{non} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông  $SOA$ :  $l^2 = h^2 + r^2$ ;  $\cos \widehat{ASO} = \frac{h}{l}$ ;  $\sin \widehat{ASO} = \frac{r}{l}$ ;  $\tan \widehat{ASO} = \frac{r}{h}$ .

Định lý hàm số sin trong tam giác:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ . ( $R$ : bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác).

Định lý Talet trong tam giác:

$$MN \parallel BC, M \in AB, N \in AC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính  $r$  bằng

(A)  $4\pi r l$ .

(B)  $2\pi r l$ .

(C)  $\pi r l$ .

(D)  $\frac{1}{3} \pi r l$ .

Lời giải.

## Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán nhắc lại công thức tính diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính  $r$ .

**2. HƯỚNG GIẢI:** Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón.

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính  $r$  là  $S_{xq} = \pi rl$

Chọn phương án **C**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l = 5$  cm và bán kính  $r = 3$  cm bằng

- (A)**  $8\pi$  (cm<sup>2</sup>). **(B)**  $15$  (cm<sup>2</sup>). **(C)**  $4\pi$  (cm<sup>2</sup>). **(D)**  $15\pi$  (cm<sup>2</sup>).

**Lời giải.**

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l = 5$  và bán kính  $r = 3$  là  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$  (cm<sup>2</sup>).

Chọn phương án **D**

**Câu 2.** Một hình nón có diện tích xung quanh bằng  $40\pi$  cm<sup>2</sup> và bán kính đáy  $r = 5$  cm thì có độ dài đường sinh bằng

- (A)**  $8\pi$  (cm). **(B)**  $8$  (cm). **(C)**  $4\pi$  (cm). **(D)**  $4$  (cm).

**Lời giải.**

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính  $r$  là  $S_{xq} = \pi rl$ .

Từ đó suy ra độ dài đường sinh bằng  $l = \frac{S_{xq}}{\pi r} = \frac{40\pi}{\pi \cdot 5} = 8$  (cm).

Chọn phương án **B**

**Câu 3.** Một hình nón có diện tích xung quanh bằng  $60$  cm<sup>2</sup> và độ dài đường sinh  $l = 5$  cm thì có bán kính đáy gần nhất với số nào sau đây:

- (A)**  $4$  (cm). **(B)**  $3,7$  (cm). **(C)**  $3,9$  (cm). **(D)**  $3,8$  (cm).

**Lời giải.**

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính  $r$  là  $S_{xq} = \pi rl$ .

Từ đó suy ra bán kính đáy bằng  $r = \frac{S_{xq}}{\pi l} = \frac{60}{\pi \cdot 5} = 3,8197$  (cm).

Chọn phương án **D**

**Câu 4.** Một khối nón tròn xoay có độ dài đường sinh  $l = 5$  cm và bán kính đáy  $r = 4$  cm. Tính thể tích  $V$  của khối nón.

- (A)**  $20\pi$  cm<sup>3</sup>. **(B)**  $100$  cm<sup>3</sup>. **(C)**  $16\pi$  cm<sup>3</sup>. **(D)**  $90\pi$  cm<sup>3</sup>.

**Lời giải.**

Chiều cao của khối nón là  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

Vậy thể tích của khối nón bằng  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$  cm<sup>3</sup>.

Chọn phương án **C**

**Câu 5.** Một khối nón tròn xoay có độ dài đường sinh  $l = 8$  cm và chiều cao  $h = 6$  cm. Tính thể tích  $V$  của khối nón.

- (A)**  $V = 56\pi$  cm<sup>3</sup>. **(B)**  $V = 48\pi$  cm<sup>3</sup>. **(C)**  $V = 64\pi$  cm<sup>3</sup>. **(D)**  $V = 90\pi$  cm<sup>3</sup>.

**Lời giải.**

Bán kính đáy của khối nón là  $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28}$ .

Vậy thể tích của khối nón bằng  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 28 \cdot 6 = 56\pi \text{ cm}^3$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Một khối nón tròn xoay có thể tích  $V$  bằng  $50\pi$  và chiều cao  $h = 6$ . Tính diện tích toàn phần của hình nón.

- (A)  $5\pi(\sqrt{61} - 5)$ . (B)  $5\pi(\sqrt{61} + 5)$ . (C)  $\pi(\sqrt{61} + 25)$ . (D)  $\pi(\sqrt{61} + 5)$ .

**Lời giải.**

Từ công thức tính thể tích khối nón ta có  $r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3 \cdot 50\pi}{\pi \cdot 6} = 25 \Rightarrow r = 5$ .

Độ dài đường sinh là  $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{61}$ .

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng  $S = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) = 5\pi(\sqrt{61} + 5)$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Một khối nón tròn xoay có thể tích  $V$  bằng  $100\pi \text{ cm}^3$  và bán kính đáy  $r = 5 \text{ cm}$ . Tính diện tích xung quanh của hình nón.

- (A)  $144\pi(\text{cm}^2)$ . (B)  $90\pi(\text{cm}^2)$ . (C)  $64\pi(\text{cm}^2)$ . (D)  $65\pi(\text{cm}^2)$ .

**Lời giải.**

Từ công thức tính thể tích khối nón ta có:  $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 100\pi}{\pi \cdot 5^2} = 12$ .

Độ dài đường sinh là  $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 13$ .

Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng  $S_{xq} = \pi r l = 65\pi$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 6 và diện tích xung quanh bằng  $30\pi$ . Thể tích của khối nón là

- (A)  $\frac{6\sqrt{11}}{5}\pi$ . (B)  $\frac{25\sqrt{11}}{3}\pi$ . (C)  $\frac{4\sqrt{11}}{3}\pi$ . (D)  $\frac{5\sqrt{11}}{3}\pi$ .

**Lời giải.**

Từ công thức tính diện tích xung quanh của hình nón, ta có:  $r = \frac{S_{xq}}{\pi l} = 5$ .

Chiều cao của nón là:  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{11}$ .

Vậy thể tích khối nón bằng  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi\sqrt{11}}{3}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Một khối nón tròn xoay có thể tích  $V$  bằng  $12\pi \text{ cm}^3$  và diện tích xung quanh bằng  $15\pi \text{ cm}^2$ . Biết bán kính đáy là một số nguyên. Tính diện tích đáy nón.

- (A)  $10\pi(\text{cm}^2)$ . (B)  $9\pi(\text{cm}^2)$ . (C)  $45\pi(\text{cm}^2)$ . (D)  $25\pi(\text{cm}^2)$ .

**Lời giải.**

Gọi đường sinh, bán kính đáy, đường cao của nón lần lượt là  $l, r, h$ .

Ta có:  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi$  và  $r^2 \sqrt{l^2 - r^2} S_{xq} = \pi r l$ .

Từ giả thiết ta được hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = 12\pi \\ \pi r l = 15\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = 36 \quad (1) \\ r l = 15. \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta được  $l = \frac{15}{r}$ . Thế vào (1) ta có  $r^6 - 225r^2 + 1296 = 0$ .

Đặt  $r^2 = t$  ( $t > 0; t \in \mathbb{Z}$ ) ta được  $t^3 - 225t + 1296 = 0 \Rightarrow t = 9$ . Suy ra  $r = 3$ .

Vậy diện tích đáy nón là  $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = 9\pi$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ ,  $\widehat{OAB} = 30^\circ$  và có cạnh  $AB = a$ . Quay tam giác  $AOB$  xung quanh cạnh  $OA$  ta được một hình nón tròn xoay. Tính diện tích toàn phần của hình nón này.

**(A)**  $\pi a^2$ .

**(B)**  $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$ .

**(C)**  $\frac{3\pi a^2}{4}$ .

**(D)**  $\frac{\pi a^2}{4}$ .

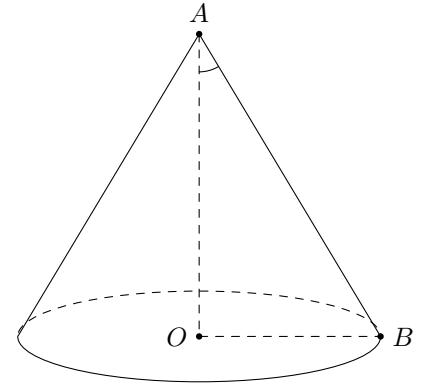
**Lời giải.**

Quay tam giác  $AOB$  xung quanh cạnh  $OA$  ta được một hình nón tròn xoay có đường sinh  $AB = a$ .

Bán kính đáy  $r = OB = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ .

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng

$$S = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r(l + r) = \frac{3\pi a^2}{4}.$$



Chọn phương án **(C)**

**Câu 11.** Cho tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ ,  $OA = 4a$ ,  $OB = 3a$ . Quay tam giác  $AOB$  xung quanh cạnh  $AB$  ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích của khối tròn xoay này.

**(A)**  $9,6\pi a^3$ .

**(B)**  $10\pi a^3$ .

**(C)**  $8,4\pi a^3$ .

**(D)**  $4\pi a^3$ .

**Lời giải.**

Kẻ đường cao  $OH$  của tam giác vuông  $AOB$ .

Khi quay tam giác vuông  $AOB$  xung quanh cạnh  $AB$  ta được một khối tròn xoay có thể coi như 2 khối nón đỉnh  $A$  và  $B$ , chung đường tròn đáy bán kính  $r = OH$ , hai chiều cao tương ứng là  $h_1 = AH$ ,  $h_2 = BH$ .

Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng tổng thể tích của 2 khối nón trên.

$$\text{Vậy ta có: } V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot OH^2 \cdot AB.$$

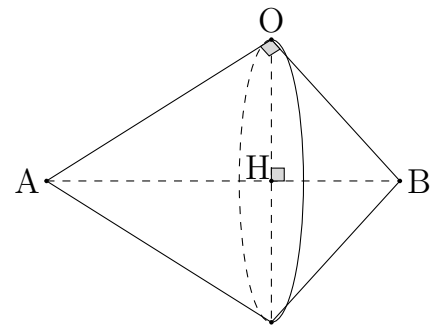
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  $AOB$  ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{25}{144a^2} \Rightarrow OH = \frac{12a}{5}.$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là } V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12a}{5}\right)^2 \cdot 5a = 9,6\pi a^3.$$

Chọn phương án **(A)**





**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$  có  $\widehat{BAC} = 75^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Kẻ  $BH \perp AC$ . Quay  $\triangle ABC$  quanh  $AC$  thì  $\triangle BHC$  tạo thành hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

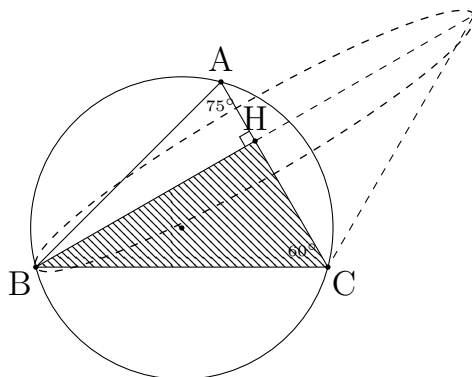
(A)  $S_{xq} = \frac{\pi R^2 (3 + 2\sqrt{3})}{2}$ .

(B)  $S_{xq} = \frac{\pi R^2 (3 + \sqrt{3})}{4}$ .

(C)  $S_{xq} = \frac{\pi R^2 \sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)}{4}$ .

(D) Đáp án khác.

**Lời giải.**



Áp dụng định lý sin trong  $\triangle ABC$  ta có:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin 75^\circ = \frac{R(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}.$$

Trong tam giác vuông  $BHC$  ta có:

$$BH = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}.$$

Khi quay  $\triangle ABC$  quanh  $AC$  thì  $\triangle BHC$  tạo thành hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng  $BH$ , đường sinh bằng  $BC$ . Vậy diện tích xung quanh của hình nón này bằng

$$S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot BH \cdot BC = \frac{\pi R^2 (3 + 2\sqrt{3})}{2}.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 13.** Cắt khối nón bởi một mặt phẳng đi qua trục tạo thành một tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a$ . Biết  $B, C$  thuộc đường tròn đáy. Thể tích của khối nón là

(A)  $a^3 \pi \sqrt{3}$ .

(B)  $\frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ .

(C)  $\frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{24}$ .

(D)  $\frac{3a^3 \pi}{8}$ .

**Lời giải.**

Thiết diện của khối nón với mặt phẳng đi qua trục tạo thành tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  nên bán kính đáy là  $r = \frac{a}{2}$  và chiều cao là  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy thể tích của khối nón là  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 14.** Cho khối nón có đỉnh  $S$ , cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh của khối nón tạo thành thiết diện là tam giác  $SAB$ . Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến thiết diện bằng 2,  $AB = 12$ , bán kính đường tròn đáy bằng 10. Chiều cao  $h$  của khối nón là

- (A)  $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ . (B)  $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ . (C)  $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ . (D)  $\sqrt{15}$ .

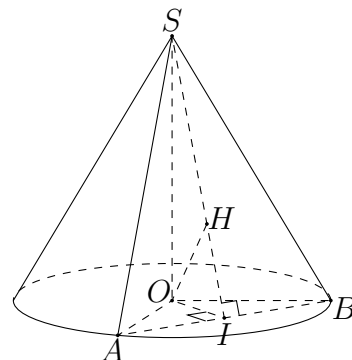
**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  thì  $OI \perp AB$ . Ta có  $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = 8$ .

Kẻ  $OH \perp SI$  thì  $OH \perp (SAB)$ , suy ra  $OH = d(O, (SAB)) = 2$ .

Trong tam giác vuông  $SOI$  có:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{15}{64}$ .

Vậy chiều cao của nón là  $h = OH = \frac{8\sqrt{15}}{15}$ .



Chọn phương án (A)

**Câu 15.** Cho hình nón có đỉnh  $O$ , tâm đáy là  $H$ , bán kính đáy là  $a$ , góc tạo bởi một đường sinh  $OM$  và đáy là  $60^\circ$ . Tìm kết luận **sai**:

- (A)  $\ell = 2a$ . (B)  $S_{xq} = 2\pi a^2$ . (C)  $S_{tp} = 4\pi a^2$ . (D)  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ .

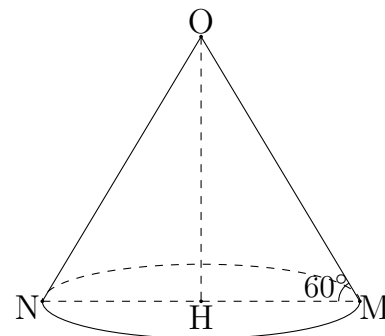
**Lời giải.**

Vì góc tạo bởi một đường sinh và đáy bằng  $60^\circ$  nên thiết diện qua trục của hình nón sẽ là một tam giác đều  $OMN$ . Bán kính đáy là  $r = HM = a$ . Vậy đường sinh  $\ell = OM = 2a \Rightarrow$  A đúng.

Diện tích xung quanh  $S_{xq} = \pi r \ell = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2 \Rightarrow$  B đúng.

Diện tích toàn phần  $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2 \Rightarrow$  C sai.

Để thấy đường cao  $OH = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$  D đúng.

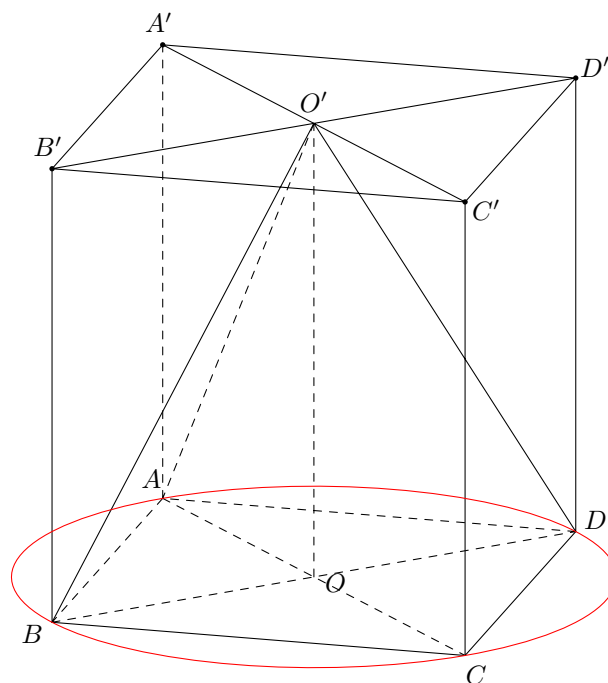


Chọn phương án (C)

**Câu 16.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ ; Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông  $ABCD$  và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông  $ABCD$ . Diện tích xung quanh của hình nón đó là

- (A)  $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ . (B)  $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ . (C)  $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{2}$ .

**Lời giải.**



Hình nón có chiều cao  $h = OO' = a$ , và bán kính đáy  $r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Từ đó đường sinh bằng  $l = OA' = \sqrt{OO'^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ .

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi r l = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy là  $a$ , cạnh bên là  $2a$ . Một hình nón có đỉnh  $S$  và đáy là đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Tìm kết luận đúng:

**(A)**  $R = a\sqrt{3}$ .

**(B)**  $h = \frac{a\sqrt{33}}{3}$ .

**(C)**  $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{4}$ .

**(D)**  $V = \frac{\pi a^3}{9}$ .

**Lời giải.**

Bán kính đáy nón là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$

đều cạnh  $a$ , nên  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Chiều cao của nón chính là chiều cao của chóp đều  $S.ABC$  nên ta có:

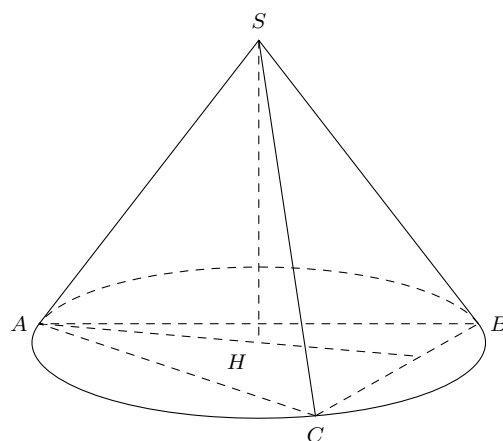
$$h = SH = \sqrt{SA^2 - R^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi R l = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ .

Thể tích của khối nón là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\pi a^3 \sqrt{33}}{27}$ .

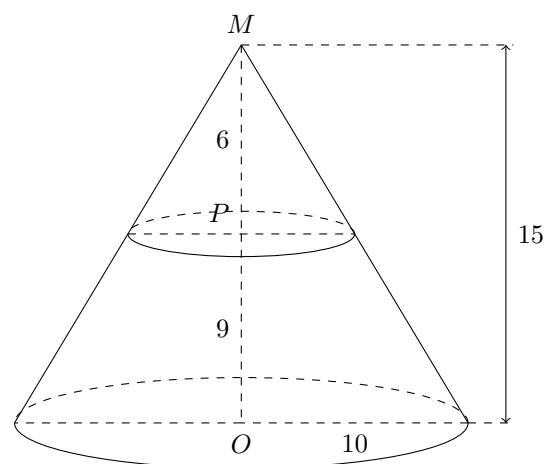
Chọn phương án **B**

**Câu 18.**



Cho hình nón có đáy là đường tròn có bán kính bằng 10. Mặt phẳng vuông góc với trục cắt hình nón theo giao tuyến là một đường tròn như hình vẽ. Thể tích của khối nón có chiều cao bằng 6 bằng

- (A)  $32\pi$ . (B)  $24\pi$ . (C)  $\frac{200\pi}{9}$ . (D)  $96\pi$ .



**Lời giải.**

Gọi bán kính đáy nón có chiều cao bằng 6 là  $r_1$ .

Theo định lý Talet ta có:  $\frac{r_1}{10} = \frac{6}{15} \Rightarrow r_1 = 4$ .

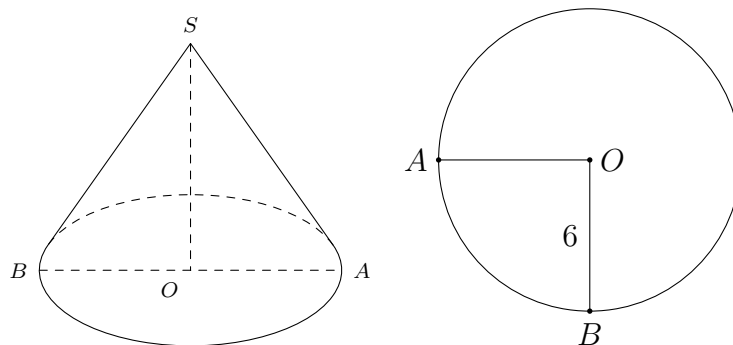
Vậy thể tích của khối nón đó bằng  $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = 32\pi$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 19.**

Cho hình tròn có bán kính là 6. Cắt bỏ hình tròn giữa 2 bán kính  $OA, OB$ , rồi ghép 2 bán kính đó lại sao cho thành một hình nón (như hình vẽ). Thể tích khối nón tương ứng đó là

- (A)  $\frac{81\pi\sqrt{7}}{8}$ . (B)  $\frac{9\pi\sqrt{15}}{8}$ .  
(C)  $\frac{81\pi\sqrt{7}}{4}$ . (D) Đáp án khác.



**Lời giải.**

Khi ghép  $OA$  vào  $OB$  ta được hình nón có chu vi đáy bằng  $\frac{3}{4}$  chu vi đáy của đường tròn lúc đầu, tức là bằng  $CV_1 = \frac{3}{4}2\pi R = 9\pi$ .

Gọi bán kính đáy của hình nón là  $r_1$ , ta có  $CV_1 = 2\pi r_1 = 9\pi \Rightarrow r_1 = \frac{9}{2}$ .

Hình nón tạo thành sẽ có đường sinh  $l = OA = 6$ . Suy ra đường cao của nón là

$$h = \sqrt{l^2 - r_1^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón tương ứng là  $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{81\pi\sqrt{7}}{8}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 20.**

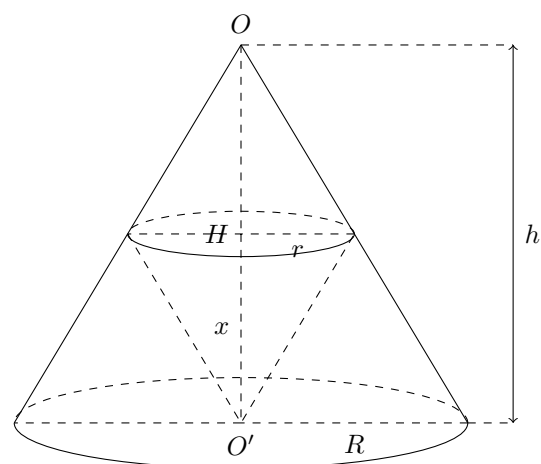
Cho hình nón đỉnh  $O$ , chiều cao là  $h$ . Một khối nón có đỉnh là tâm của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Chiều cao  $x$  của khối nón này là bao nhiêu để thể tích của nó lớn nhất, biết  $0 < x < h$ ?

(A)  $x = \frac{2h}{3}$ .

(B)  $x = \frac{h}{2}$ .

(C)  $x = \frac{h}{3}$ .

(D)  $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$ .



**Lời giải.**

Gọi bán kính đáy của hình nón đỉnh  $O$  và  $O$  lần lượt là  $R$  và  $r$ . Ta có  $R$  không đổi còn  $r$  thay đổi theo  $x$ . Theo Talet ta có:  $\frac{r}{R} = \frac{OH}{OO} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$ .

Thể tích của khối nón đỉnh  $O$  là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot HO = \frac{\pi}{3} \left( \frac{R(h-x)}{h} \right)^2 \cdot x = \frac{\pi R^2}{3h} (h-x)^2 x$ .

Vì  $R, h$  không đổi nên thể tích đạt giá trị lớn nhất khi  $(h-x)^2 x$  đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số  $f(x) = (h-x)^2 x = x^3 - 2hx^2 + h^2x$  với  $x \in (0; h)$ .

Ta có  $f(x) = 3x^2 - 4hx + h^2$ .

Xét  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ x = \frac{h}{3} \end{cases}$ .

Ta có bảng biến thiên:

|         |   |               |     |   |
|---------|---|---------------|-----|---|
| $x$     | 0 | $\frac{h}{3}$ | $h$ |   |
| $f'(x)$ |   | +             | 0   | - |
| $f(x)$  |   |               |     |   |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $\max_{x \in (0; h)} f(x) = \frac{4h^3}{27}$  xảy ra khi  $x = \frac{h}{3}$ .

Chọn phương án (C)

📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. B  | 3. D  | 4. C  | 5. A  | 6. B  | 7. D  | 8. B  | 9. B  | 10. C |
| 11. A | 12. A | 13. C | 14. A | 15. C | 16. C | 17. B | 18. A | 19. A | 20. C |

**DẠNG 4.****XÉT SỰ ĐƠN ĐIỀU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

—Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  (dấu " $=$ " xảy ra tại một số hữu hạn điểm hoặc vô hạn điểm rời rạc trên  $K$ ) thì hàm số đồng biến trên khoảng  $K$ .

—Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$  (dấu " $=$ " xảy ra tại một số hữu hạn điểm hoặc vô hạn điểm rời rạc trên  $K$ ) thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $K$ .

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $1$ | $2$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(1; +\infty)$ .

**(B)**  $(-1; 0)$ .

**(C)**  $(-1; 1)$ .

**(D)**  $(0; 1)$ .

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán xét sự đơn điệu của hàm số khi biết bảng biến thiên.

**2. HƯỚNG GIẢI:** Dựa vào định lý về sự đơn điệu.

—Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in K$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $K$ .

—Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in K$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $K$ .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Vì  $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$  nên hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$ .

Chọn phương án **(D)**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

|      |           |               |     |           |     |
|------|-----------|---------------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       |               | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $-\infty$ | $+\infty$     | $4$ | $-\infty$ |     |

- (A) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -\frac{1}{2})$  và  $(3; +\infty)$ .  
 (B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số.

Đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -\frac{1}{2})$  và  $(-\frac{1}{2}; 3)$ .

Nghịch biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

|      |           |           |                     |           |
|------|-----------|-----------|---------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $1$                 | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       |           | $- \quad 0 \quad +$ |           |
| $y$  | $+\infty$ | $+\infty$ | $2$                 | $+\infty$ |

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
 (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng  $(-\infty; -1)$  đạo hàm  $y' < 0$  nên hàm số nghịch biến.

Chọn phương án (A)

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

|      |           |      |     |           |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-2; 0)$ .  
 (B)  $(-3; 1)$ .  
 (C)  $(0; +\infty)$ .  
 (D)  $(-\infty; -2)$ .



**Lời giải.**

Nhìn bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy  $y' > 0, \forall x \in (-2; 0)$ .

Suy ra hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |           |     |           |           |
|------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $0$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           | +   | 0         | -         |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | 0   | $-\infty$ | 1         |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-\infty; 0)$ .

**(B)**  $(-1; 1)$ .

**(C)**  $(-1; 0)$ .

**(D)**  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; 0)$ .

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |           |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $+\infty$ |           |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $+$       | $0$       | $-$ |
| $y$  | $-\infty$ | $5$  |      |           | $-\infty$ |     |

Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

i) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -5)$  và  $(-3; -2)$ .

ii) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 5)$ .

iii) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .

iv) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ ; nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .

Suy ra II. Sai; III. Đúng; IV. Đúng.

Ta thấy khoảng  $(-\infty; -3)$  chứa khoảng  $(-\infty; -5)$  nên I Đúng.

Vậy chỉ có II sai.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có  $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ . (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

**Lời giải.**

$$y' = -3x^2 + 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|      |           |                                                                                      |   |           |   |
|------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0                                                                                    | 2 | $+\infty$ |   |
| $y'$ | -         | 0                                                                                    | + | 0         | - |
| $y$  | $+\infty$ |  |   |           |   |

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 4$ . Trong các phát biểu sau, đâu là phát biểu **sai**?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .  
 (B) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$  và  $[0; 1]$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên  $[-1; 0]$  và  $[1; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

|      |           |      |     |     |           |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $4$ |           |     | $+\infty$ |
|      |           |      | $3$ |     | $3$       |     |           |

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Hàm số  $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-\infty; 0)$ .

**(B)**  $(-\infty; +\infty)$ .

**(C)**  $(0; +\infty)$ .

**(D)**  $(-1; 1)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$y' = \frac{-12x}{(3x^2 + 1)^2}.$$

Ta có  $y' < 0 \Leftrightarrow x > 0$  nên hàm số  $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 2x^2 + 4 - \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**(B)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**(C)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

**(D)** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = 2x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = (x - 2)(x + 5)(x + 1)$ . Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(2; +\infty)$ .

**(B)**  $(-2; 0)$ .

**(C)**  $(0; 1)$ .

**(D)**  $(-6; -1)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-5$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $+$       |

Nhìn vào bảng xét dấu của  $f'(x)$  ta thấy hàm số  $f(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(-5; -1)$  và  $(2; +\infty)$ .

Vậy hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = x^3(x-1)^2(x+2)$ . Khoảng nghịch biến của hàm số là

- (A)  $(-\infty; -2); (0; 1)$ . (B)  $(-2; 0); (1; +\infty)$ . (C)  $(-\infty; -2); (0; +\infty)$ . (D)  $(-2; 0)$ .

**Lời giải.**

Bảng biến thiên:

|      |           |            |         |            |        |            |     |           |
|------|-----------|------------|---------|------------|--------|------------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       |         | $0$        |        | $1$        |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$        | $0$     | $-$        | $0$    | $+$        | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(-2)$ | $\searrow$ | $f(1)$ | $\nearrow$ |     | $+\infty$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

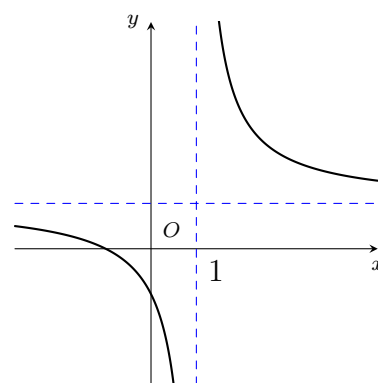
Chọn phương án (D)

**Câu 13.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a, b, c, d$

là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $y' < 0, \forall x \neq 1$ . (B)  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
(C)  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . (D)  $y' > 0, \forall x \neq 1$ .



**Lời giải.**

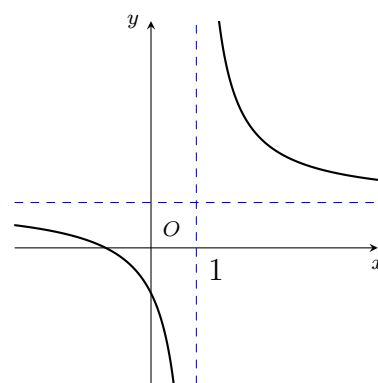
Ta có

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

+ Điều kiện  $x \neq 1$ .

+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến.

Từ đó ta được  $y' < 0, \forall x \neq 1$ .

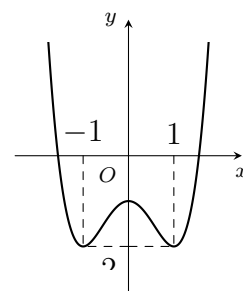


Chọn phương án (A)

**Câu 14.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A)  $(0; 1)$ . (B)  $(-\infty; 1)$ . (C)  $(-1; 1)$ . (D)  $(-1; 0)$ .



**Lời giải.**

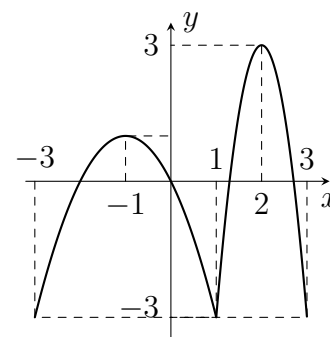
Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 15.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- (A)  $(0; 2)$ . (B)  $(-2; 0)$ . (C)  $(-3; -1)$ . (D)  $(2; 3)$ .

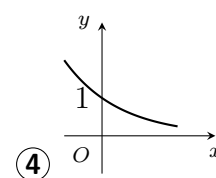
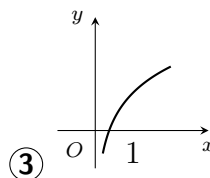
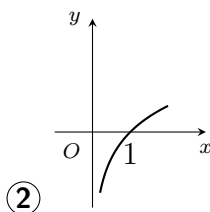
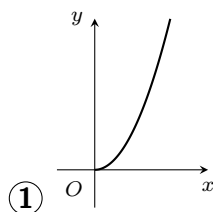


**Lời giải.**

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-1; 1)$  và  $(2; 3)$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 16.** Cho bốn hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?



(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

**Lời giải.**

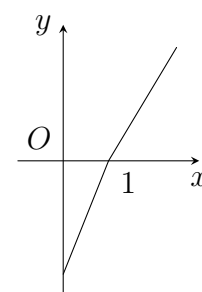
Có ba hàm số trong các hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 17.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .  
 (B) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .



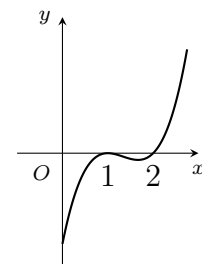
**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số  $f'(x)$ , ta thấy  $f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty)$  suy ra hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 18.**

Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



**(A)**  $(2; +\infty)$ .

**(B)**  $(1; 2)$ .

**(C)**  $(0; 1)$ .

**(D)**  $(0; 1)$  và  $(2; +\infty)$ .

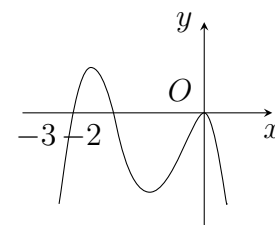
**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy  $f'(x) > 0, \forall x > 2$  nên  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



**(A)** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

**(B)** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**(C)** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$ .

**(D)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; -2)$ .

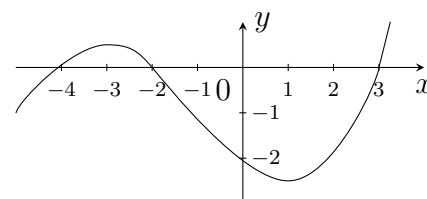
**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) < 0$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 20.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình bên dưới. Chọn phát biểu đúng khi nói về hàm số  $y = f(x)$ .



**(A)** Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.

**(B)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .

**(C)**  $f(0) > f(3)$ .

**(D)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**Lời giải.**

Ta thấy trên khoảng  $(0; 3)$  đạo hàm mang dấu âm nên hàm số nghịch biến trên  $(0; 3)$ .

Vì thế  $f(0) > f(3)$ .

Chọn phương án **C**

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. A  | 3. A  | 4. C  | 5. A  | 6. B  | 7. A  | 8. D  | 9. C  | 10. D |
| 11. A | 12. D | 13. A | 14. D | 15. D | 16. C | 17. C | 18. A | 19. B | 20. C |

## DẠNG 5. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỀU

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho khối lập phương có cạnh bằng  $a$  thể tích của khối lập phương là  $V = a^3$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng  
 (A) 216. (B) 18. (C) 36. (D) 72.

Lời giải.

#### Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán tính thể tích của khối lập phương.

**2. HƯỚNG GIẢI:**

Áp dụng công thức tính thể tích để làm bài toán.

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Thể tích của khối lập phương đã cho là  $V = 6^3 = 216$ .

Chọn phương án (A)

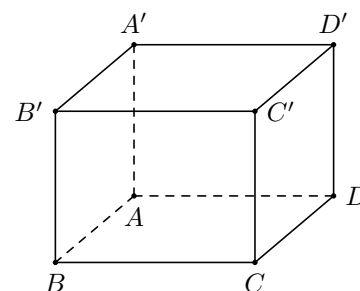
### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho khối lập phương có cạnh bằng  $\sqrt{3}$ . Thể tích của khối lập phương đã cho bằng  
 (A)  $3\sqrt{3}$ . (B) 3. (C)  $\sqrt{3}$ . (D) 6.

**Câu 2.** Cho khối lập phương có cạnh bằng  $a$ . Thể tích của khối lập phương đã cho bằng  
 (A)  $a^3$ . (B)  $3a$ . (C)  $a^2$ . (D)  $3a^2$ .

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương đã cho là  $V = (a)^3 = a^3$ .



Chọn phương án (A)

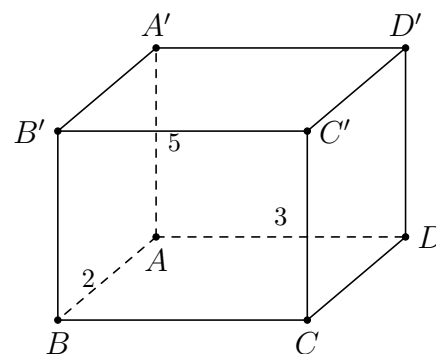
**Câu 3.** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt bằng 2, 3, 5. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

(A) 30. (B) 15. (C) 10. (D) 60.



**Lời giải.**

Thể tích của khối lập phương đã cho là  $V = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Cho khối lập phương có đường chéo của mặt bên bằng  $5\sqrt{2}$ . Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

**(A)** 125.

**(B)**  $250\sqrt{2}$ .

**(C)**  $\frac{125}{3}$ .

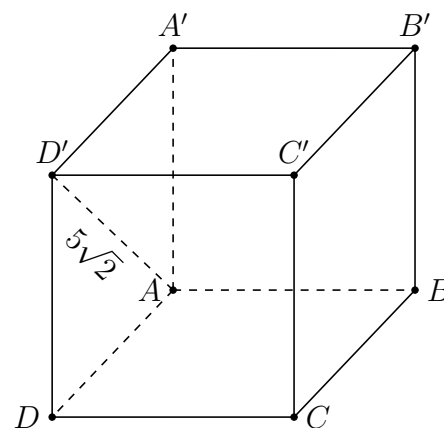
**(D)**  $125\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $a$  là cạnh của hình lập phương, suy ra đường chéo mặt bên là  $a\sqrt{2}$ .

Theo bài  $a\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = 5$ .

Vậy thể tích của khối lập phương đã cho là  $V = (5)^3 = 125$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho khối lập phương có đường chéo bằng  $3\sqrt{3}$ . Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

**(A)** 27.

**(B)**  $81\sqrt{3}$ .

**(C)** 9.

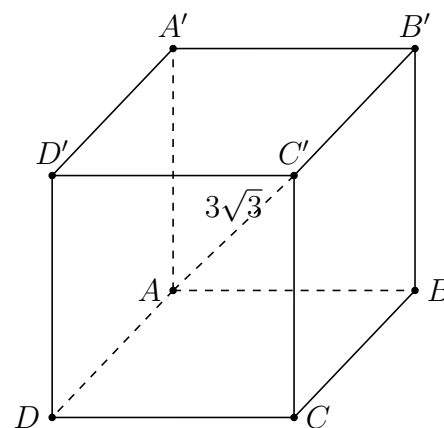
**(D)**  $27\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $a$  là cạnh của hình lập phương, suy ra đường chéo hình lập phương là  $a\sqrt{3}$ .

Theo bài  $a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$ .

Thể tích của khối lập phương đã cho là  $V = (3)^3 = 27$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a\sqrt{3}$ , hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ , cạnh  $AA'$  hợp với mặt đáy  $(ABC)$  một góc  $30^\circ$ . Thể tích khối lăng trụ bằng

**(A)**  $6a^3$ .

**(B)**  $9a^3$ .

**(C)**  $2a^3$ .

**(D)**  $24\sqrt{3}a^3$ .

**Lời giải.**

— Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Ta có  $A'G \perp (ABC)$ . Suy ra  $GA$  là hình chiếu của  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$

$$\Rightarrow \widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{A'AG} = 30^\circ.$$

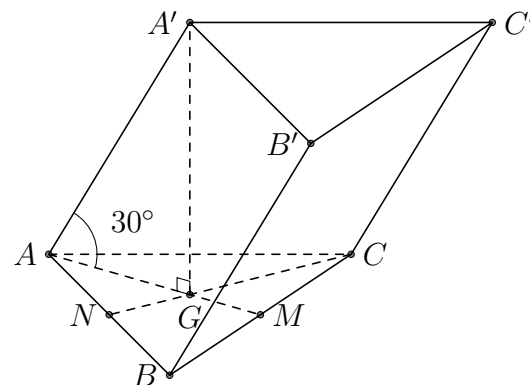
— Tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = (2a\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$ .

— Tam giác  $A'AG$  vuông tại  $G$  có  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $AG = \frac{2}{3}AM =$

$$\frac{2}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a$$

$$\Rightarrow A'G = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'G = 6a^3.$$



Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Thể tích khối lăng trụ bằng

**(A)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

**(B)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .

**(C)**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ .

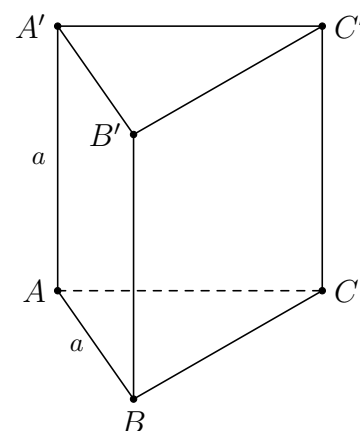
**(D)**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $V = B \cdot h$ , trong đó  $B$  là diện tích đáy của lăng trụ,  $h$  là chiều cao lăng trụ.

Vì tam giác  $ABC$  đều, có cạnh bằng  $a$  nên  $B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Mà  $h = AA' = a \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$  (đvtt).



Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Cho lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bên bằng  $4a$  và đường chéo  $5a$ . Thể tích khối lăng trụ này bằng

(A)  $9a^3$ .

(B)  $6a^3$ .

(C)  $3a^3$ .

(D)  $12a^3$ .

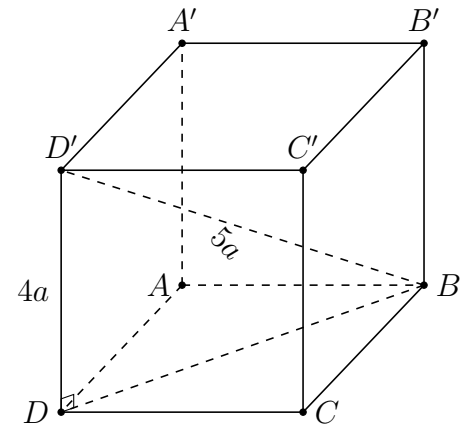
**Lời giải.**

Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là lăng trụ đứng nên  $\triangle BDD'$  vuông tại  $D$ .

Do đó  $BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$ .

Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông  $\Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ . Suy ra  $S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$ .

Vậy  $V = S_{ABCD} \cdot AA' = 9a^3$ .



Chọn phương án (A)

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $A'C$  bằng  $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ . Thể tích của khối lăng trụ bằng

(A)  $\frac{3}{4}a^3$ .

(B)  $\frac{2}{3}a^3$ .

(C)  $\frac{4}{5}a^3$ .

(D)  $\frac{5}{6}a^3$ .

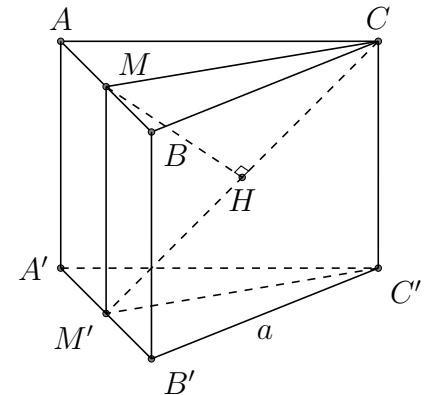
**Lời giải.**

Gọi  $M$ ;  $M'$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $A'B'$ . Hạ  $MH \perp M'C$ .

$AB \parallel (A'B'C') \Rightarrow d[AB, A'C] = MH$

$HC = \frac{a\sqrt{15}}{10}$ ;  $M'C = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ ;  $MM' = a\sqrt{3}$ .

Vậy  $V = \frac{3}{4}a^3$ .



Chọn phương án (A)

**Câu 10.** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có các cạnh đáy bằng  $a$ . Khoảng cách từ tâm  $O$  của tam giác  $ABC$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  bằng  $\frac{a}{6}$ . Thể tích lăng trụ đều đó bằng

(A)  $\frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$ .

(B)  $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$ .

(C)  $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$ .

(D)  $\frac{3\sqrt{2}a^3}{32}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $A'M$ .

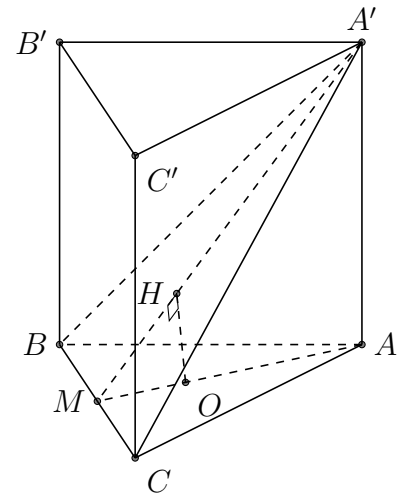
Ta có:  $AM \perp BC$ ;  $AA' \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC)$ .

Do đó:  $d[O, (A'BC)] = OH = \frac{a}{6}$ .

Đặt  $AA' = x$  và có  $\triangle OMH \sim \triangle MAA'$

$$\text{nên } \frac{OH}{AA'} = \frac{MO}{MA'} \Rightarrow \frac{a}{6x} = \frac{a\sqrt{3}}{6\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{3\sqrt{2}}{16}a^3 \text{ (đvtt)}.$$



Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Cho hình lập phương có tổng diện tích các mặt bằng 54. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

**(A)** 9.

**(B)** 27.

**(C)** 54.

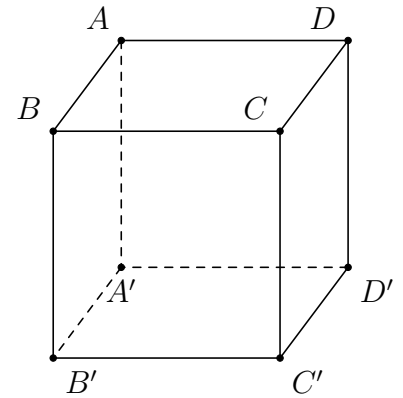
**(D)** 81.

**Lời giải.**

Gọi độ dài của cạnh của hình lập phương là  $a$ , ( $a > 0$ ).

Ta có:  $6.a^2 = 54 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ .

Thể tích khối lập phương đã cho bằng  $V = 3^3 = 27$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Cho khối lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AC' = 75$ . Thể tích khối lập phương đã cho bằng

**(A)** 125.

**(B)** 75.

**(C)**  $\frac{125}{3}$ .

**(D)** 25.

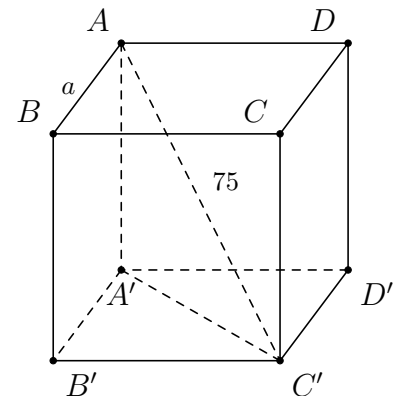
**Lời giải.**

Gọi độ dài của cạnh của hình lập phương là  $a$ , ( $a > 0$ ).

Ta có:

$$A'C' = \sqrt{2}a \Rightarrow AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = 75 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5.$$

Vậy thể tích của khối lập phương đã cho bằng  $V = 5^3 = 125$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng 4. Biết đường thẳng  $AC'$  tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  góc  $45^\circ$ . Thể tích khối hộp đã cho bằng

**(A)**  $48\sqrt{2}$ .

**(B)** 48.

**(C)**  $16\sqrt{2}$ .

**(D)** 16.

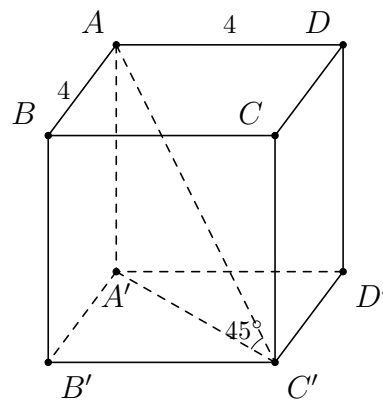
**Lời giải.**

Ta có:

$$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (AC', (ABCD)) = \widehat{AC'A} = 45^\circ; AC' = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AA' = AC' \cdot \tan 45^\circ = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối hộp đã cho là } V = 4\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 4 = 48\sqrt{2}.$$



Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh  $AB = 4$ ,  $AA' = 6$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

**(A)**  $24\sqrt{2}$ .

**(B)**  $8\sqrt{3}$ .

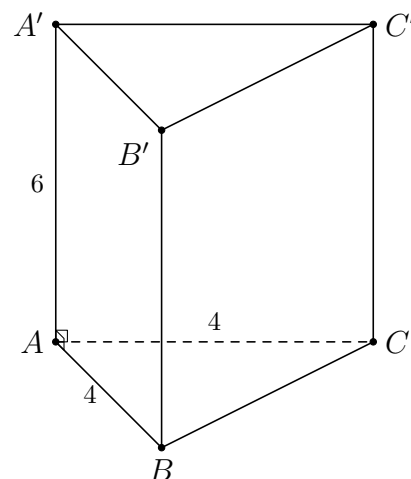
**(C)**  $24\sqrt{3}$ .

**(D)** 64.

**Lời giải.**

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ đã cho là } V = AA' \cdot S_{ABC} = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$



Chọn phương án **(C)**

**Câu 15.** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng 4. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

**(A)**  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ .

**(B)**  $8\sqrt{3}$ .

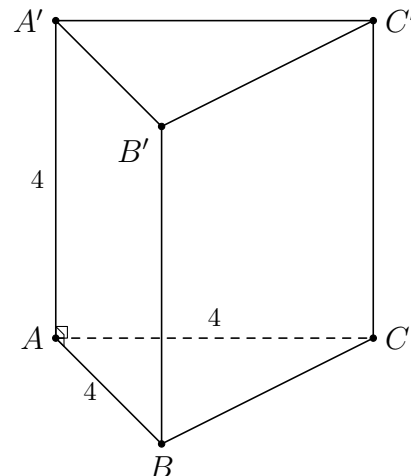
**(C)**  $16\sqrt{3}$ .

**(D)** 64.

**Lời giải.**

Diện tích tam giác  $ABC$ :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ .

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là  $V = AA' \cdot S_{ABC} = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ .



Chọn phương án **(C)**

**Câu 16.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ ,  $AA' = 5$ . Thể tích khối hộp đã cho bằng

**(A)** 20.

**(B)** 60.

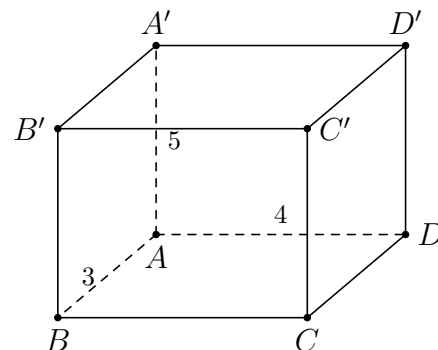
**(C)** 30.

**(D)** 16.

**Lời giải.**

Ta có:  $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 3 \cdot 4 = 12$ .

Thể tích khối hộp đã cho là  $V = AA' \cdot S_{ABCD} = 5 \cdot 12 = 60$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 17.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ . Biết  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $AA' = 3a$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

**(A)**  $3a^2$ .

**(B)**  $a^3$ .

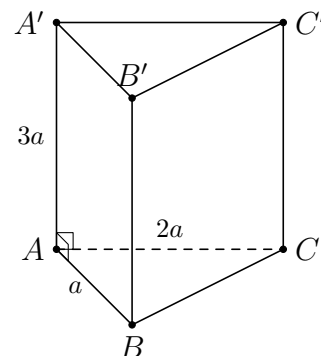
**(C)**  $3a^3$ .

**(D)**  $6a^3$ .

**Lời giải.**

Diện tích tam giác  $ABC$ :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$ .

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là  $V = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot a^2 = 3a^3$ .



Chọn phương án **(C)**

**Câu 18.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác. Biết  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ,  $AA' = 3a$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ .

(B)  $3\sqrt{3}a^3$ .

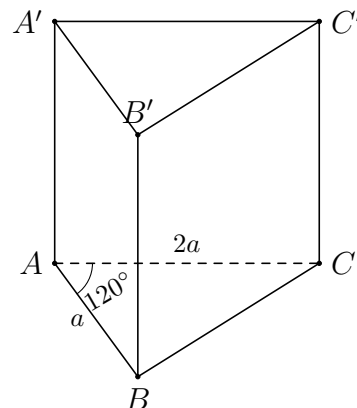
(C)  $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ .

(D)  $3a^3$ .

**Lời giải.**

Diện tích tam giác  $ABC$ :  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng  $V = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ .



Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ , tam giác  $A'AC$  vuông cân tại  $A$ . Thể tích khối hộp đã cho bằng

(A)  $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ .

(B)  $2\sqrt{3}a^3$ .

(C)  $\sqrt{3}a^3$ .

(D)  $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ .

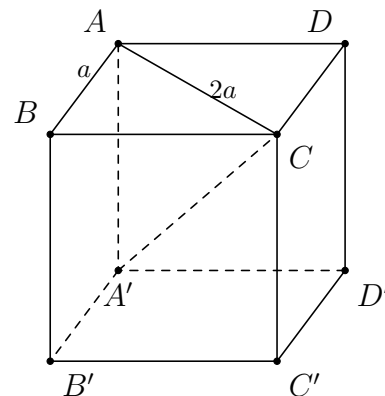
**Lời giải.**

Ta có:  $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ .

Tam giác  $A'AC$  vuông cân tại  $A$  nên  $A'A = AC = 2a$ .

Thể tích khối hộp đã cho bằng  $V = AA' \cdot S_{ABCD} = 2a \cdot a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$ .



Chọn phương án (B)

**Câu 20.** Cho khối lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có thể tích bằng 64. Độ dài cạnh của hình lập phương đã cho bằng

(A) 6.

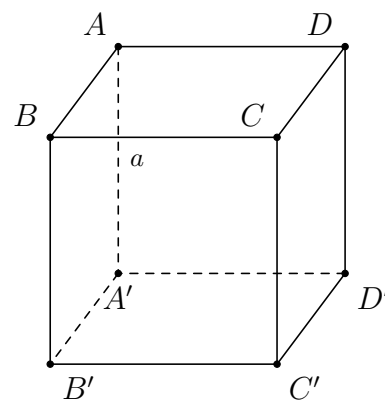
(B)  $4\sqrt{3}$ .

(C) 8.

(D) 4.

**Lời giải.**

Gọi độ dài cạnh của hình lập phương là  $a$ . Ta có:  $V = a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$ .



Chọn phương án **D**



**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. A  | 3. A  | 4. A  | 5. A  | 6. A  | 7. A  | 8. A  | 9. A  | 10. A |
| 11. B | 12. A | 13. A | 14. C | 15. C | 16. B | 17. C | 18. C | 19. B | 20. D |

**DẠNG 6.****GIẢI PHƯƠNG TRÌNH -BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Các công thức thường dùng để giải phương trình bất phương trình logarit.

a)  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$

b)  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$

c)  $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$  Nếu  $\log_a [f(x)]^\alpha = \alpha \log_a |f(x)|$  với  $\alpha$  chẵn.

d)  $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b.$

e)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$

f)  $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}.$

Phương trình logarit cơ bản:  $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$  và  $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$

Bất phương trình logarit cơ bản:

a) Với  $a > 1$  thì  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$

b) Với  $0 < a < 1$  thì  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Nghiệm của phương trình  $\log_3(2x - 1) = 2$  là

☐ (A)  $x = 2.$

☐ (B)  $x = 5.$

☐ (C)  $x = \frac{9}{2}.$

☐ (D)  $x = \frac{7}{2}.$

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán giải phương trình logarit cơ bản.

2. HƯỚNG GIẢI:

Áp dụng công thức  $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

$$\log_3(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Chọn phương án ☒ (B)

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN****Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình  $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$  là

- Ⓐ  $\{4\}$ . Ⓑ  $\{1; -4\}$ .  
 Ⓒ  $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$ . Ⓓ  $\{-1; 4\}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $\{-1; 4\}$ .

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 2.** Tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_2(x-1) < 3$  là

- Ⓐ  $S = (1; 9)$ . Ⓑ  $S = (1; 10)$ . Ⓒ  $S = (-\infty; 9)$ . Ⓓ  $S = (-\infty; 10)$ .

**Lời giải.**

$$\log_2(x-1) < 3 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 2^3 \Leftrightarrow 1 < x < 9.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 3.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$ .

- Ⓐ  $S = \{3\}$ . Ⓑ  $S = \{1\}$ . Ⓒ  $S = \{2\}$ . Ⓓ  $S = \{4\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Với điều kiện trên, ta có

$$\begin{aligned} \log_3(2x+1) - \log_3(x-1) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(2x+1) &= \log_3(x-1) + \log_3 3 \\ \Leftrightarrow \log_3(2x+1) &= \log_3(3x-3) \\ \Leftrightarrow 2x+1 &= 3x-3 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm  $S = \{4\}$ .

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 4.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$  là

- Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

**Lời giải.**

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 7. \end{cases}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (3; 7]$ .

Từ đó suy ra bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 5.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$  là

**(A)** 6.

**(B)** 5.

**(C)** 4.

**(D)** 0.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq 0$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}\log_4 x^2 - \log_2 3 &= 1 \Leftrightarrow \log_4 x^2 = \log_2 3 + 1 \\ \Leftrightarrow \log_4 x^2 &= \log_2 6 \\ \Leftrightarrow \log_4 x^2 &= \log_4 36 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 36 \Leftrightarrow x = \pm 6. \text{ (thỏa mãn)}\end{aligned}$$

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình bằng 0.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 6.** Biết rằng  $S$  là tập nghiệm của bất phương trình  $\log(-x^2 + 100x - 2400) < 2$  có dạng  $S = (a; b) \setminus \{x_0\}$ . Giá trị  $a + b - x_0$  bằng

**(A)** 50.

**(B)** 150.

**(C)** 30.

**(D)** 100.

**Lời giải.**

BPT tương đương với:

$$\begin{cases} -x^2 + 100x - 2400 > 0 \\ -x^2 + 100x - 2400 < 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 < x < 60 \\ (x - 50)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 < x < 60 \\ x \neq 50. \end{cases}$$

Do đó,  $S = (40; 60) \setminus \{50\} \Rightarrow a + b - x_0 = 40 + 60 - 50 = 50$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Biết tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3(x - 2)] > 0$  là khoảng  $(a; b)$ . Tính  $b - a$ .

**(A)** 12.

**(B)** 0.

**(C)** 8.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}\log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3(x - 2)] &> 0 \Leftrightarrow 0 < \log_3(x - 2) < 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x - 2) > 0 \\ \log_3(x - 2) < 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 1 \\ 0 < x - 2 < 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (3; 5) \Rightarrow a = 3; b = 5 \Rightarrow b - a = 2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Số nghiệm của phương trình  $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ .

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Với điều kiện  $x > \frac{1}{2}, x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} & \log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2 \\ \Leftrightarrow & \log_3(x-1)^2 + \log_3(2x-1)^2 = \log_3 9 \\ \Leftrightarrow & \log_3[(x-1)(2x-1)]^2 = \log_3 9 \\ \Leftrightarrow & (2x^2 - 3x + 1)^2 = 9 \\ \Rightarrow & \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = -3 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có một nghiệm  $x = 2$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$  là

**(A)**  $S = \left(3; \frac{11}{2}\right)$ .

**(B)**  $S = (-\infty; 4]$ .

**(C)**  $S = (1; 4]$ .

**(D)**  $S = (1; 4)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 11-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{11}{2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\log_3(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_3(11-2x) \geq \log_3(x-1) \\ \Leftrightarrow & 11-2x \geq x-1 \\ \Leftrightarrow & x \leq 4. \end{aligned}$$

So với điều kiện ta có:  $S = (1; 4]$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Số nghiệm của phương trình  $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$  là

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 1.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Với  $\mathcal{D} = (-2; +\infty) \setminus \{5\}$ , ta có

$$\begin{aligned} & \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x+2) + \log_2|x-5| - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2((x+2)|x-5|) = 3 \\ \Leftrightarrow & (x+2)|x-5| = 2^3 = 8 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+2)(x-5) = 8 \\ x > 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+2)(x-5) = -8 \\ x < 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình  $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 < 0$  là khoảng  $(a; b)$ . Giá trị biểu thức  $a^2 + b^2$  bằng

**(A)** 16.

**(B)** 5.

**(C)** 20.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 < 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) < 0 \\ \Leftrightarrow & 1 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \\ \Leftrightarrow & x \in (2; 4). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 20.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 12.** Tích các nghiệm của phương trình  $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$

**(A)** 630.

**(B)**  $\frac{1}{125}$ .

**(C)**  $\frac{630}{625}$ .

**(D)**  $\frac{7}{125}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > 0; x \neq 1$ .

Ta có

$$\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x) \left(\frac{1}{2} \log_5 x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (3 \cdot \log_x 5 + 1) \log_5^2 x = 4.$$

Đặt  $\log_5 x = t$  phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t} + 1\right)t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{625} \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là  $\frac{1}{125}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho biết phương trình  $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Hãy tính tổng  $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$

**(A)**  $S = 252$ .

**(B)**  $S = 45$ .

**(C)**  $S = 9$ .

**(D)**  $S = 180$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3(3^{x+1} - 1) &= 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{x+1} - 1) = 2x \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{x+1} - 2 &= 3^{2x} \\ \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Đặt  $3^x = t$ , ( $t > 0$ ), phương trình trở thành  $t^2 - 6 \cdot t + 2 = 0$ . Phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt.

Đặt  $3^{x_1} = t_1$ ,  $3^{x_2} = t_2$ ,  $t_1 + t_2 = 6$ ,  $t_1 \cdot t_2 = 2$ .

Ta có

$$S = (t_1^3 + t_2^3) = (t_1 + t_2)^3 - 3t_1 \cdot t_2(t_1 + t_2) = 216 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 14.** Cho  $x$  thỏa mãn  $(\log_2 x - 1) \log_{\frac{x}{2}}(3x - 20) = 2$ . Giá trị của  $A = 8^{\log_x 3} + x$  bằng

**(A)** 20.

**(B)** 29.

**(C)** 30.

**(D)** 11.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \neq 2. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}(\log_2 x - 1) \log_{\frac{x}{2}}(3x - 20) &= 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{2} \log_{\frac{x}{2}}(3x - 20) = 2 \\ \Leftrightarrow \log_2(3x - 20) &= 2 \\ \Leftrightarrow 3x - 20 &= 4 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Vậy  $A = 8^{\log_8 3} + 8 = 11$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 15.** Biết  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_7 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$  và  $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$  với  $a, b$  là hai số nguyên dương. Tính  $a + b$ .

**(A)**  $a + b = 13$ .

**(B)**  $a + b = 11$ .

**(C)**  $a + b = 16$ .

**(D)**  $a + b = 14$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ .

Ta có:

$$\log_7 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x.$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_7 t + t$  có  $f(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0$  nên là hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Do đó ta có  $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$ .

Khi đó

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5}) \text{ hoặc } x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5}).$$

Vậy  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ .

Do đó  $a = 9; b = 5$  và  $a + b = 9 + 5 = 14$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 16.** Cho  $a, b$  là hai số thực dương thỏa mãn  $\log_5 \left( \frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = a^2 + b^2$ .

**(A)**  $\frac{1}{2}$ .

**(B)** 1.

**(C)**  $\frac{3}{2}$ .

**(D)**  $\frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \log_5 \left( \frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4 &\Leftrightarrow \log_5(4a + 2b + 5) = \log_5(a + b) + a + 3b - 4 \\ \Leftrightarrow \log_5(4a + 2b + 5) + (4a + 2b + 5) &= \log_5[5(a + b)] + 5(a + b) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm  $f(x) = \log_5 x + x, x > 0$ .

Đạo hàm  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + 1 > 0, \forall x > 0$ . Suy ra hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Phương trình (\*) viết lại:

$$f(4a + 2b + 5) = f(5(a + b)) \Leftrightarrow 4a + 2b + 5 = 5(a + b) \Leftrightarrow a + 3b = 5.$$

Mặt khác:  $5^2 = (a + 3b)^2 \leq (1^2 + 3^2) \cdot (a^2 + b^2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 \geq \frac{5}{2}$ .

Dấu xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 17.** Cho hai số  $a, b$  dương thỏa mãn đẳng thức  $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b - a}{4}$ . Giá trị biểu thức

$M = \log_6 \left( \frac{a}{2} + 4b\sqrt{2} \right) - \log_6 b$  bằng

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)**  $\frac{1}{2}$ .

**(D)**  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Đặt:  $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b - a}{4} = t$ .

Khi đó:  $a = 4t, b = 25t, \frac{4b - a}{4} = 10t$ .

Nên

$$\frac{4 \cdot 25^t - 4^t}{4} = 10t \Leftrightarrow 4 \cdot 25^t - 4^t = 4 \cdot 10^t \Leftrightarrow \left( \frac{2}{5} \right)^{2t} + 4 \cdot \left( \frac{2}{5} \right)^t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{2}{5} \right)^t = 2\sqrt{2} - 2.$$

Suy ra  $\frac{a}{b} = \left( \frac{4}{25} \right)^t = (2\sqrt{2} - 2)^2 = 12 - 8\sqrt{2}$ .

Vậy  $M = \log_6 \left( \frac{a}{2} + 4b\sqrt{2} \right) - \log_6 b = \log_6 \left( \frac{a}{2b} + 4\sqrt{2} \right) = \log_6 6 = 1$ .



Chọn phương án **A**

**Câu 18.** Giả sử  $S = (a, b]$  là tập nghiệm của bất phương trình

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$$

Khi đó  $b - a$  bằng

**(A)**  $\frac{1}{2}$ .

**(B)**  $\frac{7}{2}$ .

**(C)**  $\frac{5}{2}$ .

**(D)** 2.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x > 0 \\ 6 + x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

$\mathcal{D} = (0; 3]$ .

Ta có

$$\begin{aligned} & 5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2} \\ \Leftrightarrow & 5x + x\sqrt{6 + x - x^2} \log_2 x > x(x - 1) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2} \\ \Leftrightarrow & (x - 1)(5 - x \log_2 x) + \sqrt{6 + x - x^2}(x \log_2 x - 5) > 0 \\ \Leftrightarrow & (5 - x \log_2 x)(x - 1 - \sqrt{6 + x - x^2}) > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} 5 - x \log_2 x > 0 \\ x - 1 - \sqrt{6 + x - x^2} > 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} 5 - x \log_2 x < 0 \\ x - 1 - \sqrt{6 + x - x^2} < 0 \end{cases} & (II). \end{cases} \end{aligned}$$

Giải hệ (I).

$$\begin{cases} 5 - x \log_2 x > 0 & (1) \\ x - 1 - \sqrt{6 + x - x^2} > 0 & (2). \end{cases}$$

Giải (1):  $5 - x \log_2 x > 0$ .

Xét hàm số  $f(x) = x \left( \frac{5}{x} - \log_2 x \right) = xg(x)$  với  $x \in (0; 3]$ .

Ta có  $g(x) = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x \ln 2} < 0 \forall x \in (0; 3]$ .

Lập bảng biến thiên

|         |                                                                                                                           |   |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $x$     | 0                                                                                                                         | 3 |
| $g'(x)$ | —                                                                                                                         |   |
| $g(x)$  |  $\frac{5}{3} - \log_2 3 \approx 0.08$ |   |

Vậy  $f(x) = x \left( \frac{5}{x} - \log_2 x \right) > 0 \forall x \in (0; 3]$ .

Xét bất phương trình (2):

$$\sqrt{6+x-x^2} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6+x-x^2 < (x-1)^2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là  $\mathcal{D} = \left(\frac{5}{2}; 3\right]$ .

Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy  $S = \left(\frac{5}{2}, 3\right]$ .

$$b-a = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$  là  $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$ .

Khi đó tích  $a.b$  bằng

**(A)**  $\frac{12}{5}$ .

**(B)**  $\frac{5}{12}$ .

**(C)**  $\frac{15}{16}$ .

**(D)**  $\frac{16}{15}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$x(\sqrt{x^2+2}-x)+4 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4 = \frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x}.$$

Nhận xét:  $\sqrt{x^2+2}+x > |x|+x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi đó  $x\sqrt{x^2+2}+4-x^2 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x$ .

Với điều kiện (\*) bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 1 + \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2}) - \log_2(x+\sqrt{x^2+2}) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 3x+2\sqrt{x^2+2} + \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq x+\sqrt{x^2+2} + \log_2(x+\sqrt{x^2+2}) \\ \Leftrightarrow & f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq f(x+\sqrt{x^2+2}). \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = t + \log_2 t$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$f(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0$  với  $\forall t > 0$  nên hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Do đó

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq x+\sqrt{x^2+2} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (**) \end{aligned}$$

Với điều kiện trên thì  $(*) \Leftrightarrow 4(x^2 + 2) > 9x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{8}{5}} < x < \sqrt{\frac{8}{5}}$ .

Kết hợp  $(**)$  ta được tập nghiệm của bất phương trình là  $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ .

Vậy  $a \cdot b = \frac{16}{15}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình  $\log_2 \left( \frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{x + \frac{1}{2x}} = 5$ .

**(A)** 2.

**(B)** 0.

**(C)**  $\frac{1}{2}$ .

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} 2x \neq 0 \\ \frac{2x^2 + 1}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ .

Khi đó, ta có

$$\log_2 \left( \frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{x + \frac{1}{2x}} = 5 \Leftrightarrow \log_2 \left( x + \frac{1}{2x} \right) + 2^{x + \frac{1}{2x}} = 5 \Leftrightarrow \log_2 \left( x + \frac{1}{2x} \right) = 5 - 2^{x + \frac{1}{2x}}.$$

Đặt  $t = x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{2}$ , phương trình trở thành:  $\log_2 t = 5 - 2^t$ ,  $t \geq \sqrt{2}$ .

Xét  $f(t) = \log_2 t$ ,  $t \geq \sqrt{2}$ .

Ta có:  $f(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0$ ,  $\forall t \geq \sqrt{2}$  nên  $f(t)$  đồng biến trên  $[\sqrt{2}; +\infty)$ .

Xét  $g(t) = 5 - 2^t$ ,  $t \geq \sqrt{2}$ .

Ta có:  $g(t) = -2^t \cdot \ln 2 < 0$ ,  $\forall t \geq \sqrt{2}$  nên  $g(t)$  nghịch biến trên  $[\sqrt{2}; +\infty)$ .

Từ đó phương trình  $f(t) = g(t)$  có nhiều nhất một nghiệm  $t \geq \sqrt{2}$ . Ta nhận thấy  $t = 2$  là nghiệm, và đây là nghiệm duy nhất của phương trình  $\log_2 t = 5 - 2^t$  trên  $[\sqrt{2}; +\infty)$ .

$$\text{Suy ra } x + \frac{1}{2x} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện  $x > 0$ , nên đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Tích hai nghiệm là  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ .

Chọn phương án **(C)**

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. A  | 3. D  | 4. D  | 5. D  | 6. A  | 7. D  | 8. B  | 9. C  | 10. A |
| 11. C | 12. B | 13. D | 14. D | 15. C | 16. D | 17. A | 18. A | 19. D | 20. C |

**DẠNG 7.****SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Tính chất của tích phân xác định.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx (k \neq 0).$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = -2$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 1$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

(A) -3.

(B) -1.

(C) 1.

(D) 3.

**Lời giải.**

## Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán sử dụng tính chất để tính tích phân xác định của hàm số.

**2. HƯỚNG GIẢI:**

1) Dựa trên giả thiết  $\int_1^2 f(x) dx = -2$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 1$ , ta tính tích phân  $\int_1^3 f(x) dx$ .

2) Ta có:  $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$ .

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có:  $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -2 + 1 = -1$ .

Chọn phương án (B)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Nếu  $\int_0^4 f(x) dx = 4$  và  $\int_4^{10} f(x) dx = 5$  thì  $\int_0^{10} f(x) dx$  bằng

(A) -1.

(B) 9.

(C) 1.

(D) 3.

**Lời giải.**

Ta có  $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^{10} f(x) dx = 4 + 5 = 9$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Cho  $\int_{-1}^1 f(x) dx = -5$  và  $\int_{-1}^5 f(x) dx = 10$ , khi đó  $\int_1^5 f(t) dt$  bằng

(A) 8.

(B) 5.

(C) 15.

(D) -15.

**Lời giải.**

Ta có  $\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^5 f(x) dx = \int_{-1}^5 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx = 10 - (-5) = 15$ .

$\int_1^5 f(t) dt = \int_1^5 f(x) dx$  (Tích phân không phụ thuộc biến số).

Vậy  $\int_1^5 f(t) dt = 15$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 3.** Cho  $\int_1^6 f(x) dx = 5$ ,  $\int_2^6 f(t) dt = 4$ . Tính  $I = \int_1^2 f(y) dy$ .

**(A)**  $I = 5$ .

**(B)**  $I = -1$ .

**(C)**  $I = 9$ .

**(D)**  $I = 1$ .

**Lời giải.**

Do tích phân không phụ thuộc vào biến số nên  $\int_2^6 f(t) dt = \int_2^6 f(x) dx = 4$ .

Ta có  $I = \int_1^2 f(y) dy = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^6 f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 5 - 4 = 1$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 4.** Cho  $\int_0^4 f(x) dx = 8$  và  $\int_2^4 2f(x) dx = 12$  khi đó  $I = \int_{-1}^1 f(x+1) dx$  bằng

**(A)** 4.

**(B)** 2.

**(C)** 14.

**(D)** -2.

**Lời giải.**

Ta có  $\int_2^4 2f(x) dx = 12 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = 6$ ;

$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = 8 - 6 = 2$ .

Đặt  $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$ ; khi  $x = -1 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 2$ .

Khi đó  $I = \int_{-1}^1 f(x+1) dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = 2$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 5.** Cho  $\int_0^5 f(x) dx = 10$  và  $\int_0^5 g(x) dx = 5$ . Giá trị của  $\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$  bằng

**(A)** 1.

**(B)** 5.

**(C)** 7.

**(D)** -7.

**Lời giải.**

Áp dụng tính chất của tích phân ta có  $\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_0^5 f(x) dx - 3 \int_0^5 g(x) dx = 20 - 15 = 5$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 6.** Cho  $\int_1^4 g(x) dx = \int_1^{\circ} g(x) dx = 3$ . Khi đó  $\int_0^4 (g(x) + 1) dx$  bằng

(A) 4. (B) 9. (C) 14. (D) 6.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^{\circ} g(x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 g(x) dx = -3.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^4 (g(x) + 1) dx = \int_0^4 g(x) dx + \int_0^4 1 dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^4 g(x) dx + \int_0^4 1 dx = -3 + 3 + x \Big|_0^4 = 4.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 7.** Cho  $\int_{-1}^3 f(x) dx = -3$  và  $\int_{-1}^3 3g(x) dx = 9$ . Khi đó  $\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx$  bằng

(A) 4. (B) 9. (C) -9. (D) -6.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_{-1}^3 3g(x) dx = 3 \cdot \int_{-1}^3 g(x) dx = 9 \Rightarrow \int_{-1}^3 g(x) dx = 3.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_{-1}^3 g(x) dx = -3 - 3 = -6.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 8.** Cho  $\int_1^3 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^3 [2f(x) + 3g(x)] dx = 16$ , khi đó  $\int_1^3 g(x) dx$  bằng

(A) 18. (B) 10. (C) 4. (D) 8.

**Lời giải.**



Ta có

$$\begin{aligned} & \int_1^3 [2f(x) + 3g(x)] dx = 16 \\ \Leftrightarrow & 2 \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 16 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot 2 + 3 \int_1^3 g(x) dx = 16 \\ \Leftrightarrow & 3 \int_1^3 g(x) dx = 12 \\ \Leftrightarrow & \int_1^3 g(x) dx = 4. \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**

**Câu 9.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 3$ ,  $\int_0^1 g(x) dx = -1$  thì  $\int_0^1 [2f(x) + g(x) + e^x] dx$  bằng

**(A)**  $6 + e$ .

**(B)**  $5 + e$ .

**(C)**  $4 - e$ .

**(D)**  $4 + e$ .

**Lời giải.**

$$\int_0^1 [2f(x) + g(x) + e^x] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 e^x dx = 2 \cdot 3 + (-1) + e^x \Big|_0^1 = 4 + e.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 10.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 3$ ,  $\int_1^2 2g(x) dx = 9$  thì  $\int_1^2 [2f(x) + 4g(x)] dx$  bằng

**(A)** 15.

**(B)** 18.

**(C)** 27.

**(D)** 24.

**Lời giải.**

$$\int_1^2 [2f(x) + 4g(x)] dx = 2 \int_1^2 f(x) dx + 4 \int_1^2 g(x) dx = 2 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{9}{2} = 24.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 11.** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  thoả  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = -1$ ,  $\int_1^2 [f(x) + 5g(x)] dx = 17$ . Tính  $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$ .

Ⓐ 6.

Ⓑ 5.

Ⓒ 12.

Ⓓ 8.

**Lời giải.**

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = -1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = -1. \quad (1)$$

$$\int_1^2 [f(x) + 5g(x)] dx = 17 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + 5 \int_1^2 g(x) dx = 17. \quad (2)$$

$$\text{Đặt } X = \int_1^2 f(x) dx, Y = \int_1^2 g(x) dx.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} X - Y = -1 \\ X + 5Y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = 3. \end{cases}$$

$$\text{Do đó ta được: } \int_1^2 f(x) dx = 2 \text{ và } \int_1^2 g(x) dx = 3.$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 [f(x) + g(x)] dx = 2 + 3 = 5.$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 12.** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên đoạn  $[0; 2]$  thỏa  $\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = -4, \int_0^2 [2f(x) +$

$$g(x)] dx = -2. \text{ Tính } \int_0^2 [f(x) + 2g(x)] dx.$$

Ⓐ 7.

Ⓑ 6.

Ⓒ 2.

Ⓓ 4.

**Lời giải.**

$$\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = -4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx = -4. \quad (1)$$

$$\int_0^2 [2f(x) + g(x)] dx = -2 \Leftrightarrow 2 \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx = -2. \quad (2)$$

$$\text{Đặt } X = \int_0^2 f(x) dx, Y = \int_0^2 g(x) dx.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} X - Y = -4 \\ 2X + Y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ Y = 2. \end{cases}$$

$$\text{Do đó ta được: } \int_0^2 f(x) dx = -2 \text{ và } \int_0^2 g(x) dx = 2.$$

Vậy  $\int_0^2 [f(x) + 2g(x)] dx = -2 + 2 \cdot 2 = 2$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 8]$  và  $\int_0^8 f(x) dx = 16$ ;  $\int_2^5 f(x) dx = 6$ . Tính  $P =$

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx.$$

**(A)**  $P = 4$ .

**(B)**  $P = 10$ .

**(C)**  $P = 7$ .

**(D)**  $P = -4$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\int_0^8 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx \Rightarrow 16 = P + 6 \Rightarrow P = 10$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 10]$  và  $\int_0^{10} f(x) dx = 10$ ;  $\int_2^4 f(2x) dx = 6$ . Tính

$$P = \int_0^4 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx.$$

**(A)**  $P = 4$ .

**(B)**  $P = 10$ .

**(C)**  $P = 7$ .

**(D)**  $P = -2$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx$ .

Khi  $x = 2 \Rightarrow t = 4$ ;  $x = 4 \Rightarrow t = 8$ .

Suy ra  $6 = \int_2^4 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_4^8 f(t) dt \Rightarrow \int_4^8 f(t) dt = \int_4^8 f(x) dx = 12$ .

Ta có:  $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx \Rightarrow 10 = P + 12 \Rightarrow P = -2$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(2) = 4$  và  $f(-2) = 0$ . Tính  $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$ .

**(A)**  $I = 4$ .

**(B)**  $I = 3$ .

**(C)**  $I = 0$ .

**(D)**  $I = -4$ .

**Lời giải.**

$$I = \int_{-2}^2 f(x) dx = f(x) \Big|_{-2}^2 = f(2) - f(-2) = 4.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có một nguyên hàm là  $F(x)$ , biết  $F(3) = 12$ ,  $F(0) = 0$  khi đó  $\int_0^1 f(3x) dx$  bằng

Ⓐ  $-5$ .Ⓑ  $12$ .Ⓒ  $4$ .Ⓓ  $-9$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = 3x \Rightarrow dt = 3 dx$ .

Khi  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 3$ .

Khi đó ta có  $\int_0^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} F(x) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (F(3) - F(0)) = 4$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có một nguyên hàm là  $F(x)$ , biết  $F(4) = 12$ ,  $F(2) = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(2x) dx$  bằng

Ⓐ  $\frac{9}{4}$ .Ⓑ  $9$ .Ⓒ  $\frac{9}{2}$ .Ⓓ  $-9$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx$ .

Khi  $x = 1 \Rightarrow t = 2$ ;  $x = 2 \Rightarrow t = 4$ .

Khi đó ta có  $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} F(x) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} (F(4) - F(2)) = \frac{9}{2}$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên đoạn  $[1; 2]$ , biết tích phân  $\int_1^2 f(x) dx = 4$  và

$f(1) = 2$ . Tính  $f(2)$ .

Ⓐ  $f(2) = 6$ .Ⓑ  $f(2) = 1$ .Ⓒ  $f(2) = 3$ .Ⓓ  $f(2) = -16$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^2 = 4 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 4 \Leftrightarrow f(2) = 4 + f(1) = 4 + 2 = 6$ .

Vậy  $f(2) = 6$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(3x) = 3f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

Tính tích phân  $I = \int_1^3 f(x) dx$ .

Ⓐ  $I = 8.$

Ⓑ  $I = 6.$

Ⓒ  $I = 3.$

Ⓓ  $I = 2.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3f(x) dx = \int_0^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(3x) d(3x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow d(x) = \frac{1}{3} dt, \text{ với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 3.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 3 &= \int_0^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = 9 \\ &\Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx = 9, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 9 \\ &\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 9 - \int_0^1 f(x) dx = 8. \end{aligned}$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 8$ . Tính tích phân  $I =$

$$\int_1^3 f(|2x - 5|) dx.$$

Ⓐ  $I = -8.$

Ⓑ  $I = 5.$

Ⓒ  $I = -4.$

Ⓓ  $I = -6.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 f(|2x - 5|) dx = \int_1^{\frac{5}{2}} f(|2x - 5|) dx + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(|2x - 5|) dx \\
 &= \int_1^{\frac{5}{2}} f(5 - 2x) dx + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(2x - 5) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{5}{2}} f(5 - 2x) d(5 - 2x) + \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{2}}^3 f(2x - 5) d(2x - 5) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_3^0 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(s) ds \quad (t = 5 - 2x, s = 2x - 5) \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \\
 &= 1 + \frac{8}{2} = 5.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)**

### Câu 21.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích  $S_1 = \frac{5}{12}$  và phần nằm

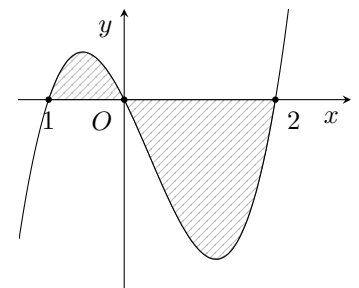
phía dưới trục hoành có diện tích  $S_2 = \frac{8}{3}$ . Tính  $I = \int_0^1 f(3x - 1) dx$ .

**(A)**  $I = \frac{5}{3}$ .      **(B)**  $I = -\frac{3}{4}$ .      **(C)**  $I = -\frac{37}{36}$ .      **(D)**  $I = -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Với  $I = \int_0^1 f(3x - 1) dx$ .

Đặt  $t = 3x - 1 \Rightarrow dt = 3 dx$ .



Khi  $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = -1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

Ta được  $I = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \left( \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right).$

Trên đoạn  $[-1; 0]: f(x) \geq 0$  nên  $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{5}{12}.$

Trên đoạn  $[0; 2]: f(x) \leq 0$  nên  $\int_0^2 f(x) dx = -\frac{8}{3}.$

Vậy  $I = \frac{1}{3} \left( \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{5}{12} - \frac{8}{3} \right) = -\frac{3}{4}.$

Chọn phương án **B**

### Câu 22.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần đường parabol có đỉnh là gốc tọa độ  $O$  như hình vẽ. Giá trị của

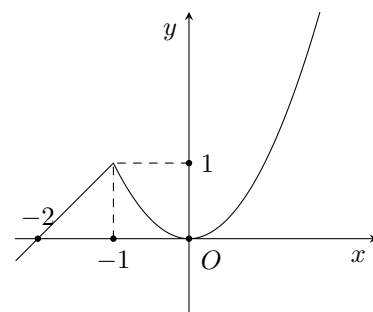
$\int_{-3}^3 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{26}{3}.$

**(B)**  $\frac{38}{3}.$

**(C)**  $\frac{4}{3}.$

**(D)**  $\frac{28}{3}.$



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Phần đường thẳng đi qua các điểm  $A(-1; 1)$  và  $B(-2; 0)$  nên nó là một phần của đồ thị của hàm số  $y = x + 2$ .

Phần đường parabol có đỉnh là gốc tọa độ  $O(0; 0)$  và đi qua điểm  $A(-1; 1)$  nên nó là một phần của đồ thị của hàm số  $y = x^2$ .

Do đó  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{ khi } x < -1 \\ x^2 & \text{ khi } x \geq -1. \end{cases}$

Nên  $\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} (x + 2) dx + \int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{28}{3}.$

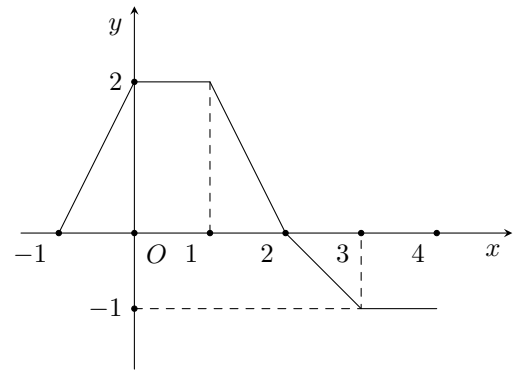
Chọn phương án **D**

### Câu 23.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trên đoạn  $[-1; 4]$  như hình vẽ

dưới đây. Tính tích phân  $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ .

- (A)  $I = 3$ .      (B)  $I = \frac{11}{2}$ .      (C)  $I = 5$ .      (D)  $I = \frac{5}{2}$ .



**Lời giải.**

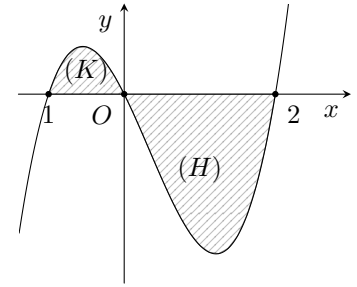
$$I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2}(3+1)2 - \frac{1}{2}(1+2)1 = \frac{5}{2}.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 24.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-1; 2]$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  được cho như hình vẽ. Diện tích hình phẳng (K), (H) lần lượt là  $\frac{5}{12}$  và  $\frac{8}{3}$ . Biết  $f(-1) = \frac{19}{12}$ . Tính  $f(2)$ .

- (A)  $f(2) = \frac{23}{6}$ .      (B)  $f(2) = -\frac{2}{3}$ .      (C)  $f(2) = \frac{2}{3}$ .      (D)  $f(2) = \frac{11}{6}$ .



**Lời giải.**

Từ hình vẽ ta có:  $\frac{5}{12} = \int_{-1}^0 f(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^0 = f(0) - f(-1)$ , suy ra  $f(0) = f(-1) + \frac{5}{12} = 2$ .

Ta cũng có:  $\frac{8}{3} = - \int_0^2 f(x) dx = -f(x) \Big|_0^2 = -f(2) + f(0)$ , suy ra  $f(2) = f(0) - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$ .

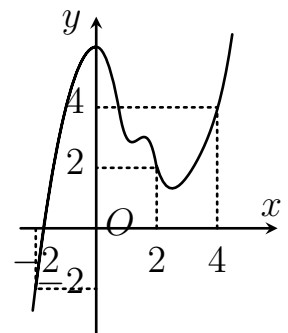
Chọn phương án (B)

**Câu 25.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị của biểu thức  $I = \int_0^4 f(x-2) dx + \int_0^2 f(x+2) dx$  bằng

- (A)  $-2$ .      (B)  $2$ .      (C)  $6$ .      (D)  $10$ .



**Lời giải.**

$$\text{Xét } I = \int_0^4 f(x-2) dx + \int_0^2 f(x+2) dx = \int_0^4 f(x-2) d(x-2) + \int_0^2 f(x+2) d(x+2).$$



$$= f(x-2) \Big|_0^4 + f(x+2) \Big|_0^2 = [f(2) - f(-2)] + [f(4) - f(2)] = f(4) - f(-2) = 4 - (-2) = 6.$$

Chọn phương án  C

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. D  | 4. B  | 5. B  | 6. A  | 7. D  | 8. C  | 9. D  | 10. D |
| 11. B | 12. C | 13. B | 14. D | 15. A | 16. C | 17. C | 18. A | 19. A | 20. B |
| 21. B | 22. D | 23. D | 24. B | 25. C |       |       |       |       |       |

## DẠNG 8. CỰC TRỊ HÀM SỐ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm đổi dấu từ  $-$  sang  $+$  tại  $x = x_0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại  $x = x_0$ , giá trị cực tiểu  $y = y(x_0)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm đổi dấu từ  $+$  sang  $-$  tại  $x = x_0$  thì hàm số đạt cực đại tại  $x = x_0$ , giá trị cực đại  $y = y(x_0)$ .
- Cực đại và cực tiểu của hàm số gọi chung là điểm cực trị hàm số.

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |                         |               |           |   |
|------|-----------|-------------------------|---------------|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0                       | 3             | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0                       | -             | 0         | + |
| $y$  | $-\infty$ | $\nearrow$ 2 $\searrow$ | -4 $\nearrow$ | $+\infty$ |   |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) 2.

(B) 3.

(C) 0.

(D) -4.

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

- a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dựa trên bảng biến thiên của hàm số, tìm điểm cực trị và giá trị cực trị của hàm số.
- b) HƯỚNG GIẢI:  
Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị cực tiểu của hàm số.

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4.

Chọn phương án (D)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |   |           |           |
|------|-----------|------|---|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0    | 2 | $+\infty$ |           |
| $y'$ | -         | 0    | + | 0         | -         |
| $y$  | $+\infty$ |      |   | 3         |           |
|      |           | $-1$ |   |           | $-\infty$ |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

(A) 0.

(B) -1.

(C) 2.

(D) 3.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $y_{CT} = -1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |      |           |     |           |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $-3$ |           |     | $+\infty$ |
|      |           | $-4$ |     |      | $-4$      |     |           |

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) -4.

(B) 0.

(C) 1.

(D) -3.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $y_{CD} = -3$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |     |           |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $1$ | $2$ | $-\infty$ |     |     |

Số điểm cực trị của hàm số đã cho

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 4.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên thì số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Chọn phương án (A)

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |      |      |           |
|------|-----------|------|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $-$  |           |
| $y$  |           |      |      |      |           |

|           |  |            |            |           |            |
|-----------|--|------------|------------|-----------|------------|
|           |  | $-2$       |            |           |            |
| $-\infty$ |  | $\nearrow$ | $\searrow$ | $+\infty$ |            |
|           |  |            |            | $2$       | $\nearrow$ |
|           |  |            |            |           | $+\infty$  |

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A) 2.

(B) -3.

(C) -1.

(D) -2.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên thì giá trị cực đại của hàm số là  $-2$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |                                                                                                                                                                                                                               |               |   |           |   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|-----------|---|
| $x$  | 1                                                                                                                                                                                                                             | $\frac{4}{3}$ | 2 | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +                                                                                                                                                                                                                             | 0             | - | 0         | + |
| $y$  | <div><div><div><math>0</math></div><div><math>\nearrow</math></div></div><div><div><math>\searrow</math></div><div><math>0</math></div></div><div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>+\infty</math></div></div></div> |               |   |           |   |

Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

(A)  $\frac{4}{27}$ .

(B)  $\frac{4}{3}$ .

(C) 2.

(D) 0.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên thì điểm cực đại của hàm số đã cho là  $x = \frac{4}{3}$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu

|      |           |      |     |     |           |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

Hàm số đạt cực tiểu tại

(A)  $x = -1$ .

(B)  $x = 0$ .

(C)  $x = 1$ .

(D)  $x = 2$ .

**Lời giải.**

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $y'$  đổi dấu từ âm sang dương.

Chọn phương án (B)

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $0$ | $-1$ | $+\infty$ |     |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số có đúng một cực trị.  
 (B) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .  
 (C) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng  $-1$ .  
 (D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

**Lời giải.**

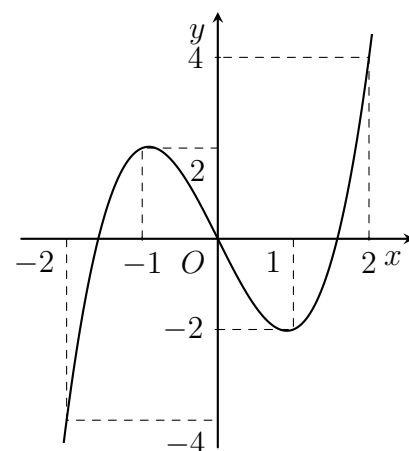
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 8.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- (A)  $x = -2$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $x = 1$ . (D)  $x = 2$ .



**Lời giải.**

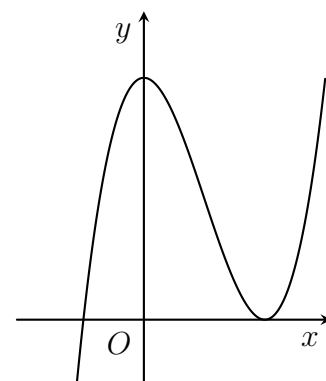
Dựa vào đồ thị hàm số ta có  $x_{CD} = -1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 9.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



**Lời giải.**

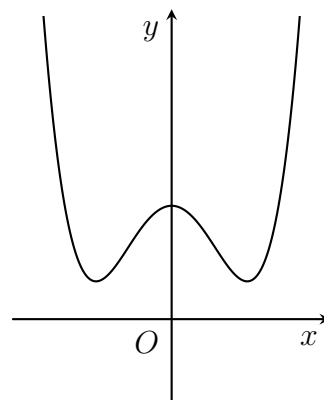
Đồ thị hàm số đổi chiều 2 lần ta được 2 điểm cực trị.

Chọn phương án **C**

**Câu 10.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- (A) 3.      (B) 2.      (C) 1.      (D) 0.



**Lời giải.**

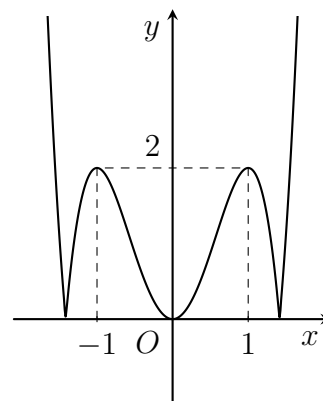
Dựa vào đồ thị của hàm số ta thấy có 2 điểm cực tiểu.

Chọn phương án **B**

**Câu 11.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- (A) 2.      (B) 3.      (C) 4.      (D) 5.



**Lời giải.**

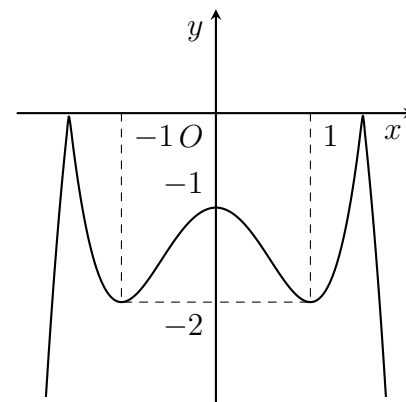
Dựa vào đồ thị của hàm số ta thấy có 3 điểm cực tiểu.

Chọn phương án **B**

**Câu 12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2.      (B) 3.      (C) 4.      (D) 5.



**Lời giải.**

Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  đổi chiều 5 lần nên hàm số có 5 cực trị.

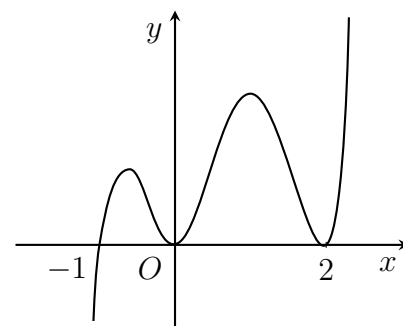
Chọn phương án **D**

**Câu 13.**

Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$  trên khoảng  $K$  như hình bên.

Hỏi hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 4.

**Lời giải.**

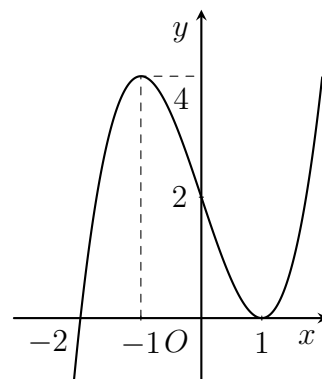
Đồ thị hàm số  $f(x)$  cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất (không tính tiếp xúc) có nghĩa là đạo hàm chỉ đổi dấu một lần nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -1$ .  
 (B) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -2$ .  
 (C) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .  
 (D) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , ta suy ra BBT

|      |                                                                                      |      |      |           |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$                                                                            | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$                                                                                  | $0$  | $+$  | $0$       | $+$ |
| $y$  |  |      |      |           |     |

Vậy hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

|         |           |      |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $+$ | $0$       | $-$ |



Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 3.

**Lời giải.**

Vì hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x)$  đổi dấu 2 lần nên hàm số đó có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án (A)

**Câu 16.**

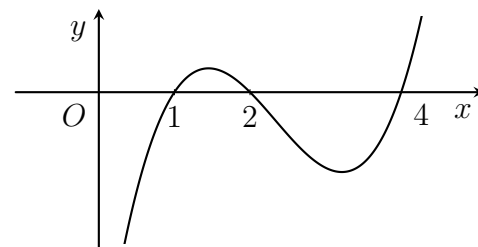
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $g = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Điểm cực đại của hàm số là

(A)  $x = 4$ .

(B)  $x = 3$ .

(C)  $x = 1$ .

(D)  $x = 2$ .



**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $g = f'(x)$ , ta suy ra BBT

|      |           |   |   |          |          |   |          |   |           |
|------|-----------|---|---|----------|----------|---|----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 1 |          | 2        |   | 4        |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | 0 | +        | 0        | - | 0        | + |           |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |          | $y_{CD}$ |   |          |   | $+\infty$ |
|      |           |   |   | $y_{CT}$ |          |   | $y_{CT}$ |   |           |

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại  $x = 2$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 17.**

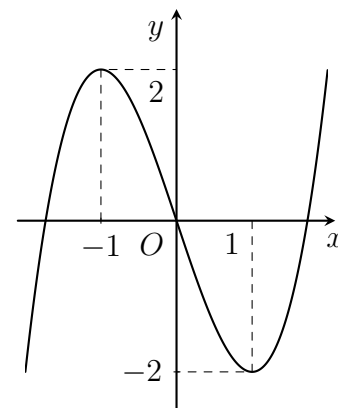
Cho hàm số  $y = f(x)$  đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

(A)  $f(0)$ .

(B)  $f(1)$ .

(C)  $f(2)$ .

(D)  $f(-1)$ .



**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ , ta suy ra BBT

|      |           |       |     |       |           |     |     |     |
|------|-----------|-------|-----|-------|-----------|-----|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $x_1$ | $0$ | $x_2$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $y'$ |           | $-$   | $0$ | $+$   | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$  |           |       |     |       |           |     |     |     |

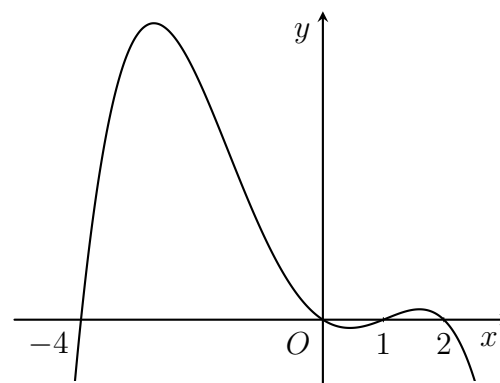
Từ BBT ta được giá trị cực đại của hàm số bằng  $f(0)$ .

Chọn phương án **(A)**

### Câu 18.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A)** 3.      **(B)** 2.      **(C)** 1.      **(D)** 4.



### Lời giải.

Ta có bảng biến thiên

|      |           |      |     |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |
| $y$  |           |      |     |     |     |           |

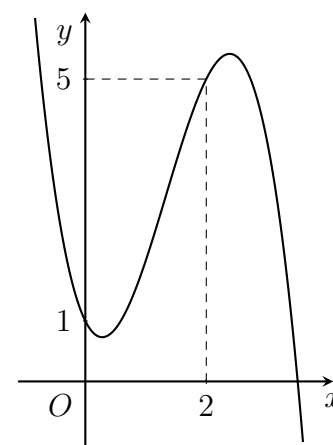
Suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn phương án **(D)**

### Câu 19.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

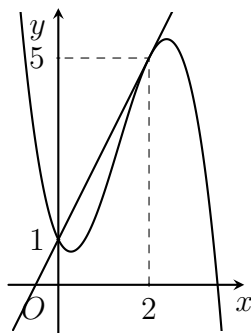
- (A)** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .  
**(B)** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .  
**(C)** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x$  không đạt cực trị tại  $x = 0$ .  
**(D)** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x$  không có cực trị.



### Lời giải.

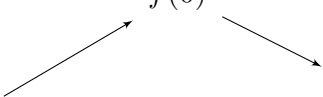
Ta có:  $y' = f'(x) - (2x + 1)$ .

Suy ra  $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ .



Từ đồ thị ta thấy  $x = 0$  là nghiệm đơn của phương trình  $y = 0$ .

Ta có bảng biến thiên trên  $(-\infty; 2)$  là

|      |                                                                                              |   |   |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$  | $-\infty$                                                                                    | 0 | 2 |
| $y'$ | +                                                                                            | 0 | - |
| $y$  | $f(0)$<br> |   |   |

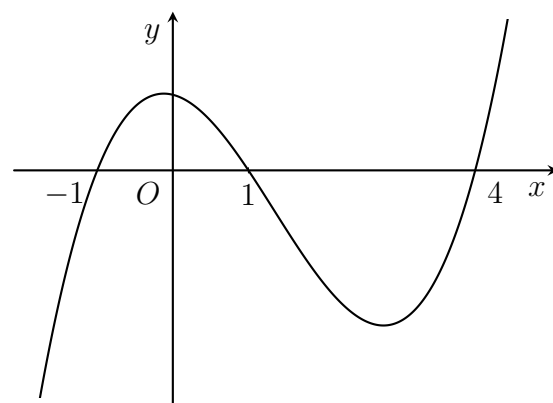
Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .

Chọn phương án **A**

### Câu 20.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- ☐ A 3.     
 ☐ B 2.     
 ☐ C 1.     
 ☐ D 4.



**Lời giải.**

$$y' = [f(x^2)]' = 2xf'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên là

|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |      |      |     |     |     |           |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                         | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$                                                                                                                                                                                                                                               | $0$  | $+$  | $0$ | $+$ | $-$ | $+$       |
| $y$  | <div><div></div><div><div><div></div><div><math>f(-2)</math></div><div></div></div><div><div><math>f(-1)</math></div><div><math>f(0)</math></div><div><math>f(1)</math></div><div><math>f(2)</math></div></div><div></div></div><div></div></div> |      |      |     |     |     |           |

Hàm số có ba điểm cực tiểu.

Chọn phương án A

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. D  | 3. A  | 4. D  | 5. B  | 6. B  | 7. B  | 8. B  | 9. C  | 10. B |
| 11. B | 12. D | 13. B | 14. D | 15. A | 16. D | 17. A | 18. D | 19. A | 20. A |

DẠNG 9.

KHẢO SÁT HÀM SỐ - NHẬN DẠNG HÀM SỐ, ĐỒ THỊ

1

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ).

|                                                                             | $a > 0$ | $a < 0$ |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------|---------|
| Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (Hàm số có 3 cực trị $ab < 0$ ) |         |         |
| Phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm (Hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$ )         |         |         |

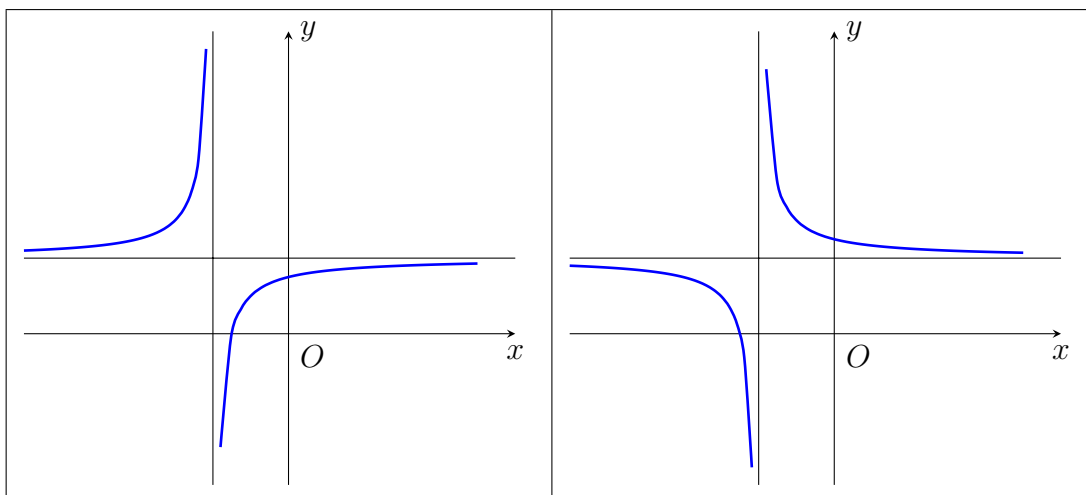
HÀM SỐ BẬC BA  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ).

|  | $a > 0$ | $a < 0$ |
|--|---------|---------|
|--|---------|---------|

|                                              |  |  |
|----------------------------------------------|--|--|
| Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. |  |  |
| Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép.         |  |  |
| Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.             |  |  |

**HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ**  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c \neq 0$ ;  $ad - bc \neq 0$ ).

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $D = ad - bc > 0$ | $D = ad - bc < 0$ |
|-------------------|-------------------|



## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.**

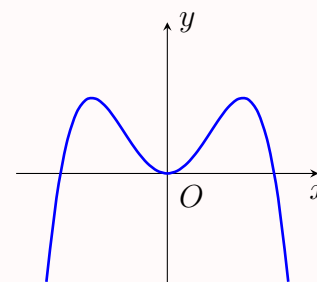
(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

(A)  $y = -x^4 + 2x^2$ .

(B)  $y = x^4 - 2x^2$ .

(C)  $y = x^3 - 3x^2$ .

(D)  $y = -x^3 + 3x^2$ .



**Lời giải.**

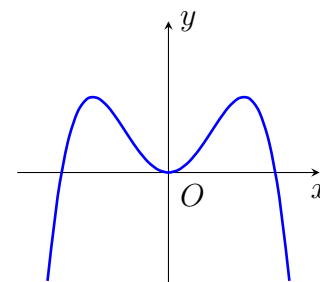
### Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán nhận dạng đồ thị hàm số cơ bản.

**2. HƯỚNG GIẢI:** Dựa vào những kiến thức đã học về đồ thị hàm số, đặc biệt là đồ thị hàm số hàm trùng phương ta thấy được đáp án.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Dễ thấy đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số trùng phương với hệ số  $a < 0$ .  
Suy ra hàm số cần tìm là  $y = -x^4 + 2x^2$ .



Chọn phương án (A)



**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN****Câu 1.**

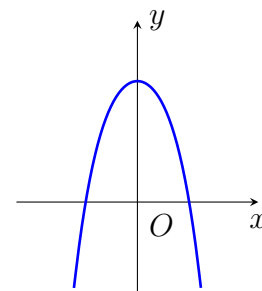
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

☐ (A)  $y = x^4 - x^2 + 2.$

☐ (B)  $y = -x^4 - x^2 + 2.$

☐ (C)  $y = -x^2 + 2.$

☐ (D)  $y = x^2 + 2.$

**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số trên là đồ thị của hàm số trùng phương có hệ số  $a < 0$  vì phần đỉnh của đồ thị hàm số có độ tròn (tham khảo kiến thức cần nhớ).

Đối với đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2$  thì phần đỉnh của đồ thị sẽ có độ nhọn hơn.

Suy ra hàm số cần tìm là  $y = -x^4 - x^2 + 2.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.**

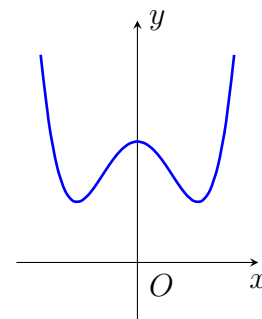
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

☐ (A)  $y = x^3 - x^2 + 2.$

☐ (B)  $y = -x^4 + x^2 + 2.$

☐ (C)  $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

☐ (D)  $y = x^2 - x + 2.$

**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số trùng phương có hệ số  $a > 0$  nên hàm số cần tìm là  $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 3.**

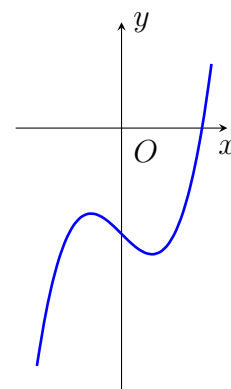
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

☐ (A)  $y = -x^3 + 3x - 1.$

☐ (B)  $y = x^4 - 2x^2 - 2.$

☐ (C)  $y = x^3 - x + 2.$

☐ (D)  $y = x^3 - x - 2.$

**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a > 0$ .

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên  $d < 0$ .

Suy ra hàm số cần tìm là  $y = x^3 - x - 2$ .

Chọn phương án **D**

#### Câu 4.

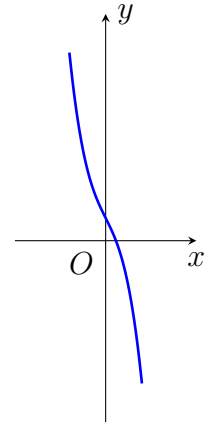
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

**(A)**  $y = -x^3 - 2x + 1$ .

**(B)**  $y = -x^3 - 2x - 1$ .

**(C)**  $y = -x^3 + 1$ .

**(D)**  $y = x^3 + 1$ .



#### Lời giải.

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a < 0$  (loại D).

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên  $d > 0$  (loại B).

Mặt khác đồ thị hàm số không có điểm cực trị nên hàm số  $y = -x^3 + 1$  không thể thỏa mãn.

Suy ra hàm số cần tìm là  $y = -x^3 - 2x + 1$ .

Chọn phương án **A**

#### Câu 5.

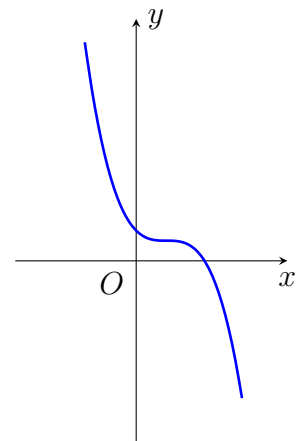
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

**(A)**  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ .

**(B)**  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ .

**(C)**  $y = -x^2 - x + 1$ .

**(D)**  $y = -x^4 + x^2 + 1$ .



#### Lời giải.

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a < 0$  (loại C, D).

Đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm uốn cùng phương với trục hoành nên phương trình  $y = 0$  có nghiệm kép.

Xét đáp án B có  $y = -x^3 + 2x - 2 = 0$  vô nghiệm (loại B).

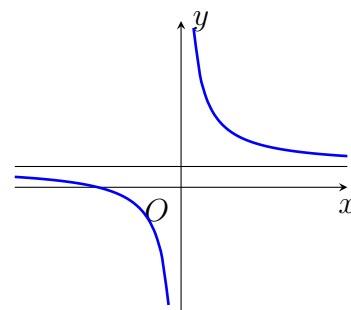
Suy ra hàm số cần tìm là  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ .

Chọn phương án **A**

#### Câu 6.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

Ⓐ  $y = \frac{x+1}{2x+2}$ . Ⓑ  $y = x^2 + 2x$ . Ⓒ  $y = \frac{x-2}{2x}$ . Ⓓ  $y = \frac{x+2}{2x}$ .



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ nên loại B.

Đồ thị hàm số nhận trục tung là trục đối xứng nên loại A.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên loại đáp án C.

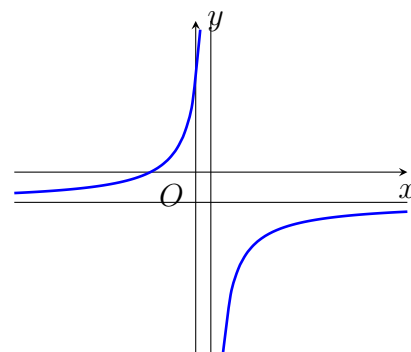
Suy ra hàm số cần tìm là  $y = \frac{x+2}{2x}$ .

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 7.**

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

Ⓐ  $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ . Ⓑ  $y = \frac{2x-3}{1-2x}$ . Ⓒ  $y = \frac{2x+3}{1-2x}$ . Ⓓ  $y = \frac{2x+3}{x-1}$ .



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ dạng:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0$ ,  $ad-bc \neq 0$ ).

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang nằm phía dưới trục hoành nên  $\frac{a}{c} < 0$  (loại A, D).

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên loại đáp án B.

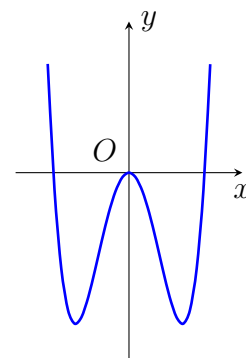
Suy ra hàm số cần tìm là  $y = \frac{2x+3}{1-2x}$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 8.**

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

Ⓐ  $y = x^3 - 3x^2$ . Ⓑ  $y = -x^4 + 4$ .  
Ⓒ  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ . Ⓓ  $y = x^4 - 4x^2$ .



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số  $a > 0$ .

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ  $O$  hàm số cần tìm là  $y = x^4 - 4x^2$ .

Chọn phương án **(D)**

### Câu 9.

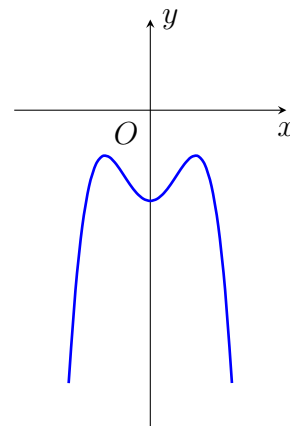
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

**(A)**  $y = x^3 - 3x^2$ .

**(B)**  $y = -x^4 + 2x^2 - 2$ .

**(C)**  $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ .

**(D)**  $y = -x^4 - 2$ .



### Lời giải.

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương có hệ số  $a < 0$  (loại A).

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên  $d < 0$  (loại C).

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên  $ab < 0$ .

Suy ra hàm số cần tìm là  $y = -x^4 + 2x^2 - 2$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |     |      |     |      |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$  |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |     | $3$  |     | $-1$ |     | $+\infty$ |

**(A)**  $y = x^3 - 3x + 1$ .

**(B)**  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

**(C)**  $y = -x^3 + 3x - 1$ .

**(D)**  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ .

### Lời giải.

Dễ thấy đây là bảng biến thiên của hàm số bậc ba có  $a > 0$  nên hàm số cần tìm là  $y = x^3 - 3x + 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |     |      |     |      |     |      |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $0$  |     | $1$  |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$  | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |     | $-4$ |     | $-3$ |     | $-4$ |     | $+\infty$ |

Ⓐ  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ .    Ⓑ  $y = -x^4 + 2x^2 - 3$ .    Ⓒ  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ .    Ⓓ  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ .

**Lời giải.**

Dễ thấy bảng biến thiên trên là bảng biến thiên của hàm số trùng phương có  $a > 0$ .

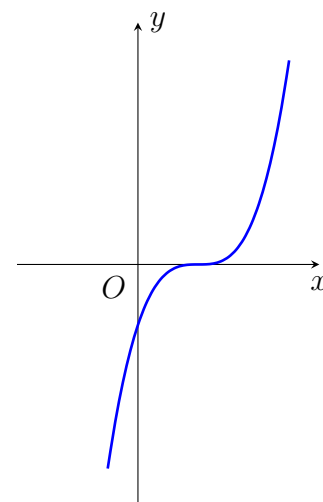
Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm  $(0; -3)$  nên hàm số cần tìm là  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 12.**

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

Ⓐ  $y = (x - 1)^3$ .    Ⓑ  $y = -x^3 + 1$ .    Ⓒ  $y = x^3 - 1$ .    Ⓓ  $y = (x + 1)^3$ .



**Lời giải.**

Nhận thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a > 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên  $d < 0$ .

Hoành độ điểm uốn của hàm số dương.

Vậy hàm số cần tìm là  $y = (x - 1)^3$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 13.** Hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           | +         |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |

Ⓐ  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ .    Ⓑ  $y = \frac{2x + 4}{x + 1}$ .    Ⓒ  $y = \frac{-x - 1}{x - 2}$ .    Ⓓ  $y = \frac{x + 1}{x - 2}$ .

**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x = -1$  và tiệm cận ngang là  $y = 2$ .

Mặt khác hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

Xét hàm số  $y = \frac{2x + 4}{x + 1}$  có  $y' = \frac{-2}{(x + 1)^2} < 0$ .

Vậy hàm số cần tìm là  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 14.**

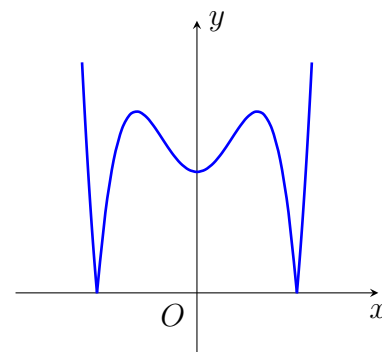
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

(A)  $y = |x^3 - 2x - 2|$ .

(B)  $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ .

(C)  $y = |x^4 - 2x^2 + 2|$ .

(D)  $y = |x^3 - 2x + 2|$ .

**Lời giải.**

Dễ thấy đây là đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  với  $f(x)$  là hàm số trùng phương có hệ số  $a > 0$ .

Mặt khác, đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$  có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là  $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ . Phương trình này vô nghiệm nên hàm số cần tìm là  $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 15.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ bên.

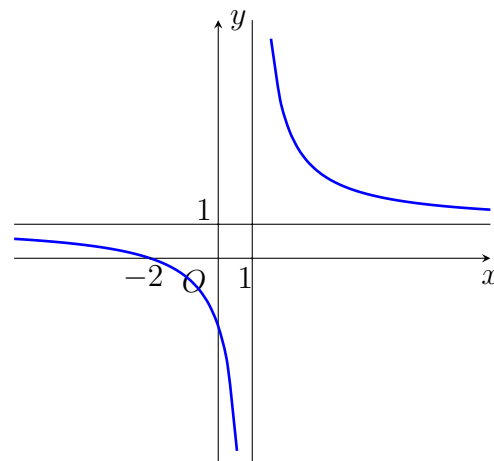
Tính  $S = a + 2b + 3c$ .

(A) -6.

(B) 2.

(C) 8.

(D) 0.

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đường tiệm cận đứng  $x = 1$  nên  $c = -1$ .

Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đường tiệm cận ngang  $y = 1$  nên  $a = 1$ .

Suy ra hàm số có dạng  $y = \frac{x+b}{x-1}$ .

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm  $(-2; 0)$  nên  $\frac{-2+b}{-2-1} = 0 \Leftrightarrow b = 2$ .

Khi đó  $S = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 16.**

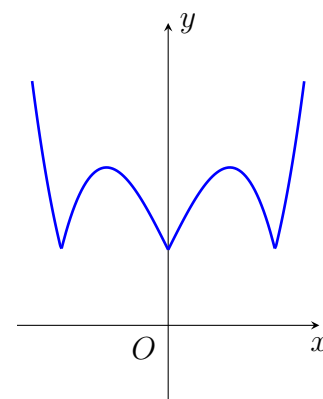
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?

☐ (A)  $y = |x^3 - 3x - 1|$ .

☐ (B)  $y = |x^3 - 3x| + 1$ .

☐ (C)  $y = |x^4 - 2x^2 + 2|$ .

☐ (D)  $y = |x^4 + 2x^2 + 2|$ .



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số dạng  $y = |f(x)| + C$  với  $y = f(x)$  trên là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a > 0$  (loại C, D).

Xét hàm số  $y = x^3 - 3x - 1$ :

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành:  $x^3 - 3x - 1 = 0$ .

Phương trình này có 3 nghiệm nên  $y = |x^3 - 3x - 1|$  sẽ cắt trục hoành (loại A).

Vậy hàm số đã cho là  $y = |x^3 - 3x| + 1$ .

Chọn phương án ☒ (B)

**Câu 17.**

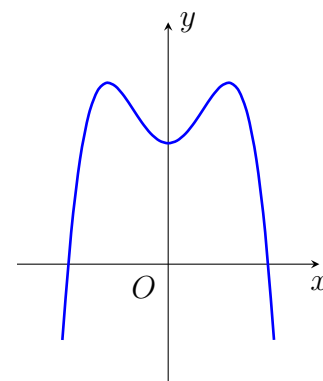
Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A)  $a < 0, b > 0, c > 0$ .

☐ (B)  $a > 0, b < 0, c > 0$ .

☐ (C)  $a < 0, b > 0, c < 0$ .

☐ (D)  $a < 0, b < 0, c > 0$ .



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số trên có hệ số  $a < 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên  $c > 0$ .

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên  $ab < 0$  mà  $a < 0$  nên  $b > 0$ .

Suy ra  $a < 0, b > 0, c > 0$ .

Chọn phương án ☒ (A)

**Câu 18.**

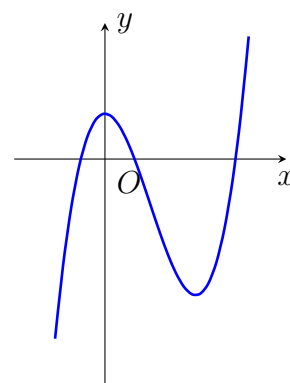
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A)  $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .

☐ (B)  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .

☐ (C)  $a > 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .

☐ (D)  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .



**Lời giải.**

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba có  $a > 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên  $d > 0$ .

Có  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ;

Hàm số có 2 điểm cực trị trong đó có 1 cực trị  $x_1 = 0$  và 1 cực trị  $x_2 = k$  với  $k > 0$ .

Khi đó phương trình  $f'(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm  $x_1 = 0$  và 1 nghiệm  $x_2 = k$  với  $k > 0$ .

Suy ra  $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$ .

Áp dụng định lý Vi-ét:  $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ .

Có  $x_1 + x_2 = k > 0$  nên  $-\frac{2b}{3a} > 0$  mà  $a > 0$  nên  $b < 0$ .

Chọn phương án ☒ (C)

**Câu 19.**

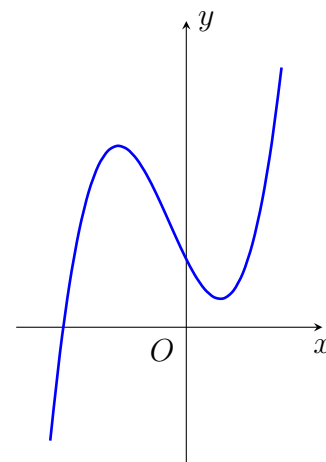
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Trong bốn số  $a, b, c, d$  có bao nhiêu số âm?

☐ (A) 3.

☐ (B) 1.

☐ (C) 2.

☐ (D) 4.



**Lời giải.**

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a > 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tung độ dương nên  $d > 0$ .

Có  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ;

Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$ . Khi đó  $x_1 + x_2 > 0$  và  $x_1 \cdot x_2 < 0$ .

Áp dụng định lý Vi-ét: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$



Suy ra  $\begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases}$  mà  $a > 0$  nên  $b > 0$  và  $c < 0$ .

Vậy  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $d > 0$ ,  $c < 0$ .

Chọn phương án **(A)**

### Câu 20.

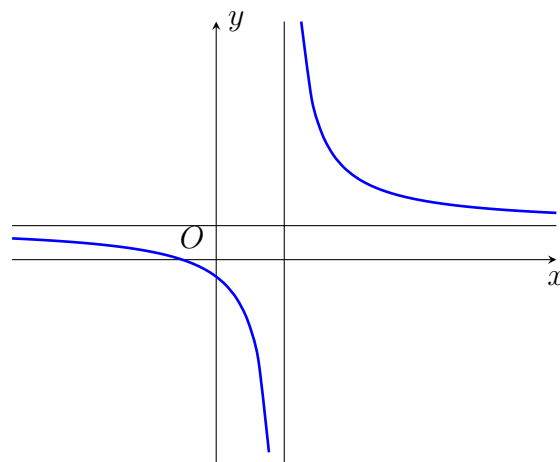
Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)**  $ac > 0$ ,  $bd > 0$ .

**(B)**  $ab < 0$ ,  $cd < 0$ .

**(C)**  $bc > 0$ ,  $ad < 0$ .

**(D)**  $bc < 0$ ,  $ad > 0$ .



### Lời giải.

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ .

Do đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là  $x = -\frac{d}{c}$  nằm bên phải trục tung nên  $-\frac{d}{c} > 0 \Leftrightarrow cd < 0$  (1)

Do đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = \frac{a}{c}$  nằm phía trên trục hoành nên  $\frac{a}{c} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$  (2)

Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đạo hàm  $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ .

Từ đồ thị, hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định suy ra  $ad-bc < 0$  hay  $ad < bc$ . (loại đáp án D).

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm  $\left( -\frac{b}{a}; 0 \right)$ , điểm này nằm phía bên trái trục tung nên  $-\frac{b}{a} < 0 \Leftrightarrow ab > 0$  (3) (loại đáp án B).

Từ (1), (2), (3) ta có  $\begin{cases} cd < 0 \\ ac > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$ , suy ra  $a, b, c$  cùng dấu và  $d$  trái dấu với  $a, b, c$ .

Khi đó  $bd < 0$  (loại đáp án A).

Kết luận: Chọn đáp án C:  $bc > 0$ ,  $ad < 0$ .

Chọn phương án **(C)**

** BẢNG ĐÁP ÁN **

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. D  | 4. A  | 5. A  | 6. D  | 7. C  | 8. D  | 9. B  | 10. A |
| 11. A | 12. A | 13. A | 14. B | 15. B | 16. B | 17. A | 18. C | 19. A | 20. C |

## DẠNG 10.

## SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LOGARIT

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tính chất của logarit.

• **Công thức 1:**  $\log_a a^x = x$  với  $\forall x \in \mathbb{R}; 1 \neq a > 0$ .

• **Công thức 2:**  $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$  với  $x, y, a > 0$  và  $a \neq 1$ .

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$  với  $x, y, a > 0$  và  $a \neq 1$ .

*Chú ý:* Với  $x; y < 0$  và  $0 < a \neq 1$  ta có:  $\log_a(xy) = \log_a(-x) + \log_a(-y)$ .

• **Công thức 3:**  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$  và  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$  ( $a, b > 0; a \neq 1$ ).

Như vậy:  $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$ .

• **Công thức 4:** (đổi cơ số)  $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ .

Cách viết khác của công thức đổi cơ số:  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$  với  $a; b; c > 0$  và  $a; b \neq 1$ .

*Hệ quả:* Khi cho  $a = c$  ta có:  $\log_c b \cdot \log_b c = \log_c c = 1 \Leftrightarrow \log_c b = \frac{1}{\log_b c}$  (gọi là nghịch đảo).

**Tổng quát với nhiều số:**  $\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdots \log_{x_{n-1}} x_n = \log_{x_1} x_n$  (với  $1 \neq x_1; \dots; x_n > 0$ ).

• **Công thức 5:**  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$  với  $a; b; c > 0; b \neq 1$ .

\* **Logarit thập phân, logarit tự nhiên.**

• **Logarit thập phân:** Logarit cơ số  $a = 10$  gọi là logarit thập phân ký hiệu:  $\log x$  ( $x > 0$ ) ( $\log x$  được hiểu là  $\log_{10} x$ ). Đọc là lôc x.

• **Logarit tự nhiên:** Logarit cơ số  $a = e \approx 2,712818$  gọi là logarit tự nhiên ký hiệu:  $\ln x$  ( $x > 0$ ). Đọc là len x hoặc lôc nepe của x ( $\ln x$  được hiểu là  $\ln_e x$ ).

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_2(a^2)$  bằng

(A)  $2 + \log_2 a$ .

(B)  $\frac{1}{2} + \log_2 a$ .

(C)  $2 \log_2 a$ .

(D)  $\frac{1}{2} \log_2 a$ .

Lời giải.

## Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán sử dụng tính chất logarit.

**2. HƯỚNG GIẢI:**

**B1:** Dựa trên giả thiết với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_2(a^2)$  bằng.

**B2:** Áp dụng công thức  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ .

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Với  $a > 0$  thì:  $\log_2(a^2) = \log_2 a^2 = 2 \log_2 a$ .

Chọn phương án (C)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Với  $a$  là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $\log(3a) = 3 \log a$ . (B)  $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$ . (C)  $\log a^3 = 3 \log a$ . (D)  $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$ .

**Lời giải.**

Vì với  $a > 0$  thì  $\log a^3 = 3 \log a$ .

**Câu 2.** Với  $a, b$  là các số thực dương bất kỳ  $a \neq 1$ . Mệnh đề nào đúng?

- (A)  $\log_{\sqrt{a}} b = -2 \log_a b$ . (B)  $\log_{\sqrt{a}} b = -\frac{1}{2} \log_a b$ . (C)  $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{2} \log_a b$ . (D)  $\log_{\sqrt{a}} b = 2 \log_a b$ .

**Lời giải.**

Vì với  $a, b > 0$  và  $a \neq 1$  thì  $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_a b = 2 \log_a b$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 3.** Với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ , cho  $\log_a x = -1$  và  $\log_a y = 4$ . Tính  $P = \log_a (x^2 y^3)$

- (A)  $P = 3$ . (B)  $P = 10$ . (C)  $P = -14$ . (D)  $P = 65$ .

**Lời giải.**

Vì với  $a > 0$  và  $a \neq 1$  thì

$$P = \log_a (x^2 y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2 \log_a x + 3 \log_a y = 10.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 4.** Cho các số dương  $a, b, c$ , và  $a \neq 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$ . (B)  $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$ .  
(C)  $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ . (D)  $\log_a b + \log_a c = \log_a (b - c)$ .

**Lời giải.**

Theo tính chất logarit ta có:  $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 5.** Với  $a$  và  $b$  là các số thực dương. Biểu thức  $\log_a (a^2 b)$  bằng

- (A)  $2 - \log_a b$ . (B)  $2 + \log_a b$ . (C)  $1 + 2 \log_a b$ . (D)  $2 \log_a b$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\log_a (a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \log_a b$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 6.** Cho  $a, b, c$  với  $a, b$  là các số thực dương khác 1,  $c > 0$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A)  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ . (B)  $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ .  
(C)  $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ . (D)  $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$ .

**Lời giải.**

Biểu thức ở đáp án C chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện  $c \neq 1$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 7.** Cho  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 7 = b$ . Biểu diễn  $\log_2 2016$  theo  $a$  và  $b$ .

(A)  $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$ .

(B)  $\log_2 2016 = 5 + 3a + 2b$ .

(C)  $\log_2 2016 = 2 + 2a + 3b$ .

(D)  $\log_2 2016 = 2 + 3a + 2b$ .

**Lời giải.**

Vì:  $\log_2 2016 = \log_2 (2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = \log_2 2^5 + \log_2 3^2 + \log_2 7 = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$ .

Do đó  $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 8.** Cho  $\log_2 x = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(B)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(C)  $\sqrt{2}$ .

(D)  $-\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Vì  $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x = 2\log_2 x - \frac{3}{2}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \log_2 x = \sqrt{2}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 9.** Giá trị của biểu thức  $M = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$  khi được rút gọn là

(A) 2.

(B)  $2 + 2\ln^2 a$ .

(C)  $2\ln^2 a - 2$ .

(D)  $\ln^2 a$ .

**Lời giải.**

$M = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e = \ln^2 a + 2\ln a \cdot \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e = 2\ln^2 a + 2$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 10.** Cho số thực  $a$  thỏa mãn  $0 < a \neq 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = \log_a \left( \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$

(A)  $T = 3$ .

(B)  $T = \frac{12}{5}$ .

(C)  $T = \frac{9}{5}$ .

(D)  $T = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $T = \log_a \left( \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right) = \log_a \frac{a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 11.** Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a, b \neq 1$ . Tính  $A = \log_a(b^2) \cdot \log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c)$

(A)  $\log_a c$ .

(B) 1.

(C)  $\log_a b$ .

(D)  $\log_a bc$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \log_a(b^2) \cdot \log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c) \\ &= 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b(bc) - \log_a(c) \\ &= 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}(\log_b b + \log_b c) - \log_a(c) \\ &= \log_a b \cdot (1 + \log_b c) - \log_a c \\ &= \log_a b + \log_a b \cdot \log_b c - \log_a c \\ &= \log_a b + \log_a c - \log_a c = \log_a b. \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho  $\log_{12} 18 = a + \frac{b}{c + \log_2 3}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính tổng  $T = a + b + c$ ?

**(A)**  $T = 1$ .

**(B)**  $T = 0$ .

**(C)**  $T = 2$ .

**(D)**  $T = 7$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2 \cdot \log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{2 \cdot (2 + \log_2 3)}{2 + \log_2 3} + \frac{-3}{2 + \log_2 3} = 2 + \frac{-3}{2 + \log_2 3}.$$

Vậy  $a = 2$ ;  $b = -3$ ;  $c = 2$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 13.** Cho  $a > 0$ ,  $b > 0$  thỏa mãn  $a^2 + 4b^2 = 5ab$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $\log \frac{a+2b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}$ .

**(B)**  $5 \log(a+2b) = \log a - \log b$ .

**(C)**  $2 \log(a+2b) = 5 (\log a + \log b)$ .

**(D)**  $\log(a+1) + \log b = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + 4b^2 &= 5ab \\ \Leftrightarrow (a+2b)^2 &= 9ab \\ \Leftrightarrow \log [(a+2b)^2] &= \log(9ab) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \log(a+2b) &= 2 \cdot \log 3 + \log a + \log b \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \log \frac{a+2b}{3} &= \log a + \log b \\ \Leftrightarrow \log \frac{a+2b}{3} &= \frac{\log a + \log b}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **A**

**Câu 14.** Cho  $a > 0$ ,  $b > 0$  thỏa mãn  $a^2 + 9b^2 = 10ab$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $\log(a+1) + \log b = 1$ .

**(B)**  $\log \frac{a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$ .

**(C)**  $3 \log(a+3b) = \log a - \log b$ .

**(D)**  $2 \log(a+3b) = 2 \log a + \log b$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + 9b^2 &= 10ab \\ \Leftrightarrow \frac{(a+3b)^2}{16} &= ab \\ \Leftrightarrow \log \frac{(a+3b)^2}{16} &= \log ab \quad (\text{do } a > 0, b > 0) \\ \Leftrightarrow 2 \log \frac{a+3b}{4} &= \log a + \log b \\ \Leftrightarrow \log \frac{a+3b}{4} &= \frac{\log a + \log b}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **B**

**Câu 15.** Với mọi số thực dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 = 8ab$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A)  $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ .

(B)  $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$ .

(C)  $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$ .

(D)  $\frac{1}{2} + \log a + \log b$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 8ab \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab &= 10ab \\ \Leftrightarrow \log(a^2 + b^2 + 2ab) &= \log(10ab) \\ \Leftrightarrow \log(a+b)^2 &= 1 + \log a + \log b \\ \Leftrightarrow \log(a+b) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \log a + \log b). \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Cho  $\log_{27} 5 = a$ ,  $\log_3 7 = b$ ,  $\log_2 3 = c$ . Tính  $\log_6 35$  theo  $a$ ,  $b$  và  $c$ .

(A)  $\frac{(3a+b)c}{1+c}$ .

(B)  $\frac{(3a+b)c}{1+b}$ .

(C)  $\frac{(3a+b)c}{1+a}$ .

(D)  $\frac{(3b+a)c}{1+c}$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết, ta có  $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$ .

Ta có  $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac$  và  $\log_2 7 = \log_2 3 \cdot \log_3 7 = bc$ .

$$\text{Vậy } \log_6 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{3ac + bc}{1+c} = \frac{(3a+b)c}{1+c}.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 17.** Cho  $t = a^{\frac{1}{1-\log_a u}}$ ,  $v = a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$  với  $a > 0$ ;  $a \neq 1$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A)  $u = a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$ .

(B)  $u = a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$ .

(C)  $u = a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$ .

(D)  $u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$ .

**Lời giải.**

$$v = a^{\frac{1}{1-\log_a t}} \Leftrightarrow \log_a v = \frac{1}{1-\log_a t} \Rightarrow \log_a t = 1 - \frac{1}{\log_a v} = \frac{\log_a v - 1}{\log_a v} \quad (1).$$

$$t = a^{\frac{1}{1-\log_a u}} \Leftrightarrow \log_a t = \frac{1}{1-\log_a u} \Rightarrow \log_a u = 1 - \frac{1}{\log_a t} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \log_a u = 1 - \frac{1}{\frac{\log_a v - 1}{\log_a v}} = 1 - \frac{\log_a v}{\log_a v - 1} = \frac{\log_a v - 1 + \log_a v}{\log_a v - 1} = -\frac{1}{\log_a v - 1} = \frac{1}{1 - \log_a v}.$$

$$\text{Vậy } u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 18.** Cho  $\log_3 (\sqrt{a^2+9} + a) = 2$ . Giá trị của biểu thức  $\log_3 (2a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2+9})$  bằng

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 0.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 \log_3 (2a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9}) &= \log_3 (a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9} + a^2) \\
 &= \log_3 \left[ (\sqrt{a^2 + 9} - a)^2 \right] \\
 &= 2 \log_3 (\sqrt{a^2 + 9} - a) \\
 &= 2 \log_3 \frac{(\sqrt{a^2 + 9} - a)(\sqrt{a^2 + 9} + a)}{\sqrt{a^2 + 9} + a} \\
 &= 2 \log_3 \frac{9}{\sqrt{a^2 + 9} + a} \\
 &= 2 \log_3 9 - 2 \log_3 (\sqrt{a^2 + 9} + a) = 4 - 2 \cdot 2 = 0.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.** Cho  $f(1) = 1$ ,  $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$  với mọi  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log \left[ \frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right].$$

**(A)** 9.

**(B)** 3.

**(C)** 10.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Chọn  $n = 1$  ta có

$$f(m+1) = f(m) + f(1) + m = f(m) + m + 1 \Rightarrow f(m+1) - f(m) = m + 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 f(96) - f(69) &= (f(96) - f(95)) + (f(95) - f(94)) + (f(94) - f(93)) + \dots + (f(70) - f(69)) \\
 &= 96 + 95 + 94 + \dots + 70 = \frac{27(70+96)}{2} = 2241.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = \log \left[ \frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right] = \log \left[ \frac{2241 - 241}{2} \right] = \log(1000) = 3.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 20.** Cho  $a, b$  là các số dương thỏa mãn  $b > 1$  và  $\sqrt{a} \leq b < a$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \log_a a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left( \frac{a}{b} \right)$ .

**(A)** 6.

**(B)** 7.

**(C)** 5.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4 \cdot (\log_b a - 1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_b a}} + 4 \cdot (\log_b a - 1).$$

Đặt  $t = \log_b a$ .

$$\text{Vì } \sqrt{a} \leq b < a \Rightarrow \log_b(\sqrt{a}) \leq 1 \leq \log_b a \Leftrightarrow \frac{t}{2} < 1 < t \Leftrightarrow 1 < t < 2.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{1}{1 - \frac{1}{t}} + 4(t - 1) = \frac{t}{t - 1} + 4(t - 1) \text{ với } t \in (1; 2).$$



Xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{t-1} + 4(t-1)$  với  $t \in (1; 2)$ .

$$f'(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + 4, f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \text{ (TM)} \\ t = \frac{1}{2} \text{ (L)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |               |   |               |   |           |
|---------|-----------|---------------|---|---------------|---|-----------|
| $t$     | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |           |               |   | -             | 0 | +         |
| $f(t)$  |           |               |   | $+\infty$     | 6 |           |

Từ bảng biến thiên suy ra  $\min_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  bằng 5.

Chọn phương án **C**

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. D  | 3. B  | 4. C  | 5. B  | 6. C  | 7. A  | 8. C  | 9. B  | 10. A |
| 11. C | 12. A | 13. A | 14. B | 15. B | 16. D | 17. D | 18. D | 19. B | 20. C |

# DẠNG 11. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa nguyên hàm.

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{I}$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{I}$  nếu  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{I}$ .

### 2. Tính chất của nguyên hàm.

$$\square \int f(x) dx = f(x) + C.$$

$$\square \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \neq 0.$$

$$\square \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

### 3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

| Nguyên hàm cơ bản                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Nguyên hàm mở rộng                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int 0 dx = C.</math></li> <li><math>\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).</math></li> <li><math>\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C.</math></li> <li><math>\int e^x dx = e^x + C.</math></li> <li><math>\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 &lt; a \neq 1).</math></li> <li><math>\int \cos x dx = \sin x + C.</math></li> <li><math>\int \sin x dx = -\cos x + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int 1 \cdot dx = x + C.</math></li> <li><math>\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.</math></li> <li><math>\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, (a \neq 0).</math></li> <li><math>\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C (a \neq 0).</math></li> <li><math>\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.</math></li> <li><math>\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.</math></li> </ul> |

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x + 6x$  là

- (A)  $\sin x + 3x^2 + C$ . (B)  $-\sin x + 3x^2 + C$ . (C)  $\sin x + 6x^2 + C$ . (D)  $-\sin x + C$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán sử dụng tính chất để tính nguyên hàm của hàm số.

**2. HƯỚNG GIẢI:**

**B1:** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x + 6x$  là  $\int (\cos x + 6x) dx$ .

**B2:** Tính:  $\int (\cos x + 6x) dx$ .

Ta có:  $\int (\cos x + 6x) dx = \int \cos x dx + \int 6x dx = \int \cos x dx + 6 \int x dx = \sin x + 3x^2 + C$ .

Chọn phương án (A)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin x - 2x + 1$  là

- (A)  $-\cos x - x^2 + x$ . (B)  $-\cos x - x^2 + x + C$ .  
(C)  $\cos x - x^2 + x + C$ . (D)  $-\cos x - \frac{x^2}{2} + x + C$ .

Lời giải.

Ta có  $\int (\sin x - 2x + 1) dx = \int \sin x dx - \int 2x dx + \int dx = \int \sin x dx - 2 \int x dx + \int dx = -\cos x - x^2 + x + C$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + 1$  là

- (A)  $e^x + C$ . (B)  $e^x + x$ . (C)  $e^x + x + C$ . (D)  $-e^x + x + C$ .

Lời giải.

Ta có  $\int (e^x + 1) dx = \int e^x dx + \int dx = e^x + x + C$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 3.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{x}$  là

- (A)  $x^3 - x^2 + 5 \ln x + C$ . (B)  $x^3 - x^2 + 5 \ln x + C$ .  
(C)  $x^3 - x^2 + 5 \ln |x|$ . (D)  $x^3 - x^2 + 5 \ln |x| + C$ .

Lời giải.

Ta có  $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{x} dx = \int \left( 3x^2 - 2x + \frac{5}{x} \right) dx = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int \frac{1}{x} dx = x^3 - x^2 + 5 \ln |x| + C$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2^x$  là

- (A)  $\ln x^2 + 2^x \cdot \ln 2 + C$ . (B)  $\ln x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$ . (C)  $-\frac{1}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$ . (D)  $\frac{1}{x} + 2^x \cdot \ln 2 + C$ .

Lời giải.

$$\int \left( \frac{1}{x^2} + 2^x \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 5.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x - \sin 6x$ .

- (A)  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 6x}{6} + C$ . (B)  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C$ .  
(C)  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$ . (D)  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 6x}{6} + C$ .

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int (x - \sin 6x) dx = \int x dx - \frac{1}{6} \int \sin 6x dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$ .

- (A)  $\int f(x) dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C$ . (B)  $\int f(x) dx = \tan \frac{x}{2} + C$ .  
(C)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$ . (D)  $\int f(x) dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C$ .

Lời giải.

$$f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \text{ nên } \int f(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Tính  $\int (3 \cos x - 3^x) dx$ .

- (A)  $-3 \sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ . (B)  $-3 \sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ . (C)  $3 \sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ . (D)  $3 \sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \int (3 \cos x - 3^x) dx = \int 3 \cos x dx - \int 3^x dx = 3 \sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Nếu  $\int f(x) dx = e^x + \sin 2x + C$  thì  $f(x)$  bằng

☐ A  $e^x + \cos 2x$ .

☐ B  $e^x - \cos 2x$ .

☐ C  $e^x + 2 \cos 2x$ .

☐ D  $e^x + \frac{1}{2} \cos 2x$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \left[ \int f(x) dx \right] = (e^x + \sin 2x + C) = e^x + 2 \cos 2x$ .

Chọn phương án ☒ C

**Câu 9.** Tìm nguyên hàm  $F(x) = \int (x + \sin x) dx$  biết  $F(0) = 19$ .

☐ A  $F(x) = x^2 + \cos x + 20$ .

☐ B  $F(x) = x^2 - \cos x + 20$ .

☐ C  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + 20$ .

☐ D  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + 20$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $F(x) = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$ .

Mà  $F(0) = 19 \Leftrightarrow -1 + C = 19 \Leftrightarrow C = 20 \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 20$ .

Chọn phương án ☒ C

**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) = 3 - 5 \cos x$  và  $f(0) = 5$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ A  $f(x) = 3x + 5 \sin x + 2$ .

☐ B  $f(x) = 3x - 5 \sin x - 5$ .

☐ C  $f(x) = 3x - 5 \sin x + 5$ .

☐ D  $f(x) = 3x + 5 \sin x + 5$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f(x) dx = \int (3 - 5 \cos x) dx = 3x - 5 \sin x + C$ .

Lại có:  $f(0) = 5 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 5 \sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$ . Vậy  $f(x) = 3x - 5 \sin x + 5$ .

Chọn phương án ☒ C

**Câu 11.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin 3x \cos x$ , biết  $F(0) = \frac{5}{8}$ .

☐ A  $F(x) = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + 1$ .

☐ B  $F(x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}$ .

☐ C  $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{13}{8}$ .

☐ D  $F(x) = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + 1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin 4x d4x + \frac{1}{4} \int \sin 2x d2x \\ &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$F(0) = \frac{5}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + C = \frac{5}{8} \Rightarrow C = 1 \Leftrightarrow C = 1$ .

Vậy  $F(x) = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + 1$ .

Chọn phương án ☒ D

**Câu 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x} (1 - 3e^{-5x})$ .

☐ A  $\int e^{3x} (1 - 3e^{-5x}) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + C$ .

☐ B  $\int e^{3x} (1 - 3e^{-5x}) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3}{2}e^{-2x} + C$ .

$$\textcircled{C} \int e^{3x} (1 - 3e^{-5x}) dx = e^{3x} - 3e^{-2x} + C.$$

$$\textcircled{D} \int e^{3x} (1 - 3e^{-5x}) dx = 3e^{3x} + 6e^{-2x} + C.$$

**Lời giải.**

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int e^{3x} (1 - 3e^{-5x}) dx = \int e^{3x} dx - 3 \int e^{-2x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{-2x} + C.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 13.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**A** 1.

**B** 2.

**C** 3.

**D** 0.

**Lời giải.**

Ta có:  $F(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$ .

$$\text{Vậy: } F(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} (x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Ta thấy phương trình  $F(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt nên  $F(x)$  đổi dấu qua cả 3 nghiệm đó.

Vậy hàm số  $F(x)$  có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án **C**

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$  xác định trên  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ ;  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$  thỏa mãn  $F(2) = 3$ . Tìm  $F(x)$ ?

**A**  $F(x) = x + 4 \ln(2x - 3) + 1$ .

**B**  $F(x) = x + \ln(2x - 3) + 1$ .

**C**  $F(x) = x + 2 \ln(2x - 3) + 1$ .

**D**  $F(x) = x + 2 \ln(2x - 3) + C$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{2x-3} dx = \int \left(1 + \frac{4}{2x-3}\right) dx = \int dx + 2 \int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = x + 2 \ln |2x-3| + C \\ = x + \ln(2x-3) + C.$$

Vì  $F(2) = 3 \Rightarrow C = 1$ .

Vậy  $F(x) = x + 2 \ln(2x - 3) + 1$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  và  $f(0) = 2019$ ;  $f(2) = 2020$ .

Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

**A**  $2 \ln 2 + 4039$ .

**B** 4039.

**C** -1.

**D** 1.

**Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1, x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2, x < 1. \end{cases}$$

$$f(0) = 2019 \Rightarrow C_2 = 2019.$$

$$f(2) = 2020 \Rightarrow C_1 = 2020.$$

$$\text{Khi đó: } S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + C_1 - \ln 2 - C_2 = C_1 - C_2 = 2019 - 2020 = -1.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 16.** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx$ .

**(A)**  $I = x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C$ .

**(B)**  $I = x^2 + x + 2 \ln|x-3| + C$ .

**(C)**  $I = x^2 - x + 2 \ln|x-3|$ .

**(D)**  $I = x^2 - x + 2 \ln(x-3) + C$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx = \int \left( 2x - 1 + \frac{2}{x-3} \right) dx = 2 \int x dx - \int dx + 2 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 17.** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$ .

**(A)**  $\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$ .

**(B)**  $\ln|x-1| + \ln|x-2|$ .

**(C)**  $\ln(x-1) + \ln(x-2) + C$ .

**(D)**  $\ln|x-1| - \ln|x-2| + C$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$I = \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x-1| + \ln|x-2| + C.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 18.** Cho biết  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$ .

Tính  $I = \int \sin^2 ax dx$ ?

**(A)**  $I = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

**(B)**  $I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

**(C)**  $I = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

**(D)**  $I = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+a)^2}{x^2} dx &= \int \frac{x^4 + 2ax^2 + a^2}{x^2} dx = \int \left( x^2 + \frac{a^2}{x^2} + 2a \right) dx = \int x^2 dx + a^2 \int x^{-2} dx + 2a \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - a^2 \frac{1}{x} + 2ax + C. \end{aligned}$$

Do  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$  nên  $a = 1$ .

Chú ý: Với bài này ta có thể làm theo cách khác sau đây:

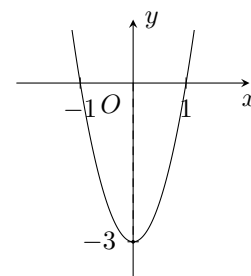


Do  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$  nên  $F(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}\right) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow a = 1$ .

Khi đó:  $\int \sin^2 ax \, dx = \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) có đồ thị  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  tại điểm có hoành độ âm, đồ thị hàm số  $f(x)$  cho bởi hình vẽ bên.



Tính  $I = \int x f(x) \, dx$

**(A)**  $I = \frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 + C$ .

**(B)**  $I = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + C$ .

**(C)**  $I = \frac{x^5}{5} - x^3 + x^2$ .

**(D)**  $I = \frac{x^5}{5} - 3x^3 + x^2 + C$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ .

Từ đồ thị hàm số  $f(x)$  ta thấy  $f(x)$  đi qua các điểm  $A(-1; 0), B(1; 0), C(0; -3)$  nên:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ c_1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f(x) \, dx = \int (3x^2 - 3) \, dx = x^3 - 3x + C.$$

Giả sử  $(C)$  tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  tại điểm có hoành độ  $x_0$  âm nên  $x_0$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} f(x) = 4 \\ f(x) = (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$ .

Phương trình  $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Do  $x_0$  âm nên  $x_0 = -1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$ .

$$\text{Vậy: } I = \int x f(x) \, dx = \int x (x^3 - 3x + 2) \, dx = \int (x^4 - 3x^2 + 2x) \, dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 + C.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$  biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ ?

**(A)**  $f^2(2) = \frac{315}{15}$ .

**(B)**  $f^2(2) = \frac{332}{15}$ .

**(C)**  $f^2(2) = \frac{324}{15}$ .

**(D)**  $f^2(2) = \frac{323}{15}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int (f(x) \cdot f(x)) \, dx &= \int (x^4 + x^2) \, dx \\ \Leftrightarrow \int f(x) \, d(f(x)) &= \int x^4 \, dx + \int x^2 \, dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f^2(2) = 2 \left( \frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) = 2x[f(x)]^2$  biết  $f(2) = -\frac{2}{9}$ ,  $f(x) \neq 0$ .

Tính  $f(1)$ ?

**(A)**  $f(1) = -\frac{3}{2}$ .

**(B)**  $f(1) = \frac{-2}{3}$ .

**(C)**  $f(1) = \frac{2}{3}$ .

**(D)**  $f(1) = \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f(x)}{f^2(x)} = 2x.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{f^2(x)} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \int f^{-2}(x) d(f(x)) = 2 \int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + C(*).$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } -\frac{1}{f(2)} = 4 + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{-2}{2x^2 + 1} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Chọn phương án **(B)**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. D  | 4. C  | 5. C  | 6. A  | 7. D  | 8. C  | 9. C  | 10. C |
| 11. D | 12. A | 13. C | 14. C | 15. C | 16. A | 17. A | 18. A | 19. A | 20. B |
| 21. B |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

## DẠNG 12. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tính chất của số phức (phần này là kiến thức của cả BÀI TẬP MẪU và BÀI TẬP PHÁT TRIỂN).

#### 1. Các kiến thức cơ bản về số phức

- Tập hợp số phức:  $\mathbb{C}$ .
- Số phức (*dạng đại số*):  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $a$  là phần thực,  $b$  là phần ảo,  $i$  là đơn vị ảo,  $i^2 = -1$ ).
- $z$  là số thực  $\Rightarrow$  phần ảo của  $z$  bằng 0 ( $b = 0$ ).
- $z$  là thuần ảo  $\Rightarrow$  phần thực của  $z$  bằng 0 ( $a = 0$ ).
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

#### • Hai số phức bằng nhau:

Cho số phức  $z_1 = a + b \cdot i$  và  $z_2 = c + d \cdot i$ .

Khi đó  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$  (phần thực bằng nhau, phần ảo bằng nhau).

#### 2. Các phép toán về số phức: Cho số phức $z_1 = a + b \cdot i$ và $z_2 = c + d \cdot i$ . Khi đó

##### ■ Phép cộng hai số phức

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

##### ■ Phép trừ hai số phức

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

##### ■ Phép nhân hai số phức

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

$$k \cdot z = k \cdot (a + bi) = ka + kbi$$

##### ■ Phép chia hai số phức.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

■ Mô-đun của số phức  $z$  là

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $|z \cdot z'| = |z||z'|$
- $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|\frac{z'}{z}| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

■ Số phức liên hợp: Số phức liên hợp của  $z = a + bi$  là  $\bar{z} = a - bi$ .

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\bar{z} \cdot \bar{z'} = \overline{z \cdot z'}$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

### 3. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

Cho cấp số nhân có công bội  $q$ , số hạng đầu  $u_1$ .

Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Mô-đun của số phức  $1 + 2i$  bằng

- (A) 5.                      (B)  $\sqrt{3}$ .                      (C)  $\sqrt{5}$ .                      (D) 3.

**Lời giải.**

Sử dụng công thức tính mô-đun của số phức để làm.

Ta có  $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ .

Chọn phương án (C)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho số phức  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A)  $z \cdot \bar{z} = -|z|$ .                      (B)  $\bar{z} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .                      (C)  $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .                      (D)  $|z| = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\bar{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  suy ra “ $\bar{z} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ” sai.

$z\bar{z} = 1$  suy ra “ $z \cdot \bar{z} = -|z|$ ” sai.

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ; suy ra “ $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ” sai, “ $|z| = 1$ ” đúng.

Chọn phương án (D)

**Câu 2.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(1-i)z + 4\bar{z} = 7 - 7i$ . Khi đó, mô-đun của  $z$  bằng bao nhiêu?

(A)  $|z| = \sqrt{3}$ .

(B)  $|z| = \sqrt{5}$ .

(C)  $|z| = 3$ .

(D)  $|z| = 5$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ .

$$(1-i)z + 4\bar{z} = 7 - 7i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi) + 4(a-bi) = 7 - 7i$$

$$\Leftrightarrow a + bi - ai + b + 4a - 4bi = 7 - 7i$$

$$\Leftrightarrow (5a + b) - (a + 3b)i = 7 - 7i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 7 \\ -a - 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 2i$$

Vậy  $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Cho hai số phức  $z$  và  $z'$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A)  $\bar{z} + \bar{z}' = \overline{z + z'}$ .

(B)  $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ .

(C)  $\bar{z} \cdot \bar{z}' = \overline{z \cdot z'}$ .

(D)  $|z + z'| = |z| + |z'|$ .

**Lời giải.**

- Với hai số phức  $z$  và  $z'$ , ta có:  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  nên phương án D **sai**.

Chọn phương án (D)

**Câu 4.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = -5 + 2i$ . Tính mô-đun của số phức  $z_1 + z_2$ .

(A) 5.

(B) -5.

(C)  $\sqrt{7}$ .

(D)  $-\sqrt{7}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$z_1 + z_2 = (1 + i) + (-5 + 2i) = -4 + 3i \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Chọn phương án (A)

**Câu 5.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$ . Giá trị của  $|z|$  là

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(B)  $\sqrt{2}$ .

(C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(D)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$  ta có:

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i \Leftrightarrow [(2a - 1) + 2bi](1 + i) + [(a + 1) - bi](1 - i) = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow (2a - 2b - 1) + (2a + 2b - 1)i = (a - b + 1) - (a + b + 1)i = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow (3a - 3b) + (a + b - 2) = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy  $|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 6.** Cho số phức  $z = (3 - 2i)(1 + i)^2$ . Môđun của  $w = iz + \bar{z}$  là

- (A)** 2. **(B)**  $2\sqrt{2}$ . **(C)** 1. **(D)**  $\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$z = (3 - 2i)(1 + i)^2 = (3 - 2i)2i = 4 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} iz = i(4 + 6i) = -6 + 4i \\ \bar{z} = 4 - 6i. \end{cases}$$

$$\text{Mà } w = iz + \bar{z} = -6 + 4i + 4 - 6i = -2 - 2i \Rightarrow |w| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Cho số phức  $z$  thỏa  $\bar{z} = \frac{(\sqrt{3} + i)^3}{i - 1}$ . Môđun của số phức  $\bar{z} + iz$  là

- (A)**  $2\sqrt{2}$ . **(B)**  $4\sqrt{2}$ . **(C)** 0. **(D)** 16.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \bar{z} = \frac{(\sqrt{3} + i)^3}{i - 1} = 4 - 4i \Rightarrow z = 4 + 4i.$$

$$\text{Suy ra } \bar{z} + iz = 4 - 4i + i(4 + 4i) = 0 \Rightarrow |\bar{z} + iz| = 0.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 8.** Cho  $z = 1 - 2i$  và  $w = 2 + i$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- (A)**  $\frac{w}{z} = 1$ . **(B)**  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5$ .  
**(C)**  $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = 1$ . **(D)**  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} = 4 + 3i$ .

**Lời giải.**

$$\bullet \frac{w}{z} = \frac{2 + i}{1 - 2i} = i.$$

$$\bullet \begin{cases} |z \cdot w| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \\ |z| \cdot |w| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5.$$

$$\bullet \begin{cases} \left| \frac{z}{w} \right| = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \\ \frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = 1.$$

$$\bullet \begin{cases} \overline{z \cdot w} = \overline{4 - 3i} = 4 + 3i \\ \bar{z} \cdot \bar{w} = (1 + 2i)(2 - i) = 4 + 3i \end{cases} \Rightarrow \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} = 4 + 3i.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 9.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{2}$  và  $z^2$  là số thuần ảo?

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 1.

**Lời giải.**

Gọi  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  và  $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ .

Yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn phương án **C**

**Câu 10.** Tìm số phức  $z$  thỏa mãn hệ thức  $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$  và  $z \cdot \bar{z} = 25$ .

**(A)**  $z = 3 + 4i; z = 5$ . **(B)**  $z = 3 + 4i; z = -5$ . **(C)**  $z = -3 + 4i; z = 5$ . **(D)**  $z = 3 - 4i; z = -5$ .

**Lời giải.**

Gọi  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ .

$$\begin{aligned} |z - (2 + i)| = \sqrt{10} &\Leftrightarrow |a - 2 + (b - 1)i| = \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 10(*) \end{aligned}$$

Ta có  $z \cdot \bar{z} = 25 \Leftrightarrow (a + bi)(a - bi) = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25(**)$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 10 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy  $z = 3 + 4i; z = 5$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 11.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $7a + 4 + 2bi = -10 + (6 - 5a)i$ . Tính  $P = (a + b)|z|$

**(A)**  $P = \frac{-4\sqrt{29}}{7}$ . **(B)**  $P = 24\sqrt{17}$ . **(C)**  $P = 12\sqrt{17}$ . **(D)**  $P = \frac{72\sqrt{2}}{49}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$(7a + 4) + 2bi = -10 + (6 - 5a)i \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 4 = -10 \\ 2b = 6 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8. \end{cases}$$

Suy ra  $P = (a + b)|z| = (a + b)\sqrt{a^2 + b^2} = (-2 + 8)\sqrt{(-2)^2 + 8^2} = 12\sqrt{17}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho số phức  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 2 + i$ . Mô-đun của số phức  $w = z_1 - 2z_2 + 3$  là

**(A)**  $|w| = \sqrt{5}$ . **(B)**  $|w| = 5$ . **(C)**  $|w| = 4$ . **(D)**  $|w| = \sqrt{13}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} w = z_1 - 2z_2 + 3 &\Leftrightarrow w = 1 - 2i - 2(2 + i) + 3 = -4i \\ &\Leftrightarrow |w| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**



**Câu 13.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$ . Mô-đun của số phức  $w = 1+2z+z^2$  có giá trị là

(A) 10.

(B) -10.

(C) 100.

(D) -100.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} &= 5-i \Leftrightarrow (2+i)z + \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = 5-i \\ &\Leftrightarrow (2+i)z + \frac{-2i}{2} = 5-i \\ &\Leftrightarrow (2+i)z = 5 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5}{2+i} = 2-i\end{aligned}$$

Suy ra  $\Rightarrow w = 1 + 2z + z^2 = (1+z)^2 = (3-i)^2 = 8-6i \Leftrightarrow |w| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 14.** Cho số phức  $z$  thỏa  $z = 2i - 2$ . Mô-đun của số phức  $z^{2020}$  là

(A)  $2^{4040}$ .

(B)  $2^{2020}$ .

(C)  $2^{6060}$ .

(D)  $2^{3030}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$z^{2020} = 2^{2020}(i-1)^{2020} = 2^{2020}(-2i)^{1010} = 2^{3030}i \Rightarrow |z^{2020}| = 2^{3030}$$

Chọn phương án (D)

**Câu 15.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z|^2 + |\bar{z}|^2 = 50$  và  $z + \bar{z} = 8$

(A) 3.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 1.

**Lời giải.**

Đặt  $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ , ta có  $\bar{z} = x - yi, |z|^2 = |\bar{z}|^2 = x^2 + y^2$ .

Ta có:

$$\begin{cases} |z|^2 + |\bar{z}|^2 = 50 \\ z + \bar{z} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

. Vậy có 2 số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

(A)  $(1+i)^{2020} = 2^{1010}$ .

(B)  $\left| \frac{(1+i)^{2020}}{2^{1009}} - i \right| = \sqrt{5}$ .

(C)  $|(1+i)^{2020} - 2^{1010}i| = 2^{1010}$ .

(D)  $(1+i)^{2020} = (1-i)^{2020}$ .

**Lời giải.**

$(1+i)^{2020} = (2i)^{1010} = 2^{1010}$ . Suy ra A đúng.

Do đó  $|(1+i)^{2020} - 2^{1010}i| = |2^{1010} - 2^{1010}i| = 2^{1010}\sqrt{2}$ . Suy ra C sai.

Chọn phương án (C)

**Câu 17.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa  $\left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1$  và  $\left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1$

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1| = |i-z| \\ |z-i| = |2+z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 18.** Cho số phức  $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)}, m \in \mathbb{R}$ . Tìm  $|z|_{\max}$

(A)  $\frac{1}{2}$ .

(B) 0.

(C) 1.

(D) 2.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{m^2+1}} \leq 1 \Rightarrow |z|_{\max} = 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Cho số phức  $z = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2020}, n \in \mathbb{N}$ . Mô-đun của  $z$  bằng

(A) 2.

(B) 2020.

(C) 1010.

(D) 1.

**Lời giải.**

Ta có  $i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2020}$  là tổng của cấp số nhân có công sai  $q = i^2$ , gồm 1010 số hạng.

$$z = 1 + i^2 \frac{1 - (i^2)^{1010}}{1 - i^2} = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 20.** Cho số phức  $z$  có phần thực và phần ảo là các số dương thỏa mãn  $z + (1-i)^5 \cdot \bar{z} - \frac{(2-i)^3}{i^6} = 3 + 20i$ . Khi đó mô-đun của số phức  $w = 1 + z + z^2 + z^3$  có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 25.

(B) 5.

(C)  $\sqrt{5}$ .

(D) 1.

**Lời giải.**

Ta có

- $(\overline{2-i})^3 = (2+i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 2 + 11i$
- $(1-i)^5 = (1-i) \cdot [(1-i)^2]^2 = (1-i) \cdot (-2i)^2 = -4 + 4i$

Gọi  $z = x + yi$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} z + (1-i)^5 \cdot \bar{z} - \frac{(2-i)^3}{i^6} &= 3 + 20i \Leftrightarrow x + yi + (-4 + 4i) \cdot (x - yi) = 1 + 9i \\ &\Leftrightarrow (x - 4x + 4y) + (4x + 5y)i = 1 + 9i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4x + 4y = 1 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + i \end{aligned}$$

Suy ra  $w = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 = 5i \Rightarrow |w| = 5$ .

Chọn phương án **B**

**📖 BẢNG ĐÁP ÁN 📖**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. B  | 3. D  | 4. A  | 5. D  | 6. B  | 7. C  | 8. A  | 9. C  | 10. A |
| 11. C | 12. C | 13. A | 14. D | 15. B | 16. C | 17. A | 18. C | 19. D | 20. B |

## DẠNG 13. BÀI TOÁN TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Cho điểm  $M(x; y; z)$ :
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $Ox$  là  $M_1(x; 0; 0)$ .
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $Oy$  là  $M_2(0; y; 0)$ .
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $Oz$  là  $M_3(0; 0; z)$ .
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $(Oxy)$  là  $M_4(x; y; 0)$ .
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $(Oyz)$  là  $M_5(0; y; z)$ .
  - Hình chiếu của điểm  $M$  trên  $(Oxz)$  là  $M_6(x; 0; z)$ .
- Tìm hình chiếu của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$ .
  - Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và vuông góc với  $(\alpha)$ .
  - Hình chiếu  $H$  của điểm  $A$  lên mặt phẳng  $\alpha$  là giao điểm của đường thẳng  $d$  và  $(\alpha)$ .
- Tìm hình chiếu  $d'$  của đường thẳng  $d$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$ .

#### Cách 1.

- Nếu đường thẳng  $d$  song song với  $(\alpha)$  thì  $d' \parallel d$ .
  - \* Lấy điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  và tìm hình chiếu  $M'$  của điểm  $M$  trên  $(\alpha)$ .
  - \* Đường thẳng  $d'$  đi qua  $M'$  và song song với đường thẳng  $d$ .
- Nếu đường thẳng  $d$  cắt  $(\alpha)$  tại  $M$ 
  - \* Lấy điểm  $N$  thuộc đường thẳng  $d$  và tìm hình chiếu  $N'$  của  $N$  trên  $(\alpha)$ .
  - \* Đường thẳng  $d'$  đi qua hai điểm là  $M$  và  $N$ .

#### Cách 2.

- Viết phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với  $(\alpha)$ .
- Khi đó đường thẳng  $d'$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

- Tìm hình chiếu  $A'$  của  $A$  trên đường thẳng  $d$ .

#### Cách 1.

- Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A$  và vuông góc với  $d$ .
- Hình chiếu  $A'$  là giao điểm của  $d$  và  $(P)$ .

#### Cách 2.

- Tìm tọa độ điểm  $A'$  theo tham số  $t$  ( $A \in d$ ).

- Lập phương trình  $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0$ . Giải phương trình tìm  $t$  suy ra tọa độ điểm  $A'$ .
- Tìm điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $(P)$ :
  - Tìm hình chiếu  $H$  của  $M$  trên  $(P)$  (khi đó  $H$  là trung điểm  $MM'$ ).
  - Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm suy ra tọa độ điểm  $M'$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BGD 2019-2020) Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- (A)  $(2; 0; 1)$ .      (B)  $(2; -2; 0)$ .      (C)  $(0; -2; 1)$ .      (D)  $(0; 0; 1)$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

**1. Dạng toán:** Đây là dạng toán xác định hình chiếu của điểm trong không gian trên mặt phẳng tọa độ.

**2. Hướng dẫn giải:**

**Bước 1.** Xác định các tọa độ của điểm  $M$ .

**Bước 2.** Viết kết luận.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là  $(2; -2; 0)$ .

Chọn phương án (B)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(2; 3; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

- (A)  $M(2; 0; 0)$ .      (B)  $N(0; -3; 1)$ .      (C)  $P(0; 3; -1)$ .      (D)  $Q(-2; 3; -1)$ .

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(2; 3; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm  $P(0; 3; -1)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 1; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm

- (A)  $A'(3; 0; -1)$ .      (B)  $A'(0; 1; 0)$ .      (C)  $A'(-3; 1; 1)$ .      (D)  $A'(0; 1; -1)$ .

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 1; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm  $A(3; 0; -1)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 3.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(5; -4; 3)$  trên trục  $Ox$  là điểm

- (A)  $A'(-5; 4; 0)$ .      (B)  $A'(5; 0; 0)$ .      (C)  $A'(5; 4; -3)$ .      (D)  $A'(-5; 4; -3)$ .

### Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(5; -4; 3)$  trên trục  $Ox$  là điểm  $A'(5; 0; 0)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 5; 8)$  trên trục  $Oy$  là điểm

- (A)**  $A'(3; 0; 8)$ . **(B)**  $A'(-3; 5; -8)$ . **(C)**  $A'(0; 5; 8)$ . **(D)**  $A'(0; 5; 0)$ .

### Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 5; 8)$  trên trục  $Oy$  là điểm  $A'(0; 5; 0)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 5.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(-3; \sqrt{5}; 7)$  trên trục  $Oz$  là điểm

- (A)**  $A(-3; \sqrt{5}; 0)$ . **(B)**  $A(-5; \sqrt{5}; -7)$ . **(C)**  $A(0; 0; 7)$ . **(D)**  $A(0; 0; -7)$ .

### Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(-3; \sqrt{5}; 7)$  trên trục  $Oz$  là điểm  $A'(0; 0; 7)$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Hình chiếu của điểm  $M(1; 2; 4)$  trên mặt phẳng  $(\alpha) : 3x + 2y - z + 11 = 0$  có hoành độ bằng

- (A)** 2. **(B)** 4. **(C)** -2. **(D)** -1.

### Lời giải.

Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(\alpha) : 3x + 2y - z + 11 = 0$ .

Vì  $d \perp (\alpha)$  nên  $\vec{u}_d = \vec{n}_{(\alpha)} = (3; 2; -1)$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $d$  là 
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - t. \end{cases}$$

Gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$  khi đó  $M' = d \cap (\alpha) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $M'$  thỏa mãn

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - t \\ 3x + 2y - z + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 - t \\ 3(1 + 3t) + 2(2 + 2t) - (4 - t) + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$M'(-2; 0; 5)$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 7.** Tìm hình chiếu của điểm  $M(2; 0; 1)$  trên mặt phẳng  $(\alpha) : x + y + z = 0$ .

- (A)**  $M(1; -1; 0)$ . **(B)**  $M(3; 1; 2)$ . **(C)**  $M(2; 0; 1)$ . **(D)**  $M(4; 2; 3)$ .

### Lời giải.

Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(\alpha) : x + y + z = 0$ .

Vì  $d \perp (\alpha)$  nên  $\vec{u}_d = \vec{n}_{(\alpha)} = (1; 1; 1)$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $d$  là 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$  khi đó  $M' = d \cap (\alpha) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $M'$  thỏa mãn

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ 2 + t + t + 1 + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(1; -1; 0).$$

Chọn phương án **A**

**Câu 8.** Hình chiếu  $d'$  của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có phương trình

là

$$\textcircled{\text{A}} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{\text{B}} \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{\text{C}} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{\text{D}} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

**Lời giải.**

Phương trình đường thẳng  $d'$  là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 \end{cases}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 9.** Tìm phương trình hình chiếu  $d'$  của đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$ .

$$\textcircled{\text{A}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \textcircled{\text{B}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{\text{C}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad \textcircled{\text{D}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

**Lời giải.**

Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

$\Rightarrow$  Phương trình đường thẳng  $d'$  là  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 10.** Hình chiếu  $d'$  của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2t \end{cases}$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là



**(A)**  $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 0 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

**(B)**  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

**(C)**  $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

**(D)**  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 0 \\ z = 4 - 2t \end{cases}$

**Lời giải.**

Phương trình đường thẳng  $d'$  là  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 2t. \end{cases}$

Chọn  $t = 2 \Rightarrow A(4; 0; 4) \in d'$  do đó phương trình đường thẳng  $d'$  còn có dạng:  $\begin{cases} x = 4 + t \\ t = 0 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): x - z - 4 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  lên mặt phẳng  $(P)$ .

**(A)**  $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

**(B)**  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

**(C)**  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$

**(D)**  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

**Lời giải.**

**Cách 1:** Ta có phương trình tham số của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$  đi qua điểm  $M(3; 1; -1)$

và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_d = (3; 1; -1)$ .

Vì điểm  $M(3; 1; -1) \in (P)$  nên  $M = d \cap (P)$ .

Gọi điểm  $O = (0; 0; 0) \in d$  và  $K$  là hình chiếu của  $O$  trên  $(P)$ .

Gọi đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  suy ra đường thẳng  $\Delta$  nhận véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  làm véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = (1; 0; -1)$ .

Phương trình đường thẳng  $\Delta$  là  $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t. \end{cases}$

Khi đó  $K = \Delta \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \\ x - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow K(2; 0; -2).$

Hình chiếu của đường thẳng  $d$  lên mặt phẳng  $(P)$  là đường thẳng  $MK$ .

Véc-tơ chỉ phương  $\overrightarrow{MK} = (-1; -1; -1) = -1(1; 1; 1)$ .

Phương trình đường thẳng  $MK$  là 
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

**Cách 2:** Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với  $(P)$ .

$$\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (Q) \supset d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{u}_d \end{cases} \text{ nên } (Q) \text{ có một véc-tơ pháp tuyến là } \vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (-1; 2; -1).$$

Lấy điểm  $O(0; 0; 0) \in d \Rightarrow O \in (Q)$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  đi qua điểm  $O$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-1; 2; -1)$  có phương trình là

$$-x + 2y - z = 0.$$

Gọi  $d'$  là hình chiếu của  $d$  trên  $(P) \Rightarrow d' = (P) \cap (Q)$  nên  $d'$  có một véc-tơ chỉ phương là

$$\vec{u}'_d = \frac{1}{2} [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (1; 1; 1)$$

. Gọi  $M$  là một điểm thuộc đường thẳng  $d' \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - z_M - 4 = 0 \\ -x_M + 2y_M - z_M = 0. \end{cases}$

Chọn  $x_M = 3$  ta được  $\begin{cases} -z_M - 1 = 0 \\ 2y_M - z_M = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 1 \\ z_M = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1; -1).$

Đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M(3; 1; -1)$  và có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 1; 1)$  có phương

trình là 
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ , và mặt thẳng  $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ . Gọi  $d'$  là hình chiếu của  $d$  lên  $(P)$ . Phương trình tham số của  $d'$  là

**(A)**  $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$  . **(B)**  $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases}$  . **(C)**  $\begin{cases} x = -62t \\ y = 25t \\ z = 2 - 61t \end{cases}$  . **(D)**  $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases}$  .

**Lời giải.**

**Cách 1:** Gọi  $A = d \cap (P)$ .

$$A \in d \Rightarrow A(12 + 4a; 9 + 3a; 1 + a)$$

$$A \in (P) \Rightarrow a = -3 \Rightarrow A(0; 0; -2).$$

$d$  đi qua điểm  $B(12; 9; 1)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  lên  $(P)$ .

$(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_{(P)} = (3; 5; -1)$ .

$BH$  đi qua  $B(12; 9; 1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a}_{BH} = \vec{n}_{(P)} = (3; 5; -1)$ .

$$BH: \begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = 9 + 5t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$H \in BH \Rightarrow H(12 + 3t; 9 + 5t; 1 - t)$$

$$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{78}{35} \Rightarrow H\left(\frac{186}{35}; -\frac{15}{7}; \frac{113}{35}\right)$$

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{186}{35}; -\frac{15}{7}; \frac{183}{35}\right) = \frac{3}{35} \cdot (62; -25; 61).$$

$d'$  đi qua  $A(0; 0; -2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a}_{d'} = (62; -25; 61)$ .

$$\text{Vậy phương trình tham số của } d' \text{ là } \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$$

**Cách 2:** Gọi  $(Q)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(P)$ .

$d$  đi qua điểm  $B(12; 9; 1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a}_d = (4; 3; 1)$ .

$(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_{(P)} = (3; 5; -1)$ .

$(Q)$  qua  $B(12; 9; 1)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{a}_d, \vec{n}_{(P)}] = (-8; 7; 11)$ .

$$(Q): 8x - 7y - 11z - 22 = 0.$$

$d'$  là giao tuyến của  $(Q)$  và  $(P)$ .

Tìm một điểm thuộc  $d'$ , bằng cách cho  $y = 0$ .

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 3x - z = 2 \\ 8x - 11z = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(0; 0; -2) \in d'.$$

$d'$  đi qua điểm  $M(0; 0; -2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (62; -25; 61)$ .

$$\text{Vậy phương trình tham số của } d' \text{ là } \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 13.** Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(P): x - y + z - 1 = 0$ . Đường thẳng  $d$

là hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $(P)$  có phương trình

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

**Lời giải.**

Véc-tơ chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u}_d = (-1; 2; -1)$  và véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$  là  $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$ .

Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với  $(P)$ . Khi đó  $(Q)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (1; 0; -1)$ .

Lấy  $A(1; 2; -1) \in d \Rightarrow A \in (Q)$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  đi qua  $A(1; 2; -1)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 0; -1)$  nên có phương trình là  $x - z - 2 = 0$ .

Đường thẳng  $d'$  là hình chiếu của  $d$  trên  $(P)$  nên  $d'$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  nên có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}'_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (1; 2; 1)$ .

$$\text{Lấy } M \in d' \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - y_M + z_M - 1 = 0 \\ x_M - z_M - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Chọn } x = 0 \text{ ta có } \begin{cases} -y_M + z_M - 1 = 0 \\ -z_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -3 \\ z_M = -2 \end{cases} \Rightarrow M(0; -3; -2).$$

Phương trình đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M(0; -3; -2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2; 1)$  là

$$\begin{cases} x = t \\ t = -3 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Chọn phương án **C**

**Câu 14.** Hình chiếu của điểm  $A(2; -1; 8)$  trên đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$  có hoành độ bằng

**(A)** 5.

**(B)** -3.

**(C)** -5.

**(D)** 0.

**Lời giải.**

**Cách 1:** Phương trình tham số của  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $d \Rightarrow$  hình chiếu  $A'$  của  $A$  trên  $d$  là giao của  $d$  và  $(P)$ .

Vì  $d \perp (P)$  nên mặt phẳng  $(P)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = (2; -1; 2) \Rightarrow$  phương trình mặt phẳng  $(P)$  là  $2x - y + 2z - 21 = 0$ .

$$A' = d \cap (P) \Rightarrow \text{tọa độ điểm } A' \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(5; -3; 4).$$

**Cách 2** Phương trình tham số của  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$

Gọi  $A'$  là hình chiếu của  $A$  trên  $d \Rightarrow A' \in d \Rightarrow A'(1 + 2t; -1 - t; 2t)$ .

$$\vec{u}_d = (2; -1; 2), \overrightarrow{AA'} = (2t - 1; -t; 2t - 8).$$

$$AA' \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + t + 2(2t - 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A'(5; -3; 4).$$

Chọn phương án **A**

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ . Gọi  $H(a; b; c)$  là hình chiếu của điểm  $A(2; -3; 1)$  lên đường thẳng  $\Delta$ . Tính  $a + b + c$ .

**(A)** 0.

**(B)** 1.

**(C)** -1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Phương trình tham số của  $\Delta$ : 
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$

$H$  là hình chiếu của điểm  $A$  trên đường thẳng  $\Delta \Rightarrow H \in \Delta \Rightarrow H(-1 + 2t; -2 - t; 2t)$ .

$\vec{u}_\Delta = (2; -1; 2); \overrightarrow{AH} = (2t - 3; 1 - t; 2t - 1)$ .

Vì  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $\Delta$  nên:

$$\begin{aligned} AH \perp \Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 3) - 1(1 - t) + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Rightarrow H(1; -3; 2). \text{ Suy ra } a = 1; b = -3; c = 2 \end{aligned}$$

Vậy  $a + b + c = 0$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y + 1 = 0$ .

Tìm hình chiếu của đường thẳng  $d$  trên  $(P)$ .

**(A)**  $\begin{cases} x = \frac{19}{5} + 2t \\ y = -\frac{2}{5} - t \\ z = t \end{cases}$

**(B)**  $\begin{cases} x = \frac{19}{5} + 2t \\ y = -\frac{12}{5} - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

**(C)**  $\begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = -\frac{4}{5} - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

**(D)**  $\begin{cases} x = \frac{1}{5} + 2t \\ y = -\frac{2}{5} - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; -1; 1)$  và mặt phẳng  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 2; 0)$ .

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow d \parallel (P)$ .

Do đó, nếu  $d'$  là hình chiếu của  $d$  trên  $(P)$  thì  $d' \parallel d$ .

Gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M(1; 0; 2)$  trên  $(P) \Rightarrow M' \in d'$ .

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(P) \Rightarrow M' = \Delta \cap (P)$ .

Vì  $\Delta \perp (P)$  nên  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; 2; 0)$ .

Phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(1; 0; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2; 0)$  là

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2. \end{cases}$$

$M' = \Delta \cap (P) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $M'$  thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 \\ (1 + t) + 2 \cdot 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \\ z = 2 \\ t = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M' \left( \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; 2 \right)$$

. Hình chiếu  $d'$  song song với  $d$  và đi qua  $M' \left( \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; 2 \right)$  có phương trình là  $\begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = -\frac{4}{5} - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y - z - 1 = 0$

0. Tìm hình chiếu của đường thẳng  $d$  trên  $(P)$ .

**(A)**  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} - t \end{cases}$  .      **(B)**  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} + t \end{cases}$  .      **(C)**  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} + t \end{cases}$  .      **(D)**  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = \frac{2}{3} + t \end{cases}$  .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 0; 1)$  và mặt phẳng  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 2; -1)$ .

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow d \parallel (P)$ .

Do đó, nếu  $d'$  là hình chiếu của  $d$  trên  $(P)$  thì  $d' \parallel d$ .

Gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M(1; 2; 0)$  trên  $(P) \Rightarrow M' \in d'$ .

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(P) \Rightarrow M' = \Delta \cap (P)$ .

Vì  $\Delta \perp (P)$  nên  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; 2; -1)$ .

Phương trình đường thẳng đi qua  $M$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2; -1)$  là  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t. \end{cases}$

$M' = \Delta \cap (P) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $M'$  thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \\ 1 + t + 2(2 + 2t) + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow M' \left( \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Hình chiếu  $d'$  song song với  $d$  và đi qua  $M' \left( \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$  có phương trình là  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} + t \end{cases}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$  cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ ,  $D(-2; 1; -1)$ . Gọi  $H(a; b; c)$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $D$  của tứ diện. Tính  $2a + b + c$ .

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 0.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$ :  $x + y + z - 1 = 0$ .

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $D$  và vuông góc với  $(ABC) \Rightarrow \Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = \vec{n}_{(ABC)} = (1; 1; 1)$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $D(-2; 1; -1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 1; 1)$  thì  $\Delta$  có phương trình là

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

$H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $(ABC) \Rightarrow H = \Delta \cap (ABC) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $H$  thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \\ -2 + t + 1 + t - 1 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 2; 0) \Rightarrow a = -1; b = 2; c = 0.$$

Vậy  $2a + b + c = 0$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(2; 3; -1)$ ,  $B(0; -1; 2)$ ,  $C(1; 0; 3)$ . Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Hoành độ điểm  $H$  là

**(A)** -1.

**(B)** 3.

**(C)** 2.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Đường thẳng đi qua  $B; C$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (1; 1; 1)$ .

Đường thẳng  $BC$  đi qua  $B(0; -1; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (1; 1; 1) \Rightarrow$  Phương trình

đường thẳng  $BC$  là 
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC \Rightarrow H$  là hình chiếu của  $A$  trên đường thẳng  $BC \Rightarrow H(t; -1 + t; 2 + t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t - 2; t - 4; t + 3)$ .

Vì  $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 0; 3)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 20.** Gọi  $M'(a; b; c)$  là điểm đối xứng của điểm  $M(2; 1; 3)$  qua mặt phẳng  $(P): x - y + z - 1 = 0$ .

Tính  $a + b + c$ .

**(A)** -4.

**(B)** 3.

**(C)** 4.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $(P) \Rightarrow H$  là trung điểm của  $MM'$ .

Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $(P) \Rightarrow H = d \cap (P)$ .

$$d \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

$H = d \cap (P) \Rightarrow$  tọa độ điểm  $H$  thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \\ 2 + t - (1 - t) + 3 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2; 2).$$

$$\text{Vì } H \text{ là trung điểm } MM' \Rightarrow \begin{cases} 2x_H = x_M + x_{M'} \\ 2y_H = y_M + y_{M'} \\ 2z_H = z_M + z_{M'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 0 \\ y_{M'} = 3 \\ z_{M'} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0; b = 3; c = 1.$$

Vậy  $a + b + c = 4$ .

Chọn phương án **C**



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. A  | 3. B  | 4. D  | 5. C  | 6. C  | 7. A  | 8. C  | 9. D  | 10. C |
| 11. B | 12. A | 13. C | 14. A | 15. A | 16. C | 17. B | 18. C | 19. D | 20. C |

**DẠNG 14.****XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Tính chất của mặt cầu

Phương trình mặt cầu dạng chính tắc:

Cho mặt cầu có tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R$ . Khi đó phương trình chính tắc của mặt cầu là  $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .

Phương trình mặt cầu dạng khai triển là  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ .

Khi đó mặt cầu có tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$  ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ).

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của  $(S)$ .

(A)  $I(-1; 2; 1)$  và  $R = 3$ .

(B)  $I(1; -2; -1)$  và  $R = 3$ .

(C)  $I(-1; 2; 1)$  và  $R = 9$ .

(D)  $I(1; -2; -1)$  và  $R = 9$ .

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Dựa trên phương trình mặt cầu dạng chính tắc tìm tâm và bán kính của mặt cầu.
- Bước 2: Mặt cầu  $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  có tâm  $I(a; b; c)$  và bán kính  $R$ .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Mặt cầu  $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$  có tâm  $I(-1; 2; 1)$  và bán kính  $R = 3$ .

Chọn phương án (A)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu có phương trình  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu đó.

- (A)  $I(-1; 3; 0); R = 3$ . (B)  $I(1; -3; 0); R = 9$ . (C)  $I(1; -3; 0); R = 3$ . (D)  $I(-1; 3; 0); R = 9$ .

**Lời giải.**

Mặt cầu đã cho có tâm  $I(1; -3; 0)$  và bán kính  $R = 3$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$ .

- (A)  $I(3; -2; 4), R = 25$ . (B)  $I(-3; 2; -4), R = 5$ .  
(C)  $I(3; -2; 4), R = 5$ . (D)  $I(-3; 2; -4), R = 25$ .

**Lời giải.**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm là  $I(3; -2; 4)$ .

Bán kính của mặt cầu  $(S)$  là  $R = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (4)^2 - 4} = 5$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , diện tích của mặt cầu  $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y + 18z - 3 = 0$  bằng

- (A)  $20\pi$ . (B)  $40\pi$ . (C)  $60\pi$ . (D)  $100\pi$ .

**Lời giải.**

Ta có  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y + 18z - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 1 = 0$ .

Mặt cầu  $(S)$  có tâm là  $I(-1; -2; 3)$ .

Bán kính của mặt cầu  $(S)$  là  $R = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (3)^2 + 1} = \sqrt{15}$ .

Diện tích mặt cầu  $V = 4\pi R^2 = 60\pi$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ . Tính diện tích mặt cầu  $(S)$ .

- (A)  $42\pi$ . (B)  $36\pi$ . (C)  $9\pi$ . (D)  $12\pi$ .

**Lời giải.**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 2; 3)$  và bán kính  $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 - 5} = 3$ .

Diện tích mặt cầu  $(S)$  là  $S = 4\pi R^2 = 4\pi 3^2 = 36\pi$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ . Mặt cầu  $(S)$  có thể tích bằng

- (A)  $V = 16\pi$ . (B)  $V = 36\pi$ . (C)  $V = 14\pi$ . (D)  $V = \frac{4}{36}\pi$ .

**Lời giải.**

Mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$  có tâm là  $(1; -2; 0)$ , bán kính  $R = 3$ .

Thể tích mặt cầu  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $I(1; 0; 2)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu có tâm  $I$ , tiếp xúc với đường thẳng  $d$ . Bán kính của  $(S)$  bằng

- Ⓐ  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .      Ⓑ  $\frac{5}{3}$ .      Ⓒ  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ .      Ⓓ  $\frac{\sqrt{30}}{3}$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Dựa vào vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu  $R = d(I; d)$ .
- Bước 2: Dựa vào công thức tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng ta tìm bán kính

$$R = \frac{|\overrightarrow{MI}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Đường thẳng  $d$  qua  $M(1; 0; 0)$  và có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; -1; 1)$ .

Bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ  $I$  đến  $d$  nên ta có:  $R = \frac{|\overrightarrow{MI}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{30}}{3}$ .

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $I(1; -2; 3)$ . Bán kính mặt cầu tâm  $I$ , tiếp xúc với trục  $Oy$  là

- Ⓐ  $\sqrt{10}$ .      Ⓑ  $\sqrt{5}$ .      Ⓒ 5.      Ⓓ 10.

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của tâm  $I(1; -2; 3)$  lên trục  $Oy$ , suy ra  $M(0; -2; 0)$ .

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục  $Oy$  nên có bán kính  $R = IM = \sqrt{10}$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu có tâm  $I(1; 0; -2)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha): x + 2y - 2z + 4 = 0$  có đường kính là

- Ⓐ 3.      Ⓑ 5.      Ⓒ 6.      Ⓓ 2.

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Dựa vào vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu

$$R = d(I; (\alpha)).$$

- Bước 2: Dựa vào công thức tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng ta tìm bán kính

$$R = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có  $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|1 + 4 + 4|}{3} = 3$ .

Đường kính là  $2R = 6$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu có tâm  $A(2; 1; 1)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(Oxy)$  có bán kính là

**(A)** 5.

**(B)** 3.

**(C)** 2.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của tâm  $A(2; 1; 1)$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ , suy ra  $M(2; 1; 0)$ .

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng  $(Oxy)$  nên có bán kính  $R = AM = 1$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$  và điểm  $I(-1; 2; -1)$ . Bán kính mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$  và cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5 là

**(A)**  $\sqrt{34}$ .

**(B)**  $\sqrt{5}$ .

**(C)** 5.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Dựa vào vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu

$$R = d(I; (\alpha)).$$

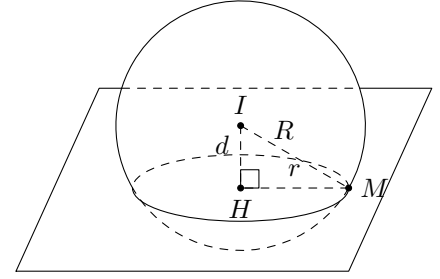
- Bước 2: Dựa vào công thức  $R = \sqrt{d^2 + r^2}$  ta tìm bán kính của mặt cầu, với  $d$  là khoảng cách từ tâm của mặt cầu đến mặt phẳng cắt,  $r$  là bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng và mặt cầu.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có  $d = d(I, (P)) = \frac{|-1-4-2-2|}{3} = 3$ .

Khi đó  $R^2 = d^2 + r^2 = 9 + 25 = 34$ .

Bán kính  $R = \sqrt{34}$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-2; 3; 4)$  cắt mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$  theo một hình tròn giao tuyến có diện tích bằng  $16\pi$ . Thể tích của khối cầu đó bằng

**(A)**  $80\pi$ .

**(B)**  $\frac{500}{3}\pi$ .

**(C)**  $100\pi$ .

**(D)**  $25\pi$ .

**Lời giải.**

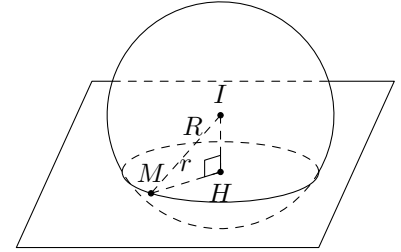
Gọi  $R, r$  lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn giao tuyến.

Hình tròn giao tuyến có diện tích bằng  $16\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r = 4$ .

Khoảng cách từ  $I(-2; 3; 4)$  đến  $(Oxz)$  là  $h = |y_I| = 3$ .

Suy ra  $R = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

Thể tích của khối cầu  $(S)$  là  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1; 2; 3)$  cắt mặt phẳng  $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$  theo một hình tròn giao tuyến có chu vi bằng  $8\pi$ . Diện tích mặt cầu  $(S)$  bằng

**(A)**  $80\pi$ .

**(B)**  $50\pi$ .

**(C)**  $100\pi$ .

**(D)**  $25\pi$ .

**Lời giải.**

Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng  $8\pi$  nên bán kính của nó là  $r = 4$ .

Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng giao tuyến là  $d = d(I, (\beta)) = \frac{|-2-2+6-8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2$ .

Theo công thức  $R^2 = r^2 + d^2 = 20$ .

Diện tích của mặt cầu  $(S)$  là  $S = 4\pi R^2 = 80\pi$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$  cho các mặt phẳng  $(P): x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(Q)$  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng  $r$ . Xác định  $r$  sao cho chỉ có đúng một mặt cầu  $(S)$  thỏa yêu cầu.

(A)  $r = \sqrt{3}$ .

(B)  $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

(C)  $r = \sqrt{2}$ .

(D)  $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I(m; 0; 0)$  là tâm mặt cầu có bán kính  $R$ ;  $d_1, d_2$  là các khoảng cách từ  $I$  đến  $(P)$  và  $(Q)$ .

Ta có  $d_1 = \frac{|m+1|}{\sqrt{6}}$  và  $d_2 = \frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$ .

Theo đề ta có  $\sqrt{d_1^2 + 4} = \sqrt{d_2^2 + r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{6} + 4} = \sqrt{\frac{4m^2 - 4m + 1}{6} + r^2} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2r^2 - 8 = 0 \quad (1)$ .

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm  $m \Leftrightarrow 1 - (2r^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 2)$ ,  $C(0; -3; 0)$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$  là

(A)  $\frac{\sqrt{14}}{3}$ .

(B)  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ .

(C)  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ .

(D)  $\sqrt{14}$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua bốn điểm hay ngoại tiếp tứ diện.

— HƯỚNG GIẢI:

– Bước 1: Giả sử mặt cầu có dạng  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ) (\*).

– Bước 2: Thế tọa độ các điểm nằm trên mặt cầu vào phương trình (\*) ta giải hệ phương trình tìm  $a, b, c, d$ .

– Bước 3: Khi đó mặt cầu cần tìm có tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

**Cách 1:** Gọi  $(S)$  là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$ .

Phương trình mặt cầu  $(S)$  có dạng:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ , ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ).

Vì  $O, A, B, C$  thuộc  $(S)$  nên ta có: 
$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy bán kính mặt cầu  $(S)$  là  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ .

**Cách 2:**  $OABC$  là tứ diện vuông có cạnh  $OA = 1$ ,  $OB = 2$ ,  $OC = 3$  có bán kính mặt cầu ngoại tiếp là  $R = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 9} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$ ,  $D(2; 2; 2)$ . Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  có bán kính là

- Ⓐ  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      Ⓑ  $\sqrt{3}$ .      Ⓒ  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .      Ⓓ 3.

**Lời giải.**

Gọi  $I(a; b; c)$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  có dạng  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ,  $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$ .

Vì  $A, B, C, D \in (S)$  nên ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 12 - 4a - 4b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4a - 4 \\ a = b = c \\ 12 - 12a + 4a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4a - 4 \\ a = b = c \\ 8 - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = b = c = 1. \end{cases}$$

Suy ra  $I(1; 1; 1)$ , do đó bán kính mặt cầu là  $R = IA = \sqrt{3}$ .

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $H(1; 2; -2)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $H$  và cắt các trục  $Ox, Oy, Oz$  tại  $A, B, C$  sao cho  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Bán kính mặt cầu tâm  $O$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- Ⓐ  $R = 1$ .      Ⓑ  $R = 5$ .      Ⓒ  $R = 3$ .      Ⓓ  $R = 7$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định tâm và bán kính của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $H$  và cắt các trục  $Ox, Oy, Oz$  tại  $A, B, C$  sao cho  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Ta chứng minh  $OH \perp (ABC)$ .
- Bước 2: Khi đó mặt cầu tâm  $O$  tiếp xúc mặt phẳng  $(ABC)$  có bán kính  $R = OH$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$ .

Thật vậy:  $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB \quad (1).$

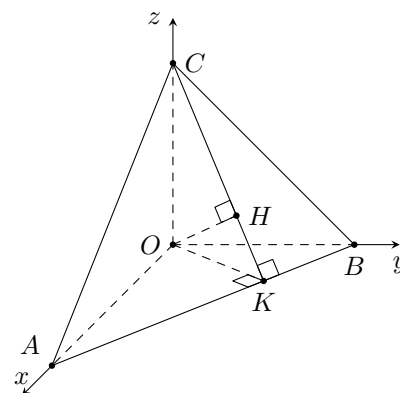
Mà  $CH \perp AB$  (vì  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ )  $(2).$

Từ (1) và (2) suy ra  $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH \quad (*)$ .

Tương tự  $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH \quad (**).$

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $OH \perp (ABC)$ .

Khi đó mặt cầu tâm  $O$  tiếp xúc mặt phẳng  $(ABC)$  có bán kính  $R = OH = 3$ .





Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 0; -1)$ , mặt phẳng  $(P): x + y - z - 3 = 0$ . Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$  nằm trên mặt phẳng  $(P)$ , đi qua điểm  $A$  và gốc tọa độ  $O$  sao cho chu vi tam giác  $OIA$  bằng  $6 + \sqrt{2}$ . Diện tích mặt cầu  $(S)$  là

- (A)**  $S = 16\pi$ . **(B)**  $S = 26\pi$ . **(C)**  $S = 49\pi$ . **(D)**  $S = 36\pi$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính diện tích của mặt cầu có tâm  $I$  nằm trên mặt phẳng  $(P)$ , đi qua điểm  $A$  và gốc tọa độ  $O$  sao cho chu vi tam giác  $OIA$  bằng  $a$ .

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Giả sử  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ).
- Bước 2: Thế tọa độ tâm  $I(a; b; c)$  vào phương trình  $(P)$  ta được phương trình (1).
- Bước 3: Mặt cầu  $(S)$  qua  $A$  và  $O$  nên thế tọa độ điểm  $A$  và  $O$  vào phương trình  $(S)$  ta được phương trình (2), (3).
- Bước 4: Chu vi tam giác  $OIA$  bằng  $a$  nên  $OI + OA + AI = a$  (4).
- Bước 5: Giải hệ bốn phương trình (1), (2), (3), (4) tìm  $a, b, c, d \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Giả sử  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ).

$(S)$  có  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$  và tâm  $I(a; b; c) \in (P) \Rightarrow a + b - c - 3 = 0$  (1).

$(S)$  qua  $A$  và  $O$  nên  $\begin{cases} 2 - 2a + 2c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - a + c = 0$  (2)  $\Rightarrow c = a - 1$ .

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta suy ra  $b = 2$ . Từ đó, suy ra  $I(a; 2; a - 1)$ .

Chu vi tam giác  $OIA$  bằng  $6 + \sqrt{2}$  nên  $OI + OA + AI = 6 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2 - 2a + 5} = 6 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2. \end{cases}$$

— Với  $a = -1 \Rightarrow I(-1; 2; -2) \Rightarrow R = 3$ . Do đó  $S = 4\pi R^2 = 36\pi$ .

— Với  $a = 2 \Rightarrow I(2; 2; 1) \Rightarrow R = 3$ . Do đó  $S = 4\pi R^2 = 36\pi$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$  tâm  $I$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên  $(P)$ . Điểm  $M$  thuộc  $(S)$  sao cho đoạn  $MH$  có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm  $M$ .

- (A)**  $M(-1; 0; 4)$ . **(B)**  $M(0; 1; 2)$ . **(C)**  $M(3; 4; 2)$ . **(D)**  $M(4; 1; 2)$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm điểm  $M$  thuộc  $(S)$  sao cho đoạn  $MH$  có độ dài lớn nhất, với  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên  $(P)$ .

— HƯỚNG GIẢI:

– Bước 1: Tìm tâm và bán kính mặt cầu  $(S)$ .

– Bước 2: Nhận xét: Do  $d(I; (P)) = 9 > R$  nên mặt phẳng  $(P)$  không cắt mặt cầu  $(S)$ . Do  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $(P)$  và  $MH$  lớn nhất nên  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $IH$  với mặt cầu  $(S)$ .

– Bước 3: Phương trình đường thẳng  $IH$  là 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

– Bước 4: Giải hệ gồm phương trình đường thẳng  $IH$  và mặt cầu  $(S)$  tìm tọa độ điểm  $M$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có tâm  $I(1; 2; 3)$  và bán kính  $R = 3$ . Do  $d(I; (P)) = 9 > R$  nên mặt phẳng  $(P)$  không cắt mặt cầu  $(S)$ . Do  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $(P)$  và  $MH$  lớn nhất nên  $M$  là giao điểm của đường thẳng  $IH$  với mặt cầu  $(S)$ .

Ta có  $\overrightarrow{IH} = \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$ .

Phương trình đường thẳng  $IH$  là 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Giao điểm của  $IH$  với  $(S)$ :  $9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow M_1(3; 4; 2)$  và  $M_2(-1; 0; 4)$ .

Khi đó  $M_1H = d(M_1; (P)) = 12$ ;  $M_2H = d(M_2; (P)) = 6$ .

Vậy điểm cần tìm là  $M_1(3; 4; 2)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ ,  $\Delta_2: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ . Gọi  $(S)$

là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Bán kính mặt cầu  $(S)$  bằng

**A**  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**B**  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ .

**C**  $\frac{3}{2}$ .

**D**  $\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải.

— DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm bán kính nhỏ nhất của mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

— HƯỚNG GIẢI:

- Bước 1: Giả sử:  $A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1; 2 + t; -t)$ ,  $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(4 + t'; 3 - 2t'; 1 - t')$ .
- Bước 2: Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có đường kính bằng độ dài đoạn  $AB$  nên có bán kính  $r = \frac{AB}{2}$ , với  $AB$  là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Giả sử  $A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1; 2 + t; -t)$ ,  $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(4 + t'; 3 - 2t'; 1 - t')$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3 + t'; 1 - 2t' - t; 1 - t' + t)$ .

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta_1$  là  $\vec{u}_1 = (0; 1; -1)$ .

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta_2$  là  $\vec{u}_2 = (1; -2; -1)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2t' - t - (1 - t' + t) = 0 \\ 3 + t' - 2(1 - 2t' - t) - (1 - t' + t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t' - 2t = 0 \\ 6t' + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t' = t = 0.$$

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{11}$ .

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có đường kính bằng độ dài đoạn  $AB$  nên có bán kính  $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ .

Chọn phương án **B**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. C  | 3. C  | 4. B  | 5. B  | 6. D  | 7. A  | 8. C  | 9. D  | 10. A |
| 11. B | 12. A | 13. D | 14. C | 15. B | 16. C | 17. D | 18. C | 19. B |       |

**DẠNG 15.****XÁC ĐỊNH VECTO PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Xác định véc-tơ pháp tuyến của phương trình mặt phẳng.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(P)$  trong không gian có dạng:  $Ax + By + Cz + D = 0$  với  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ .

Nếu phương trình mặt phẳng  $(P)$  có dạng  $Ax + By + Cz + D = 0$  thì một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là  $\vec{n} = (A; B; C)$ .

Nếu mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với giá của véc-tơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$  thì véc-tơ  $\vec{n}$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ .

Nếu mặt phẳng  $(P)$  song song hoặc chứa giá của hai véc-tơ không cùng phương  $\vec{a}, \vec{b}$  thì véc-tơ  $[\vec{a}, \vec{b}]$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ .

Nếu mặt phẳng đi qua điểm  $M(a; b; c)$  và nhận  $\vec{n} = (A; B; C)$  là một véc-tơ pháp tuyến thì phương trình của mặt phẳng là  $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$ .

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ . Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ ?

(A)  $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$ .      (B)  $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$ .      (C)  $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$ .      (D)  $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$ .

Lời giải.

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán nhận biết véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng có phương trình cho trước.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định các hệ số  $A, B, C, D$  trong phương trình dạng tổng quát  $Ax + By + Cz + D = 0$  của mặt phẳng  $(\alpha)$ .

B2: Khi đó một véc-tơ pháp tuyến của  $(\alpha)$  là  $\vec{n} = (A; B; C)$ .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  có dạng:  $Ax + By + Cz + D = 0$  với  $A = 3; B = 2; C = -4; D = 1$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có  $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Chọn phương án (D)

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 4y + 3z - 2 = 0$ . Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  là

- (A)  $\vec{n}_2 = (1; 4; 3)$ . (B)  $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$ . (C)  $\vec{n}_4 = (-4; 3; -2)$ . (D)  $\vec{n}_1 = (0; -4; 3)$ .

**Lời giải.**

$(P)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; -4; 3)$  nên  $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3) = -\vec{n}$  cũng là véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - 3z + 4 = 0$ . Véc-tơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ ?

- (A)  $\vec{n}_3 = (2; -3; 4)$ . (B)  $\vec{n}_1 = (2; 0; -3)$ . (C)  $\vec{n}_2 = (3; 0; 2)$ . (D)  $\vec{n}_4 = (2; -3; 0)$ .

**Lời giải.**

Véc-tơ  $\vec{n}_1 = (2; 0; -3)$  có giá vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  vì là một véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ ?

- (A)  $\vec{n} = (6; 3; 2)$ . (B)  $\vec{n} = (2; 3; 6)$ . (C)  $\vec{n} = (1; 2; 3)$ . (D)  $\vec{n} = (3; 2; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow (P)$  có một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (6; 3; 2)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 4.** Tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; -3; 0)$ ,  $P(0; 0; 4)$  là

- (A)  $(2; -3; 4)$ . (B)  $(-6; 4; -3)$ . (C)  $(-6; -4; 3)$ . (D)  $(-6; 4; 3)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$  có 1 véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12} \cdot \vec{n}_1$  với  $\vec{n}_1 = (-6; 4; -3)$ .

Nên  $\vec{n}_1 = (-6; 4; -3)$  cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(4; 0; 1)$  và  $C(-10; 5; 3)$ . Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$ ?

- (A)  $\vec{n} = (1; 2; 2)$ . (B)  $\vec{n} = (1; -2; 2)$ . (C)  $\vec{n} = (1; 8; 2)$ . (D)  $\vec{n} = (1; 2; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-12; 6; 0)$ ,  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 24; 24)$ .

$\Rightarrow (ABC)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \frac{1}{12} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(1; -2; 3)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $A$ ,  $B$  và song song với trục  $Ox$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (0; a; b)$ . Khi đó tỉ số  $\frac{a}{b}$  bằng

☐ A  $-2$ .

☐ B  $-\frac{3}{2}$ .

☐ C  $\frac{3}{2}$ .

☐ D  $2$ .

**Lời giải.**

$\overrightarrow{BA} = (1; 1; 2)$ ;  $\vec{i} = (1; 0; 0)$  là véc-tơ đơn vị của trục  $Ox$ .

Vì  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $A, B$  và song song với trục  $Ox$  nên  $[\overrightarrow{BA}, \vec{i}] = (0; 2; -1)$  là một véc-tơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ . Do đó  $\frac{a}{b} = -2$ .

Chọn phương án ☒ A

**Câu 7.** Cho hai điểm  $M(1; 2; -4)$  và  $M'(5; 4; 2)$  biết  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$ . Khi đó mặt phẳng  $(\alpha)$  có một véc-tơ pháp tuyến là

☐ A  $\vec{n} = (2; 1; 3)$ .

☐ B  $\vec{n} = (2; 3; 3)$ .

☐ C  $\vec{n} = (3; 3; -1)$ .

☐ D  $\vec{n} = (2; -1; 3)$ .

**Lời giải.**

Do  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$  nên mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với véc-tơ  $\overrightarrow{MM'} = (4; 2; 6)$ .

Suy ra  $\vec{n} = (2; 1; 3)$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Chọn phương án ☒ A

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M(3; -1; 1)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3; -2; 1)$ ?

☐ A  $x - 2y + 3z + 13 = 0$ .

☐ B  $3x + 2y + z - 8 = 0$ .

☐ C  $3x - 2y + z + 12 = 0$ .

☐ D  $3x - 2y + z - 12 = 0$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng đi qua điểm  $M(3; -1; 1)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3; -2; 1)$  có phương trình là  $3(x - 3) - 2(y + 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0$ .

Chọn phương án ☒ D

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 5; -2)$ ,  $B(3; 1; 2)$ . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .

☐ A  $2x + 3y + 4 = 0$ .

☐ B  $x - 2y + 2z = 0$ .

☐ C  $x - 2y + 2z + 8 = 0$ .

☐ D  $x - 2y + 2z + 4 = 0$ .

**Lời giải.**

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 4)$  là một véc-tơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Rightarrow I(2; 3; 0)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $I$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (2; -4; 4)$  nên có phương trình là

$$2(x - 2) - 4(y - 3) + 4(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 4 = 0.$$

Chọn phương án ☒ D

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng  $(Oyz)$ ?

☐ A  $x = y + z$ .

☐ B  $y - z = 0$ .

☐ C  $y + z = 0$ .

☐ D  $x = 0$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(Oyz)$  đi qua  $O(0;0;0)$  và nhận  $\vec{n} = (1;0;0)$  làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng  $(Oyz)$  là  $x = 0$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $M(1;1;1)$  và vuông góc với hai mặt phẳng  $(\beta): 2x + y + 2z + 5 = 0; (\gamma): 3x + 2y + z - 3 = 0$  Mặt phẳng  $(\alpha)$  tạo với các trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$  một tứ diện có thể tích bằng

**(A)**  $\frac{1}{9}$ .

**(B)**  $\frac{121}{6}$ .

**(C)**  $\frac{1}{3}$ .

**(D)**  $\frac{121}{2}$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(\beta): 2x + y + 2z + 5 = 0$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\beta = (2;1;2)$ .

Mặt phẳng  $(\gamma): 3x + 2y + z - 3 = 0$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\gamma = (3;2;1)$ .

Vì  $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$  nên  $(\beta)$  và  $(\gamma)$  cắt nhau.

Do mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(\beta)$  và  $(\gamma)$  nên  $(\alpha)$  chứa hoặc song song với giá của hai véc-tơ  $\vec{n}_\beta$  và  $\vec{n}_\gamma$ .

Vậy mặt phẳng  $(\alpha)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = (1 - 4; 6 - 2; 4 - 3) = (-3; 4; 1)$ .

Mà  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1;1;1)$  nên  $(\alpha)$  có phương trình là  $-3(x - 1) + 4(y - 1) + 1(z - 1) = 0$  hay  $(\alpha): -3x + 4y + z - 2 = 0$ .

Suy ra  $(\alpha)$  cắt các trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A\left(-\frac{2}{3}; 0; 0\right); B\left(0; \frac{1}{2}; 0\right); C(0; 0; 2)$ .

Từ đó thể tích tứ diện  $OABC$  là  $V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot \left|-\frac{2}{3}\right| \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{9}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau song song với trục  $Oz$ ?

**(A)**  $(\alpha): z = 0$ .

**(B)**  $(P): x + y = 0$ .

**(C)**  $(Q): x + 11y + 1 = 0$ .

**(D)**  $(\beta): z = 1$ .

**Lời giải.**

Trục  $Oz$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{k} = (0;0;1)$ , nếu một mặt phẳng song song với trục  $Oz$  thì véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của mặt phẳng đó phải vuông góc với véc-tơ  $\vec{k}$ , tức là  $\vec{n} = (a;b;0)$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $a^2 + b^2 > 0$ .

Cả hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  cùng thỏa điều kiện trên. Mặt khác, vì  $O \in (P)$  và  $O \notin (Q)$  nên mặt phẳng  $(P)$  chứa trục  $Oz$  (loại), mặt phẳng  $(Q)$  song song với trục  $Oz$  (nhận).

Chọn phương án **C**

**Câu 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$  và  $(\beta): -2x + my + 2z - 2 = 0$ . Tìm  $m$  để  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$ .

**(A)** Không tồn tại  $m$ .

**(B)**  $m = -2$ .

**(C)**  $m = 2$ .

**(D)**  $m = 5$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_1 = (1;1;-1)$  và  $A(0;0;1) \in (\alpha)$ .

Mặt phẳng  $(\beta)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_2 = (-2;m;2)$ .



Để  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  cùng phương và  $A \notin (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{1} = \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{1} \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$  không tồn tại  $m$ .

Vậy không tồn tại  $m$  để  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 14.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): nx + 7y - 6z + 4 = 0$ ,  $(Q): 3x + my - 2z - 7 = 0$ . Tìm giá trị của  $m, n$  để hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  song song với nhau.

- A**  $m = \frac{7}{3}, n = 1$ .      **B**  $m = \frac{3}{7}, n = 9$ .      **C**  $m = 9, n = \frac{7}{3}$ .      **D**  $m = \frac{7}{3}, n = 9$ .

**Lời giải.**

Hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  song song với nhau  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ 4 \neq k \cdot (-7) \end{cases} (*)$ .

với  $\vec{n}_1 = (n; 7; -6), \vec{n}_2 = (3; m; -2)$ .

Xét  $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3k \\ 7 = km \\ -6 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m = \frac{7}{3} \\ k = 3 \end{cases}$  thỏa hệ điều kiện  $(*)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai mặt phẳng  $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$ ,  $(Q): (2m - 1)x + m(1 - 2m)y + (2m - 4)z + 14 = 0$ . Tìm  $m$  để  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc nhau.

- A**  $m \in \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$ .      **B**  $m \in \{2\}$ .      **C**  $m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$ .      **D**  $m \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$ .

Mặt phẳng  $(Q): (2m - 1)x + m(1 - 2m)y + (2m - 4)z + 14 = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_2 = (2m - 1; m - 2m^2; 2m - 4)$ .

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 - 3(m - 2m^2) + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(10; 2; -2), B(15; 3; -1)$ . Xét mặt phẳng  $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ ,  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của  $m$  để mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với đường thẳng  $AB$ .

- A**  $m = -2$ .      **B**  $m = 2$ .      **C**  $m = -52$ .      **D**  $m = 52$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{AB} = (5; 1; 1)$ ; véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P): \vec{n} = (10; 2; m)$ .

Để  $(P) \perp AB$  thì  $\vec{AB}$  cùng phương với  $\vec{n} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 2$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$ ;  $(\beta): mx - 2y + z + m - 1 = 0$ ;  $(\gamma): mx + (m - 1)y - z + 2m = 0$ . Tìm  $m$  để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc.

- A**  $m = 1$ .      **B**  $m = -3$ .      **C**  $m = -1$ .      **D**  $m = 3$ .

### Lời giải.

Ta có: mặt phẳng  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  lần lượt có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1); \vec{n}_\beta = (m; -2; 1); \vec{n}_\gamma = (m; m-1; -1)$ . Để ba mặt phẳng này đôi một vuông góc thì:

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \\ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  tương ứng có phương trình là  $3x - 6y + 12z - 3 = 0$  và  $2x - my + 8z + 2 = 0$ , với  $m$  là tham số thực. Tìm  $m$  để mặt phẳng  $(P)$  song song với mặt phẳng  $(Q)$  và khi đó tính khoảng cách  $d$  giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

**A**  $m = -4$  và  $d = \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

**B**  $m = 2$  và  $d = \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

**C**  $m = 4$  và  $d = \frac{1}{\sqrt{21}}$ .

**D**  $m = 4$  và  $d = \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

### Lời giải.

Mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (3; -6; 12)$  và  $\vec{n}_2 = (2; -m; 8)$ .

Để  $(P) \parallel (Q)$  thì  $\vec{n}_1$  cùng phương  $\vec{n}_2$ , tức là  $\exists k \neq 0, \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \cdot 2 \\ -6 = k \cdot (-m) \\ 12 = k \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ m = 4. \end{cases}$

Chọn  $M_0(1; 0; 0) \in (P)$ . Khi đó:  $d((P), (Q)) = d(M_0; (Q)) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 8^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + y + 2z - 3 = 0$  và điểm  $A(2; -1; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $B$  thuộc trục  $Oz$  sao cho độ dài đoạn hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng  $AB$  lên  $(P)$  bằng  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ .

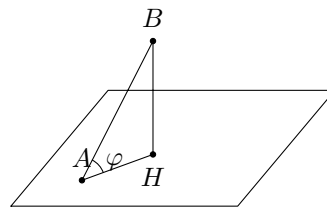
**A**  $B(0; 0; \frac{6}{5})$ .

**B**  $B(0; 0; -\frac{3}{5})$ .

**C**  $B(0; 0; -\frac{6}{5})$ .

**D**  $B(0; 0; \frac{3}{5})$ .

### Lời giải.



Gọi  $B(0; 0; b) \in (Oz) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 1; b)$  và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  là  $\vec{n} = (2; 1; 2)$ .

Gọi  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng  $AB$  và  $(P)$ , ta có:  $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2b - 3|}{\sqrt{b^2 + 5} \cdot \sqrt{9}}$ .

Gọi  $H$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $B$  lên  $(P)$ . Vì  $A \in (P)$  nên  $AH$  là hình chiếu vuông góc của  $AB$  lên  $(P)$ .

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \cos \varphi = \sqrt{b^2 + 5} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{2b - 3}{\sqrt{b^2 + 5} \cdot \sqrt{9}} \right)^2} = \frac{\sqrt{5b^2 + 12b + 36}}{3} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{6}{5} \Rightarrow B \left( 0; 0; -\frac{6}{5} \right).$$

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y - 2z = 0$  và hai điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 2; 2)$ . Gọi  $A_1, B_1$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A, B$  lên  $(P)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $A_1B_1$ .

- (A)**  $A_1B_1 = \sqrt{3}$ .      **(B)**  $A_1B_1 = \sqrt{6}$ .      **(C)**  $A_1B_1 = 1$ .      **(D)**  $A_1B_1 = \sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ , véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$  là  $\vec{n} = (1; -2; -2)$ .

$$\Rightarrow AB = \sqrt{3}; \sin(\widehat{AB, (P)}) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } A_1B_1 = AB \cdot \cos(\widehat{AB, (P)}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = \sqrt{2}.$$

Chọn phương án **D**

** BẢNG ĐÁP ÁN **

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. B  | 3. A  | 4. B  | 5. A  | 6. A  | 7. A  | 8. D  | 9. D  | 10. D |
| 11. A | 12. C | 13. A | 14. D | 15. C | 16. B | 17. A | 18. D | 19. C | 20. D |

# DẠNG 16. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (a; b; c), a \cdot b \cdot c \neq 0$  có phương trình là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

b) Phương trình tham số của đường thẳng:

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (a; b; c)$  có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$ .

(A)  $P(-1; 2; 1)$ .

(B)  $Q(1; -2; -1)$ .

(C)  $N(-1; 3; 2)$ .

(D)  $M(1; 2; 1)$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán nhận biết điểm thuộc, không thuộc đường thẳng có phương trình cho trước.

Phương pháp.

- B1: Lần lượt thay tọa độ các điểm  $M, N, P, Q$  vào phương trình của đường thẳng  $d$ .
- B2: Dựa vào kết quả sau khi thay, kết quả đúng suy ra điểm tương ứng thuộc  $d$ .

3. HƯỚNG GIẢI:

- B1: Lần lượt thay tọa độ các điểm  $M, N, P, Q$  vào phương trình của đường thẳng  $d$ .
- B2: Dựa vào kết quả sau khi thay, kết quả đúng suy ra điểm tương ứng thuộc  $d$ .

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

+) Thay tọa độ điểm  $P(-1; 2; 1)$  vào phương trình của đường thẳng  $d$  ta được:

$$\frac{-1+1}{-1} = \frac{2-2}{3} = \frac{1-1}{3} \text{ (luôn đúng)}. \text{ Vậy điểm } P \in d.$$

+) Thay tọa độ điểm  $Q(1; -2; -1)$  vào phương trình của đường thẳng  $d$  ta được:

$$\frac{1+1}{-1} = \frac{-2-2}{3} = \frac{-1-1}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \text{ (vô lí)}. \text{ Vậy } Q \notin d.$$

+) Thay tọa độ điểm  $N(-1; 3; 2)$  vào phương trình của đường thẳng  $d$  ta được:

$$\frac{-1+1}{-1} = \frac{3-2}{3} = \frac{2-1}{3} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (vô lí). Vậy } N \notin d.$$

+) Thay tọa độ điểm  $M(1; 2; 1)$  vào phương trình của đường thẳng  $d$  ta được:

$$\frac{1+1}{-1} = \frac{2-2}{3} = \frac{1-1}{3} \Leftrightarrow -2 = 0 = 0 \text{ (vô lí). Vậy } M \notin d.$$

Chọn phương án **(A)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$  đi qua điểm

- (A)**  $(-1; 2; -3)$ . **(B)**  $(1; -2; 3)$ . **(C)**  $(-3; 4; 5)$ . **(D)**  $(3; -4; -5)$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  có phương trình:

$$d: \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}.$$

Suy ra đường thẳng đi qua điểm  $(-1; 2; -3)$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ . Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng  $d$ ?

- (A)**  $N(2; -1; 3)$ . **(B)**  $P(5; -2; -1)$ . **(C)**  $Q(-1; 0; -5)$ . **(D)**  $M(-2; 1; 3)$ .

**Lời giải.**

Nhận xét  $N, P, Q$  thuộc đường thẳng  $d$ .

Điểm  $M$  không thuộc đường thẳng  $d$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ . Đường thẳng  $d$  đi qua điểm nào

sau đây?

- (A)**  $K(1; -1; 1)$ . **(B)**  $H(1; 2; 0)$ . **(C)**  $E(1; 1; 2)$ . **(D)**  $F(0; 1; 2)$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $F(0; 1; 2)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d$ ?

- (A)**  $M(-1; -2; 0)$ . **(B)**  $M(-1; 1; 2)$ . **(C)**  $M(2; 1; -2)$ . **(D)**  $M(3; 3; 2)$ .

**Lời giải.**

Thay tọa độ từng phương án vào phương trình của  $d$  chỉ có điểm  $M(-1; 1; 2)$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -2 + 3t \end{cases}$  **không** đi qua điểm

nào sau đây?

**(A)**  $P(4; 1; -4)$ .

**(B)**  $Q(3; 1 - 5)$ .

**(C)**  $M(2; 1; -2)$ .

**(D)**  $N(0; 1; 4)$ .

**Lời giải.**

Thế tọa độ từng điểm vào phương trình đường thẳng  $\Delta$ , ta thấy tọa độ điểm  $P$  thỏa.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  đi qua điểm  $Q(1; m; n)$ . Tính

$T = 2m + n$ .

**(A)**  $T = 6$ .

**(B)**  $T = -7$ .

**(C)**  $T = 7$ .

**(D)**  $T = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ m = 2 - 3t \\ n = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$ .

Vậy  $T = 2m + n = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ . Tọa độ điểm  $M$  là giao điểm của  $\Delta$  với mặt phẳng  $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$  là

**(A)**  $M(5; -1; -3)$ .

**(B)**  $M(1; 0; 1)$ .

**(C)**  $M(2; 0; -1)$ .

**(D)**  $M(-1; 1; 1)$ .

**Lời giải.**

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \\ x + 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 1; 1).$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$  và

$d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ . Phương trình đường thẳng vuông góc với  $(P): 7x + y - 4z = 0$  và cắt hai đường

thẳng  $d_1, d_2$  là

**(A)**  $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$ .

**(B)**  $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$ .

$$\textcircled{C} \frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}.$$

**Lời giải.**

Gọi  $d$  là đường thẳng cần tìm.

Gọi  $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$ .

$A \in d_1 \Rightarrow A(2a; 1-a; -2+a)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2b; 1+b; 3)$ .

$\overrightarrow{AB} = (-2a+2b-1; a+b; -a+5)$

$(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\overrightarrow{n_P} = (7; 1; -4)$ .

$d \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}$  cùng phương

$\Leftrightarrow$  có một số  $k$  thỏa  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{n_P}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-1=7k \\ a+b=k \\ -a+5=-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-7k=1 \\ a+b-k=0 \\ -a+4k=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ k=-1. \end{cases}$$

$d$  đi qua điểm  $A(2; 0; -1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_P} = (7; 1; -4)$ .

Vậy phương trình của  $d$  là  $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$  và điểm  $A(3; 2; 0)$ . Điểm đối xứng của điểm  $A$  qua đường thẳng  $d$  có tọa độ là

$$\textcircled{A} (-1; 0; 4).$$

$$\textcircled{B} (7; 1; -1).$$

$$\textcircled{C} (2; 1; -2).$$

$$\textcircled{D} (0; 2; -5).$$

**Lời giải.**

Cách 1. Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $d$ . Phương trình của mặt phẳng  $(P)$  là  $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên đường thẳng  $d$ , khi đó  $H = d \cap (P)$  Suy ra  $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$ , mặt khác  $H \in (P) \Rightarrow -1+t+2(-3+2t)+2(-2+2t)-7=0 \Leftrightarrow t=2$ . Vậy  $H(1; 1; 2)$ .

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua đường thẳng  $d$ , khi đó  $H$  là trung điểm của  $AA'$ , suy ra  $A'(-1; 0; 4)$ .

Cách 2. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên đường thẳng  $d$  thì ta có  $H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$ , suy ra  $\overrightarrow{AH} = (t-4; 2t-5; 2t-2)$ .

Do  $AH \perp d$  nên  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_{cp(d)}} = 0 \Leftrightarrow t=2$ . Vậy  $H(1; 1; 2)$ .

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua đường thẳng  $d$ , khi đó  $H$  là trung điểm của  $AA'$ , suy ra  $A'(-1; 0; 4)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ ,  $AB = 3\sqrt{2}$ , đường thẳng  $AB$  có phương trình  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4}$ , đường thẳng  $AC$  nằm trên mặt phẳng  $(\alpha): x+z-1=0$ . Biết  $B$  là điểm có hoành độ dương, gọi  $(a; b; c)$  là tọa độ điểm  $C$ , giá trị của  $a+b+c$  bằng

$$\textcircled{A} 3.$$

$$\textcircled{B} 2.$$

$$\textcircled{C} 4.$$

$$\textcircled{D} 7.$$

**Lời giải.**



Vì  $A$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với mặt phẳng  $(\alpha)$  nên tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4} \\ x+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

Vậy điểm  $A(1; 2; 0)$ .

Điểm  $B$  nằm trên đường thẳng  $AB$  nên điểm  $B$  có tọa độ  $B(3+t; 4+t; -8-4t)$ .

Theo giả thiết thì  $t+3 > 0 \Leftrightarrow t > -3$ .

Do  $AB = 3\sqrt{2}$ , ta có  $(t+2)^2 + (t+2)^2 + 16(t+2)^2 = 18 \Rightarrow t = -1$  nên  $B(2; 3; -4)$ .

Theo giả thiết thì  $AC = AB \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ;  $BC = AB \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} a+c=1 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = \frac{27}{2} \\ (a-2)^2 + (b-3)^2 + (c+4)^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ 2a+2b-8c=9 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = \frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=3 \\ c=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy  $C\left(\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2}\right)$  nên  $a+b+c=2$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(1; 0; -1), C(2; -1; 2)$ . Điểm  $D$  thuộc tia  $Oz$  sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh  $D$  của tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{3\sqrt{30}}{10}$  có tọa độ là

**(A)**  $(0; 0; 1)$ .      **(B)**  $(0; 0; 3)$ .      **(C)**  $(0; 0; 2)$ .      **(D)**  $(0; 0; 4)$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua  $B(1; 0; -1)$  và có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-10; -4; 2) = -2(5; 2; -1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$ :  $5x + 2y - z - 6 = 0$ .

Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh  $D(0; 0; d)$  của tứ diện  $ABCD$  bằng  $d(D, (ABC))$ .

Theo bài ra ta có  $\frac{|-d-6|}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{3\sqrt{30}}{10} \Leftrightarrow |-d-6| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -15 \\ d = 3 \end{cases}$ .

Do  $D$  thuộc tia  $Oz$  nên  $D(0; 0; 3)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$ :  $2x + 2y - z - 4 = 0$  và đường

thẳng  $d$ :  $\begin{cases} x=2+t \\ y=2+2t \\ z=-2-t \end{cases}$ . Tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2; 1)$ , các điểm  $B, C$  nằm trên  $(P)$  và trọng tâm  $G$

nằm trên đường thẳng  $d$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của  $BC$  là

**(A)**  $I(1; -1; -4)$ .      **(B)**  $I(2; 1; 2)$ .      **(C)**  $I(2; -1; -2)$ .      **(D)**  $I(0; 1; -2)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $G(2+t; 2+2t; -2-t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (3+t; 2t; -3-t)$ .

Mà  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$  (với  $I$  là trung điểm của  $BC$ ).

$$\Rightarrow I\left(\frac{7+3t}{2}; 2+3t; \frac{-7-3t}{2}\right).$$

$$\text{Mặt khác } I \in (P) \text{ nên } 2 \cdot \frac{7+3t}{2} + 2 \cdot (2+3t) - \frac{-7-3t}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 21t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với  $t = -1$  thì  $I(2; -1; -2)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -1)$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): x+y+2z+1=0$ . Điểm  $B$  thuộc mặt phẳng  $(P)$  thỏa mãn đường thẳng  $AB$  vuông góc và cắt đường thẳng  $d$ . Tọa độ điểm  $B$  là

**(A)**  $(3; -2; -1)$ .

**(B)**  $(-3; 8; -3)$ .

**(C)**  $(0; 3; -2)$ .

**(D)**  $(6; -7; 0)$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có một VTCP là  $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$ .

$$\text{Gọi } M = AB \cap d \Rightarrow M(1+2t; -1+t; 2-t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t; t-3; 3-t).$$

$$AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4t + t - 3 - 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; -2; 2) = 2(1; -1; 1).$$

Đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $A$ , có một VTCP là  $\vec{u} = (1; -1; 1)$  nên có phương trình: 
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ta có: } B = AB \cap (P) \text{ nên tọa độ } B \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+t \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}.$$

Suy ra  $B(0; 3; -2)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): x+2y-z+4=0$

$$\text{và cắt cả hai đường thẳng } d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}, d': \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}; \text{ trong các điểm sau, điểm nào thuộc}$$

đường thẳng  $\Delta$ ?

**(A)**  $M(6; 5; -4)$ .

**(B)**  $N(4; 5; 6)$ .

**(C)**  $P(5; 6; 5)$ .

**(D)**  $Q(4; 4; 5)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Gọi } A = \Delta \cap d, B = \Delta \cap d' \Rightarrow A(-3+a; 2-a; 2a), B(3+t; 3t; 2t).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương với VTPT } \vec{n}_{(\alpha)} \text{ nên } \frac{6+t-a}{1} = \frac{-2+3t+a}{2} = \frac{2t-2a}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4; 8; -4) \text{ và } B(5; 6; 4).$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua điểm } B(5; 6; 4) \text{ có VTCP } \vec{u} = (1; 2; -1) \text{ là } \begin{cases} x = 5+t \\ y = 6+2t \\ z = 4-t \end{cases}$$

Suy ra  $Q(4; 4; 5) \in \Delta$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; -1; -6)$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ ,  $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ . Đường thẳng đi qua điểm  $M$  và cắt cả hai đường thẳng  $d_1, d_2$  tại hai điểm  $A, B$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

**(A)**  $\sqrt{38}$ .

**(B)**  $2\sqrt{10}$ .

**(C)** 8.

**(D)** 12.

**Lời giải.**

Vì  $A$  thuộc  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$  nên  $A(1+2t; 1-t; -1+t)$ .

Vì  $B$  thuộc  $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$  nên  $B(-2+3t'; -1+t'; 2+2t')$ .

Suy ra  $\overrightarrow{MA} = (-1+2t; 2-t; 5+t)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (-4+3t'; t'; 8+2t')$ .

$$A, B, M \text{ thẳng hàng khi và chỉ khi } [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2-t & 5+t \\ t' & 8+2t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 5+t & -1+2t \\ 8+2t' & -4+3t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1+2t & 2-t \\ -4+3t' & t' \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 \\ -3tt' - 8t - t' + 16 = 0 \\ -tt' - 20t + 17t' - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \\ t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}.$$

Thay vào (3) ta được  $t = 1, t' = 2$  thỏa mãn.

Suy ra  $A(3; 0; 0)$  và  $B(4; 1; 6)$ . Vậy  $AB = \sqrt{38}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 1), B(-2; 2; 1), C(1; -2; 2)$ . Đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$  cắt mặt phẳng  $(Oyz)$  tại điểm nào dưới đây?

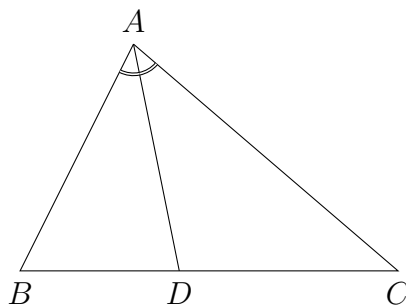
**(A)**  $(0; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3})$ .

**(B)**  $(0; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ .

**(C)**  $(0; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3})$ .

**(D)**  $(0; \frac{2}{3}; -\frac{8}{3})$ .

**Lời giải.**



+) Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

Ta có  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 5, AC = |\overrightarrow{AC}| = 1$ .

Khi đó  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = 5 \Rightarrow \overrightarrow{DB} = 5\overrightarrow{CD} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{11}{6}\right)$ .

+) Đường thẳng  $AD$  qua  $A$ , có véc-tơ chỉ phương  $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$  cùng phương với  $\vec{u} = (-3; 4; 5)$

nên có phương trình  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$  +) Gọi  $E = AD \cap (Oyz)$ .

$E \in AD \Rightarrow E(1 - 3t; -2 + 4t; 1 + 5t)$ .

$E \in (Oyz) \Rightarrow 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ .

Từ đó  $E\left(0; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .

Cách trắc nghiệm.

Gọi  $\Delta$  là đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ , khi đó  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

Suy ra  $\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1\right)$  cùng phương với  $\vec{v} = (-3; 4; 5)$ .

Từ đó làm tương tự như trên, ta tìm được  $E\left(0; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  để thể tích  $V$  của tứ diện  $MABC$  bằng 3.

**(A)**  $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right); M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .

**(B)**  $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ .

**(C)**  $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ .

**(D)**  $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1)$ .

Do  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$  nên  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{9}{2}$ .

Gọi  $\vec{n}$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$  thì  $\vec{n} = (1; 2; -2) \Rightarrow$  phương trình mặt

phẳng  $(ABC)$  là  $x + 2y - 2z - 2 = 0$ .

Gọi  $M(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t) \in d \Rightarrow d(M, (ABC)) = \frac{|4t + 11|}{3}$ .

Do thể tích  $V$  của tứ diện  $MABC$  bằng 3 nên  $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{|4t + 11|}{3} = 3 \Leftrightarrow |4t + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t = -\frac{17}{4} \end{cases}$ .

Với  $t = -\frac{5}{4}$  thì  $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .

Với  $t = -\frac{17}{4}$  thì  $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ .

Cách 2. Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$ .

Gọi  $M(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1 + 2t; -3 - t; 3 + 2t)$ .

Vì  $V_{MABC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AM}|$  nên  $|12t + 33| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t = -\frac{17}{4} \end{cases}$ .

Với  $t = -\frac{5}{4}$  thì  $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .

Với  $t = -\frac{17}{4}$  thì  $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác đều  $ABC$  với  $A(6; 3; 5)$  và đường thẳng  $BC$  có

phương trình tham số  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  và

vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $\Delta$ ?

**(A)**  $M(-1; -12; 3)$ .

**(B)**  $N(3; -2; 1)$ .

**(C)**  $P(0; -7; 3)$ .

**(D)**  $Q(1; -2; 5)$ .

**Lời giải.**

Cách giải:

$BC: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{BC}} = (-1; 1; 2)$  là một vec-tơ chỉ phương của  $BC$ .

Xét  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc  $BC$  nên  $(P)$  qua  $A(6; 3; 5)$  và nhận  $\overrightarrow{u_{BC}} = (-1; 1; 2)$  làm 1 VTPT  $\Rightarrow (P): -(x - 6) + y - 3 + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 2z - 7 = 0$ .

$H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$  thì  $H = BC \cap (P)$  hay tọa độ của  $H$  thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \\ -x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0; 3; 2)$ .

Lại có  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \Rightarrow G(2; 3; 3)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AH} = (-6; 0; -3), \overrightarrow{u_{BC}} = (-1; 1; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{u_{BC}}] = (3; 15; -6)$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $G(2; 3; 3)$  và nhận  $\frac{1}{3} [\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{u_{BC}}] = (1; 5; -2)$  làm VTCP  $\Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{-2}$ .

Kiểm tra mỗi đáp án ta thấy chỉ có điểm  $Q \in \Delta$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$  và hai điểm  $A(1; 0; -1), B(2; 1; 1)$ .

Tìm điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

- (A)**  $M(1; 1; 0)$ . **(B)**  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ . **(C)**  $M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . **(D)**  $M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

Do  $M \in d$  nên  $M(1 + 2t; 1 - t; t)$ .

$$MA + MB = \sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2} + \sqrt{(2t-1)^2 + t^2 + (t-1)^2}.$$

$$= \sqrt{6t^2 + 2} + \sqrt{6t^2 - 6t + 2} = \sqrt{6t^2 + 2} + \sqrt{6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Chọn } \vec{u} = (\sqrt{6}t; \sqrt{2}), \vec{v} = \left(\sqrt{6}\left(\frac{1}{2} - t\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Ta có: } MA + MB = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{9}{2}} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng hướng } \Rightarrow \frac{\sqrt{6}t}{\sqrt{6}\left(\frac{1}{2} - t\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow 1 = 1 - 2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } MA + MB \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$ ;  $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$ . Đường thẳng vuông góc với  $(P)$ , cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $A, B$ . Độ dài đoạn  $AB$  là

- (A)**  $2\sqrt{3}$ . **(B)**  $\sqrt{14}$ . **(C)** 5. **(D)**  $\sqrt{15}$ .

**Lời giải.**

$$d_1 \text{ có phương trình tham số là } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ và } d_2 \text{ có phương trình tham số là } \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -1 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases}.$$

Mặt phẳng  $(P)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 2; 3)$ .

$$\text{Vì } A \in d_1 \Rightarrow A(3 - t; 3 - 2t; -2 + t) \text{ và } B \in d_2 \Rightarrow B(5 - 3k; -1 + 2k; 2 + k)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2 - 3k + t; -4 + 2k + 2t; 4 + k - t).$$

$$\text{Mà } d \perp (P) \text{ nên } \overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{n} \text{ cùng phương, suy ra } \frac{2 - 3k + t}{1} = \frac{-4 + 2k + 2t}{2} = \frac{4 + k - t}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = 1. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } A(1; -1; 0), B(2; 1; 3). \text{ Vậy } AB = \sqrt{14}.$$

Chọn phương án **(B)**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. D  | 3. D  | 4. B  | 5. A  | 6. C  | 7. D  | 8. B  | 9. A  | 10. B |
| 11. B | 12. C | 13. C | 14. D | 15. A | 16. C | 17. A | 18. D | 19. D | 20. B |

## DẠNG 17. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

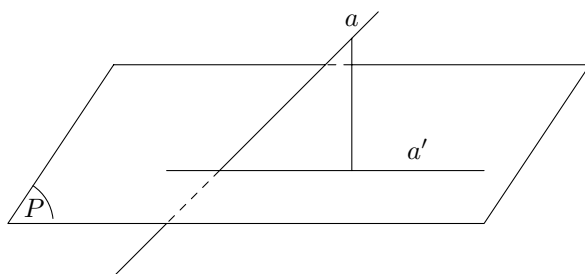
1) Góc giữa hai đường thẳng.

Phương pháp 1: Sử dụng định lý hàm số cosin hoặc tỉ số lượng giác.

Phương pháp 2: Sử dụng tích vô hướng: nếu  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng  $a$  và  $b$  thì góc  $\varphi$  của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức.

$$\cos \varphi = |\cos (\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

2) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:



Muốn xác định góc của đường thẳng  $a$  và  $(P)$  ta tìm hình chiếu vuông góc  $a'$  của  $a$  trên  $(P)$ . Khi đó

$$\widehat{(a, (P))} = \widehat{(a', a)}.$$

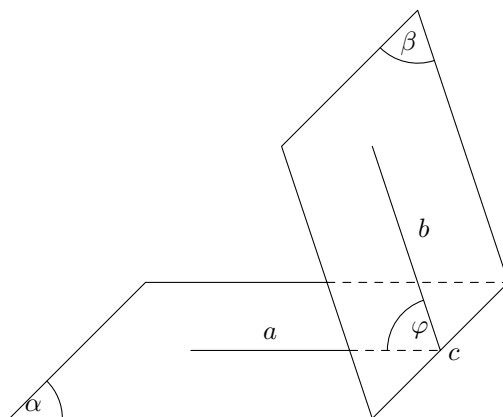
3) Góc giữa hai mặt phẳng:

Phương pháp 1: Dựng hai đường thẳng  $a, b$  lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

Khi đó, góc giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là

$$\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(a, b)}.$$

Phương pháp 2:





Xác định giao tuyến  $c$  của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

Dựng hai đường thẳng  $a, b$  lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến  $c$  tại một điểm trên  $c$ . Khi đó:  $(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = (\widehat{a, b})$ .

Cách khác: Ta xác định mặt phẳng phụ  $(\gamma)$  vuông góc với giao tuyến  $c$  mà  $(\alpha) \cap (\gamma) = a$ ,  $(\beta) \cap (\gamma) = b$ . Suy ra  $(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = (\widehat{a, b})$ .

4) Sử dụng phương pháp tọa độ trong **không** gian:

Chọn hệ trục thích hợp và cụ thể hóa tọa độ các điểm.

a) Giả sử đường thẳng  $a$  và  $b$  lần lượt có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{a}, \vec{b}$ .

$$\text{Khi đó: } \cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow (\widehat{a, b}).$$

b) Giả sử đường thẳng  $a$  có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{a}$  và  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}$ .

$$\text{Khi đó: } \sin(\widehat{a, (P)}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow (\widehat{a, (P)}).$$

c) Giả sử mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  lần lượt có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{a}, \vec{b}$ .

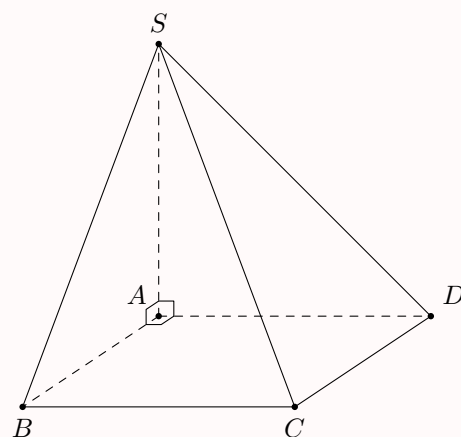
$$\text{Khi đó: } \cos(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow (\widehat{(\alpha), (\beta)}).$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

### Ví dụ 1.

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a\sqrt{3}$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a\sqrt{2}$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng

- (A)  $30^\circ$ .      (B)  $45^\circ$ .      (C)  $60^\circ$ .      (D)  $90^\circ$ .



Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

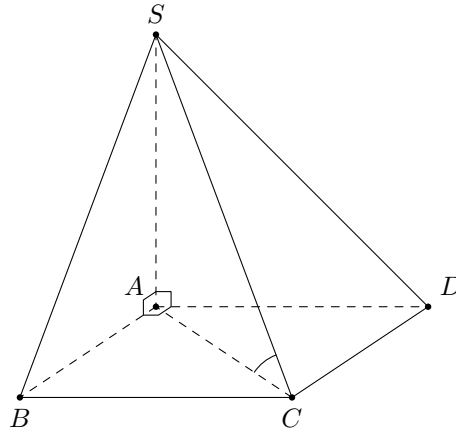
1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định hình chiếu của  $SC$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$ .

B2: Tính góc giữa  $SC$  và hình chiếu của nó.

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**



Ta có:  $SA \perp (ABCD)$  nên  $AC$  là hình chiếu của  $SC$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Do đó:  $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$ .

Xét hình vuông  $ABCD$  ta có:  $AC = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\triangle SAC$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$ .

Chọn phương án **(A)**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Cho một hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và một điểm  $S$  nằm ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho  $SA = a$  và vuông góc với  $(ABC)$ . Tính góc giữa  $SD$  và  $BC$

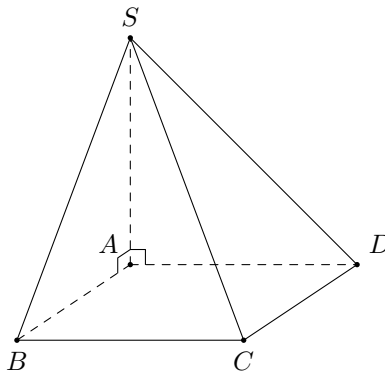
**(A)**  $60^\circ$ .

**(B)**  $90^\circ$ .

**(C)**  $45^\circ$ .

**(D)**  $30^\circ$ .

**Lời giải.**



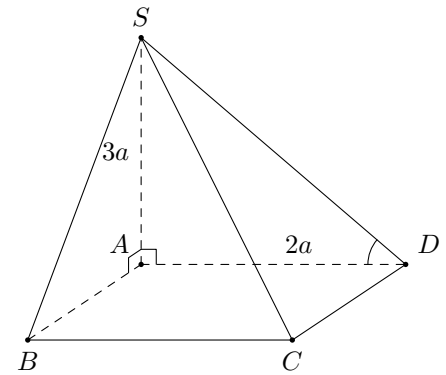
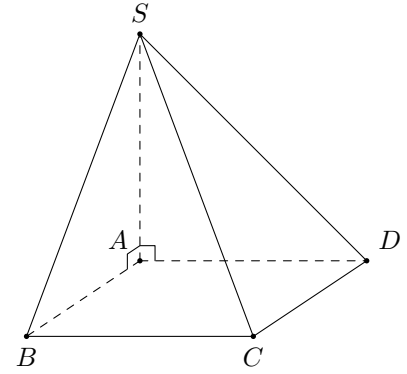
Ta có:  $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{(SD, BC)} = \widehat{(SD, AD)} = \widehat{ADS} = 45^\circ$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 2.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành với  $BC = 2a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = 3a$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$  nằm trong khoảng nào?

- (A)  $(20^\circ; 30^\circ)$ . (B)  $(30^\circ; 40^\circ)$ . (C)  $(40^\circ; 50^\circ)$ . (D)  $(50^\circ; 60^\circ)$ .



**Lời giải.**

Ta có:  $BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{(SD, BC)} = \widehat{(SD, AD)} = \widehat{SDA}$  (Do  $\triangle SAD$  vuông tại  $A$  nên  $\widehat{SDA} < 90^\circ$ ).

Xét  $\triangle SAD$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan \frac{3}{2} \approx 56^\circ$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 3.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = BD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BC, AD$ . Biết rằng  $MN = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa  $AC$  và  $BD$ .

- (A)  $45^\circ$ . (B)  $30^\circ$ . (C)  $60^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

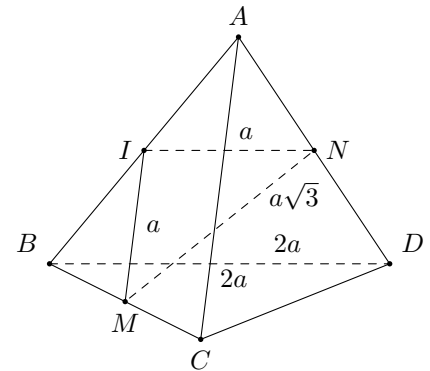
Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có  $IM = IN = a$ .

Áp dụng định lý cosin cho  $\triangle IMN$  ta có:

$$\cos \widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2 \cdot IM \cdot IN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ$ .

Vì  $IM \parallel AC, IN \parallel BD \Rightarrow \widehat{(AC, BD)} = \widehat{(IM, IN)} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .



Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ . Tính cosin góc của  $AC$  và  $BM$ .

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . (B)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{AC, BM}) &= \left| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BM}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BM}|} = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB})|}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left| a \cdot \frac{a}{2} \cos 120^\circ - a \cdot a \cdot \cos 120^\circ \right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left| -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng  $a\sqrt{2}$ . Khi đó, góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng

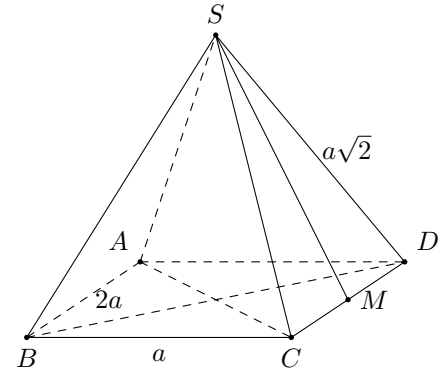
- (A)**  $45^\circ$ . **(B)**  $30^\circ$ . **(C)**  $60^\circ$ . **(D)**  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $AB \parallel CD$  nên  $(\widehat{AB, SC}) = (\widehat{CD, SC}) = \widehat{SCD}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Tam giác  $SCM$  vuông tại  $M$  và có  $SC = a\sqrt{2}$ ,  $CM = a$  nên là tam giác vuông cân tại  $M$  nên  $\widehat{SCD} = 45^\circ$ .

Vậy  $(\widehat{AB, SC}) = 45^\circ$ .



Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$  và  $AC$ . Cho  $AB = 2a$ ,  $CD = 2a\sqrt{2}$  và  $MN = a\sqrt{5}$ . Tính góc  $\varphi = (\widehat{AB, CD})$

- (A)**  $135^\circ$ . **(B)**  $60^\circ$ . **(C)**  $90^\circ$ . **(D)**  $45^\circ$ .

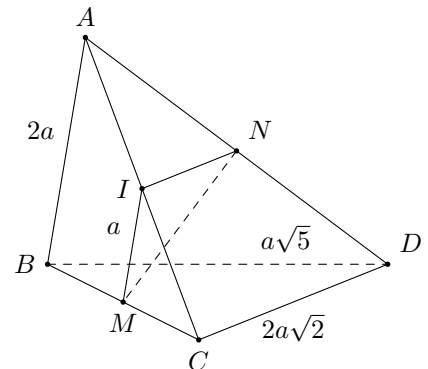
**Lời giải.**

Theo tính chất đường trung bình trong tam giác:

$$\begin{cases} IN \parallel CD; IN = \frac{1}{2}CD = a\sqrt{2} \\ IM \parallel AB; IM = \frac{1}{2}AB = a \end{cases}.$$

$\Rightarrow \varphi = (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{IM, IN})$ . Áp dụng định lý cosin ta có:

$$\cos \varphi = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2 \cdot IM \cdot IN} = \frac{a^2 + 2a^2 - 5a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{-2a^2}{2a^2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135^\circ.$$

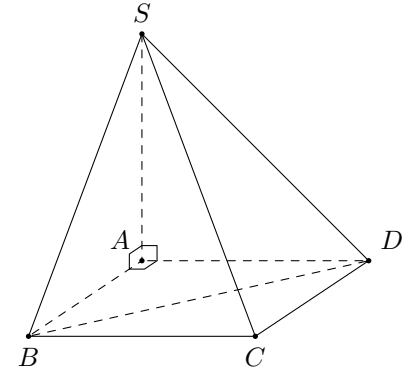


Chọn phương án **(D)**

**Câu 7.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = 2a$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$  nằm trong khoảng nào?

- (A)**  $(30^\circ; 40^\circ)$ . **(B)**  $(40^\circ; 50^\circ)$ . **(C)**  $(50^\circ; 60^\circ)$ . **(D)**  $(60^\circ; 70^\circ)$ .



**Lời giải.**

Gọi  $O = AC \cap BD$  và  $M$  là trung điểm  $SA$ .

Xét hình chữ nhật  $ABCD$ , ta có:  $OB = OA = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = \frac{2a}{2} = a$ .

Xét  $\triangle MAB$  vuông tại  $A$ , ta có:  $MB = \sqrt{AB^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\triangle MAO$  vuông tại  $A$ , ta có:  $MO = \sqrt{AO^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\triangle MBO$ , ta có:  $\cos \widehat{MOB} = \frac{OB^2 + OM^2 - BM^2}{2 \cdot OB \cdot OM} = \frac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MOB} \approx 69^\circ$ .

Ta có:  $SC \parallel MO \Rightarrow (\widehat{SC, BD}) = (\widehat{MO, BD}) = \widehat{MOB} \approx 69^\circ$  (Do  $\widehat{MOB} < 90^\circ$ ).

Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với  $A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a\sqrt{3}; 0), D(0; a\sqrt{3}; 0)$  và  $S(0; 0; 2a)$ .

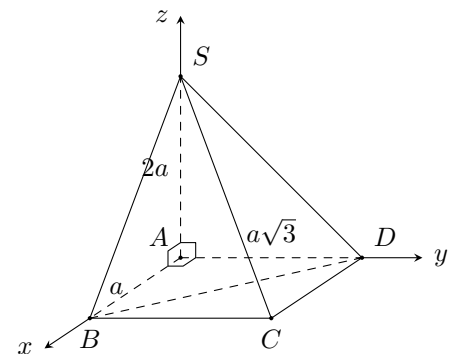
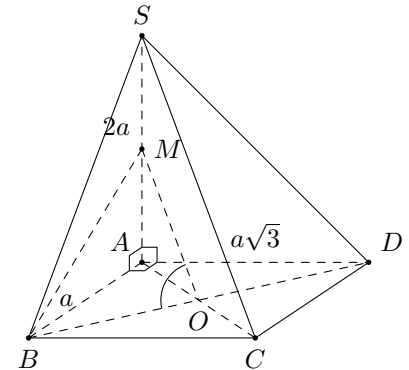
Ta có:  $\vec{SC} = (a; a\sqrt{3}; -2a) \Rightarrow SC$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (1; \sqrt{3}; -2)$ .

$\vec{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BD$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{v} = (-1; \sqrt{3}; 0)$ .

Suy ra:  $\cos(\widehat{SC, BD}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

Vậy  $(\widehat{SC, BD}) \approx 69^\circ$ .

Chọn phương án **(D)**



**Câu 8.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có các  $\triangle ABC$  và  $\triangle SBC$  là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Góc giữa đường thẳng  $SA$  và  $(ABC)$  bằng

- (A)**  $45^\circ$ . **(B)**  $75^\circ$ . **(C)**  $60^\circ$ . **(D)**  $30^\circ$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có  $(ABC) \perp (SBC)$ .

Trong mặt phẳng  $(SBC)$  kẻ  $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$  nên  $AH$  là hình chiếu của  $SA$  trên  $(ABC)$ . Do đó,  $\widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH}$ .

Giả sử  $AB = a$ .

Ta có:  $\triangle SBC$  và  $\triangle ABC$  là tam giác đều nên  $H$  là trung điểm của  $BC$  và  $AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Xét tam giác vuông  $SHA$  ta có  $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = 1$ .

$\Rightarrow \widehat{SAH} = 45^\circ$ .

Vậy  $\widehat{(SA, (ABC))} = 45^\circ$ .

Chọn phương án **A**

### Câu 9.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a\sqrt{2}$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng

- A**  $30^\circ$ .      **B**  $45^\circ$ .      **C**  $60^\circ$ .      **D**  $90^\circ$ .

### Lời giải.

Ta có:

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$  nên  $SB$  là hình chiếu của  $SC$  trên mặt phẳng  $(SAB)$ .

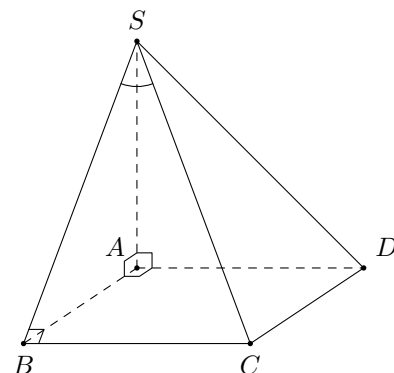
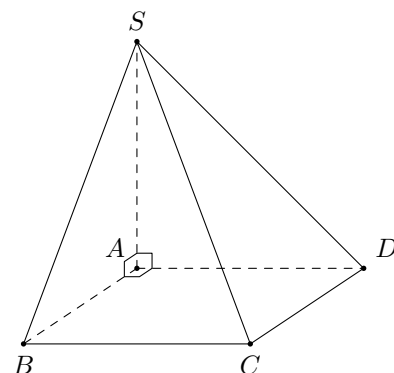
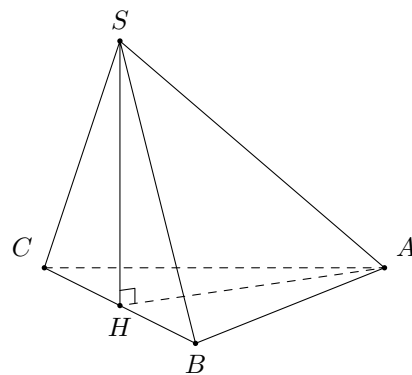
Do đó:  $\widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{BSC}$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Xét  $\triangle SBC$  vuông tại  $B$ , ta có:

$$\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy: } \widehat{BSC} = 30^\circ.$$



Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với  $A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0)$  và  $S(0; 0; a\sqrt{2})$ .

Ta có:  $(SAB): y = 0 \Rightarrow$  véc-tơ pháp tuyến của  $(SAB)$  là  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .

$\vec{SC} = (a; a; -a\sqrt{2}) \Rightarrow SC$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 1; -\sqrt{2})$ .

$$\text{Suy ra: } \sin(\widehat{SC, (SAB)}) = \frac{|\vec{j} \cdot \vec{u}|}{|\vec{j}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{2}.$$

Vậy:  $\widehat{SC, (SAB)} = 30^\circ$ .

Chọn phương án **(A)**

### Câu 10.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a\sqrt{3}$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng

- (A)**  $30^\circ$ .      **(B)**  $45^\circ$ .      **(C)**  $60^\circ$ .      **(D)**  $90^\circ$ .

### Lời giải.

Ta có:  $AD \perp (SAB)$  nên  $SA$  là hình chiếu của  $SD$  trên mặt phẳng  $(SAB)$ .

Do đó:  $\widehat{SD, (SAB)} = \widehat{SD, SA} = \widehat{ASD}$ .

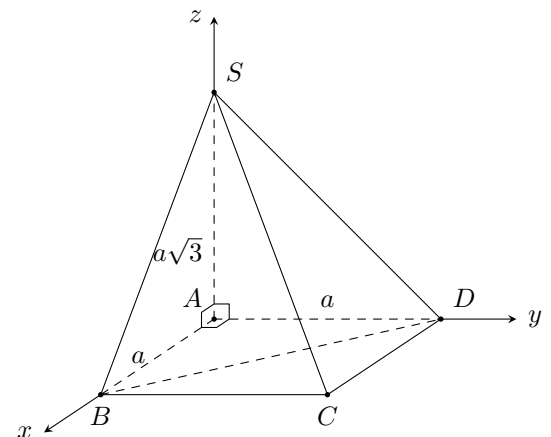
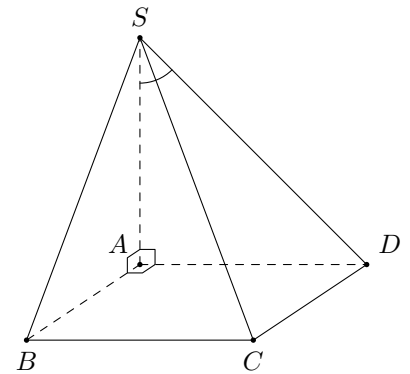
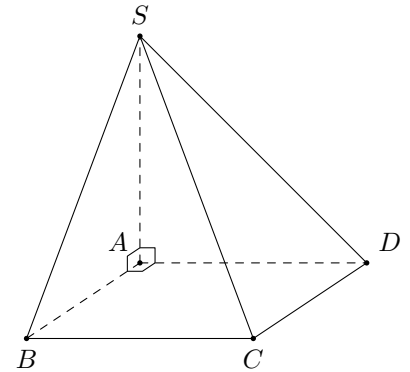
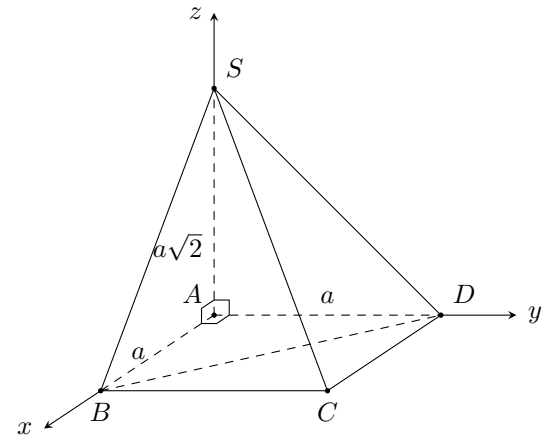
Xét  $\triangle SAD$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ$ .

Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với  $A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0)$  và  $S(0; 0; a\sqrt{3})$ .

Ta có:  $(SAB): y = 0 \Rightarrow$  véc-tơ pháp tuyến của  $(SAB)$  là  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .

$\vec{SD} = (0; a; -a\sqrt{3}) \Rightarrow SD$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (0; 1; -\sqrt{3})$ .

$$\text{Suy ra: } \sin(\widehat{SD, (SAB)}) = \frac{|\vec{j} \cdot \vec{u}|}{|\vec{j}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SD, (SAB)} = 30^\circ.$$



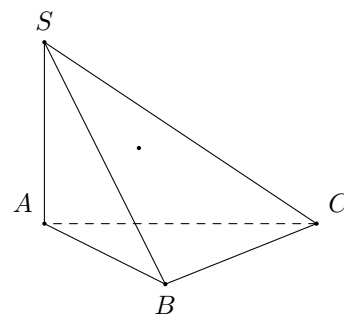
Chọn phương án **A**

**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = a$ ,  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính góc giữa  $SB$  và  $(ABC)$

- A**  $30^\circ$ . **B**  $60^\circ$ . **C**  $45^\circ$ . **D**  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có  $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$  là hình chiếu của  $SB$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .  
 $\Rightarrow \varphi = \widehat{ABS} = \widehat{(SB, AB)} = 45^\circ$ .



Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = a$ ,  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $\beta$  là góc giữa  $SC$  và mặt phẳng  $(SAB)$ . Khi đó,  $\tan \beta$  bằng

- A**  $\sqrt{\frac{3}{5}}$ . **B**  $\sqrt{\frac{5}{3}}$ . **C**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **D**  $\sqrt{2}$ .

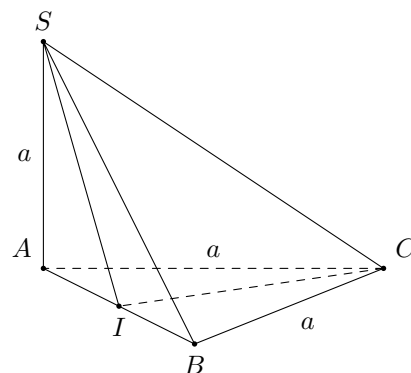
**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có:  $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

$\Rightarrow SI$  là hình chiếu của  $SC$  trên mặt phẳng  $(SAB)$ .

$\Rightarrow \widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SI)} = \widehat{CSI} = \beta$

$$\Rightarrow \tan \beta = \tan \widehat{CSI} = \frac{CI}{SI} = \frac{CI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$



Chọn phương án **A**

**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với  $(ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{6}$ . Tính  $\sin$  của góc tạo bởi  $AC$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

- A**  $\frac{1}{3}$ . **B**  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ . **C**  $\frac{1}{\sqrt{7}}$ . **D**  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ .

**Lời giải.**

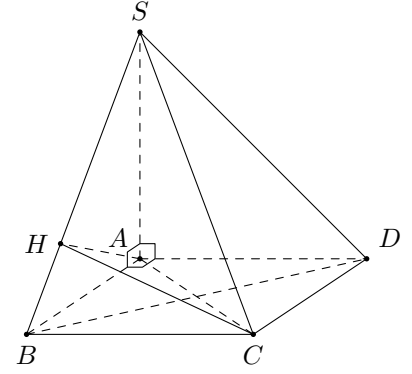


Kẻ  $AH \perp SB \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow CH$  là hình chiếu của  $AC$  lên mặt phẳng  $(SBC) \Rightarrow \widehat{(AC, (SBC))} = \widehat{(AC, HC)} = \widehat{ACH}$ .

Tam giác  $SAB$  vuông  $\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6} \cdot a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ .

Vì  $\triangle AHC$  vuông tại  $H \Rightarrow \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ .

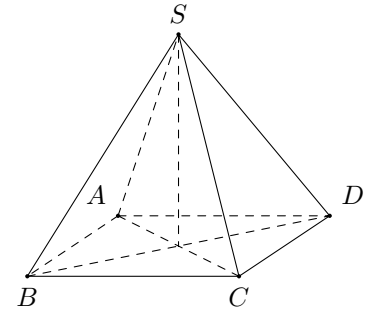


Chọn phương án **D**

#### Câu 14.

Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy  $a\sqrt{2}$ , cạnh bên  $2a$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng

- (A)**  $30^\circ$ . **(B)**  $45^\circ$ . **(C)**  $60^\circ$ . **(D)**  $90^\circ$ .



#### Lời giải.

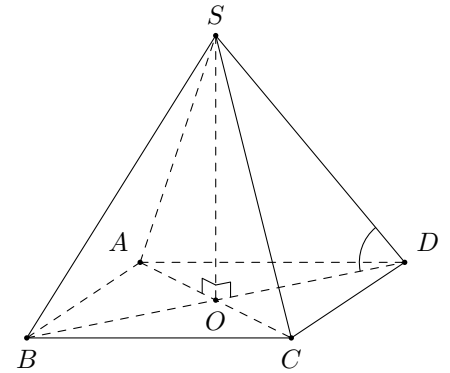
Ta có: góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc giữa  $SD$  và  $(ABCD)$ .  
Gọi  $O = AC \cap BD$ . Vì  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow OD$  là hình chiếu của  $SD$  trên  $(ABCD)$ .

Do đó:  $\widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{(SD, OD)} = \widehat{SDO}$ .

Xét hình vuông  $ABCD$  ta có:  $OD = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = a$ .

Xét  $\triangle SOD$  vuông tại  $O$ , ta có:  $\cos \widehat{SDO} = \frac{OD}{SD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDO} = 60^\circ$ .



Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ.

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Vì  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD)$ .

Ta có:  $AC = BD = AB\sqrt{2} = 2a$  và  $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ . Chọn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ với  $O(0;0;0)$ ,  $C(a;0;0)$ ,  $D(0;a;0)$  và  $S(0;0;a\sqrt{3})$ .

Ta có:  $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{k} = (0;0;1)$ .

$\vec{SD} = (0;a;-a\sqrt{3}) \Rightarrow SD$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (0;1;-\sqrt{3})$ .

$$\text{Suy ra: } \sin(\widehat{SD, (ABCD)}) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{u}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$(\widehat{SD, (ABCD)}) = 60^\circ.$$

Chọn phương án **C**

### Câu 15.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  với  $AD = 2AB = 2BC = 2a$ ;  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = 2a$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng

- A**  $30^\circ$ .      **B**  $45^\circ$ .      **C**  $60^\circ$ .      **D**  $90^\circ$ .

### Lời giải.

Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Ta có:  $\triangle ACM$  và  $\triangle DCM$  vuông cân tại  $M$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACM} + \widehat{DCM} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AC \text{ mà } CD \perp SA \text{ nên } CD \perp (SAC)$$

$\Rightarrow SC$  là hình chiếu của  $SD$  trên mặt phẳng  $(SAC)$ .

$$\text{Do đó: } (\widehat{SD, (SAC)}) = (\widehat{SD, SC}) = \widehat{CSD}.$$

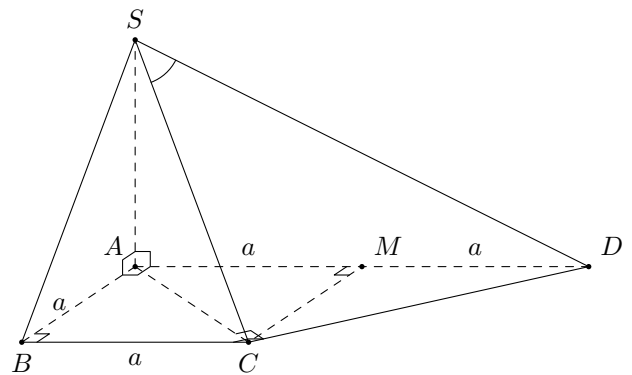
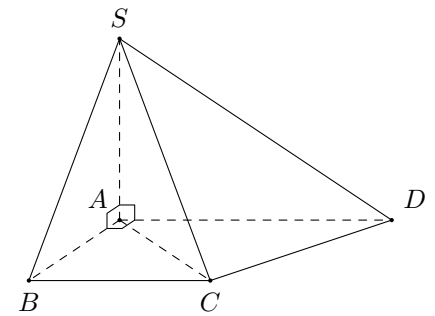
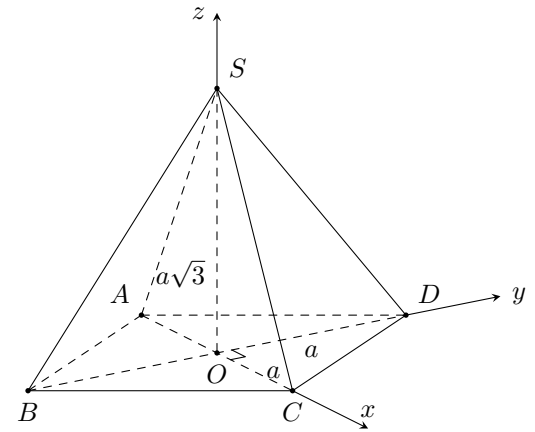
Xét  $\triangle ACD$  vuông cân tại  $C$ , ta có:  $AC = CD = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\triangle SAC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}.$$

Xét  $\triangle SCD$  vuông tại  $C$ , ta có:

$$\tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSD} = 30^\circ.$$



Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với  $A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; 2a; 0)$  và  $S(0; 0; 2a)$ .

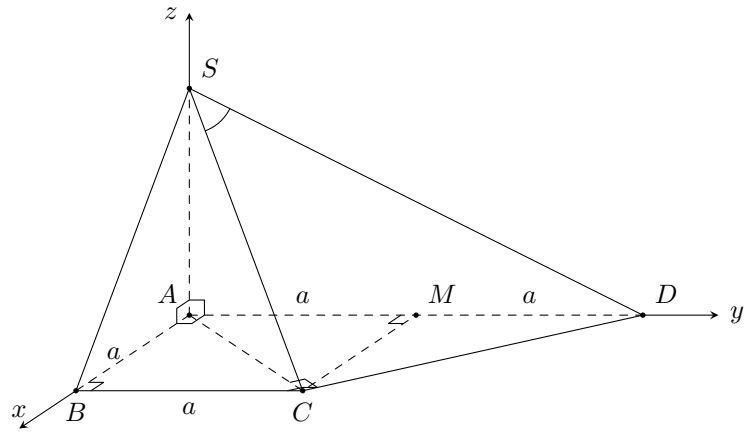
Ta có:  $\overrightarrow{SD} = (0; 2a; -2a) \Rightarrow SD$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (0; 1; -1)$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AS} = (0; 0; 2a) \\ \overrightarrow{AC} = (a; a; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = \begin{pmatrix} -2a^2; 2a^2; 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (SAC)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-1; 1; 0)$ .

$$\text{Suy ra: } \sin(\widehat{SD, (SAC)}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (SD, (SAC)) = 30^\circ.$$

Chọn phương án **(A)**



**Câu 16.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  cạnh đáy bằng  $a$  và  $SA = SB = SC = SD = a$ . Khi đó, cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  bằng

**(A)**  $\frac{1}{4}$ .

**(B)**  $\frac{1}{3}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**(D)**  $-\frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm  $SA$ .

Do tam giác  $SAD$  và  $SAB$  đều nên  $\begin{cases} BI \perp SA \\ DI \perp SA \end{cases}$

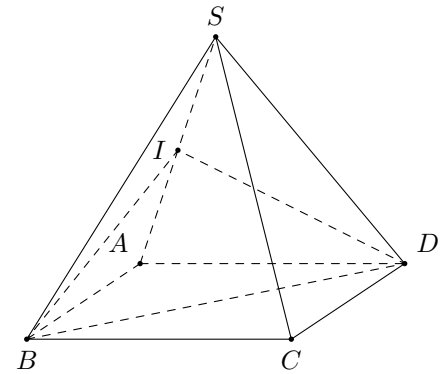
$$\Rightarrow (\widehat{SAB}, \widehat{SAD}) = (\widehat{BI, DI}).$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $BID$  ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BID} &= \frac{IB^2 + ID^2 - BD^2}{2IB \cdot ID} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{SAB}, \widehat{SAD}) = \frac{1}{3}.$$

Chọn phương án **(B)**



**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ , trên đường thẳng  $d$  vuông góc với  $(ABC)$  tại điểm  $A$  ta lấy một điểm  $D$  sao cho  $\triangle DBC$  đều. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(DBC)$  nằm trong khoảng nào?

**(A)**  $(40^\circ; 50^\circ)$ .

**(B)**  $(50^\circ; 60^\circ)$ .

**(C)**  $(60^\circ; 70^\circ)$ .

**(D)**  $(70^\circ; 80^\circ)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .

Ta có:  $\begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DMA).$

Mặt khác:  $\begin{cases} (ABD) \cap (DBC) = BC \\ (DMA) \perp BC \\ (DMA) \cap (ABC) = AM \\ (DMA) \cap (DBC) = DM \end{cases}.$

$\Rightarrow ((ABC), (DBC)) = (AM, DM) = \widehat{DMA}.$

Ta có:  $AM = \frac{BC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, DM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Xét  $\triangle ADM$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\cos \widehat{AMD} = \frac{AM}{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ.$

Cách khác:

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(DBC)$ . Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác.

Ta có:  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} \cdot \cos \varphi.$

Mà:  $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Mặt khác:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a^2$

$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ.$

Chọn phương án **(B)**

### Câu 18.

Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh  $2a$ , cạnh bên  $a\sqrt{3}$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- (A)**  $30^\circ$ . **(B)**  $45^\circ$ . **(C)**  $60^\circ$ . **(D)**  $90^\circ$ .

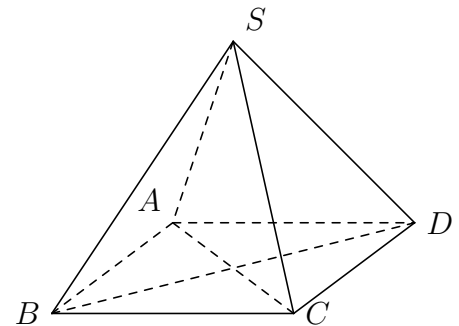
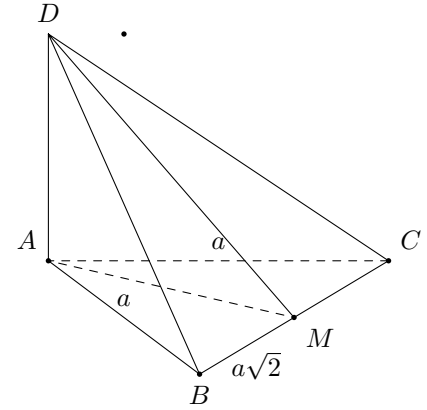
### Lời giải.

Ta có: góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc giữa  $(SCD)$  và  $(ABCD)$ .

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Vì  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD)$ .

Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ . Ta có:  $\begin{cases} CD \perp SM \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM).$

Do đó:



$$\begin{cases} CD \perp (SOM) \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SOM) \cap (SCD) = SM \\ (SOM) \cap (ABCD) = OM \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{SM, OM}) = \widehat{SMO}.$$

Xét hình vuông  $ABCD$  ta có:

$$OM = a \text{ và } OD = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Xét  $\triangle SOD$  vuông tại  $O$ , ta có:

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a.$$

Xét  $\triangle SOM$  vuông tại  $O$ , ta có:

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^\circ.$$

Cách khác:

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Vì  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD)$ .

Ta có:  $AC = BD = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$  và  $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$ . Chọn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ với  $O(0; 0; 0)$ ,  $C(a\sqrt{2}; 0; 0)$ ,  $D(0; a\sqrt{2}; 0)$  và  $S(0; 0; a)$ .

Ta có:  $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

$(SCD): \frac{x}{a\sqrt{2}} + \frac{y}{a\sqrt{2}} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - a\sqrt{2} = 0$   
 $\Rightarrow (SCD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 1; \sqrt{2})$ .

$$\text{Suy ra: } \cos((SCD), (ABCD)) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = 45^\circ.$$

Chọn phương án **B**

### Câu 19.

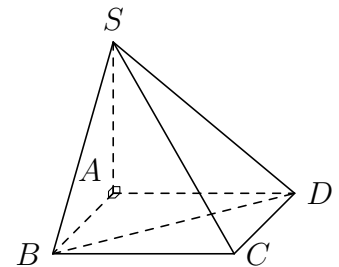
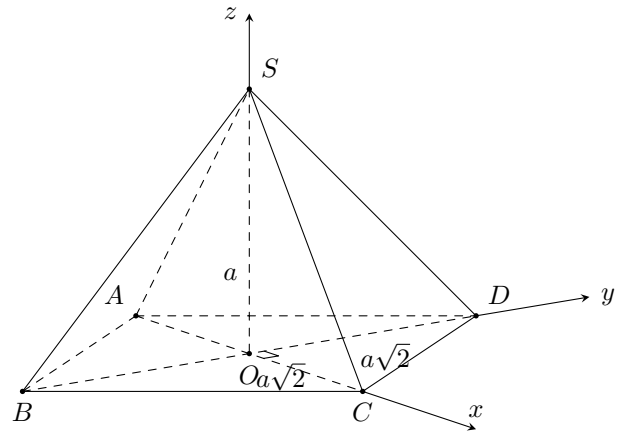
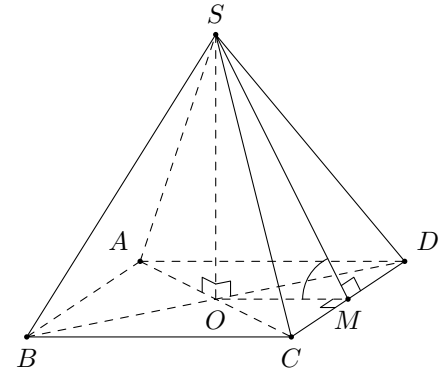
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a\sqrt{2}$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a\sqrt{3}$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABCD)$  bằng

- (A)**  $30^\circ$ .      **(B)**  $45^\circ$ .      **(C)**  $60^\circ$ .      **(D)**  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Ta có:  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$

Do đó:



$$\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBD), (ABCD)) \\ = (\widehat{SO, AC}) = \widehat{SOA}.$$

$$\text{Xét hình vuông } ABCD \text{ ta có: } OA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = a.$$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy: } \widehat{SOA} = 60^\circ.$$

Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với

$$A(0; 0; 0), B(a\sqrt{2}; 0; 0), D(0; a\sqrt{2}; 0), S(0; 0; a\sqrt{3}).$$

Ta có:  $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

$$(SBD): \frac{x}{a\sqrt{2}} + \frac{y}{a\sqrt{2}} + \frac{z}{a\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z - a\sqrt{6} = 0$$

$\Rightarrow (SBD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{2}).$$

$$\text{Suy ra: } \cos((SBD), (ABCD)) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = 60^\circ.$$

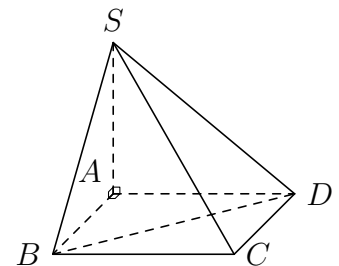
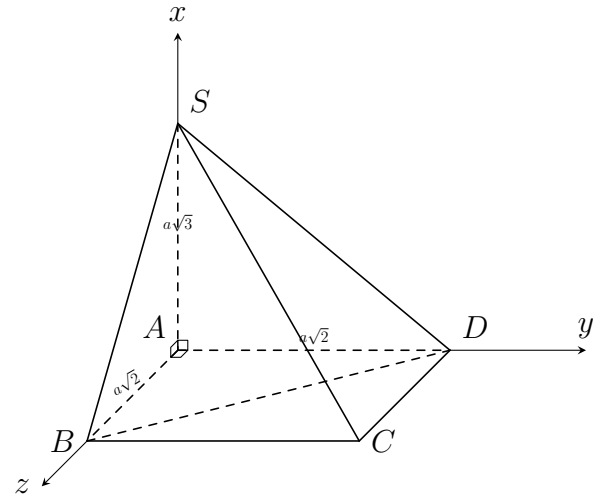
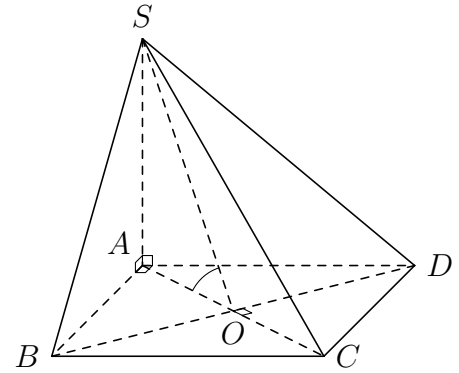
Chọn phương án **C**

### Câu 20.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = 2a, AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = a$  (minh họa như hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABCD)$  bằng

- (A)**  $30^\circ$ . **(B)**  $45^\circ$ . **(C)**  $60^\circ$ . **(D)**  $90^\circ$ .

**Lời giải.**



Vẽ  $AM \perp BD$  tại  $M$ . Ta có:  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AM \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM).$

Do đó:  $\begin{cases} BD \perp (SAM) \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAM) \cap (SBD) = SM \\ (SAM) \cap (ABCD) = AM. \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBD), (ABCD))$

$= (\widehat{SM, AM}) = \widehat{SMA}.$

Xét  $\triangle ABD$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{3}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = a.$

Xét  $\triangle SAM$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1$

$\Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ.$

Cách khác: Sử dụng phương pháp tọa độ Chọn hệ trục  $Axyz$  như hình vẽ với

$A(0;0;0), B(2a;0;0), D\left(0; \frac{2a\sqrt{3}}{3}; 0\right)$  và  $S(0;0;a).$

Ta có:  $(ABCD): z = 0 \Rightarrow (ABCD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{k} = (0;0;1).$

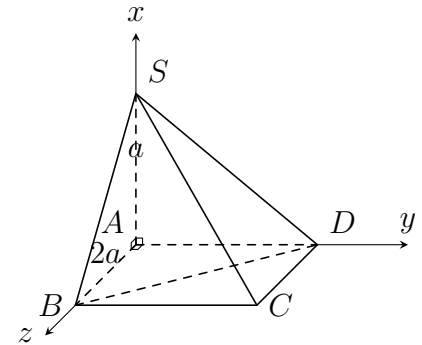
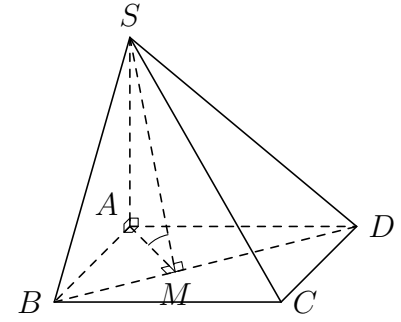
$(SBD): \frac{x}{2a} + \frac{y}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 2z - 2a = 0$

$\Rightarrow (SBD)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; \sqrt{3}; 2).$

Suy ra:  $\cos((SBD), (ABCD)) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = 45^\circ.$

Chọn phương án **B**



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. D  | 3. C  | 4. B  | 5. A  | 6. D  | 7. D  | 8. A  | 9. A  | 10. A |
| 11. C | 12. A | 13. D | 14. C | 15. A | 16. B | 17. B | 18. B | 19. C | 20. B |



**DẠNG 18.****ĐẾM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Dựa vào bảng biến thiên:

- Nếu  $x$  qua điểm  $x_0$  mà  $f(x)$  đổi từ dấu (+) sang dấu (-) thì  $x_0$  là điểm cực đại.
  - Nếu  $x$  qua điểm  $x_0$  mà  $f(x)$  đổi từ dấu (-) sang dấu (+) thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.
- (số lần đổi dấu của  $f(x)$  chính bằng số điểm cực trị của hàm số).

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hàm số  $f(x)$ , bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

|         |           |      |     |     |           |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng xét dấu

|         |           |      |     |     |           |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

Ta thấy:

- Trên bảng biến thiên  $f'(x)$  đổi dấu 2 lần, khi đi qua các giá trị  $x = -1$  và  $x = 1$  suy ra hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ

|      |           |       |      |           |
|------|-----------|-------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0     | 1    | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | - 0 + |      |           |
| $y$  | $-\infty$ | ↗ 2 ↘ | -3 ↗ | $+\infty$ |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số chỉ có giá trị nhỏ nhất không có giá trị lớn nhất.  
 (B) Hàm số có một điểm cực trị.  
 (C) Hàm số có hai điểm cực trị.  
 (D) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

**Lời giải.**

Tại  $x = 0$  và  $x = 1$  ta có  $y'$  đổi dấu và  $y$  tồn tại nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

|      |           |         |     |           |
|------|-----------|---------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 2       | 6   | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 - 0 + |     |           |
| $y$  | $-\infty$ | ↗ 6 ↘   | 1 ↗ | $+\infty$ |

- (A) Hàm số có giá trị cực đại bằng 2. (B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.  
 (C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$ . (D) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực tiểu  $y_{CT} = 1$  đạt tại  $x_{CT} = 6$ .

Đáp án hàm số có giá trị cực đại bằng 2 sai vì hàm số có giá trị cực đại bằng 6.

Đáp án hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$  sai vì hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$  và  $(6; +\infty)$ , không được dùng dấu  $\cup$ .

Đáp án Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$  sai vì hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 6$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

|      |                       |                                               |       |       |       |       |           |
|------|-----------------------|-----------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $x$  | $-\infty$             | $x_1$                                         | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $+\infty$ |
| $y'$ | +                     | - 0 + 0 +                                     | - 0 + |       |       |       |           |
| $y$  | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↘ $y_1$ ↗ $y_2$ ↘ $y_3$ ↗ $+\infty$ |       |       |       |       |           |

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 5.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ .

Theo định lí về điều kiện đủ để hàm số có cực trị và dựa vào bảng biến thiên ta có các điểm cực trị của hàm số là  $x_2$ ;  $x_4$ ;  $x_5$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

|      |           |         |        |     |           |
|------|-----------|---------|--------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$    | $0$    | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$     | $-$    | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $f(-2)$ | $f(0)$ |     | $+\infty$ |

(A) 3.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 2.

**Lời giải.**

Ta thấy:

- Trên bảng biến thiên  $f'(x)$  đổi dấu 2 lần, khi đi qua các giá trị  $x = -2$  và  $x = 0$  suy ra hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn phương án (D)

**Câu 5.**

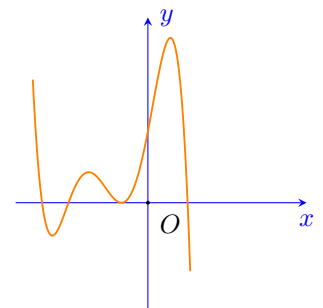
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 6.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị  $y = f'(x)$  ta thấy phương trình  $f'(x) = 0$  có 4 nghiệm nhưng giá trị  $f'(x)$  chỉ đổi dấu 3 lần.

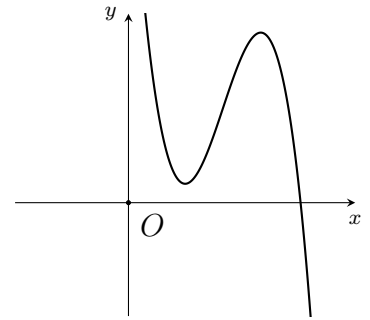
Vậy hàm số  $y = f(x)$  có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án (D)

**Câu 6.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

- (A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.



**Lời giải.**

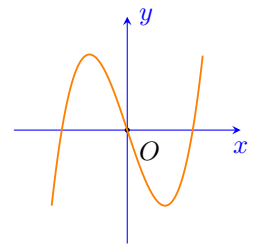
Từ đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(x)$  đổi dấu một lần (cắt trục  $Ox$  tại một điểm) do đó số điểm cực trị của hàm số  $f(x)$  là 1.

Chọn phương án (B)

**Câu 7.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hình bên. Hàm số  $y = f(|x|)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 5.

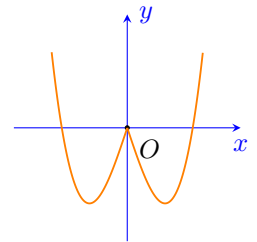


**Lời giải.**

Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục  $Oy$ .

Lấy đối xứng phần đồ thị nằm trên phải trục  $Oy$  qua  $Oy$  ta được đồ thị hàm  $y = f(|x|)$ .

Vậy hàm số  $y = f(|x|)$  có 3 cực trị.

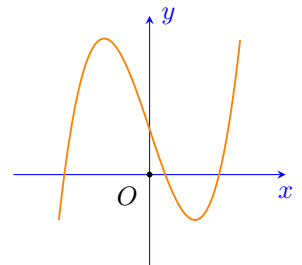


Chọn phương án (A)

**Câu 8.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

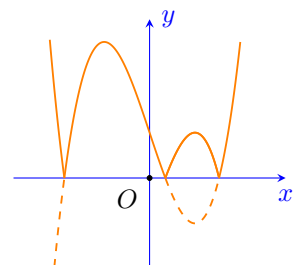
- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.



**Lời giải.**

Ta có đồ thị hàm  $y = |f(x)|$  như hình vẽ sau:

Từ đồ thị ta thấy ngay đồ thị hàm số có năm điểm cực trị.



18. ĐẾM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN *PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA LẦN 1*

Chọn phương án **A**

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $4$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $6$  | $2$ | $+\infty$ |     |

Đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Ta có:  $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  nên bảng biến thiên của hàm số  $y = f(|x|)$  là

|      |           |      |        |     |           |     |
|------|-----------|------|--------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $0$    | $4$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$    | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ |      | $f(0)$ |     | $+\infty$ |     |
|      |           | $2$  |        | $2$ |           |     |

Suy ra hàm số  $y = f(|x|)$  có ba điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 10.**

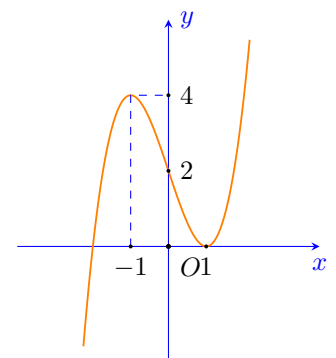
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x) - 5x$  là

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 4.

**(D)** 1.

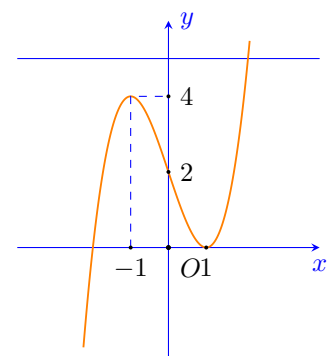


**Lời giải.**

Ta có:  $y = f(x) - 5x$ ;  $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 5$ .

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình  $f(x) = 5$  có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình  $y = 0$  có nghiệm duy nhất và  $y$  đổi dấu khi qua nghiệm này.



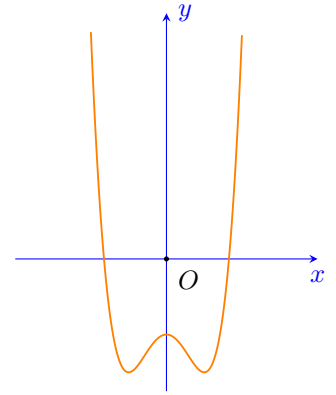
Vậy hàm số  $y = f(x) - 5x$  có một điểm cực trị.

Chọn phương án **(D)**

### Câu 11.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  là

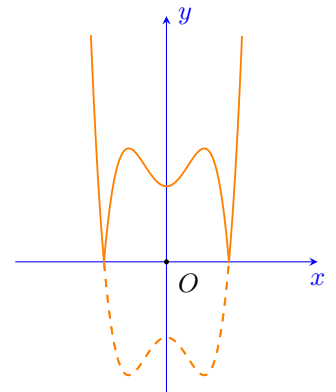
- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 5.



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , ta suy ra đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$  như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên  $Ox$  của hàm số  $y = f(x)$ .
- Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới  $Ox$  của hàm số  $y = f(x)$  qua  $Ox$  đồng thời bỏ phần đồ thị phía dưới trục  $Ox$ .



Từ đó ta có đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$  như hình bên.

Dựa vào đồ thị, ta kết luận đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 12.** Cho hàm số nào  $y = f(x)$  có  $f'(x) = x^2(x-1)^3(3-x)(x-5)$ . Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

### Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = x^2(x-1)^3(3-x)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |           |   |   |   |   |   |   |           |   |   |
|------|-----------|---|---|---|---|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 |   | 1 | 3 |   | 5 | $+\infty$ |   |   |
| $y'$ |           | + | 0 | + | 0 | - | 0 | +         | 0 | - |
| $y$  |           |   |   |   |   |   |   |           |   |   |

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^4 - x^2)(x + 2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số là

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 1.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

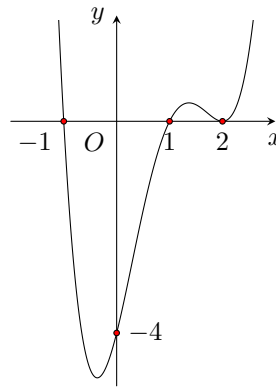
Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^2)(x + 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1)(x + 2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Trong đó  $x = 0$  là nghiệm kép. Vậy số điểm cực trị của hàm số là 3.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là



**(A)** 2.

**(B)** 4.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

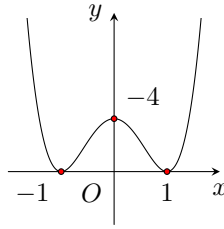
Từ đồ thị của hàm số đã cho, ta nhận thấy dấu của đạo hàm như bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  dưới đây

| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $y'$ | +         | 0    | -   | 0   | +         |
| $y$  |           |      |     |     |           |

Vậy hàm số  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị của hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

(A) 4.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 3.

**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ , và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm phía trên trục hoành.

Ta có bảng biến thiên

|      |           |                                                                                    |     |           |           |
|------|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$                                                                               | $1$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $+$       | $0$                                                                                | $+$ | $0$       | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ |  |     |           | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $y = f(x)$  không có cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

|      |           |      |      |      |           |           |
|------|-----------|------|------|------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$  | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $+$  | $0$       | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-1$ | $-1$ | $3$       | $-\infty$ |

(A) Có ba điểm.

(B) Có hai điểm.

(C) Có một điểm.

(D) Có bốn điểm.

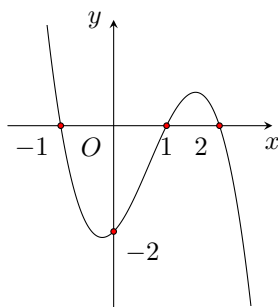
**Lời giải.**

Từ BBT thấy rằng  $y'$  đổi dấu khi qua  $x = -1$  và  $x = 1$  nên  $x = -1$  và  $x = 1$  là hai điểm cực trị. Giá trị của hàm số tại  $x = 0$  không xác định nên  $x = 0$  không là điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình dưới đây.





Số điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$ .

Bảng biến thiên

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $+$       |
| $y$  |           |      |     |     |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực đại.

Chọn phương án (D)

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Giá trị cực đại của hàm số bằng

|        |           |      |     |           |
|--------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |      |     |           |

(A) -2.

(B) 4.

(C) 3.

(D) -1.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại  $x = -2$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên.

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $y$  |           |      |     |     |           |

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

- (A)  $x = 0$ . (B)  $(-1; -4)$ . (C)  $(0; -3)$ . (D)  $(1; -4)$ .

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên, ta thấy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $(0; -3)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |                |     |           |
|------|-----------|------|----------------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$            | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$            | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $0$  | $-\frac{5}{2}$ | $0$ | $-\infty$ |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- (A)  $-\frac{5}{2}$ . (B)  $1$ . (C)  $0$ . (D)  $-1$ .

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng  $-\frac{5}{2}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- (A) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 4$ . (B) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .  
(C) Hàm số đạt cực đại tại  $x = -2$ . (D) Hàm số không có cực trị.

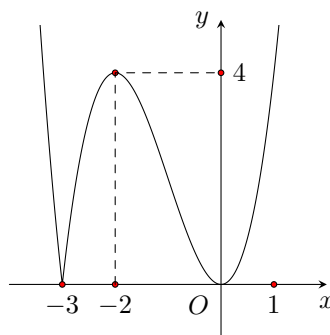
**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy  $y'(-2) = 0$  và  $y'$  đổi dấu từ dương sang âm khi qua  $x = -2$ .

Vậy hàm số đạt cực đại tại  $x = -2$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Trên đoạn  $[-3; 1]$  hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?



(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

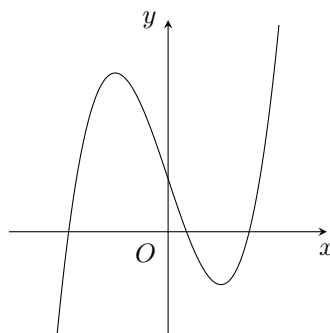
**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy, trên đoạn  $[-3; 1]$ , hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

**Nhận xét:** Câu này rất dễ đánh lừa học sinh vì đọc lướt nhanh và nhìn đồ thị, học sinh ngộ nhận tại  $x = -3$  hàm số cũng đạt cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 2.

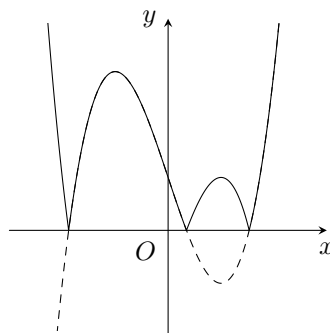
(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

**Lời giải.**

Vẽ lại đồ thị hàm  $y = |f(x)|$  như sau:



Từ đồ thị ta thấy, hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án (D)

 **BẢNG ĐÁP ÁN** 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. B  | 3. C  | 4. D  | 5. D  | 6. B  | 7. A  | 8. A  | 9. A  | 10. D |
| 11. D | 12. B | 13. A | 14. A | 15. B | 16. B | 17. D | 18. C | 19. C | 20. A |
| 21. C | 22. B | 23. D |       |       |       |       |       |       |       |

## DẠNG 19. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .  
Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f(x_i) = 0, x_i \in [a; b]$ . Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  là  $M = \max \{f(a), f(b), f(x_i)\}$ .
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .  
Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f(x_i) = 0, x_i \in [a; b]$ . Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  là  $m = \min \{f(a), f(b), f(x_i)\}$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\max_{[a; b]} f(x) = f(b); \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\max_{[a; b]} f(x) = f(a); \min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1. (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020)** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng

(A) 1.

(B) 37.

(C) 33.

(D) 12.

#### Phân tích hướng dẫn giải

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số đa thức.

b) **HƯỚNG GIẢI:**

Bước 1: Hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Tính  $f(x)$ , cho  $f(x) = 0$  tìm các nghiệm  $x_i \in [a; b]$ .

Bước 2: Tính  $f(a), f(b), f(x_i)$ . Tìm  $M = \max \{f(a), f(b), f(x_i)\}$ .

Bước 3: Kết luận giá trị lớn nhất của hàm số.

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

#### Lời giải.

Hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  liên tục trên đoạn  $[-1; 2]$ .

Ta có:  $f'(x) = -4x^3 + 24x = -4x(x^2 - 6)$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin [-1; 2] \\ x = 0 \in [-1; 2] \\ x = \sqrt{6} \notin [-1; 2]. \end{cases}$$

$$f(-1) = 12; f(0) = 1; f(2) = 33.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 2]} f(x) = 33.$$

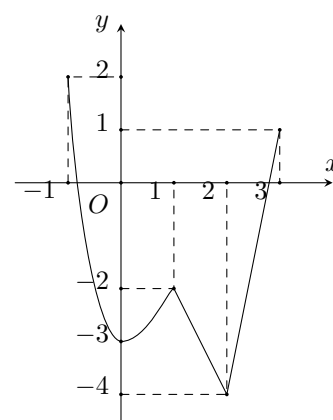
Chọn phương án **C**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

#### Câu 1.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M - m$  là

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 5.



#### Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số trên đoạn  $[-1; 3]$  ta thấy

Hàm số đạt GTLN là  $M = 2$  tại  $x = -1$  và đạt GTNN là  $m = -4$  tại  $x = 2$ .

Khi đó  $M - m = 2 - (-4) = 6$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 4$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

- (A)  $\min_{[0; 2]} y = 2$ . (B)  $\min_{[0; 2]} y = 0$ . (C)  $\min_{[0; 2]} y = 1$ . (D)  $\min_{[0; 2]} y = 4$ .

#### Lời giải.

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[0; 2]$ .

$$y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Ta có  $y(0) = 4, y(2) = 6, y(1) = 2$ .

Do đó  $\min_{[0; 2]} y = 2$  đạt được khi  $x = 1$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 3.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 18$  trên đoạn  $[-1; 3]$  bằng

- (A) 2. (B) 11. (C) 27. (D) 1.

#### Lời giải.

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$ .

Ta có:  $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 3] \\ x = 2 \in [-1; 3] \\ x = -2 \notin [-1; 3]. \end{cases}$$

$$y(-1) = 11, y(0) = 18, y(3) = 27, y(2) = 2.$$

Do đó:  $\min_{[-1;3]} y = y(2) = 2$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 18$  trên đoạn  $[-1; 3]$  bằng 2.

Chọn phương án **A**

**Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$  trên đoạn  $[0; 3]$ .

**A**  $\min_{[0;3]} y = 0$ .

**B**  $\min_{[0;3]} y = -\frac{3}{7}$ .

**C**  $\min_{[0;3]} y = -4$ .

**D**  $\min_{[0;3]} y = -1$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[0; 3]$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = -2 \notin [0; 3]. \end{cases}$$

$$f(0) = 0, f(3) = \frac{-3}{7}, f(1) = -1 \text{ suy ra } \min_{[0;3]} y = y(1) = -1.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ . Kí hiệu  $M = \max_{x \in [0;2]} f(x)$ ,  $m = \min_{x \in [0;2]} f(x)$ . Khi đó  $M+m$  bằng

**A**  $\frac{-4}{3}$ .

**B**  $\frac{-2}{3}$ .

**C**  $\frac{2}{3}$ .

**D** 1.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[0; 2]$ .

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}.$$

Từ đó  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  là hàm số liên tục và đồng biến trên  $[0; 2]$ .

$$\text{Suy ra } M = \max_{x \in [0;2]} f(x) = f(2) = \frac{1}{3}, m = \min_{x \in [0;2]} f(x) = f(0) = -1.$$

$$\text{Vậy } M+m = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 6.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  trên đoạn  $[0; 2]$ . Khi đó tổng  $M+m$  bằng

**A** 4.

**B** 16.

**C** 2.

**D** 6.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[0; 2]$ .

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2]. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } M = \max_{x \in [0; 2]} y = y(2) = 4, m = \min_{x \in [0; 2]} y = y(1) = 0.$$

$$\text{Vậy } M + m = 4.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x - e^{2x}$  trên đoạn  $[-1; 1]$ .

$$\text{(A)} \max_{[-1; 1]} y = \frac{-(\ln 2 + 1)}{2}.$$

$$\text{(B)} \max_{[-1; 1]} y = 1 - e^2.$$

$$\text{(C)} \max_{[-1; 1]} y = -(1 + e^{-2}).$$

$$\text{(D)} \max_{[-1; 1]} y = \frac{\ln 2 + 1}{2}.$$

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên  $[-1; 1]$ .

$$\text{Ta có: } y' = 1 - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \in [-1; 1].$$

$$y(-1) = -1 - e^{-2}; y\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{-(\ln 2 + 1)}{2}; y(1) = 1 - e^2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 1]} y = \frac{-(\ln 2 + 1)}{2}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4x^2 + \frac{1}{x} - 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng

$$\text{(A)} \frac{29}{2}.$$

$$\text{(B)} 1.$$

$$\text{(C)} 3.$$

$$\text{(D)} \text{Không tồn tại.}$$

**Lời giải.**

$$\text{Vì } 0 \in [-1; 2] \text{ và } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \end{cases} \text{ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất}$$

trên  $[-1; 2]$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$  đạt được tại  $x_0$ . Giá trị  $x_0$  bằng

$$\text{(A)} 1.$$

$$\text{(B)} 2.$$

$$\text{(C)} -2.$$

$$\text{(D)} -1.$$

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên  $[-1; 2]$ .

$$y' = 6x^2 + 6x - 12.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2]. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } y(-1) = 15; y(1) = -5; y(2) = 6.$$



Vậy  $\min_{[-1;2]} y = y(1) \Rightarrow x_0 = 1.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 10.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$  trên  $[-3;6]$ . Tổng  $M + m$  có giá trị là

**(A)** -12.

**(B)** -6.

**(C)** 18.

**(D)** -4.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = (-\infty; 6]$ .

Hàm số liên tục trên  $[-3; 6]$ .

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt{6-x}} > 0, \forall x \in (-3; 6).$$

Ta có:  $f(-3) = -18; f(6) = 12.$

Khi đó:  $m = \min_{[-3;6]} f(x) = f(-3) = -18; M = \max_{[-3;6]} f(x) = f(6) = 12.$

Vậy  $M + m = 12 + (-18) = -6.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 11.** Gọi  $m$  và  $M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = 2x + \sqrt{5-x^2}$ . Giá trị của  $m^2 + M$  bằng

**(A)** 5.

**(B)** 25.

**(C)**  $5 + 2\sqrt{5}.$

**(D)** 45.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{2\sqrt{5-x^2} - x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(5-x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}].$$

$[-\sqrt{5}; \sqrt{5}].$

Ta có:  $f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}; f(2) = 5; f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}.$

Suy ra  $M = 5$  và  $m = -2\sqrt{5}.$

Vậy  $m^2 + M = (-2\sqrt{5})^2 + 5 = 25.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$  là

**(A)**  $f(-1).$

**(B)**  $f(0).$

**(C)**  $f(3).$

**(D)**  $f(2).$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$ :

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| $x$     | -1      | 0      | 2      |
| $f'(x)$ | 0       | -      | 0      |
| $f(x)$  | $f(-1)$ | $f(0)$ | $f(2)$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$  là  $f(0)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-4; 2]$  là

**(A)**  $f(0)$ .

**(B)**  $f(-4)$ .

**(C)**  $f(1)$ .

**(D)**  $f(2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

Bảng biến thiên trên đoạn  $[-4; 2]$ :

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| $x$     | -4      | 1      | 2      |
| $f'(x)$ | 0       | -      | 0      |
| $f(x)$  | $f(-4)$ | $f(1)$ | $f(2)$ |

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị nhỏ nhất là  $f(1)$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$  trên đoạn  $[0; 4]$  bằng  $-1$ ?

**(A)** 0.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq m$ .

Hàm số đã cho xác định trên  $[0; 4]$  khi  $m \notin [0; 4]$  (\*).

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x - m)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [0; 4].$$

Hàm số đồng biến trên đoạn  $[0; 4]$  nên  $\max_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{2 - m^2}{4 - m}$ .

$$\max_{[0; 4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (\*) ta được  $m = -3$ . Do đó có một giá trị của  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 15.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  trên  $[1; 2]$  bằng 8 ( $m$  là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $m > 10$ . (B)  $8 < m < 10$ . (C)  $0 < m < 4$ . (D)  $4 < m < 8$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \neq -1$ .

Nếu  $m = 1$  thì  $y = 1$  (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8).

Nếu  $m \neq 1$  thì hàm số đã cho liên tục trên  $[1; 2]$  và  $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ .

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn  $[1; 2]$ .

Do vậy  $\min_{x \in [1; 2]} y + \max_{x \in [1; 2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5} \Rightarrow m \in (8; 10)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 0.

- (A)  $m = 0$ . (B)  $m = 6$ . (C)  $m = 2$ . (D)  $m = 4$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ .

Ta có:  $y' = -3x^2 - 6x$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

$$y(-1) = m - 2; y(0) = m; y(1) = m - 4.$$

Ta thấy  $m - 4 = \min \{y(-1); y(0); y(1)\}$ . Theo yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 17.** Tìm giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$  bằng 3.

- (A)  $m = 3$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = 7$ . (D)  $m = 5$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Hàm số liên tục trên đoạn  $[0; 4]$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{2-m}{(x+1)^2}.$$

— Nếu  $m < 2$  thì hàm số đồng biến trên đoạn  $[0; 4]$ .

Khi đó  $\min_{[0; 4]} y = y(0) = m$ , theo đề  $m = 3 > 2$  (loại).

— Nếu  $m > 2$  thì hàm số nghịch biến trên đoạn  $[0; 4]$ .

Khi đó  $\min_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{8+m}{5}$ , theo đề bài  $\frac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7$  (thỏa mãn).

— Nếu  $m = 2$  thì  $y = 2$  trên đoạn  $[0; 4]$  nên không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy  $m = 7$  thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Chọn phương án **C**

**Câu 18.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3 \sin x + 2}{\sin x + 1}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Khi đó giá trị của  $M^2 + m^2$  là

**(A)**  $\frac{31}{2}$ .

**(B)**  $\frac{11}{2}$ .

**(C)**  $\frac{41}{4}$ .

**(D)**  $\frac{61}{4}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sin x, t \in [0; 1]$ .

Xét hàm  $f(t) = \frac{3t+2}{t+1}$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  có  $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [0; 1]$ .

Suy ra hàm số đồng biến trên  $[0; 1]$ .

$$\Rightarrow M = \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2} \text{ và } m = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 2.$$

$$\text{Khi đó } M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 19.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{\sin x + m}{3 - 2 \sin x}$  thuộc đoạn  $[-2; 2]$ . Khi đó số phần tử của  $S$  là

**(A)** 11.

**(B)** 10.

**(C)** Vô số.

**(D)** 9.

**Lời giải.**

Đặt  $\sin x = t, t \in [0; 1]$  ta có  $f(t) = \frac{t+m}{-2t+3}$  với  $\forall t \in [-1; 1]$ .

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2m+3}{(-2t+3)^2}.$$

Do  $m \in \mathbb{Z}$  nên ta xét hai trường hợp sau

—  $\forall m \geq -1$  thì hàm số đồng biến trên  $[-1; 1]$

$$\Rightarrow \max_{[-1;1]} f(t) = f(1) = m + 1.$$

Xét  $m + 1 \in [-2; 2] \Rightarrow -3 \leq m \leq 1$ . Vậy  $m \in \{0; \pm 1\}$ .

—  $\forall m \leq -2$  thì hàm số nghịch biến trên  $[-1; 1]$

$$\Rightarrow \max_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = \frac{m-1}{5}.$$

Xét  $\frac{m-1}{5} \in [-2; 2] \Rightarrow -9 \leq m \leq 11$ . Vậy  $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$ .

Vậy tập  $S = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; 0; \pm 1\}$  có 11 phần tử.

Chọn phương án **A**

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $4$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $-$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-3$ | $5$ | $-\infty$ |

- Ⓐ

15.
- Ⓑ

$\frac{25}{3}$ .
- Ⓒ

$\frac{19}{3}$ .
- Ⓓ

12.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x]$ .

Với  $x \in [1; 3]$  thì  $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ 3 \leq 4x - x^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$ .

Suy ra  $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$ .

Bảng biến thiên

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| $x$     | $1$    | $2$    | $3$    |
| $g'(x)$ | $+$    | $0$    | $-$    |
| $g(x)$  | $g(1)$ | $g(2)$ | $g(3)$ |

Suy ra  $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$ .

Chọn phương án Ⓓ

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. A  | 3. A  | 4. D  | 5. B  | 6. A  | 7. A  | 8. D  | 9. A  | 10. B |
| 11. B | 12. B | 13. C | 14. D | 15. B | 16. D | 17. C | 18. C | 19. A | 20. D |

## DẠNG 20. BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC LÔGARIT

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**Định nghĩa 1.** Cho hai số dương  $a, b$  với  $a \neq 1$ . Số  $\alpha$  thỏa mãn đẳng thức  $a^\alpha = b$  được gọi là lôgarit cơ số  $a$  của  $b$  và kí hiệu là  $\log_a b$ . Ta viết:  $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ .

**Tính chất 1.** Cho  $a, b > 0, a \neq 1$ , Ta có:

$$\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0; \quad a^{\log_a b} = b; \quad \log_a(a^\alpha) = \alpha.$$

#### Các quy tắc

— Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , Ta có:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

— Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , Ta có:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Đặc biệt: với  $a, b > 0, a \neq 1$  thì  $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ .

— Lôgarit của lũy thừa: Cho  $a, b > 0, a \neq 1$ , với mọi  $\alpha$ , Ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Đặc biệt:  $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ .

— Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương  $a, b, c$  với  $a \neq 1, c \neq 1$ , Ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Đặc biệt:  $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$  và  $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$  với  $\alpha \neq 0$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Xét tất cả các số thực dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $\log_2 a = \log_8(ab)$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A)  $a = b^2$ .

(B)  $a^3 = b$ .

(C)  $a = b$ .

(D)  $a^2 = b$ .

**Lời giải.**

## Phân tích hướng dẫn giải

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán biến đổi đẳng thức lôgarit.

b) **HƯỚNG GIẢI:**

Bước 1: Biến đổi đưa về cùng cơ số 2.

Bước 2: Cho 2 biểu thức trong lôgarit bằng nhau.

Bước 3: Dựa vào các đáp án, kết luận mệnh đề đúng.

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có:

$$\log_2 a = \log_8(ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \log_{2^3}(ab)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2(ab)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a = \log_2(ab)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a = (ab)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b.$$

Chọn phương án **(D)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)**  $x = y$ .

**(B)**  $x > y$ .

**(C)**  $x < y$ .

**(D)**  $x = y^2$ .

**Lời giải.**

Với  $x, y > 0$  Ta có:

$$\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 2.** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $\ln \frac{a}{c} + \ln \frac{b}{c} = 0$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $abc = 1$ .

**(B)**  $ab = c$ .

**(C)**  $a + b = c$ .

**(D)**  $ab = c^2$ .

**Lời giải.**

Ta có:



$$\ln \frac{a}{c} + \ln \frac{b}{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln a + \ln b - 2 \ln c = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln a + \ln b = 2 \ln c$$

$$\Leftrightarrow \ln ab = \ln c^2$$

$$\Leftrightarrow ab = c^2.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 3.** Cho  $M = \log_{12} x = \log_3 y$ . Khi đó  $M$  bằng biểu thức nào sau đây?

**(A)**  $\log_4 \frac{x}{y}$ .

**(B)**  $\log_{36} \frac{x}{y}$ .

**(C)**  $\log_9(x - y)$ .

**(D)**  $\log_{15}(x + y)$ .

**Lời giải.**

Do  $M = \log_{12} x = \log_3 y$  nên  $\begin{cases} x = 12^M > 0 \\ y = 3^M > 0. \end{cases}$

Suy ra  $\frac{x}{y} = \frac{12^M}{3^M} = 4^M$  hay  $M = \log_4 \frac{x}{y}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Cho  $a = \log_9 8$  và  $b = \log_2 3$ . Tính  $ab$ .

**(A)**  $\frac{1}{3}$ .

**(B)**  $\frac{3}{2}$ .

**(C)**  $\frac{2}{9}$ .

**(D)**  $\frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$ab = \log_9 8 \cdot \log_2 3 = \log_{3^2} 2^3 \cdot \log_2 3 = \frac{3}{2} \log_3 2 \cdot \log_2 3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Cho  $\log_2 m = a$  và  $A = \log_m(8m)$  với  $m > 0, m \neq 1$ . Tìm mối liên hệ giữa  $A$  và  $a$ .

**(A)**  $A = (3 + a)a$ .

**(B)**  $A = (3 - a)a$ .

**(C)**  $A = \frac{3 + a}{a}$ .

**(D)**  $A = \frac{3 - a}{a}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$A = \log_m(8m) = \log_m 8 + \log_m m = 3 \log_m 2 + 1$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{\log_2 m} + 1 = \frac{3}{a} + 1 = \frac{3 + a}{a}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Với mọi số thực dương  $a$  và  $b$  thoả mãn  $a^2 + b^2 = 8ab$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)**  $\log(a + b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ .

**(B)**  $\log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$ .

**(C)**  $\log(a + b) = 1 + \log a + \log b$ .

**(D)**  $\log(a + b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$a^2 + b^2 = 8ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 10ab$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 10ab$$

$$\Leftrightarrow \log(a + b)^2 = \log(10ab)$$

$$\Rightarrow 2 \log(a + b) = 1 + \log a + \log b$$

$$\Rightarrow \log(a + b) = \frac{1}{2} (1 + \log a + \log b).$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Cho  $a > 0, b > 0$  thỏa mãn  $a^2 + 4b^2 = 5ab$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $\log \frac{a + 2b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}.$

**(B)**  $5 \log(a + 2b) = \log a - \log b.$

**(C)**  $2 \log(a + 2b) = 5 (\log a + \log b).$

**(D)**  $\log(a + 1) + \log b = 1.$

**Lời giải.**

Ta có:

$$a^2 + 4b^2 = 5ab$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)^2 = 9ab$$

$$\Leftrightarrow \log [(a + 2b)^2] = \log(9ab)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \log(a + 2b) = 2 \cdot \log 3 + \log a + \log b$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \log \frac{a + 2b}{3} = \log a + \log b$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{a + 2b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Cho  $a > 0, b > 0$  thỏa mãn  $a^2 + 9b^2 = 10ab$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $\log(a + 1) + \log b = 1.$

**(B)**  $\log \frac{a + 3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.$

**(C)**  $3 \log(a + 3b) = \log a - \log b.$

**(D)**  $2 \log(a + 3b) = 2 \log a + \log b.$

**Lời giải.**

Ta có:

$$a^2 + 9b^2 = 10ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + 3b)^2}{16} = ab$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{(a + 3b)^2}{16} = \log ab \quad \text{vì } a > 0, b > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \log \frac{a + 3b}{4} = \log a + \log b$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{a + 3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Cho các số dương  $a, b$  thỏa mãn  $4a^2 + 9b^2 = 13ab$ . Chọn câu trả lời đúng.

**(A)**  $\log \sqrt{2a + 3b} = \log \sqrt{a} + 2 \log \sqrt{b}.$

**(B)**  $\frac{1}{4} \log(2a + 3b) = 3 \log a + 2 \log b.$

$$\textcircled{\text{C}} \log \left( \frac{2a+3b}{5} \right) = \frac{1}{2} (\log a + \log b).$$

$$\textcircled{\text{D}} \log \left( \frac{2a+3b}{4} \right) = \frac{1}{2} (\log a + \log b).$$

**Lời giải.**

Ta có:

$$4a^2 + 9b^2 = 13ab$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 12ab + 9b^2 = 25ab$$

$$\Leftrightarrow (2a+3b)^2 = 25ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+3b}{5} = \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \log \left( \frac{2a+3b}{5} \right) = \log \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \log \left( \frac{2a+3b}{5} \right) = \frac{1}{2} (\log a + \log b).$$

Chọn phương án **C**

**Câu 10.** Cho các số thực  $x, a, b, c, d$  dương thỏa mãn  $\log x = 2 \log(2a) - 3 \log b - 4 \log \sqrt[4]{c}$ . Biểu diễn  $x$  theo  $a, b, c$  được kết quả là

$$\textcircled{\text{A}} x = \frac{2a^2}{b^3 c}.$$

$$\textcircled{\text{B}} x = \frac{4a^2}{b^3 c}.$$

$$\textcircled{\text{C}} x = \frac{2a^2 c}{b^3}.$$

$$\textcircled{\text{D}} x = \frac{2a^2 c}{b^3}.$$

**Lời giải.**

$$\log x = 2 \log(2a) - 3 \log b - 4 \log \sqrt[4]{c}$$

$$\Leftrightarrow \log x = \log(4a^2) - \log(b^3) - \log c$$

$$\Leftrightarrow \log x = \log \frac{4a^2}{b^3 c}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4a^2}{b^3 c}.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 11.** Cho  $a, b > 0$ , nếu  $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$  và  $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$  thì giá trị của  $ab$  bằng

$$\textcircled{\text{A}} 2^9.$$

$$\textcircled{\text{B}} 2.$$

$$\textcircled{\text{C}} 8.$$

$$\textcircled{\text{D}} 2^{18}.$$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } ab = 2^6 \cdot 2^3 = 2^9.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 12.** Xét các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\log_5 a = 5$  và  $\log_3 b = \frac{2}{3}$ . Tính  $I = 2 \log_6 [\log_5(5a)] + \log_{\frac{1}{9}} b^3$ .

$$\textcircled{\text{A}} I = 3.$$

$$\textcircled{\text{B}} I = -2.$$

$$\textcircled{\text{C}} I = 1.$$

$$\textcircled{\text{D}} I = 2 \log_6 5 + 1.$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
I &= 2 \log_6 [\log_5(5a)] + \log_{\frac{1}{9}} b^3 \\
&= 2 \log_6(1 + \log_5 a) - \frac{3}{2} \log_3 b \\
&= 2 \log_6 6 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \\
&= 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 13.** Gọi  $n$  là số nguyên dương sao cho  $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{210}{\log_3 x}$  đúng với mọi  $x$  dương và  $x \neq 1$ . Tìm giá trị của biểu thức  $P = 2n + 3$ .

**(A)** 32.

**(B)** 40.

**(C)** 43.

**(D)** 23.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{210}{\log_3 x} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} + \cdots + \frac{n}{\log_3 x} = \frac{210}{\log_3 x} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\log_3 x} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{210}{\log_3 x} \\
\Leftrightarrow &\frac{n(1+n)}{2} = 210 \\
\Leftrightarrow &n^2 + n - 420 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} n = 20 \\ n = -21. \end{cases}
\end{aligned}$$

Do  $n$  là số nguyên dương nên  $n = 20 \Rightarrow P = 43$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 14.** Xét các số thực thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$ . Giá trị của tỉ số  $\frac{x}{y}$  là

**(A)**  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

**(B)**  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

**(C)**  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

**(D)**  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t & (1) \\ y = 12^t & (2) \\ x+y = 16^t \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{3}{4}\right)^t > 0.$$

$$x+y=16^t \Leftrightarrow 9^t+12^t=16^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 15.** Xét các số thực dương  $a, b, c$ ,  $b \neq 1$  thỏa mãn  $\log_b a = x$  và  $\log_b c = y$ . Hãy biểu diễn

$\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4})$  theo  $x$  và  $y$ .

(A)  $\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = \frac{5+4y}{6x}$ .

(B)  $\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = \frac{20y}{3x}$ .

(C)  $\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = \frac{5+3y^4}{3x^2}$ .

(D)  $\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = 20x + \frac{20y}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = x \Rightarrow \ln a = x \cdot \ln b \quad (a, b > 0).$$

$$\log_b c = \frac{\ln c}{\ln b} = y \Rightarrow \ln c = y \cdot \ln b \quad (b, c > 0).$$

$$\log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = \frac{\ln(\sqrt[3]{b^5c^4})}{\ln(a^2)} = \frac{\ln(b^{\frac{5}{3}} \cdot c^{\frac{4}{3}})}{2 \cdot \ln a} = \frac{\frac{5}{3} \ln b + \frac{4}{3} \ln c}{2 \cdot \ln a} = \frac{\frac{5}{3} \ln b + \frac{4}{3} y \cdot \ln b}{2 \cdot x \cdot \ln b} = \frac{5+4y}{6x}.$$

**Cách khác:**

Ta có  $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$  và  $\log_b c = y \Leftrightarrow c = b^y$ .

$$\text{Do đó } \log_{a^2}(\sqrt[3]{b^5c^4}) = \log_{b^{2x}}(\sqrt[3]{b^5b^{4y}}) = \log_{b^{2x}}(b^{\frac{5+4y}{3}}) = \frac{5+4y}{6x}.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 16.** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$ , đặt  $T = \frac{a}{b}$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A)  $-2 < T < 0$ .

(B)  $0 < T < \frac{1}{2}$ .

(C)  $1 < T < 2$ .

(D)  $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Giả sử } \log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16^t & (1) \\ b = 20^t & (2) \\ \frac{2a-b}{3} = 25^t & (3) \end{cases}$$

Thế (1) và (2) vào (3) được phương trình:

$$2 \cdot 16^t - 20^t = 3 \cdot 25^t \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^t = -1 & (VN) \\ \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{a}{b} = \frac{16^t}{20^t} = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{3}{2}.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 17.** Cho  $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$ . Hãy tính  $S = x + y + z$ .

(A)  $S = 105$ .

(B)  $S = 89$ .

(C)  $S = 98$ .

(D)  $S = 88$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(\log_4 x) = 1 \\ \log_4(\log_2 y) = 1 \\ \log_2(\log_3 z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = 3 \\ \log_2 y = 4 \\ \log_3 z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^3 \\ y = 2^4 \\ z = 3^2. \end{cases}$$

Do đó:  $x + y + z = 4^3 + 2^4 + 3^2 = 89$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Cho  $m = \log_a (\sqrt[3]{ab})$ , với  $a > 1$ ,  $b > 1$  và  $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$ . Tìm  $m$  sao cho  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**(A)**  $m = 1$ .

**(B)**  $m = \frac{1}{2}$ .

**(C)**  $m = 4$ .

**(D)**  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $m = \log_a (\sqrt[3]{ab}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log_a b \Rightarrow \log_a b = 3m - 1$ ;  $\log_b a = \frac{1}{3m - 1}$ .

Vì  $a > 1$ ,  $b > 1$  nên  $\log_a b > \log_a 1 = 0$ . Suy ra  $3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$ .

Do đó  $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a = (3m - 1)^2 + \frac{16}{3m - 1}$ ,  $m > \frac{1}{3}$ .

Xét hàm số  $y = (3m - 1)^2 + \frac{16}{3m - 1}$ , với  $m > \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y' = 6(3m - 1) - \frac{48}{(3m - 1)^2} = \frac{6(3m - 1)^3 - 48}{(3m - 1)^2}$ .

$y' = 0 \Leftrightarrow 6(3m - 1)^3 - 48 = 0 \Leftrightarrow (3m - 1)^3 = 8 \Leftrightarrow 3m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ .

Bảng biến thiên

|      |               |    |           |
|------|---------------|----|-----------|
| $x$  | $\frac{1}{3}$ | 1  | $+\infty$ |
| $y'$ | -             | 0  | +         |
| $y$  | $+\infty$     | 12 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra  $\min_{\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)} y = f(1) = 12$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  là 12 khi  $m = 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Cho  $a, b$  là các số dương thỏa mãn  $b > 1$  và  $\sqrt{a} \leq b < a$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$ .

**(A)** 6.

**(B)** 7.

**(C)** 5.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Ta có:  $P = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4 \cdot (\log_b a - 1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_b a}} + 4 \cdot (\log_b a - 1)$ .

Đặt  $t = \log_b a$ . Vì  $\sqrt{a} \leq b < a \Rightarrow \log_b(\sqrt{a}) \leq 1 \leq \log_b a \Leftrightarrow \frac{t}{2} < 1 < t \Leftrightarrow 1 < t < 2$

$\Rightarrow P = \frac{1}{1 - \frac{1}{t}} + 4(t - 1) = \frac{t}{t - 1} + 4(t - 1)$  với  $t \in (1; 2)$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{t - 1} + 4(t - 1)$  với  $t \in (1; 2)$ .

$$f'(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + 4, f(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} (tm) \\ t = \frac{1}{2} (l). \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |               |   |
|---------|-----------|---------------|---|
| $t$     | 1         | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $f'(t)$ | —         | 0             | + |
| $f(t)$  | $+\infty$ | 5             | 6 |

Từ bảng biến thiên suy ra:  $\min_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  bằng 5.

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Cho  $\log_8 |x| + \log_4 y^2 = 5$  và  $\log_8 |y| + \log_4 x^2 = 7$ . Tìm giá trị của biểu thức  $P = |x| - |y|$ .

**(A)**  $P = 56$ .

**(B)**  $P = 16$ .

**(C)**  $P = 8$ .

**(D)**  $P = 64$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\log_8 |x| + \log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 |x| + \frac{1}{2} \log_2 y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt[3]{|x|} + \log_2 |y| = 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|} \cdot |y| = 2^5 \Leftrightarrow |x| \cdot |y|^3 = (2^5)^3 = 2^{15}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \log_8 |y| + \log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow |y| \cdot |x|^3 = 2^{21}. \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) nhân (2) được } x^4 \cdot y^4 = 2^{36} \Leftrightarrow x^2 \cdot y^2 = 2^{18}. \quad (3)$$

$$\text{Lấy (1) chia (2) được } \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2 = 2^6 \cdot y^2. \quad (4)$$

$$\text{Thay (4) vào (3) được } 2^6 \cdot y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = (2^3)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8.$$

$$\text{Thay } |y| = 8 \text{ vào (4) được } x^2 = 2^6 \cdot 64 = (2^6)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64.$$

$$\text{Do đó } P = |x| - |y| = 56.$$

Chọn phương án **A**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. D  | 3. A  | 4. B  | 5. C  | 6. B  | 7. A  | 8. B  | 9. C  | 10. B |
| 11. A | 12. C | 13. C | 14. C | 15. A | 16. C | 17. B | 18. A | 19. C | 20. A |



## DẠNG 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

★ Phương trình mũ cơ bản:

Với  $a > 0, a \neq 1$ :  $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b. \end{cases}$

★ Giải phương trình mũ đưa về cùng cơ số:

Với  $a > 0, a \neq 1$ :  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .

★ Giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ:

• **Dạng 1:**  $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$ , trong đó  $P(t)$  là đa thức theo  $t$ .

• **Dạng 2:**  $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$ .

Chia 2 vế cho  $b^{2f(x)}$ , rồi đặt ẩn phụ  $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ .

★ Bất phương trình mũ cơ bản:

$$a^{f(x)} < b, (\text{với } b > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}.$$

★ Giải bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1. (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020)** Tập nghiệm của bất phương trình:  $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ .

(A)  $[-2; 4]$ .

(B)  $[-4; 2]$ .

(C)  $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ .

(D)  $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

### Phân tích hướng dẫn giải

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán giải bất phương trình mũ sử dụng Phương pháp đưa về cùng cơ số.

b) **HƯỚNG GIẢI:**

Bước 1: Vì cơ số  $a = 5 > 1$  nên chiều bất phương trình không đổi.

Bước 2: Bỏ cơ số, ta thu được bất phương trình liên quan đến số mũ.

Bước 3: Giải bất phương trình này tìm nghiệm.

Bước 4: Dựa vào các đáp án, kết luận mệnh đề đúng.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Vì cơ số  $a = 5 > 1$  nên  $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$ .  
 Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là  $x \in [-2; 4]$ .

Chọn phương án **(A)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Phương trình  $2^{2x^2+5x+4} = 4$  có tổng tất cả các nghiệm bằng

- (A)** 1.                      **(B)** -1.                      **(C)**  $\frac{5}{2}$ .                      **(D)**  $-\frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $2^{2x^2+5x+4} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng  $-\frac{5}{2}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 2.** Tìm số nghiệm thực của phương trình  $3^{3x-1} = 9^{\sqrt{x}}$ .

- (A)** 1.                      **(B)** 3.                      **(C)** 0.                      **(D)** 2.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq 0$ .

Ta có:  $3^{3x-1} = 9^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3x-1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 3.** Phương trình  $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tính  $x_1x_2$ .

- (A)** -6.                      **(B)** -5.                      **(C)** 6.                      **(D)** -2.

**Lời giải.**

Ta có  $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 2 - 6x \Leftrightarrow x^2 + 6x - 6 = 0$ .

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $x_1x_2 = -6$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Phương trình  $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x-2} = 7 - 4\sqrt{3}$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tính giá trị của  $P = x_1 + x_2$ .

**(A)**  $P = -1$ .

**(B)**  $P = 3$ .

**(C)**  $P = 2$ .

**(D)**  $P = 4$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x-2} = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^{-2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy:  $P = 2$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 5.** Phương trình  $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$ .

**(B)**  $x_1 + x_2 = -1$ .

**(C)**  $x_1 + x_2 = 0$ .

**(D)**  $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy  $x_1 + x_2 = -1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 6.** Phương trình  $5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$  có tổng các nghiệm là

**(A)** 1.

**(B)** 4.

**(C)** 2.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có:

$$5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26 \Leftrightarrow 5^{x-1} + 5 \cdot 5^{2-x} = 26 \Leftrightarrow 5^{x-1} + 25 \cdot 5^{1-x} = 26.$$

Đặt  $t = 5^{x-1} (t > 0)$ , phương trình trên trở thành.

$$t + \frac{25}{t} = 26 \Leftrightarrow t^2 - 26t + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-1} = 1 \\ 5^{x-1} = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là 4.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Phương trình  $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3 \cdot (2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$  có tập nghiệm là

**(A)**  $\{0\}$ .

**(B)**  $\{1; 0\}$ .

**(C)**  $\{1; 2\}$ .

**(D)**  $\{-2; 2\}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } (2 + \sqrt{3})^x = t > 0 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 3 \cdot \frac{1}{t} + 2 = 0 \Rightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 (t/m) \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Tích các nghiệm của phương trình  $4^{x^2-x-1} + 2^{x^2-x} = 3$  bằng

- (A) -1. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

**Lời giải.**

ĐK  $x \in \mathbb{R}$ .

$$4^{x^2-x-1} + 2^{x^2-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} (2^{x^2-x})^2 + 2^{x^2-x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 2 \\ 2^{x^2-x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là  $\frac{c}{a} = -1$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 9.** Tìm tích các nghiệm của phương trình  $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ .

- (A) 2. (B) -1. (C) 0. (D) 1.

**Lời giải.**

Ta có  $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ . Vậy đặt  $t = (\sqrt{2}+1)^x$ , điều kiện  $t > 0$ . Suy ra  $(\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}$ .

Phương trình đã cho trở thành.

$$\frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Vậy tích của hai nghiệm  $x_1 x_2 = 1 \cdot (-1) = -1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 10.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$

- (A)  $(-\infty; 5)$ . (B)  $(-\infty; -5)$ . (C)  $(-5; +\infty)$ . (D)  $(5; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $(-\infty; -5)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình  $3^x \cdot 2^{x+1} \geq 72$

- (A)  $(2; +\infty)$ . (B)  $(-\infty; 2)$ . (C)  $[2; +\infty)$ . (D)  $(-\infty; 2]$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } 3^x \cdot 2^{x+1} \geq 72 \Leftrightarrow 2 \cdot 6^x \geq 72 \Leftrightarrow 6^x \geq 6^2 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $[2; +\infty)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 12.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ .

- (A)  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (0; +\infty)$ . (B)  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ .  
(C)  $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ . (D)  $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ .

**Lời giải.**

Vì  $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$  nên bất phương trình tương đương với  $\frac{1}{x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{3}$ .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 13.** Cho bất phương trình  $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$ , tập nghiệm của bất phương trình có dạng  $S = (a; b)$ . Giá trị của biểu thức  $A = b - a$  nhận giá trị nào sau đây?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** -1.

**(D)** -2.

**Lời giải.**

Ta có:  $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ .

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (1; 2) \Rightarrow a = 1; b = 2 \Rightarrow A = b - a = 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn  $[0; 10]$  của bất phương trình  $7^{\sqrt{x+6}} \geq 7^x$  là

**(A)** 3.

**(B)** 4.

**(C)** 11.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

Ta có:  $7^{\sqrt{x+6}} \geq 7^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3$ .

Vậy có 3 giá trị nguyên thuộc đoạn  $[0; 10]$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 15.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$  là

**(A)** 1.

**(B)** 0.

**(C)** 3.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

$(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$   
 $\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{-8}{(x-1)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0\}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 16.** Biết tập nghiệm của bất phương trình  $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$  là một đoạn  $[a; b]$  ta có  $a + b$  bằng

**(A)**  $a + b = 11$ .

**(B)**  $a + b = 9$ .

**(C)**  $a + b = 12$ .

**(D)**  $a + b = 10$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -6$ .

Ta có:  $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 5x - 6 \leq x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 10].$$

Vậy  $a + b = 11$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn  $[0; 3]$  của bất phương trình  $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$  là

**(A)** 4.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 3 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_{\frac{3}{2}} 3. \end{aligned}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên thuộc đoạn  $[0; 3]$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0$  có dạng là  $S = (a; b] \cup [c; +\infty)$ . Giá trị  $\frac{a+b+c}{3}$  thuộc khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-2; -1)$ .

**(B)**  $(-1; 0)$ .

**(C)**  $(0; 1)$ .

**(D)**  $(1; 4)$ .

**Lời giải.**

• **Cách 1.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0 \\ 2^{x+1} - 1 > 0 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leq 0 \\ 2^{x+1} - 1 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0 \\ 2 \cdot 2^x > 1 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0 \\ 2 \cdot 2^x < 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2^x \leq 2 \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} 2^x > \frac{1}{2} \\ 2 \leq 2^x \leq 4 \\ 2^x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad (VN) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < 2^x \leq 2 \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (-1; 1] \cup [2; +\infty)$

$$\Rightarrow a = -1; b = 1; c = 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{3} \in (0; 1).$$

• **Cách 2.**

$$\text{Ta có: } \frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x+1} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8}{2 \cdot 2^x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < 2^x \leq 2 \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (-1; 1] \cup [2; +\infty)$

$$\Rightarrow a = -1; b = 1; c = 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{3} \in (0; 1).$$

Chọn phương án **C**

**Câu 19.** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn  $[-2020; 2020]$  của bất phương trình  $(2^x + 1)^2 > (\sqrt{2^x + 2} - 1)^2 \cdot (2^{x+1} + 5)$  là

**(A)** 2020.

**(B)** 2019.

**(C)** 2021.

**(D)** 2018.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (2^x + 1)^2 &> (\sqrt{2^x + 2} - 1)^2 \cdot (2^{x+1} + 5) \\ \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 \cdot (\sqrt{2^x + 2} + 1)^2 &> (\sqrt{2^x + 2} - 1)^2 \cdot (2^{x+1} + 5) \cdot (\sqrt{2^x + 2} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 \cdot (\sqrt{2^x + 2} + 1)^2 &> (2^x + 1)^2 \cdot (2^{x+1} + 5) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2^x + 2} + 1)^2 &> 2^{x+1} + 5. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2^x + 2} \Rightarrow t^2 - 2 = 2^x. \text{ ĐK: } t > \sqrt{2}$$

Bất phương trình được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (t + 1)^2 &> 2(t^2 - 2) + 5 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 &> 2t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện trên ta được:  $\sqrt{2} < t < 2$

$$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2^x + 2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 2^x + 2 < 4 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy số nghiệm nguyên thuộc đoạn  $[-2020; 2020]$  là 2021.

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \leq 351 \cdot \sqrt{14^x}$  có dạng là đoạn  $S = [a; b]$ .

Giá trị  $b - 2a$  thuộc khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(3; \sqrt{10})$ .

**(B)**  $(-4; 2)$ .

**(C)**  $(\sqrt{7}; 4\sqrt{10})$ .

**(D)**  $(\frac{2}{9}; \frac{49}{5})$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} &\leq 351 \cdot \sqrt{14^x} \Leftrightarrow 98 \cdot 7^x + 28 \cdot 2^x \leq 351 \cdot \sqrt{14^x} \\ \Leftrightarrow 98 \cdot \sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}} + 28 \cdot \sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}} &\leq 351 \Leftrightarrow 98 \cdot \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} + 28 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{7^x}} \leq 351. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t > 0 \text{ thì bất phương trình trở thành } 98t + \frac{28}{t} \leq 351$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{49} \leq t \leq \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49} \leq \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2, \text{ khi đó } S = [-4; 2].$$

$$\text{Giá trị } b - 2a = 10 \in (\sqrt{7}; 4\sqrt{10}).$$

Chọn phương án **C**

 **BẢNG ĐÁP ÁN** 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. A  | 3. A  | 4. C  | 5. B  | 6. B  | 7. A  | 8. A  | 9. B  | 10. B |
| 11. C | 12. D | 13. A | 14. A | 15. C | 16. A | 17. D | 18. C | 19. C | 20. C |

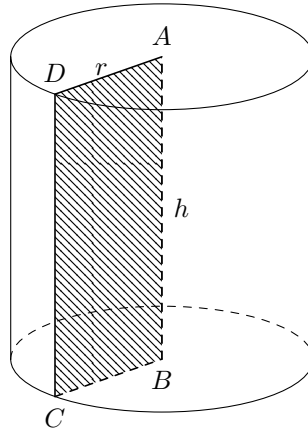


## DẠNG 22. KHỐI TRỤ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khái niệm: Hình trụ tròn xoay.

Khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh  $AB$  thì đường gấp khúc  $ABCD$  tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.



Đường thẳng  $AB$  được gọi là trục.

Đoạn thẳng  $CD$  được gọi là đường sinh.

Độ dài đoạn thẳng  $AB = CD = h$  được gọi là chiều cao của hình trụ.

Hình tròn tâm  $A$ , bán kính  $r = AD$  và hình tròn tâm  $B$ , bán kính  $r = BC$  được gọi là hai đáy của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

★ Công thức tính diện tích của hình trụ và thể tích của khối trụ:

Cho hình trụ có chiều cao là  $h$  và bán kính đáy bằng  $r$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi rh$ .

Diện tích toàn phần của hình trụ:

Thể tích khối trụ:  $V = B \cdot h = \pi r^2 h$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A)  $18\pi$ .

(B)  $36\pi$ .

(C)  $54\pi$ .

(D)  $27\pi$ .

**Lời giải.**

## Phân tích hướng dẫn giải

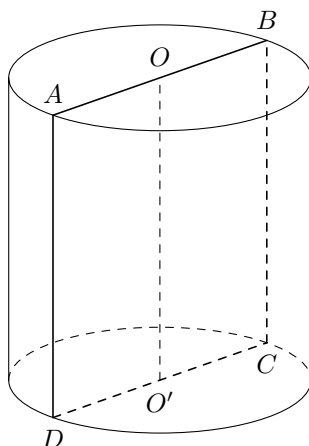
1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm các yếu tố của hình trụ.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Theo giả thiết ta có  $r = 3$ . Vì thiết diện là hình vuông nên độ dài đường cao là  $l = 2r = 6$ .

B2: Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi rl = 36\pi$ .

## LỜI GIẢI CHI TIẾT



Theo giả thiết ta có  $r = 3$ .

Vì thiết diện là hình vuông nên độ dài đường cao là  $h = 2r = 6$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi rh = 36\pi$ .

Chọn phương án (B)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB$  và  $CD$  thuộc hai đáy của khối trụ. Biết  $AB = 4a$ ,  $BC = 3a$ . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

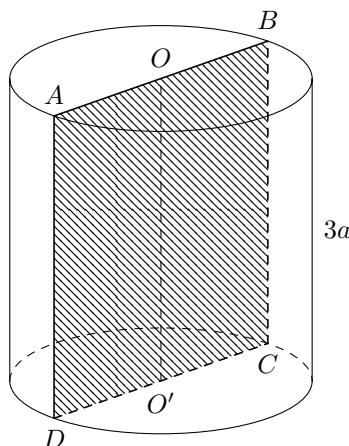
(A)  $12\pi a^3$ .

(B)  $16\pi a^3$ .

(C)  $4\pi a^3$ .

(D)  $8\pi a^3$ .

**Lời giải.**



Theo giả thiết ta có  $r = \frac{AB}{2} = 2a$ .

Độ dài đường cao là  $h = BC = 3a$ .

Thể tích khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi (2a)^2 3a = 12\pi a^3$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2BC = 2a$ . Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng  $ABCD$  quanh trục  $AB$ .

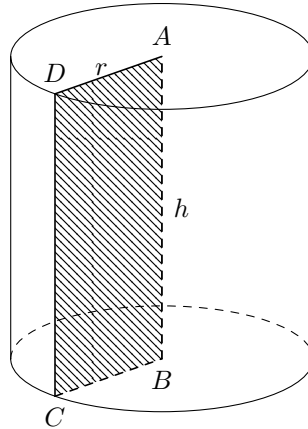
**(A)**  $2\pi a^3$ .

**(B)**  $1\pi a^3$ .

**(C)**  $4\pi a^3$ .

**(D)**  $8\pi a^3$ .

**Lời giải.**



Theo giả thiết ta có  $r = BC = a$ .

Độ dài đường cao là  $h = AB = 2a$ .

Thể tích khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 3.** Cắt hình trụ  $(T)$  bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng  $30\text{cm}^2$  và chu vi bằng  $26\text{cm}$ . Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ  $(T)$ . Diện tích toàn phần của hình trụ  $(T)$  là

**(A)**  $23\pi (\text{cm}^2)$ .

**(B)**  $\frac{23\pi}{2} (\text{cm}^2)$ .

**(C)**  $\frac{69\pi}{2} (\text{cm}^2)$ .

**(D)**  $69\pi (\text{cm}^2)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $r$  là bán kính mặt đáy,  $h$  là đường cao của hình trụ.

Thiết diện là hình chữ nhật có kích thước là  $2r$  và  $h$ .

Hình chữ nhật có diện tích bằng  $30\text{cm}^2$  và chu vi bằng  $26\text{cm}$  nên có:

$$\begin{cases} 2rh = 30 \\ 2(2r + h) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ h = 10 \end{cases} \quad (\text{Vì chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy}).$$

Diện tích toàn phần của hình trụ  $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 + 2\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{69\pi}{2}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 4.** Biết thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông cạnh  $a$ . Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

**(A)**  $2\pi a^2$ .

**(B)**  $\frac{3\pi a^2}{2}$ .

**(C)**  $4\pi a^2$ .

**(D)**  $3\pi a^2$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có  $r = \frac{a}{2}$ .

Độ dài đường cao là  $h = a$ .

Diện tích toàn phần của khối trụ  $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \frac{a}{2}a + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng  $50\pi$  và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đáy.

**(A)**  $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

**(B)**  $r = 5$ .

**(C)**  $r = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2}$ .

**(D)**  $r = 5\sqrt{\pi}$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có diện tích xung quanh  $S_{xq} = 2\pi rh = 50\pi \Leftrightarrow rh = 25$ .

Độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy nên  $l = 2r$ .

Đường sinh và đường cao của hình trụ bằng nhau nên:  $h = l = 2r$ .

Suy ra:  $rh = 25 \Leftrightarrow r \cdot 2r = 25 \Leftrightarrow r^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho hình trụ  $(T)$  có diện tích xung quanh bằng  $24\text{cm}^2$ , bán kính đường tròn đáy bằng  $4\text{cm}$ . Tính thể tích của khối trụ  $(T)$ .

**(A)**  $24\text{cm}^3$ .

**(B)**  $12\text{cm}^3$ .

**(C)**  $48\text{cm}^3$ .

**(D)**  $86\text{cm}^3$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $S_{xq} = 2\pi rh = 24 \Leftrightarrow \pi rh = 12 \Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi rh \cdot r = 48$ .

Chọn phương án **(C)**

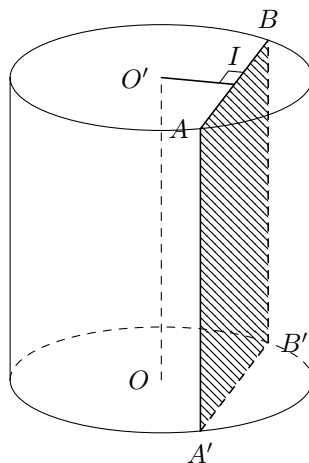
**Câu 7.** Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng  $16$ . Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng  $3$ . Tính thể tích khối trụ.

**(A)**  $\frac{52\pi}{3}$ .

**(B)**  $52\pi$ .

**(C)**  $13\pi$ .

**(D)**  $2\sqrt{3}\pi$ .

**Lời giải.**

Gọi  $O, O'$  là hai tâm của mặt đáy.

Thiết diện là hình vuông  $ABBA'$  với  $A, B$  thuộc mặt đáy chứa tâm  $O$ ;  $A, B$  thuộc mặt đáy chứa

tâm  $O$ .

Gọi  $I$  là hình chiếu của  $O$  lên mặt phẳng  $(ABBA)$ .

Thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16  $\Rightarrow$  Cạnh hình vuông bằng 4.

Khoảng cách từ tâm  $O$  đáy hình trụ đến mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng 3  $\Rightarrow OI = 3$ .

Ta có:  $OA = \sqrt{IA^2 + IO^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .

Thể tích khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi(\sqrt{13})^2 4 = 52\pi$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 8.** Một hình trụ có chiều cao bằng  $5\sqrt{3}$ . Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng song song với trục, và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

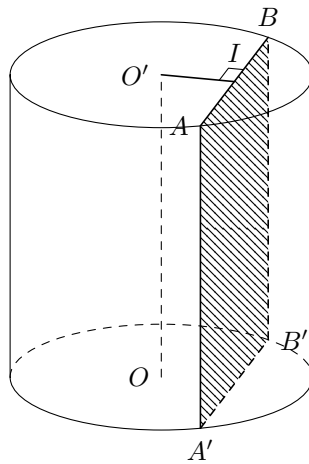
**(A)**  $10\sqrt{3}\pi$ .

**(B)**  $5\sqrt{39}\pi$ .

**(C)**  $20\sqrt{3}\pi$ .

**(D)**  $10\sqrt{39}\pi$ .

**Lời giải.**



Gọi  $O, O'$  là hai tâm của mặt đáy.

Thiết diện là hình chữ nhật  $ABBA'$  với  $A, B$  thuộc mặt đáy chứa tâm  $O'$ ;  $A', B'$  thuộc mặt đáy chứa tâm  $O$ .

Gọi  $I$  là hình chiếu của  $O$  lên mặt phẳng  $(ABBA')$ .

Hình trụ có chiều cao bằng  $5\sqrt{3} \Rightarrow AA' = 5\sqrt{3}$ .

Mặt phẳng song song với trục, và cách trục một khoảng bằng 1  $\Rightarrow OI = 1$ .

Thiết diện thu được có diện tích bằng 30  $\Rightarrow AB \cdot AA' = 30$

$$\Leftrightarrow AB \cdot 5\sqrt{3} = 30 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Ta có:  $OA = \sqrt{IA^2 + IO^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 9.** Cho  $AABB$  là thiết diện song song với trục  $OO'$  của hình trụ ( $A, B$  thuộc đường tròn tâm  $O$ ). Cho biết  $AB = 4, AA' = 3$  và thể tích của hình trụ bằng  $V = 24\pi$ . Khoảng cách  $d$  từ  $O$  đến mặt phẳng  $(AABB)$  là

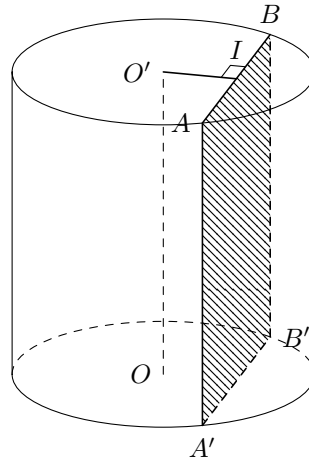
**(A)**  $d = 1$ .

**(B)**  $d = 2$ .

**(C)**  $d = 3$ .

**(D)**  $d = 4$ .

**Lời giải.**



Gọi  $I$  là hình chiếu của  $O$  lên mặt phẳng  $ABBA$ .

Ta có:  $AB = 4, AA = 3$ .

Thể tích khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi r^2 3 = 24\pi \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$ .

Ta có:  $OA^2 = IA^2 + IO^2 \Leftrightarrow OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$ .

Vậy khoảng cách  $d$  từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABBA)$  bằng 2.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có hai đỉnh liên tiếp  $A, B$  nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng  $(ABCD)$  tạo với đáy hình trụ góc  $45^\circ$ . Tính diện tích xung quanh hình trụ.

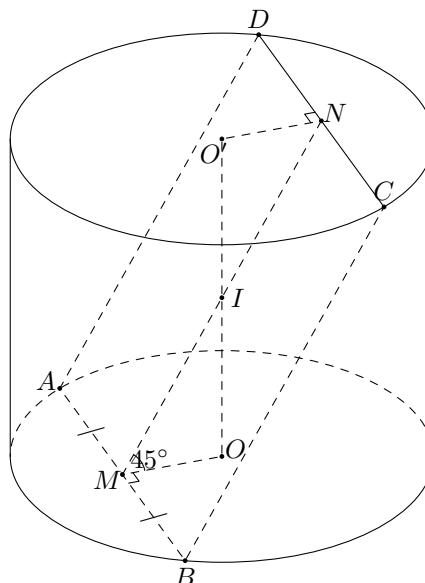
**(A)**  $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{5}$ .

**(B)**  $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ .

**(C)**  $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$ .

**(D)**  $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, OO$ . Để chứng minh  $M, N, I$  thẳng hàng. Góc giữa  $(ABCD)$  và mặt đáy là góc  $\widehat{OMI} = 45^\circ$ .

Ta có:  $IM = \frac{a}{2}$ , do đó  $OM = OI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

Suy ra  $h = OO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  và  $r = OC = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Cho một khối trụ có bán kính đáy  $r = a$  và chiều cao  $h = 2a$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với trục  $OO$  của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi  $V_1$  là thể tích phần khối trụ chứa trục  $OO$ ,  $V_2$  là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ , biết rằng  $(P)$  cách  $OO$  một khoảng bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

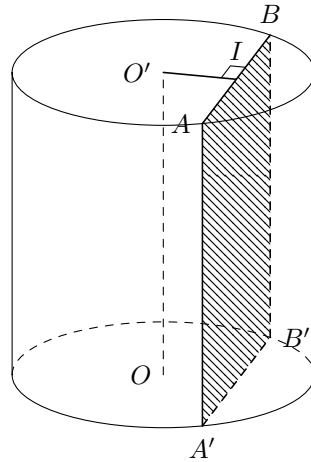
**(A)**  $\frac{3\pi + 2}{\pi - 2}$ .

**(B)**  $\frac{3\pi - 2}{\pi - 2}$ .

**(C)**  $\frac{3\pi + 3}{\pi - 2}$ .

**(D)**  $\frac{3\pi - 3}{\pi - 2}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $(H_1)$  là phần khối trụ chứa trục  $OO$ ;  $(H_2)$  là phần còn lại của khối trụ.

Gọi  $ABBA$  là thiết diện do mặt phẳng  $(P)$  khối trụ.

Gọi  $I$  là hình chiếu của  $O$  lên mặt phẳng  $ABBA$ .

Thể tích khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi a^2 2a = 2\pi a^3$ .

Ta có:  $(P)$  cách  $OO$  một khoảng bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Ta có:  $OA^2 = IA^2 + IO^2 \Leftrightarrow IA = \sqrt{OA^2 - IO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Suy ra tam giác  $OIA$  vuông cân tại  $I \Rightarrow \widehat{IOA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$ .

Diện tích hình quạt  $AOB$  là  $\frac{\pi a^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi a^2}{4}$ .

Diện tích tam giác  $AOB$  là  $\frac{1}{2}a^2$ .

Suy ra diện tích hình viên phân ứng với  $(H_2)$  là  $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{\pi - 2}{4}a^2$ .

Diện tích hình viên phân ứng với  $(H_1)$  là  $\pi a^2 - \frac{\pi - 2}{4}a^2 = \frac{3\pi + 2}{4}a^2$ .

Vì  $(H_1)$  và  $(H_2)$  có cùng chiều cao nên  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi + 2}{4}a^2 : \frac{\pi - 2}{4}a^2 = \frac{3\pi + 2}{\pi - 2}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 12.** Một khối trụ có thể tích bằng 6. Nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính đáy của khối trụ đó gấp 3 lần thì thể tích của khối trụ mới bằng bao nhiêu?

**(A)**  $54\pi$ .

**(B)**  $162\pi$ .

**(C)**  $27\pi$ .

**(D)**  $18\pi$ .

**Lời giải.**

Gọi  $r_1; r_2$  lần lượt là bán kính của mặt đáy hình trụ trước và sau khi tăng bán kính đáy  
 $\Rightarrow r_2 = 3r_1 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ .

Ta có:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow V_2 = 9V_1 = 54\pi$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò có hình trụ với thể tích bằng  $V$ , nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $V$  và diện tích toàn phần hình trụ là nhỏ nhất thì chiều cao  $h$  của lon sữa bò bằng bao nhiêu?

**(A)**  $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ .

**(B)**  $h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi^3}}$ .

**(C)**  $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ .

**(D)**  $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^5}}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $V = \pi r^2 h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ .

Diện tích toàn phần của lon sữa là

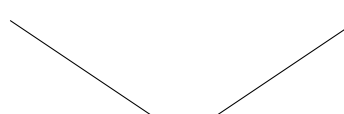
$$S(h) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi \sqrt{\frac{V}{\pi h}} h + 2\pi \left(\sqrt{\frac{V}{\pi h}}\right)^2 = 2\sqrt{\pi V h} + 2\frac{V}{h}.$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số:  $S(h) = 2\sqrt{\pi V h} + 2\frac{V}{h} (h > 0)$ .

$$S(h) = \frac{2\sqrt{\pi V}}{2\sqrt{h}} - 2\frac{V}{h^2} = \frac{\sqrt{\pi V}}{\sqrt{h}} - \frac{2V}{h^2}.$$

$$S(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi V}}{\sqrt{h}} = \frac{2V}{h^2} \Leftrightarrow \frac{\pi V}{h} = \frac{4V^2}{h^4} \Leftrightarrow h^3 = \frac{4V}{\pi} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số  $S(h) = 2\sqrt{\pi V h} + 2\frac{V}{h} (h > 0)$

|         |                                                                                      |                            |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-----------|
| $h$     | 0                                                                                    | $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ | $+\infty$ |
| $S'(h)$ | -                                                                                    | 0                          | +         |
| $S(h)$  |  |                            |           |

Từ bảng biến thiên suy ra  $S(h)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò có hình trụ với thể tích bằng  $V$ , nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình



trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $V$  và diện tích toàn phần hình trụ là nhỏ nhất thì bán kính đáy  $r$  của lon sữa bò bằng bao nhiêu?

$$\textcircled{\text{A}} r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

$$\textcircled{\text{B}} r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

$$\textcircled{\text{C}} r = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}.$$

$$\textcircled{\text{D}} r = \sqrt{\frac{V}{\pi}}.$$

**Lời giải.**

Gọi  $r (r > 0)$  là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

$$S(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số:  $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$ .

$$S(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r.$$

$$S(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số  $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$

|         |   |                            |           |
|---------|---|----------------------------|-----------|
| $r$     | 0 | $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ | $+\infty$ |
| $S'(r)$ | - | 0                          | +         |
| $S(r)$  |   |                            |           |

Từ bảng biến thiên suy ra  $S(r)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 15.** Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đáy với dung tích  $1000\text{cm}^3$ . Bán kính của nắp đáy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

$$\textcircled{\text{A}} r = 10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\text{cm}.$$

$$\textcircled{\text{B}} r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\text{cm}.$$

$$\textcircled{\text{C}} r = 10\sqrt{\frac{5}{\pi}}\text{cm}.$$

$$\textcircled{\text{D}} r = \sqrt{\frac{500}{\pi}}\text{cm}.$$

**Lời giải.**

Gọi  $r (r > 0)$  là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

$$S(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số:  $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$ .

$$S(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r.$$

$$S(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số  $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$

|         |           |                             |           |
|---------|-----------|-----------------------------|-----------|
| $r$     | $-\infty$ | $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ | $+\infty$ |
| $S'(r)$ | $-$       | $0$                         | $+$       |
| $S(r)$  | $+\infty$ |                             | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra  $S(r)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Mặt phẳng chứa trục của một hình trụ cắt hình trụ theo một thiết diện có chu vi bằng 12 cm. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ tương ứng.

- (A)  $8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ . (B)  $32\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ . (C)  $16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ . (D)  $64\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $V = \pi r^2 h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ .

Gọi  $r$  (cm) là bán kính đáy,  $h$  (cm) là đường cao của hình trụ.

Thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là  $2r$  và  $h$ .

Ta có:  $4r + 12h = 12 \Leftrightarrow 2r + h = 6 \Leftrightarrow h = 6 - 2r$ .

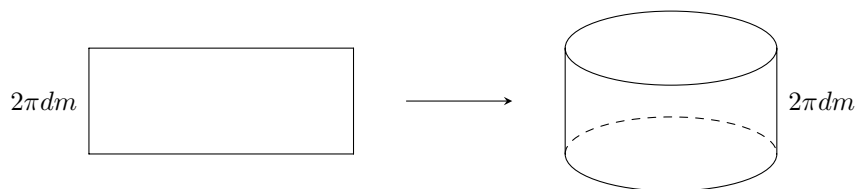
Thể tích của khối trụ:  $V = \pi r^2 h = \pi r^2 (6 - 2r) \leq \pi \left( \frac{r + r + 6 - 2r}{3} \right)^3 = 8\pi$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $r = 6 - 2r \Leftrightarrow r = 2$ .

Vậy giá trị lớn nhất của của thể tích khối trụ là  $8\pi$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài  $10,2 \text{ dm}$ , chiều rộng  $2\pi \text{ dm}$  được uốn lại thành mặt xung quanh của một chiếc thùng đựng nước có chiều cao  $2\pi \text{ dm}$  (như hình vẽ). Biết rằng chỗ ghép mất  $2 \text{ cm}$ . Hỏi thùng đựng được bao nhiêu lít nước?



- (A) 20, 4l. (B) 20l. (C) 50l. (D) 100l.

**Lời giải.**

Gọi  $r$  lần lượt là bán kính mặt đáy của thùng.

Vì chỗ ghép mất  $2 \text{ cm}$  nên ta có:  $2\pi r = 10(\text{dm}) \Leftrightarrow r = \frac{10}{2\pi}(\text{dm})$ .

Thể tích của thùng là  $V = \pi r^2 h = \pi \left( \frac{10}{2\pi} \right)^2 2\pi = 50 \text{ l}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 18.** Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ  $(H_1), (H_2)$  xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là  $r_1, h_1, r_2, h_2$  thỏa mãn  $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng  $30 \text{ cm}^3$ , thể tích của khối trụ  $(H_1)$  bằng

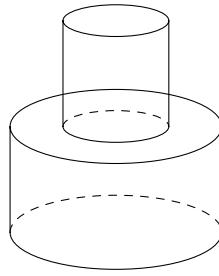
Ⓐ  $24cm^3$ .

Ⓑ  $15cm^3$ .

Ⓒ  $20cm^3$ .

Ⓓ  $10cm^3$ .

Lời giải.



Thể tích khối trụ ( $H_1$ ) là  $V_1 = \pi r_1^2 h_1$  và thể tích khối trụ ( $H_2$ ) là  $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h_1$   
 $\Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} V_1$ .

Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng  $30cm^3 \Rightarrow V_1 + V_2 = 30 \Leftrightarrow \frac{3}{2} V_1 = 30 \Leftrightarrow V_1 = 20$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 19.** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, có bán kính đáy lần lượt bằng  $1m$  và  $1,8m$ . Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ  $2,8m$ .

Ⓑ  $2,6m$ .

Ⓒ  $2,1m$ .

Ⓓ  $2,3m$ .

Lời giải.

Bán kính đáy lần lượt bằng  $1m$  và  $1,8m$  nên thể tích của từng bể nước là  $\begin{cases} V_1 = \pi r_1^2 h = \pi h \\ V_2 = \pi r_2^2 h = 3,24\pi h. \end{cases}$

Thể tích bể nước mới là  $V = V_1 + V_2 = 4,24\pi h$ .

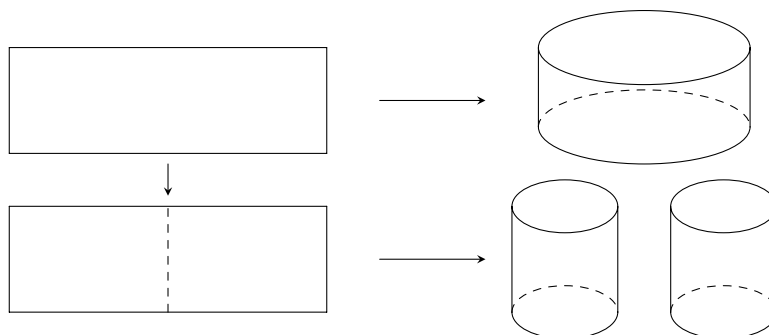
Bán kính của bể nước mới là  $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{4,24\pi h}{\pi h}} = \sqrt{4,24} \approx 2,06$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 20.** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước  $h$  và  $a$ , người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng  $h$ , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.



Kí hiệu  $V_1$  là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và  $V_2$  là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$

Ⓐ  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ .

Ⓑ  $\frac{V_1}{V_2} = 4$ .

Ⓒ  $\frac{V_1}{V_2} = 1$ .

Ⓓ  $\frac{V_1}{V_2} = 2$ .

**Lời giải.**

Gọi  $r_1, r_2$  lần lượt là bán kính của thùng theo cách 1 và cách 2. Tổng chu vi của đường tròn mặt đáy bằng  $a$  nên ta có: 
$$\begin{cases} 2\pi r_1 = a \\ 2 \cdot 2\pi r_2 = a \end{cases} \Rightarrow 2\pi r_1 = 4\pi r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 2.$$

Thể tích thùng theo từng cách là 
$$\begin{cases} V_1 = \pi r_1^2 h \\ V_2 = \pi r_2^2 h \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Chọn phương án Ⓑ

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. A  | 3. C  | 4. B  | 5. A  | 6. C  | 7. B  | 8. C  | 9. B  | 10. D |
| 11. A | 12. A | 13. A | 14. A | 15. B | 16. A | 17. C | 18. C | 19. C | 20. B |

**DẠNG 23.****LIÊN QUAN GIAO ĐIỂM TỪ HAI ĐỒ THỊ****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**Định lý:** Số nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  bằng số điểm chung của đồ thị hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ .

**Đồ thị hàm  $y = |f(x)|$ :** cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Đồ thị hàm  $y = |f(x)|$  thu được từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị  $(C)$  ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, đồng thời xóa bỏ phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở phía dưới trục hoành.

**Đồ thị hàm  $y = f(|x|)$ :** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  thu được từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở phía bên phải trục tung và lấy đối xứng phần đồ thị ở bên phải trục tung qua trục tung, đồng thời xóa bỏ phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ở bên trái trục tung.

**Tập giá trị của hàm lượng giác  $y = \sin x; y = \cos x$  là  $\mathcal{D} = [-1; 1]$ .**

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |   |   |           |   |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |   |   |           |
| $y'$ |           | + | 0 | -         | 0 | + |           |
| $y$  |           |   | 1 |           | 0 |   | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |   |   |           |   |   |           |

Số nghiệm thực của phương trình  $3f(x) - 2 = 0$  là

(A) 2.

(B) 0.

(C) 3.

(D) 1.

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dựa vào sự tương giao của hai đồ thị để tìm số nghiệm của phương trình khi cho trước bảng biến thiên của hàm số.

B1: Biến đổi phương trình tương đương với  $f(x) = \frac{2}{3}$ .

B2: Vẽ đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$  cắt ngang qua bảng biến thiên.

B3: Xác định được số giao điểm của đồ thị hàm số  $f(x)$  và đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$ , từ đó kết luận về số nghiệm của phương trình.

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

|      |           |   |   |           |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0 | - | 0         | + |
| $y$  | $-\infty$ | 1 | 0 | $+\infty$ |   |

$y = -\frac{2}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với  $f(x) = \frac{2}{3}$ .

Ta thấy đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$  có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |           |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$  | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $-3$ |           |     | $+\infty$ |     |
|      |           | $-4$ |     |      | $-4$      |     |           |     |

Số nghiệm thực của phương trình  $3f(x) + 10 = 0$  là

**(A)** 1.

**(B)** 4.

**(C)** 2.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

|      |           |      |     |      |           |     |           |     |  |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|-----|-----------|-----|--|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |           |     |  |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$  | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |  |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $-3$ |           |     | $+\infty$ |     |  |

$y = -\frac{10}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với  $f(x) = -\frac{10}{3}$ .

Ta thấy đường thẳng  $y = -\frac{10}{3}$  có bốn điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(B)**

### Câu 2.

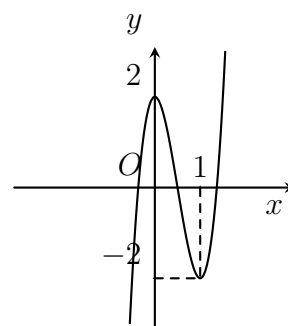
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình  $3f(x) + 1 = 0$  là

**(A)** 1.

**(B)** 4.

**(C)** 2.

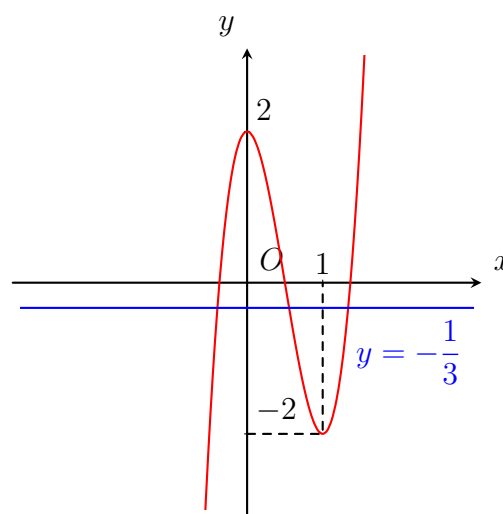
**(D)** 3.



### Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với  $f(x) = -\frac{1}{3}$ .

Ta thấy đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}$  có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.



Chọn phương án **(D)**

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:



|      |           |     |     |           |     |
|------|-----------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$ | $0$ | $+\infty$ |     |

Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - e = 0$  là

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với  $f(x) = \frac{e}{3}$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $f(x) = \frac{e}{3}$  là số giao điểm của hai đồ thị (C):  $y = f(x)$  và (d):  $y = \frac{e}{3}$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{e}{3}$  có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Do đó phương trình  $3f(x) - e = 0$  có 3 nghiệm.

Chọn phương án (C)

**Câu 4.**

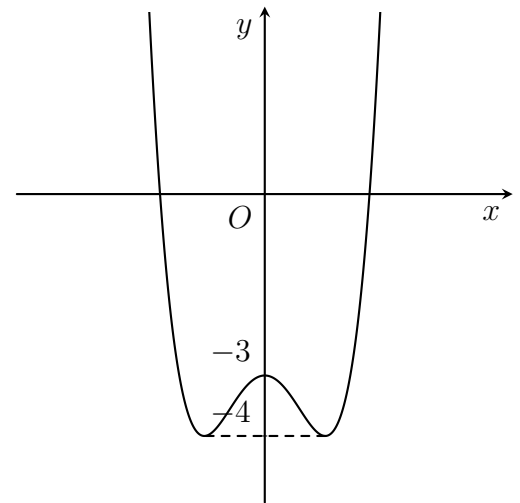
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $f(x) - m + 1 = 0$  với  $m > 4$  là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.



**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với  $f(x) = m - 1$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $f(x) = m - 1$  là số giao điểm của hai đồ thị (C):  $y = f(x)$  và (d):  $y = m - 1$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng  $y = m - 1 > 3$  có hai điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Do đó phương trình  $f(x) - m + 1 = 0$  với  $m > 4$  có 2 nghiệm.

Chọn phương án (A)

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |     |

Số nghiệm của phương trình  $|f(x)| - 3 = 0$  là

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

**Lời giải.**

Bảng biến thiên của hàm số:  $y = g(x) = |f(x)|$

|         |           |      |           |           |           |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$       | $+\infty$ |           |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       | $-$       | $0$       | $+$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ |      | $+\infty$ | $+\infty$ |           | $+\infty$ |
|         |           | $3$  |           | $2$       |           |           |

Phương trình đã cho tương đương với  $|f(x)| = 3$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $|f(x)| = 3$  là số giao điểm của hai đồ thị (C):  $y = |f(x)|$  và (d):  $y = 3$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng  $y = 3$  có 3 điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (B)

**Câu 6.**

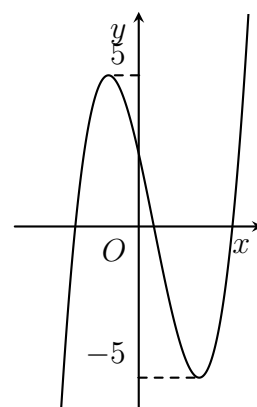
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như sau. Số nghiệm của phương trình  $|f(x)| - 2m + 1 = 0$  với  $\frac{1}{2} < m < 3$  là

(A) 5.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 3.



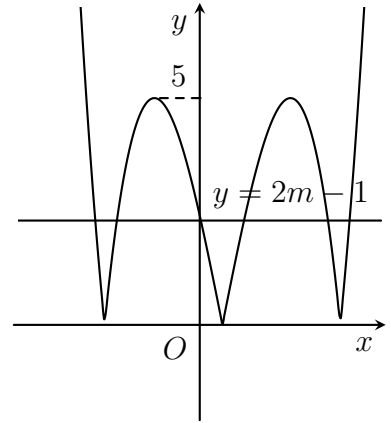
**Lời giải.**

Ta có đồ thị hàm số (C):  $y = |f(x)|$  Phương trình tương đương  $|f(x)| = 2m - 1$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $|f(x)| = 2m - 1$  là số giao điểm của hai đồ thị (C):  $y = |f(x)|$  và (d):  $y = 2m - 1$ .

Ta có  $\frac{1}{2} < m < 3 \Rightarrow 0 < 2m - 1 < 5$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng (d):  $y = 2m - 1$  có 6 điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số  $y = |f(x)| \Rightarrow$  phương trình  $|f(x)| = 2m - 1$  có 6 nghiệm phân biệt.



Chọn phương án **C**

### Câu 7.

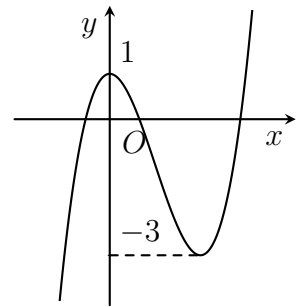
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình  $3f(|x|) = 2$  có bao nhiêu nghiệm?

**A** 3.

**B** 2.

**C** 4.

**D** 1.



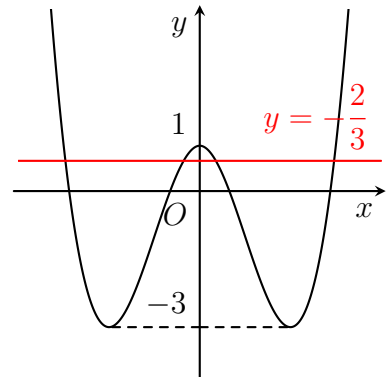
### Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số (C):  $y = f(|x|)$  như sau. Phương trình đã cho tương đương với  $f(|x|) = \frac{2}{3}$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $f(|x|) = \frac{2}{3}$  là số giao điểm của hai đồ thị (C)  $y = f(|x|)$  và (d):  $y = \frac{2}{3}$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$  có bốn điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số (C):  $y = f(|x|) \Rightarrow f(|x|) = \frac{2}{3}$  có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**



**Câu 8.** Cho hàm số:  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|         |           |     |                 |           |
|---------|-----------|-----|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\frac{4}{3}$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0   | -               | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 2   | $\frac{22}{27}$ | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình  $2f(|x|) - 1 = 0$  là

**A** 1.

**B** 4.

**C** 3.

**D** 0.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với  $f(|x|) = \frac{1}{2}$ .

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình:  $f(|x|) = \frac{1}{2}$  là số giao điểm của hai đồ thị  $(C)y = f(|x|)$  và

$(d): y = \frac{1}{2}$ .

Bảng biến thiên hàm số  $y = g(x) = f(|x|)$

|         |           |                 |     |                 |           |     |
|---------|-----------|-----------------|-----|-----------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{4}{3}$  | $0$ | $\frac{4}{3}$   | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $-$             | $0$ | $+$             | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ |                 | $2$ |                 | $+\infty$ |     |
|         |           | $\frac{22}{27}$ |     | $\frac{22}{27}$ |           |     |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  không có điểm chung với đồ thị hàm số  $(C): y = f(|x|)$ .

Vậy phương trình  $2f(|x|) - 1 = 0$  không có nghiệm.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.**

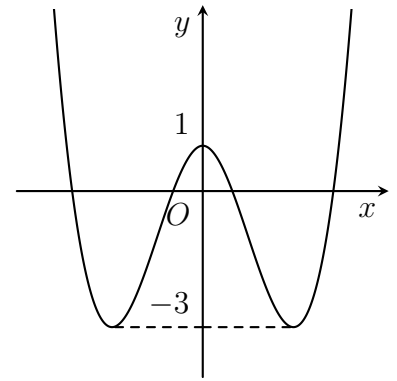
Cho hàm số:  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $\frac{1 + f(x)}{3 + 2f(x)} = 2$  là

**(A)** 2.

**(B)** 4.

**(C)** 3.

**(D)** 5.

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{1 + f(x)}{3 + 2f(x)} = 2 \Rightarrow 2(3 + 2f(x)) = 1 + f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{-5}{3}$ .

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt đường thẳng  $y = -\frac{5}{3}$  tại bốn điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |     |      |           |           |     |
|---------|-----------|-----|------|-----------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |           |     |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$       | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  |           |     | $2$  |           | $+\infty$ |     |
|         | $-\infty$ |     | $-2$ |           |           |     |

Tìm số nghiệm của phương trình  $\frac{|f(x)| - 1}{|f(x)| + 1} = \frac{1}{4}$ .

(A) 6.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 7.

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{|f(x)| - 1}{|f(x)| + 1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(|f(x)| - 1) = 1 + |f(x)| \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{5}{3}$ .

Nhận xét: Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  với  $x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3$ , ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = g(x) = |f(x)|$ :

|      |           |       |   |       |   |       |           |   |
|------|-----------|-------|---|-------|---|-------|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | $x_1$ | 0 | $x_2$ | 2 | $x_3$ | $+\infty$ |   |
| $y'$ | -         | +     | 0 | -     | + | 0     | -         | + |
| $y$  | $+\infty$ |       | 2 |       | 2 |       | $+\infty$ |   |

$y = \frac{5}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm  $y = g(x) = |f(x)|$ , ta có đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  cắt đường thẳng  $y = \frac{5}{3}$  tại sáu điểm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Chọn phương án (A)

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |     |      |     |     |      |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $+$  |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |     |      | $9$ |     | $-3$ | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình  $f^2(x) - 9 = 0$  là

(A) 4.

(B)  $I = 3$ .

(C) 5.

(D) 6.

**Lời giải.**

Ta có  $f^2(x) - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ f(x) = -3 \end{cases}$ .

Dựa vào bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$ , phương trình  $f(x) = -3$  có 2 nghiệm phân biệt, phương trình  $f(x) = 3$  có 3 nghiệm phân biệt (khác 2 nghiệm trên).

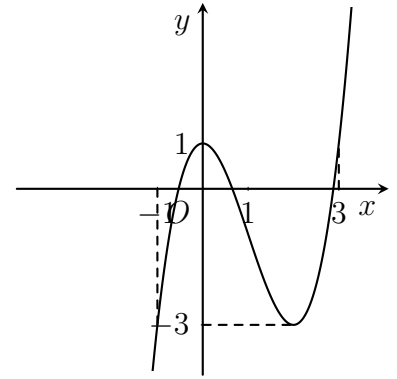
Vậy số nghiệm của phương trình  $f^2(x) - 9 = 0$  là 5.

Chọn phương án (C)

**Câu 12.**

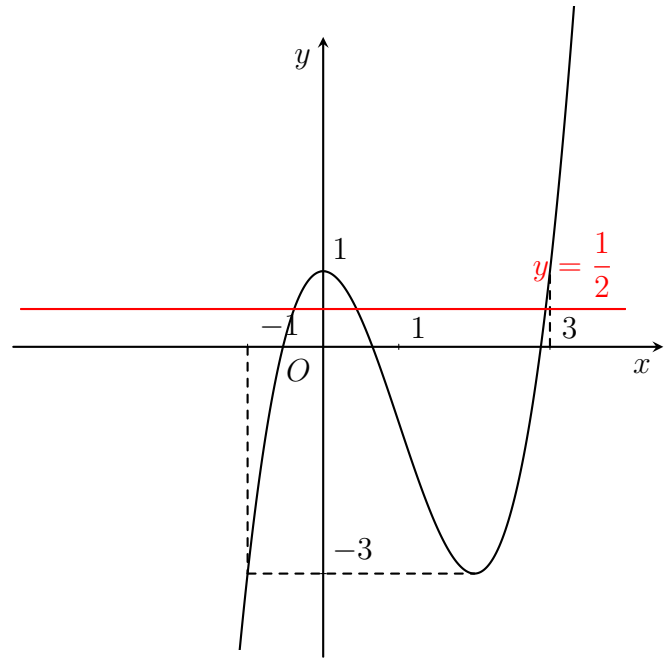
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $m$  là số nghiệm của phương trình  $2f(f(x)) = 1$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $m = 6$ .      (B)  $m = 8$ .      (C)  $m = 7$ .      (D)  $m = 9$ .



**Lời giải.**

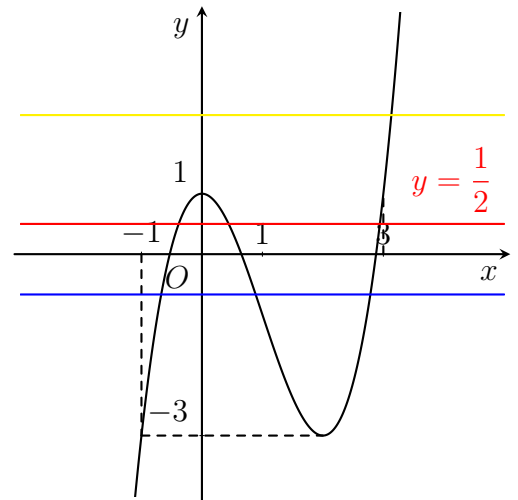
Đặt  $f(x) = u$  khi đó nghiệm của phương trình  $2f(f(x)) = 1$  chính là hoành độ giao điểm của đồ thị  $f(u)$  với đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$ .



Dựa vào đồ thị ta có  $f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = u_1 \\ f(x) = u_2 \text{ với } u_1 \in (-1; 0), \\ f(x) = u_3 \end{cases}$

$u_2 \in (0; 1)$ ,  $u_3 \in (1; 3)$ .

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số  $f(x)$  với từng đường thẳng  $y = u_1$ ,  $y = u_2$ ,  $y = u_3$ . Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu  $f(f(x)) = \frac{1}{2}$  có 7 nghiệm.



Chọn phương án (C)

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $5$  | $-3$ | $+\infty$ |     |

Phương trình  $f(x^2 - 3) = 5$  có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 2.

**Lời giải.**

Đặt  $u = x^2 - 3 \Rightarrow$  phương trình  $f(x^2 - 3) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = 3 + u_1 > 6 \end{cases}, u_1 > 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3 + u_1} \end{cases} \Rightarrow$  phương trình:  $f(x^2 - 3) = 5$  có hai nghiệm âm phân biệt.

Chọn phương án (D)

**Câu 14.**

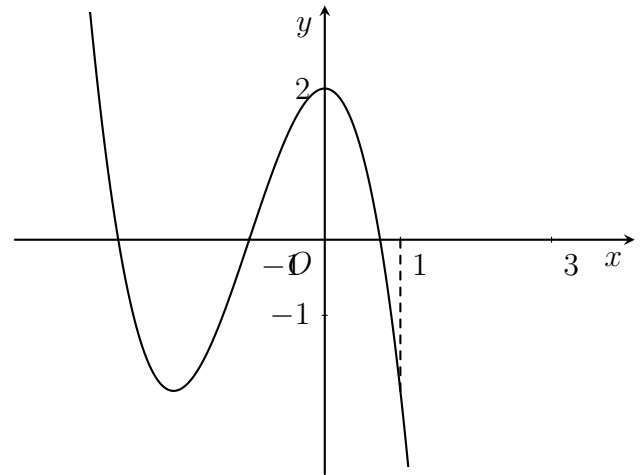
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình  $f(\cos x - 1) = 1$  có bao nhiêu nghiệm trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ ?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.



**Lời giải.**

Đặt:  $u = \cos x - 1; u \in [-2; 0]$ , phương trình trở thành:  $f(u) = 1$ .

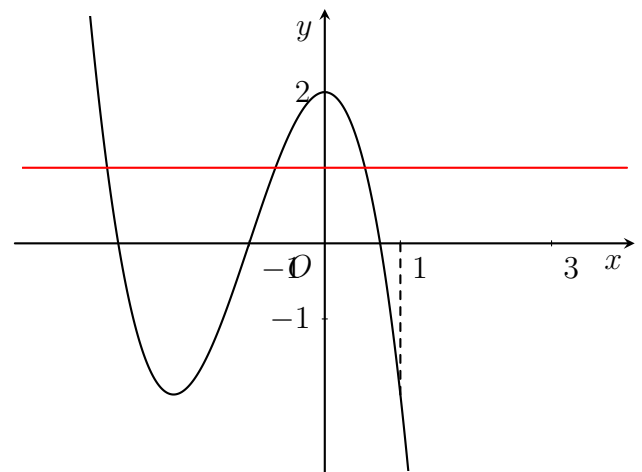
Từ đồ thị hàm số ta thấy:  $f(u) = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u = u_1 \in (-1; 0) (TM) \\ u = u_2 \in (0; 1) (L) \\ u = u \end{cases}$$

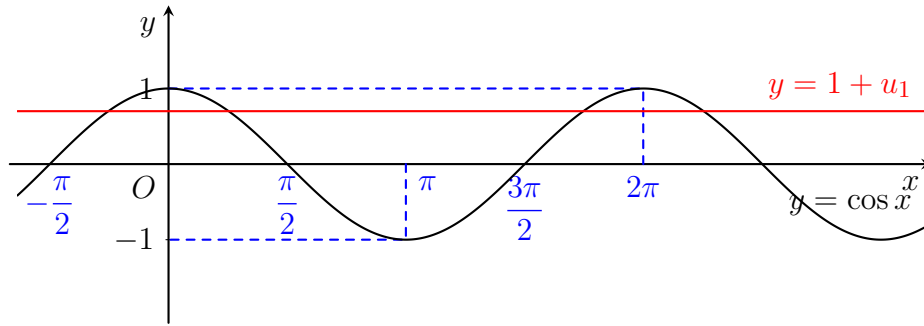
$$u = u_2 \in (0; 1) (L)$$

$$u = u \quad 3 < -2(L).$$

Với  $u = u_1 \in (-1; 0) \Rightarrow \cos x = 1 + u_1 \in (0; 1)$ .



Đồ thị hàm  $y = \cos x; x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ :



Từ đồ thị ta thấy phương trình  $\cos x = 1 + u_1 \in (0; 1)$  có 3 nghiệm phân biệt trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

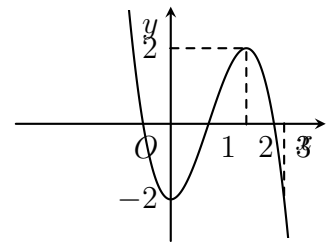
Chọn phương án **(A)**

### Câu 15.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Số nghiệm của phương trình  $f\left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 1$  là

- (A)** 3.                      **(B)** 2.                      **(C)** 1.                      **(D)** 4.



### Lời giải.

Đặt  $t = 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ , suy ra  $t \geq 1$ , ta có phương trình  $f(t) = 1$ .

Dựa vào đồ thị phương trình  $f(t) = 1$  có 3 nghiệm  $t_1, t_2, t_3$  với  $t_1 < 1 < t_2 < t_3$ .

Do  $t \geq 1 \Rightarrow$  phương trình  $f(t) = 1$  có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$\Rightarrow f\left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

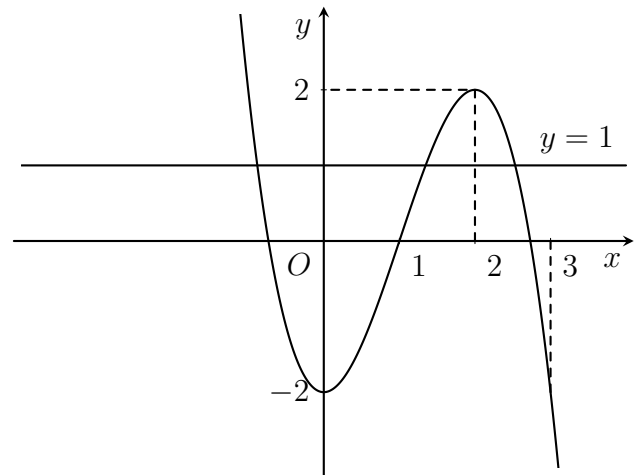
$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = t_2; t_2 \in (1; 2) \\ 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = t_3; t_3 \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{t_2 - 1}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \right. \quad (a)$$

$$\left. \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{t_3 - 1}{2} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \right] \quad (b)$$

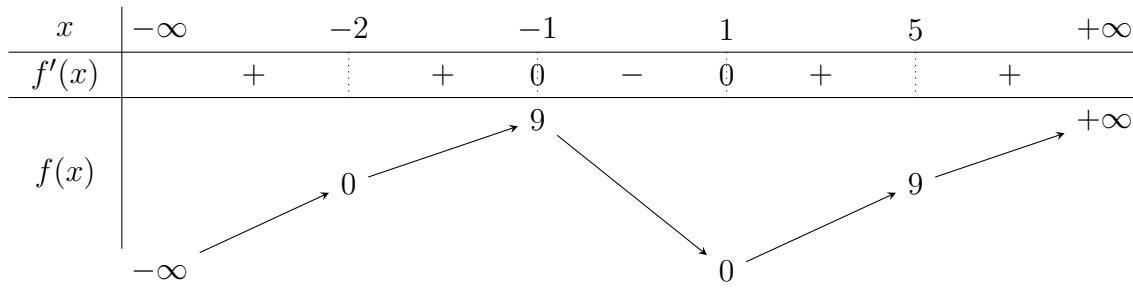
Ta thấy từng phương trình (a); (b) cho ta hai nghiệm phân biệt và các nghiệm của hai phương trình khác nhau nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(D)**



**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ.





Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(2 - 3 \sin x) = f(|m - 2|)$  có nghiệm thực?

(A) 11.

(B) 7.

(C) 4.

(D) 3.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2 - 3 \sin x \Rightarrow t \in [-1; 5], \forall x \in \mathbb{R}$ .

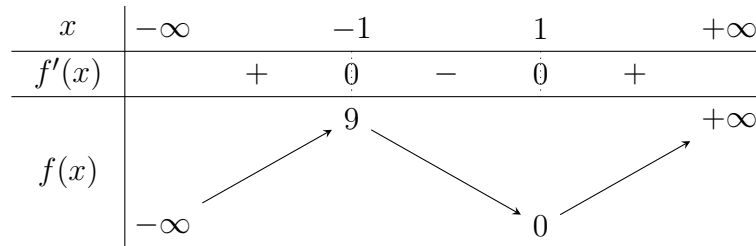
Do đó phương trình  $f(2 - 3 \sin x) = f(|m - 2|)$  trở thành:  $f(t) = f(|m - 2|)$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: phương trình  $f(t) = f(|m - 2|)$  có nghiệm  $\Leftrightarrow 0 \leq f(|m - 2|) \leq 9 \Leftrightarrow -2 \leq |m - 2| \leq 5 \Leftrightarrow |m - 2| \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 7$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \Rightarrow$  có 11 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (A)

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:



Hỏi phương trình  $|f(3 - 2x) - 2| = 2$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 5.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 3 - 2x; t \in \mathbb{R}$ , phương trình  $|f(3 - 2x) - 2| = 2$  trở thành  $|f(t) - 2| = 2$ .

Xét phương trình  $f(x) = m$ .

— Nếu  $\begin{cases} m < 0 \\ m > 9 \end{cases}$  phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

— Nếu  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 9 \end{cases}$  phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

— Nếu  $0 < m < 9$  phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có:  $|f(t) - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 2 = -2 \\ f(t) - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 0 \\ f(t) = 4. \end{cases}$

Từ kết quả trên ta suy ra  $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = t_1 \in (-\infty; -1) \end{cases};$

$$f(t) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ t = t_3 \in (-1; 1) \\ t = t_4 \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} t = t_1, t_1 \in (-\infty; -1) \\ t = t_2, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ t = t_3, t_3 \in (-1; 1) \\ t = 1 \\ t = t_4, t_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x = t_1, t_1 \in (-\infty; -1) \\ 2 - 3x = t_2, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ 2 - 3x = t_3, t_3 \in (-1; 1) \\ 2 - 3x = 1 \\ 2 - 3x = t_4, t_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - t_1}{3}, t_1 \in (-\infty; -1) \\ x = \frac{2 - t_2}{3}, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ x = \frac{2 - t_3}{3}, t_3 \in (-1; 1) \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2 - t_4}{3}, t_4 \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Nhận xét các nghiệm trên đều khác nhau.

Vậy phương trình  $|f(3 - 2x) - 2| = 2$  có 5 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(D)**

### Câu 18.

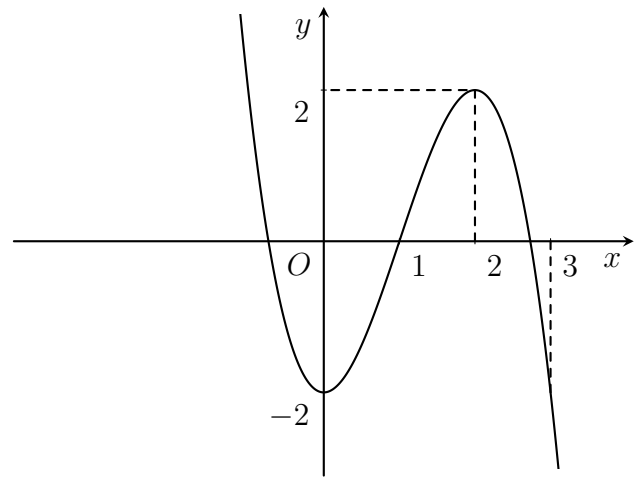
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số  $m$  để phương trình  $|f(|x|)| = \log_{\frac{1}{2}} m$  có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

**(A)**  $0 < m \leq \frac{1}{4}$ .

**(B)**  $m > \frac{1}{4}$ .

**(C)**  $m < \frac{1}{4}$ .

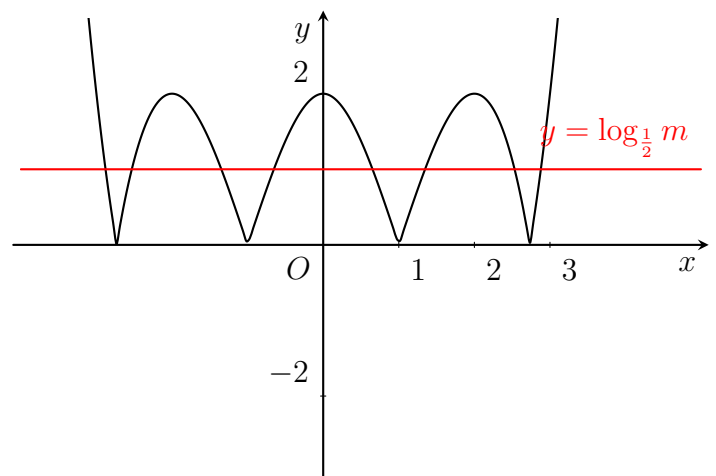
**(D)**  $0 < m < \frac{1}{4}$ .



### Lời giải.

Ta có số nghiệm của phương trình  $|f(|x|)| = \log_{\frac{1}{2}} m$  là số giao điểm của hai đồ thị  $(C): y = |f(|x|)|$  và đường thẳng  $d: y = \log_{\frac{1}{2}} m$ .

Ta có đồ thị  $(C): y = |f(|x|)|$  như hình vẽ. Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đường thẳng  $d: y = \log_{\frac{1}{2}} m$  cắt đồ thị hàm số  $(C): y = |f(|x|)|$  tại hai điểm phân biệt  $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} m > 2 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$ .



Chọn phương án **(D)**

### Câu 19.

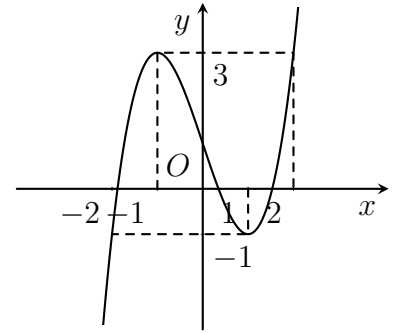
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Phương trình  $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 9.

(B) 12.

(C) 6.

(D) 3.



**Lời giải.**

Ta có:  $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(f(x) - 1) = 0. \end{cases}$

TH1:  $f(x) = 0$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình  $f(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  với  $-2 < x_1 < -1; 0 < x_2 < 1; 1 < x_3 < 2$ .

TH2:  $f(f(x) - 1) = 0$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy  $f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a_1, a_1 \in (-2; -1) \\ f(x) - 1 = a_2, a_2 \in (0; 1) \\ f(x) - 1 = a_3, a_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + a_1 \in (-1; 0) \\ f(x) = 1 + a_2 \in (1; 2) \\ f(x) = 1 + a_3 \in (2; 3). \end{cases}$

Xét phương trình  $f(x) = a$ , từ đồ thị ta nhận thấy:

Nếu  $\begin{cases} a < -1 \\ a > 3 \end{cases}$  thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Nếu  $\begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Nếu  $-1 < a < 3$  thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Dựa vào kết quả trên suy ra phương trình:  $f(f(x) - 1) = 0$  có 9 nghiệm phân biệt đều khác 3 nghiệm phân biệt của phương trình  $f(x) = 0$ .

Vậy tổng số nghiệm của phương trình  $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0$  là 12 nghiệm.

Chọn phương án (B)

**Câu 20.**

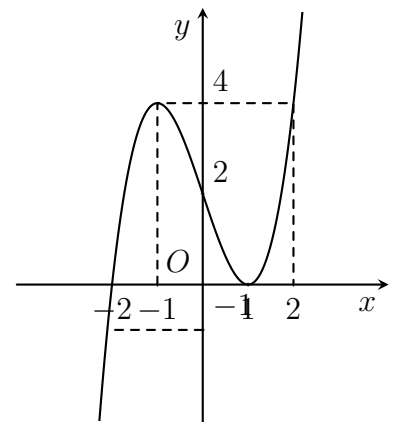
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(f(x))$ . Tìm số nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$ .

(A) 8.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 5.



**Lời giải.**

Ta có:  $g(x) = f(x) \cdot f[f(x)]$ .

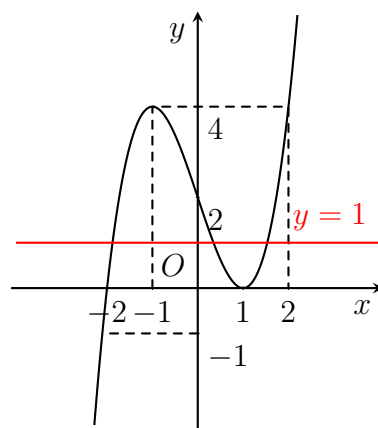
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f[f(x)] = 0(2). \end{cases}$$

**TH1:** Xét phương trình  $f(x) = 0$ . Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị nên  $f(x) = 0(1)$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ .

**TH2:** Xét phương trình  $f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 1. \end{cases}$

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  thì  $f(x) = -1$  có nghiệm duy nhất  $x_3 < -2$ .

Xét phương trình  $f(x) = 1$ , dựa vào đồ thị ta thấy số nghiệm của phương trình  $f(x) = 1$  là số giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x)$  và đường thẳng  $d: y = 1$ . Từ đồ thị trên ta thấy đường thẳng  $d: y = 1$  cắt đồ thị hàm số:  $y = f(x)$  tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $-2 < x_4 < -1$ ;  $0 < x_5 < 1$ ;  $1 < x_6 < 2$   
 $\Rightarrow$  phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình  $g(x) = 0$  có tất cả 6 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. D  | 3. C  | 4. A  | 5. B  | 6. C  | 7. C  | 8. D  | 9. B  | 10. A |
| 11. C | 12. C | 13. D | 14. A | 15. D | 16. A | 17. D | 18. D | 19. B | 20. C |

## DẠNG 24. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\begin{aligned} & \text{— } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ với } \alpha \neq -1. \\ & \text{— } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \text{ với } a \neq 0. \end{aligned}$$

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

(A)  $x + 3 \ln(x-1) + C.$

(B)  $x - 3 \ln(x-1) + C.$

(C)  $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

(D)  $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

**Lời giải.**

#### Phân tích hướng dẫn giải

1) DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm nguyên hàm cơ bản.

2) HƯỚNG GIẢI:

— Phân tích  $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}.$

— Áp dụng công thức trong bảng nguyên hàm:  $\int f(x) dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right) dx = x + 3 \ln|x-1| + C.$

— Vì  $x \in (1; +\infty)$  nên  $\int f(x) dx = x + 3 \ln(x-1) + C.$

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)+3}{x-1} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right) dx = x + 3 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Vì  $x \in (1; +\infty)$  nên  $|x-1| = x-1.$

Do đó  $\int f(x) dx = x + 3 \ln(x-1) + C.$

Chọn phương án (A)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$  trên khoảng  $(3; +\infty)$  là

Ⓐ  $\ln \frac{x-3}{x-1} + C.$

Ⓑ  $\frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C.$

Ⓒ  $\frac{1}{2} \ln (x^2 - 4x + 3) + C.$

Ⓓ  $\ln (x^2 - 4x + 3) + C.$

**Lời giải.**

Phân tích hướng dẫn giải:

1) DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán về tính nguyên hàm cơ bản.

2) KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

—  $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$  với  $a \neq b$ .

—  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$  với  $a \neq 0$ .

—  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b > 0$ .

—  $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|$  với  $a \neq b$ .

3) HƯỚNG GIẢI:

— Phân tích nhân tử mẫu số và đưa  $f(x)$  về thành hiệu hai phân thức.

— Áp dụng công thức trong bảng nguyên hàm.

— Chú ý điều kiện  $x \in (3; +\infty)$  để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ta có lời giải cụ thể như sau:

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln |x-3| - \ln |x-1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

Vì  $x \in (3; +\infty)$  nên  $|x-1| = x-1$ ;  $|x-3| = x-3$ .

Do đó  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C.$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 2.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  thỏa mãn  $F(e+1) = 4$ .

Tìm  $F(x)$ .

(A)  $F(x) = 2 \ln(x-1) + 2$ .

(B)  $F(x) = \ln(x-1) + 3$ .

(C)  $F(x) = 4 \ln(x-1)$ .

(D)  $F(x) = \ln(x-1) - 3$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $F(x) = \int \frac{dx}{x-1} + C = \ln|x-1| + C$ .

Vì  $x \in (1; +\infty)$  nên  $F(x) = \ln(x-1) + C$ .

Lại có  $F(e+1) = 4$ . Suy ra  $1 + C = 4$  hay  $C = 3$ .

Vậy  $F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + 3$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ . Biết  $F(0) = 2$ , hãy tính  $F(1)$ .

(A)  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$ .

(B)  $F(1) = \ln 3 + 2$ .

(C)  $F(1) = 2 \ln 3 - 2$ .

(D)  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$ .

Lại có:

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

Vậy  $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$  với mọi  $x \neq 1$ . Biết  $f(0) = 2017$  và  $f(2) = 2018$ . Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

(A)  $S = \ln 4035$ .

(B)  $S = 4$ .

(C)  $S = \ln 2$ .

(D)  $S = 1$ .

**Lời giải.**

Trên khoảng  $(1; +\infty)$  ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C_1$ .

Mà  $f(2) = 2018$ , suy ra  $C_1 = 2018$ .

Trên khoảng  $(-\infty; 1)$  ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(1-x) + C_2$ .

Mà  $f(0) = 2017$ , suy ra  $C_2 = 2017$ .

Vậy  $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Suy ra  $f(3) = \ln 2 + 2018$  và  $f(-1) = \ln 2 + 2017$ .

Vậy  $S = f(3) - f(-1) = 1$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 5.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$  thỏa mãn  $F(2) = 3$ . Tìm  $F(x)$ .

(A)  $F(x) = x + 4 \ln|2x-3| + 1$ .

(B)  $F(x) = x + 2 \ln(2x-3) + 1$ .



$$\textcircled{C} F(x) = x + 2 \ln |2x - 3| + 1.$$

$$\textcircled{D} F(x) = x + 2 \ln |2x - 3| - 1.$$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{2x+1}{2x-3} dx = \int \left(1 + \frac{4}{2x-3}\right) dx = x + 2 \ln |2x-3| + C.$$

$$\text{Lại có } F(2) = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 \ln |1| + C = 3 \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy nguyên hàm cần tìm là  $F(x) = x + 2 \ln |2x - 3| + 1$ .

Chọn phương án  $\textcircled{C}$

**Câu 6.** Cho biết  $\int \frac{4x+1}{2x+3} dx = ax - \frac{b}{2} \ln(2x+3) + C$  với  $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$  ( $a, b$  là các tham số thực).

Mệnh đề nào sau đây?

$$\textcircled{A} 2a - b = -1.$$

$$\textcircled{B} 2a - b = -3.$$

$$\textcircled{C} 2a - b = 9.$$

$$\textcircled{D} 2a - b = 7.$$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \int \frac{4x+1}{2x+3} dx = \int \left(2 - \frac{5}{2x+3}\right) dx = 2x - \frac{5}{2} \ln |2x+3| + C.$$

$$\text{Vì } x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \text{ nên } |2x+3| = 2x+3.$$

$$\text{Do đó } \int \frac{4x+1}{2x+3} dx = 2x - \frac{5}{2} \ln(2x+3) + C. \text{ Vậy } a = 2, b = 5, \text{ suy ra } 2a - b = -1.$$

Chọn phương án  $\textcircled{A}$

**Câu 7.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x^2+a}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  ( $a$  là tham số thực). Biết  $F(1) = F(e) = 2$ . Tìm  $a$ .

$$\textcircled{A} a = -1.$$

$$\textcircled{B} a = 1 - e^2.$$

$$\textcircled{C} T = 1 + e^2.$$

$$\textcircled{D} a = 1.$$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{2x^2+a}{x} dx \\ &= \int \left(2x + \frac{a}{x}\right) dx = x^2 + a \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Vì  $x \in (0; +\infty)$  nên  $|x| = x$ . Suy ra  $F(x) = x^2 + a \ln x + C$ .

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} F(1) = 2 \\ F(e) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + C = 2 \\ e^2 + a + C = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 - e^2.$$

Vậy  $a = 1 - e^2$ .

Chọn phương án  $\textcircled{B}$

**Câu 8.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+3}$  trên khoảng  $(-3; +\infty)$  là

$$\textcircled{A} \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+3) + C.$$

$$\textcircled{B} x + 2 \ln(x+3) + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{x^2}{2} + \ln(x+3) + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{x^2}{2} - 2 \ln(x+3) + C.$$

**Lời giải.**

Ta có

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} dx = \int \left( x + \frac{2}{x + 3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x + 3| + C.$$

Vì  $x \in (-3; +\infty)$  nên  $|x + 3| = x + 3$ .

Do đó  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x + 3) + C$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 9.** Biết  $\int \frac{3}{x^2 + 4x + 3} dx = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 3} \right| + C$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**(A)**  $a + 2b = 8$ .

**(B)**  $a + b = 8$ .

**(C)**  $2a + b = 8$ .

**(D)**  $a - b = 8$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int \frac{3}{(x + 1)(x + 3)} dx = \frac{3}{2} \int \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} (\ln |x + 1| - \ln |x + 3|) = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Vậy  $a = 3$ ,  $b = 2$ , suy ra  $2a + b = 8$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Biết  $\int \frac{2x - 13}{(x + 1)(x - 2)} dx = a \ln |x + 1| + b \ln |x - 2| + C$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**(A)**  $a + 2b = 8$ .

**(B)**  $a + b = 8$ .

**(C)**  $2a - b = 8$ .

**(D)**  $a - b = 8$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 13}{(x + 1)(x - 2)} dx &= \int \left( \frac{5}{x + 1} - \frac{3}{x - 2} \right) dx \\ &= 5 \int \frac{1}{x + 1} dx - 3 \int \frac{1}{x - 2} dx \\ &= 5 \ln |x + 1| - 3 \ln |x - 2| + C. \end{aligned}$$

Suy ra  $a = 5$  và  $b = -3$ . Do đó,  $a - b = 8$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Biết  $I = \int_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} dx = a \ln b + c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính tổng  $T = a + b + c$ .

**(A)**  $T = 3$ .

**(B)**  $T = 0$ .

**(C)**  $T = 1$ .

**(D)**  $T = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx \\ &= \left(x - \ln|x^2+1|\right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ .

Vậy  $a + b + c = 2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 12.** Biết hàm số  $F(x) = (ax + b)\sqrt{4x+1}$  ( $a, b$  là các tham số thực) là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}}$ . Tính  $a + b$ .

**(A)**  $a + b = 0$ .

**(B)**  $a + b = 1$ .

**(C)**  $a + b = 2$ .

**(D)**  $a + b = 3$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$F(x) = a\sqrt{4x+1} + (ax+b) \cdot \frac{2x}{\sqrt{4x+1}} = \frac{6ax + a + 2b}{\sqrt{4x+1}}.$$

Vì  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  nên

$$\frac{6ax + a + 2b}{\sqrt{4x+1}} = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}}, \forall x > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 12 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Do đó  $a + b = 1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$  ( $a, b, c$  là các số nguyên) là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$  trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . Tính  $T = a + b + c$ .

**(A)**  $T = 8$ .

**(B)**  $T = 5$ .

**(C)**  $T = 6$ .

**(D)**  $T = 7$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{5ax^2 + (3b - 6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

Vì  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  nên

$$\begin{aligned} \frac{5ax^2 + (3b - 6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} &= \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}, \forall x > -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra  $T = 7$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 14.** Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$  thỏa mãn  $F(0) = 0$  và  $F(3) = 7$  ( $m$  là tham số thực). Tính  $m$ .

**(A)**  $m = -2$ .

**(B)**  $m = 3$ .

**(C)**  $m = -3$ .

**(D)**  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \int \left( \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1 \right) dx = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$ .

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3. \end{cases}$$

Vậy  $F(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 15.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}$  trên khoảng  $(-1; +\infty)$  là

**(A)**  $(x+3)\sqrt{x+3} - (x+1)\sqrt{x+1} + C$ .

**(B)**  $\frac{3}{4} [(x+3)\sqrt{x+3} + (x+1)\sqrt{x+1}] + C$ .

**(C)**  $\frac{1}{3} [(x+3)\sqrt{x+3} + (x+1)\sqrt{x+1}] + C$ .

**(D)**  $\frac{1}{4} [(x+3)\sqrt{x+3} + (x+1)\sqrt{x+1}] + C$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}} = \int \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ (x+3)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \frac{1}{3} \left[ (x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C \\ &= \frac{1}{3} [(x+3)\sqrt{x+3} + (x+1)\sqrt{x+1}] + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = \sin 2x + 3 \cos x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Biết  $f(\pi) = 0$ . Tính  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**(A)**  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{2}$ .

**(B)**  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ .

**(C)**  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ .

**(D)**  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sin 2x + 3 \cos x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + 3 \sin x + C.$$

Từ giả thiết  $f(\pi) = 0$ , ta có  $-\frac{1}{2} + C = 0$  hay  $C = \frac{1}{2}$ .

Do đó,  $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 3 \sin x + \frac{1}{2}$ .

Vậy  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 4$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3e^{2x} + 2$ . Biết  $F(0) = 0$ . Tìm  $F(x)$ .

**(A)**  $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 2x - \frac{3}{2}$ .

**(B)**  $F(x) = 3e^{2x} + 2x - 3$ .

**(C)**  $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 2x$ .

**(D)**  $F(x) = -\frac{3}{2}e^{2x} + 2x + \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (3e^{2x} + 2) dx = \frac{3}{2}e^{2x} + 2x + C.$$

Từ giả thiết  $F(0) = 0$ , suy ra  $\frac{3}{2}e^0 + C = 0$  hay  $C = -\frac{3}{2}$ .

Vậy  $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 2x - \frac{3}{2}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 18.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 + a \cdot e^x$  ( $a$  là tham số thực). Biết  $F(0) = 2$ ,  $F(1) = 2$ . Tính  $T = (1 - e) \cdot a$ .

**(A)**  $T = -1$ .

**(B)**  $T = -2$ .

**(C)**  $T = e$ .

**(D)**  $T = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int (2 + a \cdot e^x) dx = 2x + ae^x + C$ .

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} F(0) = 2 \\ F(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + C = 2 \\ a \cdot e + C = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{1 - e}.$$

Vậy  $T = (1 - e) \cdot \frac{2}{1 - e} = 2$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 19.** Hàm số  $f(x)$  có một nguyên hàm là  $F(x) = e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x) + 1}{e^x}$ .

**(A)**  $\int \frac{f(x) + 1}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + C$ .

**(B)**  $\int \frac{f(x) + 1}{e^x} dx = 2e^x - e^{-x} + C$ .

**(C)**  $\int \frac{f(x) + 1}{e^x} dx = 2e^x + e^{-x} + C$ .

**(D)**  $\int \frac{f(x) + 1}{e^x} dx = \frac{1}{2}e^x - e^{-x} + C$ .

**Lời giải.**

Vì hàm số  $y = f(x)$  có một nguyên hàm là  $F(x) = e^{2x}$  nên ta có  $f(x) = F'(x) = 2e^{2x}$ .

Do đó:

$$\int \frac{f(x) + 1}{e^x} dx = \int \frac{2e^{2x} + 1}{e^x} dx = \int (2e^x + e^{-x}) dx = 2e^x - e^{-x} + C.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 20.** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ . Biết  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$ . Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$ .

**(A)**  $S = \{2\}$ .

**(B)**  $S = \{-2; 2\}$ .

**(C)**  $S = \{1; 2\}$ .

**(D)**  $S = \{-2; 1\}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$F(x) = \int \frac{dx}{e^x + 3} = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 3}\right) dx = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3)) + C.$$

Vì  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$  nên  $C = 0$ . Vậy  $F(x) = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3))$ .

Do đó,  $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$ .

Chọn phương án **A**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. B  | 3. D  | 4. D  | 5. C  | 6. A  | 7. B  | 8. A  | 9. C  | 10. D |
| 11. D | 12. B | 13. D | 14. B | 15. C | 16. C | 17. A | 18. D | 19. B | 20. A |

**DẠNG 25.****TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG HÀM MŨ VÀ LÔGARIT****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

- 1) Lãi đơn: Khách hàng gửi vào ngân hàng  $A$  đồng với lãi đơn  $r$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  kì hạn ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là  $S_n = A + nAr = A(1 + nr)$ .
- 2) Lãi kép: Khách hàng gửi vào ngân hàng  $A$  đồng với lãi kép  $r$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  kì hạn ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là  $S_n = A(1 + r)^n$ . Từ đó ta có thể tìm các giá trị:  $r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$ ,  $A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}$ ,  $n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n}{A} \right)$ .

- 3) Bài toán tăng trưởng dân số: Công thức tính tăng trưởng dân số

$$X_m = X_n(1 + r)^{m-n}, (m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$$

trong đó:

$r$  là tỉ lệ tăng dân số từ năm  $n$  đến năm  $m$ .

$X_m$  là dân số năm  $m$ .

$X_n$  là dân số năm  $n$ .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là  $r = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$ .

- 4) Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là  $A$  đồng với lãi suất  $r$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ số tiền là  $X$  đồng. Ta có công thức tính số tiền còn lại sau  $n$  tháng:  $S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$ .
- 5) Tiền gửi hàng tháng: Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền  $A$  đồng với lãi kép  $r$ /tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  tháng ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là  $S_n$  là  $S_n = \frac{A}{r} [(1 + r)^n - 1] (1 + r)$  Từ đó ta có  $n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right)$ ,  $A = \frac{S_n \cdot r}{(1 + r) [(1 + r)^n - 1]}$ .

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức  $S = A \cdot e^{nr}$ , trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $n$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

(A) 109.256.100.

(B) 108.374.700.

(C) 107.500.500.

(D) 108.311.100.



**Lời giải.****Phân tích hướng dẫn giải****1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán tăng trưởng dân số.**2. HƯỚNG GIẢI:**B1. Xác định các yếu tố  $A, n, r$  trong công thức.B2. Áp dụng công thức  $S = A \cdot e^{nr}$  trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $n$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.**LỜI GIẢI CHI TIẾT**Lấy năm 2017 làm mốc, ta có  $A = 93 \cdot 671 \cdot 600$ ;  $n = 2035 - 2017 = 18$  $\Rightarrow$  Dân số Việt Nam vào năm 2035 là  $S = 93671600 \cdot e^{18 \cdot \frac{0,81}{100}} \approx 108 \cdot 374 \cdot 700$ .Chọn phương án **(B)****3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN****Câu 1.** Cho biết rằng sự tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì dân số sau  $N$  năm được tính theo công thức tăng trưởng liên tục  $S = A \cdot e^{Nr}$  trong đó  $A$  là dân số tại thời điểm mốc,  $S$  là số dân sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Biết năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?**(A)** 7879 triệu người. **(B)** 7680 triệu người. **(C)** 7782 triệu người. **(D)** 7777 triệu người.**Lời giải.**Lấy năm 2013 làm mốc, ta có  $A = 7095$ ,  $N = 2020 - 2013 = 7$  $\Rightarrow$  Dân số thế giới vào năm 2020 là  $S = 7095 \cdot e^{7 \cdot \frac{1,32}{100}} \approx 7781,82$  triệu người.Chọn phương án **(C)****Câu 2.** Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600.000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ tiếp tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5.000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi  $a$  (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có:**(A)**  $a \in [610000; 615000)$ . **(B)**  $a \in [605000; 610000)$ .**(C)**  $a \in [600000; 605000)$ . **(D)**  $a \in [595000; 600000)$ .**Lời giải.**

Theo giả thiết An bỏ ống tiết kiệm từ ngày 1 tháng 1 đến ngày 30 tháng 4 nên tổng số ngày bỏ tiết kiệm là 120 ngày.

Ngày thứ nhất An bỏ ống: 10000 đồng.

119 ngày sau An bỏ ống số tiền là  $119 \times 5000 = (120 - 1) \times 5000 = 600000 - 5000$  đồng.

Vậy tổng số tiền tiết kiệm là  $a = 600000 - 5000 + 10000 = 605000$  đồng.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất 0,6%/tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì tổng số tiền người đó có được là bao nhiêu?

- (A)** 55,664 triệu đồng. **(B)** 54,694 triệu đồng. **(C)** 55,022 triệu đồng. **(D)** 54,368 triệu đồng.

**Lời giải.**

Gọi  $T$  là số tiền cả vốn lẫn lãi sau 15 tháng.

$M$  là số tiền gửi ban đầu.

$n$  là số kì hạn tính lãi.

$r$  là suất định kỳ, tính theo %.

Hết kì hạn thì số tiền người đó là

$$T = M(1 + r)^n = 50000000 \cdot (1 + 0,6\%)^{15} = 54694003,63 \approx 54694000 \text{ đồng.}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Biết rằng, dân số của Việt Nam ngày 1 tháng 4 năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 thì dân số của Việt Nam là

- (A)** 106.118.331 người. **(B)** 198.049.810 người. **(C)** 107.232.574 người. **(D)** 107.323.573 người.

**Lời giải.**

Dân số vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 là  $90728900 \times (1 + 1,05\%)^{16} = 107232574$  người.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 5.** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức  $S = A \cdot e^{Nr}$  (trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỷ lệ tăng dân số hằng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỷ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- (A)** (1.281.600; 1.281.700). **(B)** (1.281.700; 1.281.800).  
**(C)** (1.281.800; 1.281.900). **(D)** (1.281.900; 1.282.000).

**Lời giải.**

Áp dụng công thức  $S = A \cdot e^{Nr}$  từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có

$$1153600 = 1038229 \cdot e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{5} \ln \frac{1153600}{1038229}.$$

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là  $S = 1038229 \cdot e^{10 \cdot \frac{1}{5} \ln \frac{1153600}{1038229}} \approx 1281792$  người.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 6.** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức  $S(t) = S(0) \cdot 2^t$ , trong đó  $S(0)$  là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu,  $S(t)$  là số lượng vi khuẩn A có sau  $t$  phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

Ⓐ 19 phút.

Ⓑ 48 phút.

Ⓒ 12 phút.

Ⓓ 7 phút.

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có  $S(3) = S(0) \cdot 2^3$  hay  $S(0) = \frac{S(3)}{2^3} = \frac{625000}{8} = 78125$ .

Vậy sau  $t$  phút, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn  $A$  là 10 triệu con thì  $10000000 = 78125 \cdot 2^t$  hay  $2^t = \frac{10000000}{78125} = 128$ . Từ đây suy ra  $t = 7$  (phút).

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 7.** Anh Nam gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất không thay đổi hàng năm là 7,5 % năm. Sau 5 năm thì anh Nam nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là

Ⓐ 685755000 đồng.

Ⓑ 717815000 đồng.

Ⓒ 667735000 đồng.

Ⓓ 707645000 đồng.

**Lời giải.**

Số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 5 năm là  $T = 500 \cdot 10^6(1 + 0,075)^5 = 717815000$  đồng.

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 8.** Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng 1,5% mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

Ⓐ 2.

Ⓑ 28.

Ⓒ 23.

Ⓓ 24.

**Lời giải.**

Áp dụng công thức  $S_n = A(1 + r)^n$ .

Suy ra  $n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n}{A} \right)$ .

Trong đó  $A = 7$  (tỉ người),  $S_n = 10$  (tỉ người),  $r = 1,5\% = \frac{1,5}{100}$ .

Ta được  $n = 23,95622454$ .

Vậy sau ít nhất 24 năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người.

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 9.** Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn quý với lãi suất 1,65%/ quý. Hỏi sau ít nhất bao lâu thì người đó nhận được 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

Ⓐ 5 năm.

Ⓑ 4 năm 2 quý.

Ⓒ 3 năm 2 quý.

Ⓓ 4 năm.

**Lời giải.**

Ta biết, nếu gửi số tiền  $A$  vào ngân hàng  $n$  kỳ hạn theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi của mỗi kỳ hạn là  $r$  thì sau  $n$  kỳ hạn số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi là  $N = A(1 + r)^n$ .

Gọi số kỳ hạn mà người đó gửi là  $n$ .

Sau  $n$  kỳ hạn số tiền cả vốn lẫn lãi nhận về là  $N = 15000000 \left( 1 + \frac{1,65}{100} \right)^n = 15000000 \cdot 1,0165^n$ .

Theo giả thiết  $N = 20000000$ .

Vậy ta có  $15000000 \cdot 1,0165^n = 20000000 \Leftrightarrow 1,0165^n = \frac{4}{3} \Leftrightarrow n = \log_{1,0165} \left( \frac{4}{3} \right) \approx 17,6$ .

Kết luận Người đó phải gửi ít nhất 18 kỳ hạn, tương đương 18 quý (tức 4 năm 2 quý).

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 10.** Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng, với kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 2%/kỳ. Theo hình thức lãi kép, hết 6 tháng người đó gửi thêm 100 triệu đồng, với kỳ hạn và lãi suất như trước. Sau một năm kể từ lần gửi đầu tiên số tiền người đó có được gần nhất với số nào sau đây?

- (A) 210 triệu. (B) 220 triệu. (C) 212 triệu. (D) 216 triệu.

**Lời giải.**

Theo công thức lãi kép, sau 6 tháng (2 kỳ) số tiền người đó nhận được là  $a = 100(1 + 2\%)^2 = 104,04$  triệu.

Sau 6 tháng tiếp theo, số tiền người đó thu được tổng cộng là

$$(a + 100)(1 + 2\%)^2 = 204,04 \cdot (1 + 2\%)^2 = 212,283216 \text{ triệu.}$$

Như vậy sau một năm số tiền người đó có được gần nhất với 212 triệu.

Chọn phương án (C)

**Câu 11.** Một thầy giáo gửi 200 triệu đồng loại kỳ hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất 3,45%/kỳ. Hỏi sau 6 năm 9 tháng, thầy giáo đó nhận số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu? Biết rằng thầy giáo đó không rút lãi ở tất cả các kỳ hạn trước và nếu rút trước hạn thì ngân hàng sẽ trả lãi theo lãi suất không kỳ hạn 0,002%/ ngày (Giả sử một tháng có 30 ngày).

- (A) 471688328 đồng. (B) 321556228 đồng. (C) 311392503 đồng. (D) 302088933 đồng.

**Lời giải.**

— Gọi số tiền gửi ban đầu là  $T$  đồng,  $r$  là lãi suất của 1 kỳ.

Theo thể thức lãi kép thì:

Sau kỳ thứ nhất, tổng số tiền thu về là  $T_1 = T + T \cdot r = T(1 + r)$ .

Sau kỳ thứ hai, tổng số tiền thu về là  $T_2 = T_1 + T_1 \cdot r = T_1(1 + r) = T(1 + r)^2$ .

Sau kỳ thứ  $n$ , tổng số tiền thu về là  $T_n = T(1 + r)^n$ .

— Thầy giáo gửi tiền trong thời gian 6 năm 9 tháng nên trong 6 năm 6 tháng đầu (tương ứng với 13 kỳ mỗi kỳ 6 tháng) hưởng lãi suất 3,45%/1 kỳ, trong 90 ngày tiếp theo hưởng lãi suất không kỳ hạn 0,002%/ ngày.

Vậy tổng số tiền thầy giáo nhận được là  $20 \cdot 10^6 \left(1 + \frac{3,45}{100}\right)^{13} \left(1 + \frac{0,002}{100}\right)^{90} = 311392503$  đồng.

Chọn phương án (C)

**Câu 12.** Anh Nam mới ra trường và đi làm với mức lương khởi điểm là 6 triệu đồng/ tháng. Anh muốn dành một khoản tiền tiết kiệm bằng cách trích ra 20% lương hàng tháng gửi vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,5%/ tháng. Hỏi sau một năm, số tiền tiết kiệm của anh Nam gần nhất với số nào sau đây?

- (A) 15320000 đồng. (B) 14900000 đồng. (C) 14880000 đồng. (D) 15876000 đồng.

**Lời giải.**

Số tiền anh Nam trích ra từ tiền lương để gửi tiết kiệm hàng tháng là  $M = 20\% \cdot 6000000 = 1200000$  đồng.

Đầu mỗi tháng anh Nam gửi số tiền cố định là  $M$  vào ngân hàng với lãi suất cố định là  $r$  với kì hạn

$N$  tháng ta có công thức tính tiền thu được của anh sau  $N$  tháng gửi là  $T = M(1 + r) \frac{(1 + r)^N - 1}{r}$ .  
 Từ đó suy ra  $T = 1200000(1 + 0 \cdot 5\%) \frac{(1 + 0 \cdot 5\%)^{12} - 1}{0 \cdot 5\%} = 14876668$  đồng.

Chọn phương án **C**

**Câu 13.** Một người tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty X với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty là 12 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất hàng năm không đổi là 6%/ năm. Hỏi sau đúng 18 năm kể từ ngày đóng, người đó thu về được tất cả bao nhiêu tiền? Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.

**(A)** 412, 23 (triệu đồng).

**(B)** 393, 12 (triệu đồng).

**(C)** 403, 32 (triệu đồng).

**(D)** 293, 32 (triệu đồng).

**Lời giải.**

Đặt  $p = 6\% = 0,06$ .

Theo bài ra ta có:

Sau một năm số tiền có được là  $12 + 12p = 12 \cdot (1 + p)$ .

Sau hai năm số tiền có được là  $[12 + 12 \cdot (1 + p)] \cdot (1 + p) = 12 \cdot [(1 + p) + (1 + p)^2]$ .

....

Sau  $n$  năm số tiền có được là  $12 \cdot [(1 + p) + (1 + p)^2 + \dots + (1 + p)^n] = 12 \cdot \frac{(1 + p)[(1 + p)^n - 1]}{(1 + p) - 1}$ .

Sau 18 năm số tiền có được là  $12 \cdot \frac{(1 + 0,06)[(1 + 0,06)^{18} - 1]}{(1 + 0,06) - 1} \approx 393,12$  (triệu đồng).

Chọn phương án **B**

**Câu 14.** Một kĩ sư mới ra trường làm việc với mức lương khởi điểm là 7.000.000 đồng/tháng. Cứ sau 9 tháng làm việc, mức lương của kĩ sư đó lại được tăng thêm 10%. Hỏi sau 4 năm làm việc, tổng số tiền lương kĩ sư đó nhận được là bao nhiêu?

**(A)** 415.367.400 đồng.

**(B)** 418.442.010 đồng.

**(C)** 421.824.081 đồng.

**(D)** 407.721.300 đồng.

**Lời giải.**

Tổng tiền lương 9 tháng đầu là  $9 \cdot 7 \cdot 10^6$  (đồng).

Tiền lương tháng 10 là  $7 \cdot 10^6(1 + 10\%) = 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1$  đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 10 đến tháng 18 là  $9 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1$  đồng.

Tiền lương tháng 19 là  $7 \cdot 10^6(1 + 10\%)^2 = 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^2$  đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 19 đến tháng 27 là  $9 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^2$  đồng.

Tiền lương tháng 28 là  $7 \cdot 10^6(1 + 10\%)^3 = 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^3$  đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 28 đến tháng 36 là  $9 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^3$  đồng.

Tiền lương tháng 37 là  $7 \cdot 10^6(1 + 10\%)^4 = 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^4$  đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 37 đến tháng 45 là  $9 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^4$  đồng.

Tiền lương tháng 46 là  $7 \cdot 10^6(1 + 10\%)^5 = 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^5$  đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 46 đến tháng 48 là  $3 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 1,1^5$  đồng.

Tổng tiền lương sau 4 năm (từ tháng 1 đến tháng 48) là  $418 \cdot 442 \cdot 010$  đồng.

Chọn phương án **B**

**Câu 15.** Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gửi đúng 4.000.000 đồng vào

một ngày cố định của tháng ở ngân hàng  $A$  với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là  $0,6\%$ / tháng. Gọi  $A$  đồng là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A)  $3.350.000.000 < A < 3.400.000.000$ .

(B)  $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$ .

(C)  $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$ .

(D)  $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$ .

**Lời giải.**

Gọi  $a = 4 \cdot 000 \cdot 000$  là số tiền người đó gửi vào ngân hàng mỗi tháng,  $r = 0,6\%$  là lãi suất mỗi tháng.

— Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = a(1+r) = \frac{a}{r} [(1+r)^1 - 1] (1+r).$$

— Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền  $a$  đồng thì số tiền là

$$T_1 = a(1+r) + a = a[(1+r) + 1] = a \frac{[(1+r)^2 - 1]}{(1+r) - 1} = \frac{a}{r} [(1+r)^2 - 1].$$

— Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{a}{r} [(1+r)^2 - 1] (1+r).$$

— Từ đó ta có số tiền có được sau  $12 \cdot 25 = 300$  tháng là

$$S_{300} = \frac{a}{r} [(1+r)^{300} - 1] (1+r) = \frac{4000000}{0,6\%} [(1+0,6\%)^{300} - 1] (1+0,6\%) = 3 \cdot 364 \cdot 000 \cdot 000.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 16.** Một người mua một căn hộ với giá 900 triệu đồng. Người đó trả trước với số tiền là 500 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là  $0,5\%$  mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau đúng mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tính số tháng tối thiểu (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

(A) 133 tháng.

(B) 140 tháng.

(C) 136 tháng.

(D) 139 tháng.

**Lời giải.**

Tổng số tiền người đó cần phải trả là  $N = 900 - 500 = 400$  (triệu).

Lãi suất hàng tháng là  $r = 0,5\%$ /tháng, số tiền cần phải trả mỗi tháng là  $A = 4$  (triệu).

Gọi  $n$  là tổng số tháng cần phải trả.

Số tiền gốc cuối tháng 1:  $N + Nr - A = N(r+1) - A$ .

Cuối tháng 2:  $[N(r+1) - A] + [N(r+1) - A]r - A = N(r+1)^2 - A[(r+1) + 1]$ .

Cuối tháng 3:  $[N(r+1)^2 - A[(r+1) + 1]](1+r) - A = N(r+1)^3 - A[(r+1)^2 + (r+1) + 1]$ .

.....

Cuối tháng  $n$ :  $N(r+1)^n - A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1]$ .

Sau  $n$  tháng, người đó trả hết số tiền  $N = 400$  triệu nên

$$N(r+1)^n - A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1] = 0$$



$$\Leftrightarrow N(r+1)^n = A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1]$$

$$\Leftrightarrow N(1+r)^n \cdot r = A[(1+r)^n - 1].$$

Thế số vào ta được  $400 \cdot (1+0,5\%)^n \cdot 0,5\% = 4[(1+0,5\%)^n - 1] \Leftrightarrow (1+0,5\%)^n = 2 \Leftrightarrow n \approx 139$  (tháng).

Chọn phương án **(D)**

**Câu 17.** Kết thúc năm 2017, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam đạt 2300 USD/ người/ năm. Trong hội nghị mới đây bàn về “ Tầm nhìn mới, động lực mới cho tăng trưởng kinh tế”, đại diện chính phủ Việt Nam đặt mục tiêu thu nhập bình quân đầu người của nước ta vào cuối năm 2035 sẽ đạt mức 10000 USD/ người/ năm (theo giá hiện hành). Hỏi để đạt được mục tiêu đó, trung bình mỗi năm thu nhập bình quân đầu người của nước ta tăng bao nhiêu

**(A)** 8, 2.

**(B)** 8, 7.

**(C)** 7, 5.

**(D)** 8, 5.

**Lời giải.**

Giả sử để đạt được mục tiêu đề ra, trung bình mỗi năm thu nhập bình quân đầu người của nước ta tăng  $x(\%)$ .

— Cuối năm 2018, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là  $S_1 = 2300 + \frac{x}{100} \cdot 2300 = 2300 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$  (USD).

— Cuối năm 2019, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là  $S_2 = S_1 + \frac{x}{100} \cdot S_1 = 2300 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$  (USD).

— Cuối năm 2035, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là  $S_{18} = 2300 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{18}$  (USD).

Ta có

$$\begin{aligned} S_{18} = 10000 &\Leftrightarrow 2300 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{18} = 10000 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{18} = \frac{100}{23} \\ &\Leftrightarrow 18 \log \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \log \frac{100}{23} \Leftrightarrow x \approx 8, 5. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Bác Minh có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1%/ quý. 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73%/ tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác Minh thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

**(A)** 75,304 triệu đồng.

**(B)** 75,303 triệu đồng.

**(C)** 470,656 triệu đồng.

**(D)** 475,304 triệu đồng.

**Lời giải.**

Công thức tính lãi kép là  $S_n = A(1+r)^n$ .

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là  $S_1 = 200(1+2,1\%)^4$  triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là  $S_2 = 200(1+0,73\%)^{12}$  triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm là  $S_1 + S_2$  triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 2 năm là  $S = (S_1 + S_2)(1 + 0,73\%)^{12} \approx 475,304$  triệu đồng.

Vậy tiền lãi bác Minh thu được sau 2 năm là  $L = S - 400 = 75,304$  triệu đồng.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Ông A là một người già hết tuổi lao động. Trước khi hết tuổi lao động, ông ấy có dành dụm được một khoản tiền để gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất ưu đãi dành cho người già là 0,9% tháng. Sau khi gửi tiết kiệm ngân hàng, đủ mỗi tháng gửi, ông A đến ngân hàng rút ra một khoản tiền là 5 triệu đồng để chi tiêu hàng ngày. Sau đúng 5 năm kể từ ngày gửi tiết kiệm, số tiền tiết kiệm còn lại của ông ấy là 100 triệu đồng. Hỏi số tiền ban đầu mà ông A gửi tiết kiệm là bao nhiêu? (lấy kết quả gần đúng)

**(A)** 289,440 triệu đồng. **(B)** 291,813 triệu đồng. **(C)** 287,044 triệu đồng. **(D)** 233,663 triệu đồng.

**Lời giải.**

Gọi số tiền ban đầu là  $M$ , lãi suất một tháng là  $r$ .

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là  $M + Mr = M(1 + r)$ .

Ngay sau đó ông A rút 5 triệu đồng để chi tiêu nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là  $M(1 + r) - 5$ .

Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là

$$[M(1 + r) - 5](1 + r) = M(1 + r)^2 - 5(1 + r).$$

Ngay sau đó ông A lại rút 5 triệu để chi tiêu nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1 + r)^2 - 5(1 + r) - 5.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ  $n$ ,  $n \geq 2$ , số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là

$$M(1 + r)^n - 5(1 + r)^{n-1} - 5(1 + r)^{n-2} - \dots - 5(1 + r) - 5 = M(1 + r)^n - \frac{5[(1 + r)^n - 1]}{r}.$$

Sau 5 năm tức là 60 tháng, số tiền còn lại trong ngân hàng là 100 triệu nên ta có

$$M(1 + r)^{60} - \frac{5[(1 + r)^{60} - 1]}{r} = 100 \Leftrightarrow M = \frac{100 + \frac{5[(1 + r)^{60} - 1]}{r}}{(1 + r)^{60}} \approx 289,440 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 20.** Anh Quý vừa mới ra trường được một công ty nhận vào làm việc với cách trả lương như sau: 3 năm đầu tiên, hưởng lương 10 triệu đồng/tháng. Sau mỗi ba năm thì tăng thêm 1 triệu đồng tiền lương hàng tháng. Để tiết kiệm tiền mua nhà ở, anh Quý lập ra kế hoạch như sau: Tiền lương sau khi nhận về chỉ dành một nửa vào chi tiêu hàng ngày, nửa còn lại ngay sau khi nhận lương sẽ gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,8%/tháng. Công ty trả lương vào ngày cuối của hàng tháng. Sau khi đi làm đúng 10 năm cho công ty đó anh Quý rút tiền tiết kiệm để mua nhà ở. Hỏi tại thời điểm đó, tính cả tiền gửi tiết kiệm và tiền lương ở tháng cuối cùng anh Quý có số tiền là bao nhiêu? (lấy kết quả gần đúng nhất)

**(A)** 1102,535 triệu đồng.

**(B)** 1089,535 triệu đồng.



Ⓒ 1093,888 triệu đồng.

Ⓓ 1111,355 triệu đồng.

**Lời giải.**

Đặt  $q = 1 + r = 1,008$ .

Giả sử anh Quý bắt đầu đi làm từ ngày 01 tháng 01 năm X nào đó.

Đến cuối tháng 1, đầu tháng 2, anh Quý bắt đầu gửi tiết kiệm ngân hàng với số tiền ban đầu là 5 triệu đồng (một nửa số tiền lương hàng tháng).

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 3 là  $5q + 5$ .

....

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 37 là  $5(q^{35} + q^{34} + \dots + 1) = 5 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1}$ .

Vì tiền lương kể từ tháng thứ 37 được tăng thêm 1 triệu đồng cho mỗi tháng lương, nên số tiền gửi tiết kiệm đầu tháng thứ 38 là  $5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q + 5,5$ .

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 39 là  $5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^2 + 5,5(1 + q)$ .

....

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 73 (tròn 6 năm đi làm) là

$$5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{36} + 5,5(1 + q + \dots + q^{35}) = 5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{36} + 5,5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1}.$$

Lập luận tương tự như trên, số tiền tiết kiệm ở đầu tháng thứ 109 (tròn 9 năm đi làm) là

$$5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{72} + 5,5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{36} + 6 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1}.$$

Đến đầu tháng thứ 120 (tháng cuối cùng đang đi làm để tròn 10 năm), số tiền tiết kiệm là

$$5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{83} + 5,5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{47} + 6 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{11} + 6,5 \frac{q^{11} - 1}{q - 1}.$$

Đến cuối tháng thứ 120 (thời điểm tròn 10 năm đi làm) số tiền gửi ngân hàng anh Quý có được là

$$\left( 5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{83} + 5,5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{47} + 6 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{11} + 6,5 \frac{q^{11} - 1}{q - 1} \right) q.$$

Tại thời điểm này, anh Quý rút tiền để mua nhà ở, do đó tổng số tiền lương ở tháng cuối cùng và số tiền tiết kiệm 10 năm là

$$\left( 5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{83} + 5,5 \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{47} + 6 \cdot \frac{q^{36} - 1}{q - 1} q^{11} + 6,5 \frac{q^{11} - 1}{q - 1} \right) q + 13 \approx 1102,535 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn phương án Ⓐ

 **BẢNG ĐÁP ÁN** 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. B  | 3. B  | 4. C  | 5. B  | 6. D  | 7. B  | 8. D  | 9. B  | 10. C |
| 11. C | 12. C | 13. B | 14. B | 15. A | 16. D | 17. D | 18. A | 19. A | 20. A |

## DẠNG 26. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Thể tích khối lăng trụ  $V = B \cdot h$  với  $B$ : diện tích đáy,  $h$ : chiều cao.

b) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AM$ . Khi đó

$$— BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

$$— AB \cdot AC = AH \cdot BC; AM = \frac{1}{2}BC.$$

$$— \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}; \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}; \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}; \cot \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}.$$

$$— BH \cdot BC = AB^2; CH \cdot CB = CA^2.$$

$$— \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

c) Đường chéo của hình vuông cạnh  $a$  có độ dài bằng  $a\sqrt{2}$ .

d) Đường cao của tam giác đều cạnh  $a$  có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

e) Diện tích tam giác thường

$$— S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c, \text{ trong đó } h_a, h_b, h_c \text{ là các đường cao hạ từ các đỉnh } A, B, C.$$

$$— S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C.$$

$$— S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ trong đó } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$— S_{\triangle ABC} = p \cdot r, \text{ trong đó } r \text{ là bán kính đường tròn nội tiếp } \triangle ABC.$$

f) Trường hợp đặc biệt

$$— \text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC.$$

$$— \text{Diện tích của tam giác đều cạnh } a \text{ là } S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

g) Diện tích hình chữ nhật  $S = a \cdot b$ .

h) Diện tích hình vuông  $S = a^2$ .

i) Diện tích hình thoi  $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$ , trong đó  $AC$  và  $BD$  là hai đường chéo.

j) Diện tích hình thang  $S = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \cdot h}{2}$ , trong đó  $h$  là chiều cao của hình thang.

k) Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là  $S = AH \cdot CD$ , trong đó  $AH$  là chiều cao.

l) Định lí hàm số  $\sin \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

m) Định lí hàm số cosin

$$— a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

$$— b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

$$— c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

n) Công thức đường trung tuyến

$$— m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

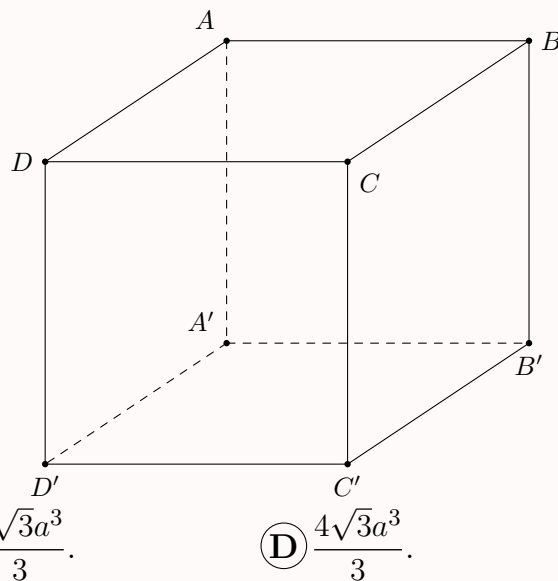
$$— m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$— m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

### Ví dụ 1.

Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $BD = a\sqrt{3}$  và  $AA' = 4a$  (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



(A)  $2\sqrt{3}a^3$ .

(B)  $4\sqrt{3}a^3$ .

(C)  $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ .

(D)  $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ .

**Lời giải.**

## Phân tích hướng dẫn giải

I. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tính thể tích khối lăng trụ đứng.

## II. HƯỚNG GIẢI:

1. Nhắc lại công thức tính thể tích khối lăng trụ:  $V = B \cdot h$  với  $B$ : diện tích đáy,  $h$ : chiều cao.
2. Gọi  $I = AC \cap BD$ . Từ đó: Tính  $BI$  và  $AC$ .
3. Tính diện tích hình bình hành  $ABCD$ :  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} BI \cdot AC$ .
4. Tính thể tích khối lăng trụ:  $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Gọi  $I = AC \cap BD$ . Ta có  $AC \perp BD$ ,  $BI = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Xét tam giác vuông  $BAI$  vuông tại  $I$

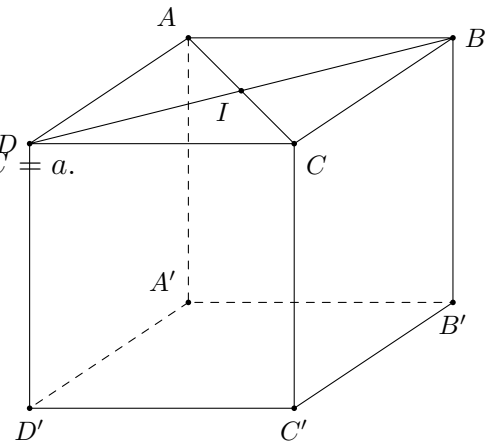
$$AI^2 = BA^2 - BI^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AI = \frac{a}{2} \Rightarrow AC = a.$$

Diện tích hình bình hành  $ABCD$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} BI \cdot AC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ cần tìm là

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 4a = 2\sqrt{3}a^3.$$



Chọn phương án **(A)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.EFGH$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , tam giác  $ABD$  là tam giác đều và  $AE = 2a$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

**(A)**  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .

**(B)**  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

**(C)**  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**(D)**  $V = a^3\sqrt{3}$ .

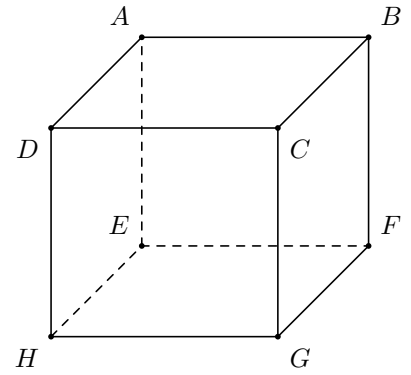
Lời giải.

Ta có

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó

$$V = AE \cdot S_{ABCD} = 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}.$$



Chọn phương án **(D)**

**Câu 2.** Tính thể tích  $V$  của khối lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết  $A'C = a\sqrt{6}$ .

- (A)**  $V = 2a^3\sqrt{2}$ .      **(B)**  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .      **(C)**  $V = 3a^3\sqrt{2}$ .      **(D)**  $V = 2a^3\sqrt{6}$ .

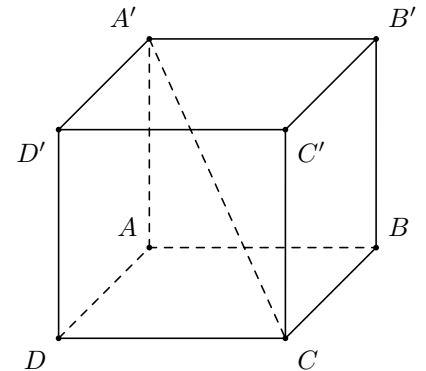
**Lời giải.**

Đường chéo hình lập phương

$$A'C = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \frac{A'C}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}.$$

Cạnh hình lập phương là

$$AB = a\sqrt{2} \Rightarrow V = (a\sqrt{2})^3 = 2a^3\sqrt{2}$$



Chọn phương án **(A)**

**Câu 3.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.EFGH$  có đáy là hình bình hành biết  $AB = a$ ,  $AD = 4a$ , góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ , cạnh  $AE = a$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

- (A)**  $V = 2a^3\sqrt{3}$ .      **(B)**  $V = a^3\sqrt{3}$ .      **(C)**  $V = a^3$ .      **(D)**  $V = 2a^3$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}a \cdot 4a \cdot \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}.$$

Suy ra

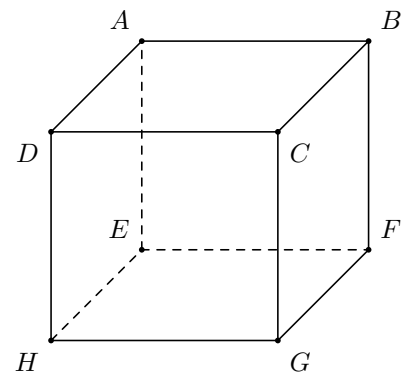
$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2a^2\sqrt{3}.$$

Khi đó

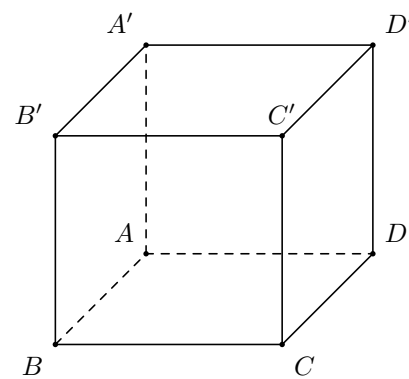
$$V = AE \cdot S_{ABCD} = a \cdot 2a^2\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.**



Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  biết mặt đáy là hình thoi cạnh  $2a$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Cạnh bên của hình lăng trụ là  $3a$  (minh hoạ như hình bên). Thể tích  $V$  của khối lăng trụ là



(A)  $V = 12a^3\sqrt{3}$ .

(B)  $V = 6a^3$ .

(C)  $V = 12a^3$ .

(D)  $V = 4a^3\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

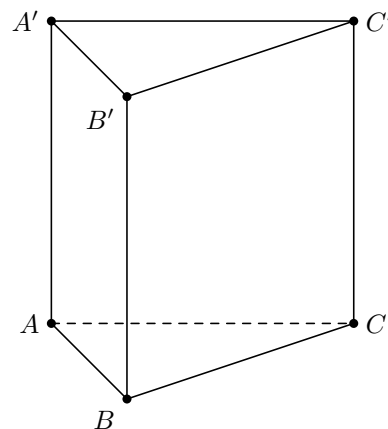
Do  $ABCD$  là hình thoi và  $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  là tam giác đều.

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 4a^2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = 3a \cdot 4a^2\sqrt{3} = 12a^3\sqrt{3}.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 5.**

Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AB' = a\sqrt{10}$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$  và  $BC = a\sqrt{2}$  (minh hoạ như hình bên). Thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho bằng



(A)  $V = \frac{3a^3}{2}$ .

(B)  $V = \frac{a^3}{2}$ .

(C)  $V = 3a^3$ .

(D)  $V = a^3$ .

**Lời giải.**

$$\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a.$$

$$\text{Xét } \triangle ABB' \text{ vuông tại } B, \text{ có } BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 3a.$$

$$V = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = 3a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^3}{2}.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 6.** Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là 37 cm; 13 cm; 30 cm và biết tổng diện tích các mặt bên là  $480 \text{ cm}^2$ . Tính thể tích  $V$  của lăng trụ đó.

(A)  $V = 2160 \text{ cm}^3$ .

(B)  $V = 360 \text{ cm}^3$ .

(C)  $720 \text{ cm}^3$ .

(D)  $V = 1080 \text{ cm}^3$ .

**Lời giải.**

Nửa chu vi đáy  $P = \frac{37 + 13 + 30}{2} = 40$ .

Diện tích đáy là

$$S = \sqrt{40 \cdot (40 - 37) \cdot (40 - 13) \cdot (40 - 30)} = 180 \text{ cm}^2.$$

Gọi  $x$  là độ dài chiều cao của lăng trụ.

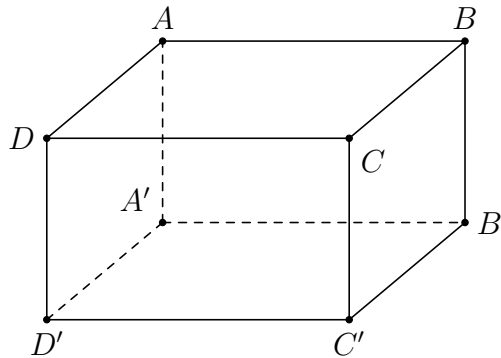
Vì các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật nên ta có

$$S_{xq} = 13 \cdot x + 37 \cdot x + 30 \cdot x = 480 \Rightarrow x = 6.$$

Vậy thể tích của lăng trụ là  $V = 6 \cdot 180 = 1080 \text{ cm}^3$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 7.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông, cạnh bên bằng  $AA' = 3a$  và đường chéo  $AC' = 5a$  (minh hoạ như hình bên). Tính thể tích  $V$  của khối hộp này.



**(A)**  $V = 4a^3$ .

**(B)**  $V = 24a^3$ .

**(C)**  $V = 12a^3$ .

**(D)**  $V = 8a^3$ .

**Lời giải.**

Xét  $\triangle ACC'$  vuông tại C, có  $AC = \sqrt{AC'^2 - CC'^2} = 4a$ .

Hình vuông  $ABCD$  có  $AC = 4a \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC^2}{2} = 8a^2$ .

$$V = AA' \cdot S_{ABCD} = 24a^3.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 8.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại A,  $BC = 2a$ ,  $A'B = 3a$ . Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là

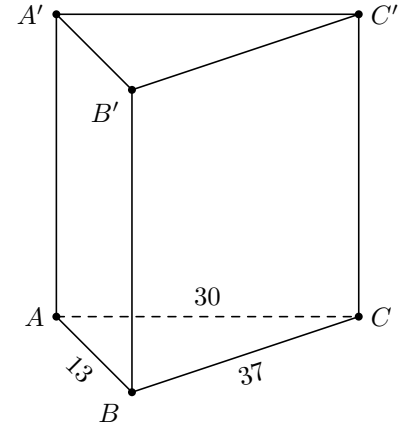
**(A)**  $2a^3$ .

**(B)**  $a^3\sqrt{7}$ .

**(C)**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .

**(D)**  $6a^3$ .

**Lời giải.**

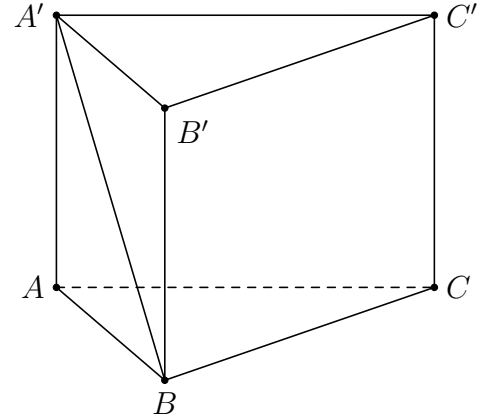




Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A \Rightarrow AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ .

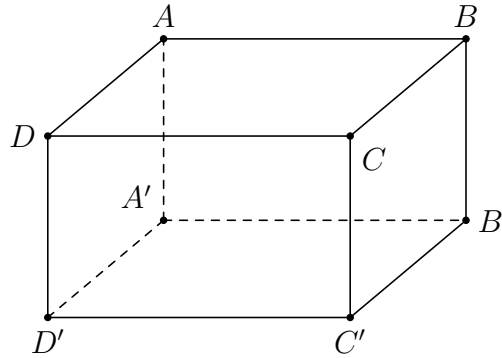
Tam giác  $A'AB$  vuông tại  $A \Rightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{7}$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Các đường chéo của các mặt một hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng  $\sqrt{10}, \sqrt{26}, \sqrt{34}$ . Tính thể tích  $V$  của khối hộp chữ nhật đó.



**(A)**  $V = 5$ .

**(B)**  $V = 225$ .

**(C)**  $V = 15$ .

**(D)**  $V = 75$ .

**Lời giải.**

Gọi  $x, y, z$  với  $x, y, z > 0$  lần lượt là độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật.

Theo đề, ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + z^2 = 26 \\ y^2 + z^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ z^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5. \end{cases}$$

$V = x \cdot y \cdot z = 15$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a\sqrt{2}$ . Biết góc giữa  $A'B$  với mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

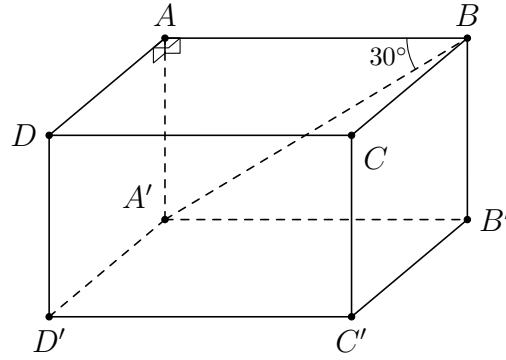
**(A)**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

**(B)**  $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ .

**(C)**  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**(D)**  $2a^3\sqrt{6}$ .

**Lời giải.**



$$S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2.$$

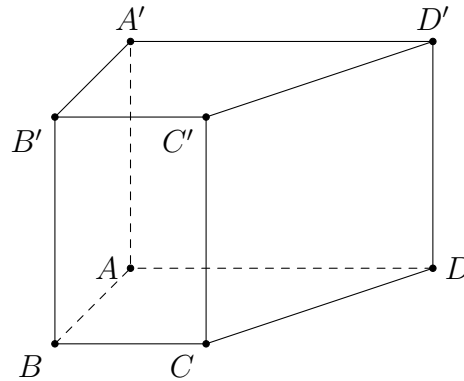
$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow$  Góc giữa  $A'B$  với mặt phẳng  $(ABCD)$  là  $\widehat{A'BA} = 30^\circ$ .

Tam giác  $A'AB$  vuông tại  $A \Rightarrow A'A = AB \cdot \tan \widehat{ABA} = a\sqrt{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Thể tích khối lăng trụ là  $V = AA' \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 11.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ , biết  $AD = 2a$ ,  $AB = BC = a$  và góc giữa mặt phẳng  $(A'CD)$  với mặt đáy bằng  $60^\circ$  (minh họa như hình bên). Thể tích khối lăng trụ bằng



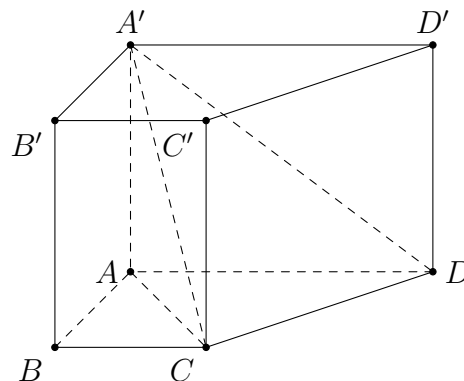
**(A)**  $\frac{3a^3}{2}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$ .

**(C)**  $\frac{3\sqrt{6}a^3}{2}$ .

**(D)**  $\frac{3a^3}{2\sqrt{6}}$ .

**Lời giải.**



Diện tích đáy là

$$S = S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(2a + a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Ta có

$$AC \perp CD, A'C \perp CD \Rightarrow ((A'CD), (ABCD)) = (A'C, AC).$$

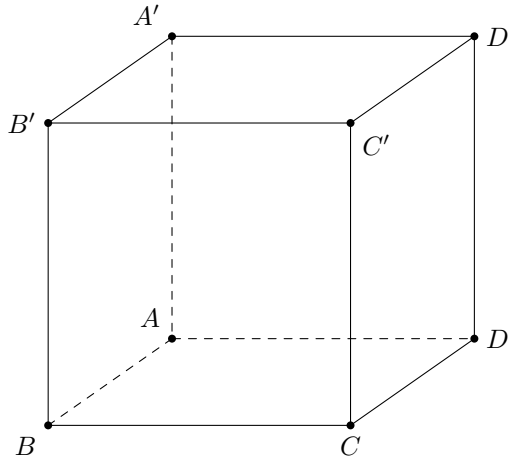
Do đó, chiều cao lăng trụ

$$h = AA' = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}.$$

Thể tích khối lăng trụ:  $V = S \cdot h = \frac{3a^2}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}a^3}{2}.$

Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình bình hành với  $AB = a, BC = a\sqrt{7}$  và góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ, AA' = 2a$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



**(A)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3.$

**(B)**  $3\sqrt{3}a^3.$

**(C)**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$

**(D)**  $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3.$

**Lời giải.**

Gọi  $AC = x$  ( $x > 0$ ). Xét tam giác  $ABC$  có

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow 7a^2 = a^2 + x^2 - ax \\ &\Leftrightarrow x^2 - ax - 6a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a \\ x = -2a \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra

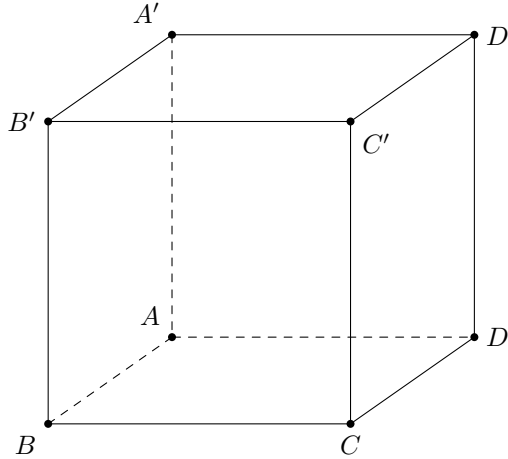
$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = a \cdot 3a \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Do đó

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = 2a \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = 3\sqrt{3}a^3.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AA' = \sqrt{3}a$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(A'BD) = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



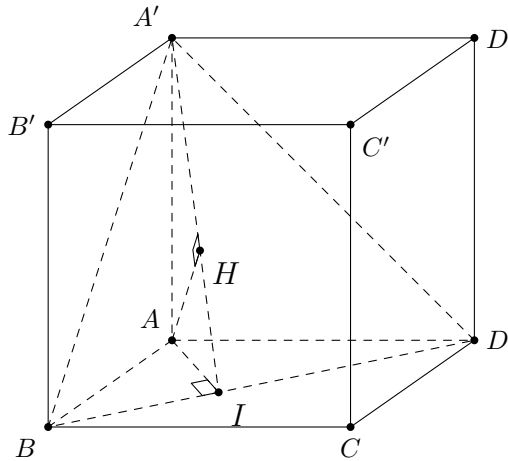
(A)  $3\sqrt{3}a^3$ .

(B)  $\frac{a^3}{3}$ .

(C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$ .

(D)  $2\sqrt{3}a^3$ .

**Lời giải.**



Kẻ  $AI \perp BD \Rightarrow BD \perp (A'AI)$ .

Trong  $(A'AI)$  kẻ  $AH \perp A'I \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH = \frac{a\sqrt{13}}{13}$ .

Xét  $\triangle ABD$  có  $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$ .

Xét  $\triangle A'AI$  có  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2}$ .

Suy ra

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AA'^2} - \frac{1}{AB^2}.$$

Hay

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}a\right)^2} - \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9a^2} \Rightarrow AD = 3a.$$

Suy ra  $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot 3a = 3a^2$ .

Vậy thể tích cần tính  $V = AA' \cdot S_{ABCD} = a\sqrt{3} \cdot 3a^2 = 3\sqrt{3}a^3$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = a$ ,  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Đường chéo  $BC'$  của mặt bên  $(BCC'B')$  tạo với mặt phẳng  $(ACC'A')$  một góc bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích của khối lăng trụ theo  $a$ .

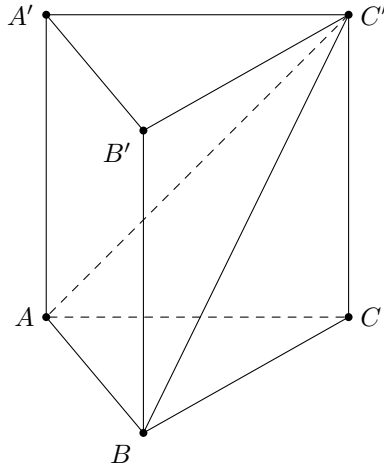
**(A)**  $a^3\sqrt{3}$ .

**(B)**  $a^3\sqrt{6}$ .

**(C)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**(D)**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải.**



Đường chéo  $BC'$  của mặt bên  $(BCC'B')$  tạo với mặt phẳng  $(ACC'A')$  một góc bằng  $30^\circ$ .

Nên  $(BC', (ACC'A')) = (BC', AC') = \widehat{BC'A} = 30^\circ$ .

Ta có

$$B'C' = \frac{AC}{\cos 60^\circ} = 2a; AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}; C'B = AB : \sin 30^\circ = 2a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy

$$V = BB' \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot a = a^3\sqrt{6}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 15.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC')$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

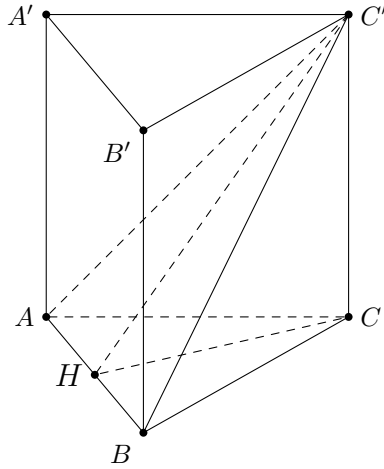
**(A)**  $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ .

**(C)**  $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$ .

**Lời giải.**



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có

$$CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } (\widehat{ABC'}, \widehat{ABC}) = (\widehat{HC'}, \widehat{HC}) = \widehat{CHC'} = 60^\circ.$$

Xét tam giác  $CHC'$  vuông tại  $C$  ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{CC'}{CH} \Rightarrow CC' = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy

$$V = CC' \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 16.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , đường thẳng  $AB'$  tạo với mặt phẳng  $(BCC'B')$  một góc  $30^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

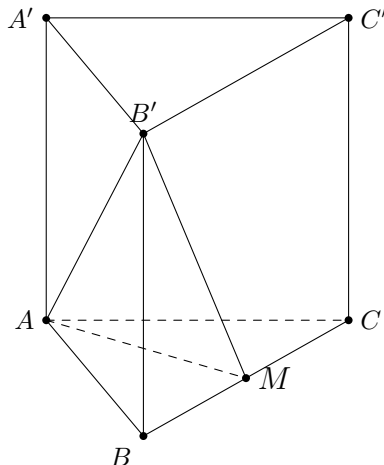
**(A)**  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$

**(B)**  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$

**(C)**  $V = \frac{3a^3}{4}.$

**(D)**  $V = \frac{a^3}{4}.$

**Lời giải.**



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , do tam giác  $ABC$  đều nên  $AM \perp BC$ , mà  $AM \perp BB'$  nên  $AM \perp (BCC'B')$ . Suy ra hình chiếu vuông góc của  $AB'$  trên  $(BCC'B')$  là  $B'M$ .

Vậy góc giữa đường thẳng  $AB'$  và mặt phẳng  $(BCC'B')$  là góc  $\widehat{AB'M}$  và  $\widehat{AB'M} = 30^\circ$ .

Ta có

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB' = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , góc nhọn  $60^\circ$  và đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Thể tích của khối hộp đó là

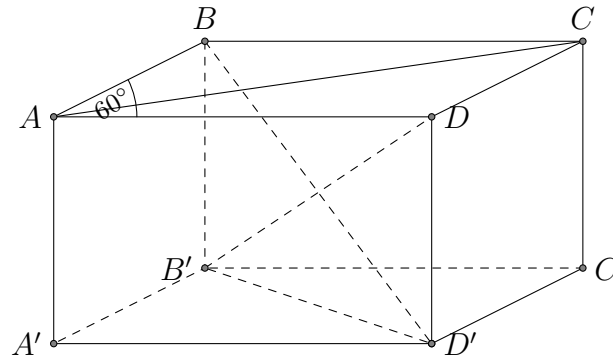
**(A)**  $a^3$ .

**(B)**  $\sqrt{3}a^3$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$ .

**Lời giải.**



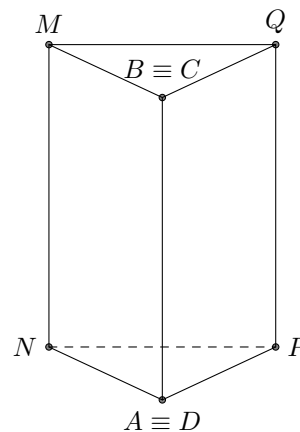
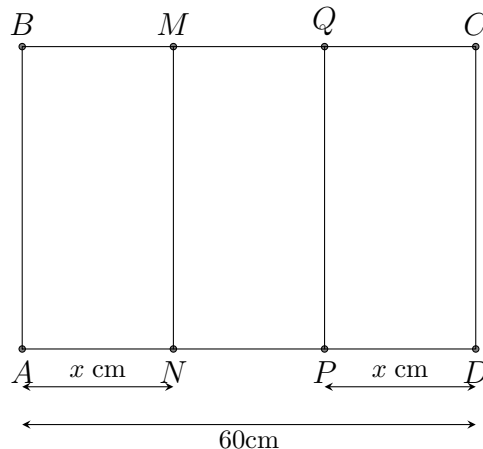
Ta có  $AC = BD' = a\sqrt{3}$ ;  $BB' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$ .

Vậy thể tích khối hộp đứng bằng

$$V = B \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = 60\text{cm}$ ,  $AB = 40\text{cm}$ . Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh  $MN$  và  $PQ$  vào phía trong cho đến khi  $AB$  và  $DC$  trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng



Ⓐ  $4000\sqrt{3}\text{cm}^3$ .

Ⓑ  $2000\sqrt{3}\text{cm}^3$ .

Ⓒ  $400\sqrt{3}\text{cm}^3$ .

Ⓓ  $4000\sqrt{2}\text{cm}^3$ .

**Lời giải.**

Đáy của lăng trụ là tam giác cân có cạnh bên bằng  $x$ , cạnh đáy bằng  $60 - 2x$ .

Đường cao tam giác đó là  $AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{60 - 2x}{2}\right)^2} = \sqrt{60x - 900}$ , với  $H$  là trung điểm  $NP$ .

Diện tích đáy là

$$S = S_{ANP} = \frac{1}{2}AH \cdot NP = \sqrt{60x - 900} \cdot (30 - x) = \frac{1}{30}\sqrt{(60x - 900)(900 - 30x)(900 - 30x)}.$$

Suy ra

$$S \leq \frac{1}{30}\sqrt{\left(\frac{900}{3}\right)^3} = 100\sqrt{3}\text{cm}^2.$$

Diện tích đáy lớn nhất là  $100\sqrt{3}\text{cm}^2$  nên thể tích lớn nhất là  $V = 40 \cdot 100\sqrt{3} = 4000\sqrt{3}\text{cm}^3$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 19.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$  và  $AB'$  vuông góc với  $BC'$ .

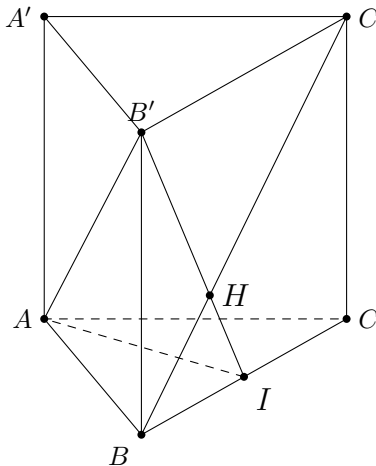
Thể tích của lăng trụ đã cho là

Ⓐ  $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ .

Ⓑ  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ .

Ⓒ  $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$ .

Ⓓ  $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Vì  $ABC.A'B'C'$  là lăng trụ tam giác đều nên  $AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$ .

Lại có giả thiết  $AB' \perp BC'$  nên suy ra  $BC' \perp (AIB') \Rightarrow BC' \perp B'I$ .

Gọi  $H = B'I \cap BC'$ .

Ta có  $\triangle BHI$  đồng dạng  $\triangle C'HB' \Rightarrow \frac{HI}{B'H} = \frac{BI}{B'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'H = 2HI \Rightarrow B'I = 3HI$ .

Xét tam giác vuông  $B'BI$  có

$$BI^2 = HI \cdot B'I = 3HI^2 \Rightarrow HI = \sqrt{\frac{BI^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra

$$BB' = \sqrt{B'I^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

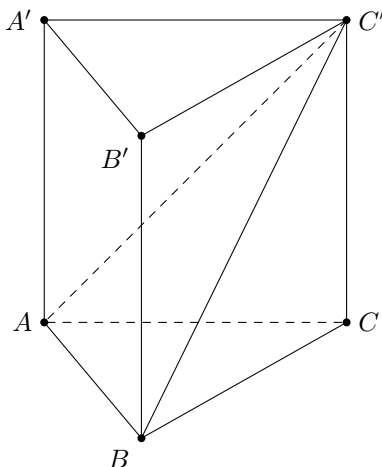


Vậy

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$ . Biết khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(ABC')$  bằng  $a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC')$  và  $(BCC'B')$  bằng  $\alpha$  với  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  (tham khảo hình dưới đây). Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng



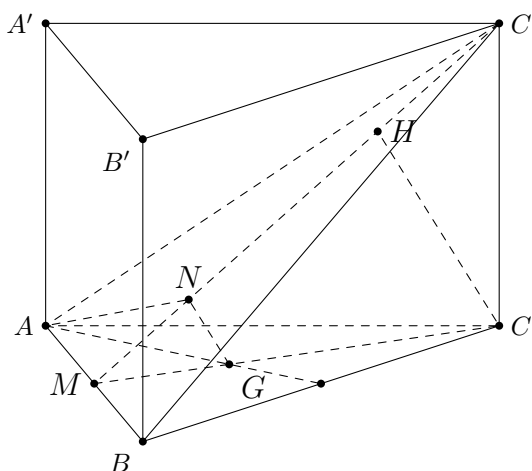
Ⓐ  $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$ .

(B)  $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$ .

$$\textcircled{\text{C}} \frac{9a^3\sqrt{15}}{10}.$$

(D)  $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Ta có

$$\begin{cases} CC' \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CC'M) \Rightarrow (CC'M) \perp (ABC').$$

Mà  $(CC'M) \cap (ABC') = C'M$  nên nếu gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $C'M$  thì  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên mặt phẳng  $(ABC') \Rightarrow d(C; (ABC')) = CH = a$ .

Đựng đường thẳng đi qua  $G$  và song song với  $CH$ , cắt  $C'M$  tại điểm  $N$ .

Ta có  $\begin{cases} GN \perp (ABC') \\ AG \perp (BCC'B') \end{cases}$  nên góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC')$  và  $(BCC'B')$  là góc  $\widehat{AGN} = \alpha$ .

$$GN = \frac{1}{3}CH = \frac{a}{3}; \quad AG = \frac{GN}{\cos \alpha} = a \Rightarrow AB = AG\sqrt{3} = a\sqrt{3};$$

$$\frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CM^2} = \frac{5}{9a^2} \Rightarrow CC' = \frac{3a\sqrt{5}}{5}; \quad S_{\triangle ABC} = (a\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ bằng  $V = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$ .

Chọn phương án **A**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. A  | 3. A  | 4. A  | 5. A  | 6. D  | 7. B  | 8. B  | 9. C  | 10. B |
| 11. C | 12. B | 13. A | 14. B | 15. C | 16. A | 17. D | 18. A | 19. C | 20. A |

## DẠNG 27. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận đứng.

**Định nghĩa 1.** Đường thẳng  $x = x_0$  được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

2. Đường tiệm cận ngang.

**Định nghĩa 2.** Đường thẳng  $y = y_0$  được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  là hàm số phân thức hữu tỷ.

- Nếu  $Q(x) = 0$  có nghiệm là  $x_0$ , và  $x_0$  không là nghiệm của  $P(x) = 0$  thì đồ thị có tiệm cận đứng là  $x = x_0$ .
- Nếu bậc  $P(x) \leq$  bậc  $Q(x)$  thì đồ thị có tiệm cận ngang.

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$  là

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 3.

**Lời giải.**

#### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
2. HƯỚNG GIẢI:

Bước 1. Dựa trên giả thiết tính giới hạn của hàm số tại vô cực để tìm tiệm cận ngang.

Bước 2. Tính giới hạn dần ra vô cực của hàm số để tìm tiệm cận đứng.

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = 5$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = 5 \Rightarrow$  đường thẳng  $y = 5$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(5x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(5x+1)}{(x+1)} = -\infty \Rightarrow$  đường thẳng  $x = -1$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(C)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3}$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

**(A)** 4.

**(B)** 3.

**(C)** 2.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{3}{5}\right\}$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3} = -\frac{1}{5}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$  đường thẳng  $y = -\frac{1}{5}$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3} = +\infty \Rightarrow$  đường thẳng  $x = -1$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Và  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^+} \frac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3} = -\infty \Rightarrow$  đường thẳng  $x = \frac{3}{5}$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

**(A)** 3.

**(B)** 1.

**(C)** 0.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

Ta có

Vì  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$  nên đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \frac{-1}{2}$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \frac{-1}{2}$  nên đường thẳng  $x = 1$  không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$ .

**(A)** 0.

**(B)** 2.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$  Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng  $y = 0$ .

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Chọn phương án **C**

**Câu 4.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

**(A)** 3.

**(B)** 1.

**(C)** 4.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^2 + x + 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 1} - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \neq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1} = -\sqrt{5} \text{ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận}$$

ngang  $y = -\sqrt{5}$ .

Do  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x} = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x} = -\infty$  nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

|      |           |           |      |           |           |
|------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $0$  | $1$       | $+\infty$ |
| $y$  | $+$       | $-$       | $0$  | $+$       |           |
| $y'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $3$       |

**(A)** 3.

**(B)** 4.

**(C)** 2.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên, ta được

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$  suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang  $y = 3$ .

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$  suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng  $x = 1$ ;  $x = -1$ .

Vậy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án **A**

**Câu 6.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 2}{\sqrt{9 - x^2}}$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 0.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = (-3; 3)$ .

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Ta có  $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty$  nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng  $x = -3$ ;  $x = 3$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x}}{x - 1}$  là

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 0.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Hàm số có tập xác định  $\mathcal{D} = [0; 2] \setminus \{1\}$  nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Có  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$  nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng  $x = 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  là

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$ .

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$  bằng

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 4.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{1\}$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}} = +\infty$ .

Do đó  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$ .

Do đó  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho hai đường tiệm cận.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 10.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 - 1}$  là

**(A)** 0.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = (-3; +\infty) \setminus \{\pm 1\}$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3})} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow x = 1$  không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

**(A)** 0.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}.$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+x+1} = 1 > 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \text{ và } x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\infty.$$

Vậy  $x = 0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = 1.$$

Vậy  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Tương tự có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

Vậy đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-1}+1}{x^2-4x-5}$  có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận ngang và đứng?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-4x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số  $\mathcal{D} = [1; 5) \cup (5; +\infty)$ .

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}+1}{x^2-4x-5} = 0 \Rightarrow \text{đường thẳng } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 5^-} y = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{x-1}+1}{(x-5)(x+1)} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 5^+} y = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x-1}+1}{(x-5)(x+1)} = +\infty \Rightarrow \text{đường thẳng } x = 5 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \text{ nên } x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 13.**



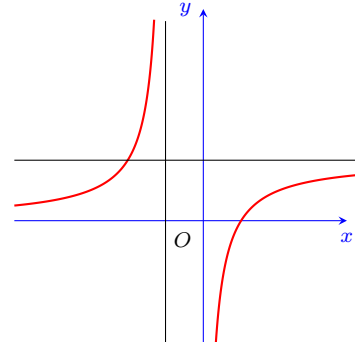
Cho đồ thị một hàm số có hình vẽ như hình bên. Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

☒ A) 4.

☐ C) 2.

☐ B) Không có tiệm cận.

☐ D) 3.

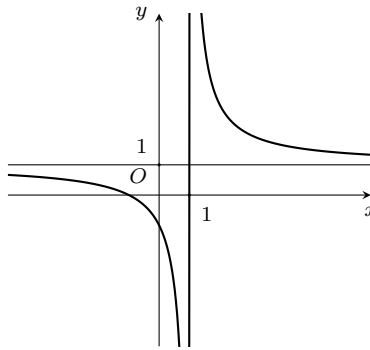


**Lời giải.**

Nhìn đồ thị ta thấy nhánh bên phải có một tiệm cận đứng, một tiệm cận ngang và nhánh bên trái cũng vậy. Tổng cộng có 4 tiệm cận.

Chọn phương án ☒ A

**Câu 14.** Cho đồ thị có hình vẽ như hình dưới đây



Biết đồ thị trên là đồ thị của một trong 4 hàm số ở các phương án A, B, C, D dưới đây. Chọn phương án trả lời đúng.

☒ A)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

☐ B)  $y = \frac{x-3}{x-1}$ .

☐ C)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

☐ D)  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

**Lời giải.**

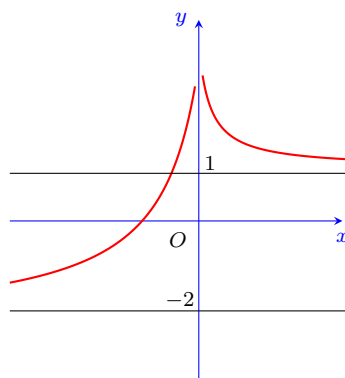
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang  $y = 1$  và tiệm cận đứng  $x = 1$ , nên loại đáp án  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

Hàm số  $y = \frac{x-3}{x-1}$  có  $y' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$ , hàm số đồng biến trên các khoảng xác định, mà nhìn đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến nên loại đáp án này.

Hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  có  $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ , hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định, thỏa mãn đồ thị đã cho.

Chọn phương án ☒ D

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

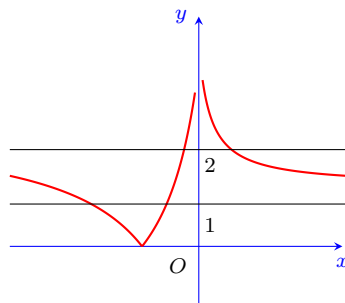


Hỏi đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có tiệm cận ngang là

- (A)  $y = 1$  và  $y = -2$ . (B)  $y = -1$  và  $y = -2$ . (C)  $y = 1$  và  $y = 2$ . (D)  $y = 2$ .

**Lời giải.**

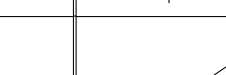
Ta có đồ thị hàm  $y = |f(x)|$  có dạng như sau



Suy ra đồ thị có hai tiệm cận ngang là  $y = 1$  và  $y = 2$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

|      |           |                                                                                     |   |    |           |
|------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0                                                                                   |   | 1  | $+\infty$ |
| $y$  | -         |                                                                                     | + | 0  | -         |
| $y'$ | $+\infty$ |  |   | 2  |           |
|      |           |                                                                                     |   | -1 | $-\infty$ |

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

Nhìn bảng biến thiên ta thấy chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng là  $x = 0$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

|      |                        |                                          |     |                       |           |
|------|------------------------|------------------------------------------|-----|-----------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$              | $-1$                                     | $0$ | $1$                   | $+\infty$ |
| $y'$ | —                      |                                          | —   | —                     | —         |
| $y$  | $-2$<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>$-1$<br>↘<br>$-\infty$ |     | $+\infty$<br>↘<br>$2$ |           |

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- (A) Hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$  và  $x = -1$ .  
 (B) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là  $x = 0$ .  
 (C) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là  $x = -2$  và một tiệm cận ngang  $y = 1$ .  
 (D) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = -2$  và  $y = 2$ .

**Lời giải.**

- Phương án “Hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$  và  $x = -1$ ” loại vì hàm số không có tiệm cận.  
 — Phương án “Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là  $x = 0$ ” loại vì đường thẳng  $x = 0$  không là tiệm cận đứng.  
 — Phương án “Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là  $x = -2$  và một tiệm cận ngang  $y = 1$ ” loại vì tiệm cận đứng  $x = \pm 1$ ; còn tiệm cận ngang  $y = \pm 2$ .  
 — Phương án “Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = -2$  và  $y = 2$ ” chọn vì nhìn bảng biến thiên thấy ngay đồ thị có tiệm cận ngang  $y = -2$  và  $y = 2$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

|      |                       |                   |           |
|------|-----------------------|-------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$             | $1$               | $+\infty$ |
| $y$  | —                     | $0$               | +         |
| $y'$ | $+\infty$<br>↘<br>$2$ | $-3$<br>↗<br>$10$ |           |

Số tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số chỉ có duy nhất tiệm cận ngang  $y = 10$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 19.** Giả sử đường thẳng  $(d): x = a$ , ( $a > 0$ ) cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 1; kí hiệu  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm đó. Tìm  $y_0$ .

$\textcircled{\text{A}} y_0 = -1.$

$\textcircled{\text{B}} y_0 = 5.$

$\textcircled{\text{C}} y_0 = 1.$

$\textcircled{\text{D}} y_0 = 2.$

**Lời giải.**Tiệm cận đứng của đồ thị  $\Delta: x = 1$ .Giao điểm của đường thẳng  $(d): x = a$  và đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  là  $I\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$  với  $a > 0$ .

$$\text{Ta có } d(I, \Delta) = |a - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow y_0 = 5.$$

Vậy  $y_0 = 5$ .Chọn phương án  $\textcircled{\text{B}}$ **Câu 20.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-3}{x-2}$  ( $C$ ). Gọi  $M$  là điểm bất kỳ trên ( $C$ ),  $d$  là tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai đường tiệm cận của đồ thị ( $C$ ). Giá trị nhỏ nhất của  $d$  là

$\textcircled{\text{A}} 5.$

$\textcircled{\text{B}} 10.$

$\textcircled{\text{C}} 6.$

$\textcircled{\text{D}} 2.$

**Lời giải.****Cách 1:** Giải theo tự luận.Gọi  $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$  thuộc đồ thị ( $C$ ), với  $x_0 \neq 2$ .Đồ thị ( $C$ ) có tiệm cận đứng  $\Delta_1: x = 2$ ; tiệm cận ngang  $\Delta_2: y = 2$ .

$$\text{Ta có } d(M, \Delta_1) = |x_0 - 2| \text{ và } d(M, \Delta_2) = |y_0 - 2| = \frac{1}{|x_0 - 2|}.$$

$$\text{Áp dụng AM-GM ta được } d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = |x_0 - 2| + \frac{1}{|x_0 - 2|} \geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $d$  là 2.**Cách 2:** Giải theo phương pháp trắc nghiệm.Áp dụng công thức giải nhanh. Giá trị nhỏ nhất của  $d$  là

$$\min d = 2\sqrt{\frac{|ad - bc|}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{|2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1|}{1^2}} = 2.$$

Chọn phương án  $\textcircled{\text{D}}$

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. B  | 3. C  | 4. D  | 5. A  | 6. A  | 7. A  | 8. B  | 9. A  | 10. D |
| 11. B | 12. D | 13. A | 14. D | 15. C | 16. B | 17. D | 18. A | 19. B | 20. D |

**DẠNG 28.****TÍNH CHẤT ĐỒ THỊ - HÀM SỐ - ĐẠO HÀM****1 BÀI TẬP MẪU****Ví dụ 1.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + 3x + d$  ( $a, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên.

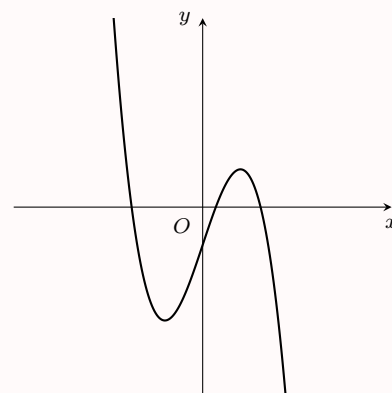
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ (A)  $a > 0; d > 0$ .

☐ (B)  $a < 0; d > 0$ .

☐ (C)  $a > 0; d < 0$ .

☐ (D)  $a < 0; d < 0$ .

**Lời giải.****Phân tích hướng dẫn giải**

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán xét dấu hệ số hàm số khi biết đồ thị hàm số và nhận dạng đồ thị hàm số.

b) **KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

— Xác định hệ số  $a$ : Dựa vào hình dáng đồ thị hàm số bậc ba.

+  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ .

+  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ .

— Xác định hệ số  $d$ : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị với trục tung.

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên trục hoành  $\Rightarrow d > 0$ .

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới trục hoành  $\Rightarrow d < 0$ .

c) **HƯỚNG GIẢI**

— Dựa vào hình dáng của đồ thị để xác định dấu của hệ số  $a$ .

— Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung để xác định dấu của hệ số  $d$ .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Dựa vào hình dáng đồ thị hàm số bậc ba, ta có hệ số  $a < 0$ .

Giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới trục hoành nên hệ số  $d < 0$ .

Chọn phương án ☒ (D)

## 2 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

### Câu 1.

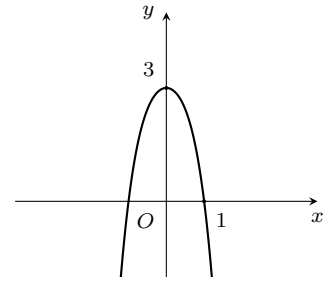
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên.

☐ A  $y = x^2 + 3.$

☐ B  $y = -x^2 + 3.$

☐ C  $y = -x^4 - 2x^2 + 3.$

☐ D  $y = -x^4 + 3.$



### Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 3)$ .

Chọn phương án ☒ C

### Câu 2.

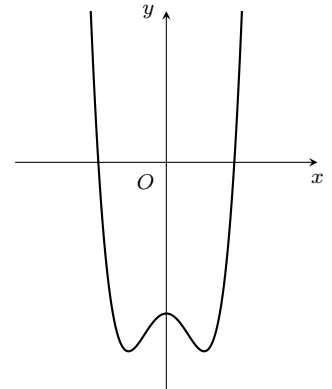
Hàm số trùng phương nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên.

☐ A  $y = x^4 + 2x^2 - 4.$

☐ B  $y = x^4 - 2x^2 - 4.$

☐ C  $y = x^4 + 2x^2 + 4.$

☐ D  $y = -x^4 - 2x^2 - 4.$



### Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm trùng phương  $\Rightarrow a > 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm  $\Rightarrow c < 0$ .

Hàm số có 3 điểm cực trị  $\Rightarrow a \cdot b < 0$ , mà  $a > 0 \Rightarrow b < 0$ .

Chọn phương án ☒ B

### Câu 3.

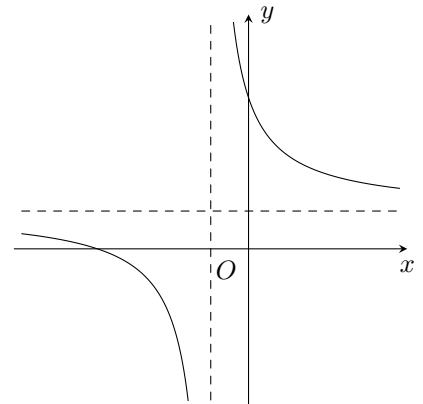
Đường cong bên dưới là đồ thị của hàm số nhất biến nào dưới đây?

☐ A  $y = \frac{x-4}{x-1}.$

☐ B  $y = \frac{x+4}{x+1}.$

☐ C  $y = \frac{x+2}{x+3}.$

☐ D  $y = \frac{-2x+4}{x+3}.$



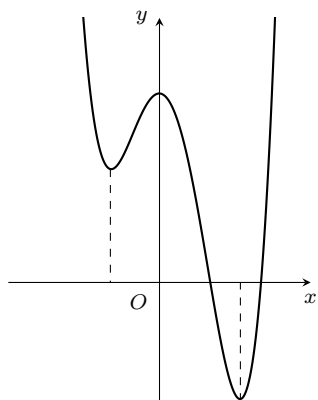
### Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = x_0 < 0$ , tiệm cận ngang  $y = y_0 > 0$  và hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

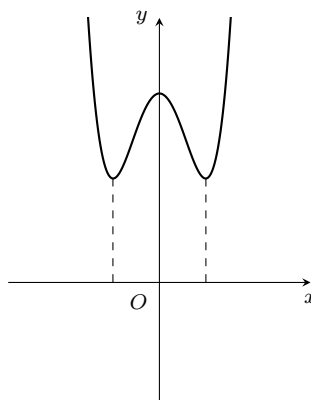
Chọn phương án **B**

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ ?

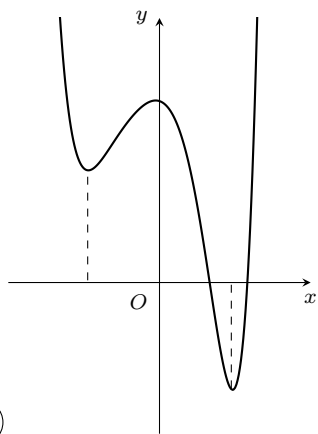
|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $3$ | $5$ | $+\infty$ |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |
|      |           |      |     |     |           |



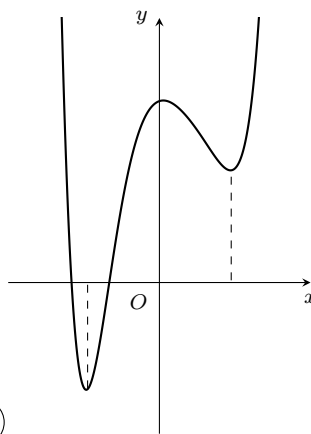
**A**



**B**



**C**



**D**

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên ta thấy 2 cực tiểu cách đều trục tung và tung độ hai cực tiểu một dương, một âm, do đó.

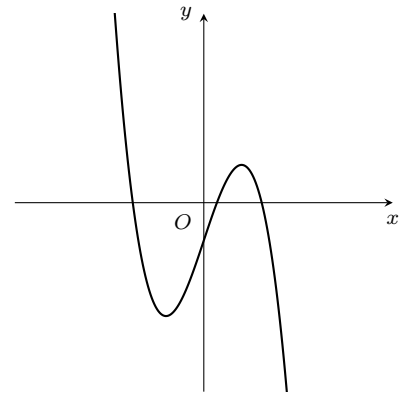
Chọn phương án **C**

**Câu 5.**



Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng:

- (A)  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ . (B)  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .  
(C)  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$ . (D)  $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$ .



### Lời giải.

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ .

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm  $\Rightarrow d < 0$ .

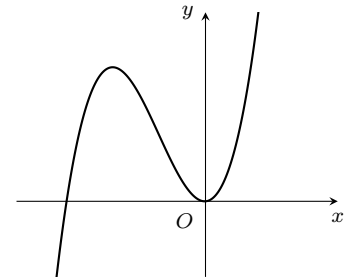
Dựa vào đồ thị ta có  $\begin{cases} x_{ct} \cdot x_{cd} < 0 \\ x_{ct} + x_{cd} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$ , kết hợp  $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ .

Chọn phương án (B)

### Câu 6.

Cho hàm số  $y = x^3 + bx^2 + d$  ( $b, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $b < 0, d > 0$ . (B)  $b > 0, d = 0$ . (C)  $b > 0, d > 0$ . (D)  $b < 0, d = 0$ .



### Lời giải.

Ta có  $y' = 3x^2 + 2bx$ .

Đồ thị đi qua gốc tọa độ  $\Rightarrow d = 0$ .

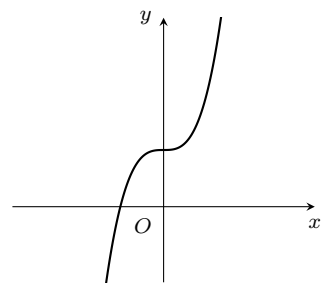
Dựa vào đồ thị ta có  $x_{ct} + x_{cd} < 0 \Rightarrow -\frac{2b}{3} < 0 \Rightarrow b > 0$ .

Chọn phương án (B)

### Câu 7.

Cho hàm số  $y = x^3 + bx^2 + d$  ( $b, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $b < 0, d > 0$ . (B)  $b > 0, d > 0$ . (C)  $b = 0, d > 0$ . (D)  $b > 0, d = 0$ .



### Lời giải.

Ta có  $y = x^3 + bx^2 + d$  ( $b, d \in \mathbb{R}$ ).

$y' = 3x^2 + 2bx$ .

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương  $\Rightarrow d > 0$ .

Ta có  $y = 3x^2 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2b}{3} \end{cases}$ .

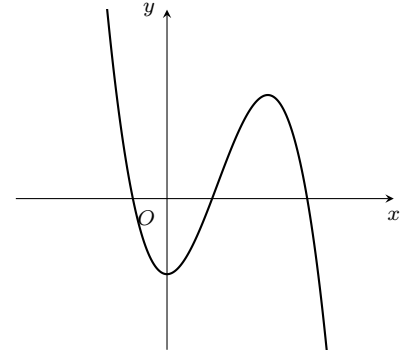
Đồ thị hàm số  $y = x^3 + bx^2 + d$  không có cực trị  $\Rightarrow y' = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  $\Rightarrow b = 0$ .

Chọn phương án **C**

### Câu 8.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A**  $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$       **B**  $\begin{cases} b^2 - 3ac < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$
- C**  $\begin{cases} b^2 - 3ac < 0 \\ ac = 0 \end{cases}$       **D**  $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac = 0 \end{cases}$



### Lời giải.

Ta có  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Đồ thị có 2 cực trị  $\Rightarrow y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $\Rightarrow \Delta_y = b^2 - 3ac > 0$ .

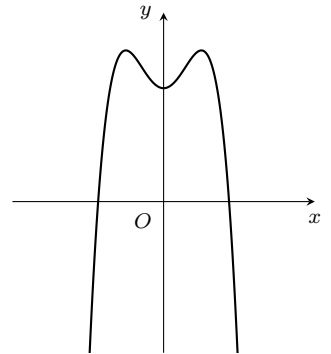
Dựa vào đồ thị ta có  $\begin{cases} x_{ct} = 0 \\ x_{cd} > 0 \end{cases} \Rightarrow x_{ct} \cdot x_{cd} = \frac{c}{3a} = 0 \Rightarrow ac = 0$ .

Chọn phương án **D**

### Câu 9.

Cho hàm số trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng.

- A**  $a > 0, b > 0, c > 0$       **B**  $a < 0, b < 0, c < 0$
- C**  $a < 0, b > 0, c > 0$       **D**  $a < 0, b < 0, c > 0$



### Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm trùng phương  $\Rightarrow a < 0$ .

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương  $\Rightarrow c > 0$ .

Hàm số có 3 cực trị  $\Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow b > 0$ .

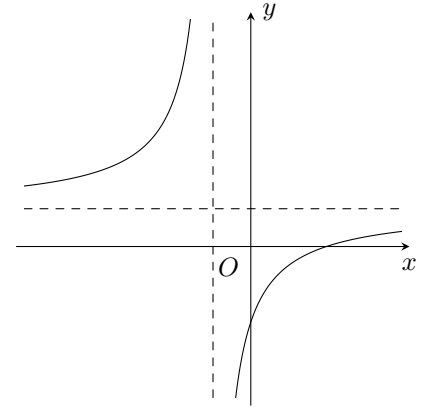
Chọn phương án **C**

### Câu 10.

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ . (B)  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .  
(C)  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ . (D)  $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta có

- Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ .
- Tiệm cận ngang  $y = -\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ .
- Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương  $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ .

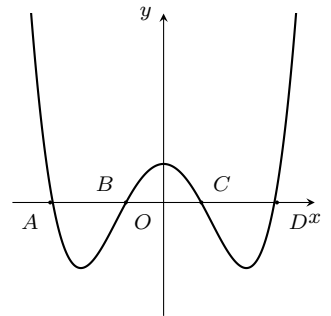
Su ra  $a, c, d$  cùng dấu nhau và khác dấu  $b$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 11.**

Cho hàm số trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết rằng  $AB = BC = CD$ . Chọn mệnh đề đúng.

- (A)  $9b^2 = 100ac$ . (B)  $b^2 = 100ac$ . (C)  $b^2 = ac$ . (D)  $a = b = c$ .



**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và  $Ox$ :  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  (1).

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), phương trình (1) trở thành:  $at^2 + bt + c = 0$  (2).

Do đồ thị (C) cắt trục  $Ox$  tại bốn điểm phân biệt nên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt  $0 < t_1 < t_2$

$$\Rightarrow \text{nghiệm phương trình (1) được viết dưới dạng: } \begin{cases} x_1 = -\sqrt{t_2} \\ x_2 = -\sqrt{t_1} \\ x_3 = \sqrt{t_1} \\ x_4 = \sqrt{t_2}. \end{cases}$$

Theo đồ thị trên:  $AB = BC = CD \Rightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ .

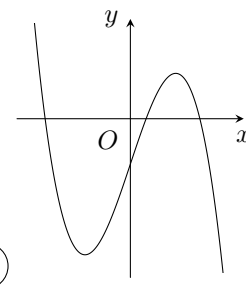
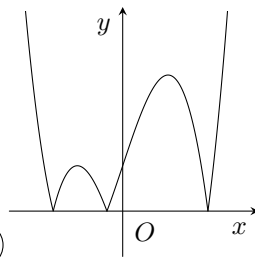
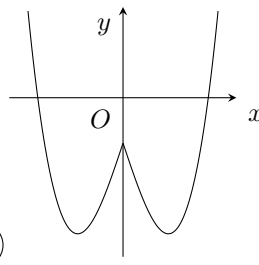
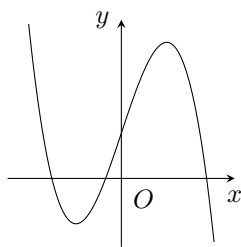
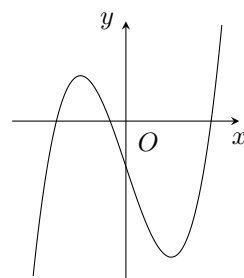
Mặt khác: 
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Suy ra  $9b^2 = 100ac$ .

Chọn phương án **(A)**

### Câu 12.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$ ?



### Lời giải.

Vì hàm số  $y = f(|x|)$  là hàm số chẵn nên đồ thị sẽ nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng.

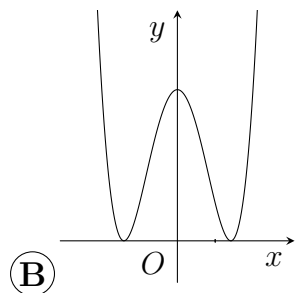
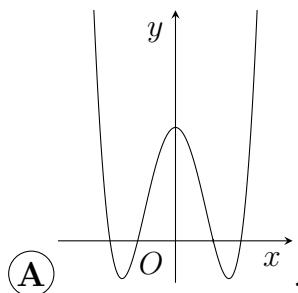
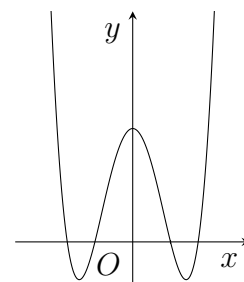
Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  đã cho, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số  $y = f(|x|)$  bằng cách như sau

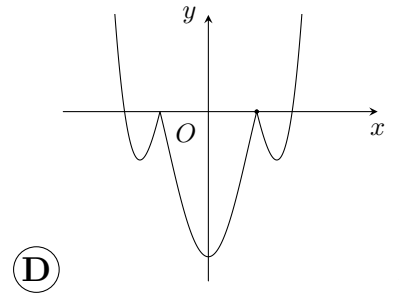
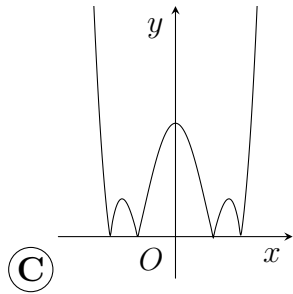
- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải  $Oy$  của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .
- Bỏ phần đồ thị bên trái  $Oy$  của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua  $Oy$ .

Chọn phương án **(B)**

### Câu 13.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$ ?





**Lời giải.**

Ta có  $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & y \geq 0 \\ -f(x), & y < 0. \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  đã cho, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$  bằng cách như sau

- Giữ nguyên đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ứng với  $y \geq 0$ .
- Lấy đối xứng phần đồ thị ứng với  $y < 0$  qua  $Ox$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 14.**

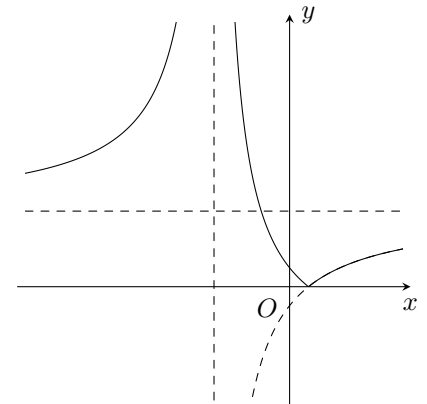
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên.

**(A)**  $y = \frac{2x-1}{x-2}$ .

**(B)**  $y = \frac{2|x|-1}{|x|+2}$ .

**(C)**  $y = \frac{2x-1}{x+2}$ .

**(D)**  $y = \frac{|2x+1|}{x+2}$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta có

- Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ .
- Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ .
- Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương  $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ .

Suy ra  $a, c, d$  cùng dấu nhau và khác dấu  $b$ .

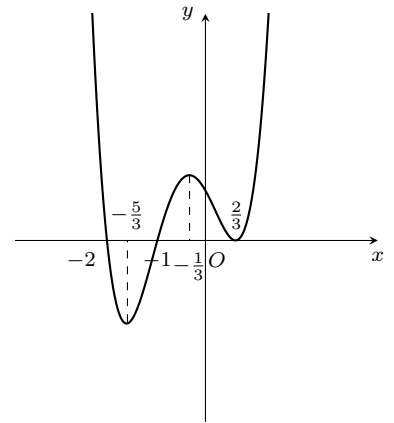
Mặt khác dựa vào dạng đồ thị ta có hàm số có dạng  $y = |f(x)|$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 15.**

Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên  $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .  
 (B) Hàm số nghịch biến trên  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .  
 (C) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên  $(-2; -1)$ .



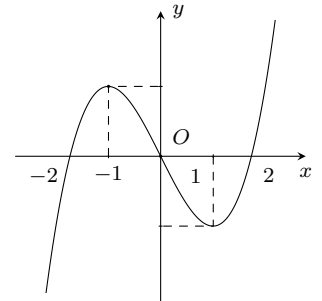
**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy  $x \in (-2; -1)$  thì  $f'(x) < 0 \Rightarrow$  hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(-2; -1)$ .  
 Chọn phương án (D)

**Câu 16.**

Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là  $x_{\text{cd}} = -1$ .  
 (B) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $x_{\text{ct}} = 1$ .  
 (C) Điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là  $x_{\text{cd}} = 0$ .  
 (D) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $x_{\text{ct}} = 2$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị  $y = f'(x)$  ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|      |           |      |         |        |        |     |           |
|------|-----------|------|---------|--------|--------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ |         | $0$    |        | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$     | $+$    | $0$    | $-$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $f(-2)$ | $f(0)$ | $f(2)$ |     | $+\infty$ |

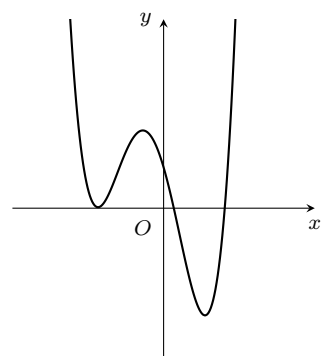
Từ đó suy ra điểm cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là  $x_{\text{cd}} = 0$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 17.**

Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



**Lời giải.**

Gọi  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và trục hoành, dựa vào đồ thị trên ta có bảng xét dấu

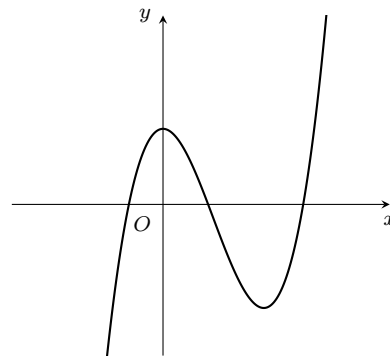
| $x$     | $-\infty$ | $a$ | $b$ | $c$ | $+\infty$ |   |   |   |
|---------|-----------|-----|-----|-----|-----------|---|---|---|
| $f'(x)$ |           | +   | 0   | +   | 0         | - | 0 | + |

Từ bảng xét dấu ta thấy  $f'(x)$  đổi dấu hai lần (qua  $b$  và  $c$ ), suy ra hàm số  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.**

Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại tối đa bao nhiêu điểm?

**(A)** 1.**(B)** 2.**(C)** 3.**(D)** 4.**Lời giải.**

Gọi  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và trục hoành, dựa vào đồ thị trên ta có bảng biến thiên

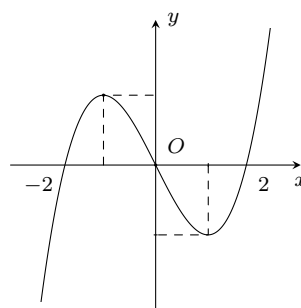
|         |           |        |     |        |        |     |           |           |
|---------|-----------|--------|-----|--------|--------|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $a$    |     | $b$    |        | $c$ |           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$    | $0$ | $+$    | $0$    | $-$ | $0$       | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(a)$ |     | $f(b)$ | $f(c)$ |     | $+\infty$ |           |

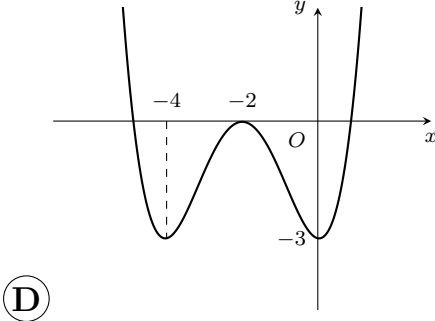
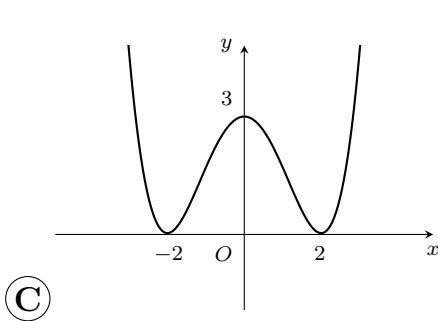
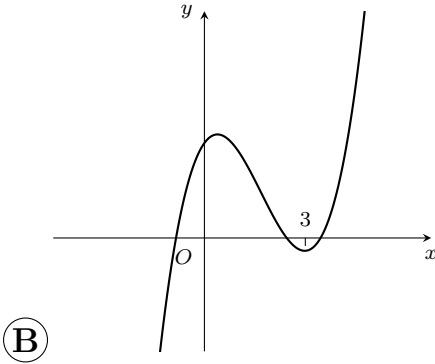
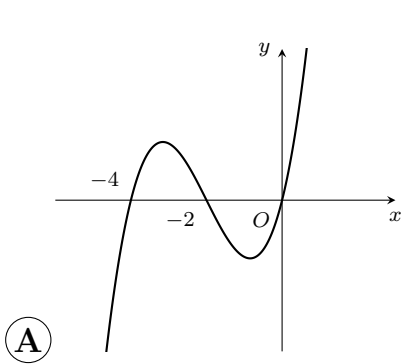
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.**

Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Biết  $f(0) = 3$ ,  $f(-2) = f(2) = 0$ . Đồ thị hàm số  $y = f(x+2) - 3$  là đường cong nào dưới đây?



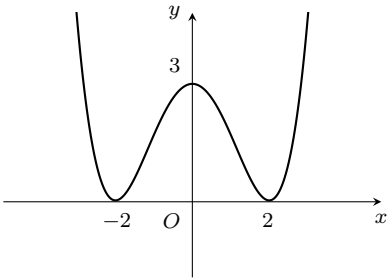


Lời giải.

Dựa vào đồ thị  $y = f'(x)$  ta có bảng biến thiên hàm số  $y = f(x)$  như sau

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $0$  | $3$ | $0$ | $+\infty$ |

Suy ra hình dạng đồ thị hàm số  $y = f(x)$



Từ đó ta có được đồ thị hàm số  $y = f(x + 2) - 3$  bằng cách: tịnh tiến đồ thị  $y = f(x)$  xuống dưới 3 đơn vị, và qua trái 2 đơn vị.

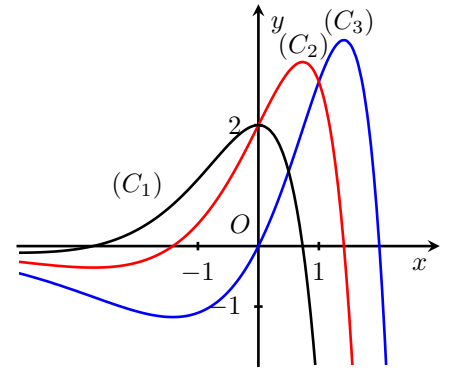
Chọn phương án (D)

Câu 20.



Cho đồ thị ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ như hình bên dưới. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- Ⓐ  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .      Ⓑ  $(C_3), (C_1), (C_2)$ .  
 Ⓒ  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .      Ⓓ  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị  $(C_1)$  cắt  $Ox$  tại hai điểm là cực trị của đồ thị  $(C_2)$ .

Đồ thị  $(C_3)$  cắt  $Ox$  tại hai điểm là cực trị của đồ thị  $(C_1)$ .

Từ đó ta có đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong:  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .

Chọn phương án Ⓓ

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. B  | 3. B  | 4. C  | 5. B  | 6. B  | 7. C  | 8. D  | 9. C  | 10. A |
| 11. A | 12. B | 13. C | 14. C | 15. D | 16. C | 17. B | 18. D | 19. D | 20. D |

## DẠNG 29.

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

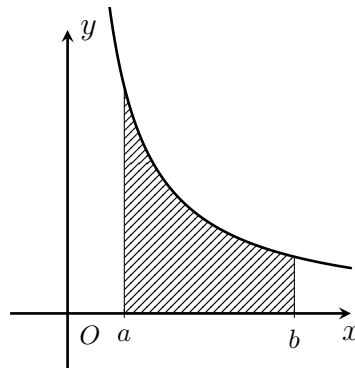
1 HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI ĐƯỜNG CONG  $Y = F(X)$  VÀ TRỤC HOÀNH

## Định lý 1.

Cho  $(\mathcal{H})$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$ .

Diện tích hình phẳng  $(\mathcal{H})$  được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

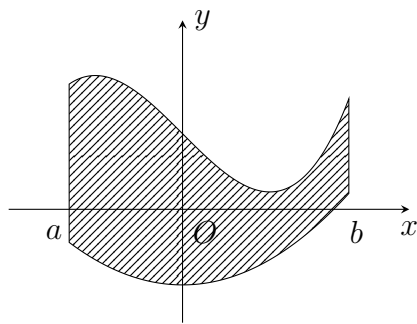


## 2 HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI HAI ĐƯỜNG CONG

## Định lý 2.

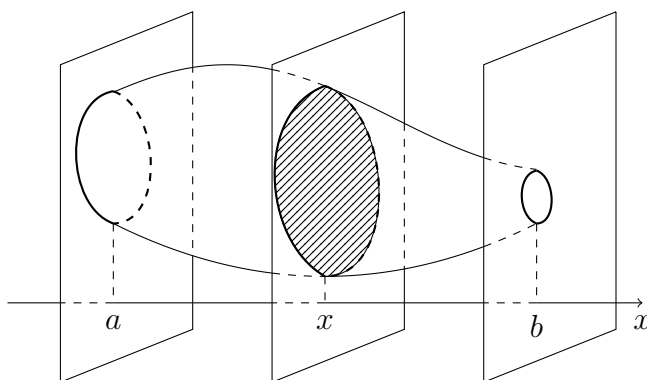
Cho  $(\mathcal{H})$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$ .

Diện tích của  $(\mathcal{H})$  bằng  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .



## 3 THỂ TÍCH VẬT THỂ

**Định lý 3.** Cắt vật thể  $\mathcal{V}$  bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại  $x = a, x = b (a < b)$ . Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với  $Ox$  tại điểm  $x, (a \leq x \leq b)$  cắt  $\mathcal{V}$  theo thiết diện có diện tích  $S(x)$ . Với  $S(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .



Thể tích của vật thể  $V$  giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

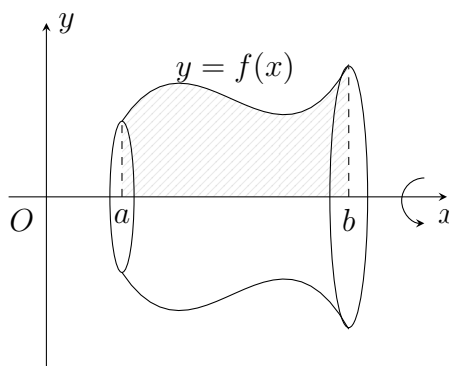
#### 4 THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

**Định lí 4.**

Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ) quay quanh trục  $Ox$  tạo thành khối tròn xoay.

Thể tích của khối tròn xoay đó được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



## 5 BÀI TẬP MẪU

### Ví dụ 1.

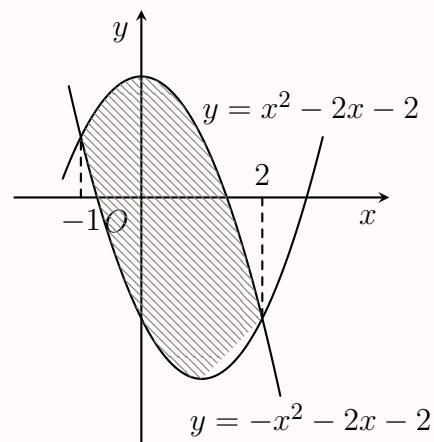
Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

Ⓐ  $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) \, dx.$

Ⓑ  $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) \, dx.$

Ⓒ  $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) \, dx.$

Ⓓ  $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) \, dx.$



### Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải.

1. **DẠNG TOÁN:** Viết công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong.

2. **HƯỚNG GIẢI:** Viết công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 hàm số.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là

$$\int_{-1}^2 ((-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)) \, dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) \, dx.$$

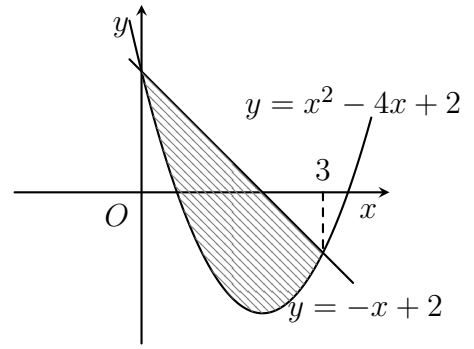
Chọn phương án Ⓐ

## 6 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

### Câu 1.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

- Ⓐ  $\int_0^3 (x^2 - 3x) \, dx.$
- Ⓑ  $\int_0^3 (-x^2 + 3x) \, dx.$
- Ⓒ  $\int_0^3 (x^2 - 4x + 2) \, dx - \int_0^3 (-x + 2) \, dx.$
- Ⓓ  $\int_0^3 (-x + 2) \, dx + \int_0^3 (x^2 - 4x + 2) \, dx.$



**Lời giải.**

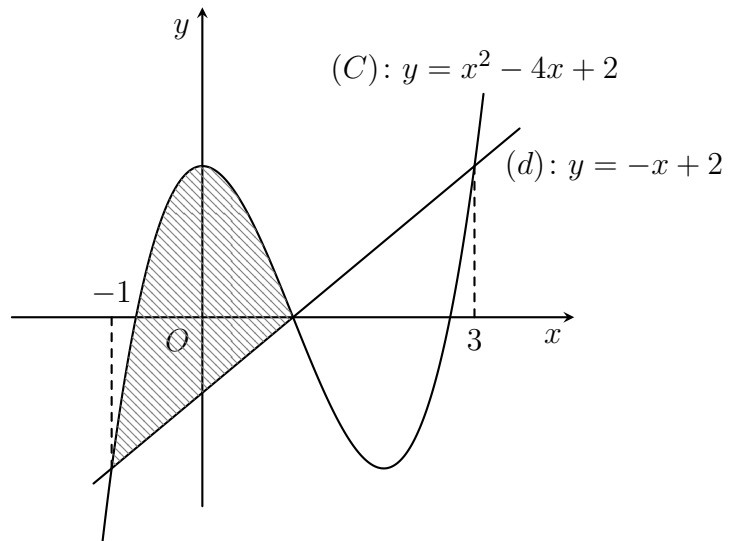
Ta có  $\int_0^3 [(-x + 2) - (x^2 - 4x + 2)] \, dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) \, dx.$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 2.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

- Ⓐ  $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) \, dx.$
- Ⓑ  $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) \, dx.$
- Ⓒ  $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + x + 1) \, dx.$
- Ⓓ  $\int_{-1}^1 (-x^3 + 3x^2 + x - 3) \, dx.$



**Lời giải.**

Ta có  $\int_{-1}^1 [(x^3 - 3x^2 + 2) - (x - 1)] \, dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) \, dx.$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 3.**

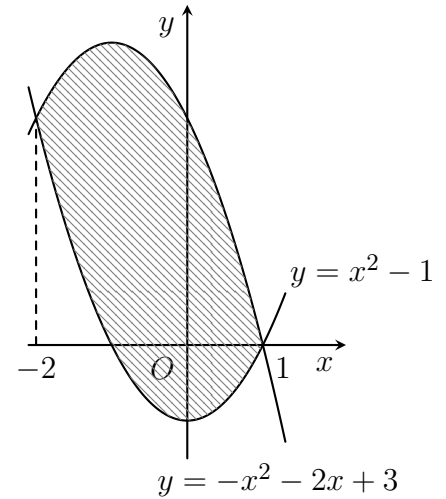
Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

(A)  $\int_{-2}^1 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

(B)  $\int_{-2}^1 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

(C)  $\int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

(D)  $\int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx.$



**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là

$$\int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 4.**

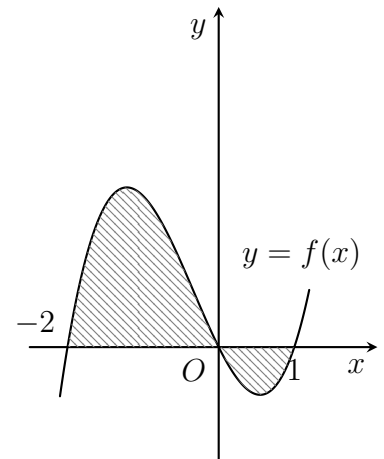
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) là

(A)  $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$

(B)  $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$

(C)  $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx.$

(D)  $\left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right|.$



**Lời giải.**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) là

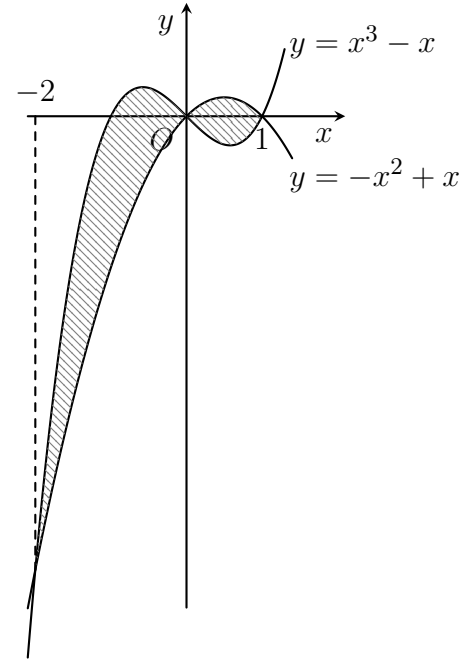
$$S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 5.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

- Ⓐ  $\int_{-2}^1 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx.$
- Ⓑ  $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx.$
- Ⓒ  $\int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \, dx.$
- Ⓓ  $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx.$



**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là

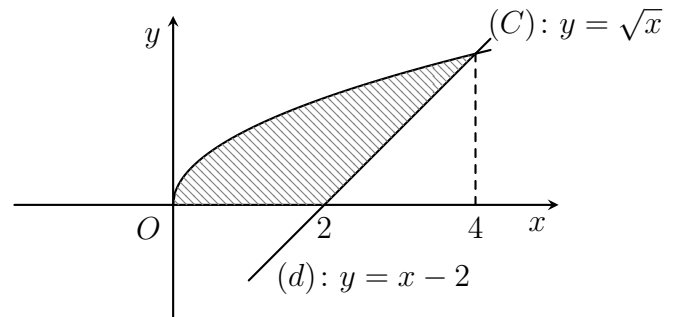
$$\int_{-2}^1 |(x^3 - x) - (-x^2 + x)| \, dx = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| \, dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) \, dx.$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 6.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

- Ⓐ  $\int_0^2 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx.$
- Ⓑ  $\int_0^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx.$
- Ⓒ  $\int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx.$
- Ⓓ  $\int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (x - 2 - \sqrt{x}) \, dx.$



**Lời giải.**

Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 2 phần. Nên ta có

$$\int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) \, dx = \int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx.$$



Chọn phương án **C**

**Câu 7.**

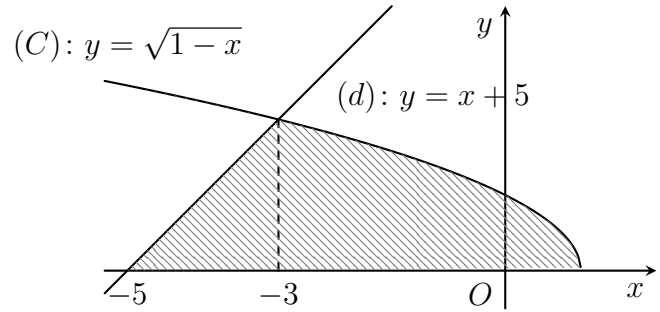
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

**(A)**  $\int_{-5}^{-3} (x+5) dx - \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

**(B)**  $\int_{-5}^{-3} (x+5) dx + \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

**(C)**  $\int_{-5}^1 [(x+5) - \sqrt{1-x}] dx.$

**(D)**  $\int_{-5}^1 [\sqrt{1-x} - (x+5)] dx.$



**Lời giải.**

Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 2 phần.

Nên ta có  $\int_{-5}^{-3} (x+5) dx + \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

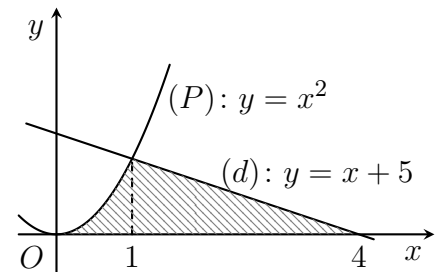
Chọn phương án **(B)**

**Câu 8.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

**(A)**  $\int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx.$  **(B)**  $\int_0^4 \left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx.$

**(C)**  $\int_0^4 \left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx.$  **(D)**  $\int_0^1 x^2 dx - \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx.$



**Lời giải.**

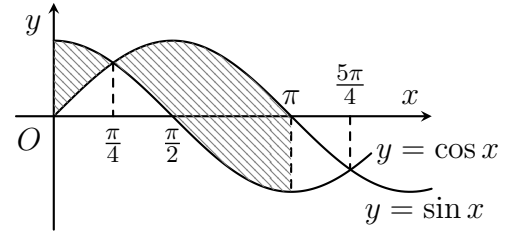
Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 2 phần. Nên ta có

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



- (A)  $\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$
- (B)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$
- (C)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$
- (D)  $\int_0^{\pi} (\cos x - \sin x) dx.$

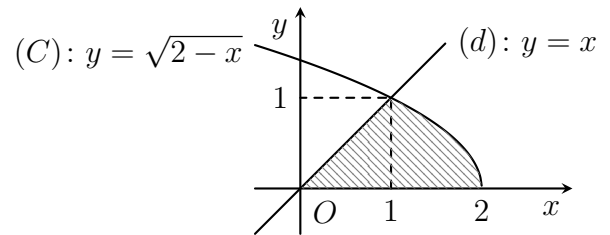
**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos x - \sin x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\cos x - \sin x| dx. \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx. \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

### Câu 10.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



- (A)  $\int_0^1 x dx + \int_1^2 \sqrt{2-x} dx.$
- (B)  $\int_0^1 x dx - \int_1^2 \sqrt{2-x} dx.$
- (C)  $\int_0^2 (x - \sqrt{2-x}) dx.$
- (D)  $\int_0^2 (\sqrt{2-x} - x) dx.$

**Lời giải.**

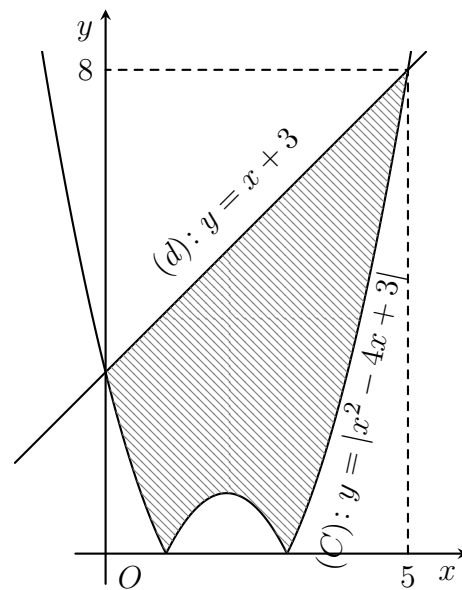
Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 2 phần. Nên ta có:  $\int_0^1 x \, dx + \int_1^2 \sqrt{2-x} \, dx$ .

Chọn phương án **A**

### Câu 11.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?

- (A)**  $\int_0^1 (-x^2 + 5x) \, dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) \, dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) \, dx$ .  
**(B)**  $\int_0^1 (-x^2 + 5x) \, dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) \, dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) \, dx$ .  
**(C)**  $\int_0^1 (x^2 - 5x) \, dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) \, dx + \int_3^5 (x^2 - 5x) \, dx$ .  
**(D)**  $\int_0^1 (-x^2 + 5x) \, dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) \, dx - \int_3^5 (-x^2 + 5x) \, dx$ .



### Lời giải.

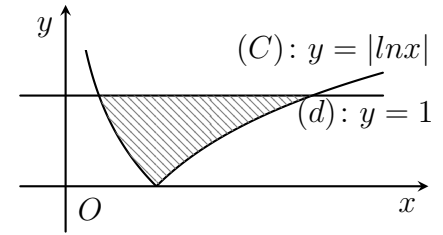
Ta có diện tích hình phẳng

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^5 [(x+3) - |x^2 - 4x + 3|] \, dx \\
 &= \int_0^1 [(x+3) - (x^2 - 4x + 3)] \, dx + \int_1^3 [(x+3) - (-x^2 + 4x - 3)] \, dx + \int_3^5 [(x+3) - (x^2 - 4x + 3)] \, dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2 + 5x) \, dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) \, dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) \, dx
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **A**

### Câu 12.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



- (A)  $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx.$
- (B)  $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - \ln x) dx + \int_1^e (1 + \ln x) dx.$
- (C)  $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx - \int_1^e (1 - \ln x) dx.$
- (D)  $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - \ln x) dx - \int_1^e (1 + \ln x) dx.$

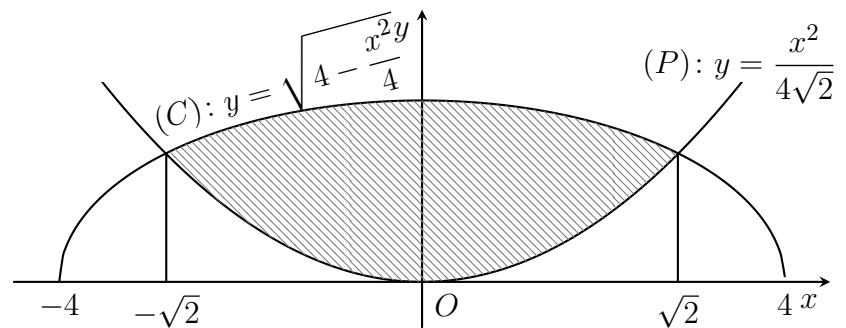
**Lời giải.**

Ta có:  $\int_{\frac{1}{e}}^e |1 - |\ln x|| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - (-\ln x)) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx.$

Chọn phương án (A)

**Câu 13.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



- (A)  $\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx.$
- (B)  $\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx.$
- (C)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx - \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx.$
- (D)  $2 \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx.$

**Lời giải.**

Do tính đối xứng của hình phẳng cần tính (như hình vẽ) nên

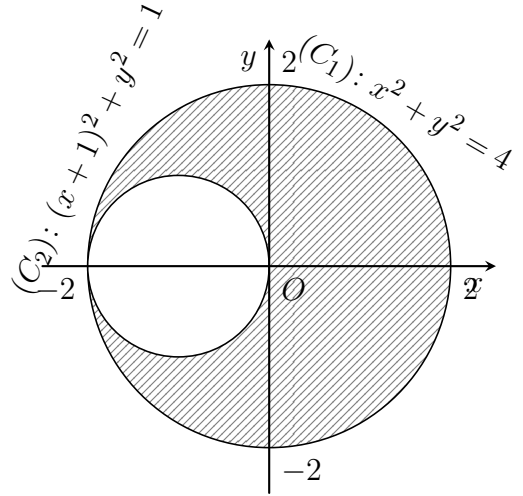
$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left( \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 14.**

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được giới hạn bởi 2 đường tròn có phương trình  $x^2 + y^2 = 4$  và  $(x+1)^2 + y^2 = 1$  được tính theo công thức nào?

- (A)  $\left[ \int_{-2}^0 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-(x+1)^2}) dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \right].$
- (B)  $2 \left[ \int_{-2}^0 (\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-(x+1)^2}) dx - \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \right].$
- (C)  $2 \left[ \int_{-2}^0 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-(x+1)^2}) dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \right].$
- (D)  $\left[ \int_{-2}^0 (\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-(x+1)^2}) dx - \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \right].$

**Lời giải.**

Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 4 phần theo hệ trục tọa độ:

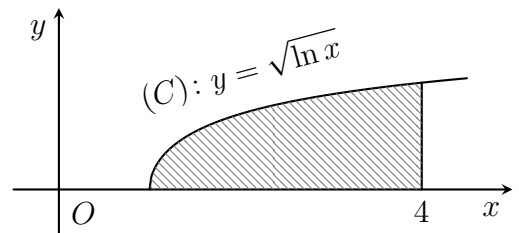
Do tính đối xứng của hình phẳng cần tính (như hình vẽ) nên  $S = 2 \left[ \int_{-2}^0 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-(x+1)^2}) dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \right].$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 15.**

Công thức thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục  $Ox$  là

- (A)  $\pi \int_1^4 \ln x \cdot dx.$
- (B)  $\pi \int_1^4 \sqrt{\ln x} dx.$
- (C)  $\pi \int_1^4 (\sqrt{\ln x} - 1) dx.$
- (D)  $\pi \int_1^4 (\ln x - 1) \cdot dx.$

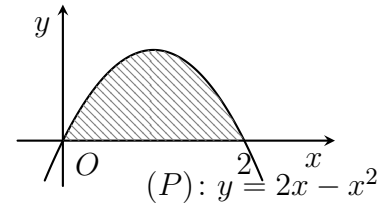
**Lời giải.**

Áp dụng công thức thể tích vật thể tròn xoay quanh trục  $Ox$ :  $V = \pi \int_1^4 \ln x \cdot dx.$

Chọn phương án **A**

**Câu 16.**

Công thức thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục  $Ox$  là



**A**  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx.$

**B**  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx.$

**C**  $\pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx.$

**D**  $\pi \int_0^2 (4x^2 + 4x^3 - x^4) dx.$

**Lời giải.**

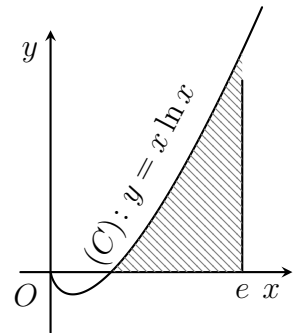
Áp dụng công thức thể tích vật thể tròn xoay quanh trục  $Ox$ :

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 17.**

Công thức thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục  $Ox$  là



**A**  $\pi \int_1^e [(x \cdot \ln x)^2 - e^2] dx.$

**B**  $\pi \int_1^e (x \cdot \ln x) dx.$

**C**  $\pi \int_1^e (x \cdot \ln x - e) dx.$

**D**  $\pi \int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx.$

**Lời giải.**

Áp dụng công thức thể tích vật thể tròn xoay quanh trục  $Ox$

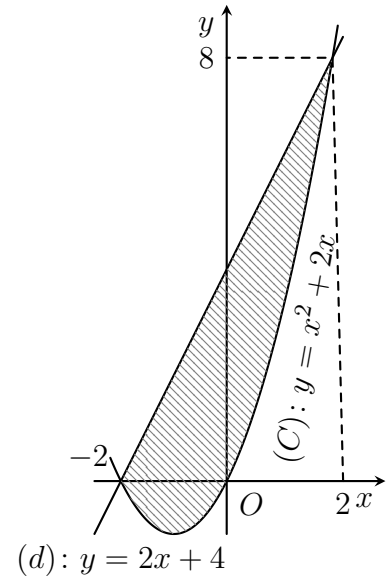
$$V = \pi \int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 18.**

Công thức thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục  $Ox$  là

- Ⓐ  $\pi \int_{-2}^2 [x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16] dx.$
- Ⓑ  $\pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx.$
- Ⓒ  $\pi \int_{-2}^2 [-x^4 - 4x^3 + 16x + 16] dx.$
- Ⓓ  $\pi \int_{-2}^2 (x^2 + 4x + 4) dx.$



**Lời giải.**

Áp dụng công thức thể tích vật thể tròn xoay quanh trục  $Ox$

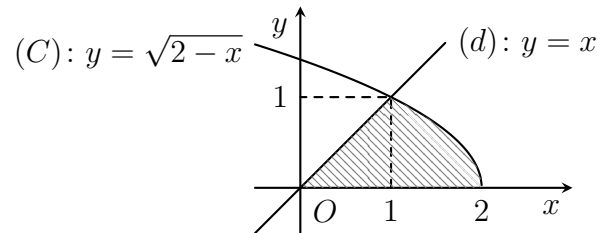
$$V = \pi \int_{-2}^2 [(2x + 4)^2 - (x^2 + 2x)^2] dx = \pi \int_{-2}^2 [-x^4 - 4x^3 + 16x + 16] dx.$$

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 19.**

Công thức thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục  $Ox$  là

- Ⓐ  $\pi \int_0^1 (2 - x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx.$
- Ⓑ  $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2 - x) dx.$
- Ⓒ  $\pi \int_0^2 (2 - x + x^2) dx.$
- Ⓓ  $\pi \int_0^2 x^2 dx + \pi \int_2^4 (2 - x) dx.$



**Lời giải.**

Ta chia hình phẳng gạch chéo làm 2 phần.

Áp dụng công thức thể tích vật thể tròn xoay quanh trục  $Ox$ :  $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2 - x) dx.$

Chọn phương án Ⓑ

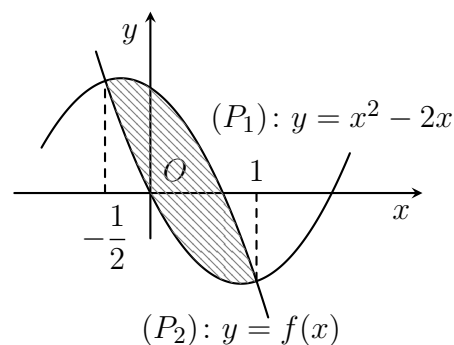
**Câu 20.**

Miền phẳng trong hình vẽ giới hạn bởi hàm số  $y = f(x)$  và parabol

$y = x^2 - 2x$ . Biết  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{7}{5}$ . Khi đó diện tích hình phẳng

được gạch chéo trong hình vẽ bằng

- Ⓐ  $S = 1$ .      Ⓑ  $S = \frac{71}{40}$ .      Ⓒ  $S = \frac{41}{40}$ .      Ⓓ  $S = 2$ .

**Lời giải.**

Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bằng

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [f(x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 2x) dx = \frac{7}{5} + \frac{3}{8} = \frac{71}{40}.$$

Chọn phương án Ⓑ



## DẠNG 30.

## CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

## 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## • Khái niệm số phức.

Số phức (dạng đại số):  $z = a + bi$ . Trong đó  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a$  là phần thực,  $b$  là phần ảo.

## • Hai số phức bằng nhau.

Cho hai số phức  $z_1 = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) và  $z_2 = c + di$  ( $c, d \in \mathbb{R}$ ). Khi đó  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$

## • Phép cộng số phức.

Cho hai số phức  $z_1 = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) và  $z_2 = c + di$  ( $c, d \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ ;  $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$ .

## • Số phức liên hợp.

Số phức liên hợp của  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) là  $\bar{z} = a - bi$ .

## • Mô-đun của số phức.

Với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) ta có  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai số phức  $z_1 = -3 + i$  và  $z_2 = 1 - i$ . Phần ảo của số phức  $z_1 + \bar{z}_2$  bằng

(A)  $-2$ .

(B)  $2i$ .

(C)  $2$ .

(D)  $-2i$ .

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm phần ảo của số phức.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1:  $z_2 = 1 - i \Rightarrow \bar{z}_2$ .

B2: Tính  $z_1 + \bar{z}_2 = a + bi$ .

B3: Phần ảo của số phức  $z_1 + \bar{z}_2 = a + bi$  là  $b$ .

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có  $z_2 = 1 - i \Rightarrow \bar{z}_2 = 1 + i$ . Do đó  $z_1 + \bar{z}_2 = -3 + i + 1 + i = -2 + 2i$ .

Vậy phần ảo của số phức  $z_1 + \bar{z}_2$  là 2.

Chọn phương án (C)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hai số phức  $z_1 = 2 - 4i$  và  $z_2 = 1 - 3i$ . Phần ảo của số phức  $z_1 + i\overline{z_2}$  bằng  
 (A) 5. (B)  $3i$ . (C)  $-5i$ . (D)  $-3$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z_2 = 1 - 3i \Rightarrow \overline{z_2} = 1 + 3i \Rightarrow i\overline{z_2} = i(1 + 3i) = 3i^2 + i = -3 + i$ .

Suy ra  $z_1 + i\overline{z_2} = 2 - 4i + (-3 + i) = -1 - 3i$ .

Vậy phần ảo của số phức  $z_1 + i\overline{z_2}$  là  $-3$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 2.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 - 8i$  và  $z_2 = 5 + 6i$ . Phần ảo của số phức liên hợp  $z = z_2 - i\overline{z_1}$  bằng  
 (A) 5. (B)  $5i$ . (C)  $-5$ . (D)  $-5i$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z_1 = 1 - 8i \Rightarrow \overline{z_1} = 1 + 8i \Rightarrow i\overline{z_1} = i(1 + 8i) = 8i^2 + i = -8 + i$ .

Suy ra  $z = z_2 - i\overline{z_1} = 5 + 6i - (-8 + i) = 13 + 5i \Rightarrow \overline{z} = 13 - 5i$ .

Vậy phần ảo của số phức liên hợp  $z = z_2 - i\overline{z_1}$  là  $-5$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 3.** Cho hai số phức  $z_1 = 2 + 3i$  và  $z_2 = 6i$ . Phần ảo của số phức  $z = iz_1 - \overline{z_2}$  bằng  
 (A)  $-4i$ . (B)  $-4$ . (C)  $8i$ . (D)  $8$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z_1 = 2 + 3i \Rightarrow iz_1 = i(2 + 3i) = 3i^2 + 2i = -3 + 2i$ .

$z_2 = 6i \Rightarrow \overline{z_2} = -6i \Rightarrow z = iz_1 - \overline{z_2} = -3 + 2i - (-6i) = -3 + 8i$ .

Vậy phần ảo của số phức  $z = iz_1 - \overline{z_2}$  là  $8$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 4.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + 2i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Phần ảo của số phức liên hợp  $z = 3z_1 - 2z_2$ .  
 (A) 12. (B)  $-12$ . (C) 1. (D)  $-1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = (3 + 6i) + (-4 + 6i) = -1 + 12i$ .

Số phức liên hợp của số phức  $z = 3z_1 - 2z_2$  là  $\overline{z} = -1 - 12i$ .

Vậy phần ảo của số phức liên hợp của số phức  $z = 3z_1 - 2z_2$  là  $-12$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Cho hai số phức  $z_1 = 5 - 2i$  và  $z_2 = 3 - 4i$ . Số phức liên hợp của số phức  $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2}$  là  
 (A)  $54 + 26i$ . (B)  $54 - 30i$ . (C)  $-54 - 26i$ . (D)  $54 - 26i$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z_1 = 5 - 2i \Rightarrow \overline{z_1} = 5 + 2i$ ;  $z_2 = 3 - 4i \Rightarrow \overline{z_2} = 3 + 4i$ .

Suy ra  $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2} = 5 + 2i + 3 - 4i + 2(5 - 2i)(3 + 4i) = 8 - 2i + 2(23 + 14i) = 54 + 26i$ .

Vậy số phức liên hợp của số phức  $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2}$  là  $\overline{w} = 54 - 26i$ .

Chọn phương án (D)

- Câu 6.** Cho số phức  $z = 5 - 3i$ . Phần thực của số phức  $w = 1 + \bar{z} + (\bar{z})^2$  bằng  
 (A) 22. (B) -22. (C) 33. (D) -33.

**Lời giải.**

Ta có  $z = 5 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 5 + 3i \Rightarrow (\bar{z})^2 = (5 + 3i)^2 = 25 + 30i + 9i^2 = 16 + 30i$ .

Suy ra  $w = 1 + \bar{z} + (\bar{z})^2 = 1 + 5 + 3i + 16 + 30i = 22 + 33i$ .

Vậy phần thực của số phức  $w = 1 + \bar{z} + (\bar{z})^2$  bằng 22.

Chọn phương án (A)

- Câu 7.** Cho hai số phức  $z_1 = 4 - 3i + (1 - i)^3$  và  $z_2 = 7 + i$ . Phần thực của số phức  $w = 2\overline{z_1 z_2}$  bằng

- (A) 9. (B) 2. (C) 18. (D) -74.

**Lời giải.**

Ta có  $z_1 = 4 - 3i + (1 - 3i + 3i^2 - i^3) = 4 - 3i + (1 - 3i - 3 + i) = 2 - 5i$ .

Suy ra  $\overline{z_1 z_2} = (2 + 5i)(7 + i) = 9 + 37i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = 9 - 37i$ .

Do đó  $w = 2(9 - 37i) = 18 - 74i$ .

Vậy phần thực của số phức  $w = 2\overline{z_1 z_2}$  bằng 18.

Chọn phương án (C)

- Câu 8.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(1 + 2i)z = 5(1 + i)^2$ . Tổng bình phương phần thực và phần ảo của số phức  $w = \bar{z} + iz$  bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

**Lời giải.**

Ta có  $(1 + 2i)z = 5(1 + i)^2 \Leftrightarrow z = \frac{5(1 + i)^2}{1 + 2i} = \frac{10i}{1 + 2i} = \frac{10i(1 - 2i)}{5} = 4 + 2i$ .

Suy ra  $w = \bar{z} + iz = (4 - 2i) + i(4 + 2i) = 2 + 2i$ .

Vậy số phức  $w$  có phần thực bằng 2, phần ảo bằng 2. Suy ra  $2^2 + 2^2 = 8$ .

Chọn phương án (D)

- Câu 9.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$ . Kí hiệu  $a, b$  lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức  $w = z + 1 + i$ . Tính  $P = a^2 + b^2$ .

- (A) 13. (B) 5. (C) 25. (D) 7.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} &= 7 + 8i \Leftrightarrow (2 + i)z = 7 + 8i - \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} \\ &\Leftrightarrow (2 + i)z = 4 + 7i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4 + 7i}{2 + i} = \frac{(4 + 7i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = 3 + 2i. \end{aligned}$$

Suy ra  $w = z + 1 + i = 4 + 3i \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 16 + 9 = 25$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 10.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z + 2\bar{z} = 6 - 3i$ . Tìm phần ảo của số phức  $z$ .

- (A) 3. (B) -3. (C)  $3i$ . (D) 2.

**Lời giải.**

Đặt  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ .

Theo giả thiết, ta có

$$a + bi + 2(a - bi) = 6 - 3i \Leftrightarrow 3a - bi = 6 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ -b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy phần ảo của số phức  $z$  là 3.

Chọn phương án (A)

**Câu 11.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $iz = 2(\bar{z} - 1 - i)$ . Tính  $S = ab$ .

- (A)  $S = -4$ . (B)  $S = 4$ . (C)  $S = 2$ . (D)  $S = -2$ .

**Lời giải.**

Với  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ .

Ta có

$$\begin{aligned} iz = 2(\bar{z} - 1 - i) &\Leftrightarrow i(a + bi) = 2(a - bi - 1 - i) \Leftrightarrow -b + ai = 2a - 2 + (-2b - 2)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2a - 2 \\ a = -2b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra  $S = ab = -4$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 12.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $z\bar{z} = 10(z + \bar{z})$  và  $z$  có phần ảo bằng ba lần phần thực?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

Đặt  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ .

$$\text{Từ } z\bar{z} = 10(z + \bar{z}) \Leftrightarrow (a + bi)(a - bi) = 10[(a + bi) + (a - bi)] \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 20a. \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa, số phức } z \text{ có phần ảo bằng ba lần phần thực nên } b = 3a. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 20a \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức cần tìm là  $z = 2 + 6i$  và  $z = 0$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 13.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ) thỏa  $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$ . Tính  $P = a + b$ .

- (A)  $P = \frac{1}{2}$ . (B)  $P = 1$ . (C)  $P = -1$ . (D)  $P = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Với  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ .

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i &\Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow (a-b)i + (3a-b) = 3 + 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra  $P = a + b = -1$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 14.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $5\bar{z} + 3 - i = (-2 + 5i)z$ . Tính  $P = |3i(z - 1)^2|$ .

Ⓐ  $P = 144$ .      Ⓑ  $P = 3\sqrt{2}$ .      Ⓒ  $P = 12$ .      Ⓓ  $P = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ .

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 5\bar{z} + 3 - i &= (-2 + 5i)z \Leftrightarrow 5(a - bi) + 3 - i = (-2 + 5i)(a + bi) \\ &\Leftrightarrow 5a + 3 - (5b + 1)i = -2a - 5b + (5a - 2b)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3 = -2a - 5b \\ 5b + 1 = 2b - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 5b + 3 = 0 \\ 5a + 3b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra  $z = 1 - 2i$ . Do đó  $3i(z - 1)^2 = -12i$ . Vậy  $P = |3i(z - 1)^2| = |-12i| = 12$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$  và  $|z| > 1$ . Tính  $P = a + b$ .

**(A)**  $P = -1$ .
**(B)**  $P = -5$ .
**(C)**  $P = 3$ .
**(D)**  $P = 7$ .

**Lời giải.**

Với  $z = a + bi$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 &\Leftrightarrow (a + 2) + (b + 1)i = |z| + i|z| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = |z| \\ b + 1 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$ . Thay vào (1) ta được

$$a + 2 = \sqrt{a^2 + (a + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 > 1 \text{ (do } |z| > 1) \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Suy ra  $b = 4$ . Do đó  $z = 3 + 4i$  có  $|z| = 5 > 1$  (thỏa điều kiện  $|z| > 1$ ).

Vậy  $P = a + b = 3 + 4 = 7$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 16.** Tìm mô-đun của số phức  $z$  biết  $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$ .

- (A)  $|z| = \frac{1}{2}$ . (B)  $|z| = 2$ . (C)  $|z| = 4$ . (D)  $|z| = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i \Leftrightarrow z + 3iz = 4 + |z| + |z|i - 4i \Leftrightarrow (1 + 3i)z = |z| + 4 + (|z| - 4)i$ .

Suy ra

$$\begin{aligned} |(1 + 3i)z| &= ||z| + 4 + (|z| - 4)i| \Leftrightarrow \sqrt{10}|z| = \sqrt{(|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2} \\ &\Leftrightarrow 10|z|^2 = (|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2 \\ &\Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2. \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

**Câu 17.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$ ?

- (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = a - bi$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \bar{z} &\Leftrightarrow (a + bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow 2abi - b^2 = b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -b \\ -b^2 = b^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ 2b^2 + a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

•  $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0$ .

•  $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = -\frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \end{cases}$

Vậy có 3 số phức thỏa ycbt.

Chọn phương án (D)

**Câu 18.** Số phức  $z = a + bi$  (với  $a, b$  là số nguyên) thỏa mãn  $(1 - 3i)z$  là số thực và  $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$ .

Khi đó  $a + b$  là

- (A) 9. (B) 8. (C) 6. (D) 7.

**Lời giải.**

Với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ).

Ta có  $(1 - 3i)z = (1 - 3i)(a + bi) = a + 3b + (b - 3a)i$ .

Vì  $(1 - 3i)z$  là số thực nên  $b - 3a = 0 \Rightarrow b = 3a$ . (1)

$$|\bar{z} - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |a - 2 + (5 - b)i| = 1 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (5 - b)^2 = 1. \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có  $(a-2)^2 + (5-3a)^2 = 1 \Leftrightarrow 10a^2 - 34a + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 6 \\ a = \frac{7}{5} \text{ (loại)}. \end{cases}$

Vậy  $a + b = 2 + 6 = 8$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 19.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b$  là các số thực) thỏa mãn  $z|z| + 2z + i = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = a + b^2$ .

**(A)**  $T = 4\sqrt{3} - 2$ .

**(B)**  $T = 3 + 2\sqrt{2}$ .

**(C)**  $T = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**(D)**  $T = 4 + 2\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} z|z| + 2z + i = 0 &\Leftrightarrow (a + bi)|a + bi| + 2(a + bi) + i = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a + b\sqrt{a^2 + b^2}i + 2bi + i = 0 \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a + (b\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a = 0 \\ b\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(\sqrt{a^2 + b^2} + 2) = 0 \\ b\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\sqrt{b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ |b| = -\frac{2b+1}{b} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } |b| = -\frac{2b+1}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = -\frac{2b+1}{b} \\ -\frac{2b+1}{b} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = -\frac{2b+1}{b} \\ -\frac{1}{2} \leq b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1 - \sqrt{2}.$$

Suy ra  $T = a + b^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 20.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$  và  $(z + 2i)^2$  là số thuần ảo?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Khi đó  $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 18$ . (1)

$$(z + 2i)^2 = [x + (y+2)i]^2 = x^2 - (y+2)^2 + 2x(y+2)i.$$

Theo giả thiết ta có  $(z + 2i)^2$  là số thuần ảo nên  $x^2 - (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+2 \\ x = -(y+2). \end{cases}$

Với  $x = y+2$  thay vào (1) ta được phương trình  $2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z_1 = 2$ .

Với  $x = -(y+2)$  thay vào (1) ta được phương trình  $2y^2 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{5} \\ y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} z_2 = -3 - \sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})i \\ z_3 = -3 + \sqrt{5} + (1 - \sqrt{5})i. \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(C)**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. C  | 3. D  | 4. B  | 5. D  | 6. A  | 7. C  | 8. D  | 9. C  | 10. A |
| 11. A | 12. C | 13. C | 14. C | 15. D | 16. B | 17. D | 18. B | 19. C | 20. C |



## DẠNG 31. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Điểm biểu diễn số phức:

Số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) được biểu diễn bởi điểm  $M(a; b)$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức  $z = (1 + 2i)^2$  là điểm nào dưới đây?

(A)  $P(-3; 4)$ .

(B)  $Q(5; 4)$ .

(C)  $N(4; -3)$ .

(D)  $M(4; 5)$ .

Lời giải.

#### Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán xác định điểm biểu diễn của một số phức.

Phương pháp.

Đưa số phức  $z$  về dạng  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) được biểu diễn bởi điểm  $M(a; b)$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**2. HƯỚNG GIẢI:**

B1: Tính  $z = (1 + 2i)^2$  đưa về dạng  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

B2: Tìm điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Ta có:  $z = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$ .

Vậy điểm biểu diễn số phức  $z = -3 + 4i$  có tọa độ là  $(-3; 4)$ .

Chọn phương án (A).

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

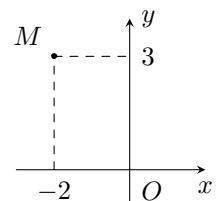
**Câu 1.** Điểm M trong hình vẽ bên là biểu thị cho số phức

(A)  $2 - 3i$ .

(B)  $3 + 2i$ .

(C)  $3 - 2i$ .

(D)  $-2 + 3i$ .



Lời giải.

Hoành độ, tung độ của điểm M tương ứng là phần thực, phần ảo của số phức từ hình vẽ suy ra  $z = -2 + 3i$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 2.** Cho số phức  $z = 1 + 2i$ . Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $w = z + i\bar{z}$  trên mặt phẳng tọa độ?

- (A)  $P(-3; 3)$ . (B)  $M(3; 3)$ . (C)  $Q(3; 2)$ . (D)  $N(2; 3)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $w = z + i\bar{z} = 1 + 2i + i(1 - 2i) = 3 + 3i$ . Vậy điểm biểu diễn của số phức  $w = z + i\bar{z}$  là  $M(3; 3)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Giả sử  $A, B$  theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức  $z_1, z_2$ . Khi đó độ dài của  $\overrightarrow{AB}$  bằng

- (A)  $|z_1| - |z_2|$ . (B)  $|z_2 + z_1|$ . (C)  $|z_2 - z_1|$ . (D)  $|z_1| + |z_2|$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ .

Theo đề bài ta có  $A(a; b), B(c; d) \Rightarrow AB = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ .

$z_2 - z_1 = (a - c) + (d - b)i \Rightarrow |z_2 - z_1| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ .

Vậy  $|\overrightarrow{AB}| = |z_2 - z_1|$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 4.** Cho các số phức  $z_1 = -1 + i, z_2 = 2 + 3i, z_3 = 5 + i, z_4 = 2 - i$  lần lượt có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là  $M, N, P, Q$ . Hỏi tứ giác  $MNPQ$  là hình gì?

- (A) Tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi. (B) Tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.  
(C) Tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành. (D) Tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

**Lời giải.**

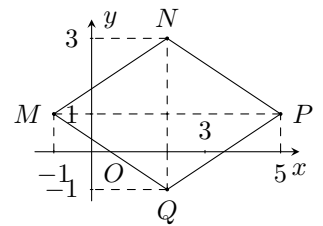
Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm biểu diễn của  $z_1 = -1 + i, z_2 = 2 + 3i,$

$z_3 = 5 + i, z_4 = 2 - i$  lần lượt là  $M(-1; 1), N(2; 3), P(5; 1), Q(2; -1)$ .

Ta có  $\overrightarrow{MN} = (3; 2), \overrightarrow{QP} = (3; 2), \overrightarrow{MP} = (6; 0), \overrightarrow{NQ} = (0; -4)$ .

suy ra  $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{NQ} \end{cases}$

Vậy tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi.



Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho số phức  $z = m + (m - 3)i, m \in \mathbb{R}$ . Tìm  $m$  để điểm biểu diễn của số phức  $z$  nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai.

- (A)  $m = 0$ . (B)  $m = \frac{2}{3}$ . (C)  $m = \frac{1}{2}$ . (D)  $m = \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có Đường phân giác góc phần tư thứ hai là  $d: y = -x$ . Điểm biểu diễn của số phức  $z = m + (m - 3)i$  là  $M(m; m - 3)$ . Khi đó theo đề bài ta có  $M \in d \Leftrightarrow m = 3 - m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 6.** Cho  $A, B, C$  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $6 - 3i; (1 + 2i)i; \frac{1}{i}$ . Tìm số phức có điểm biểu diễn là  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

(A)  $z = -8 + 3i$ .

(B)  $z = -8 - 4i$ .

(C)  $z = 4 - 2i$ .

(D)  $z = 8 - 5i$ .

**Lời giải.**

Ta có điểm biểu diễn của số phức  $6 - 3i$  là  $A(6; -3)$ ,  $(1 + 2i)i = -2 + i$  có điểm biểu diễn là  $B(-2; 1)$  và  $\frac{1}{i} = -i$  có điểm biểu diễn là  $C(0; -1)$ .

Để  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = 2 \\ y + 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \end{cases}$ .

Vậy  $D$  là điểm biểu diễn của số phức  $z = 8 - 5i$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 7.** Gọi  $M, N$  theo thứ tự là các điểm biểu diễn số phức  $z \neq 0$  và  $\frac{1+i}{2}z$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

(A)  $\triangle OMN$  là tam giác đều.

(B)  $\triangle OMN$  là tam giác tù.

(C)  $\triangle OMN$  là tam giác vuông cân.

(D)  $\triangle OMN$  là tam giác nhọn.

**Lời giải.**

Gọi  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khi đó  $z$  có điểm biểu diễn  $M(a; b)$ .

Ta có  $\frac{1+i}{2}(a + bi) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)i$  có điểm biểu diễn là  $M\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}; \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ .

Suy ra  $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $ON = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ ;  $MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .

Ta có  $OM^2 + MN^2 = ON^2$  nên  $\triangle OMN$  là tam giác vuông cân.

Chọn phương án (C)

**Câu 8.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  lần lượt biểu diễn cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$ . Biết  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  và  $z_1 + z_2 = 0$ . Khi đó tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

(A) Tam giác  $ABC$  đều.

(B) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

(C) Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$ .

(D) Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $C$ .

**Lời giải.**

Vì  $z_1 + z_2 = 0$  nên  $z_1, z_2$  là hai số phức đối nhau, do đó hai điểm  $A, B$  đối xứng qua gốc  $O$ .

Lại có  $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Rightarrow CO = \frac{AB}{2}$ . Vậy  $\triangle ABC$  có độ dài đường trung tuyến bằng một nửa cạnh huyền nên vuông tại  $C$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 9.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$ . Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

(A)  $4x - 6y - 3 = 0$ .

(B)  $4x + 6y + 3 = 0$ .

(C)  $4x - 6y + 3 = 0$ .

(D)  $4x + 6y - 3 = 0$ .

**Lời giải.**

Gọi  $z = x + yi$ . Ta có  $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow 4x - 6y - 3 = 0$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 10.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2i - 1| = |z + i|$ . Tìm số phức  $z$  có biểu diễn là điểm  $M$  sao cho  $MA$  ngắn nhất với  $A(1, 3)$ .

(A)  $3 + i$ .

(B)  $1 + 3i$ .

(C)  $2 - 3i$ .

(D)  $-2 + 3i$ .

**Lời giải.**

Gọi  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) suy ra điểm biểu diễn của  $z$  là  $M(x, y)$ .

Số phức  $1 - 2i$  có điểm biểu diễn là  $E(1, -2)$ .

Số phức  $-i$  có điểm biểu diễn là  $F(0, -1)$ .

Ta có:  $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$  Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường trung trực  $EF: x - y - 2 = 0$ .

Để  $MA$  ngắn nhất khi  $MA \perp EF$  tại  $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 11.** Trong mặt phẳng phức  $Oxy$ , tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16$  là hai đường thẳng  $d_1, d_2$ . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $d_1, d_2$  là bao nhiêu?

(A)  $d(d_1, d_2) = 4$ .

(B)  $d(d_1, d_2) = 1$ .

(C)  $d(d_1, d_2) = 6$ .

(D)  $d(d_1, d_2) = 2$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M(x, y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Ta có

$$\begin{aligned} |z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16 &\Leftrightarrow |x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2| = 16 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 2. \end{aligned}$$

suy ra  $d(d_1, d_2) = 4$ . Ở đây lưu ý hai đường thẳng  $x = 2$  và  $x = -2$  song song với nhau.

Chọn phương án (A)

**Câu 12.** Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z + 2 - 5i| = 6$  là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

(A)  $I(2; -5), R = 6$ .

(B)  $I(-2; 5), R = 36$ .

(C)  $I(2; -5), R = 36$ .

(D)  $I(-2; 5), R = 6$ .

**Lời giải.**

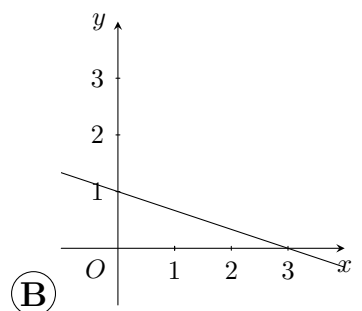
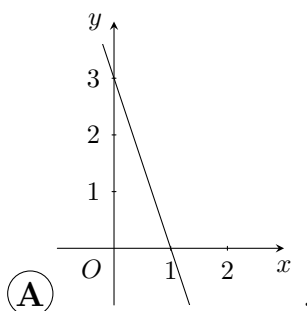
Gọi  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ ). Khi đó

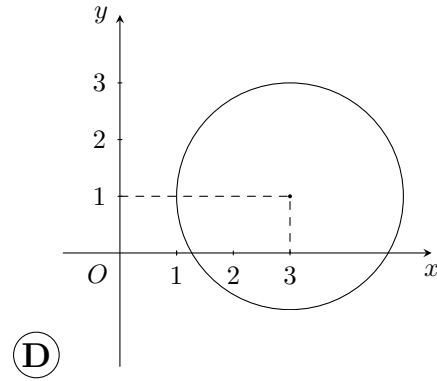
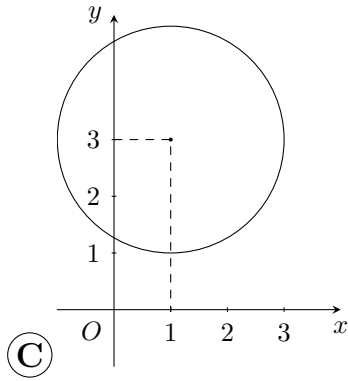
$$|z + 2 - 5i| = 6 \Leftrightarrow |x + 2 + (y - 5)i| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 5)^2} = 6 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36.$$

Vậy biểu diễn của số phức  $z$  là đường tròn có tâm  $I(-2; 5), R = 6$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 13.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|iz - (-3 + i)| = 2$ . Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn số phức  $z$  là hình vẽ nào dưới đây?



**Lời giải.**Đặt  $z = x + yi$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 |iz - (-3 + i)| = 2 &\Leftrightarrow |i(x + yi) - (-3 + i)| = 2 \\
 &\Leftrightarrow |xi - y + 3 - i| = 2 \\
 &\Leftrightarrow |(-y + 3) + (x - 1)i| = 2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(-y + 3)^2 + (x - 1)^2} = 2 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.
 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn tâm  $I(1; 3)$  bán kính  $R = 2$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 14.** Trên mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + i| = |2\bar{z} - i|$  là một đường tròn có bán kính là  $R$ . Tính giá trị của  $R$ .

Ⓐ  $R = 1$ .

Ⓑ  $R = \frac{1}{9}$ .

Ⓒ  $R = \frac{2}{3}$ .

Ⓓ  $R = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$ . Ta được

$$\begin{aligned}
 |z + i| = |2\bar{z} - i| &\Leftrightarrow |x + yi + i| = |2(x - yi) - i| \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4x^2 + (2y + 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4x^2 + (2y + 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2y = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = 0
 \end{aligned}$$

Suy ra  $R = \frac{1}{3}$ .

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 15.** Biết số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1| \leq 1$  và  $z - \bar{z}$  có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức  $z$  có diện tích là

Ⓐ  $2\pi$ .

Ⓑ  $\pi^2$ .

Ⓒ  $\frac{\pi}{2}$ .

Ⓓ  $\pi$ .

**Lời giải.**

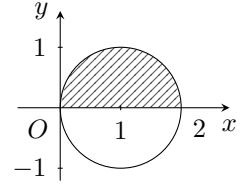
Đặt  $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$  khi đó ta có

$$|z - 1| \leq 1 \Leftrightarrow |(x + yi) - 1| \leq 1 \Leftrightarrow |(x - 1) + yi| \leq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (1).$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \text{ có phần ảo không âm suy ra } y \geq 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra phần mặt phẳng biểu diễn số phức  $z$  là nửa hình tròn tâm  $I(1; 0)$  bán kính  $r = 1$ .

Diện tích của nó bằng  $\frac{1}{2} \cdot r^2 \pi = \frac{\pi}{2}$  (đvdt).



Chọn phương án **C**

**Câu 16.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3 + 4i| = 2$  và  $w = 2z + 1 - i$ . Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w$  là đường tròn tâm  $I$ , bán kính  $R$ . Khi đó

- (A)**  $I(-7; 9), R = 4$ . **(B)**  $I(7; -9), R = 16$ . **(C)**  $I(7; -9), R = 4$ . **(D)**  $I(-7; 9), R = 16$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ .

$$\text{Từ giả thuyết } |z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4(*).$$

$$\text{Từ } w = 2z + 1 - i = 2(x + yi) + 1 - i = (2x + 1) + (2y - 1)i.$$

$$\text{Giả sử } w = a + bi (a, b \in \mathbb{R}). \text{ Ta có } a + bi = (2x + 1) + (2y - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = a \\ 2y - 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a - 1}{2} \\ y = \frac{b + 1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } x, y \text{ vào phương trình } (*), \text{ ta có } \left(\frac{a - 1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{b + 1}{2} + 4\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (a - 7)^2 + (b + 9)^2 = 16.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w$  là đường tròn tâm  $I(7; -9)$ , bán kính  $R = 4$ .

Lưu ý: có thể giả sử  $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ , từ giả thuyết suy ra  $z = \frac{w - 1 + i}{2} = \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{2}i$ . Thay  $z$  vào điều kiện  $|z - 3 + 4i| = 2$  ta có kết quả như trên.

Chọn phương án **C**

**Câu 17.** Cho  $z_1, z_2$  là hai trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 5 - 3i| = 5$ , đồng thời  $|z_1 - z_2| = 8$ . Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức  $w = z_1 + z_2$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

**(A)**  $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$ .

**(B)**  $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$ .

**(C)**  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$ .

**(D)**  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ .

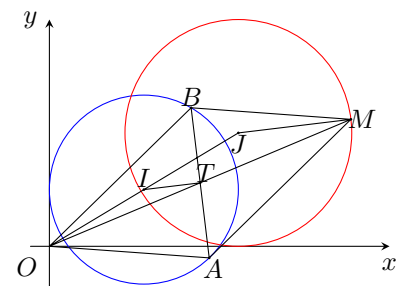
**Lời giải.**

Gọi  $A, B, M$  lần lượt là các điểm biểu diễn của  $z_1, z_2, w$ . Khi đó  $A, B$  thuộc đường tròn  $(C): (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$  và  $AB = |z_1 - z_2| = 8$ .  $(C)$  có tâm  $I(5; 3)$  và bán kính  $R = 5$ , gọi  $T$  là trung điểm của  $AB$  khi đó  $T$  là trung điểm của  $OM$  và  $IT = \sqrt{IA^2 - TA^2} = 3$ .

Gọi  $J$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $I$  suy ra  $J(10; 6)$  và  $IT$  là đường trung bình của tam giác  $OJM$ , do đó  $JM = 2IT = 6$ .

Vậy  $M$  thuộc đường tròn tâm  $J$  bán kính bằng 6 và có phương trình  $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$ .

Chọn phương án **A**



**Câu 18.** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$  trên mặt phẳng tọa độ là một

- (A) đường thẳng. (B) đường tròn. (C) parabol. (D) hypebol.

**Lời giải.**

Giả sử  $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x$ .

Ta có

$$\begin{aligned} 2|x - 1 + yi| &= |2x + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = |2x + 2| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4x. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$  trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2| + |z - 2| = 8$ . Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm  $M$  biểu diễn cho số phức  $z$  là

- (A)  $(C): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$ . (B)  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .  
(C)  $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ . (D)  $(C): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M(x; y)$ ,  $F_1(-2; 0)$ ,  $F_2(2; 0)$ . Ta có

$$|z + 2| + |z - 2| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 8 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 8.$$

Do đó điểm  $M(x; y)$  nằm trên elip  $(E)$  có  $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$ ,  $2c = F_1F_2 = 4$  và  $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$ .

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là elip  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 20.** Trong mặt phẳng phức, gọi  $A, B, C, D$  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ ,  $z_3 = 2 - i$ ,  $z_4 = -3i$ . Gọi  $S$  là diện tích tứ giác  $ABCD$ . Tính  $S$ .

- (A)  $S = \frac{17}{2}$ . (B)  $S = \frac{19}{2}$ . (C)  $S = \frac{23}{2}$ . (D)  $S = \frac{21}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $z_1 = -1 + i$  nên  $A(-1; 1)$ ,  $z_2 = 1 + 2i$  nên  $B(1; 2)$ ,  $z_3 = 2 - i$  nên  $C(2; -1)$  và  $z_4 = -3i$  nên  $D(0; -3)$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$ ,  $AC = \sqrt{13}$  và  $\vec{n} = (2; 3)$  là vectơ pháp tuyến của  $AC$ . Phương trình đường thẳng  $AC$  là  $2(x + 1) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$ .

Khoảng cách từ  $B$  đến  $AC$  là

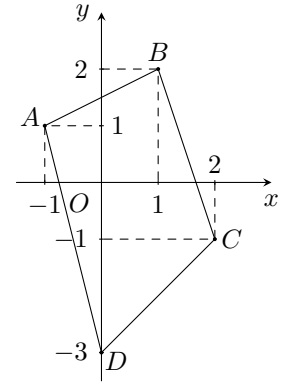
$$d(B; AC) = \frac{|2 + 3 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d(B; AC) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}.$$

Khoảng cách từ  $D$  đến  $AC$  là

$$d(D; AC) = \frac{|0 - 9 - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot d(D; AC) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 5.$$

$$\text{Vậy } S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{7}{2} + 5 = \frac{17}{2}.$$

Chọn phương án **A**





 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D  | 2. B  | 3. C  | 4. A  | 5. D  | 6. D  | 7. C  | 8. B  | 9. A  | 10. A |
| 11. A | 12. D | 13. C | 14. D | 15. C | 16. C | 17. A | 18. C | 19. B | 20. A |

## DẠNG 32. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Tọa độ véc-tơ và tọa độ điểm

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x; y; z).$$

b) Tính chất Cho 2 véc-tơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$ .

$$+ \vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z').$$

$$+ k\vec{a} = (kx; ky; kz).$$

$$+ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

c) Tích vô hướng của hai véc-tơ

Cho 2 véc-tơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$ . Khi đó

$$+ |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'.$$

$$+ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

d) Mối liên hệ tọa độ điểm và tọa véc-tơ

Cho  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Khi đó

$$+ \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

$$+ |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$+ \text{Nếu } I(x_I; y_I; z_I) \text{ là trung điểm của } AB \text{ thì } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Nếu } G(x_G; y_G; z_G) \text{ là trọng tâm của } \triangle ABC \text{ thì } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

e) Tích có hướng

$$\text{Cho } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3). \text{ Khi đó } [\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

f) Ứng dụng

- + Diện tích  $\triangle ABC$ :  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$ .
- + Thể tích khối tứ diện  $ABCD$ :  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$ .
- + Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ .
- + Ba véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1; 0; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 2; 5)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  bằng

- (A) 25. (B) 23. (C) 27. (D) 29.

**Lời giải.**

### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tính tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian  $Oxyz$ .
2. HƯỚNG GIẢI:
  - B1: Tính tổng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
  - B2: Tính tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $(\vec{a} + \vec{b})$ .

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8). \text{ Suy ra } \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 3 = 23.$$

Chọn phương án (B)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ MỞ RỘNG

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(3; 2; -4)$ . Véc-tơ  $\vec{AB}$  có tọa độ là  
 (A)  $(1; -3; -7)$ . (B)  $(1; 3; -7)$ . (C)  $(-1; 3; -7)$ . (D)  $(-1; -3; -7)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (3 - 2; 2 - (-1); -4 - 3). \text{ Vậy } \vec{AB} = (1; 3; -7).$$

Chọn phương án (B)

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; -2; 3)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm  $M$ . Tọa độ của điểm  $M$  là

- (A)  $M(1; -2; 0)$ . (B)  $M(0; -2; 3)$ . (C)  $M(1; 0; 0)$ . (D)  $M(1; 0; 3)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $(Oyz) \Rightarrow x_M = 0$ .

Do đó tọa độ  $M(0; -2; 3)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ .

- (A)  $I(2; -2; -1)$ . (B)  $I(-2; 2; 1)$ . (C)  $I(1; 0; 4)$ . (D)  $I(2; 0; 8)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Tọa độ trung điểm } I(x_I, y_I) \text{ của } AB: \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$$

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1; 2; 4)$ ,  $B(2; 4; -1)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle OAB$ .

- (A)  $G(1; 2; 1)$ . (B)  $G(2; 1; 1)$ . (C)  $G(2; 1; 1)$ . (D)  $G(6; 3; 3)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Gọi } G(x_G, y_G, z_G) \text{ là trọng tâm của } \triangle ABC, \text{ ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_O}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 2 \\ z_G = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1; 2; 1).$$

Chọn phương án (A)

**Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-3; 5; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- (A)  $D(-2; 8; -3)$ . (B)  $D(-2; 2; 5)$ . (C)  $D(-4; 8; -5)$ . (D)  $D(-4; 8; -3)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_D - 1; y_D - 2; z_D + 1) = (-5; 6; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = -5 \\ y_D - 2 = 6 \\ z_D + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-4; 8; -3).$$

Chọn phương án (D)

**Câu 6.** Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục  $Ox$  cách đều hai điểm  $A(1; 2; -1)$  và điểm  $B(2; 1; 2)$ .

- (A)  $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ . (B)  $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ . (C)  $M\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$ . (D)  $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M(x; 0; 0) \in Ox$ .

$$\text{Ta có } MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1 - x)^2 + 4 + 1 = (2 - x)^2 + 1 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

Chọn phương án (B)

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{u}(2; 3; -1)$  và  $\vec{v}(5; -4; m)$ . Tìm  $m$  để  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

- (A)  $m = 0$ . (B)  $m = 2$ . (C)  $m = 4$ . (D)  $m = -2$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 10 - 12 - m = 0 \Leftrightarrow -2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 2; 4)$ ,  $B(-1; 1; 4)$ ,  $C(0; 0; 4)$ . Tìm số đo của góc  $\widehat{ABC}$ .

- (A)**  $60^\circ$ . **(B)**  $135^\circ$ . **(C)**  $120^\circ$ . **(D)**  $45^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{BA} = (0; 1; 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (1; -1; 0) \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 135^\circ$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (2; -1; 4)$  và  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- (A)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$ . **(B)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ . **(C)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ . **(D)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{b} = (1; 0; -3)$  nên  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 12 = -10$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm  $N$  đối xứng với  $M(3; -1; 2)$  qua trục  $Oy$  là

- (A)**  $N(3; 1; 2)$ . **(B)**  $N(-3; -1; -2)$ . **(C)**  $N(3; -1; -2)$ . **(D)**  $N(-3; 1; -2)$ .

**Lời giải.**

Điểm đối xứng với điểm  $M(3; -1; 2)$  qua trục  $Oy$  là  $N(-3; -1; -2)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1; -4; -5)$ . Tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với điểm  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$  là

- (A)**  $(1; -4; 5)$ . **(B)**  $(-1; 4; 5)$ . **(C)**  $(1; 4; 5)$ . **(D)**  $(1; 4; -5)$ .

**Lời giải.**

Đối xứng của điểm  $A(1; -4; -5)$  qua mặt phẳng  $Oxz$  là điểm  $A'(1; 4; -5)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(-2; 1; -3)$  và  $B(1; 0; -2)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

- (A)**  $3\sqrt{3}$ . **(B)**  $11$ . **(C)**  $\sqrt{11}$ . **(D)**  $27$ .

**Lời giải.**

Ta có  $AB = \sqrt{(1+2)^2 + (-1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{11}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 13.** Cho  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{v} = (0; -1; 0)$ , góc giữa hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là

- (A)**  $120^\circ$ . **(B)**  $45^\circ$ . **(C)**  $135^\circ$ . **(D)**  $60^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$  và  $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ .

Vậy  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (1; -1; 2)$  và  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2; -1; -2)$ . (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1; 5; 3)$ . (C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ . (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 15.** Cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2; 3)$ ;  $\vec{b} = (-2; 4; 1)$ ;  $\vec{c} = (-1; 3; 4)$ . Véc-tơ  $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$  có tọa độ là

- (A)  $\vec{v} = (23; 7; 3)$ . (B)  $\vec{v} = (7; 23; 3)$ . (C)  $\vec{v} = (3; 7; 23)$ . (D)  $\vec{v} = (7; 3; 23)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $2\vec{a} = (2; 4; 6)$ ,  $-3\vec{b} = (6; -12; -3)$ ,  $5\vec{c} = (-5; 15; 20) \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (3; 7; 23)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 16.** Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (1; 2; -1)$  và  $\vec{v} = (2; 3; 0)$ . Tính  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

- (A)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; 2; -1)$ . (B)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -2; 1)$ .  
(C)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -2; -1)$ . (D)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (-3; 2; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3; -2; -1)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{a} = (m; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (2; m - 1; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; m + 1; 1)$ .

Tìm  $m$  để ba véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng

- (A)  $m = -2$ . (B)  $m = \frac{3}{2}$ . (C)  $m = -1$ . (D)  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $[\vec{a}; \vec{b}] = (1; -m; m^2 - m - 2) \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = -2m - 1$ .

Ba véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (0; 3; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; -1)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$ . (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$ . (C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$ . (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 19.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Khi đó tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) 11. (D) 10.

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 11$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$ ,  $C(2; 1; 1)$ . Diện tích tam giác  $ABC$  bằng

Ⓐ  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ .

Ⓑ  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

Ⓒ  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

Ⓓ  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-1; 2; -1)$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn phương án Ⓒ

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. B  | 3. C  | 4. A  | 5. D  | 6. B  | 7. D  | 8. B  | 9. C  | 10. B |
| 11. D | 12. C | 13. C | 14. D | 15. C | 16. C | 17. D | 18. B | 19. C | 20. C |



**DẠNG 33.****VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

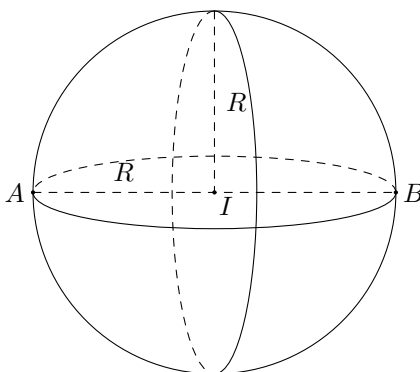
1. Phương trình mặt cầu (S) dạng 1: Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm  $I(a; b; c)$  và bán kính  $R$ .

$$\text{Khi đó: } (S) : \begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

2. Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:

$$(S) : \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}. \text{ Với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \text{ là phương trình mặt cầu dạng 2.}$$

$$\text{Tâm } I(a; b; c), \text{ bán kính: } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} > 0.$$

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu (S) có tâm là điểm  $I(0; 0; -3)$  và đi qua điểm  $M(4; 0; 0)$ . Phương trình của (S) là

**(A)**  $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25.$

**(B)**  $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5.$

**(C)**  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25.$

**(D)**  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5.$

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng 1 viết phương trình của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

$$\text{B1: } (S) : \begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

$$\text{B2: } R = IM = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 + 3)^2} = 5.$$

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

Theo bài ta có bán kính của mặt cầu  $(S)$  là  $R = IM = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0+3)^2} = 5$ .  
 Từ đó ta có phương trình mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$ .

Chọn phương án **(A)**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Viết phương trình mặt cầu có tâm  $I(1; 2; 3)$  và đi qua giao điểm của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

với mặt phẳng  $(Oxy)$ .

**(A)**  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 27$ .

**(B)**  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$ .

**(C)**  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3\sqrt{3}$ .

**(D)**  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $Oxyz$  là  $z = 0$ .

Gọi  $A = d \cap (Oxyz) \Rightarrow t = -3 \Rightarrow A(-2; 5; 0)$ .

Vì điểm  $A$  nằm trên mặt cầu nên bán kính của mặt cầu là  $R = IA = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$ .

Phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1; 2; 3)$  và bán kính  $R = 3\sqrt{3}$  là

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm là điểm  $I(-1; 2; -3)$  và tiếp xúc với trục  $Ox$ . Phương trình của  $(S)$  là

**(A)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$ .

**(B)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{13}$ .

**(C)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 13$ .

**(D)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{13}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là hình chiếu của  $I$  lên trục  $Ox \Rightarrow A(-1; 0; 0)$ .

Vì điểm  $A$  nằm trên mặt cầu nên bán kính của mặt cầu là  $R = IA = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ .

Phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(-1; 2; -3)$  và bán kính  $R = \sqrt{13}$  là

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 13$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 3.** Mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(-1; 2; -3)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P): x + 2y + 2z + 1 = 0$  có phương trình:

**(A)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$ .

**(B)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$ .

**(C)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}$ .

**(D)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

Bán kính mặt cầu là  $R = d(I, (P)) = \frac{|-1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$ .

Phương trình mặt cầu là  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(2; 1; 5)$  và tiếp xúc với mặt cầu  $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3$  có phương trình:

**(A)** 
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 12 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 48 \end{cases}$$

**(B)** 
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 2\sqrt{3} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

**(C)** 
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 12 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 48 \end{cases}$$

**(D)** 
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 2\sqrt{3} \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

**Lời giải.**

Từ  $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3 \Rightarrow$  Tâm  $I_1(1; 0; 0)$  và bán kính  $r_1 = \sqrt{3}$ .

Do  $II_1 = \sqrt{27} > \sqrt{3} = r_1$  vậy điểm  $I(2; 1; 5)$  nằm ngoài mặt cầu  $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

Ta có pt đường thẳng  $II_1$  là 
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = -5t. \end{cases}$$

Gọi  $A = II_1 \cap (S_1) \Rightarrow A(1-t; -t; -5t)$ . Do  $A \in (S_1)$  nên.

$$t^2 + t^2 + 25t^2 = 3 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow AI = 4\sqrt{3} \\ A\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow AI = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Bán kính mặt cầu là  $R = 2\sqrt{3}$ .

Phương trình mặt cầu là  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 12$ .

Bán kính mặt cầu là  $R = 4\sqrt{3}$ .

Phương trình mặt cầu là  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 48$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1; 2; 4)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(S_1): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 27$  có phương trình:

**(A)**  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 3.$

**(B)**  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \sqrt{3}.$

**(C)**  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3.$

**(D)**  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{3}.$

**Lời giải.**

Từ  $(S_1): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 27$  Tâm  $I_1(-1; 0; 2)$  và bán kính  $R_1 = 3\sqrt{3}$ .

Do  $II_1 = 2\sqrt{3} < 3\sqrt{3} = R_1$  vậy điểm  $I(1; 2; 4)$  nằm trong mặt cầu  $(S_1)$ .

$$(S) \text{ và } (S_1) \text{ tiếp xúc} \Leftrightarrow |R - R_1| = II_1 \Leftrightarrow |R - 3\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 5\sqrt{3} \\ R = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Bán kính mặt cầu là  $R = \sqrt{3}$ .

Phương trình mặt cầu là  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(-1; 2; 3)$  và tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$  có phương trình:

**(A)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1.$

**(B)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14.$

**(C)**  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$

**(D)**  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.$

**Lời giải.**

PT mp  $(Oyz): x = 0$ .

Bán kính mặt cầu là  $R = d(I, (Oyz)) = \frac{|-1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2}} = 1$ .

Phương trình mặt cầu là  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 2), B(3; 5; 0)$ . Phương trình mặt cầu đường kính  $AB$  là

**(A)**  $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$ .

**(B)**  $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$ .

**(C)**  $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 12$ .

**(D)**  $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 3$ .

**Lời giải.**

Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  $I(2; 4; 1)$ ,  $AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$ .

Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm  $I(2; 4; 1)$ , bán kính  $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$ .

Vậy phương trình của mặt cầu là  $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , Viết phương trình mặt cầu (S) biết (S) có bán kính  $R=3$  và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm  $M(2;1;0)$

**(A)**  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$ .

**(B)**  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z + 5 = 0$ .

**(C)**  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 11 = 0$ .

**(D)**  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z + 11 = 0$ .

**Lời giải.**

Giả sử mặt cầu (S) có tâm  $I(a; b; c)$ ,

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm  $M(2;1;0)$  nên  $M$  là hình chiếu của  $I(a; b; c)$  lên mp (Oxy) suy ra  $I(2; 1; c)$ .

Ta có mp(Oxy) có pt là  $z = 0$ .

Ta có  $d(I, (Oxy)) = \frac{|c|}{1} \Leftrightarrow c = \pm 3$ .

\*Với  $c = 3$ .

Mặt cầu  $I(2; 1; 3)$ , bán kính  $R = 3$  có phương trình là

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0.$$

\*Với  $c = -3$ .

Mặt cầu  $I(2; 1; -3)$ , bán kính  $R = 3$  có phương trình là

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 9.** Phương trình mặt cầu (S) đi qua  $A(1; 2; 3), B(4; -6; 2)$  và có tâm  $I$  thuộc trục  $Ox$  là

**(A)** (S):  $(x-7)^2 + y^2 + z^2 = 6$ .

**(B)** (S):  $(x+7)^2 + y^2 + z^2 = 36$ .

**(C)** (S):  $(x+7)^2 + y^2 + z^2 = 6$ .

**(D)** (S):  $(x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$ .

**Lời giải.**

Vì  $I \in Ox$  nên gọi  $I(x; 0; 0)$ .

Do (S) đi qua  $A; B$  nên  $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + 4 + 9} = \sqrt{(4-x)^2 + 36 + 4} \Leftrightarrow x = 7$ .

Suy ra  $I(7; 0; 0) \Rightarrow R = IA = 7$ .

Do đó (S):  $(x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 10.** Phương trình mặt cầu  $(S)$  đi qua  $A(2; 0; -2)$ ,  $B(-1; 1; 2)$  và có tâm  $I$  thuộc trục  $Oy$  là

**(A)**  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8 = 0.$

**(B)**  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0.$

**(C)**  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 8 = 0.$

**(D)**  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8 = 0.$

**Lời giải.**

Vì  $I \in Oy$  nên gọi  $I(0; y; 0)$ .

Do  $(S)$  đi qua  $A; B$  nên  $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{4 + (-y)^2 + 4} = \sqrt{1 + (1 - y)^2 + 4} \Leftrightarrow y = -1$ .

Suy ra  $I(0; -1; 0) \Rightarrow R = IA = 3$ .

Do đó  $(S): x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8 = 0$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Phương trình mặt cầu  $(S)$  đi qua  $A(1; 2; -4)$ ,  $B(1; -3; 1)$ ,  $C(2; 2; 3)$  và tâm  $I \in (Oxy)$  là

**(A)**  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26.$

**(B)**  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$

**(C)**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26.$

**(D)**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$

**Lời giải.**

Vì  $I \in (Oxy)$  nên gọi  $I(x; y; 0)$ . Ta có: 
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 1; 0) \Rightarrow R = IA = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 12.** Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm  $M(2; 1; 1)$

**(A)** 
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 1 \\ (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 9 \end{cases}$$

**(B)** 
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 9 \end{cases}$$

**(C)** 
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 3 \\ (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 1 \end{cases}$$

**(D)** 
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1 \end{cases}$$

**Lời giải.**

Giả sử  $I(a; b; c)$  là tâm mặt cầu  $(S)$  tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm  $M(2; 1; 1)$ .

Vì mặt cầu  $(S)$  tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm  $M(2; 1; 1)$  có các thành phần tọa độ đều dương nên  $a = b = c = r$ .

Phương trình mặt cầu  $(S)$  là  $(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = a^2$ .

Vì mặt cầu  $(S)$  đi qua điểm  $M(2; 1; 1)$  nên.

$$(2 - a)^2 + (1 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow (S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ a = 3 \Rightarrow (S): (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 9 \end{cases}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 2; -4)$  và thể tích bằng  $36\pi$ . Phương trình của  $(S)$  là

(A)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9.$

(B)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 9.$

(C)  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9.$

(D)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 3.$

**Lời giải.**

Ta có:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3.$

Khi đó

$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9.$

Chọn phương án (A)

**Câu 14.** Cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 2; 3)$  và diện tích bằng  $32\pi$ . Phương trình của  $(S)$  là

(A)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16.$

(B)  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 16.$

(C)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 8.$

(D)  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 8.$

**Lời giải.**

Ta có:  $S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = 32\pi \Leftrightarrow R = \sqrt{8}.$

Khi đó

$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 8.$

Chọn phương án (C)

**Câu 15.** Cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 2; 0)$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn  $(C)$ . Biết diện tích lớn nhất của  $(C)$  bằng  $3\pi$ . Phương trình của  $(S)$  là

(A)  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3.$

(B)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3.$

(C)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

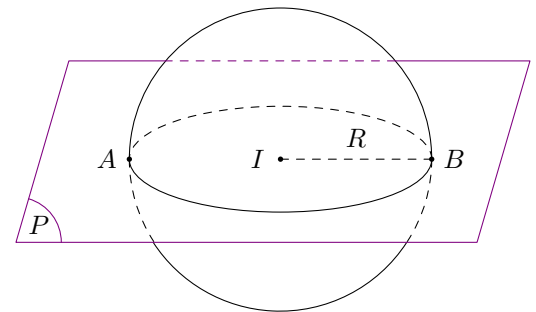
(D)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9.$

**Lời giải.**

Nhận xét: Mặt phẳng  $(P)$  cắt  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn  $(C)$  và diện tích của  $(C)$  lớn nhất khi  $(P)$  qua tâm  $I$  của  $(S)$ .

Ta có:  $S = \pi R^2 = 3\pi \Leftrightarrow R = \sqrt{3}.$

Khi đó:  $\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3.$



Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 1; 1)$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn  $(C)$ . Biết chu vi lớn nhất của  $(C)$  bằng  $2\pi\sqrt{2}$ . Phương trình của  $(S)$  là

(A)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4.$

(B)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2.$

(C)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4.$

(D)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2.$

**Lời giải.**

Đường tròn  $(C)$  đạt chu vi lớn nhất khi  $(C)$  đi qua tâm  $I$  của mặt cầu  $(S)$ .

Ta có:  $C = 2\pi R = 2\pi\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$

Khi đó

$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2.$

Chọn phương án (D)

**Câu 17.** Cho  $I(1; -2; 3)$ . Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho  $AB = 2\sqrt{3}$ .

(A)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ .

(B)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 20$ .

(C)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ .

(D)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ .

**Lời giải.**

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I  $(1; -2; 3)$  trên trục Ox

$\Rightarrow M(1; 0; 0)$  và M là trung điểm của AB.

Ta có:  $IM = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{13}$ ,  $AM = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$ .

$\Delta IMA$  vuông tại M  $\Rightarrow IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{13 + 3} = 4 \Rightarrow R = 4$ .

Phương trình mặt cầu cần tìm là  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , Viết phương trình mặt cầu đi qua  $A(2; 3; -3)$ ,  $B(2; -2; 2)$ ,  $C(3; 3; 4)$  và có tâm nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

(A)  $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 29$ .

(B)  $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 29$ .

(C)  $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \sqrt{29}$ .

(D)  $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \sqrt{29}$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $I(a; b; 0) \in (Oxy)$  và  $r$  là tâm và bán kính của mặt cầu  $(S)$  và đi qua  $A(2; 3; -3)$ ,  $B(2; -2; 2)$ ,  $C(3; 3; 4)$ .

Phương trình mặt cầu  $(S)$  là  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ .

Vì mặt cầu đi qua  $A(2; 3; -3)$ ,  $B(2; -2; 2)$ ,  $C(3; 3; 4)$  nên.

$$\begin{cases} (2 - a)^2 + (3 - b)^2 + (-3)^2 = r^2 \\ (2 - a)^2 + (-2 - b)^2 + 2^2 = r^2 \\ (3 - a)^2 + (3 - b)^2 + 4^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b + 10 = 0 \\ 2a - 12 = 0 \\ (3 - a)^2 + (3 - b)^2 + 4^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 6 \\ r^2 = 29 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu  $(S)$  là  $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 29$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$  cho 4 điểm  $A(1; 2; -4)$ ,  $B(1; -3; 1)$ ,  $C(2; 2; 3)$ ,  $D(1; 0; 4)$ . Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ .

(A)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$ .

(B)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 26$ .

(C)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \sqrt{26}$ .

(D)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \sqrt{26}$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ) là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Thay lần lượt tọa độ của  $A, B, C, D$  vào phương trình ta được.

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 + 4^2 - 2a - 4b + 8c + d = 0 \\ 1^2 + 3^2 + 1^2 - 2a + 6b - 2c + d = 0 \\ 2^2 + 2^2 + 3^2 - 4a - 4b - 6c + d = 0 \\ 1^2 + 0^2 + 4^2 - 2a + 0 - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -21 \end{cases}$$

Do đó:  $I(-2; 1; 0)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{26}$ .

Vậy  $(S): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 20.** Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 0; 3)$  và cắt  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$  tại hai điểm A, B sao cho tam giác  $IAB$  vuông tại  $I$

Ⓐ  $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}$ .

Ⓑ  $(x+1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{40}{9}$ .

Ⓒ  $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ .

Ⓓ  $(x+1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; 1; 2)$  và  $P(1; -1; 1) \in d$ .

Ta có:  $\vec{IP} = (0; -1; -2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{IP}] = (0; -4; 2)$ . Suy ra:  $d(I; d) = \frac{|\vec{IP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{20}}{3}$ .

$\triangle IAB$  vuông tại  $I \Leftrightarrow \triangle IAB$  vuông cân tại  $I \Rightarrow IA = \sqrt{2}d(I, d) = \frac{\sqrt{40}}{3}$ .

Vậy  $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}$ .

Chọn phương án Ⓐ



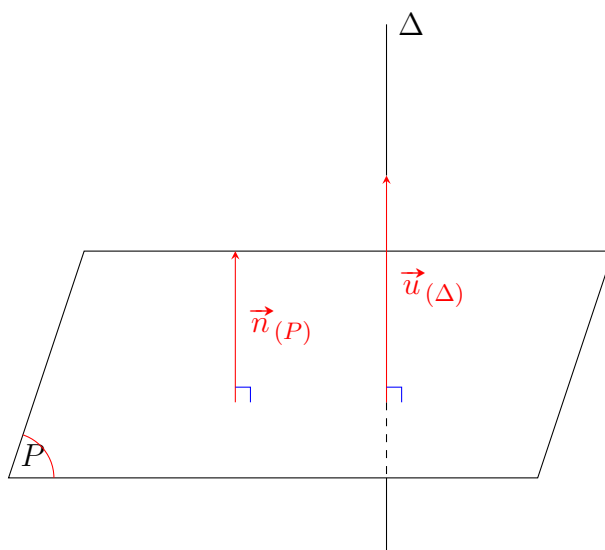
 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. B  | 4. A  | 5. C  | 6. C  | 7. A  | 8. A  | 9. D  | 10. A |
| 11. A | 12. B | 13. A | 14. C | 15. B | 16. D | 17. A | 18. A | 19. A | 20. A |

## DẠNG 34. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẺ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Đường thẳng  $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  có 1 véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_d = (a; b; c)$  và một điểm  $M(x_0; y_0; z_0) \in d$ .
- Cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $Ax + By + Cz + D = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ .
- Cho mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_{(\Delta)}$



Khi đó mặt phẳng  $(P)$  nhận  $\vec{u}_{(\Delta)}$  làm véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{(\Delta)}$ .

- Nếu có hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng  $(P)$  thì ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  là  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng đi qua điểm  $M(1; 1; -1)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$  có phương trình là

(A)  $2x + 2y + z + 3 = 0$ .

(B)  $x - 2y - z = 0$ .

(C)  $2x + 2y + z - 3 = 0$ .

(D)  $x - 2y - z - 2 = 0$ .

Lời giải.

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng viết phương trình mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

— B1: Xác định 1 véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_{(\Delta)}$  của đường thẳng  $\Delta$ .

— B2:  $(P) \perp \Delta$  nên mặt phẳng  $(P)$  nhận  $\vec{u}_{(\Delta)}$  làm véc-tơ pháp tuyến:  $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{(\Delta)}$ .

— B3: Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Đường thẳng  $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$  có 1 véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_{(\Delta)} = (2; 2; 1)$ .

$(P) \perp \Delta$  nên mặt phẳng  $(P)$  nhận  $\vec{u}_{(\Delta)}$  làm véc-tơ pháp tuyến:  $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{(\Delta)} = (2; 2; 1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(1; 1; -1)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  là

$$(P): 2(x-1) + 2(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 3 = 0.$$

Chọn phương án **C**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 1)$  và  $B(1; 3; 2)$ . Viết phương trình của mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$ .

**(A)**  $x + 2y + z - 9 = 0$ . **(B)**  $x + 2y + z - 3 = 0$ . **(C)**  $x + 4y + 3z - 7 = 0$ . **(D)**  $y + z - 2 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{AB} = (1; 2; 1)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  nên nhận véc-tơ  $\vec{AB} = (1; 2; 1)$  làm véc-tơ pháp tuyến. Phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(P)$  là:

$$(x-0) + 2(y-1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 3 = 0.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 2.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho  $A(1; 0; -3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ . Mặt phẳng trung trực đoạn  $AB$  có phương trình là

**(A)**  $x + y + 2z - 1 = 0$ . **(B)**  $2x + y - z + 1 = 0$ . **(C)**  $x + y + 2z + 1 = 0$ . **(D)**  $2x + y - z - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Trung điểm của đoạn  $AB$  là  $I(2; 1; -1)$ . Mặt phẳng trung trực đoạn  $AB$  chứa  $I$  và có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{AB} = (2; 2; 4)$  có phương trình  $2(x-2) + 2(y-1) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$  và  $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$  có phương trình là

(A)  $-2x - y + 9z - 36 = 0$ .

(B)  $2x - y - z = 0$ .

(C)  $6x + 9y + z + 8 = 0$ .

(D)  $6x + 9y + z - 8 = 0$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$  đi qua điểm  $M(1; -2; 4)$ , có một VTCP là  $\vec{u}_1 = (-2; 1; 3)$ .

Đường thẳng  $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$  có một VTCP là  $\vec{u}_2 = (1; -1; 3)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau  $d_1, d_2 \Rightarrow (P)$  qua điểm  $M(1; -2; 4)$ , có một VTPT là  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (6; 9; 1)$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  là

$$(P): 6(x-1) + 9(y+2) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 9y + z + 8 = 0.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng chứa trục  $Oz$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$  có phương trình là

(A)  $x + y = 0$ .

(B)  $x + 2y = 0$ .

(C)  $x - y = 0$ .

(D)  $x + y - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 2)$ .

Trên trục  $Oz$  có véc-tơ đơn vị  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Mặt phẳng chứa trục  $Oz$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $O$  và nhận  $[\vec{n}_\alpha; \vec{k}] = (-1; -1; 0)$  làm véc-tơ pháp tuyến. Do đó có phương trình  $-x - y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 5.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$  và mặt phẳng  $(Q): 2x + y - z = 0$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q)$  có phương trình là

(A)  $-x + 2y - 1 = 0$ .

(B)  $x - y + z = 0$ .

(C)  $x - 2y - 1 = 0$ .

(D)  $x + 2y + z = 0$ .

**Lời giải.**

VTCP của  $d$  là  $\vec{u} = (2; 1; 3)$ , VTPT của  $(Q)$  là  $\vec{n} = (2; 1; -1)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  nhận VTPT là  $\vec{v} = [\vec{u}, \vec{n}] = (-4; 8; 0) = -4(1; -2; 0)$ .

và  $(P)$  đi qua điểm  $A(1; 0; -1)$  nên có phương trình tổng quát là  $x - 2y - 1 = 0$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 6.** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $d$  song song với trục  $Ox$ .

(A)  $(P): y - z + 2 = 0$ . (B)  $(P): x - 2y + 1 = 0$ . (C)  $(P): x - 2z + 5 = 0$ . (D)  $(P): y + z - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(-1; 0; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}(2; 1; 1)$ ; trục  $Ox$  có véc-tơ đơn vị  $\vec{i}(1; 0; 0)$ .

Vì  $(P)$  chứa đường thẳng  $d$  song song với trục  $Ox$  nên  $(P)$  đi qua điểm  $M(-1; 0; 2)$  và có véc-tơ

pháp tuyến  $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; -1)$ .

$\Rightarrow$  Phương trình của  $(P)$  là  $y - z + 2 = 0$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , mặt phẳng chứa hai điểm  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(-1; 2; 2)$  và song song với trục  $Ox$  có phương trình là

- (A)**  $y - 2z + 2 = 0$ .      **(B)**  $x + 2z - 3 = 0$ .      **(C)**  $2y - z + 1 = 0$ .      **(D)**  $x + y - z = 0$ .

**Lời giải.**

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng cần tìm.

Do  $(P) \parallel Ox$  nên  $(P): by + cz + d = 0$ .

Do  $(P)$  chứa các điểm  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(-1; 2; 2)$  nên  $\begin{cases} c + d = 0 \\ 2b + 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b + c = 0$ .

Ta chọn  $b = 1 \Rightarrow c = -2$ . Khi đó  $d = 2$ .

Vậy phương trình  $(P): y - 2z + 2 = 0$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng chéo nhau  $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+2}{1}$  và  $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-2}$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $d_1$  và  $(P)$  song song với đường thẳng  $d_2$  là

- (A)**  $(P): x + 5y + 8z - 16 = 0$ .      **(B)**  $(P): x + 5y + 8z + 16 = 0$ .  
**(C)**  $(P): x + 4y + 6z - 12 = 0$ .      **(D)**  $(P): 2x + y - 6 = 0$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d_1$  đi qua  $A(2; 6; -2)$  và có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_1 = (2; -2; 1)$ .

Đường thẳng  $d_2$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_2 = (1; 3; -2)$ .

Gọi  $\vec{n}$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ . Do mặt phẳng  $(P)$  chứa  $d_1$  và  $(P)$  song song với đường thẳng  $d_2$  nên  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 5; 8)$ .

Vậy phương trình của mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A(2; 6; -2)$  và có một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 5; 8)$  là

$$x + 5y + 8z - 16 = 0.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa trục  $Oz$  và điểm  $M(1; 2; 1)$ .

- (A)**  $(P): y - 2z = 0$ .      **(B)**  $(P): 2x - y = 0$ .      **(C)**  $(P): x - z = 0$ .      **(D)**  $(P): x - 2y = 0$ .

**Lời giải.**

Trục  $Oz$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{k} = (0; 0; 1)$  và  $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 1)$ .

Vì mặt phẳng  $(P)$  chứa trục  $Oz$  và điểm  $M(1; 2; 1)$  nên mặt phẳng  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = [\vec{k}, \overrightarrow{OM}] = (-2; 1; 0)$ .

Vậy phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $O(0; 0; 0)$  có dạng  $-2x + y = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho  $A(1; -1; 0)$  và  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$ . Phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A$  và  $d$  là

- (A)  $x + 2y + z + 1 = 0$ . (B)  $x + y + z = 0$ . (C)  $x + y = 0$ . (D)  $y + z = 0$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; 1; -3)$  và  $M \in d \Rightarrow M(-1; 1; 0), \overrightarrow{AM} = (-2; 2; 0)$ .

Vì mặt phẳng  $(P)$  chứa trục  $d$  và điểm  $A(1; -1; 0)$  nên mặt phẳng  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = (6; 6; 6)$ .

Vậy phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A(1; -1; 0)$  có dạng  $1(x - 1) + 1(y + 1) + z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 11.** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$  và  $d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$ . Mặt phẳng

song song và cách đều  $d_1$  và  $d_2$  có phương trình là

- (A)  $x + 5y - 2z + 12 = 0$ . (B)  $x + 5y + 2z - 12 = 0$ .  
(C)  $x - 5y + 2z - 12 = 0$ . (D)  $x + 5y + 2z + 12 = 0$ .

**Lời giải.**

$d_1$  có VTCP  $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ .

$d_2$  có VTCP  $\vec{u}_2 = (-2; 0; 1)$ .

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng cần tìm, có VTPT  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -5; -2)$

$\Rightarrow (\alpha): x + 5y + 2z + m = 0$ .

Lấy điểm  $M_1(2; 1; 0) \in d_1, M_2(2; 3; 0) \in d_2$ .

Vì  $(\alpha)$  cách đều  $d_1$  và  $d_2$  nên

$$\begin{aligned} d(d_1, (\alpha)) &= d(d_2, (\alpha)) \Leftrightarrow d(M_1, (\alpha)) = d(M_2, (\alpha)) \\ &\Leftrightarrow \frac{|m+7|}{\sqrt{30}} = \frac{|m+17|}{\sqrt{30}} \Leftrightarrow m = -12. \end{aligned}$$

Vậy  $(\alpha): x + 5y + 2z - 12 = 0$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 12.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho 2 đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$ ,  $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$ . Mặt phẳng  $(P): ax + by + cz + d = 0$  song song với  $d_1, d_2$  và khoảng cách từ  $d_1$  đến  $(P)$  bằng 2 lần khoảng cách từ  $d_2$  đến  $(P)$ . Tính  $S = \frac{a+b+c}{d}$ .

- (A)  $S = \frac{1}{3}$ . (B)  $S = 1$ .  
(C)  $S = 4$ . (D)  $S = \frac{8}{34}$  hay  $S = -4$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d_1$  đi qua điểm  $A(1; -2; 1)$  và có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ .

Đường thẳng  $d_2$  đi qua điểm  $B(1; 1; -2)$  và có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_2 = (1; 3; 1)$ .

(P) có VTPT là  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (7; -4; 5)$  nên có phương trình (P):  $7x - 4y + 5z + d = 0$ .

Ta có:  $d[A; (P)] = 2d[B; (P)] \Leftrightarrow |d + 20| = 2|d - 7| \Leftrightarrow \begin{cases} d = 34 \\ d = -2. \end{cases}$

Vậy  $S = \frac{8}{34}$  hay  $S = -4$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu (S):  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$  và hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ ,  $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ . Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

**(A)**  $3x - y - z + 7 = 0$ .

**(B)**  $3x - y - z - 15 = 0$ .

**(C)**  $3x - y - z - 7 = 0$ .

**(D)**  $3x - y - z + 7 = 0$  hoặc  $3x - y - z - 15 = 0$ .

**Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm  $I(1; -1; 0)$ , bán kính  $R = \sqrt{11}$ .

$d_1$  qua  $A(5; -1; 1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$ .

$d_2$  qua  $B(-1; 0; 0)$  có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$ .

Mặt phẳng (P) cần tìm song song với hai đường thẳng  $d_1, d_2$  nên (P) có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3; 1; 1)$ .

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:  $-3x + y + z + d = 0$ .

$A \notin (P) \Leftrightarrow d \neq 15$ ;  $B \notin (P) \Leftrightarrow d \neq -3$ .

Mặt khác mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$N(0; 0; 1) \Leftrightarrow \frac{|-3 - 1 + 0 + d|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |-4 + d| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 15 \\ d = -7. \end{cases}$$

•  $d = 15$  (loại)

•  $d = -7$ , ta có phương trình mặt phẳng (P) là  $-3x + y + z - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 7 = 0$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$  và điểm  $M(2; 5; 3)$ . Mặt phẳng (P) chứa  $\Delta$  sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất có phương trình là

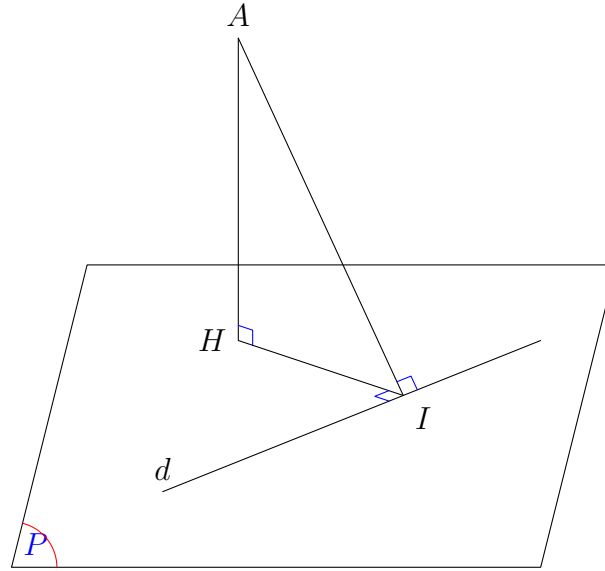
**(A)**  $x - 4y - z + 1 = 0$ .

**(B)**  $x + 4y - z + 1 = 0$ .

**(C)**  $x - 4y + z - 3 = 0$ .

**(D)**  $x + 4y + z - 3 = 0$ .

**Lời giải.**



Gọi  $I(1 + 2t; t; 2 + 2t)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$ .

$d$  có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_d = (2; 1; 2)$ .

Ta có  $\vec{AI} \cdot \vec{u}_d = 0(2t - 1)2 + (t - 5) + (2t - 1)2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$  suy ra  $I(3; 1; 4)$ .

Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(P)$  là  $AH = d(A, (P)) \leq AI$  suy ra khoảng cách từ  $A$  đến  $(P)$  lớn nhất bằng  $AI$ .

Khi đó mặt phẳng  $(P)$  qua  $I$  và nhận  $\vec{AI} = (1; -4; 1)$  làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng  $(P)$ :  $x - 4y + z - 3 = 0$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(2; -1; -2)$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $A$ , song song với đường thẳng  $(d)$  và khoảng cách từ đường thẳng  $d$  tới mặt phẳng  $(P)$  là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

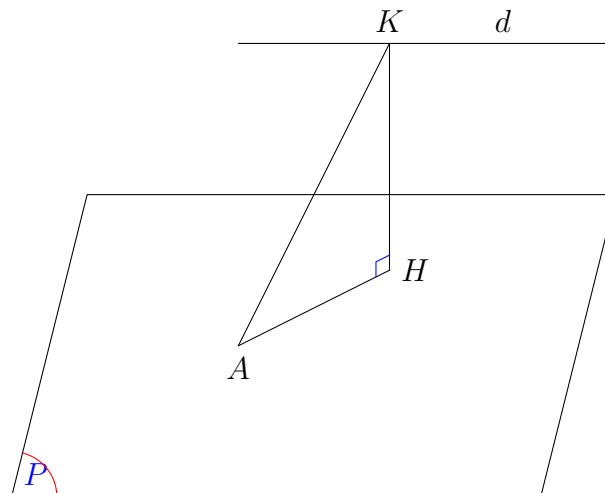
**(A)**  $x - y - 6 = 0$ .

**(B)**  $x + 3y + 2z + 10 = 0$ .

**(C)**  $x - 2y - 3z - 1 = 0$ .

**(D)**  $3x + z + 2 = 0$ .

**Lời giải.**





Gọi  $K(x; y; z)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $d$ . Tọa độ của  $K$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x + 1 = y - 1 \\ y - 1 = -z + 1 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow K(1; 1; 1)$$

Ta có  $d((d), (P)) = d(K, (P)) = KH \leq KA = \sqrt{14}$ . Nên khoảng cách từ  $d$  đến  $(P)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\sqrt{14}$  khi mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và vuông góc với  $\overrightarrow{KA}$ .

Khi đó có thể chọn VTPT của  $(P)$  là  $\overrightarrow{KA}$ .

Vậy  $(P)$  vuông góc với mặt phẳng  $3x + z + 2 = 0$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$  và cắt các trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $A$  và  $B$  sao cho đường thẳng  $AB$  vuông góc với  $d$ . Phương trình của mặt phẳng  $(P)$  là

**(A)**  $x + 2y + 5z - 5 = 0$ . **(B)**  $x + 2y + 5z - 4 = 0$ . **(C)**  $x + 2y - z - 4 = 0$ . **(D)**  $2x - y - 3 = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$ .  $\begin{cases} A \in Ox \Rightarrow A(a; 0; 0) \\ B \in Oy \Rightarrow B(0; b; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$ .

Theo đề bài  $AB \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2b; b; 0)$   
 $\Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 0)$  là một VTCP của  $AB$ .

Ta có  $\begin{cases} \vec{u} = (-2; 1; 0) \\ \vec{u}_d = (1; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}_d] = (-1; -2; -5) \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; 5)$  là một VTPT của  $(P)$ .

Kết hợp với  $(P)$  qua  $M(2; 1; 0) \in d \Rightarrow (P): (x-2) + 2(y-1) + 5z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 4 = 0$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 17.** Tìm tất cả các mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$  và tạo với mặt phẳng  $(P): 2x - z + 1 = 0$  góc  $45^\circ$ .

**(A)**  $(\alpha): 3x + z = 0$ .

**(B)**  $(\alpha): x - y - 3z = 0$ .

**(C)**  $(\alpha): x + 3z = 0$ .

**(D)**  $(\alpha): 3x + z = 0$  hay  $(\alpha): 8x + 5y + z = 0$ .

**Lời giải.**

$d$  đi qua điểm  $O(0; 0; 0)$  có vtcp  $\vec{u} = (1; -1; -3)$ .

$(\alpha)$  qua  $O$  có vtpt  $\vec{n} = (a; b; c)$  có dạng  $ax + by + cz = 0$ , do  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow a - b - 3c = 0$ .

$(P): 2x - z + 1 = 0$  vtpt  $\vec{k} = (2; 0; -1)$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{|2a - c|}{\sqrt{5(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 10(a^2 + b^2 + c^2) = (4a - 2c)^2 \\ &\Leftrightarrow 10(b^2 + 6bc + 9c^2 + b^2 + c^2) = (4b + 12c - 2c)^2 \Leftrightarrow 10(2b^2 + 6bc + 10c^2) = (4b + 10c)^2 \\ &\Leftrightarrow 4b^2 - 20bc = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 5c \end{cases} \end{aligned}$$

✓  $b = 0 \Rightarrow a = 3c \Rightarrow (\alpha): x + 3z = 0.$

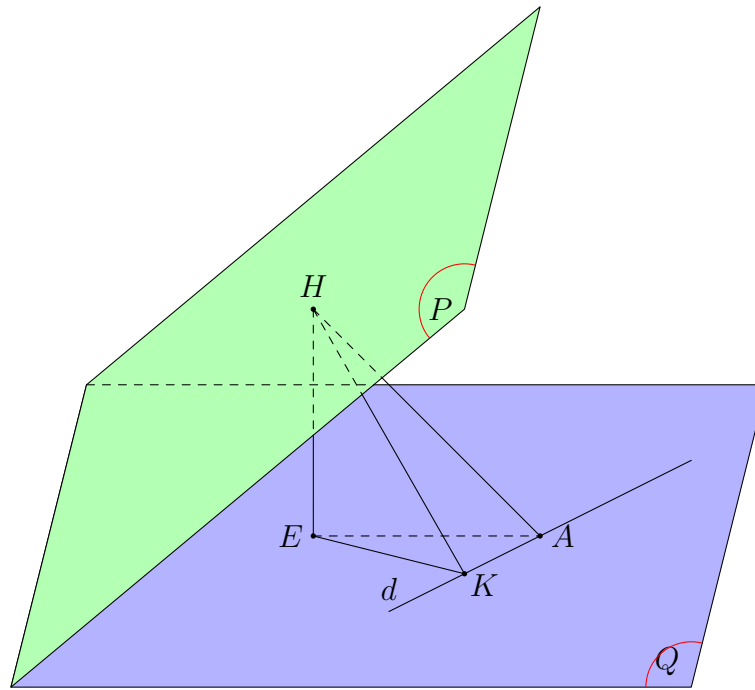
✓  $b = 5c$ , chọn  $c = 1 \Rightarrow b = 5, a = 8 \Rightarrow (\alpha): 8x + 5y + z = 0.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ ,  $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y - 2z + 4 = 0$ . Mặt phẳng chứa đường thẳng  $d$  và tạo với mặt phẳng  $(P)$  góc với số đo nhỏ nhất có phương trình là

- (A)**  $x - z - 2 = 0.$       **(B)**  $x + z - 2 = 0.$       **(C)**  $3x + y + z - 1 = 0.$       **(D)**  $x + y - z + 3 = 0.$

**Lời giải.**



Lấy điểm  $A(0; -1; 2)$  thuộc đường thẳng  $d$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(P)$ .

Gọi  $E, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  lên mặt phẳng  $(Q)$  và đường thẳng  $d$ .

Ta có:  $AH \perp (P), HE \perp (Q) \Rightarrow \widehat{((P), (Q))} = \widehat{AHE} = \alpha$ . Xét  $\cos \alpha = \frac{HE}{HA} \leq \frac{HK}{HA}$ .

$\alpha$  có số đo nhỏ nhất khi  $\Leftrightarrow \cos \alpha$  lớn nhất  $\Leftrightarrow E \equiv K$ .

Lúc đó mặt phẳng  $(Q)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với mặt phẳng  $(HAK)$ .

Mặt phẳng  $(AHK)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $d$  và vuông với mặt phẳng  $(P) \Rightarrow \vec{n}_{AHK} = [\vec{u}_d, \vec{n}_P]$  là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(AHK)$ .

Suy ra một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(Q) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_{AHK}] = (-6; -6; 6)$

$\Rightarrow$  Phương trình mặt phẳng  $(Q): x + y - z + 3 = 0.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$  và  $B(3; -1; 5)$ . Mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với đường thẳng  $AB$  và cắt các trục  $Ox, Oy$  và  $Oz$  lần lượt tại các điểm  $D, E$  và  $F$ . Biết thể tích của tứ diện  $ODEF$  bằng  $\frac{3}{2}$ , phương trình mặt phẳng  $(P)$  là

(A)  $2x - 3y + 4z \pm \sqrt[3]{36} = 0.$

(B)  $2x - 3y + 4z + \frac{3}{2} = 0.$

(C)  $2x - 3y + 4z \pm 12 = 0.$

(D)  $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0.$

**Lời giải.**

Vì  $AB \perp (P)$  nên mặt phẳng  $(P)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 4)$ , do đó phương trình mặt phẳng  $(P)$  có dạng  $2x - 3y + 4z + d = 0$ .

Từ đây tìm được  $D(-\frac{d}{2}; 0; 0)$ ,  $E(0; \frac{d}{3}; 0)$ ,  $F(0; 0; -\frac{d}{4})$  suy ra  $OD = \frac{|d|}{2}$ ,  $OE = \frac{|d|}{3}$ ,  $OF = \frac{|d|}{4}$ .

Mặt khác tứ diện  $ODEF$  có  $OD, OE, OF$  đôi một vuông góc nên

$$V_{ODEF} = \frac{1}{6}OD \cdot OE \cdot OF \Leftrightarrow \frac{(|d|)^3}{144} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |d| = 6 \Leftrightarrow d = \pm 6.$$

Vậy phương trình mặt phẳng  $(P)$  là  $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0$ .

Chọn phương án (D)

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. A  | 3. C  | 4. A  | 5. C  | 6. A  | 7. A  | 8. A  | 9. B  | 10. B |
| 11. B | 12. D | 13. A | 14. C | 15. D | 16. C | 17. D | 18. D | 19. D |       |

**DẠNG 35.****TÌM VÉC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG****KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  và  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Ta có

1)  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ .

2) Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là 
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}.$$

3) Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là 
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}.$$

4)  $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

5)  $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$  cùng phương với  $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$  ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ) khi và chỉ khi  $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}.$

6) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  thì  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\overrightarrow{AB}$  hoặc  $\overrightarrow{BA}$ .

7) Nếu  $\vec{u}$  là một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$  thì  $k\vec{u}$  ( $k \neq 0$ ) cũng là một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$ , do đó một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương.

8) Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì véc-tơ chỉ phương của đường thẳng này cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng kia.

9) Nếu đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  thì véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta$  của đường thẳng  $\Delta$  chính là véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_\alpha$  của mặt phẳng  $(\alpha)$ , tức  $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_\alpha$ .

10) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (a; b; c)$  có phương trình tham số  $\Delta$ : 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 và phương trình chính tắc  $\Delta$ : 
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (abc \neq 0).$$

- 11) Điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  có PTTS  $\Delta$ : 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 thì  $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ .
- 12) Cho hai mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$  và  $(\alpha'): Ax + By + Cz + D' = 0$ .
- 01) Với điều kiện  $A: B: C \neq A': B': C'$ . Điều kiện trên chứng tỏ hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi  $d$  là đường thẳng giao tuyến của chúng. Đường thẳng  $d$  gồm những điểm  $M(x; y; z)$  vừa thuộc  $(\alpha)$  vừa thuộc  $(\alpha')$ , nên tọa độ của  $M$  là nghiệm của hệ 
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax + By + Cz + D' = 0 \end{cases}$$
.
- 02)  $\vec{u}_d = [\vec{n}, \vec{n}']$  với  $\vec{n} = (A, B, C)$  và  $\vec{n}' = (A', B', C')$  là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ .
- 13) Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục  $Ox$  là  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ .
- 14) Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục  $Oy$  là  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .
- 15) Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục  $Oz$  là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm  $M(2; 3; -1)$  và  $N(4; 5; 3)$ .

- (A)  $\vec{u}_4 = (1; 1; 1)$ .      (B)  $\vec{u}_3 = (1; 1; 2)$ .      (C)  $\vec{u}_1 = (3; 4; 1)$ .      (D)  $\vec{u}_2 = (3; 4; 2)$ .

**Lời giải.**

### Phân tích hướng dẫn giải

- 1) DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm tọa độ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm trong không gian.
- 2) HƯỚNG GIẢI: Đường thẳng đi qua hai điểm  $M$  và  $N$  nhận véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  hoặc  $\overrightarrow{NM}$  làm véc-tơ chỉ phương.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có  $\overrightarrow{MN} = (2; 2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\vec{u}$  với  $\vec{u} = (1; 1; 2)$ .

Ta chọn  $\vec{u} = (1; 1; 2)$  là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm  $M(2; 3; -1)$  và  $N(4; 5; 3)$ .

Chọn phương án (B)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 2; 3)$  và  $B(3; -2; -1)$  có tọa độ là

- (A)  $(-1; 2; 2)$ . (B)  $(1; 2; 2)$ . (C)  $(2; 4; 4)$ . (D)  $(2; 0; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; -4; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$  với  $\vec{u} = (-1; 2; 2)$ .

Ta chọn  $\vec{u} = (-1; 2; 2)$  là một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 2; 3)$  và  $B(3; -2; -1)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-3; 2; 2)$ ,  $B(0; -1; 2)$ ,  $C(1; 1; 3)$ . Một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $C$  và song song với  $AB$  có tọa độ là

- (A)  $(-3; 3; 3)$ . (B)  $(1; -1; 0)$ . (C)  $(1; -1; 1)$ . (D)  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ .

**Lời giải.**

Vì  $\Delta$  song song với  $AB$ , nên  $\overrightarrow{AB}$  là một vec-tơ chỉ phương của  $\Delta$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$  với  $\vec{u} = (1; -1; 0)$ .

Ta chọn  $\vec{u} = (1; -1; 0)$  là một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1; 3; -5)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): x - 2y + 3z - 4 = 0$  có tọa độ là

- (A)  $(-5; 3; 1)$ . (B)  $(1; 3; -4)$ . (C)  $(1; -2; 3)$ . (D)  $(-2; 3; -4)$ .

**Lời giải.**

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có một vec-tơ pháp tuyến  $\vec{n}_\alpha = (1; -2; 3)$ .

Vì  $\Delta \perp (\alpha)$  nên  $\Delta$  có một vec-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_\alpha = (1; -2; 3)$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$ . Một vec-tơ chỉ phương của đường

thẳng  $\Delta$  có tọa độ là

- (A)  $(1; 0; -1)$ . (B)  $(0; 1; 1)$ . (C)  $(0; 1; 2)$ . (D)  $(0; 2; -2)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$ , ta thấy  $\Delta$  có một vec-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = (0; 1; -1)$ . Chọn  $\vec{u} = 2\vec{u}_\Delta = (0; 2; -2)$  là một vec-tơ chỉ phương khác của  $\Delta$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = z-3$ . Một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  có tọa độ là

- (A)  $(1; -3; 3)$ . (B)  $(-1; 3; -3)$ . (C)  $(2; -3; 0)$ . (D)  $(2; -3; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = z-3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{1}$ . Dựa vào phương trình chính tắc của đường thẳng, ta thấy  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = (2; -3; 1)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục  $Oy$  có tọa độ là

**(A)**  $(0; 1; 2020)$ .

**(B)**  $(1; 1; 1)$ .

**(C)**  $(0; 2020; 0)$ .

**(D)**  $(1; 0; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục  $Oy$  là  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .

Chọn  $\vec{u} = 2020\vec{j} = (0; 2020; 0)$  làm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục  $Oy$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ . Một véc-tơ chỉ phương của

đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta$  có tọa độ là

**(A)**  $(0; 1; 2)$ .

**(B)**  $(1; -2; -3)$ .

**(C)**  $(-1; -2; 3)$ .

**(D)**  $(1; 1; 2)$ .

**Lời giải.**

Đường thẳng  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_\Delta = (1; -2; -3)$ .

Vì  $d$  song song với  $\Delta$  nên véc-tơ chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta = (1; -2; -3)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng  $\Delta$  cùng phương với véc-tơ  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$  có tọa độ là

**(A)**  $(-3; -5; 4)$ .

**(B)**  $(4; -5; 3)$ .

**(C)**  $(3; 0; 4)$ .

**(D)**  $(3; -5; 4)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (3; -5; 4)$ .

Vì  $\vec{u}$  cùng phương với  $\vec{a}$ , nên ta chọn một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$  là  $\vec{u} = \vec{a} = (3; -5; 4)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(1; 3; 2)$ . Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  nhận véc-tơ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

**(A)**  $(1; 1; 0)$ .

**(B)**  $(0; 2; 1)$ .

**(C)**  $(-2; 1; 0)$ .

**(D)**  $(2020; -2020; 0)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  thì  $M(x_M; y_M; z_M)$  với 
$$\begin{cases} x_M = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \frac{1+3}{2} = 2 \\ z_M = \frac{0+2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} =$$

$(-1; 1; 0)$ .

Ta có đường thẳng  $AM$  nhận  $\vec{u} = -2020\overrightarrow{AM} = (2020; -2020; 0)$  làm một véc-tơ chỉ phương.

Chọn phương án **(D)**



**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 0; -2), B(2; -3; -4), C(3; 0; -3)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $OG$ ?

(A)  $(2; 1; 3)$ .

(B)  $(3; -2; 1)$ .

(C)  $(-2; 1; 3)$ .

(D)  $(-1; -3; 2)$ .

**Lời giải.**

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $G(x_G; y_G; z_G)$  với 
$$\begin{cases} x_G = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0-3+0}{3} = -1 \\ z_G = \frac{-2-4-3}{3} = -3 \end{cases}$$
. Vậy  $G(2; -1; -3)$ .

Ta có  $\overrightarrow{OG} = (2; -1; -3)$ .

Ta có đường thẳng  $OG$  nhận  $\vec{u} = -\overrightarrow{OG} = (-2; 1; 3)$  làm một véc-tơ chỉ phương.

Chọn phương án (C)

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $P_1, P_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  $P(6; 7; 8)$  lên trục  $Oy$  và mặt phẳng  $(Oxz)$ . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $P_1P_2$ ?

(A)  $(6; -8; 7)$ .

(B)  $(6; -7; 8)$ .

(C)  $(6; 7; 8)$ .

(D)  $(-6; -7; 8)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$P_1$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $P(6; 7; 8)$  lên trục  $Oy \Rightarrow P_1(0; 7; 0)$ .

$P_2$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $P(6; 7; 8)$  lên mặt phẳng  $(Oxz) \Rightarrow P_2(6; 0; 8)$ .

Chọn một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $P_1P_2$  là  $\overrightarrow{P_1P_2} = (6; -7; 8)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $T_1, T_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  $T(4; 5; 6)$  lên các trục  $Oy$  và trục  $Oz$ . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $T_1T_2$ ?

(A)  $(0; -5; 6)$ .

(B)  $(0; -6; 5)$ .

(C)  $(4; -5; -6)$ .

(D)  $(0; 5; 6)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$T_1$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $T(4; 5; 6)$  lên trục  $Oy \Rightarrow T_1(0; 5; 0)$ .

$T_2$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $T(4; 5; 6)$  lên trục  $Oz \Rightarrow T_2(0; 0; 6)$ .

Chọn một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $T_1T_2$  là  $\overrightarrow{T_1T_2} = (0; -5; 6)$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; 2), B(2; -1; 5), C(3; 2; -1)$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  và vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm  $A, B, C$  có phương trình là

(A)  $\frac{x+1}{15} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-2}{7}$ .

(B)  $\frac{x-1}{15} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z-2}{7}$ .

(C)  $\frac{x-1}{-15} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-2}{7}$ .

(D)  $\frac{x-1}{15} = \frac{y-3}{9} = \frac{z-2}{7}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; -4; 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2; -1; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (15; 9; 7)$ .

Vì đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm  $A, B, C$ , nên ta chọn một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = (15; 9; 7)$ .

Vậy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(1; 3; 2)$  và nhận  $\vec{u}_\Delta = (15; 9; 7)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là  $\frac{x-1}{15} = \frac{y-3}{9} = \frac{z-2}{7}$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(0; 2; 5)$  đồng thời vuông góc với hai

đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{-2}$  và  $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$  có phương trình là

$$\textcircled{A} \Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 \end{cases} \quad \textcircled{C} \Delta: \begin{cases} x = -4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \Delta: \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

**Lời giải.**

$d_1$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (-1; 1; -2)$ .

$d_2$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$ . Ta có  $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-4; -2; 1)$ .

Vì đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  nên ta chọn một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-4; -2; 1)$ .

Vậy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(0; 2; 5)$  và nhận  $\vec{u}_\Delta = (-4; -2; 1)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương

trình tham số là  $\Delta: \begin{cases} x = -4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$  và  $(\beta): x + y + z - 1 = 0$ .

Đường thẳng  $\Delta$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có phương trình chính tắc là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1} \\ \textcircled{C} \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \textcircled{D} \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$$

**Lời giải.**

$(\alpha)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$ .

$(\beta)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\beta = (1; 1; 1)$ . Ta có  $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1)$ .

Vì đường thẳng  $\Delta$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  nên  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1)$ . Gọi  $M$  là giao điểm của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ , thì  $M \in \Delta$  và tọa độ

$M$  là nghiệm của hệ phương trình:  $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ , cho  $x = 0$  ta được hệ sau:  $\begin{cases} x = 0 \\ y - z + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Vậy  $M(0; -1; 2)$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(0; -1; 2)$  và nhận  $\vec{u}_{\Delta} = (2; -3; 1)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là  $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(1; 2; 2)$ , song song với mặt phẳng  $(P): x - y + z + 3 = 0$  đồng thời cắt đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$  có phương trình là

$$\textcircled{\textbf{A}} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases} \quad \textcircled{\textbf{B}} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases} \quad \textcircled{\textbf{C}} \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad \textcircled{\textbf{D}} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

**Lời giải.**

Đường thẳng  $d$  có phương trình tham số là  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Mặt phẳng  $(P)$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{\alpha} = (1; -1; 1)$ .

Giả sử  $\Delta$  cắt  $d$  tại  $A \Rightarrow A(1+t; 2+t; 3+t)$  và  $\vec{MA} = (t; t; 1+t)$ .

Vì đường thẳng  $\Delta$  song song với  $(P)$  nên  $\vec{MA} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t - t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$ .

Suy ra  $\vec{MA} = (-1; -1; 0)$  và  $\vec{MA}$  là một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(1; 2; 2)$  và nhận  $\vec{u}_{\Delta} = (-1; -1; 0)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương

trình tham số là  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có phương trình đường phân giác trong góc  $A$  là  $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$ . Biết rằng điểm  $M(0; 5; 3)$  thuộc đường thẳng  $AB$  và điểm  $N(1; 1; 0)$  thuộc đường thẳng  $AC$ . Một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng  $AC$  có tọa độ là

$$\textcircled{\textbf{A}} \vec{u} = (0; 1; -3). \quad \textcircled{\textbf{B}} \vec{u} = (0; 1; 3). \quad \textcircled{\textbf{C}} \vec{u} = (1; 2; 3). \quad \textcircled{\textbf{D}} \vec{u} = (0; -2; 6).$$

**Lời giải.**

$d$  có phương trình tham số là 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - 4t \\ z = 6 - 3t. \end{cases}$$

Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $(d)$ . Khi đó  $D \in AC$  và đường thẳng  $AC$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\overrightarrow{ND}$ .

\* **Tìm tọa độ điểm  $D$ .**

Gọi  $K$  là giao điểm của  $MD$  với  $d$ . Ta có

$K(t; 6 - 4t; 6 - 3t)$ ,  $\overrightarrow{MK} = (t; 1 - 4t; 3 - 3t)$ .

Vì  $\overrightarrow{MK} \perp \vec{u}_d$ , với  $\vec{u}_d = (1; -4; -3)$  nên  $t - 4(1 - 4t) - 3(3 - 3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ .

Suy ra  $K\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{9}{2}\right)$ . Mà  $K$  là trung điểm của  $MD$  nên 
$$\begin{cases} x_D = 2x_K - x_M \\ y_D = 2y_K - y_M \\ z_D = 2z_K - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 3 \\ z_D = 6 \end{cases} \text{ hay } D(1; 3; 6).$$

Một véc-tơ chỉ phương của  $AC$  là  $\overrightarrow{ND} = (0; 2; 6) = 2(0; 1; 3) = 2\vec{u}$ , với  $\vec{u} = (0; 1; 3)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(0; 1; 1)$ , vuông góc với đường thẳng

$d_1: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$  và cắt đường thẳng  $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$  có phương trình là

**(A)**  $\Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$      
**(B)**  $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$      
**(C)**  $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$      
**(D)**  $\Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = -4 + t \end{cases}$  .

**Lời giải.**

$d_1$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (-2; 2; 1)$ .

Giả sử  $\Delta$  cắt  $d_2$  tại  $B \Rightarrow B(t; -t; 2)$  và  $\overrightarrow{AB} = (t; -t - 1; 1)$ .

Vì đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d_2$  nên  $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 2t - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; 1\right) = -\frac{1}{4}(1; 3; -4) = -\frac{1}{4}\vec{u}$ , với  $\vec{u} = (1; 3; -4)$ .

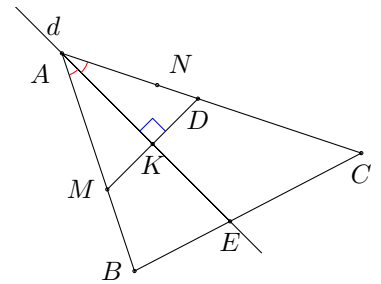
Vậy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(0; 1; 1)$  và nhận  $\vec{u} = (1; 3; -4)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương

trình tham số là 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(P): 7x + y - 4z = 0$ ,

cắt hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$  và  $d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$  có phương trình chính tắc là



(A)  $\Delta: \frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}.$

(B)  $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 7t \\ y = -t \\ z = -1 + 4t \end{cases}.$

(C)  $\Delta: \frac{x+2}{-7} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}.$

(D)  $\Delta: \frac{x+7}{-5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{3}.$

**Lời giải.**

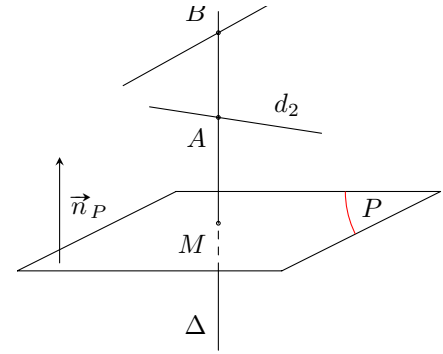
Mặt phẳng  $(P)$  có một vec-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (7; 1; 4).$

$d_1$  có phương trình tham số:  $d_1: \begin{cases} x = 2m \\ y = 1 - m \\ z = -2 + m. \end{cases}$

Giả sử  $\Delta$  cắt  $d_1$  tại  $A \Rightarrow A(2m; 1 - m; -2 + m).$

Giả sử  $\Delta$  cắt  $d_2$  tại  $B \Rightarrow B(-1 + 2t; 1 + t; 3).$

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = (2t - 1 - 2m; t + m; 5 - m).$



Vì đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  nên  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\vec{n}.$

Tức là  $\frac{2t - 1 - 2m}{7} = \frac{t + m}{1} = \frac{5 - m}{-4} = k \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 - 2m = 7k \\ t + m = k \\ 5 - m = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ m = 1 \\ k = -1 \end{cases}.$

Suy ra  $A(2; 0; -1), B(-5; -1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-7; -1; 4).$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(2; 0; -1)$  và nhận  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-7; -1; 4)$  làm một vec-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là  $\Delta: \frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{4}.$

Chọn phương án (A)

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ , điểm  $A(1; 3; 2)$  và đường

thẳng  $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}.$  Đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(P)$  và  $d$  lần lượt tại hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $A$  là

trung điểm của  $MN$  có phương trình chính tắc là

(A)  $\Delta: \frac{x+6}{-7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$

(B)  $\Delta: \begin{cases} x = -6 - 7t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}.$

(C)  $\Delta: \frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}.$

(D)  $\Delta: \frac{x+6}{-7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{1}.$

**Lời giải.**

Ta có  $\Delta$  cắt  $d$  tại  $N \Rightarrow N(-2 + 2t; 1 + t; 1 - t)$ .

Vì  $A$  là trung điểm của  $MN$  nên  $M$ :

$$\begin{cases} x_M = 2x_A - x_N = 4 - 2t \\ y_M = 2y_A - y_N = 5 - t \\ z_M = 2z_A - z_N = t + 3 \end{cases}$$

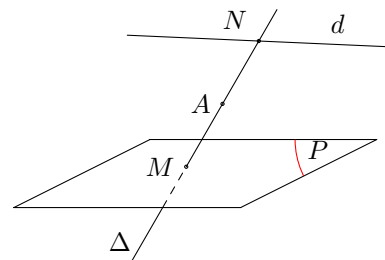
hay  $M(4 - 2t; 5 - t; t + 3)$ .

Vì  $\Delta$  cắt  $(P)$  tại  $M \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow 2(4 - 2t) - (5 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ .

Do đó  $N(-6; -1; 3)$  và  $\overrightarrow{AN} = (-7; -4; 1)$ .

Vậy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $N(-6; -1; 3)$  và nhận  $\vec{u} = \overrightarrow{AN} = (-7; -4; 1)$  làm một véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là  $\Delta: \frac{x+6}{-7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{1}$ .

Chọn phương án **D**



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. B  | 3. C  | 4. D  | 5. D  | 6. C  | 7. B  | 8. D  | 9. D  | 10. C |
| 11. B | 12. A | 13. D | 14. C | 15. B | 16. A | 17. B | 18. B | 19. A | 20. D |

**DẠNG 36.****TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Công thức tính xác suất của biến cố  $A$ :  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn bằng.

Ⓐ  $\frac{41}{81}$ .

Ⓑ  $\frac{4}{9}$ .

Ⓒ  $\frac{1}{2}$ .

Ⓓ  $\frac{16}{81}$ .

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là Dạng 1 tìm xác suất của biến cố.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính  $n(\Omega)$ .

B2: Gọi  $A$  là biến cố: “số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn”.

B3: Tìm số cách chọn số có 3 chữ số chẵn khác nhau.

B4: Tìm số cách chọn số có 1 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ khác nhau.

B5: Tính  $n(A)$ .

B6: Tính  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Tính:  $n(\Omega)$ .

Ta có 5 chữ số chẵn và 5 chữ số lẻ.

Số cần tìm có dạng:  $\overline{abc}$ . Mỗi số cần tìm được thực hiện bởi 3 công đoạn, nên:  $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn”.

Có 2 phương án xảy ra:

Phương án 1: số được chọn có 3 chữ số chẵn khác nhau. Ta có:  $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$  số.

Phương án 2: số được chọn có 1 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

Chọn tùy ý 1 số chẵn có 5 cách chọn, chọn 2 chữ số lẻ có:  $C_5^2 = 10$  cách chọn. Hoán vị 3 chữ số vừa chọn được. Ta có:  $5 \cdot 10 \cdot 3! = 300$ . Trong 300 cách chọn trên có những trường hợp số có chữ số hàng trăm là chữ số 0. Do đó, ta có:  $300 - 5 \cdot 4 = 280$ .

Theo qui tắc cộng ta có:  $n(A) = 48 + 280 = 328$ .



Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(P)} = \frac{328}{648} = \frac{41}{81}$ .

Chọn phương án **A**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp  $A$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để chọn được số có tổng 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng 3 chữ số sau 3 đơn vị.

**A**  $\frac{1}{20}$ .

**B**  $\frac{1}{6!}$ .

**C**  $\frac{3}{20}$ .

**D**  $\frac{2}{10}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $S$  có  $6!$  phần tử.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 6!$ .

Gọi  $B$  là biến cố số được chọn có tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng 3 chữ số sau 3 đơn vị.

Do tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng 3 chữ số sau 3 đơn vị nên tổng của 3 chữ số đầu bằng 9.

Có 3 bộ số có tổng bằng 9 từ tập hợp  $A$  vậy  $n(B) = 3 \cdot 3! \cdot 3!$ .

Vậy xác suất của biến cố  $B$  là  $P(B) = \frac{3 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{3}{20}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 2.** Gọi  $X$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập  $X$ . Xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho 4 gần nhất với số nào dưới đây.

**A** 0,63.

**B** 0,23.

**C** 0,44.

**D** 0,12.

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của tập  $X$  là  $n(X) = 9 \cdot 10^4 = 90000$ ,

trong đó có  $\frac{99996 - 10000}{4} + 1 = 22500$  số chia hết cho 4 và  $90000 - 22500 = 67500$  số không chia hết cho 4.

Gọi  $A$  là biến cố nhận được ít nhất một số chia hết cho 4.

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{90000}^2$ .

Số phần tử của không gian thuận lợi cho biến cố  $\bar{A}$  (cả hai đều không chia hết cho 4) là  $n(\bar{A}) = C_{67500}^2$ .

Vậy xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{67500}^2}{C_{90000}^2} \approx 0,44$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 3.** Gọi  $A$  là tập các số có 5 chữ số khác nhau được lập từ các số  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Từ  $A$  chọn ngẫu nhiên một số. Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 3 và chữ số 3 đứng ở chính giữa là.

**A**  $\frac{1}{7}$ .

**B**  $\frac{5}{7}$ .

**C**  $\frac{2}{7}$ .

**D**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

- Số các số có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập trên là  $n(\Omega) = A_7^5$  cách.
- Mỗi một số có 5 chữ số khác nhau mà có mặt chữ số 3 và chữ số 3 đứng ở chính giữa là một chỉnh hợp chập 4 của 6 số còn lại. Vậy có:  $A_6^4$  số.

Vậy xác suất để số được chọn có mặt chữ số 3 và chữ số 3 đứng ở chính giữa là  $\frac{A_6^4}{A_7^5} = \frac{1}{7}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Gọi  $B$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ  $A$ . Chọn thứ tự 2 số thuộc tập  $B$ . Xác suất để 2 số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 3 bằng.

**(A)**  $\frac{156}{360}$ .

**(B)**  $\frac{160}{359}$ .

**(C)**  $\frac{80}{359}$ .

**(D)**  $\frac{161}{360}$ .

**Lời giải.**

Chọn 4 số khác nhau và xếp có thứ tự từ tập hợp có 6 chữ số, có  $A_6^4 = 360$  số.

Vì vậy số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 360 \cdot 359 = 129240$ .

Trong các số thuộc tập  $B$  có  $4!C_5^3 = 240$  số luôn có mặt chữ số 3.

Và trong tập  $B$  có 120 số không có mặt chữ số 3.

Chọn 2 số thuộc tập  $B$  có thứ tự, trong đó có đúng một số có mặt chữ số 3 có.

$$2!C_{240}^1 \cdot C_{120}^1 = 57600 \text{ cách.}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{57600}{129240} = \frac{160}{359}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ tập hợp  $M = \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$ . Tính xác suất  $P$  để trong 3 số tự nhiên được chọn không có 2 số tự nhiên liên tiếp.

**(A)**  $P = \frac{677040}{679057}$ .

**(B)**  $P = \frac{2017}{679057}$ .

**(C)**  $P = \frac{2016}{679057}$ .

**(D)**  $P = \frac{1}{679057}$ .

**Lời giải.**

Có tất cả  $C_{2019}^3$  cách chọn 3 số tự nhiên từ tập hợp  $M = \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$ .

Suy ra  $n(\Omega) = C_{2019}^3$ .

Xét biến cố  $A$ : “Chọn 3 số tự nhiên sao cho không có 2 số tự nhiên liên tiếp”.

Ta có  $\bar{A}$ : “Chọn 3 số tự nhiên sao luôn có 2 số tự nhiên liên tiếp”.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Trong ba số chọn được chỉ có 2 số liên tiếp:

- Nếu 2 số liên tiếp là  $\{1; 2\}$  hoặc  $\{2018; 2019\}$  thì số thứ ba có  $2019 - 3 = 2016$  cách chọn (do không tính số liên tiếp sau và trước mỗi cặp số đó).
- Nếu 2 số liên tiếp là  $\{2; 3\}$ ,  $\{3; 4\}$ ,  $\{2017; 2018\}$  thì số thứ ba có  $2019 - 4 = 2015$  cách chọn (do không tính 2 số liên trước và sau mỗi cặp số đó). Trường hợp này có  $2 \cdot 2016 + 2016 \cdot 2015 = 4066272$  cách

Tức là chọn các bộ  $\{1; 2; 3\}$ ,  $\{2; 3; 4\}$ ,  $\{2017; 2018; 2019\}$ : có tất cả 2017 cách.

Suy ra  $n(\bar{A}) = 4066272 + 2017 = 4068289$ .

$$\text{Vậy } P = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4068289}{C_{2019}^3} = \frac{1365589680}{1369657969} = \frac{677040}{679057}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Xét tập hợp  $A$  gồm tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $A$ . Tính xác suất để số được chọn có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước.

(A)  $\frac{1}{72}$ .

(B)  $\frac{1}{18}$ .

(C)  $\frac{1}{36}$ .

(D)  $\frac{5}{36}$ .

**Lời giải.**

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau có dạng  $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ . Khi đó

Số cách chọn chữ số  $a_1$  có 9 cách chọn vì  $a_1 \neq 0$ .

Chọn 3 chữ số từ tập  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \setminus \{a_1\}$  để xếp vào 3 vị trí  $\overline{a_2a_3a_4}$  có  $A_9^3$  cách.

Do đó có  $9 \cdot A_9^3 = 4536$ .

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số trong 4536 số.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là  $|\Omega| = C_{4536}^1 = 4536$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Số được chọn có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước”.

Số được chọn có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nên  $a_1, a_2, a_3, a_4$  thuộc tập  $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

Mỗi bộ gồm 4 chữ số khác nhau lấy ra từ  $X$  có một cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Do đó trường hợp này có  $C_9^4 = 126$  số.

Suy ra số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = 126$ .

Vậy xác suất cần tính  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{126}{4536} = \frac{1}{36}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 7.** Mỗi bạn An, Bình chọn ngẫu nhiên ba chữ số trong tập  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Tính xác suất để trong hai bộ ba chữ số mà An và Bình chọn ra có đúng một chữ số giống nhau.

(A)  $\frac{7}{40}$ .

(B)  $\frac{9}{10}$ .

(C)  $\frac{6}{25}$ .

(D)  $\frac{21}{40}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 = 14400$ .

Gọi  $A$  là biến cố trong hai bộ ba chữ số mà An và Bình chọn ra có đúng một chữ số giống nhau.

Giả sử An chọn một bộ ba số là  $\{a, b, c\}$ , khi đó Bình sẽ có:

- $C_1^1 \cdot C_7^2$  cách chọn bộ ba số chỉ có  $a$  mà không có  $b, c$ .
- $C_1^1 \cdot C_7^2$  cách chọn bộ ba số chỉ có  $b$  mà không có  $a, c$ .
- $C_1^1 \cdot C_7^2$  cách chọn bộ ba số chỉ có  $c$  mà không có  $a, b$ .

Suy ra số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = 3 \cdot C_7^2 \cdot C_{10}^3 = 7560$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{7560}{14400} = \frac{21}{40}$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 8.** Một Gọi  $A$  là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau tạo ra từ các chữ số  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập  $A$ . Xác suất để số lấy được là số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503 bằng.

(A)  $\frac{101}{360}$ .

(B)  $\frac{5}{18}$ .

(C)  $\frac{67}{240}$ .

(D)  $\frac{259}{360}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử không gian mẫu:  $n(\Omega) = A_6^4 - A_6^3 = 720$  (gồm các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ tập  $A$ , trừ đi các số có chữ số 0 đứng đầu).

Gọi  $B$ : “số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503”.

Gọi số cần tìm là  $\overline{abcd} \leq 2503$ .

Trường hợp 1:  $a < 2 (a \neq 0)$  có 1 cách Chọn  $\overline{bcd}$  có  $A_6^3$  cách.

Vậy Trường hợp 1 có  $1 \cdot A_6^3 = 120$  số.

Trường hợp 2:  $a = 2$  có một cách  $b < 5$  có 4 cách chọn ( $b \in \{0, 1, 3, 4\}$ ).

Chọn  $\overline{cd}$  có  $A_5^2$  cách.

Vậy trường hợp 2 có  $4 \cdot A_5^2 = 80$  số.

Trường hợp 3:  $a = 2, b = 5, c = 0, d \leq 3 (d \neq a, b, c)$  có 2 số ( $d \in \{1, 3\}$ ).

Suy ra:  $n(B) = 120 + 80 + 2 = 202 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{202}{720} = \frac{101}{360}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 9.** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số. Tính xác suất để số được chọn không vượt quá 600, đồng thời nó chia hết cho 5.

**A**  $\frac{500}{900}$ .

**B**  $\frac{100}{900}$ .

**C**  $\frac{101}{900}$ .

**D**  $\frac{501}{900}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 9 \cdot 10^2 = 900$ .

Số tự nhiên có ba chữ số nhỏ nhất là  $100 = 5 \cdot 20$ .

Số tự nhiên lớn nhất không vượt quá 600 là  $600 = 5 \cdot 120$ .

Do đó số các số tự nhiên có ba chữ số không vượt quá 600 và đồng thời chia hết cho 5 là  $120 - 20 + 1 = 101$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “Số được chọn không quá 600 và đồng thời chia hết cho 5”.

Khi đó  $n(A) = 101$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{101}{900}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 10.** Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau).

Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

**A**  $\frac{817}{2450}$ .

**B**  $\frac{248}{3675}$ .

**C**  $\frac{2203}{7350}$ .

**D**  $\frac{2179}{7350}$ .

**Lời giải.**

Số cách lấy ra 3 tấm thẻ trong 100 tấm thẻ là  $C_{100}^3 = 161700 \Rightarrow n(\Omega) = 161700$ .

Trong 100 tấm thẻ từ 801 đến 900, số các tấm thẻ chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2 lần lượt là 34 tấm, 33 tấm, 33 tấm.

Gọi  $A$  là biến cố “Lấy được ba tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3”.

Trường hợp 1: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia hết cho 3. Số cách lấy là  $C_{34}^3 = 5984$  (cách).

Trường hợp 2: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 1. Số cách lấy là  $C_{33}^3 = 5456$  (cách).

Trường hợp 3: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 2. Số cách lấy là  $C_{33}^3 = 5456$  (cách).

Trường hợp 4: Ba tấm thẻ lấy ra có 1 tấm chia hết cho 3; 1 tấm chia 3 dư 1 và 1 tấm chia 3 dư 2. Số cách lấy là  $34 \cdot 33 \cdot 33 = 37026$  (cách).

Vậy số các trường hợp thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n(A) = 5984 + 5456 + 5456 + 37026 = 53922$  (cách).

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{53922}{161700} = \frac{817}{2450}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất để tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 6.

**(A)**  $\frac{2}{9}$ .

**(B)**  $\frac{11}{36}$ .

**(C)**  $\frac{1}{6}$ .

**(D)**  $\frac{5}{18}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 6^2 = 36$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 6”.

Tập hợp các quả của biến cố  $A$  là

$$A = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (4; 1)\}.$$

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = 10$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 12.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số của tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $S$ . Tính xác suất để số được chọn có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

**(A)**  $\frac{2}{5}$ .

**(B)**  $\frac{3}{5}$ .

**(C)**  $\frac{1}{40}$ .

**(D)**  $\frac{1}{10}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = A_6^4 = 360$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “Số được chọn có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ”.

Chọn hai chữ số chẵn:  $C_3^2$  cách.

Chọn hai chữ số lẻ:  $C_3^2$  cách.

Sắp xếp 4 chữ số được chọn thành một số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt:  $4!$  cách.

Suy ra  $n(A) = C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 4! = 216$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{216}{360} = \frac{3}{5}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Gọi  $B$  là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập  $A$ . Chọn thứ tự 2 số thuộc tập  $B$ . Tính xác suất để trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

**(A)**  $\frac{159}{360}$ .

**(B)**  $\frac{160}{359}$ .

**(C)**  $\frac{80}{359}$ .

**(D)**  $\frac{161}{360}$ .

**Lời giải.**

Có tất cả  $A_6^4 = 360$  số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập  $A$ .

Tập hợp  $B$  có 360 số.

Ta xét phép thử “chọn thứ tự 2 số thuộc tập  $B$ ”.

Khi đó  $n(\Omega) = A_{360}^2$ .

Trong tập hợp  $B$  ta thấy

- Có tất cả  $4 \cdot A_5^3 = 240$  số có mặt chữ số 3.
- Có  $A_5^4 = 120$  số không có mặt chữ số 3.

Gọi  $A$  là biến cố “trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3”.

Khi đó  $n(A) = C_{240}^1 \cdot C_{120}^1 \cdot 2!$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{C_{240}^1 \cdot C_{120}^1 \cdot 2!}{A_{360}^2} = \frac{160}{359}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 14.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên từ  $S$  một số. Tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 6.

- (A)**  $\frac{8}{15}$ .                      **(B)**  $\frac{2}{15}$ .                      **(C)**  $\frac{4}{15}$ .                      **(D)**  $\frac{7}{15}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $n(S) = A_5^3 = 60$ .

Gọi số chia hết cho 6 là  $\overline{abc}$ .

Để chia hết cho 6 thì  $\begin{cases} c:2 \\ a+b+c:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in \{2, 4\} \\ a+b+c \in \{6, 9, 12\} \end{cases}$ .

• Nếu  $c = 2$  thì  $\begin{cases} a+b=4 \\ a+b=7 \\ a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \{1, 3\} \\ a, b \in \{3, 4\} \\ a, b \in \emptyset \end{cases}$  nên có 4 số thỏa mãn.

• Nếu  $c = 4$  thì  $\begin{cases} a+b=2 \\ a+b=5 \\ a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \emptyset \\ a, b \in \{3, 2\} \\ a, b \in \{3, 5\} \end{cases}$  nên có 4 số thỏa mãn.

Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn là số chia hết cho 6”, suy ra  $n(A) = 4 + 4 = 8$ .

Vậy  $P(A) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 15.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên từ  $S$  một phần tử. Xác suất để số được chọn chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị bằng 1 là

- (A)**  $\frac{157}{11250}$ .                      **(B)**  $\frac{643}{45000}$ .                      **(C)**  $\frac{1357}{52133}$ .                      **(D)**  $\frac{11}{23576}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của tập hợp  $S$  là  $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4$ .

Gọi  $a = 7 * \overline{A3}$  là số được chọn ra từ tập hợp  $S$  thỏa mãn đề bài (vì  $a$  có hàng đơn vị bằng 1).

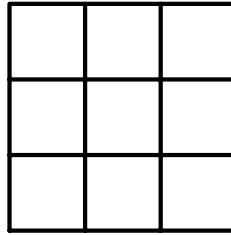
Vì  $a$  có 5 chữ số nên

$$10000 \leq a \leq 99999 \Leftrightarrow 10000 \leq 7 \cdot \overline{A3} \leq 99999 \Leftrightarrow 1429 \leq 10A + 3 \leq 14285 \Leftrightarrow 143 \leq A \leq 1428.$$

Suy ra có  $1428 - 143 + 1 = 1286$  số có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị bằng 1. Vậy xác suất cần tính là  $\frac{1286}{90000} = \frac{643}{45000}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Cho một bảng ô vuông  $3 \times 3$ .



Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi  $A$  là biến cố: “Mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ”. Xác suất của biến cố  $A$  bằng

**(A)**  $P(A) = \frac{10}{21}$ .     
**(B)**  $P(A) = \frac{1}{3}$ .     
**(C)**  $P(A) = \frac{5}{7}$ .     
**(D)**  $P(A) = \frac{1}{56}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 9! = 362880$ .

Xét biến cố đối  $\bar{A}$ ; “Tồn tại một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn”.

Để biến cố  $\bar{A}$  xảy ra ta lần lượt thực hiện các bước sau

- Bước 1: chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn.  
Bước này có 6 cách.
- Bước 2: chọn ba số chẵn trong các số 2, 4, 6, 8 và xếp vào hàng hoặc cột này.  
Bước này có  $A_4^3$  cách.
- Bước 3: xếp 6 số còn lại vào 6 ô còn lại. Bước này có  $6!$  cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố  $\bar{A}$  là  $n(\bar{A}) = 6 \cdot A_4^3 \cdot 6! = 103680$ .

Vậy xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{5}{7}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 17.** Cho tập hợp  $X$  gồm các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau có dạng  $\overline{abcdef}$ . Từ  $X$  lấy ngẫu nhiên một số. Xác suất để số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn  $a < b < c < d < e < f$  là

**(A)**  $\frac{33}{68040}$ .     
**(B)**  $\frac{1}{2430}$ .     
**(C)**  $\frac{31}{68040}$ .     
**(D)**  $\frac{29}{68040}$ .

**Lời giải.**

Chọn  $a$  có 9 cách.

Chọn các chữ số còn lại có  $A_9^5$  cách.

Suy ra có  $9 \cdot A_9^5 = 136080 \Rightarrow n(X) = 136080 \Rightarrow n(\Omega) = 136080$ .

Gọi  $A$  là biến cố số lấy ra từ  $X$  là số lẻ và thỏa mãn  $a < b < c < d < e < f$ .

Ta thấy  $f \in \{7; 9\}$ .

Trường hợp 1:  $f = 7$ .

Xét dãy gồm 6 ký tự  $\overline{abcde7}$  thỏa mãn  $a < b < c < d < e < 7$  (\*).

Chọn 5 chữ số từ  $X$  và nhỏ hơn 7 có  $C_7^5$ .

Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (\*).



Suy ra có  $C_7^5$  dãy thỏa mãn (\*).

Xét dãy gồm 6 ký tự  $\overline{0bcde7}$  thỏa mãn  $0 < b < c < d < e < 7$  (\*\*).

Chọn 4 chữ số từ  $X$  lớn hơn 0 và nhỏ hơn 7 có  $C_6^4$ .

Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (\*\*).

Suy ra có  $C_6^4$  dãy thỏa mãn (\*\*).

Do đó có  $C_7^5 - C_6^4 = 6$  dãy gồm 6 ký tự  $\overline{abcde7}$  thỏa mãn  $a < b < c < d < e < 7; a \neq 0$ .

Hay có 6 số.

Trường hợp 2:  $f = 9$ .

Xét dãy gồm 6 ký tự  $\overline{abcde9}$  thỏa mãn  $a < b < c < d < e < 9$  (1).

Chọn 5 chữ số từ  $X$  và nhỏ hơn 9 có  $C_9^5$ .

Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (1).

Suy ra có  $C_9^5$  dãy thỏa mãn (1).

Xét dãy gồm 6 ký tự  $\overline{0bcde9}$  thỏa mãn  $0 < b < c < d < e < 9$  (2).

Chọn 4 chữ số từ  $X$  lớn hơn 0 và nhỏ hơn 9 có  $C_8^4$ .

Khi đó mỗi cách chọn có duy nhất 1 cách xếp thỏa (2).

Suy ra có  $C_8^4$  dãy thỏa mãn (2).

Do đó có  $C_9^5 - C_8^4 = 56$  dãy gồm 6 ký tự  $\overline{abcde9}$  thỏa mãn  $a < b < c < d < e < 9, a \neq 0$ .

Hay có 56 số.

Suy ra  $n(A) = 6 + 56 = 62$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{62}{136080} = \frac{31}{68040}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 18.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên từ tập  $S$  một phần tử. Xác suất để số chọn được chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1 là

**(A)**  $\frac{157}{11250}$ .

**(B)**  $\frac{643}{45000}$ .

**(C)**  $\frac{1357}{52133}$ .

**(D)**  $\frac{11}{23576}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(S) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ .

Cách 1.

Nhận thấy số cần tìm phải có dạng  $7 \cdot \overline{A3}$  (để chữ số tận cùng là 1).

Do số cần tìm là số tự nhiên có 5 chữ số nên ta có

$$10000 \leq 7 \cdot \overline{A3} \leq 99999 \Leftrightarrow 1429 \leq 10A + 3 \leq 14285 \Leftrightarrow 143 \leq A \leq 1428.$$

Suy ra có  $1428 - 143 + 1 = 1286$  số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là  $\overline{abcd1}$ .

Ta có  $\overline{abcd1} = 10 \cdot \overline{abcd} + 1 = 3 \cdot \overline{abcd} + 7 \cdot \overline{abcd} + 1$  chia hết cho 7 khi và chỉ khi  $3 \cdot \overline{abcd} + 1$  chia hết cho 7.

Với  $k \in \mathbb{N}^*$ , đặt  $3 \cdot \overline{abcd} + 1 = 7k \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2k + \frac{k-1}{3}$  là số tự nhiên  $\Leftrightarrow k = 3l + 1$  với  $l \in \mathbb{N}^*$ .

Khi đó ta được  $\overline{abcd} = 2(3l + 1) + \frac{3l + 1 - 1}{3} = 7l + 2$ .



Do  $\overline{abcd}$  là số tự nhiên có 4 chữ số nên ta có

$$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq 7l + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq l \leq \frac{9997}{7}.$$

Do  $l \in \mathbb{N}^*$  nên ta có  $l \in \{143; 144; 145; \dots; 1426; 1427; 1428\}$ .

Suy ra có  $1428 - 143 + 1 = 1286$  giá trị khác nhau của  $l$ .

Do đó có 1286 số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1.

Cách 3.

Số tự nhiên nhỏ nhất có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1 là  $u_1 = 10031$ .

Ta thấy số tự nhiên tiếp theo gần nhất cũng thỏa mãn điều kiện trên là  $u_1 + 70 = 10101$ .

Số tự nhiên lớn nhất có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1 là  $u_n = 99981$ .

Suy ra có  $\frac{99981 - 10031}{70} + 1 = 1286$  số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và có số hàng đơn vị là 1.

Vậy xác suất cần tìm là  $\frac{1286}{90000} = \frac{643}{45000}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 19.** Từ các số  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  lập số có 9 chữ số chia hết cho 15 sao cho có đúng hai số lặp lại. Có tất cả bao nhiêu số?

**(A)** 362880.

**(B)** 70560.

**(C)** 60480.

**(D)** 40320.

**Lời giải.**

Số chia hết cho 15 vậy chia hết cho 3 và chia hết cho 5.

Do đó số tận cùng là 5.

Mà  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$  chia 3 dư 1 vậy hai số lặp lại có tổng chia cho 3 dư 1.

Vậy hai số lặp lại là  $\{1; 3\}; \{1; 6\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 7\}; \{4; 6\}$ .

Trường hợp số 2; 5 lặp lại có  $\frac{8!}{2!} = 20160$  số.

Các trường hợp còn lại có  $5 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 50400$  số.

Vậy có  $20160 + 50400 = 70560$  số.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 20.** Có 30 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn. Trong đó có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

**(A)**  $\frac{99}{667}$ .

**(B)**  $\frac{568}{667}$ .

**(C)**  $\frac{33}{667}$ .

**(D)**  $\frac{634}{667}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{30}^{10}$ .

Chia 30 tấm thẻ thành 3 nhóm

Nhóm 1: Các thẻ mang số lẻ có 15 thẻ.

Nhóm 2: Các thẻ mang số chẵn và chia hết cho 10 có 3 thẻ.

Nhóm 3: Các thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 10 có 12 thẻ.

• Chọn 5 thẻ trong nhóm 1 có  $C_{15}^5$  cách.

• Chọn 1 thẻ trong nhóm 2 có  $C_3^1$  cách.

- Chọn 4 thẻ trong nhóm 3 có  $C_{12}^4$  cách.

Số cách chọn ra 10 thẻ trong đó có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn và có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 là  $C_{15}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $\frac{C_{30}^{10}}{C_{15}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4} = \frac{99}{667}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 21.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

**A**  $\frac{40}{81}$ .

**B**  $\frac{5}{9}$ .

**C**  $\frac{35}{81}$ .

**D**  $\frac{5}{54}$ .

**Lời giải.**

Tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau  $S = A_{10}^3 - A_9^2 = 648$ .

Không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{648}^1 = 648$ .

Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có tổng các chữ số là lẻ”.

Trường hợp 1: 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn là  $3! \cdot C_5^1 \cdot C_5^2 - 1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 2! = 260$ .

Trường hợp 2: 3 chữ số lẻ.

Số cách chọn là  $A_5^3 = 60$ .

Vậy  $n(A) = 280 + 60 = 320 \Rightarrow P(A) = \frac{320}{648} = \frac{40}{81}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 22.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ tập hợp  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 6.

**A**  $\frac{1}{3}$ .

**B**  $\frac{5}{6}$ .

**C**  $\frac{1}{6}$ .

**D**  $\frac{4}{9}$ .

**Lời giải.**

Số các số có các số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ tập hợp  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  là  $6^5$  số.

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 6^5$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “Số được chọn chia hết cho 6”.

Gọi  $x = \overline{abcde}$  là số chia hết cho 6.

Ta có  $e \in \{2; 4; 6\}$  và  $(a + b + c + d + e) : 3$ .

$e$  có 3 cách  $d$  có 6 cách  $c$  có 6 cách  $b$  có 6 cách.

Ứng với mỗi cách chọn trên của  $d, b, c, e$  ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1:  $(b + c + d + e) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow$  có 2 cách chọn  $a$ .
- Trường hợp 2:  $(b + c + d + e)$  chia 3 dư 1  $\Rightarrow a$  chia 3 dư 2  $\Rightarrow$  có 2 cách chọn  $a$ .
- Trường hợp 3:  $(b + c + d + e)$  chia 3 dư 2  $\Rightarrow a$  chia 3 dư 1  $\Rightarrow$  có 2 cách chọn  $a$ .

Như vậy cả 3 trường hợp đều có chung kết quả là ứng với ứng với mỗi cách chọn trên của  $d, b, c, e$  cho ta 2 cách chọn  $a$ .

$n(A) = 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1296$ .

$P(A) = \frac{1296}{6^5} = \frac{1}{6}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 23.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất sao cho số lấy được chia hết cho 15.

**(A)**  $\frac{1}{27}$ .

**(B)**  $\frac{9}{112}$ .

**(C)**  $\frac{1}{6}$ .

**(D)**  $\frac{8}{9}$ .

**Lời giải.**

Số các số có các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là  $9^4$  số.

Lực lượng của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 9^4$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Số được chọn chia hết cho 15”.

Gọi số có 4 chữ số và chia hết cho 15 có dạng  $\overline{abcd}$ .

Vì  $\overline{abcd}:15$  nên  $d = 5$  và  $a + b + c + d$  chia hết cho 3.

Suy ra  $a + b + c$  chia cho 3 dư 1. Các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chia thành 3 nhóm

- $A = \{1, 4, 7\}$  gồm các chữ số chia 3 dư 1.
- $B = \{2, 5, 8\}$  gồm các chữ số chia 3 dư 2.
- $C = \{3, 6, 9\}$  gồm các chữ số chia hết cho 3.

$a$  có 9 cách chọn, mỗi cách chọn  $a$  có 9 cách chọn  $b$ , mỗi cách chọn  $a, b$  có 3 cách chọn  $c$  (thuộc  $A = \{1, 4, 7\}$  hoặc thuộc  $B = \{2, 5, 8\}$  hoặc thuộc  $C = \{3, 6, 9\}$ ) để  $a + b + c$  chia 3 dư 1.

Vậy số các số chia hết cho 15 là  $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$  số, suy ra  $n(A) = 243$ .

$$P(A) = \frac{243}{9^4} = \frac{1}{27}.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 24.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số  $\overline{abc}$  từ  $S$ . Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn  $a \leq b \leq c$ .

**(A)**  $\frac{1}{6}$ .

**(B)**  $\frac{11}{60}$ .

**(C)**  $\frac{13}{60}$ .

**(D)**  $\frac{9}{11}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 9 \cdot 10^2 = 900$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Chọn được một số thỏa mãn  $a \leq b \leq c$ ”.

Vì  $a \leq b \leq c$  mà  $a \neq 0$  nên trong các chữ số sẽ không có số 0.

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số giống nhau có 9 số.

Trường hợp 2: Số được chọn tạo bởi hai chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 2 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là  $C_9^2$ .

Mỗi bộ 2 chữ số được chọn tạo ra 2 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có  $2 \cdot C_9^2$  số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Số được chọn tạo bởi ba chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 3 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là  $C_9^3$ .

Mỗi bộ 3 chữ số được chọn chỉ tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có  $C_9^3$  số thỏa mãn.

Vậy  $n(A) = 9 + 2 \cdot C_9^2 + C_9^3 = 165$ .

Xác suất của biến cố A là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 25.** Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

**(A)**  $\frac{11}{171}$ .

**(B)**  $\frac{1}{12}$ .

**(C)**  $\frac{9}{89}$ .

**(D)**  $\frac{409}{1225}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử không gian mẫu  $|\Omega| = C_{50}^3 = 19600$ .

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho  $1 \leq a \leq 50$  và a chia hết cho 3  $\Rightarrow A = \{3; 6; \dots; 48\} \Rightarrow |A| = 16$ .

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho  $1 \leq b \leq 50$  và b chia 3 dư 1  $\Rightarrow B = \{1; 4; \dots; 49\} \Rightarrow |B| = 17$ .

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho  $1 \leq c \leq 50$  và c chia 3 dư 2  $\Rightarrow C = \{2; 5; \dots; 59\} \Rightarrow |C| = 17$ .

Với D là biến cố: “Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3”.

Ta có 4 trường hợp xảy ra

- Trường hợp 1: Rút 3 thẻ từ A: Có  $C_{16}^3$  (cách).
- Trường hợp 2: Rút 3 thẻ từ B: Có  $C_{17}^3$  (cách).
- Trường hợp 3: Rút 3 thẻ từ C: Có  $C_{17}^3$  (cách).
- Trường hợp 4: Rút mỗi tập 1 thẻ: Có  $16 \cdot 17 \cdot 17 = 4624$  (cách).

Suy ra  $|D| = 2 \cdot C_{17}^3 + C_{16}^3 + 4624 = 6544$ .

Vậy xác suất cần tìm  $P = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 26.** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

**(A)**  $\frac{10}{21}$ .

**(B)**  $\frac{5}{9}$ .

**(C)**  $\frac{20}{81}$ .

**(D)**  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có không gian mẫu  $n(\Omega) = A_9^3 = 504$  số.

Gọi biến cố A: “Số được chọn có tổng các chữ số là lẻ”.

Trường hợp 1: Số được chọn bao gồm 3 chữ số lẻ có  $A_5^3 = 60$  số.

Trường hợp 2: Số được chọn bao gồm 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn có  $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot 3! = 180$ .

Vậy xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60 + 180}{504} = \frac{10}{21}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 27.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn chia hết cho 3 bằng

- Ⓐ  $\frac{20}{81}$ .      Ⓑ  $\frac{5}{9}$ .      Ⓒ  $\frac{1}{2}$ .      Ⓓ  $\frac{16}{81}$ .

**Lời giải.**

Ta có không gian mẫu  $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  số.

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn chia hết cho 3”.

Chia các chữ số thành 3 tập con  $S_1 = \{3, 6\}$ ,  $S_2 = \{1, 4, 7\}$ ,  $S_3 = \{2, 5, 8\}$  và  $\{0\}$ .

Ta có 5 trường hợp xảy ra

- Trường hợp 1: Chọn 2 phần tử thuộc  $S_1$  và  $\{0\}$  có 4 số.
- Trường hợp 2: Chọn 1 phần tử thuộc  $S_2$ , 1 phần tử thuộc  $S_3$  và  $\{0\}$  có  $3 \cdot 3 \cdot 2! \cdot 2 = 36$  số.
- Trường hợp 3: Chọn 1 phần tử thuộc  $S_1$ , 1 phần tử thuộc  $S_2$  và 1 phần tử thuộc  $S_3$  có  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3! = 108$  số.
- Trường hợp 4: Chọn 3 phần tử thuộc  $S_2$  có  $3! = 6$  số.
- Trường hợp 5: Chọn 3 phần tử thuộc  $S_3$  có  $3! = 6$  số.

Do đó  $n(A) = 4 + 36 + 108 + 6 + 6 = 160$  số.

Xác suất để số được chọn chia hết cho ba bằng  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{160}{648} = \frac{20}{81}$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 28.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1 bằng

- Ⓐ  $\frac{41}{81}$ .      Ⓑ  $\frac{25}{81}$ .      Ⓒ  $\frac{10}{27}$ .      Ⓓ  $\frac{25}{1944}$ .

**Lời giải.**

Ta có không gian mẫu  $n(\Omega) = 9A_9^5 = 136080$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có mặt chữ số 0 và 1”.

Số cần tìm có dạng là  $\overline{abcdef} (a \neq 0)$ .

Trường hợp 1:  $a = 1$ .

Khi đó số 0 có 5 cách chọn vị trí.

Các chữ số còn lại có  $A_8^4$  cách.

Vậy có  $5 \cdot A_8^4 = 8400$  số.

Trường hợp 2:  $a \neq 1$ .

Khi đó số 1 có 5 cách chọn vị trí.

Số 0 có 4 cách chọn vị trí.

Các chữ số còn lại có  $A_8^4$  cách.

Vậy có  $5 \cdot 4 \cdot A_8^4 = 33600$ .

Do đó  $n(A) = 8400 + 33600 = 42000$ .

Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1 là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{42000}{136080} = \frac{25}{81}$ .

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 29.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có mặt bằng chữ số 2, 3 và 4 là

- Ⓐ  $\frac{1}{648}$ .      Ⓑ  $\frac{4}{9}$ .      Ⓒ  $\frac{1}{2}$ .      Ⓓ  $\frac{23}{378}$ .

**Lời giải.**

Ta có không gian mẫu  $n(\Omega) = 9A_9^4 = 27216$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có mặt chữ số 2, 3 và 4”.

Gọi số cần tìm là  $\overline{abcde} (a \neq 0)$ .

Vì số cần tìm phải có mặt đủ ba chữ số 2, 3, và 4 nên

Trường hợp 1:  $a = 2$ .

Các chữ số 3; 4 có  $A_4^2 = 12$  cách chọn vị trí.

Hai chữ số còn lại có  $A_7^2 = 42$  cách. Vậy có  $12 \cdot 42 = 504$  số.

Trường hợp 2:  $a = 3$ . Tương tự trường hợp 1 ta có 504 số.

Trường hợp 3:  $a = 4$ . Tương tự trường hợp 1 ta có 504 số.

Trường hợp 4:  $a \neq 2; 3; 4; 0$  có 6 cách chọn  $a$ .

Các chữ số 2; 3; 4 có  $A_4^3 = 24$  cách chọn vị trí.

Một chữ số còn lại có 6 cách.

Vậy có  $6 \cdot 24 = 144$  số.

Do đó  $n(A) = 504 \cdot 3 + 144 = 1656$ .

Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 2, 3 và 4 là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1656}{27216} = \frac{23}{378}$ .

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 30.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn trong đó có mặt 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

- Ⓐ  $\frac{250}{567}$ .      Ⓑ  $\frac{1}{3}$ .      Ⓒ  $\frac{1}{2}$ .      Ⓓ  $\frac{230}{567}$ .

**Lời giải.**

Ta có không gian mẫu  $n(\Omega) = 9A_9^4 = 27216$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có mặt 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ”.

Gọi  $x = \overline{abcde}$  là số cần lập.

Trường hợp 1: Có chữ số 0.

Chọn chỗ cho chữ số 0 có 4 cách.

Chọn một chữ số chẵn có 4 cách.

Xếp chữ số chẵn đó có 4 cách.

Chọn 3 chữ số lẻ xếp vào 3 chỗ còn lại có  $A_5^3 = 60$  cách.

Suy ra số cách chọn trong trường hợp này là  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 60 = 3840$  cách.

Trường hợp 2: Không có chữ số 0.

Chọn 2 chữ số chẵn có  $C_4^2$  cách.

Chọn 3 chữ số lẻ có  $C_5^3$  cách.

Xếp 5 chữ số đó có  $5!$  cách  $\Rightarrow C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 5! = 7200$  số.

Do đó  $n(A) = 3840 + 7200 = 11040$ .

Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 2, 3 và 4 là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11040}{27216} = \frac{230}{567}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 31.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có bảy chữ số. Xác suất để số được chọn số có các chữ số cách đều chữ số chính giữa thì giống nhau.

- (A)**  $\frac{1}{120}$ . **(B)**  $\frac{1}{1000}$ . **(C)**  $\frac{1}{100}$ . **(D)**  $\frac{63}{125000}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 9 \cdot 10^6 = 9000000$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có các chữ số cách đều chữ số chính giữa thì giống nhau”.

Gọi  $x = \overline{abcdcba}$  là số cần lập.

Vị trí  $a$  có 9 cách.

Các vị trí  $b, c, d$  mỗi vị trí có 10 cách.

Do đó  $n(A) = 9 \cdot 10^3 = 9000$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9000}{9000000} = \frac{1}{1000}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 32.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

- (A)**  $\frac{11}{21}$ . **(B)**  $\frac{101}{126}$ . **(C)**  $\frac{101}{216}$ . **(D)**  $\frac{25}{126}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử không gian mẫu  $n(\Omega) = A_9^4 = 3024$  số.

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có tổng các chữ số là chẵn”.

Trường hợp 1: Số được chọn bao gồm 4 chữ số chẵn có  $4! = 24$  số.

Trường hợp 2: Số được chọn bao gồm 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn có  $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 2880$  số.

Trường hợp 3: Số được chọn bao gồm 4 chữ số lẻ có  $A_5^4 = 120$  số.

Do đó  $n(A) = 24 + 2880 + 120 = 3024$  số.

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3024}{3024} = \frac{101}{126}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 33.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 9 bằng

- (A)**  $\frac{250}{567}$ . **(B)**  $\frac{1}{3}$ . **(C)**  $\frac{1}{2}$ . **(D)**  $\frac{49}{81}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 9A_9^7 = 1632960$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có mặt chữ số 0 và 9”.

Gọi  $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$  là số cần lập.

Số 0 có 7 cách chọn vị trí.

Số 9 có 7 cách chọn vị trí.

Chọn 6 số trong 8 số còn lại sắp vào 6 vị trí còn trống có  $A_8^6 = 20160$  cách.



Do đó  $n(A) = 7 \cdot 7 \cdot 20160 = 987840$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{987840}{1632960} = \frac{49}{81}.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 34.** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn chia hết cho 5 bằng

**A**  $\frac{17}{81}$ .

**B**  $\frac{17}{18}$ .

**C**  $\frac{2}{9}$ .

**D**  $\frac{49}{81}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 9A_9^7 = 1632960$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn chia hết cho 5”.

Gọi  $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$  là số cần lập.

Trường hợp 1:  $a_8 = 0$ .

Chọn 7 chữ số trong 9 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí trống có  $A_9^7 = 181440$  cách.

Suy ra số cách chọn trong trường hợp này là 181440 cách.

Trường hợp 2:  $a_8 = 5$ .

$a_1$  có 8 cách Chọn 6 chữ số trong 8 chữ số còn lại xếp vào 6 vị trí trống có  $A_8^6 = 20160$  cách.

Suy ra số cách chọn trong trường hợp này là  $8 \times 20160 = 161280$  cách.

Do đó  $n(A) = 181440 + 161280 = 342720$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{342720}{1632960} = \frac{17}{81}.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 35.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ tập  $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 154350.

**A**  $\frac{7}{15625}$ .

**B**  $\frac{1}{972}$ .

**C**  $\frac{7}{375000}$ .

**D**  $\frac{2}{81}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 9 \times 10^7$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có tích các chữ số bằng 154350”.

Ta có  $154350 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3$ .

Do đó  $n(A) = C_8^1 \times C_7^2 \times C_5^2 \times C_3^3 = 1680$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1680}{9 \times 10^7} = \frac{7}{375000}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 36.** Gọi  $A$  là tập các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Từ  $A$  chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn có chữ số 2 và 6 không đứng cạnh nhau.

**A**  $\frac{5}{18}$ .

**B**  $\frac{13}{21}$ .

**C**  $\frac{13}{18}$ .

**D**  $\frac{8}{21}$ .

**Lời giải.**

Ta có số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = 6 \cdot 6! = 4320$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có chữ số 2 và 6 không đứng cạnh nhau”.



Gọi biến cố  $B$ : “Số được chọn có chữ số 2 và 6 đứng cạnh nhau”.

Gọi số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 2 và 6 đứng cạnh nhau là  $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ .

Ta xem cặp (2; 6) là phần tử kép, khi đó chỉ có 6 phần tử 0, 1, (2; 6), 3, 4, 5.

Số các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 2 và 6 đứng cạnh nhau (kể cả số 0 đứng đầu) là  $2 \cdot 6! = 1440$  số.

Số các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 2 và 6 đứng cạnh nhau (có số 0 đứng đầu) là  $2 \cdot 5! = 240$  số.

Suy ra  $n(B) = 1440 - 240 = 1200$ .

Do đó:  $n(A) = 4320 - n(B) = 4320 - 1200 = 3120$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3120}{4320} = \frac{13}{18}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 37.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Tính xác suất để số được chọn có tổng 3 chữ số bằng 10.

**(A)**  $\frac{9}{10}$ .

**(B)**  $\frac{3}{40}$ .

**(C)**  $\frac{9}{20}$ .

**(D)**  $\frac{3}{20}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = A_6^3 = 120$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn có tổng 3 chữ số bằng 10”.

Ta có  $1 + 3 + 6 = 10$ ;  $1 + 4 + 5 = 10$ ;  $2 + 3 + 5 = 10 \Rightarrow n(A) = 3! + 3! + 3! = 18$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 38.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt được lấy từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để chọn được số chỉ chứa 3 số chẵn.

**(A)**  $\frac{10}{21}$ .

**(B)**  $\frac{11}{21}$ .

**(C)**  $\frac{9}{21}$ .

**(D)**  $\frac{13}{21}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Số được chọn chỉ chứa 3 số chẵn”.

Chọn 3 số chẵn trong 4 số chẵn có  $C_4^3 = 4$  cách.

Xếp 3 số chẵn vào 6 ô trống có  $A_6^3 = 120$  cách.

Lấy 3 số lẻ trong 5 số lẻ xếp vào 3 ô trống còn lại có  $A_5^3 = 60$  cách

$$\Rightarrow n(A) = 4 \times 120 \times 60 = 28800.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{28800}{60480} = \frac{10}{21}.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 39.** Cho 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ. Xác suất để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số lẻ là

**(A)**  $\frac{2}{3}$ .

**(B)**  $\frac{1}{2}$ .

**(C)**  $\frac{2}{5}$ .

**(D)**  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{100}^3 = 161700$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số lẻ”.

Trong 100 thẻ có 50 thẻ chứa số chẵn, 50 thẻ chứa số lẻ.

Trường hợp 1: 3 thẻ là số lẻ có  $C_{50}^3 = 19600$  cách.

Trường hợp 2: 1 thẻ là số lẻ, 2 thẻ là số chẵn có  $C_{50}^1 \times C_{50}^2 = 61250$

$$\Rightarrow n(A) = C_{50}^3 + C_{50}^1 C_{50}^2 = 80850.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{80850}{161700} = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 40.** Một túi đựng 10 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi đó. Xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 5 bằng

**(A)**  $\frac{1}{15}$ .

**(B)**  $\frac{1}{10}$ .

**(C)**  $\frac{1}{30}$ .

**(D)**  $\frac{1}{20}$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ .

Gọi biến cố  $A$ : “Chọn được 3 tấm thẻ có tổng là số chia hết cho 5”.

Trong các số từ 1 đến 10 có hai số chia hết cho 5, một số chia cho 5 dư 1, một số chia cho 5 dư 2, một số chia cho 5 dư 3, một số chia cho 5 dư 4.

Để tổng các số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 5 thì ta có các trường hợp sau:

TH1: Một số chia hết cho 5, một số chia cho 5 dư 1, một số chia cho 5 dư 4.

Có  $2 \times 1 \times 1 = 2$  cách.

TH2: Một số chia hết cho 5, một số chia cho 5 dư 2, một số chia cho 5 dư 3.

Có  $2 \times 1 \times 1 = 2$  cách  $\Rightarrow n(A) = 2 + 2 = 4$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Chọn phương án **C**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. C  | 3. A  | 4. B  | 5. A  | 6. C  | 7. D  | 8. A  | 9. C  | 10. A |
| 11. D | 12. B | 13. B | 14. B | 15. B | 16. C | 17. C | 18. B | 19. B | 20. A |
| 21. A | 22. C | 23. A | 24. B | 25. D | 26. A | 27. A | 28. B | 29. D | 30. D |
| 31. B | 32. B | 33. D | 34. A | 35. C | 36. C | 37. D | 38. A | 39. B | 40. C |

## DẠNG 37.

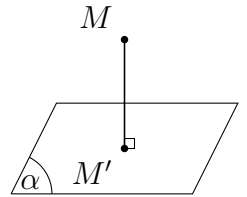
# KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng.

Khoảng cách giữa một điểm và một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng đó.

$d(M, (\alpha)) = MM'$  với  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$ .

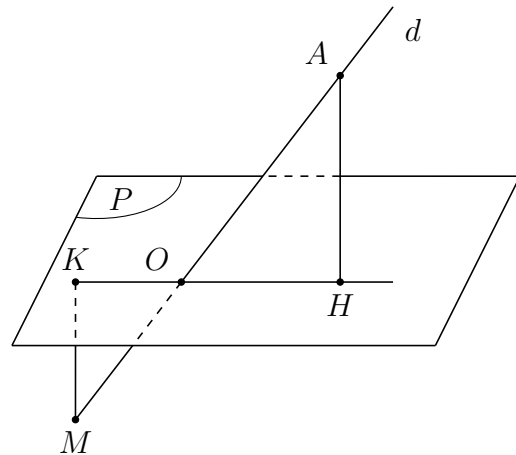
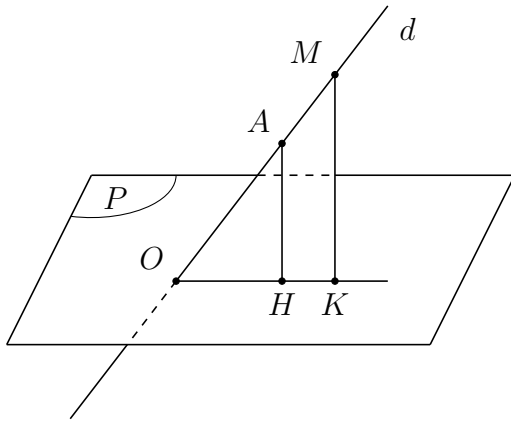


**1.1.** Khoảng cách từ điểm  $M$  bất kì đến mặt phẳng  $(\alpha)$  có chứa đường cao của hình chóp (lăng trụ...).

**Phương pháp:**

- Quy khoảng cách từ điểm  $M$  về điểm  $A$  thuộc đáy.
- Tìm giao tuyến của mặt phẳng đáy với  $(\alpha)$ .
- Từ  $A$  dựng  $AH$  vuông góc với giao tuyến tại  $H$ . Khi đó  $AH = d(A; (\alpha))$ .

**Công thức tính tỉ lệ khoảng cách:**  $\frac{d(M, (P))}{d(A, (P))} = \frac{MO}{AO}$ .



**1.2.** Khoảng cách từ hình chiếu vuông góc  $A$  của đỉnh  $S$  đến mặt phẳng bên  $(\alpha)$ .

**Phương pháp:**

- Tìm giao tuyến của  $(\alpha)$  với mặt phẳng đáy.
- Từ  $A$  dựng  $AH$  vuông góc với giao tuyến tại  $H$ .
- Nối  $SH$ , dựng  $AK$  vuông góc  $SH$  tại  $K$ . Khi đó  $AK = d(A; (\alpha))$ .

**1.3.** Khoảng cách từ điểm bất kì đến mặt phẳng bên.

Phương pháp: Quy khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng bên về khoảng cách từ điểm là hình chiếu của đỉnh  $S$  đến mặt phẳng bên.

**2. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song.**

Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này tới mặt phẳng kia.

**3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.**

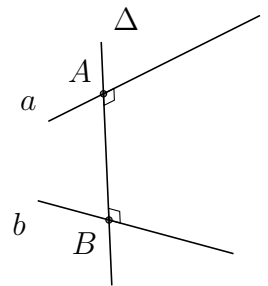
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.

**4. Khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau.**

**4.1.**

Khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

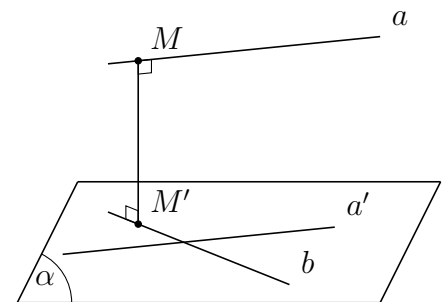
$$\begin{cases} \Delta \perp a, \Delta \perp b \\ \Delta \cap a = A, \Delta \cap b = B \end{cases} \Rightarrow d(a, b) = AB.$$



**4.2.** Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

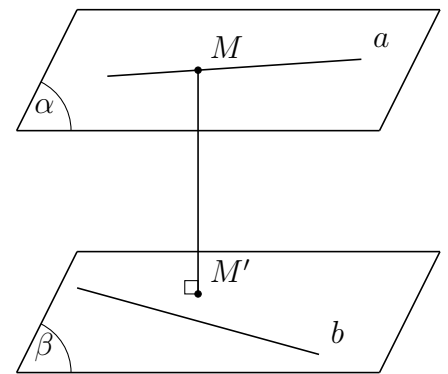
**Cách 1:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

$$d(a, b) = d(a, (\alpha)). \text{ Với } \begin{cases} (\alpha) \supset b \\ a \parallel (\alpha) \end{cases}.$$



**Cách 2:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

$$d(a, b) = d((\alpha), (\beta)). \text{ Với } \begin{cases} (\alpha) \supset a \\ (\beta) \supset b \\ (\alpha) \parallel (\beta) \end{cases}.$$



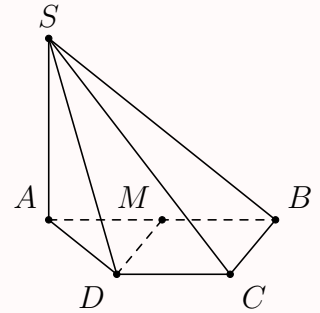
**Cách 3:** Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ .

**2 BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang,  $AB = 2a$ ,  $AD = DC = CB = a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = 3a$  (minh họa như hình bên). Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $DM$  bằng

- (A)  $\frac{3a}{4}$ . (B)  $\frac{3a}{2}$ . (C)  $\frac{3\sqrt{3}a}{13}$ . (D)  $\frac{3\sqrt{3}a}{13}$ .



**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
2. HƯỚNG GIẢI:
  - B1: Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $DM$  bằng khoảng cách từ đường thẳng  $DM$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .
  - B2: Tính khoảng cách từ  $DM$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  thông qua khoảng cách từ điểm  $A$  đến  $(SBC)$ .
  - B3: Tính và kết luận.

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau

Do  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên ta có

$$BM = AM = \frac{1}{2}AB = a = AD = BC = CD.$$

Vậy tứ giác  $ADCM$ ;  $BCDM$  là hình thoi.

$$\Rightarrow DM \parallel BC \Rightarrow DM \parallel (SBC)$$

$$\Rightarrow d(DM, SB) = d(DM, (SBC)) = d(M, (SBC)).$$

$$\text{Mặt khác } AM \cap (SBC) = B \Rightarrow \frac{d(M, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)). \quad (1)$$

Xét  $\triangle ABC$ , có đường trung tuyến  $CM = AD = \frac{1}{2}AB$ .

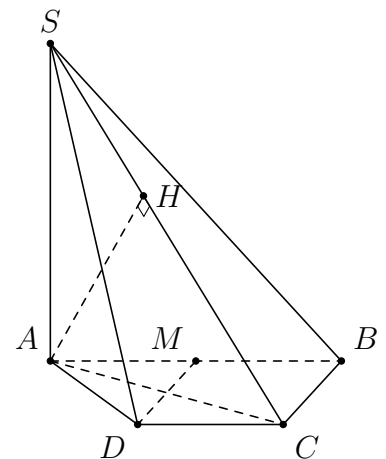
$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } C \Rightarrow AC \perp BC.$$

Trong tam giác vuông  $SAC$ , gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SC$ .

$$\text{Lại có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\text{Suy ra } AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC)).$$

$$\text{Xét tam giác vuông } ABC \text{ tại } C \text{ có } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a\sqrt{3}.$$



$\triangle SAC$  vuông tại  $A$  nên ta có  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2}$   
 $\Rightarrow AH = \frac{AS \cdot AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{3a \cdot \sqrt{3}a}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3a}{2}$ .  
 Từ (1)  $\Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{3a}{4}$ , vậy  $d(DM, SB) = d(M, (SBC)) = \frac{3a}{4}$ .

Chọn phương án **(A)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật có  $AB = 2a$ ;  $AD = 3a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên  $(ABCD)$  là  $H$  thuộc  $AB$  sao cho  $HB = 2HA$ . Tính khoảng cách từ  $D$  đến  $(SHC)$ .

- (A)  $\frac{9\sqrt{97}}{97}a$ . (B)  $\frac{2\sqrt{85}}{11}a$ . (C)  $\frac{a\sqrt{85}}{11}$ . (D)  $\frac{a\sqrt{97}}{97}$ .

**Lời giải.**

Dựng  $DK \perp HC$  tại  $K$ .

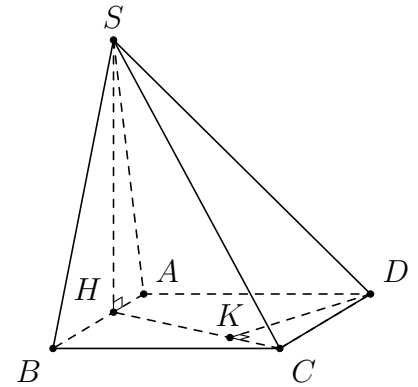
Ta có  $\begin{cases} DK \perp HC \\ DK \perp SH \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SHC) \Rightarrow DK = d(D; (SHC))$ .

$$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + (3a)^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}a.$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle HDC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}DK \cdot HC$$

$$\Rightarrow DK = \frac{S_{ABCD}}{HC} = \frac{6a^2}{\frac{\sqrt{97}a}{3}} = \frac{9\sqrt{97}}{97}a.$$

Chọn phương án **(A)**



**Câu 2.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ .  $\triangle SBC$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách  $d$  từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

- (A)  $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$ . (B)  $d = a$ . (C)  $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$ . (D)  $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ , suy ra  $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ .

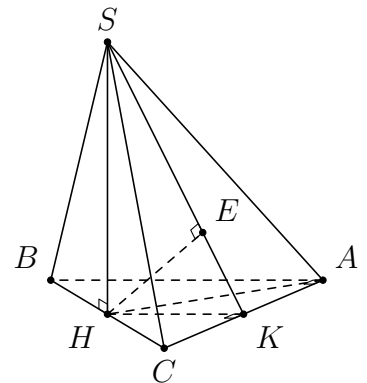
Gọi  $K$  là trung điểm  $AC$ , suy ra  $HK \perp AC$ .

Gọi  $E$  là hình chiếu của  $H$  lên  $SK$ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} d(B, (SAC)) &= 2d(H, (SAC)) = 2HE \\ &= 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)**



**Câu 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ .  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Tính khoảng cách giữa  $AD$  và  $SB$ ?

(A)  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

(B)  $\frac{a}{2}$ .

(C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

(D)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

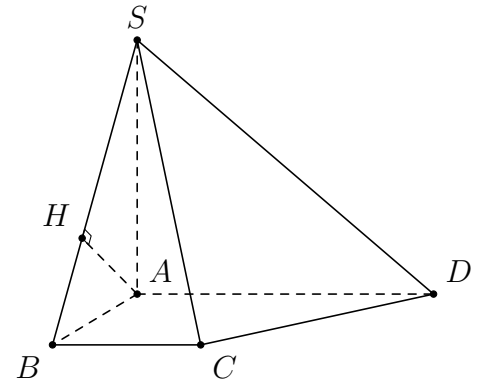
Trong  $(SAB)$ , dựng  $AH \perp SB$  tại  $H$ .

Vì  $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$  tại  $A$ .

Từ đó ta có  $d(AD, SB) = AH$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$  có

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn phương án (D)

**Câu 4.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'D$  và  $AB$  bằng bao nhiêu?

(A)  $a\sqrt{2}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

(C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

(D)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

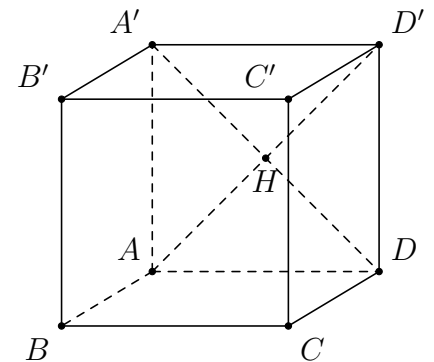
**Lời giải.**

Ta có  $\begin{cases} AB \perp AA' \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ADD'A')$ .

Gọi  $H$  là giao điểm của  $A'D$  với  $AD'$ , suy ra  $AH \perp A'D$ .

Khi đó  $\begin{cases} AH \perp A'D \text{ tại } H \\ AH \perp AB \text{ tại } A. \end{cases}$

$\Rightarrow d(AB; A'D) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật cạnh  $AD = 2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$  bằng

(A)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

(C)  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

(D)  $a\sqrt{6}$ .

**Lời giải.**

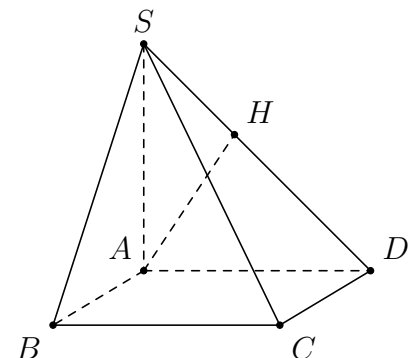
Trong  $\triangle SAD$  kẻ đường cao  $AH$  ta có

Khi đó  $\begin{cases} AH \perp SD \text{ tại } H \\ AH \perp AB \text{ tại } A. \end{cases}$

Nên  $AH$  chính là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $SD$ .

Có  $AD \cdot AS = AH \cdot SD \Rightarrow AH = \frac{AD \cdot AS}{SD} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

Vậy  $d(AB, SD) = AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .





Chọn phương án **C**

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông với đường chéo  $AC = 2a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $CD$  là

- (A)**  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ . **(B)**  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . **(C)**  $a\sqrt{2}$ . **(D)**  $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

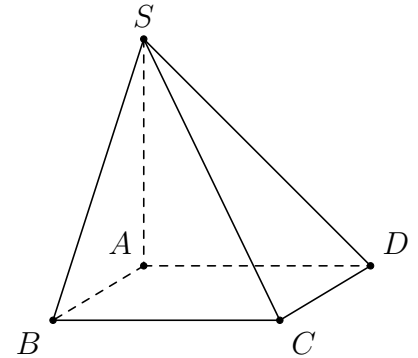
Ta có  $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$ .

Mặt khác  $\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow CD \parallel (SAB)$ .

Từ đó suy ra khoảng cách giữa  $SB$  và  $CD$  bằng khoảng cách giữa  $(SAB)$  và  $CD$  và bằng  $DA$ .

$ABCD$  là hình vuông với đường chéo  $AC = 2a$  suy ra  $DA = \sqrt{2}a$ .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $CD$  là  $a\sqrt{2}$ .



Chọn phương án **C**

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ .  $\triangle SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SD$  là

- (A)**  $a$ . **(B)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **(C)**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . **(D)**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$ ,  $H$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $SA$ .

Khi đó  $SM \perp AB$  mà  $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$ .

$\triangle SAB$  đều nên  $BH \perp SA$ .

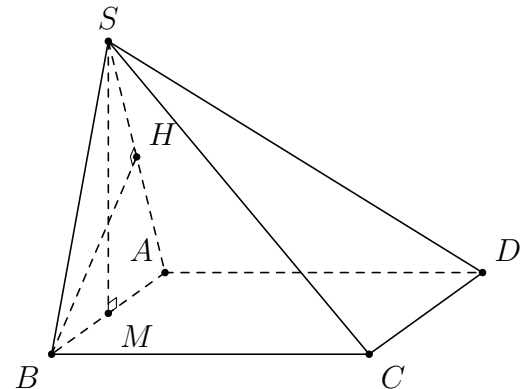
Mà  $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp BH$ .

Do đó  $BH \perp (SAD)$ .

Mặt khác ta có  $BC \parallel (SAD)$

$\Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BH$ .

Do đó  $d(BC, SD) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



Chọn phương án **B**

**Câu 8.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $2a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $AA'$  bằng

- (A)**  $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ . **(B)**  $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ . **(C)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **(D)**  $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

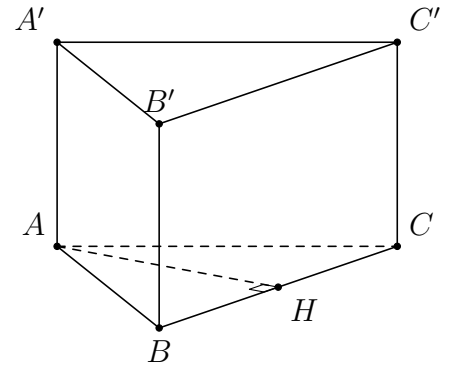
Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ , vì  $ABC$  là tam giác đều nên  $AH \perp BC$ .

Mặt khác  $AH \perp BB'$  (do  $BB' \perp (ABC)$ ).

Do đó  $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AH = a\sqrt{3}$ .

Ta có  $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$ .

$\Rightarrow d(AA', BC) = d(AA', (BCC'B')) = d(A, (BCC'B')) = AH = a\sqrt{3}$ .



Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $SA = 4a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SD$  bằng

**(A)**  $\frac{\sqrt{14}a}{2}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{7}a}{2}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{14}a}{4}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{7}a}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .

Ta có  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ .

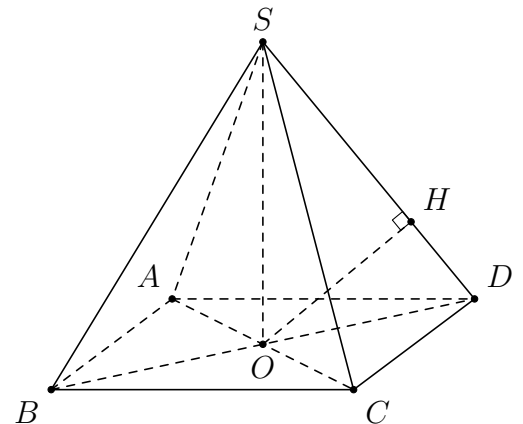
Kẻ  $OH \perp SD \Rightarrow \begin{cases} OH \perp SD \text{ tại } H \\ OH \perp AC \text{ tại } O. \end{cases}$

$\Rightarrow OH$  là đoạn vuông góc chung của  $AC$  và  $SD$ .

Ta có  $OD = a\sqrt{2}$ ,  $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = a\sqrt{14}$ .

$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

Vậy  $d(AC; SD) = OH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$  cạnh  $a$ ;  $SO = 2a$ .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SD$  bằng

**(A)**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**(B)**  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

**(C)**  $\frac{2a}{3}$ .

**(D)**  $\frac{4a}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .

Ta có  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ .

Kẻ  $OH \perp SD \Rightarrow \begin{cases} OH \perp SD \text{ tại } H \\ OH \perp AC \text{ tại } O. \end{cases}$

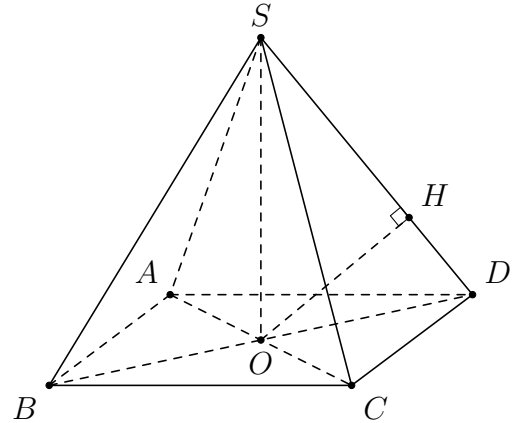
$\Rightarrow OH$  là đoạn vuông góc chung của  $AC$  và  $SD$ .

Ta có  $AB = a \Rightarrow BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = 2a$ .

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} \Rightarrow OH = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AC; SD) = \frac{2a}{3}.$$

Chọn phương án **C**



**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ .  $\triangle ABC$  đều, hình chiếu vuông góc  $H$  của đỉnh  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$  trùng với trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Đường thẳng  $SD$  hợp với mặt phẳng  $(ABCD)$  góc  $30^\circ$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  theo  $a$ .

**(A)**  $d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$ .

**(B)**  $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

**(C)**  $d = a$ .

**(D)**  $d = a\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } d(B, (SCD)) = \frac{BD}{HD} d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} d(H, (SCD)).$$

Trong  $(SHC)$ , kẻ  $HK \perp SC$ . (1)

Ta có  $\triangle ABC$  đều nên  $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$ .

Lại có  $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$ .

Suy ra  $CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp HK$  (2).

Từ (1), (2)  $\Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HK$ .

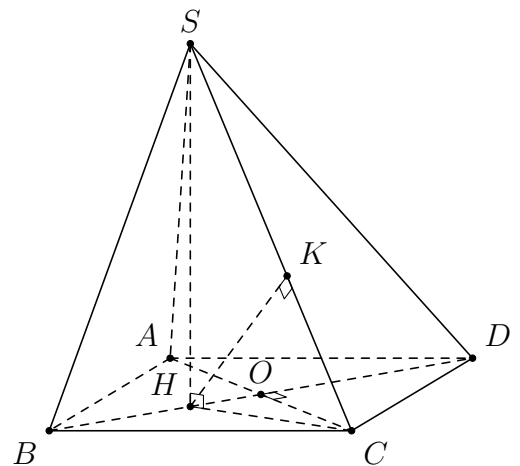
Ta có  $\widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{(SD, HD)} = \widehat{SDH} = 30^\circ$

$$\text{và } SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Tam giác vuông } SHC, \text{ có } HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn phương án **B**



**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA = a, SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình vuông. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, DC$ , góc giữa  $(SBM)$  và mặt đáy là  $45^\circ$ . Tính khoảng cách từ  $D$  đến mặt phẳng  $(SBM)$ ?

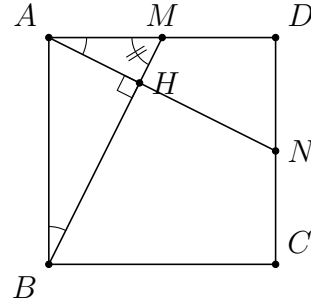
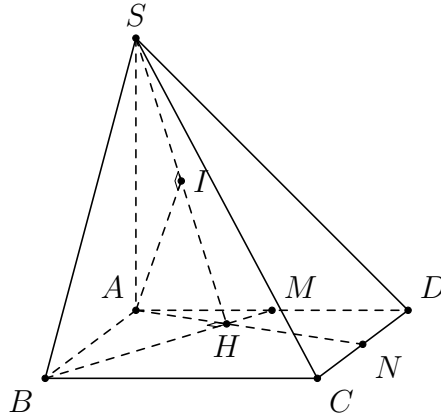
**(A)**  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

**(B)**  $a\sqrt{2}$ .

**(C)**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**



Ta có  $AM = DM \Rightarrow d(D, (SBM)) = d(A, (SBM))$ .

Gọi  $H$  là giao điểm của  $BM$  và  $AN$ .

Ta có  $\triangle ABM = \triangle DAN$  (c-g-c)  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ . Mà  $\widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ$ . Vậy  $BM \perp AN$ .

Khi đó  $\begin{cases} BM \perp AN \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAN) \Rightarrow BM \perp SH$ .

Trong  $(SAH)$ , gọi  $I$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SH$ .

Lại có  $BM \perp (SAN) \Rightarrow BM \perp AI$ . Suy ra  $AI \perp (SBM) \Rightarrow d(A, (SBM)) = AI$ .

Ta có  $\begin{cases} BM = (SBM) \cap (ABCD) \\ BM \perp SH \\ BM \perp AN \end{cases} \Rightarrow ((SBM), (ABCD)) = (SH, AN) = \widehat{SHA} = 45^\circ$ .

Suy ra  $\triangle SAH$  vuông cân tại  $A$  có  $SA = AH = a \Rightarrow SH = a\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Vậy  $d(D, (SBM)) = AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 13.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có  $AA'_1 = 2a, AD = 4a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A_1B_1$  và  $C_1M$  bằng bao nhiêu?

**(A)**  $3a$ .

**(B)**  $2a\sqrt{2}$ .

**(C)**  $a\sqrt{2}$ .

**(D)**  $2a$ .

**Lời giải.**

Ta có  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$  suy ra

$$d(A_1B_1, C_1M) = d(A_1B_1, (C_1D_1M)) = d(A_1, (C_1D_1M)).$$

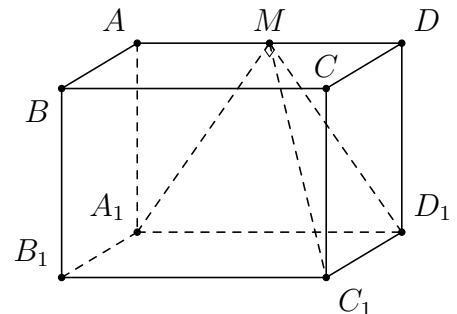
Vì  $AA'_1 = 2a, AD = 4a$  và  $M$  là trung điểm  $AD$

nên  $A_1M \perp D_1M$ , suy ra  $A_1M \perp (C_1D_1M)$

$\Rightarrow d(A_1, (C_1D_1M)) = A_1M = 2a\sqrt{2}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $CD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $HK$  và  $SD$ .



(A)  $\frac{a}{3}$ .

(B)  $\frac{2a}{3}$ .

(C)  $2a$ .

(D)  $\frac{a}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $E = HK \cap AC$ . Do  $HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD)$  suy ra

$$d(HK, SD) = d(HK, (SBD)) = d(E, (SBD)) = \frac{1}{2}d(A, (SBD)).$$

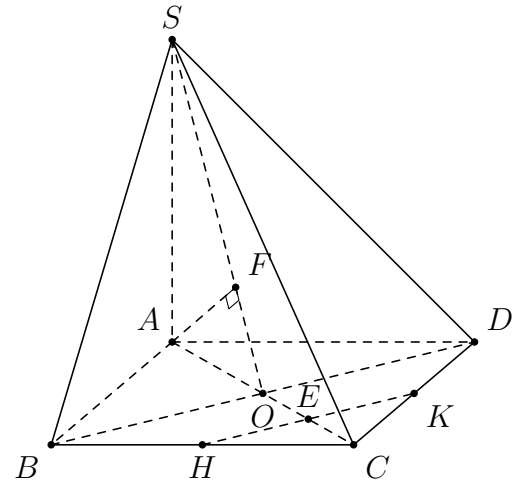
Kẻ  $AF \perp SO$ . Lại có  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AF$ .

Suy ra  $AF \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AF$ .

Xét tam giác vuông  $SAO$  có  $AF = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{2a}{3}$ .

Vậy  $d(HK, SD) = \frac{1}{2}AF = \frac{a}{3}$ .

Chọn phương án (A)



**Câu 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $I$ ,  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $N$  là trung điểm đoạn  $MI$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $S$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  trùng với điểm  $N$ . Biết góc tạo bởi đường thẳng  $SB$  với mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $45^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $SD$  theo  $a$  là

(A)  $a\sqrt{6}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

(C)  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

(D)  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

**Lời giải.**

Do  $MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel (SAD)$

$$\Rightarrow d(MN, SD) = d(MN, (SAD)) = d(N, (SAD)).$$

Kẻ  $NE \perp AD$  tại  $N$  trong  $(ABCD)$ .

Do  $SN \perp AD$  nên  $AD \perp (SNE) \Rightarrow (SAD) \perp (SNE) = SE$ .

Kẻ  $NH \perp SE \Rightarrow NH \perp (SAD)$ .

$$\Rightarrow d(N, (SAD)) = d(MN, (SAD)) = NH.$$

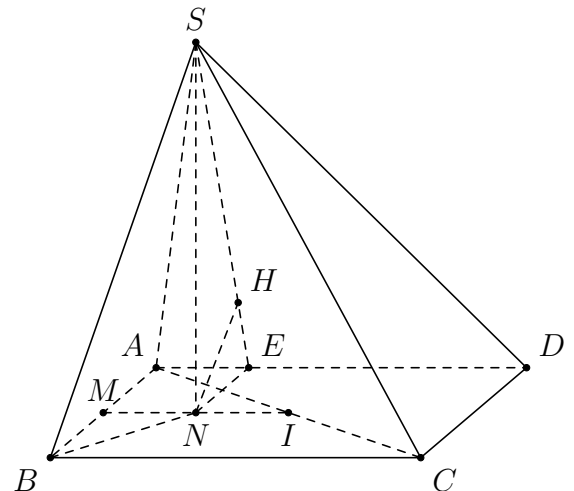
Ta có  $(SB; (ABCD)) = \widehat{SBN} = 45^\circ$ .

Xét  $\triangle BMN$  ta có

$$BN = \sqrt{BM^2 + NM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } NH = \frac{NE \cdot NS}{\sqrt{NE^2 + NS^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn phương án (D)



**Câu 16.** Cho tứ diện  $OABC$  trong đó  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau,  $OA = OB = OC = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Khoảng cách giữa  $AI$  và  $OC$  bằng bao nhiêu?

(A)  $a$ .

(B)  $\frac{a}{\sqrt{5}}$ .

(C)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

(D)  $\frac{a}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $J$  là trung điểm  $OB \Rightarrow IJ \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIJ)$ .

Suy ra  $d(AI, OC) = d(OC, (AIJ)) = d(O, (AIJ))$ .

Kẻ  $OH$  vuông góc  $AJ$  tại  $H$ .

Ta có  $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp OH \Rightarrow IJ \perp OH$ .

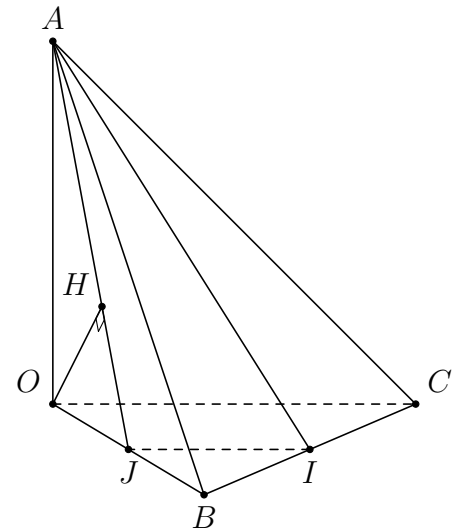
Khi đó  $\begin{cases} OH \perp AJ \\ OH \perp IJ \end{cases} \Rightarrow OH \perp (AIJ) \Rightarrow d(O, (AIJ)) = OH$ .

Vì  $\triangle AOJ$  vuông tại  $O$ , có  $OH$  là đường cao.

$$\text{Suy ra } OH = \frac{OA \cdot OJ}{\sqrt{OA^2 + OJ^2}} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } d(AI, OC) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn phương án (B)



**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng 10. Biết  $SC = 10\sqrt{5}$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, CD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $BD$  và  $MN$ .

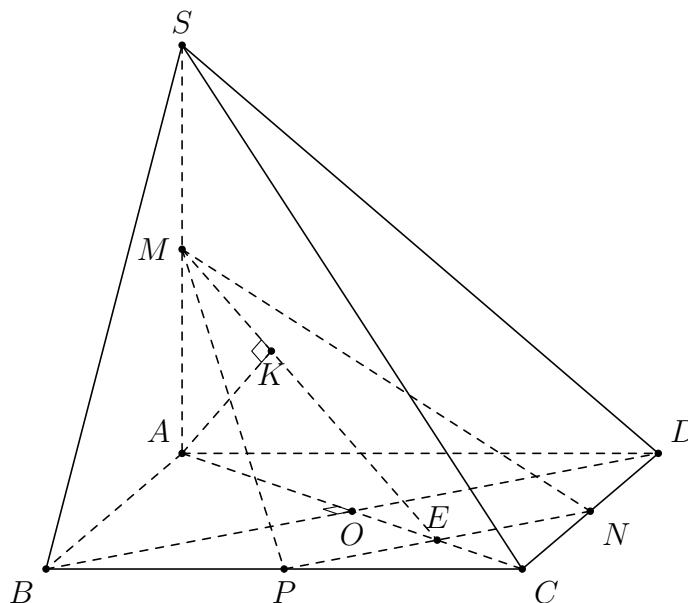
(A)  $3\sqrt{5}$ .

(B)  $\sqrt{5}$ .

(C) 5.

(D) 10.

**Lời giải.**



Gọi  $P$  là trung điểm  $BC$  và  $E = NP \cap AC$ .

Khi đó  $PN \parallel BD \Rightarrow BD \parallel (MNP)$ .

$$\text{Suy ra } d(BD, MN) = d(BD, (MNP)) = d(O, (MNP)) = \frac{1}{3}d(A, (MNP)).$$

Kẻ  $AK \perp ME$ , có  $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AK \Rightarrow PN \perp AK$ .

Suy ra  $AK \perp (MNP) \Rightarrow d(A, (MNP)) = AK$ .

Xét tam giác vuông  $SAC$  có  $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$ .

Tam giác vuông  $MAE$ , có  $SA = 10\sqrt{3}$ ;  $AE = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{4}$ .

Suy ra  $AK = \frac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$ . Vậy  $d(BD, MN) = \frac{1}{3}AK = \sqrt{5}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{5}$ , góc giữa  $SB$  và mặt đáy là  $30^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $AB$  và  $SC$  bằng

**(A)**  $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$ .

**(B)**  $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$ .

**(C)**  $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{13}}{13}$ .

**Lời giải.**

**Cách 1.** Ta có  $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$ .

Ta có  $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ .

$\Rightarrow SD$  là hình chiếu của  $SC$  trên  $(SAD)$ .

Dựng  $AH \perp SD$  tại  $H$  trong  $(SAD)$ .

Dựng hình chữ nhật  $AHKP$  với  $K \in SC$ ,  $P \in AB$ .

Khi đó  $PK$  là đoạn vuông góc chung của  $AB$  và  $SC$  và  $PK = AH$ .

Ta có góc giữa  $SB$  và mặt đáy là  $30^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^\circ$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$  có  $SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  có  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a \Rightarrow AD = BC = 2a$ .

Xét  $\triangle SAD$  vuông tại  $A$ , có  $AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$ .

Vậy đoạn vuông góc chung của  $AB$  và  $SC$  là  $PK = AH = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$ .

**Cách 2.** Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$ .

Kẻ  $AH \perp SD$ . Chứng minh  $AH \perp (SCD)$ . Từ đó suy ra  $d(A, (SCD)) = AH$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông, gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  $\triangle SAB$  cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy  $(ABCD)$ , biết  $SD = 2a\sqrt{5}$ ,  $SC$  tạo với mặt đáy  $(ABCD)$  một góc  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  khoảng cách giữa hai đường thẳng  $DM$  và  $SA$ .

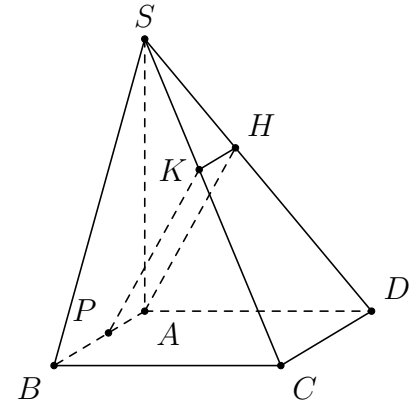
**(A)**  $\frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$ .

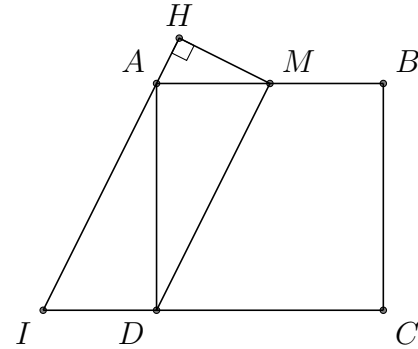
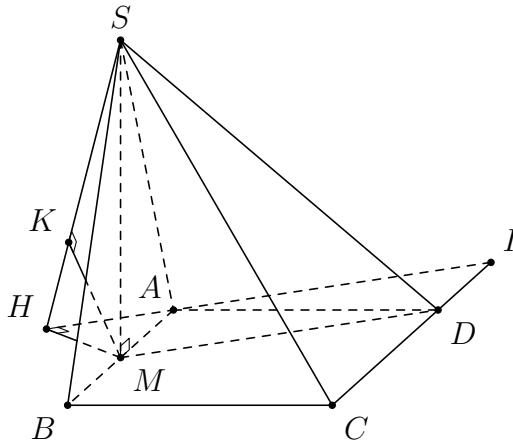
**(B)**  $\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$ .

**(C)**  $\frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$ .

**(D)**  $\frac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$ .

**Lời giải.**





Dựng hình bình hành  $AMDI$ . Khi đó  $MD \parallel AI \Rightarrow MD \parallel (SAI)$ .

$$\Rightarrow d(MD, AI) = d(MD, (SAI)) = d(M, (SAI)).$$

Dựng  $MH \perp AI$  và  $MK \perp SH$ . (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} AI \perp MH \\ AI \perp SM \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SMH) \Rightarrow AI \perp MK. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $MK \perp (SAI) \Rightarrow d(M, (SAI)) = MK$ .

Ta có  $SM \perp (ABCD) \Rightarrow MC$  là hình chiếu của  $SC$  trên  $(ABCD)$  nên  $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{SCM} = 60^\circ$ .

$$\text{Xét tam giác vuông } SMC \text{ và } SMD \text{ có } SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC \cdot \tan 60^\circ. \quad (3)$$

Mặt khác  $MC = MD$  ( $ABCD$  là hình vuông).

$$\text{Suy ra } (3) \Leftrightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Leftrightarrow MC = a\sqrt{5} = MD \Rightarrow SM = a\sqrt{15}.$$

Đặt  $MA = x$  với  $x > 0$ , suy ra  $AD = 2x$ .

$$\text{Xét } \triangle MAD \text{ vuông tại } A \text{ có } MA^2 = MD^2 - AD^2 \Leftrightarrow x^2 = (a\sqrt{5})^2 - (2x)^2 \Rightarrow x = a.$$

$$\text{Lại có } \triangle MAH \sim \triangle AID \Rightarrow MH = \frac{AD \cdot MA}{AI} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{SM^2} \Rightarrow MK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Các cạnh bên  $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ . Tính khoảng cách giữa  $AD$  và  $SB$ ?

**(A)**  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

**(B)**  $\frac{a\sqrt{42}}{6}$ .

**(C)**  $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Trong mặt phẳng  $(SMN)$ , kẻ  $OH \perp SN$  tại  $H$ .

Ta có  $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ .

$$\Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(M, (SBC)) = 2d(O, (SBC)).$$

Vì  $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$  suy ra các  $\triangle SAC, \triangle SBD$  là các tam giác cân tại  $S$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC(1).$$

Mặt khác  $BC \perp MN$  ( $BC \perp AB, AB \parallel MN$ ) (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $BC \perp OH$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp OH \\ SN \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOA \text{ có } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SON \text{ có } OH = \frac{ON \cdot SO}{\sqrt{ON^2 + SO^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } d(AD, SB) = 2OH = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 21.** Cho hình chóp  $S.ABC$ .  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ ,  $BC = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $\triangle SAB$  đều. Hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm  $M$  của  $AC$ . Khoảng cách giữa  $SA$  và  $BC$  là

- (A)**  $\frac{a\sqrt{66}}{11}$ . **(B)**  $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$ . **(C)**  $\frac{2a\sqrt{66}}{11}$ . **(D)**  $\frac{a\sqrt{11}}{11}$ .

**Lời giải.**

Dựng hình bình hành  $ABCD$ .

Ta có  $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$ .

$$\Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(C, (SAD)) = 2d(M, (SAD)).$$

Gọi  $N$  là trung điểm  $AD$ ,  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $SN$ .

Do  $\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow MN \perp AD$ .

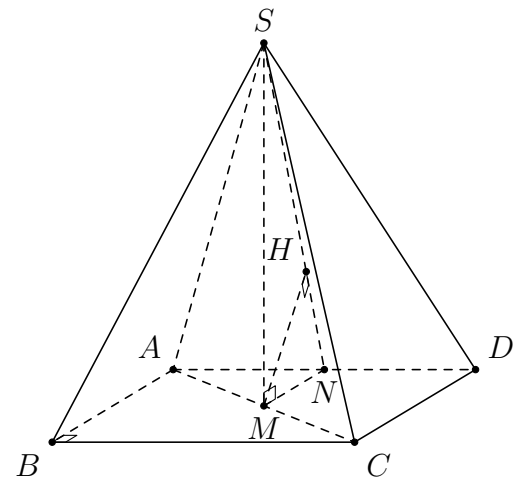
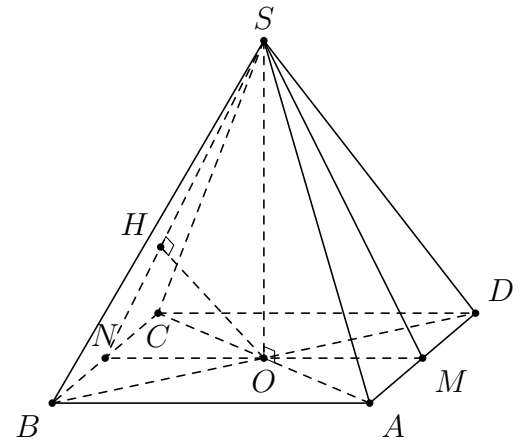
Lại có  $SM \perp AD$  nên  $AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp MH$ .

$$\text{Có } \begin{cases} AD \perp MH \\ SN \perp MH \end{cases} \Rightarrow MH \perp (SAD) \Rightarrow d(M, (SAD)) = MH.$$

$\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $AC = 2a \Rightarrow AB = a\sqrt{3} = SA$ .

$\triangle SAM$  có  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $AM = \frac{1}{2}AC = a \Rightarrow SM = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\triangle SMN$  vuông tại  $M$  có  $SM = a\sqrt{2}$ ,  $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



$$\Rightarrow MH = \frac{SM \cdot MN}{\sqrt{SM^2 + MN^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

$$\text{Vậy } d(BC, SA) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 22.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$  với  $AD = DC = a$ ,  $AB = 2a$ . Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với đáy. Góc giữa  $SC$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SB$ .

**(A)**  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**(B)**  $2a$ .

**(C)**  $a\sqrt{2}$ .

**(D)**  $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$ .

**Lời giải.**

Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với đáy  $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ \\ SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}. \end{cases}$$

Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $ADCM$  là hình vuông nên  $CM = AD = a$ .

Xét  $\triangle ABC$ , ta có trung tuyến  $CM = a = \frac{1}{2}AB$  nên  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$ .

Dựng hình chữ nhật  $ACBE$ .

Ta có  $AC \parallel BE \Rightarrow AC \parallel (SBE)$ .

Suy ra  $d(AC, SB) = d(AC, (SBE)) = d(A, (SBE))$ .

Kẻ  $AK \perp SE$  trong mặt phẳng  $(SAE)$ . (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} BE \perp SA \\ BE \perp AE \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AK. \quad (2)$$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow AK \perp (SBE) \Rightarrow d(A, (SBE)) = AK$ .

$$\text{Xét tam giác vuông } SAE \text{ có } AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{(a\sqrt{6})^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  với  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$  cùng vuông góc với đáy. Góc giữa  $(SAB)$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CD$  và  $SB$ .

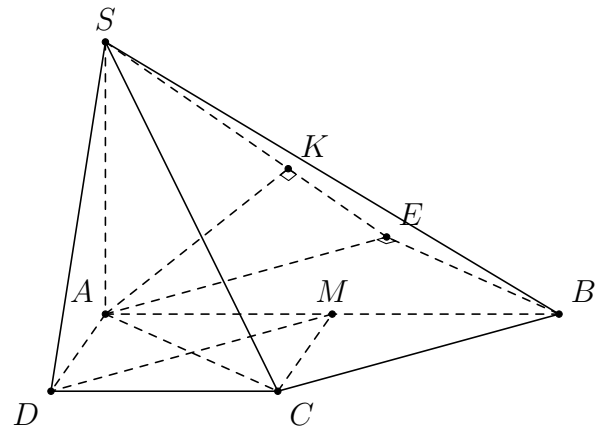
**(A)**  $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$ .

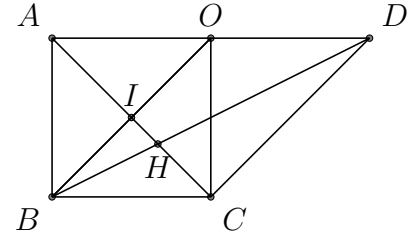
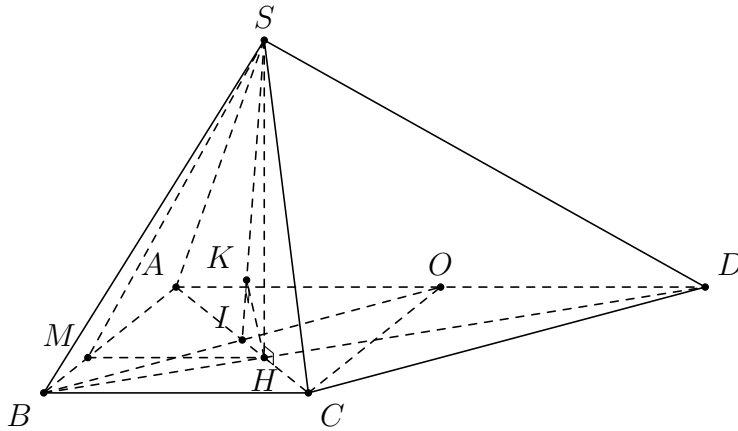
**(B)**  $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$ .

**(C)**  $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ .

**(D)**  $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$ .

**Lời giải.**





Gọi  $H = AC \cap BD \Rightarrow BH = \frac{1}{3}BD$ .

Hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$  cùng vuông góc với đáy  $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ .

Gọi  $O$  là trung điểm của  $AD \Rightarrow ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  và  $BO \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBO)$ .

Suy ra  $d(CD, SB) = d(CD, (SBO)) = d(D, (SBO)) = 3d(H, (SBO))$ .

Gọi  $I = AC \cap BO$ , trong mặt phẳng  $(SAC)$ , kẻ  $HK \perp SI$ .

Lại có  $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SH \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp HK$ , suy ra  $HK \perp (SBO) \Rightarrow d(H, (SBO)) = HK$ .

Trong  $(ABCD)$  kẻ  $HM \perp AB = M$ . Dễ dàng chứng minh được  $AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp SM$ .

Khi đó, góc giữa  $(SAB)$  và mặt đáy là  $(SM, HM) = \widehat{SMH} = 60^\circ$ .

Xét tam giác vuông  $SHM$  có  $MH = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = MH \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

Xét  $\triangle SHI$  vuông tại  $H$  có  $IH = \frac{1}{3}IC = \frac{1}{6}AC = \frac{a\sqrt{2}}{6}; SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

Suy ra  $HK = \frac{IH \cdot SH}{\sqrt{IH^2 + SH^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 24.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = a, OB = OC = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $AC$  bằng

**(A)**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**(B)**  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

**(C)**  $a$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có được  $OA \perp (OBC)$ .

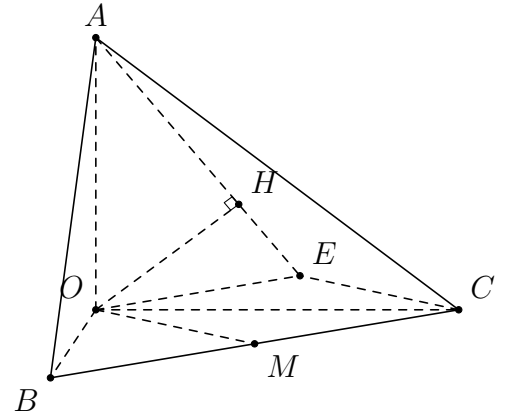
Trong mặt phẳng  $(OBC)$ , dựng điểm  $E$  sao cho  $OMCE$  là hình bình hành thì  $OMCE$  cũng là hình vuông (do  $OBC$  là tam giác vuông cân tại  $O$ ).

Lại có  $\begin{cases} CE \perp OE \\ CE \perp OA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (AOE)$ .

Kẻ  $OH \perp AE$  tại  $H$  thì  $OH \perp (AEC)$ .

Vì  $OM \parallel (AEC)$  nên

$$\begin{aligned} d(AC, OM) &= d(O, (ACE)) = OH \\ &= \frac{OA \cdot OE}{\sqrt{OA^2 + OE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$



Chọn phương án **(D)**

**Câu 25.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy bằng  $2a$ ,  $SA$  tạo với đáy một góc  $30^\circ$ . Tính theo  $a$  khoảng cách  $d$  giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CD$ .

**(A)**  $d = \frac{2\sqrt{10}a}{5}$ .

**(B)**  $d = \frac{3\sqrt{14}a}{5}$ .

**(C)**  $d = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$ .

**(D)**  $d = \frac{2\sqrt{15}a}{5}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $O = AC \cap BD$ . Ta có  $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ .

Vì  $SA$  tạo với đáy một góc  $30^\circ$  nên  $\widehat{SAO} = 30^\circ$ .

$$\text{Do đó } \tan 30^\circ = \frac{SO}{AO} \Rightarrow SO = AO \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Mặt khác ta có

$$d(SA, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB)).$$

Gọi  $I, J$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $AB, SI$ . Ta có  $OI = a$ .

Xét  $\triangle SOI$  có

$$\frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OJ = \frac{a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{10}a}{5}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$ . Khoảng cách giữa đường thẳng  $SE$  và đường thẳng  $BC$  bằng bao nhiêu?

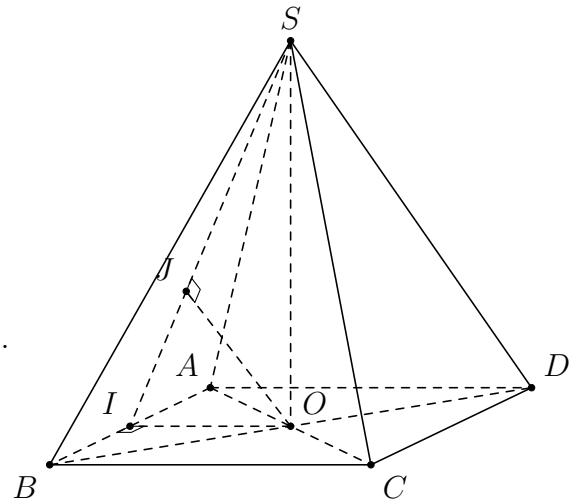
**(A)**  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**(B)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**(C)**  $\frac{a}{2}$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải.**

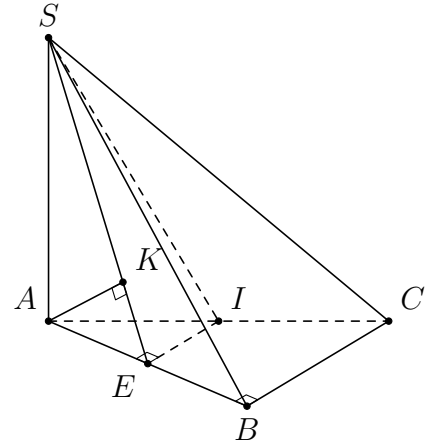


Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ , ta có  $EI \parallel BC$  nên

$$d(BC, SE) = d(BC, (SEI)) = d(B, (SEI)) = d(A, (SEI)) = AK.$$

Trong tam giác vuông  $SAE$  ta có

$$AK = \frac{AS \cdot AE}{\sqrt{AS^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$



Chọn phương án **(D)**

**Câu 27.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C$ .

- (A)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **(B)**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ . **(C)**  $a\sqrt{5}$ . **(D)**  $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ ;  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

Ta có  $IH$  là đường trung bình trong  $\triangle A'BC$  nên  $IH \parallel A'C$ .

$$d(AB', A'C) = d(A'C, (AB'H)) = d(C, (AB'H)) = d(B, (AB'H)).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \perp BB' \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B').$$

Từ  $B$  kẻ  $BL \perp B'H$ , mà  $BL \subset (BCC'B')$  nên  $BL \perp AH$ .

Suy ra  $BL \perp (AB'H)$ .

$\triangle BB'H$  vuông tại  $B$  có  $BB' = 2a$  và  $BH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$  và có  $BL$  là đường cao nên

$$\frac{1}{BL^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{17}{4a^2} \Rightarrow BL = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

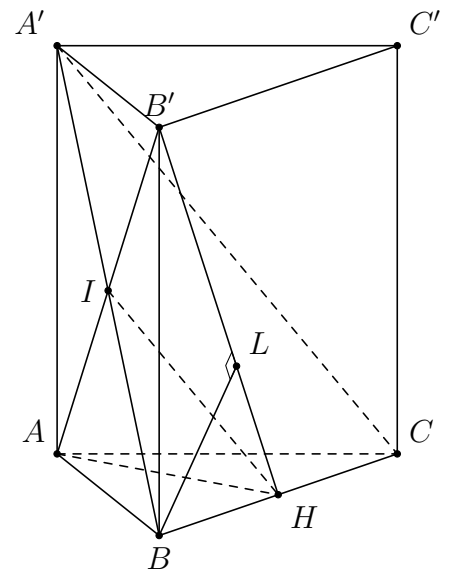
$$\text{Vậy } d(AB', A'C) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 28.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có các mặt bên là những hình vuông cạnh  $a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'C$  và  $AB'$ .

- (A)**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **(B)**  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ . **(C)**  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ . **(D)**  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $D, E$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $B'C'$ . Khi đó ta có  $AD \parallel A'E$ ;  $B'D \parallel CE \Rightarrow (CA'E) \parallel (ADB') \Rightarrow d(AB', A'C) = d((ADB'), (CEA')) = d(B', (CEA'))$ .

Do  $B'C'$  cắt mặt phẳng  $(CA'E)$  tại  $E$  là trung điểm của  $B'C'$  nên có  $d(B', (CA'E)) = d(C', (CA'E))$ .

Do  $\triangle A'B'C'$  đều có  $E$  là trung điểm của  $B'C'$  nên  $A'E \perp B'C'$ . Mặt khác các mặt bên của lăng trụ là hình vuông nên  $ABC.A'B'C'$  là lăng trụ đứng  $\Rightarrow A'E \perp CC' \Rightarrow A'E \perp (CC'E) \Rightarrow (CA'E) \perp (CC'E)$  mà  $(CA'E) \cap (CC'E) = CE \Rightarrow$  từ  $C'$  hạ đường vuông góc xuống  $CE$  tại  $H$  thì  $C'H = d(C', (CA'E))$ .

Xét tam giác vuông tại  $CC'E$  tại  $C'$  có

$$CC' = a; C'E = \frac{a}{2} \Rightarrow C'H = \frac{CC' \cdot C'E}{\sqrt{CC'^2 + C'E^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy  $d(AB', A'C) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 29.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang,  $AB \parallel CD$ ,  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$ . Tính khoảng cách  $d$  giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

**(A)**  $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .      **(B)**  $d = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$ .      **(C)**  $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$ .      **(D)**  $d = \frac{2a\sqrt{3}}{7}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ , do  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

$\Rightarrow AH = HB = HC$ , mặt khác lại có  $SA = SB = SC$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ . Kẻ  $HE \parallel AC$ ,  $E \in CD$ .

Do  $ABCD$  là hình thang  $AB \parallel CD$ ,  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $HE \parallel AC$

$\Rightarrow CD \perp HE$ ,  $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow (SDE) \perp (SHE)$ .

Từ  $H$  hạ  $HI \perp CE \Rightarrow HI = d(H, (SCD))$ .

Ta có  $SB = SC = a\sqrt{2}$ ,  $BC = 2a$

$$\Rightarrow SH = a; HE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

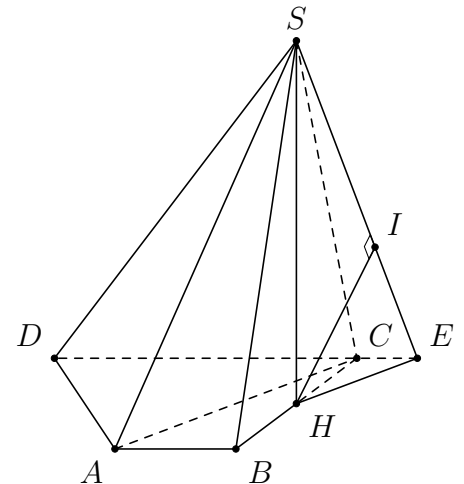
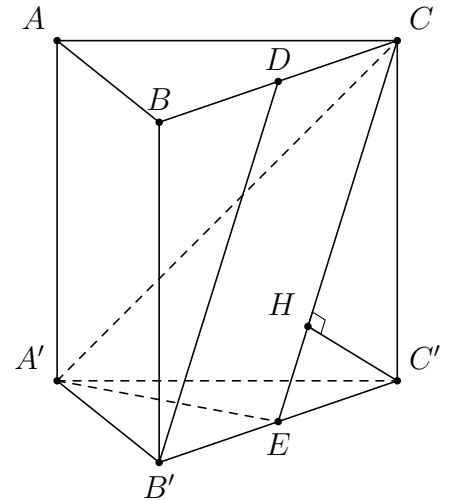
$$\text{Suy ra } HI = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Ta có  $AB \parallel CD$ ,  $CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ .

$$\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)) = 2d(H, (SCD)) = 2HI = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 30.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung



điểm của  $AB$  và  $AD$ ,  $H$  là giao điểm của  $CN$  và  $DM$ . Biết  $SH$  vuông góc mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SH = a\sqrt{3}$ . Khoảng cách giữa đường thẳng  $DM$  và  $SC$  là

- (A)  $\frac{a\sqrt{57}}{19}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{57}}{38}$ . (C)  $\frac{3a\sqrt{57}}{38}$ . (D)  $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\triangle A'DM = \triangle DCN \Rightarrow \widehat{A'DM} = \widehat{DCN}$ .

$\Rightarrow \widehat{A'DM} + \widehat{CDM} = \widehat{DCN} + \widehat{CDM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DHC} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp NC$ .

Ta có  $\begin{cases} CN \perp DM \\ SH \perp DM \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SNC)$ .

Kẻ  $HK \perp SC (K \in SC)$ .

Mặt khác  $HK \perp DM$  vì  $DM \perp (SNC)$

$\Rightarrow HK$  là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $DM$  và  $SC$ , suy ra  $d(SC; DM) = HK$ .

Ta có  $DC^2 = HC \cdot CN \Leftrightarrow HC = \frac{DC^2}{CN} = \frac{DC^2}{\sqrt{DN^2 + DC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

Xét tam giác  $SHC$  vuông tại  $H$  có  $HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$ .

Vậy khoảng cách giữa  $SC$  và  $DM$  bằng  $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 31.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$  cạnh  $a$ ;  $SO = a$ ;  $SO \perp (ABCD)$ .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng

- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ . (C)  $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$ . (D)  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ ;  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $SN$ .

Vì  $AB \parallel CD$  nên

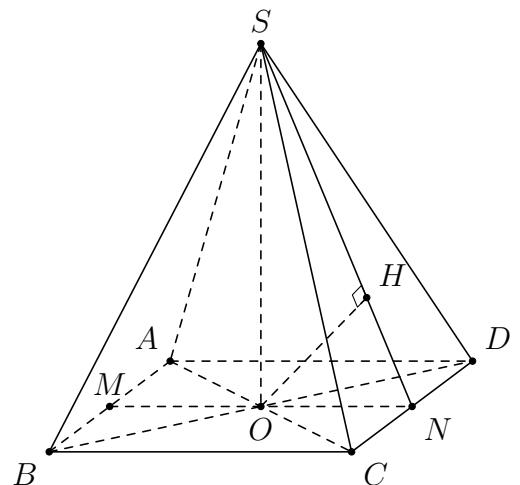
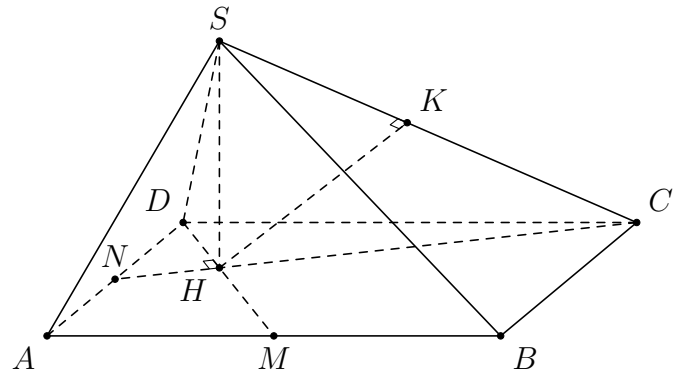
$d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = d(M; (SCD)) = 2d(O; (SCD))$ .

Ta có  $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$ .

Khi đó  $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O; (SCD)) = OH$ .

$\triangle SON$  vuông tại  $O$  nên  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{ON^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ .

Vậy  $d(AB; SC) = 2OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .



Chọn phương án **(D)**

**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SB$  bằng

**(A)**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**(B)**  $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

**(C)**  $2a$ .

**(D)**  $\frac{a\sqrt{7}}{7}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $SA \perp (ABC)$ , nên góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(ABC)$  là  $\widehat{SBA} = 60^\circ$ .

Lấy điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ACBD$  là hình bình hành.

Khi đó  $AC \parallel BD$

$$\Rightarrow AC \parallel (SBD) \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD)).$$

Kẻ  $AK \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAK)$

$\Rightarrow (SAK) \perp (SBD)$  theo giao tuyến  $SK$ .

Kẻ  $AH \perp SK, (H \in SK) \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$ .

$$\triangle ABD \text{ đều nên } AK = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Có } SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SAK \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SB$  là  $d(A, (SBD)) = AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $\triangle ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Góc giữa  $SC$  và mặt phẳng  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Khoảng cách từ  $A$  đến  $(SBC)$  bằng

**(A)**  $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$ .

**(B)**  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$ .

**(C)**  $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$ .

**(D)**  $\frac{3a}{\sqrt{5}}$ .

**Lời giải.**

Dựng  $AM \perp BC, AH \perp SM$ . Ta có  $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC. \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC$  và  $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$ .

$\triangle SAC$  vuông tại  $A \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3a$ .

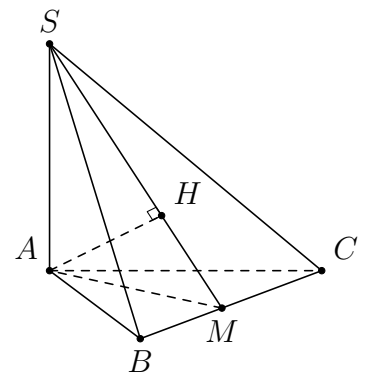
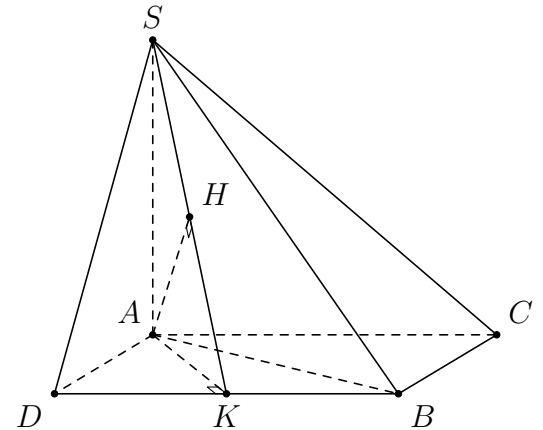
$\triangle SAC = \triangle BAC$  (g - c - g)  $\Rightarrow SA = BA = 3a$ .

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2}.$$

$$\triangle SAM \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Vậy  $d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a}{\sqrt{5}}$ .

Chọn phương án **(D)**





**Câu 34.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ . Góc  $\widehat{ABC} = 60^\circ$  và  $SD = a\sqrt{2}$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên  $(ABCD)$  là điểm  $H$  thuộc đoạn  $BD$  sao cho  $HD = 3HB$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CM$  và  $SB$ .

- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{40}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{30}}{8}$ . (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{8}$ . (D)  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết có  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ .

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{3}}{4}. \text{ Suy ra}$$

$$SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2a^2 - \frac{27a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OM.$$

$$\text{Diện tích } \triangle MAC \text{ là } S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AC = \frac{1}{4}SB \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}.$$

$$SB \parallel OM \Rightarrow SB \parallel (MAC) \Rightarrow d(SB, CM) = d(SB, (MAC)) = d(B, (MAC)) = d(D, (MAC)).$$

$$\text{Ta có } V_{M.ACD} = \frac{1}{3}d(M, (ACD)) \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(S, (ABCD)) \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{96}.$$

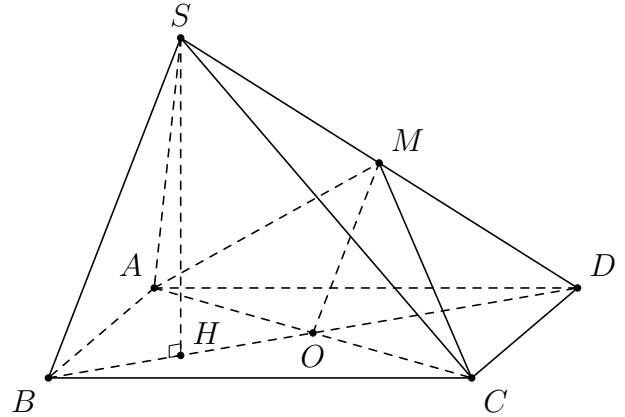
$$\text{Mặt khác: } V_{M.ACD} = \frac{1}{3}d(D, (MAC)) \cdot S_{\triangle MAC} \Rightarrow d(D, (MAC)) = \frac{3V_{M.ACD}}{S_{\triangle MAC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{8}.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 35.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $DD'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CK$  và  $A'D$ .

- (A)  $\frac{a}{3}$ . (B)  $\frac{a}{5}$ . (C)  $\frac{a}{4}$ . (D)  $\frac{a}{2}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $BB'$  thì  $A'M \parallel CK \Rightarrow CK \parallel (A'DM)$   
 $\Rightarrow d(CK, A'D) = d(CK, (A'DM)) = d(K, (A'DM)) = \frac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}}$ .

Ta có  $V_{K.A'DM} = V_{M.KA'D} = V_{B'.KA'D} = \frac{1}{3}B'A' \cdot \frac{1}{2}A'D' \cdot KD = \frac{1}{12}a^3$ .

Hạ  $DH \perp A'M$ . Do  $AD \perp (ABB'A')$  nên  $AD \perp A'M$   
 $\Rightarrow A'M \perp (AHD) \Rightarrow A'M \perp AH$ .

Vì  $AH \cdot A'M = 2S_{AMA'} = S_{ABB'A'} = a^2 \Rightarrow AH = \frac{a^2}{A'M} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ .

Do đó  $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \frac{3a}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{A'MD} = \frac{1}{2}DH \cdot A'M = \frac{3}{4}a^2$ .

Vậy  $d(CK, A'D) = \frac{3V_{K.A'DM}}{S_{A'DM}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{12}}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{3}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 36.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a\sqrt{2}$ ,  $AA' = 2a$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $CD'$ .

- (A)**  $2a$ . **(B)**  $a\sqrt{2}$ . **(C)**  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ . **(D)**  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $BD \parallel B'D'$ ,  $B'D' \subset (CD'B')$   $\Rightarrow BD \parallel (CD'B')$   
 $\Rightarrow d(CD', BD) = d(D, (CD'B'))$ .

Gọi  $I = DC' \cap D'C \Rightarrow I = DC' \cap (CD'B')$  mà  $I$  là trung điểm của  $DC' \Rightarrow d(D, (CD'B')) = d(C', (CD'B'))$ .

Vì  $A'B'C'D'$  là hình vuông tâm  $O'$  cạnh  $a\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow C'O' = a \Rightarrow CO' = \sqrt{CC'^2 + C'O'^2} = a\sqrt{5}$ .

Ta có diện tích  $S_{\triangle CB'D'} = \frac{1}{2}CO' \cdot B'D' = \frac{1}{2}a\sqrt{5} \cdot 2a = a^2\sqrt{5}$ .

Ta có  $V_{C'.CD'B'} = V_{C.C'B'D'} = \frac{1}{6}CC' \cdot C'B' \cdot C'D' = \frac{2}{3}a^3$ .

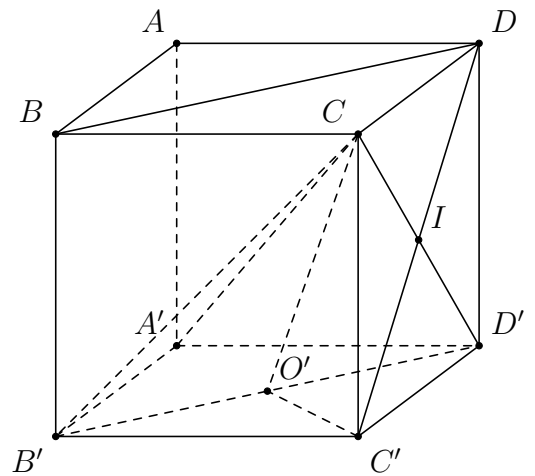
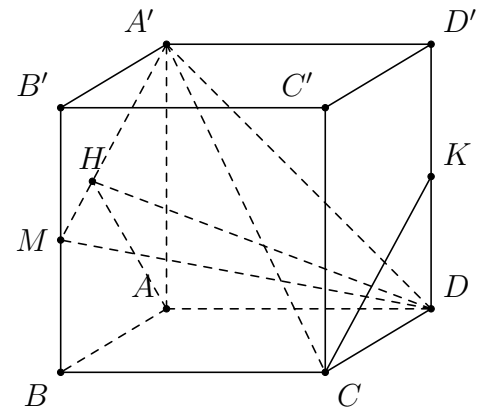
$\Rightarrow d(C', (CB'D')) = \frac{3V_{C'.CB'D'}}{S_{\triangle CB'D'}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}a^3}{a^2\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 37.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$  và  $AD' \perp BA'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD'$  và  $BA'$ .

- (A)**  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ . **(B)**  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ . **(C)**  $a$ . **(D)**  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B'$  qua  $B$ .

Có  $AA'BE$  là hình bình hành  $\Rightarrow A'B \parallel AE \Rightarrow A'B \parallel (AD'E)$ .

Suy ra  $d(A'B, AD') = d(A'B, (AD'E)) = d(B, (AD'E))$ .

Gọi  $I = AC \cap BD$ , có  $\begin{cases} AI \perp BD \\ AI \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AI \perp (DD'B'B)$ .

$\Rightarrow (AD'E) \perp (DD'B'B) = D'E$ .

Trong mặt phẳng  $(DD'B'B)$ , kẻ  $BH \perp D'E$ .

Suy ra  $BH \perp (AD'E) \Rightarrow d(B, (AD'E)) = BH$ .

Xét  $\triangle ABA'$  vuông tại  $A$  có

$$BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

Vì  $AD' \perp BA' \Rightarrow BA' \perp BC' \Rightarrow \triangle A'BC'$  vuông cân tại  $B$ .

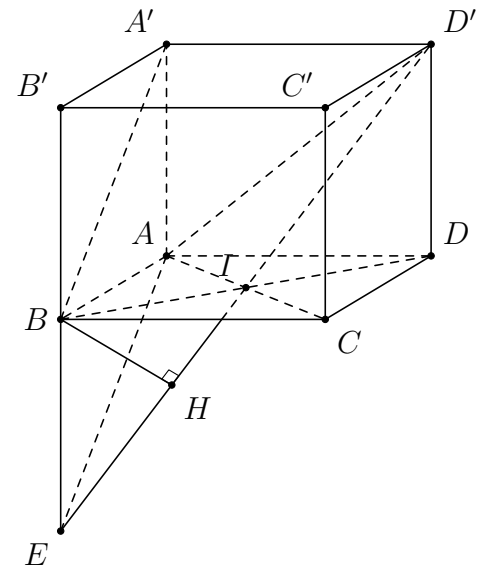
$\Rightarrow A'C' = 2a\sqrt{3} \Rightarrow AI = a\sqrt{3}$ .

Xét  $\triangle ABI$  vuông tại  $I$  có  $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$ .

Xét  $\triangle IBE$  vuông tại  $B$  có  $BE = AA' = a\sqrt{2}$ ,  $BI = a$ .

Do  $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BI^2} + \frac{1}{BE^2}$  nên  $BH = \frac{BI \cdot BE}{\sqrt{BI^2 + BE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Chọn phương án **(B)**



## **A** SỬ DỤNG PP TỌA ĐỘ ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH.

**Câu 38.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $DD'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CK$ ,  $A'D$ .

**(A)**  $a$ .

**(B)**  $\frac{3a}{8}$ .

**(C)**  $\frac{2a}{5}$ .

**(D)**  $\frac{a}{3}$ .

**Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó

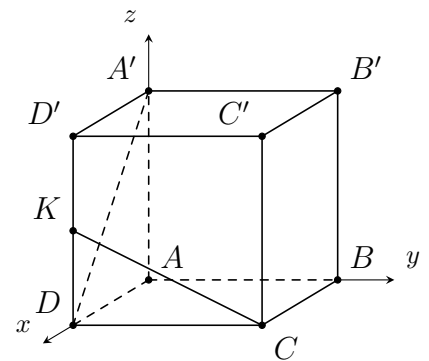
$A'(0; 0; a)$ ,  $D(a; 0; 0)$ ;  $C(a; a; 0)$ ,  $D'(a; 0; a)$  suy ra  $K(a; 0; \frac{a}{2})$ .

Ta có  $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$ ,  $\overrightarrow{CK} = (0; -a; \frac{a}{2})$ ,  $\overrightarrow{DK} = (0; 0; \frac{a}{2})$ .

Suy ra  $[\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{CK}] = (-a^2; -\frac{a^2}{2}; -a^2)$ .

Vậy  $d(A'D, CK) = \frac{|[\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DK}|}{|[\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{CK}]|} = \frac{a}{3}$ .

Chọn phương án **(D)**



**Câu 39.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $DD'$ . Tính theo  $a$  khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BD$ .

**(A)**  $\sqrt{3}a$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{3}a}{6}$ .

**Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ.

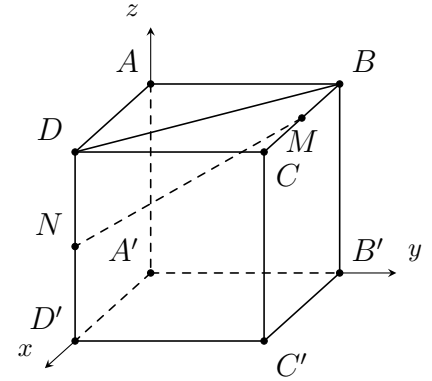
Khi đó,  $B(a; 0; a)$ ,  $D(0; a; a)$ ,  $M\left(a; \frac{a}{2}; a\right)$ ,  $N\left(0; a; \frac{a}{2}\right)$ .

$\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$ ,  $\overrightarrow{MN} = \left(-a; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{BM} = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$ .

$[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}] = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ ;  $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}] \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{a^2}{4}$ .

$d(BD, MN) = \frac{|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}] \cdot \overrightarrow{BM}|}{|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}]|} = \frac{a^2}{4} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

Chọn phương án **D**



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. C  | 3. D  | 4. B  | 5. C  | 6. C  | 7. B  | 8. D  | 9. B  | 10. C |
| 11. B | 12. C | 13. B | 14. A | 15. D | 16. B | 17. B | 18. A | 19. C | 20. C |
| 21. C | 22. A | 23. A | 24. D | 25. A | 26. D | 27. D | 28. D | 29. C | 30. D |
| 31. D | 32. B | 33. D | 34. B | 35. A | 36. D | 37. B | 38. D | 39. D |       |

**DẠNG 38.****TÍCH PHÂN CƠ BẢN (A), KẾT HỢP (B)****KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Các tính chất

$$1) \left( \int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ và } \int f'(x) dx = f(x) + C; d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$2) \text{ Nếu } F(x) \text{ có đạo hàm thì } \int d[F(x)] = F(x) + C.$$

$$3) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \text{ là hằng số khác } 0.$$

$$4) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

5) Công thức đổi biến số

$$\text{Cho } y = f(u) \text{ và } u = g(x). \text{ Nếu } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ thì } \int f[g(x)]g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C.$$

6) Các công thức khác

$$— \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$— k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx \text{ (} k \neq 0 \text{)}.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$— \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$— \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(3) = 3$  và  $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$ . Khi đó  $\int_3^8 f(x) dx$  bằng

(A) 7.                      (B)  $\frac{197}{6}$ .                      (C)  $\frac{29}{2}$ .                      (D)  $\frac{181}{6}$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

1) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng cho trước  $f(x_0), f'(x)$ . Tính  $\int_a^b f(x) dx$ .

2) **PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

**B1:** Dựa vào  $f'(x)$  suy ra được  $f(x) = \int f'(x) dx$ .

**B2:** Từ  $f(x_0)$  ta tìm được hệ số  $C$  của  $f(x)$ .

**B3:** Tính  $\int_a^b f(x) dx$ .

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}} dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx \\ &= \int dx + 2 \int \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \\ &= x + 2\sqrt{x+1} + C. \end{aligned}$$

Mà  $f(3) = 3 \Leftrightarrow C = -4$ . Suy ra  $f(x) = x + 2\sqrt{x+1} - 4$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_3^8 f(x) dx &= \int_3^8 (x + 2\sqrt{x+1} - 4) dx = \int_3^8 (x-4) dx + 2 \int_3^8 \sqrt{x+1} d(x+1) = \left( \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right) \Big|_3^8 \\ &= \frac{197}{6}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **B**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(7) = 15$  và  $f'(x) = \frac{x+1}{x+2-\sqrt{x+2}}, \forall x > 0$ . Khi đó  $\int_2^7 f(x) dx$  bằng

(A)  $\frac{271}{6}$ . (B)  $\frac{347}{6}$ . (C)  $\frac{287}{6}$ . (D) 7.

**Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x+2-\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1)} dx = \int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}} dx = x + 2\sqrt{x+2} + C.$$

Mà  $f(7) = 15 \Leftrightarrow C = 2$ . Suy ra  $f(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 2$ .

Khi đó  $\int_2^7 f(x) dx = \int_2^7 (x + 2\sqrt{x+2} + 2) dx = \frac{347}{6}$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(-1) = 1$  và  $f'(x) = x \cdot e^{x+1} + 2$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

(A)  $-e^2 - 2e + 6$ . (B)  $e^2 + 2e + 6$ . (C)  $-e^2 + 2e + 6$ . (D)  $e^2 - 2e + 6$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x \cdot e^{x+1} + 2) dx = \int x \cdot e^{x+1} dx + \int 2 dx.$$

Tính  $I = \int x \cdot e^{x+1} dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x+1} \end{cases}$ .

Suy ra  $I = x \cdot e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + C$ .

Do đó  $f(x) = x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + 2x + C$ .

Mà  $f(-1) = 1 \Leftrightarrow -e^0 - e^0 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 5$  và  $f(x) = x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + 2x + 5$ .

Vậy  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + 2x + 5) dx = (xe^{x+1} - 2e^{x+1} + x^2 + 5x) \Big|_0^1 = -e^2 + 2e + 6$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(e^2) = 4$  và  $x \cdot f'(x) = 2 \ln x, x \geq 1$ . Khi đó  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$  bằng

(A) 3. (B)  $\frac{1}{e}$ . (C) 1. (D)  $\frac{1}{3}$ .



**Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2 \ln x}{x} dx = \int 2 \ln x d(\ln x) = \ln^2 x + C.$$

Mà  $f(e^2) = 4 \Leftrightarrow C = 4 - \ln^2 e^2 = 0 \Leftrightarrow C = 0$ . Suy ra  $f(x) = \ln^2 x$ .

$$\text{Vậy } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^e = \frac{1}{3}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = e + \frac{1}{4}$  và  $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ . Khi đó  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{5e^2 - 7}{5}.$

**(B)**  $\frac{5e^2 + 7}{5}.$

**(C)**  $\frac{5e^2 - 2}{5}.$

**(D)**  $\frac{e^2 + 3}{5}.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C.$$

Mà  $f(1) = e + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + e + 1 + C = e + \frac{1}{4} \Leftrightarrow C = -1$ . Suy ra  $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - 1$ .

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - 1 \right) dx = \left( \frac{x^5}{20} + e^x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} - x \right) \Big|_0^2 = \frac{5e^2 - 7}{5}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3}$ ,  $f(-1) = 1$  và  $f(1) = -4$ .

Giá trị của biểu thức  $f(-2) + f(2)$  bằng

**(A)**  $\frac{3}{8} + 4 \ln 2.$

**(B)**  $\frac{3}{8} + 2 \ln 2.$

**(C)**  $\frac{3}{4} + 4 \ln 2.$

**(D)**  $\frac{3}{4} + 2 \ln 2.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} = x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} \text{ nên } f(x) = \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx = \int \left( x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} \right) dx.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2 \ln |x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2 \ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2 \ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , ta có  $f(1) = -4 \Leftrightarrow C_1 = -4$ .Trên khoảng  $(-\infty; 0)$ , ta có  $f(-1) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$ .

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2 \ln x - 4 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2 \ln(-x) + 1 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(-2) + f(2) = \frac{3}{4} + 4 \ln 2.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $(0; +\infty) \setminus \{e\}$  và thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$ . Biết rằng  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$  và  $f(e^2) = 3$ . Tính  $T = f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ .

(A)  $T = 1 + \ln 2$ .

(B)  $T = \ln 3$ .

(C)  $T = 3 + 3 \ln 2$ .

(D)  $T = 2 + \ln 3$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln |\ln x - 1| + C$

Suy ra  $f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi } x \in (0; e) \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi } x \in (e; +\infty). \end{cases}$

\* Theo giả thiết,  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2$ . (\*)

\* Tương tự  $f(e^2) = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3 \Rightarrow f(e^3) = \ln 2 + 3$ . (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) ta có  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = 3 \ln 2 + 3$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$  trên  $[0; +\infty)$ . Biết  $\min_{[0; +\infty)} f(x) = -\frac{2}{3}$ , khi đó phương trình  $f(x) = 0$  có các nghiệm thuộc khoảng nào?

(A)  $(0; 1)$ .

(B)  $(1; 2)$ .

(C)  $(2; 3)$ .

(D)  $(3; 4)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $d(1+x\sqrt{x}) = (1+x\sqrt{x})' dx = \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \frac{3}{2}\sqrt{x} dx$ .

Suy ra  $f(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{d(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} = \frac{4}{3} \sqrt{1+x\sqrt{x}} + C$ .

Khi đó  $\begin{cases} f(x) \geq \frac{4}{3} + C, \forall x \geq 0 \\ f(0) = \frac{4}{3} + C \end{cases} \Rightarrow \min_{[0; +\infty)} f(x) = \frac{4}{3} + C \Leftrightarrow \frac{4}{3} + C = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow C = -2$ .

Vậy  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \sqrt{1+x\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{25}{16}} \in (1; 2)$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}^*$  thỏa mãn  $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $f(1) = 0$  và  $f(2) = 0$ .

Giá trị của biểu thức  $f(-2)$  bằng

(A)  $1 - 2 \ln 2$ .

(B)  $2 + \ln 2$ .

(C)  $3 + \ln 2$ .

(D)  $\ln 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int f''(x) dx &= \int \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + C \\ \Leftrightarrow \int f'(x) dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + C\right) dx \Leftrightarrow f(x) = -\ln|x| + Cx + C_1 \\ \Leftrightarrow f(x) &= \begin{cases} -\ln x + Cx + C_2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\ln(-x) + Cx + C_3 & \text{với } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $x = -1 < 0$  nên  $f(-1) = 1 \Leftrightarrow -\ln(1) + C \cdot (-1) + C_3 = 1 \Leftrightarrow -C + C_3 = 1$ .

— Với  $x = 1 > 0$  nên  $f(1) = 0 \Leftrightarrow -\ln 1 + C + C_2 = 0 \Leftrightarrow C + C_2 = 0$ .

— Với  $x = 2 > 0$  nên  $f(2) = 0 \Leftrightarrow -\ln 2 + 2C + C_2 = 0 \Leftrightarrow 2C + C_2 = \ln 2$ .

Ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} -C + C_3 = 1 \\ C + C_2 = 0 \\ 2C + C_2 = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \ln 2 \\ C_2 = -\ln 2 \\ C_3 = 1 + \ln 2. \end{cases}$$

Do đó  $f(x) = \begin{cases} -\ln x + x \ln 2 - \ln 2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\ln(-x) + x \ln 2 + 1 + \ln 2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

Vậy với  $x = -2 < 0$  thì  $f(-2) = -\ln 2 - 2 \ln 2 + 1 + \ln 2 = 1 - 2 \ln 2$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$  và  $f(1) = 2\sqrt{2}$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $4\sqrt{3} - \frac{14}{3}$ .

**(B)**  $4\sqrt{3} + \frac{10}{3}$ .

**(C)**  $4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$ .

**(D)**  $4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \\ &= \int \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Mà  $f(1) = 2\sqrt{2}$  nên  $C = -2$ . Suy ra  $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 2$ .

Vậy  $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 2) dx = \left[ \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x \right] \Big|_1^2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = xe^x$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $\int_0^2 f(x) dx$ .

**(A)**  $e^2 + 5$ .

**(B)**  $-8$ .

**(C)**  $e^2 + 1$ .

**(D)**  $8$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int x \cdot e^x dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x. \end{cases}$

Do đó  $f(x) = \int f'(x) dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$ .

Theo giả thiết  $f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$ .

Suy ra  $f(x) = x \cdot e^x - e^x + 3$ .

$$\text{Khi đó } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x \cdot e^x - e^x + 3) dx = \int_0^2 x \cdot e^x dx + \int_0^2 (-e^x + 3) dx = (x \cdot e^x - e^x) \Big|_0^2 + (-e^x + 3x) \Big|_0^2 =$$

8.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(\ln 3) = 3$  và  $f'(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1 - \sqrt{e^x + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó

$$\int_0^{\ln 3} e^x f(x) dx \text{ bằng}$$

**(A)**  $\frac{-10 - 8\sqrt{2}}{3}$ .

**(B)**  $\frac{20 - 8\sqrt{2}}{3}$ .

**(C)**  $\frac{20 + 8\sqrt{2}}{3}$ .

**(D)**  $\frac{10 - 8\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1 - \sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{e^{2x} (e^x + 1 + \sqrt{e^x + 1})}{(e^x + 1)^2 - (e^x + 1)} dx \\ &= \int \frac{e^{2x} (e^x + 1 + \sqrt{e^x + 1})}{e^x (e^x + 1)} dx = \int \left( e^x + \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \right) dx = e^x + 2\sqrt{e^x + 1} + C. \end{aligned}$$

Do  $f(\ln 3) = 3$  nên  $C = -4 \Rightarrow f(x) = e^x + 2\sqrt{e^x + 1} - 4$ .

$$\text{Khi đó } \int_0^{\ln 3} e^x f(x) dx = \int_0^{\ln 3} (e^{2x} + 2e^x \sqrt{e^x + 1} - 4e^x) dx = \left( \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{4}{3} (e^x + 1)^{\frac{3}{2}} - 4e^x \right) \Big|_0^{\ln 3} = \frac{20 - 8\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(5) = 13$  và  $f'(x) = \frac{x}{x + 4 - 2\sqrt{x + 4}}, \forall x > 0$ . Khi đó  $\int_0^5 x f(x) dx$

bằng

**(A)**  $\frac{1673}{15}$ .

**(B)**  $\frac{173}{15}$ .

**(C)**  $\frac{219}{2}$ .

**(D)**  $\frac{181}{6}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{x + 4 - 2\sqrt{x + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x + 4}(\sqrt{x + 4} - 2)} = \frac{x}{\sqrt{x + 4}} \cdot \frac{x + 4 - 4}{\sqrt{x + 4} - 2} = \frac{\sqrt{x + 4} + 4}{\sqrt{x + 4}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x + 4}}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \int \left( 1 + \frac{4}{\sqrt{x + 4}} \right) dx = x + 8\sqrt{x + 4} + C.$$

Do  $f(5) = 13$  nên  $5 + 8\sqrt{9} + C = 13 \Leftrightarrow C = -16$ .

Vậy

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 x f(x) dx &= \int_0^5 x (x + 8\sqrt{x+4} - 16) dx = \int_0^5 (x^2 + 8x\sqrt{x+4} - 16x) dx \\
 &= \int_0^5 (x^2 + 8(x+4)\sqrt{x+4} - 32\sqrt{x+4} - 16x) dx \\
 &= \left( \frac{x^3}{3} + \frac{16}{5}(x+4)^2\sqrt{x+4} - \frac{64}{3}(x+4)\sqrt{x+4} - 8x^2 \right) \Big|_0^5 = \frac{1673}{15}.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = 4$  và  $f'(x) = \frac{\ln x}{x(\ln x + 1 - \sqrt{\ln x + 1})}$ ,  $\forall x > 1$ . Khi đó  $\int_1^e \frac{\sqrt{f(x)}}{x} dx$

bằng

**(A)**  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**(B)**  $\frac{4\sqrt{2} + 1}{3}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{2} + 1}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\ln x}{x(\ln x + 1 - \sqrt{\ln x + 1})} = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}(\sqrt{\ln x + 1} - 1)} = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1} \cdot \frac{\ln x + 1 - 1}{\sqrt{\ln x + 1} + 1}} \\
 &= \frac{\sqrt{\ln x + 1} + 1}{x\sqrt{\ln x + 1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}.
 \end{aligned}$$

Suy ra  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} \right) dx = \ln x + 2\sqrt{\ln x + 1} + C$ .

Mà  $f(1) = 4$  nên  $2 + C = 4 \Rightarrow C = 2$ .

Suy ra  $f(x) = \ln x + 2\sqrt{\ln x + 1} + 2 = (\sqrt{\ln x + 1} + 1)^2$ .

Vậy

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{\sqrt{f(x)}}{x} dx &= \int_1^e \left( \frac{\sqrt{\ln x + 1} + 1}{x} \right) dx = \int_1^e \sqrt{\ln x + 1} \cdot d(\ln x + 1) + \int_1^e \frac{1}{x} dx \\
 &= \left( \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x + 1)^3} + \ln x \right) \Big|_1^e = \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3} + 1 = \frac{4\sqrt{2} + 1}{3}.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(-\pi) = -2$  và  $f'(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x + 1 - \sqrt{\sin x + 1}}$ ,  $\forall x > 0$ . Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

bằng

**(A)**  $\frac{\pi}{2}$ .

**(B)**  $\pi\sqrt{2}$ .

**(C)**  $10 - 3\pi$ .

**(D)**  $\pi + 6$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\sin 2x}{\sin x + 1 - \sqrt{\sin x + 1}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x + 1} (\sqrt{\sin x + 1} - 1)} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x + 1} \cdot \frac{\sin x + 1 - 1}{\sqrt{\sin x + 1} + 1}} \\
 &= \frac{2 \cos x (\sqrt{\sin x + 1} + 1)}{\sqrt{\sin x + 1}} = 2 \cos x + \frac{2 \cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}.
 \end{aligned}$$

Suy ra  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( 2 \cos x + \frac{2 \cos x}{\sqrt{\sin x + 1}} \right) dx = 2 \sin x + 4\sqrt{\sin x + 1} + C.$

Mà  $f(-\pi) = -2$  nên  $4 + C = -2 \Leftrightarrow C = -6.$

Do đó  $f(x) = 2 \sin x + 4\sqrt{\sin x + 1} - 6.$

Vậy

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \sin x + 4\sqrt{\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} - 6 \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin x + 2 \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| - 3 \right) dx \\
 &= 2 \left( -\cos x + 4 \left( -\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) - 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left( -\frac{3\pi}{2} + 5 \right) = 10 - 3\pi.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  và  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(x) dx = \frac{a\sqrt{2} \ln \sqrt{2} + b\sqrt{2} + c}{2}$ ; với  $a, b, c$  là các số nguyên. Khi đó  $a + b + c$  bằng

**(A)** 2.

**(B)** 0.

**(C)** -1.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C.$

Mà  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  nên  $C = -\ln \sqrt{2}.$

Suy ra  $f(x) = \ln |\sin x + \cos x| - \ln \sqrt{2}.$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[ \ln(\sin x + \cos x) - \ln \sqrt{2} \right] dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Đặt  $\begin{cases} u = \ln \left[ \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ dv = \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} dx \\ v = \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$

Suy ra  $I = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \ln\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \ln \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{2}$ .

Suy ra  $a = 1, b = 1, c = -2$ . Vậy  $a + b + c = 0$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Biết  $f'(x) = \frac{5x^2 - 15x + 14}{\sqrt{2x - 3}}$ ;  $f(x) = (ax^2 + bx + c) \sqrt{2x - 3}$  với  $x > \frac{3}{2}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ . Tính

$$\int_2^{\frac{7}{2}} f(x) dx.$$

**(A)**  $\frac{230}{21}$ .

**(B)**  $\frac{21}{251}$ .

**(C)**  $\frac{230}{51}$ .

**(D)**  $\frac{21}{30}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^2 + bx + c) \sqrt{2x - 3} \Rightarrow f'(x) = (2ax + b) \sqrt{2x - 3} + \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x - 3}} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{(2ax + b)(2x - 3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x - 3}} = \frac{5ax^2 - (6a - 3b)x - 3b + c}{\sqrt{2x - 3}} \\ \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 15x + 14}{\sqrt{2x - 3}} &= \frac{5ax^2 - (6a - 3b)x - 3b + c}{\sqrt{2x - 3}} \text{ với mọi } x > \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra  $\begin{cases} 5a = 5 \\ -6a + 3b = -15 \\ -3b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 5. \end{cases}$

Vậy  $f(x) = (x^2 - 3x + 5) \sqrt{2x - 3}$  và  $\int_2^{\frac{7}{2}} f(x) dx = \int_2^{\frac{7}{2}} (x^2 - 3x + 5) \sqrt{2x - 3} dx = \frac{230}{21}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f^2(0) = 4\sqrt{2} + 6$  và  $f(x) \cdot f'(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1 - \sqrt{e^x + 1}}$ ,  $\forall x > 0$ . Khi

đó  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} f(x) dx$  bằng

**(A)**  $2 - 2\sqrt{2} \ln 2$ .

**(B)**  $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \ln 2$ .

**(C)**  $2\sqrt{2} \ln 2$ .

**(D)**  $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \ln 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot f'(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x + 1 - \sqrt{e^x + 1}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}(\sqrt{e^x + 1} - 1)} \\
 &= \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1} \left( \frac{e^x + 1 - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right)} = \frac{e^x (\sqrt{e^x + 1} + 1)}{\sqrt{e^x + 1}} \\
 &= e^x + \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}.
 \end{aligned}$$

Mặt khác  $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int f(x) d[f(x)] = \frac{f^2(x)}{2} + C_1$ .

Ta lại có  $\int \left( e^x + \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} \right) dx = e^x + 2\sqrt{e^x + 1} + C_2$ .

Do đó  $\frac{f^2(x)}{2} + C_1 = e^x + 2\sqrt{e^x + 1} + C_2 \Leftrightarrow f^2(x) = 2e^x + 4\sqrt{e^x + 1} + C$ .

Mà  $f^2(0) = 2 + 4\sqrt{2} + C$  nên  $4\sqrt{2} + 6 = 2 + 4\sqrt{2} + C \Leftrightarrow C = 4$ .

Suy ra  $f^2(x) = 2e^x + 4\sqrt{e^x + 1} + 4 = 2(e^x + 1 + 2\sqrt{e^x + 1} + 1) = 2(\sqrt{e^x + 1} + 1)^2$ .

Vì thế  $f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{e^x + 1} + 1)$ .

Khi đó  $I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} f(x) dx = \sqrt{2} \int_{\ln 3}^{\ln 8} (\sqrt{e^x + 1} + 1) dx = \sqrt{2} \left( \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx + \ln \frac{8}{3} \right)$ .

Tính  $I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx$ .

Đặt  $t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2t dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I_1 &= \int_2^3 \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int_2^3 \left( 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 2 \int_2^3 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) \right] dt = \left( 2t + \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \right) \Big|_2^3 \\
 &= 2 + \ln \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Vậy  $I = \sqrt{2} \left( 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{8}{3} \right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \ln 2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $(1; +\infty)$ , thỏa mãn  $(x - 1)f'(x) + f(x) = xe^{x+1}$ , biết

$f(2) = e^3$ . Tính  $\int_5^7 \frac{f(x)}{e^{x+1}} dx$ .

**(A)** 4.

**(B)** 3.

**(C)** 2.

**(D)** 5.

**Lời giải.**

Ta có  $(x - 1)f'(x) + f(x) = xe^{x+1} \Leftrightarrow [(x - 1) \cdot f(x)]' = x \cdot e^{x+1}$ .

Suy ra  $(x - 1) \cdot f(x) = \int xe^{x+1} dx$

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x+1} \end{cases}$ .



Suy ra  $(x-1)f(x) = x \cdot e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = e^{x+1}(x-1) + C$ .

Do đó  $f(x) = e^{x+1} + \frac{C}{x-1}$ .

Mà  $f(2) = e^3$  nên  $e^3 + C = e^3 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{x+1}$ .

Vậy  $\int_5^7 \frac{f(x)}{e^{x+1}} dx = \int_5^7 dx = x \Big|_5^7 = 2$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(1) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  với  $x > -1$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$

bằng

**(A)**  $4 \ln \frac{3}{2} + 1$ .

**(B)**  $\ln \frac{3}{2} - 4$ .

**(C)**  $4 \ln \frac{3}{2} - 1$ .

**(D)**  $\ln \frac{3}{2} + 4$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ . Đặt  $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \ln |t| + \frac{1}{t} + C \\ &= \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C \quad (\text{vì } x > -1). \end{aligned}$$

Mà  $f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = -\ln 2$ .

Suy ra  $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - \ln 2 = \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{x+1}$ .

Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[ \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{x+1} \right] dx = \int_1^2 \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \int_1^2 \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) dx + \ln 3 - \ln 2$ .

Xét  $A = \int_1^2 \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ \text{chọn } v = x+1. \end{cases}$

Suy ra  $A = (x+1) \ln \left( \frac{x+1}{2} \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 3 \ln \frac{3}{2} - 1$ .

Vậy  $\int_1^2 f(x) dx = 4 \ln \frac{3}{2} - 1$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = -\frac{2}{3}$  và  $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$  với mọi giá trị của  $x \in \mathbb{R}$ . Tổng tất cả

các nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 0$  bằng

(A) 12.

(B) 0.

(C) 5.

(D) -1.

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ .

Đặt  $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$ . Khi đó

$$\int_C \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} x dx = \int \frac{t^2-1}{t} t dt = \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + C.$$

Mà  $f(0) = -\frac{2}{3}$  nên  $C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - \sqrt{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} - \sqrt{x^2+1}$ .

Xét  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} - \sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)\sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow$   

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 0$  bằng 0.

Chọn phương án (B)

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(-1) = 2$  và  $f'(x) = \frac{1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$ . Biết  $\int_3^5 f(x) dx =$

$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c}{2}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của  $T = a + b + c$  bằng

(A) 21.

(B) 52.

(C) 64.

(D) 13.

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ .

Đặt  $t = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} \Rightarrow dt = \frac{4}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}} dx \Rightarrow \frac{1}{4} dt = \frac{1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ .

Suy ra  $\int \frac{1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}} dx = \int \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} t + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C = \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} + C$ .

Mà  $f(-1) = 2$  nên  $C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} + 2$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_3^5 f(x) dx &= \int_3^5 \left( \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+3}} + 2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} dx + \int_3^5 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x^2+2x+3)}{2\sqrt{x^2+2x+3}} dx + 4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x^2+2x+3} \right) \Big|_3^5 + 4 = \frac{\sqrt{38}-\sqrt{18}+8}{2}. \end{aligned}$$

Do đó  $a = 38, b = 18, c = 8$ .

Vậy  $a + b + c = 64$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 22.** Cho đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x = 1$  và  $x = 2$ . Biết  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + f'(x)}{2x} = 2$  và

$f(4) = 16$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

(A)  $\frac{17}{60}$ .

(B)  $\frac{2}{15}$ .

(C)  $\frac{19}{30}$ .

(D)  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Hàm đa thức bậc bốn đạt cực trị tại  $x = 1$  và  $x = 2 \Rightarrow f'(1) = f'(2) = 0$ .

Do  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + f'(x)}{2x} = 2$  nên  $f'(0) = 0$ .

Vì  $y = f(x)$  là hàm bậc bốn nên  $f'(x)$  là hàm bậc ba. Suy ra  $f'(x) = ax(x-1)(x-2)$  với  $a \neq 0$ .

Theo đề bài ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + ax(x-1)(x-2)}{2x} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + a(x-1)(x-2)}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Suy ra  $f'(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C$ .

Mà  $f(4) = 16 \Leftrightarrow \frac{4^4}{4} - 4^3 + 4^2 + C = 16 \Leftrightarrow C = 0$ . Suy ra  $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$ .

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) dx = \frac{2}{15}.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) \cdot [f(x)]^{2020} = x \cdot e^x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) = 1$ . Giá trị của  $[f(2)]^{2021}$  bằng

(A)  $2021e^2 + 1$ .

(B)  $2e^{2021} + 2021$ .

(C)  $2021e^2 + 2021$ .

(D)  $2021e^{2021} + 1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x) \cdot [f(x)]^{2020} dx &= \int x \cdot e^x dx \Leftrightarrow \int [f(x)]^{2020} d[f(x)] = (x-1) \cdot e^x + C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2021} \cdot [f(x)]^{2021} &= (x-1) \cdot e^x + C \Leftrightarrow [f(x)]^{2021} = 2021(x-1) \cdot e^x + 2021C. \end{aligned}$$

Do  $f(1) = 1$  nên  $2021C = 1$  hay  $[f(x)]^{2021} = 2021(x-1) \cdot e^x + 1$ .

Suy ra  $[f(2)]^{2021} = 2021e^2 + 1$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  với  $f(0) = f(1) = 1$ . Biết rằng:  $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$  Tính

$Q = a^{2020} + b^{2021}$ .

(A)  $Q = 2$ .

(B)  $Q = 4041$ .

(C)  $Q = -1$ .

(D)  $Q = 0$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x. \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = ef(1) - f(0) = e - 1.$$

Do đó  $a = 1, b = -1$ .

Suy ra  $Q = a^{2020} + b^{2021} = 1^{2020} + (-1)^{2021} = 0$ .

Vậy  $Q = 0$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 25.** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(1) = \sqrt[3]{e^4}$ ,  $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ , với mọi  $x > 0$ . Giá trị của  $\ln[f(2020)]$  bằng

- (A)**  $\frac{3}{2}\sqrt{6061}$ . **(B)**  $\frac{1}{\sqrt{6061}}$ . **(C)**  $\frac{2}{3}\sqrt{6061}$ . **(D)**  $\sqrt{6061}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ .

Suy ra

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ \Leftrightarrow \ln f(x) &= \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}. \end{aligned}$$

Mà  $f(1) = \sqrt[3]{e^4}$  nên  $e^{\frac{4}{3}+C} = \sqrt[3]{e^4} \Leftrightarrow C = 0$ . Suy ra  $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}}$ .

Vậy  $\ln[f(2020)] = \frac{2}{3}\sqrt{6061}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) = \frac{3}{5}, \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{4}{9}$

và  $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}$ . Tích phân  $\int_0^1 [f(x) - 1] dx$  bằng

- (A)**  $\frac{1}{15}$ . **(B)**  $-\frac{1}{15}$ . **(C)**  $-\frac{1}{10}$ . **(D)**  $\frac{1}{10}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{4} x^4 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx = \frac{f(1)}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{5}; \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180} \text{ nên } \frac{37}{180} = \frac{3}{20} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{Xét } \int_0^1 [f'(x) + kx^4]^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2k \int_0^1 x^4 f'(x) dx + k^2 \int_0^1 x^8 dx = \frac{4}{9} - \frac{4k}{9} + \frac{k^2}{9}.$$

$$\text{Cho } \int_0^1 [f'(x) + kx^4]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{9} - \frac{4k}{9} + \frac{k^2}{9} = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 [f(x) + kx^4]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2x^4, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + C, \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5} \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) - 1 = -\frac{2}{5}x^5, \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 [f(x) - 1] dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{5}x^5\right) dx = -\frac{1}{15}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (2x + 1)f^2(x), \forall x > 0, f(x) \neq 0$  và  $f(1) = -\frac{1}{2}$ . Khi đó

$$\int_1^{2020} f(x) dx \text{ bằng}$$

**(A)**  $\ln \frac{2021}{4040}.$

**(B)**  $\ln \frac{4040}{2021}.$

**(C)**  $\ln \frac{2021}{2020}.$

**(D)**  $\ln \frac{2020}{2021}.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x + 1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 1.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x + 1) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \text{ nên } C = 0. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Khi đó } \int_1^{2020} f(x) dx = \int_1^{2020} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\ln \left|\frac{x + 1}{x}\right|\right) \Big|_1^{2020} = \ln \frac{2021}{4040}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\sqrt{x \cdot f'(x)} = -f(x), \forall x \geq 1$  và  $f(e) = -\frac{1}{2}$ . Giá trị  $f(e^{2020})$  bằng

**(A)**  $-2020.$

**(B)**  $-\frac{1}{2021}.$

**(C)**  $-2021.$

**(D)**  $-\frac{1}{2020}.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \sqrt{x \cdot f'(x)} = -f(x), \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ x \cdot f'(x) = f^2(x) \end{cases}, \forall x \geq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{f(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \ln x + C, \forall x \geq 1.$$

$$\text{Lại do } f(e) = -\frac{1}{2} \text{ nên } C = 1. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{1}{1 + \ln x} \text{ (thỏa mãn điều kiện } f(x) \leq 0, \forall x \geq 1).$$

$$\text{Vậy } f(e^{2020}) = -\frac{1}{2021}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và nhận giá trị dương với  $x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$  thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,

$$f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}. \text{ Tính } \int_{\frac{8}{3}}^5 \frac{f(x)}{\sqrt{3x+1}} dx.$$

Ⓐ  $I = e^{\frac{1}{3}}(e^4 - e^2).$       Ⓑ  $I = e^{\frac{2}{3}}\left(e^{\frac{2}{3}} - 1\right).$       Ⓒ  $I = e^2\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right).$       Ⓓ  $I = e^{\frac{2}{3}}(e^2 - e).$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C}.$$

$$\text{Ta lại có } f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}.$$

$$\text{Từ đó tính } I = \int_{\frac{8}{3}}^5 \frac{f(x)}{\sqrt{3x+1}} dx = \int_{\frac{8}{3}}^5 \frac{e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}}{\sqrt{3x+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 5 & \Rightarrow t = \frac{4}{3} \\ x = \frac{8}{3} & \Rightarrow t = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} e^t dt = e^t \Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}} - e^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}\left(e^{\frac{2}{3}} - 1\right).$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{và } f'(x) = -e^x \cdot f^2(x), f(0) = \frac{1}{2}. \text{ Tính } \int_3^4 e^x f(x) dx.$$

Ⓐ  $\ln \frac{e^4 + 2}{e^3 + 1}.$       Ⓑ  $\ln \frac{e^3 + 1}{e^4 + 2}.$       Ⓒ  $\ln \frac{e^4 + 1}{e^3 + 1}.$       Ⓓ  $\ln \frac{e^3 + 1}{e^4 + 1}.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = - \int e^x dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{f^2(x)} = - \int e^x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \text{ nên } -2 = -1 + C \Leftrightarrow C = -1. \text{ Do đó } -\frac{1}{f(x)} = -e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$\text{Vậy } \int_3^4 e^x \cdot f(x) dx = \int_3^4 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_3^4 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln[e^x + 1] \Big|_3^4 = \ln \frac{e^4 + 1}{e^3 + 1}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 31.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 16$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^4 x f' \left( \frac{x}{2} \right) dx$

(A)  $I = 112$ . (B)  $I = 28$ . (C)  $I = 144$ . (D)  $I = 12$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f' \left( \frac{x}{2} \right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f \left( \frac{x}{2} \right) \end{cases}.$$

Khi đó

$$I = \int_0^4 x f \left( \frac{x}{2} \right) dx = 2x f \left( \frac{x}{2} \right) \Big|_0^4 - 2 \int_0^4 f \left( \frac{x}{2} \right) dx = 128 - 2I_1 \text{ với } I_1 = \int_0^4 f \left( \frac{x}{2} \right) dx.$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x}{2} \Rightarrow dx = 2 du. \text{ Khi đó } I_1 = \int_0^4 f \left( \frac{x}{2} \right) dx = 2 \int_0^2 f(u) du = 2 \int_0^2 f(x) dx = 8.$$

$$\text{Vậy } I = 128 - 2I_1 = 128 - 16 = 112.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 32.** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của

$a + 2(b + c)$  là

(A) 0. (B) 9. (C) 3. (D) 5.

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+2x) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} \\ \text{chọn } v = -\frac{1}{x} - 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} - 2 \right) \ln(1+2x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{x} dx = -\frac{5}{2} \ln 5 + 3 \ln 3 + 2 \ln 2.$$

$$\text{Do đó } a + 2(b + c) = -5 + 2(3 + 2) = 5.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 33.** Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$ , ( $a, b \in \mathbb{R}^*$ ). Tính  $a + 2b$ .

(A)  $a + 2b = 7$ . (B)  $a + 2b = 5$ . (C)  $a + 2b = -1$ . (D)  $a + 2b = 8$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} &= \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx \\
&= \int_0^1 \left[ (x+2)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\
&= \frac{2}{3} \left[ (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Suy ra  $a = 2$ ,  $b = 3$ . Vậy  $a + 2b = 8$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ ,

với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tổng  $T = a + b + 3c$  bằng

**(A)** 15.

**(B)** -10.

**(C)** -19.

**(D)** -17.

**Lời giải.**

Do hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên hàm số liên tục tại  $x = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx = \int_{-1}^0 (3+x^2)^{\frac{1}{2}} d(3+x^2) = \frac{2}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^1 f(x) dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \text{ Do đó } a = 1; b = 2; c = -\frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 35.** Biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sin x dx = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản,  $a, b \in \mathbb{N}$ . Giá trị của  $a.b$  là

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 6.

**Lời giải.**

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x. \end{cases}$$



Khi đó  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sin x \, dx = (-e^x \cdot \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \cos x \, dx.$

Xét  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \cos x \, dx.$

Đặt  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x \, dx \\ v = \sin x. \end{cases}$

Khi đó:  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \cos x \, dx = (e^x \cdot \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sin x \, dx.$

Suy ra  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sin x \, dx = (-e^x \cdot \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (e^x \cdot \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cdot \sin x \, dx = 1 - I \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}.$

Vậy  $a = 1; b = 2$  nên  $a \cdot b = 2.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 36.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} \, dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $T = a^2 + b^2 + c^2$ .

**(A)**  $T = 1.$

**(B)**  $T = 11.$

**(C)**  $T = 9.$

**(D)**  $T = 3.$

**Lời giải.**

Ta có  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} \, dx.$

Đặt  $\ln x + 2 = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt.$

Đổi cận  $x = 1 \Rightarrow t = 2, x = e \Rightarrow t = 3.$

Suy ra  $I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} \, dt = \int_2^3 \frac{1}{t} \, dt - 2 \int_2^3 \frac{1}{t^2} \, dt = \ln t \Big|_2^3 + \frac{2}{t} \Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2} = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.$

Suy ra  $a = 1, b = -1, c = -1.$

Vậy  $a^2 + b^2 + c^2 = 3.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 37.** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị

của  $a + b + c$  bằng

**(A)**  $I = 4.$

**(B)**  $I = 3.$

**(C)**  $I = 0.$

**(D)**  $I = -4.$

**Lời giải.**

Đặt  $A = \int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7}.$

Đặt  $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow \frac{2}{3}t dt = dx$ .

Đổi cận:  $x=0 \Rightarrow t=1$ ;  $x=1 \Rightarrow t=2$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t dt}{t^2+5t+6} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t}{(t+2)(t+3)} dt = \frac{2}{3} \int_1^2 \left( \frac{-2}{t+2} + \frac{3}{t+3} \right) dt = \frac{2}{3} (-2 \ln|t+2| + 3 \ln|t+3|) \Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{3} (-2 \ln 4 + 3 \ln 5 + 2 \ln 3 - 3 \ln 4) = \frac{2}{3} (-10 \ln 2 + 2 \ln 3 + 3 \ln 5) = -\frac{20}{3} \ln 2 + \frac{4}{3} \ln 3 + 2 \ln 5. \end{aligned}$$

Vậy  $a+b+c = -\frac{20}{3} + \frac{4}{3} + 2 = -\frac{10}{3}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 38.** Biết  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a+b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $T = a+b+c$ .

**(A)**  $T = -1$ .

**(B)**  $T = 0$ .

**(C)**  $T = 2$ .

**(D)**  $T = 1$ .

**Lời giải.**

Xét  $I = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx$ . Đặt  $t = \sqrt{e^x+3} \Rightarrow t^2 = e^x+3 \Rightarrow 2t dt = e^x dx$ .

Đổi cận  $x=0 \Rightarrow t=2$ ;  $x=\ln 6 \Rightarrow t=3$ .

Khi đó  $I = \int_2^3 \frac{2t}{t+1} dt = \int_2^3 \left( 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = (2t - 2 \ln|t+1|) \Big|_2^3 = 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3$ .

Suy ra  $a=2, b=-4, c=2$  nên  $T = a+b+c = 0$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 39.** Cho  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Giá trị của biểu thức

$a^b + b^a$  bằng

**(A)** 17.

**(B)** 57.

**(C)** 145.

**(D)** 32.

**Lời giải.**

Ta có  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} (x+1)^2} dx$ .

Đặt  $t = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \Rightarrow 2t dt = \frac{-2}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2} = -t dt$ .

Đổi cận:  $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}$ ;  $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$ .

Suy ra  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} (x+1)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} (-t) dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} dt = t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

Mà  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  nên suy ra  $a = 3, b = 2$ .

Từ đó ta có giá trị  $a^b + b^a = 3^2 + 2^3 = 17$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 40.** Cho tích phân  $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = a \cdot e^2 + b$ ,  $a$  và  $b$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $4a + 3b$

là (A)  $\frac{13}{2}$ . (B)  $\frac{13}{4}$ . (C)  $-\frac{13}{4}$ . (D)  $-\frac{13}{2}$ .

**Lời giải.**

$$I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx.$$

Đặt  $u = \ln x$  và  $dv = x dx$ , suy ra  $du = \frac{1}{x} dx$  và  $v = \frac{1}{2}x^2$ .

$$\text{Khi đó } \int_1^e x \ln x dx = \left. \frac{1}{2}x^2 \ln x \right|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2}e^2 - \left. \frac{1}{4}x^2 \right|_1^e = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \left. \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right|_1^e = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } 4a + 3b = \frac{13}{4}.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 41.** Biết  $\int_5^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ . Giá trị của biểu thức  $a - bc$

bằng (A)  $\frac{16}{3}$ . (B)  $-19$ . (C)  $19$ . (D)  $-16$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_5^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} &= \int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \int_5^6 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} dx \\ &= \int_5^6 \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \left( \sqrt{x-1} - \sqrt{x} \right) \Big|_5^6 \\ &= 2(\sqrt{5} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{80} - \sqrt{24} - 4. \end{aligned}$$

Suy ra  $a = 80, b = 24$  và  $c = 4$ .

Vậy  $a - bc = -16$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(4 - x) = f(x)$ . Biết  $\int_1^3 xf(x) dx = 5$ ,

tính  $\int_1^3 f(x) dx$ .

**(A)**  $\frac{5}{2}$ .

**(B)**  $\frac{7}{2}$ .

**(C)**  $\frac{9}{2}$ .

**(D)**  $\frac{11}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $5 = \int_1^3 xf(x) dx = \int_1^3 xf(4 - x) dx$ .

Đặt  $t = 4 - x \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - t \\ dx = -dt. \end{cases}$

Đổi cận:  $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Do đó  $\int_1^3 x \cdot f(4 - x) dx = - \int_3^1 (4 - t) \cdot f(t) dt = \int_1^3 (4 - t) \cdot f(t) dt = \int_1^3 4 \cdot f(t) dt - \int_1^3 t \cdot f(t) dt$ .

Suy ra  $5 = \int_1^3 4 \cdot f(t) dt - 5 \Rightarrow 4 \int_1^3 f(t) dt = 10 \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = \frac{5}{2}$  hay  $\int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{2}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 43.** Cho hàm số  $F(x)$ , biết  $F(1) = 4$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{(x + 1) \ln x + 2}{1 + x \ln x}$ .

Tính giá trị  $F(e)$ .

**(A)**  $\ln(1 + e) + 2 + e$ .

**(B)**  $\ln(1 + e) + 3 + e$ .

**(C)**  $2 \ln(1 + e) + 1$ .

**(D)**  $\ln(2 + e) + 3 + e$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\int \frac{(x + 1) \ln x + 2}{1 + x \ln x} dx = \int \frac{x \ln x + 1 + \ln x + 1}{1 + x \ln x} dx = \int \left[ 1 + \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right] dx = \int dx + \int \frac{d(1 + x \ln x)}{1 + x \ln x}$ .

Suy ra  $F(x) = x + \ln |1 + x \ln x| + C$ .

Mà  $F(1) = 4$  nên  $1 + C = 4 \Leftrightarrow C = 3$ .

Do đó  $F(x) = x + \ln |1 + x \ln x| + 3$ .

Vậy  $F(e) = \ln(1 + e) + 3 + e$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 44.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4 \cos^2 x - 5$  và thỏa mãn  $F(0) = 1$ . Khi

đó  $\int_0^\pi F(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{-3\pi^2}{2} + \pi$ .

**(B)**  $\frac{3\pi^2}{2} + \pi$ .

**(C)**  $\pi + \frac{3\pi^2}{2}$ .

**(D)**  $-\pi + \frac{3\pi^2}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Xét } I = \int (4 \cos^2 x - 5) \, dx = \int (-3 + 2 \cos 2x) \, dx = -3x + \sin 2x + C.$$

Ta có  $F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ . Suy ra  $F(x) = -3x + \sin 2x + 1$ .

$$\text{Vậy } \int_0^{\pi} (-3x + \sin 2x + 1) \, dx = \left( -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{-3\pi^2}{2} + \pi.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 45.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ ,

với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) \, dx$  bằng

**(A)**  $\frac{1}{4}$ .

**(B)**  $\frac{\pi}{4}$ .

**(C)**  $-\frac{1}{4}$ .

**(D)**  $-\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết,  $f(0) = 0$  và  $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$  nên  $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  hay  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

$$\text{Mặt khác, } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d[f(x)] = [xf(x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx \text{ hay } I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx.$$

$$\text{Mà } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \, dx \text{ nên } I = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] \, dx.$$

$$\text{Suy ra } I = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx = \left( \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}.$$

Chọn phương án **C**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. D  | 4. A  | 5. C  | 6. C  | 7. B  | 8. A  | 9. C  | 10. D |
| 11. B | 12. A | 13. B | 14. C | 15. B | 16. A | 17. D | 18. C | 19. C | 20. B |
| 21. C | 22. B | 23. A | 24. D | 25. C | 26. B | 27. A | 28. B | 29. B | 30. C |
| 31. A | 32. D | 33. D | 34. C | 35. B | 36. D | 37. A | 38. B | 39. A | 40. B |
| 41. D | 42. A | 43. B | 44. A | 45. C |       |       |       |       |       |

## DẠNG 39. TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ BẬC 1 TRÊN BẬC 1 ĐƠN ĐIỀU

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $K$ . Khi đó
  - Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $K$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $K$ .
  - Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $K$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $K$ .

### 2. Một số bài toán và phương pháp giải

**Bài toán 1.** Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x; m)$  đơn điệu trên khoảng  $(\alpha; \beta)$ .

#### PHƯƠNG PHÁP

**Bước 1:** Ghi điều kiện để  $y = f(x; m)$  đơn điệu trên  $(\alpha; \beta)$ . Chẳng hạn:

- Đề yêu cầu  $y = f(x; m)$  đồng biến trên  $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0 \forall x \in (\alpha; \beta)$ .
- Đề yêu cầu  $y = f(x; m)$  nghịch biến trên  $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0 \forall x \in (\alpha; \beta)$ .

**Bước 2:** Độc lập  $m$  ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là  $g(x)$ , có hai trường hợp thường gặp:

$$\begin{aligned} &— m \geq g(x) \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \geq \max_{(\alpha; \beta)} g(x) \\ &— m \leq g(x) \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \leq \min_{(\alpha; \beta)} g(x) \end{aligned}$$

**Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số  $g(x)$  trên  $D$  (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra  $m$ .

**Bài toán 2.** Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  đơn điệu trên khoảng  $(\alpha; \beta)$ .

#### PHƯƠNG PHÁP

**Bước 1:** Tìm tập xác định. Tính đạo hàm  $y'$ .

**Bước 2:** Hàm số đồng biến  $\Rightarrow y' > 0$  (hàm số nghịch biến  $\Rightarrow y' < 0$ ). Giải ra tìm được  $m$  (1).

**Bước 3:** Vì  $x \neq -\frac{d}{c}$  và có  $x \in (\alpha; \beta)$  nên  $-\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$ . Giải ra tìm được  $m$  (2).

**Bước 4:** Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị  $m$  cần tìm.

**Bài toán 3.** Để hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến)  $(x_1; x_2)$  bằng  $d$ .

#### PHƯƠNG PHÁP

+ Tính  $y'$ .

+ Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0. \end{cases} \quad (1)$

+ Biến đổi  $|x_1 - x_2| = d$  thành  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2 \quad (2).$

+ Sử dụng định lý Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.

+ Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

### 3. Một số kiến thức liên quan khác:

• **Định lý về dấu của tam thức bậc hai**  $g(x) = ax^2 + bx + c$ .

+ Nếu  $\Delta < 0$  thì  $g(x)$  luôn cùng dấu với  $a$ .

+ Nếu  $\Delta = 0$  thì  $g(x)$  luôn cùng dấu với  $a$ , trừ  $x = -\frac{b}{2a}$ .

+ Nếu  $\Delta > 0$  thì  $g(x)$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và trong khoảng hai nghiệm thì  $g(x)$  khác dấu với  $a$ , ngoài khoảng hai nghiệm thì  $g(x)$  cùng dấu với  $a$ .

• **So sánh các nghiệm  $x_1, x_2$  của tam thức bậc hai  $g(x) = ax^2 + bx + c$  với số 0.**

$$\square \quad x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$$

$$\square \quad 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$$

$$\square \quad x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0.$$

**Các trường hợp đặc biệt:**

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) đồng biến trên từng khoảng xác định khi:  $ad - bc > 0$ .

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) nghịch biến trên từng khoảng xác định khi:  $ad - bc < 0$ .

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) đồng biến trên khoảng  $(\alpha; +\infty)$  khi:  $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ \frac{-d}{c} \leq \alpha. \end{cases}$

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) nghịch biến trên khoảng  $(\alpha; +\infty)$  khi:  $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ \frac{-d}{c} \leq \alpha. \end{cases}$

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) đồng biến trên khoảng  $(\alpha; \beta)$  khi:  $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ \begin{cases} \frac{-d}{c} \leq \alpha \\ \frac{-d}{c} \geq \beta. \end{cases} \end{cases}$

• Hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) nghịch biến trên khoảng  $(\alpha; \beta)$  khi:  $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ \begin{cases} \frac{-d}{c} \leq \alpha \\ \frac{-d}{c} \geq \beta. \end{cases} \end{cases}$



- Tổng của  $n$  số hạng đầu cấp số cộng là  $S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2}$ .
- Nếu hàm số  $f(t)$  đơn điệu một chiều trên miền  $D$  (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) thì phương trình  $f(t) = 0$  có tối đa một nghiệm và  $\forall u, v \in \mathcal{D}$  thì  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m$  để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

(A) 5.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

1. **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng tìm giá trị tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên một khoảng cho trước.

2. **HƯỚNG GIẢI:**

- **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định; tính đạo hàm  $y' = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}$  ( $x \neq m$ ).
- **Bước 2:** Tìm điều kiện để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ :

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \leq 0. \end{cases}$$

- **Bước 3:** Tìm  $m$  thỏa mãn điều kiện ở bước 2, rồi chọn giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện xác định:  $x \neq m$ .

Ta có:  $y' = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ x \neq m \end{cases}$ . Ta có:

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 0.$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-1; 0\}$ .

Vậy có 2 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án (D)

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2}{-x + 4m}$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đã cho đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng về tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng cho trước.

2. **HƯỚNG GIẢI:**

• **Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số.

• **Bước 2:** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  khi  $\begin{cases} y' > 0 \\ 4m \geq 1. \end{cases}$

• **Bước 3:** Kết luận.

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

ĐKXD:  $x \neq 4m$ ;  $y' = \frac{-m^2 + 4m}{(-x + 4m)^2}$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 1) \\ 4m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m > 0 \\ 4m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases}.$

Do  $m$  là các số nguyên nên  $m \in \{1; 2; 3\}$ .

Chọn phương án (C)

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Kết quả của  $m$  để hàm số sau  $y = \frac{x + m}{x + 2}$  đồng biến trên từng khoảng xác định là

(A)  $m \leq 2$ .

(B)  $m > 2$ .

(C)  $m < 2$ .

(D)  $m \geq 2$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Ta có  $y' = \frac{2 - m}{(x + 2)^2}$ .

Để hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -2)$  và  $(-2; +\infty)$  thì  $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2 - m}{(x + 2)^2} > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{x - m^2}{x - 3m + 2}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

(A)  $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

(B)  $m \in (-\infty; 1)$ .

(C)  $m \in (1; 2)$ .

(D)  $m \in (2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq 3m - 2$ .

Ta có  $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x - 3m + 2)^2}$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

- (A)**  $-2 < m < -1$ . **(B)**  $-2 < m < 2$ . **(C)**  $-2 \leq m < -1$ . **(D)**  $-2 < m \leq -1$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq -m$ .

Hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$

$\Leftrightarrow y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 10}{2x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ ?

- (A)** 6. **(B)** 5. **(C)** 9. **(D)** 4.

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq -\frac{m}{2}$ .

Ta có  $y' = \frac{m^2 - 20}{(2x + m)^2}$ .

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 20 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5} \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2\sqrt{5}; -4] \cup [0; 2\sqrt{5})$ .

Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; 0; 1; 2; 3; 4\}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . Tìm tổng các phần tử của  $S$ .

- (A)** 3. **(B)** 4. **(C)** 5. **(D)** 1.

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq m$ .

Ta có  $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 2m + 3 > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2$ .

Vậy  $S = \{0; 1; 2\}$  nên tổng các phần tử là 3.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{3x + m}{x + m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -4)$ ?

(A) 9.

(B) 10.

(C) 6.

(D) 11.

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq -m$ .

$$y' = \frac{2m}{(x + m)^2}.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{(x + m)^2} > 0 \\ -m \notin (-\infty; -4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ -m \notin (-\infty; -4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4.$$

Do  $m$  nguyên nên  $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $m$  là 10.

Chọn phương án (B)

**Câu 7.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{(m + 3)x + 4}{x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

(A)  $m \in (-4; 1)$ .

(B)  $m \in [-4; 1]$ .

(C)  $m \in (-4; -1]$ .

(D)  $m \in (-4; -1)$ .

**Lời giải.**

ĐKXD:  $x \neq -m$ .

$$y' = \frac{m^2 + 3m - 4}{(x + m)^2}.$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  khi  $\begin{cases} m^2 + 3m - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-4; 1) \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-4; -1]$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{(m + 1)x + 2m + 12}{x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

(A) 6.

(B) 5.

(C) 8.

(D) 4.

**Lời giải.**

Ta có: TXD:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ ;  $y' = \frac{m^2 - m - 12}{(x + m)^2}$ .

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 4 \\ -m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 4.$

Suy ra có 5 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án (B)

**Câu 9.** Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx - 6m + 5}{x - m}$  đồng biến trên  $(3; +\infty)$  là tập có dạng  $(a; b]$ . Tính giá trị của  $S = a + b$ .

(A) 4.

(B) 3.

(C) -5.

(D) 6.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$ .

$$y' = \frac{-m^2 + 6m - 5}{(x - m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên  $(3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 6m - 5 > 0 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 3 \Rightarrow m \in (1; 3].$

Suy ra  $a = 1, b = 3 \Rightarrow S = a + b = 4.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \frac{mx + 2}{2x + m}$ ,  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

**(A)** 1.

**(B)** 5.

**(C)** 2.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}.$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(2x + m)^2}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} \left[ \frac{-m}{2} \leq 0 \\ \frac{-m}{2} \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $m$  thỏa mãn đề bài là 1.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ ,  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

**(A)** -48.

**(B)** 45.

**(C)** -55.

**(D)** -54.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\tan x \neq m.$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{2 - m}{(\tan x - m)^2}.$$

Ta có  $\frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right), \tan x \in (-1; 0), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ . Do đó

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2 - m > 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [0; 2).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-10; -9; \dots; -1; 0; 1\}.$$

$$\text{Tổng các giá trị của } m \text{ là } S = \frac{(-10 - 1)}{2} \cdot 10 + 0 + 1 = -54.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 12.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{-\cot x + 2}{\cot x + 2m}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

(A) 0.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 2.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\cot x \neq -2m$ .

Ta có  $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{-2m - 2}{(\cot x + 2m)^2}$ . Lại có  $-\frac{1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right), \cot x \in (1; +\infty) \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -2m - 2 > 0 \\ -2m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \geq \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Vậy không tồn tại  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án (A)

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trên khoảng  $(-100; 100)$  sao cho hàm số  $y = \frac{-e^x + 3}{e^x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

(A) 100.

(B) 102.

(C) 112.

(D) 110.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $e^x \neq -m$ .

Ta có  $y' = e^x \cdot \frac{-m - 3}{(e^x + m)^2}$ .

Ta có  $\begin{cases} e^x > 0 \\ e^x \in (1; +\infty) \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Suy ra hàm số  $y$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m - 3 < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vì  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-100; 100) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; \dots; 100\}$ .

Suy ra có 102 giá trị của  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án (B)

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{me^{-x} + 9}{e^{-x} + m}$ ,  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên  $(\ln 2; +\infty)$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

(A) 0.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 4.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $e^{-x} \neq -m$ .

Ta có  $y' = -e^{-x} \cdot \frac{m^2 - 9}{(e^{-x} + m)^2}$ . Ta có  $-e^{-x} < 0 \forall x \in (\ln 2; +\infty)$  và  $e^{-x} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \forall x \in (\ln 2; +\infty)$ .

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ -m \notin \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ \begin{cases} -m \leq 0 \\ -m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m \leq \frac{-1}{2} \\ 0 \leq m < 3 \end{cases}.$$

Vì  $m$  nguyên,  $m \in (-10; 10)$  nên  $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{2^{-x} + 5}{2^{-x} - 3m}$ ,  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên  $(-\log_2 3; -1)$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

(A) 45.

(B) 44.

(C) 10.

(D) 11.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $2^{-x} \neq 3m$ .

Ta có  $y' = -2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{-3m - 5}{(2^{-x} - 3m)^2}$ . Ta có  $-2^{-x} \cdot \ln 2 < 0 \forall x \in (-\log_2 3; -1)$  và  $2^{-x} \in (2; 3) \forall x \in (-\log_2 3; -1)$ .

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3m - 5 < 0 \\ 3m \notin (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-5}{3} \\ \begin{cases} m \leq \frac{2}{3} \\ m \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} < m \leq \frac{2}{3} \\ 1 \leq m \end{cases}.$$

Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{-1; 0; 1; \dots; 9\}$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{-m\sqrt{x} + 6m}{\sqrt{x} - m}$  nghịch biến trên  $(4; +\infty)$ .

(A) 2.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

**Lời giải.**

Đk:  $\sqrt{x} \neq m$ .

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{m^2 - 6m}{(\sqrt{x} - m)^2}.$$

Ta có  $\sqrt{x} > 0 \forall x \in (4; +\infty)$ ,  $\sqrt{x} \in (2; +\infty) \forall x \in (4; +\infty)$ .

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên  $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m < 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 6 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$0 < m \leq 2$ .

Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{1; 2\}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 17.** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  trên sao cho hàm số  $y = \frac{m \ln x - 2m}{\ln x - m}$  đồng biến trên khoảng  $(e; +\infty)$ .

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 4.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\ln x \neq m$ .

Ta có  $y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{-m^2 + 2m}{(\ln x - m)^2}$ . Vì  $\frac{1}{x} > 0 \forall x \in (e; +\infty)$  và  $\ln x \in (1; +\infty) \forall x \in (e; +\infty)$ .

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m^2 + 2m > 0 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

Vì  $m$  nguyên nên  $m = 1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 18.** Tìm số các giá trị nguyên của tham số  $m$  trên khoảng  $(-2020; 2020)$  sao cho hàm số

$$y = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(3x) - 5}{\log_{\frac{1}{2}}(3x) - m} \text{ nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

(A) 2020.

(B) 2021.

(C) 2023.

(D) 2022.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\log_{\frac{1}{2}}(3x) \neq m$ .

Ta có  $y' = \frac{1}{-x \ln 2} \cdot \frac{-m + 5}{\left(\log_{\frac{1}{2}}(3x) - m\right)^2}$ . Ta có  $\frac{1}{-x \ln 2} < 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$  và  $\log_{\frac{1}{2}}(3x) \in (-2; 0) \forall x \in$

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m + 5 > 0 \\ m \notin (-2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 5 \\ m \leq -2 \end{cases} \end{cases}$$

Vì  $m$  nguyên,  $m \in (-2020; 2020)$  nên  $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \cup \{-2019; -2018; \dots; -2\}$ .

Vậy có 2023 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trên khoảng  $(-2020; 2020)$  để hàm số

$$y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m} \text{ nghịch biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)?$$

(A) 2021.

(B) 2018.

(C) 2020.

(D) 2019.

**Lời giải.**

$$\text{ĐK: } \cos x \neq m; y' = -\sin x \cdot \frac{-m + 2}{(\cos x - m)^2}.$$

$$\text{Vì } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\sin x < 0; 0 < \cos x < 1.$$



Để hàm số ban đầu nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  thì

$$\begin{cases} -m + 2 > 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Do  $m$  nguyên,  $m \in (-2020; 2020)$  nên  $m \in \{-2019; -2018; \dots; 0; 1\}$ . Vậy có 2021 giá trị của  $m$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  trên khoảng  $(-2020; 2020)$  để hàm số  $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

**(A)** -2039187.

**(B)** 2022.

**(C)** 2093193.

**(D)** 2021.

**Lời giải.**

ĐK:  $\sin x \neq m$ .

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(\sin x - m) - (\sin x - 3)\cos x}{(\sin x - m)^2} = \frac{\cos x(3 - m)}{(\sin x - m)^2}.$$

Vì  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  nên  $\cos x > 0; \sin x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

$$\text{Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3. \end{cases}$$

Vì  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in (-2020; 2020) \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -1; 0\} \cup \{1; 2\}$ .

Vậy tổng các giá trị của tham số  $m$  là

$$S = \frac{-2019 + 0}{2} \cdot 2020 + 1 + 2 = -2039187.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 21.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x + 1}{x + 3m}$  nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty)$ ?

**(A)** 0.

**(B)** 6.

**(C)** 3.

**(D)** Vô số.

**Lời giải.**

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}; y' = \frac{3m - 1}{(x + 3m)^2}.$$

Hàm số  $y = \frac{x + 1}{x + 3m}$  nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6; +\infty) \subset \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

- (A)  $m \leq 0$ . (B)  $m \geq -2$ . (C)  $m \leq -3$ . (D)  $m \leq -1$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Đạo hàm:  $y' = 3x^2 + 6x - m$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  khi và chỉ khi  $y' \geq 0, \forall x < 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0.$$

**Cách 1.**

$$3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m, \forall x < 0.$$

Xét hàm số  $g(x) = 3x^2 + 6x$  trên khoảng  $(-\infty; 0)$ , ta có:  $g'(x) = 6x + 6$ .

Xét  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . Ta có  $g(-1) = -3$ .

Bảng biến thiên

|         |           |      |     |
|---------|-----------|------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ |
| $g(x)'$ |           | $-$  | $+$ |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $-3$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có  $m \leq -3$ .

**Cách 2.**

Ta có  $\Delta' = 9 + 3m$ .

Nếu  $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x < 0$ .

Nếu  $\Delta' > 0$  thì  $y'$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Khi đó để  $y' \geq 0, \forall x < 0$  thì ta phải có  $0 \leq x_1 < x_2$ .

Điều này không thể xảy ra vì  $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$ .

Vậy  $m \leq -3$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 4mx$  đồng biến trên đoạn  $[1; 4]$ .

- (A)  $m \leq \frac{1}{2}$ . (B)  $m \in \mathbb{R}$ . (C)  $\frac{1}{2} < m < 2$ . (D)  $m \leq 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m$ .

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow 2m(x+2) \leq x^2 + 2x, \forall x \in [1; 4]$

$$\Leftrightarrow 2m(x+2) \leq x(x+2), \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{2}, \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$  giảm trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ .

- Ⓐ  $(-\infty; -\frac{14}{15})$ .      Ⓑ  $(-\infty; -\frac{14}{15}]$ .      Ⓒ  $[-2; -\frac{14}{15}]$ .      Ⓓ  $[-\frac{14}{15}; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ , yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình.

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1 \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1).$$

Dễ dàng có được  $g(x)$  là hàm tăng  $\forall x \in [1; +\infty)$ , suy ra  $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$ .

Kết luận:  $(1) \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$ .

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 25.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$  nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tổng tất cả phần tử của  $S$  bằng

- Ⓐ 9.      Ⓑ -1.      Ⓒ -8.      Ⓓ 8.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = x^2 - mx + 2m$ ,  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 2m = 0 \quad (1)$ .

Để hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3 thì (1) phải có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 3$ . Điều này tương đương với  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ m^2 - 8m - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9. \end{cases}$

Do đó,  $S = \{-1; 9\}$ .

Vậy tổng tất cả các phần tử của  $S$  là 8.

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 26.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = -x^4 + (2m - 3)x^2 + m$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$  là  $(-\infty; \frac{p}{q}]$ , trong đó phân số  $\frac{p}{q}$  tối giản và  $q > 0$ . Hỏi tổng  $p + q$  là bằng

- Ⓐ 5.      Ⓑ 9.      Ⓒ 7.      Ⓓ 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . Ta có  $y' = -4x^3 + 2(2m - 3)x$ .

Hàm số nghịch biến trên  $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1; 2)$ .

Lập bảng biến thiên của  $g(x)$  trên  $(1; 2)$ .

Ta có  $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Bảng biến thiên

|         |               |                |
|---------|---------------|----------------|
| $x$     | 1             | 2              |
| $g'(x)$ | +             | 0              |
| $g(x)$  | $\frac{5}{2}$ | $\frac{11}{2}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận:  $YCBT \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$ . Vậy  $p + q = 5 + 2 = 7$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 27.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc  $S$  bằng

**(A)**  $\frac{5}{2}$ .

**(B)**  $-2$ .

**(C)**  $\frac{1}{2}$ .

**(D)**  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) \\ &= m^2(x^4 - 1) - m(x^2 - 1) + 20(x + 1) \\ &= m^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) - m(x - 1)(x + 1) + 20(x + 1) \\ &= (x + 1)[m^2(x - 1)(x^2 + 1) - m(x - 1) + 20]. \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ m^2(x - 1)(x^2 + 1) - m(x - 1) + 20 = 0(*) \end{cases}$$

Ta có  $f'(x) = 0$  có một nghiệm đơn là  $x = -1$ , do đó nếu  $(*)$  không nhận  $x = -1$  là nghiệm thì  $f'(x)$  đổi dấu qua  $x = -1$ . Do đó để  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  hay  $(*)$  nhận  $x = -1$  làm nghiệm (bậc lẻ).

$$\text{Suy ra } m^2(-1 - 1)(1 + 1) - m(-1 - 1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = -2 \end{cases}.$$

— Với  $m = -2$  thì  $f(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 10x^2 + 14x$ .

Khi đó,  $f'(x) = 4x^4 + 2x^2 + 20x + 14 = 2(x + 1)^2(2x^2 - 4x + 7)$ . Dễ thấy  $f'(x) = 0$  có duy nhất nghiệm kép  $x = -1$  nên  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

— Với  $m = \frac{5}{2}$  thì  $f(x) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 10x^2 + \frac{65}{4}x$ .

Khi đó  $f'(x) = \frac{25}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 20x + \frac{65}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x + 1)^2(5x^2 - 10x + 13) = 0$ . Dễ thấy  $f'(x) = 0$  có duy nhất nghiệm kép  $x = -1$  nên  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Vậy nhận cả hai trường hợp  $m = -2$  và  $m = \frac{5}{2}$ .  
Do đó, tổng các giá trị của  $m$  thỏa YCBT là  $\frac{1}{2}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 28.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{x + 1}{x^2 + x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

**(A)**  $(-\infty; -2]$ .

**(B)**  $(-3; -2]$ .

**(C)**  $(-\infty; 0]$ .

**(D)**  $(-\infty; -2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $y' = \frac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2}$ .

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \begin{cases} y' \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2} \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq (x+1)^2 \\ m \neq -x^2 - x \end{cases}$ ,

$\forall x \in (-1; 1)$ .

$+ m \leq (x+1)^2, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \leq 0(*)$ .

$+ \text{Đặt } f(x) = -x^2 - x, x \in (-1; 1)$

$\Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

Bảng biến thiên:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$    | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-------------------|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           |      | $+$<br>$0$<br>$-$ |     |           |
| $f(x)$  |           |      | $\frac{1}{4}$     |     |           |

0  $\nearrow$   $\frac{1}{4}$   $\searrow$   $-2$

Vậy  $m \in (-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ . (\*\*)

Từ (\*), (\*\*)  $\Rightarrow m \in (-\infty; -2]$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 29.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3(x+1)^2 - (m^2 + 3m)}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi  $y' \geq 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m^2 + 3m \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0$ .

Do  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 30.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 3.

**(D)** 0.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $y' = x^3 + m + \frac{3}{2x^2}$ .

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi  $y' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty)$$

**Cách 1:**

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có  $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{5}{2}$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 1$ . Do đó  $\min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{5}{2}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $-m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$ . Do  $m$  nguyên âm nên  $m = -1$  hoặc  $m = -2$ .

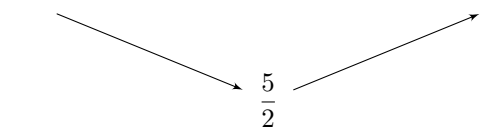
Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số  $m$  thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Cách 2:**

Xét hàm số  $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Ta có  $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Bảng biến thiên

|         |                                                                                     |   |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $x$     | 0                                                                                   | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -                                                                                   | 0 | +         |
| $f(x)$  |  |   |           |

Từ bảng biến thiên ta có  $-m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$ . Do  $m$  nguyên âm nên  $m = -1$  hoặc  $m = -2$ .

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số  $m$  thỏa mãn điều kiện bài ra.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 31.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

**(A)** 12.

**(B)** 0.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có  $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Xét hàm số  $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$  với  $x \in (0; +\infty)$ . Ta có:

$$3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6}} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = 1$  nên  $\min_{(0; +\infty)} g(x) = 4$ .

Mặt khác, ta có  $-m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của  $m$  là  $-1; -2; -3; -4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 32.** Có bao nhiêu số nguyên âm  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3} \cos^3 x - 4 \cot x - (m+1) \cos x$  đồng biến trên khoảng  $(0; \pi)$ ?

(A) 5.

(B) 2.

(C) vô số.

(D) 3.

**Lời giải.**

+ Ta có:

$$y' = -\cos^2 x \cdot \sin x + \frac{4}{\sin^2 x} + (m+1) \cdot \sin x = \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x.$$

+ Hàm số đồng biến trên  $(0; \pi)$  khi và chỉ khi  $y' \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x} \geq -m, \forall x \in (0; \pi) \quad (1).$$

+ Xét hàm số:  $g(x) = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x}$ , trên  $(0; \pi)$ . Ta có:

$$g'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - \frac{12 \cos x}{\sin^4 x} = 2 \cos x \cdot \left( \sin x - \frac{6}{\sin^4 x} \right) = 2 \cos x \cdot \frac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$$

Khi đó  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$ .

Bảng biến thiên:

| $x$     | 0         | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $g'(x)$ |           | 0               |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 5               | $+\infty$ |

+ Do đó:  $(1) \Leftrightarrow -m \leq \min_{x \in (0; \pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 5 \Leftrightarrow m \geq -5$ .

+ Lại do  $m$  nguyên âm nên  $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$ . Vậy có 5 số nguyên âm.

Chọn phương án (A)

**Câu 33.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \sin^3 x + 3 \sin^2 x - m \sin x - 4$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

(A)  $m < 0$ .

(B)  $m > 0$ .

(C)  $m \geq 0$ .

(D)  $m \leq 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$ .

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4, f'(t) = 3t^2 + 6t - m = g(t); g'(t) = 6t + 6.$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$f(t)$  đồng biến trên  $(0; 1) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t \in (0; 1)$ .

Dựa vào Bảng biến thiên  $g(t)$  trên  $[0; 1]$ , ta có

|         |      |         |
|---------|------|---------|
| $t$     | 0    | 1       |
| $g'(t)$ | +    |         |
| $g(t)$  | $-m$ | $9 - m$ |

Khi đó  $YCBT \Leftrightarrow g(0) = -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{-2 \sin x - 1}{\sin x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- (A)**  $m \geq -\frac{1}{2}$ . **(B)**  $-\frac{1}{2} < m < 0$  hoặc  $m > 1$ .  
**(C)**  $-\frac{1}{2} < m \leq 0$  hoặc  $m \geq 1$ . **(D)**  $m > -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sin x$ .

Hàm số  $y = \frac{-2 \sin x - 1}{\sin x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  khi  $f(t) = \frac{-2t - 1}{t - m}$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

Ta có  $f'(t) = \frac{2m + 1}{(t - m)^2}$ .

Hàm số  $f(t) = \frac{-2t - 1}{t - m}$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$  khi  $\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ 1 \leq m \end{cases}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 35.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{\cot x - 1}{m \cot x - 1}$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

- (A)**  $m \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$ . **(B)**  $m \in (-\infty; 0]$ .  
**(C)**  $m \in (1; +\infty)$ . **(D)**  $m \in (-\infty; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $y' = \frac{-(1 + \cot^2 x)(m \cot x - 1) + m(1 + \cot^2 x)(\cot x - 1)}{(m \cot x - 1)^2} = \frac{(1 + \cot^2 x)(1 - m)}{(m \cot x - 1)^2}$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \cot x - 1 \neq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \\ y' = \frac{(1 + \cot^2 x)(1 - m)}{(m \cot x - 1)^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \vee m \geq 1 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Chọn phương án **(B)**



**Câu 36.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

(A)  $m \leq 0$  hoặc  $1 \leq m < 2$ .

(B)  $m \leq 0$ .

(C)  $1 \leq m < 2$ .

(D)  $m \geq 2$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \tan x$ , vì  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t - 2}{t - m}$ ,  $\forall t \in (0; 1)$ .

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$ .

Ta có  $f'(t) = \frac{2 - m}{(t - m)^2}$ .

Ta thấy hàm số  $t(x) = \tan x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ . Nên để hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  khi và chỉ khi

$$f'(t) > 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{2 - m}{(t - m)^2} > 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \left[ \begin{array}{l} m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2). \\ m \geq 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Chọn phương án (A)

**Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = 8^{\cot x} + (m - 3) \cdot 2^{\cot x} + 3m - 2$  (1) đồng biến trên  $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$ .

(A)  $-9 \leq m < 3$ .

(B)  $m \leq 3$ .

(C)  $m \leq -9$ .

(D)  $m < -9$ .

**Lời giải.**

Đặt  $2^{\cot x} = t$  vì  $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$  nên  $0 < t \leq 2$ . Khi đó ta có hàm số:  $y = t^3 + (m - 3)t + 3m - 2$  (2)

Suy ra  $y' = 3t^2 + m - 3$ .

Để hàm số (1) đồng biến trên  $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$  thì hàm số (2) phải nghịch biến trên  $(0; 2]$  hay

$$3t^2 + m - 3 \leq 0, \forall t \in (0; 2] \Leftrightarrow m \leq 3 - 3t^2, \forall t \in (0; 2].$$

Xét hàm số:  $f(t) = 3 - 3t^2$ ,  $\forall t \in (0; 2] \Rightarrow f'(t) = -6t$ .

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ .

Ta có bảng biến thiên:

|         |   |    |
|---------|---|----|
| $t$     | 0 | 2  |
| $f'(t)$ | 0 | —  |
| $f(t)$  | 3 | —9 |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $-9 \leq f(t) < 3, \forall t \in (0; 2]$ .

Vậy hàm số (1) đồng biến trên  $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$  khi  $m \leq -9$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  trên đoạn  $[-2019; 2019]$  để hàm số  $f(x) = \frac{(a+1)\ln x - 6}{\ln x - 3a}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; e)$ ?

**(A)** 4035.

**(B)** 4036.

**(C)** 4037.

**(D)** 2016.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \ln x$ , hàm số trở thành  $g(t) = \frac{(a+1)t - 6}{t - 3a}$ .

Hàm số  $y = \ln x$  là hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Từ đó suy ra khi biến  $x$  tăng trên khoảng  $(0; +\infty)$  thì biến  $t$  tăng trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có  $1 < x < e \Leftrightarrow 0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < t < 1$ .

Do đó, hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; e)$  khi và chỉ khi hàm số  $g(t)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

$$g'(t) = \frac{-3a^2 - 3a + 6}{(t - 3a)^2}.$$

Hàm số  $g(t)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3a^2 - 3a + 6 < 0 \\ 3a \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a > 1 \\ a \leq 0 \\ a \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a > 1. \end{cases}$$

Chọn phương án **A**

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x} + 3}{\sqrt{6-x} + m}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  trong khoảng  $(-10; 10)$  sao cho hàm số đồng biến trên  $(-8; 5)$ ?

**(A)** 14.

**(B)** 13.

**(C)** 12.

**(D)** 15.

**Lời giải.**

Đặt  $t = -\sqrt{6-x}$  vì  $x \in (-8; 5) \Rightarrow t \in (-\sqrt{14}; -1)$  và  $t = -\sqrt{6-x}$  đồng biến trên  $(-8; 5)$ .

Hàm số trở thành  $y = \frac{-(4-m)t + 3}{-t + m}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow y' = \frac{m^2 - 4m + 3}{(-t + m)^2}$ .

$$\text{Để hàm số đồng biến trên khoảng } (-\sqrt{14}; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -1; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  có 14 giá trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 40.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = (m - x^3)\sqrt{1 - x^3}$  nghịch biến trên  $(0; 1)$ .

- (A)  $m < 1$ . (B)  $m \leq -2$ . (C)  $m > 1$ . (D)  $m \geq -2$ .

**Lời giải.**

+ Tập xác định:  $\mathcal{D} = (-\infty; 1]$ .

$$+ y' = -3x^2\sqrt{1 - x^3} - \frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}} \cdot (m - x^3) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}} (3x^3 - m - 2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{m+2}{3}} \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên  $(0; 1)$  khi và chỉ khi  $y' \leq 0, \forall x \in (0; 1)$ .

$$\text{Ta có } y' \leq 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow 3x^3 \leq m + 2, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{m+2}{3}}, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 41.** Số các giá trị nguyên không dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x + m - 3}$  đồng biến trên  $(e^2; +\infty)$  là

- (A) 2. (B) vô số. (C) 0. (D) 1.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \ln x$ . Hàm số trở thành  $y = \frac{mt - 2}{t + m - 3} (t \neq -m + 3)$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(t + m - 3)^2}.$$

Hàm số  $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x + m - 3}$  đồng biến trên  $(e^2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \text{Hàm số } y = \frac{mt - 2}{t + m - 3} \text{ đồng biến trên } (2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall t \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ -m + 3 \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ -m + 3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty).$$

Vì  $m$  là giá trị nguyên không dương nên không có giá trị  $m$  nào thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (C)

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; e)$ . Tìm số phần tử của  $S$ .

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

**Lời giải.**

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}.$$

Đặt  $t = \ln x$ , điều kiện  $t \in (0; 1)$ .

$$g(t) = \frac{t - 4}{t - 2m}; g'(t) = \frac{-2m + 4}{(t - 2m)^2}.$$

Để hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; e)$  thì hàm số  $g(t)$  đồng biến trên  $(0; 1) \Leftrightarrow g'(t) > 0, t \in (0; 1)$ . Ta

có

$$g'(t) > 0, t \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{-2m + 4}{(t - 2m)^2} > 0, t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 4 > 0 \\ 2m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

$S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương  $\Rightarrow S = \{1\}$ .

Vậy số phần tử của tập  $S$  là 1.

Chọn phương án **C**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

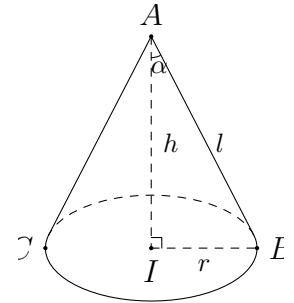
|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. D  | 3. D  | 4. A  | 5. A  | 6. B  | 7. C  | 8. B  | 9. A  | 10. A |
| 11. D | 12. A | 13. B | 14. A | 15. B | 16. A | 17. B | 18. C | 19. D | 20. A |
| 21. C | 22. C | 23. A | 24. B | 25. D | 26. C | 27. C | 28. A | 29. C | 30. A |
| 31. C | 32. A | 33. D | 34. C | 35. B | 36. A | 37. C | 38. A | 39. A | 40. B |
| 41. C | 42. C |       |       |       |       |       |       |       |       |

## DẠNG 40. KHỐI NÓN

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### a) Các yếu tố cơ bản của hình nón

- (a) Chiều cao:  $h$ .
- (b) Bán kính đường tròn đáy:  $r$ .
- (c) Độ dài đường sinh:  $l$ .
- (d) Góc ở đỉnh:  $2\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).



#### b) Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón: $l^2 = h^2 + R^2$ .

#### c) Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác: Cho $\triangle AIB$ vuông tại $I$ quay quanh cạnh góc vuông $AI$ thì đường gấp khúc $ABI$ tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

- (a) Đường thẳng  $AI$  gọi là trục,  $A$  là đỉnh,  $AI$  gọi là đường cao và  $AB$  gọi là đường sinh của hình nón.
- (b) Hình tròn tâm  $I$ , bán kính  $r = IB$  là đáy của hình nón.

#### d) Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón: Cho hình nón có chiều cao là $h$ , bán kính đáy $r$ và đường sinh là $l$ thì ta có

- (a) Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \pi rl$
- (b) Diện tích đáy (hình tròn):  $S_d = \pi r^2$ ;
- (c) Diện tích toàn phần hình nón:  $S_{tp} = S_{xq} + S_d$ ;
- (d) Thể tích khối nón:  $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}S_d h = \frac{1}{3}\pi r^2 l$ .

#### e) Thiết diện của hình nón ( $N$ ) khi cắt bởi mặt phẳng ( $P$ )

◇ TH1. ( $P$ ) đi qua đỉnh của hình nón ( $N$ ):

- i. Nếu ( $P$ ) tiếp xúc với mặt nón ( $N$ ) theo một đường sinh thì ta gọi ( $P$ ) là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.
- ii. Nếu ( $P$ ) cắt hình nón ( $N$ ) theo 2 đường sinh thì thiết diện là tam giác cân.
- iii. Đặc biệt, nếu ( $P$ ) đi qua trục của mặt nón ( $N$ ) thì thiết diện là tam giác cân có cạnh bên  $l$  và cạnh đáy  $2r$ .

◇ TH2. ( $P$ ) không đi qua đỉnh của hình nón ( $N$ ):

- i. Nếu ( $P$ ) vuông góc với trục hình nón thì giao tuyến là một đường tròn.

- ii. Nếu  $(P)$  song song với 2 đường sinh hình nón thì giao tuyến là 2 nhánh của một hypebol.
- iii. Nếu  $(P)$  song song với một đường sinh hình nón thì giao tuyến là một đường parabol.

f) Công thức tính độ dài cung tròn có số đo  $a^\circ$ , bán kính  $R$  là  $l = \frac{\pi Ra}{180}$ .

g) Tính chất  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ :

(a) Độ dài đường cao, đường trung tuyến:  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

(b) Diện tích tam giác:  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hình nón có chiều cao bằng  $2\sqrt{5}$ . Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng  $9\sqrt{3}$ . Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

(A)  $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$ .

(B)  $32\pi$ .

(C)  $32\sqrt{5}\pi$ .

(D)  $96\pi$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán tính thể tích của khối nón tròn xoay.

b) **HƯỚNG GIẢI:**

B1: Tìm bán kính hình tròn đáy

B2: Áp dụng công thức tính thể tích.

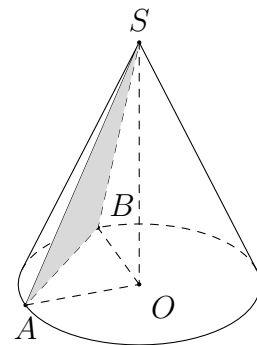
### ❖❖❖ LỜI GIẢI CHI TIẾT ❖❖❖

Mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều  $SAB$ .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle SAB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow SA^2 = 36.$$

$$\text{Ta có: } R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{36 - 20} = 4.$$

$$\text{Thể tích của khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 4^2 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5}\pi}{3}.$$



Chọn phương án (A)

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Hình nón có chiều cao  $3\sqrt{3}$  cm, góc giữa một đường sinh và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tính diện tích toàn phần  $S_{tp}$  của hình nón đó.

- (A)  $S_{tp} = 18\pi \text{ cm}^2$ . (B)  $S_{tp} = 81\pi \text{ cm}^2$ . (C)  $S_{tp} = 27\pi \text{ cm}^2$ . (D)  $S_{tp} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

**Lời giải.**

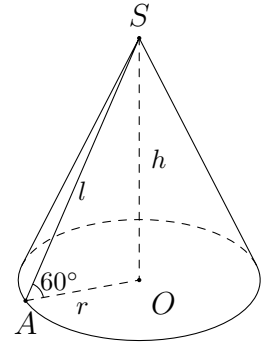
Tam giác  $SAO$  vuông tại  $O$  có  $r = h \cot 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ cm}$ .

Độ dài đường sinh  $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6 \text{ cm}$ .

Khi đó diện tích xung quanh hình nón  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi \text{ cm}^2$ .

Diện tích đáy:  $S_d = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$ .

Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = S_d + S_{xq} = 9\pi + 18\pi = 27\pi \text{ cm}^2$ .



Chọn phương án (C)

**Câu 2.** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$ , diện tích xung quanh bằng  $18a^2\pi$ . Thể tích  $V$  của khối nón đã cho bằng

- (A)  $9\pi a^3\sqrt{3}$ . (B)  $3\pi a^3\sqrt{3}$ . (C)  $9\pi a^3$ . (D)  $3\pi a^3$ .

**Lời giải.**

Hình nón có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$  nên  $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$ .

$\triangle SAO$  vuông tại  $O$  nên  $SA = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = 2AO$ .

Khi đó, diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi \cdot AO \cdot SA = \pi \cdot AO \cdot 2AO = 2\pi \cdot AO^2.$$

Theo bài ra  $S_{xq} = 18a^2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi \cdot AO^2}{\sqrt{3}} = 18a^2\pi \Leftrightarrow AO^2 = 9a^2 \Leftrightarrow AO = 3a$ .

$\triangle SAO$  vuông tại  $O \Rightarrow SO = \frac{AO}{\tan 30^\circ} = 3a\sqrt{3}$ .

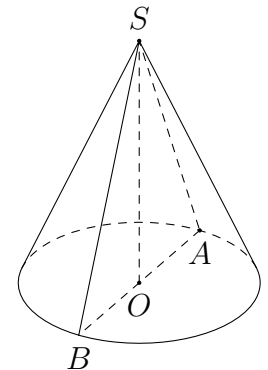
Vậy thể tích khối nón:  $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot (3a)^2 \cdot 3a\sqrt{3} = 9\pi a^3\sqrt{3}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 3.** Một hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích đáy của hình nón bằng  $4\pi a^2$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón đó.

- (A)  $S_{xq} = 32\pi a^2$ . (B)  $S_{xq} = 4\pi a^2$ . (C)  $S_{xq} = \frac{8\pi a^2}{3}$ . (D)  $S_{xq} = 8\pi a^2$ .

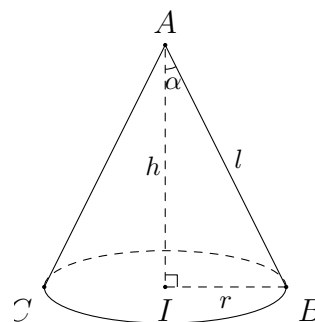
**Lời giải.**





Diện tích đáy của hình nón:  $S = \pi r^2 = 4\pi \cdot a^2 \Leftrightarrow r = 2a$ . Hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính nên  $l = 2r = 4a$ .

Diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 2a \cdot 4a = 8\pi a^2$ .



Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Trong không gian cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$  và  $AC = a\sqrt{2}$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón có được khi quay tam giác  $ABC$  xung quanh trục  $AB$ .

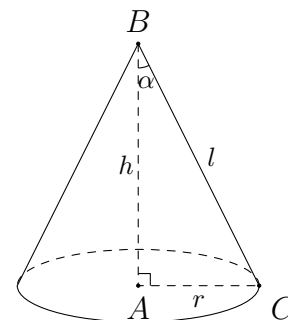
- (A)  $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{10}$ . (B)  $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{6}$ . (C)  $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{3}$ . (D)  $S_{xq} = \frac{2\pi}{3}$ .

**Lời giải.**

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$  và  $AC = a\sqrt{2}$  nên  $BC = a\sqrt{3}$ .

Khi quay tam giác  $ABC$  xung quanh trục  $AB$  ta được hình nón có chiều cao  $h = AB = a$ , bán kính đường tròn đáy  $r = AC = a\sqrt{2}$  và đường sinh  $l = BC = a\sqrt{3}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \pi a^2 \sqrt{6}$ .



Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ , gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón tạo thành khi cho tam giác  $ABC$  quay quanh  $AM$ .

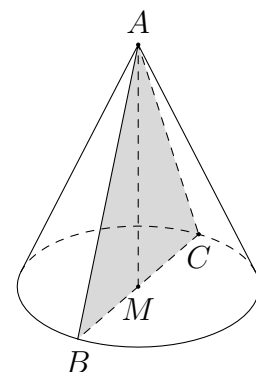
- (A)  $V = \pi a^3 \sqrt{3}$ . (B)  $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$ . (C)  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ . (D)  $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ .

**Lời giải.**

Khi quay  $\triangle ABC$  quanh cạnh  $AM$  ta được hình nón có

- chiều cao  $h = AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ ,
- bán kính đường tròn đáy  $r = \frac{BC}{2} = a$ .

Khi đó thể tích khối nón tạo thành  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ .



Chọn phương án **(C)**

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 12$ ,  $AC = 5$ . Gọi  $V_1$  là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác  $ABC$  quanh cạnh  $AB$  và  $V_2$  là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác  $ABC$  quanh cạnh  $AC$ . Khi đó, tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$  bằng

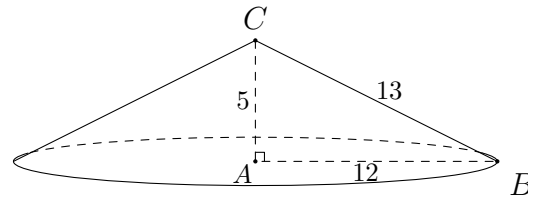
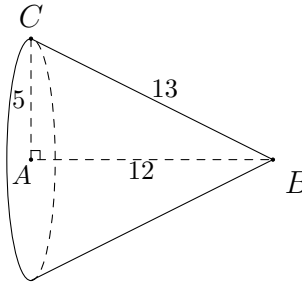
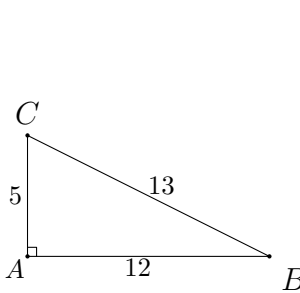
Ⓐ  $\frac{5}{12}$ .

Ⓑ  $\frac{12}{5}$ .

Ⓒ 1.

Ⓓ  $\frac{25}{144}$ .

Lời giải.



Khi quay  $\triangle ABC$  quanh cạnh  $AB$  ta được khối nón có chiều cao  $h_1 = AB = 12$ , bán kính đường tròn đáy  $r_1 = AC = 5$ . Thể tích khối nón  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12$ .

Khi quay  $\triangle ABC$  quanh cạnh  $AC$  ta được khối nón có chiều cao  $h_2 = AC = 5$ , bán kính đường tròn đáy  $r_2 = AB = 12$ . Thể tích khối nón  $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5$ .

Ta có:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{\frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5} = \frac{5}{12}$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AC = a$ ,  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Khi quay quanh  $AB$ , các đường gấp khúc  $AMB$ ,  $ACB$  sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là  $S_1$ ,  $S_2$ . Tính tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$ .

Ⓐ  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ .

Ⓑ  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$ .

Ⓒ  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{8}$ .

Ⓓ  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$ .

Lời giải.

$\triangle ABC$  vuông tại  $A$  nên  $AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ ;  $BC = \frac{AC}{\cos 60^\circ} = 2a$ .

$M$  là trung điểm  $AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ .

$\triangle ABM$  vuông tại  $A \Rightarrow BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ .

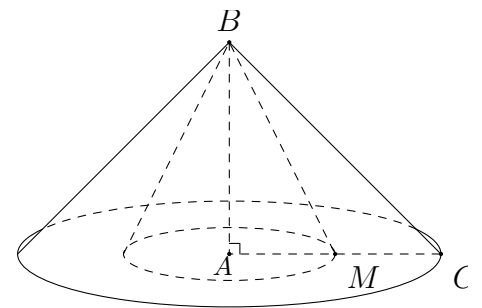
Khi quay đường gấp khúc  $AMB$  quanh cạnh  $AB$  ta được hình nón có chiều cao  $h_1 = AB = a\sqrt{3}$ , bán kính đường tròn đáy  $r_1 = AM = \frac{a}{2}$  và độ dài đường sinh  $l_1 = BM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón  $S_1 = \pi r_1 l_1 = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{13}}{4}$ .

Khi quay đường gấp khúc  $ACB$  quanh cạnh  $AB$  ta được hình nón có chiều cao  $h_2 = AB = a\sqrt{3}$ , bán kính đường tròn đáy  $r_2 = AC = a$  và độ dài đường sinh  $l_2 = BC = 2a$ . Diện tích xung quanh của hình nón  $S_2 = \pi r_2 l_2 = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$ .

Do đó  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{8}$ .

Chọn phương án Ⓒ



**Câu 8.** Cắt hình nón có chiều cao  $h$  bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân. Biết diện tích xung quanh của hình nón là  $8\pi\sqrt{2}$ . Thể tích của khối nón bằng

- (A)  $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ . (B)  $\frac{64\pi}{3}$ . (C)  $8\pi$ . (D)  $16\pi\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $h = SO$ .

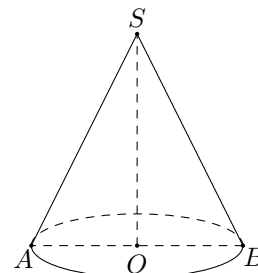
$\triangle SAB$  vuông cân tại  $S$  nên bán kính đường tròn đáy của hình nón  $r = h$ .

$\triangle SOB$  vuông tại  $O$  nên độ dài đường sinh của hình nón:  $SB = \sqrt{h^2 + r^2} = h\sqrt{2}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón  $S = \pi rl = \pi \cdot h \cdot h\sqrt{2} = \pi h^2\sqrt{2}$ .

Theo bài ra:  $S = 8\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$ .

Thể tích khối nón  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot h^3 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ .



Chọn phương án (A)

**Câu 9.** Thiết diện qua trục của một khối nón ( $N$ ) là một tam giác vuông cân và có diện tích bằng  $2a^2$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón ( $N$ ).

- (A)  $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{2}$ . (B)  $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{2}$ . (C)  $S_{xq} = \frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ . (D)  $S_{xq} = 2a^2\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

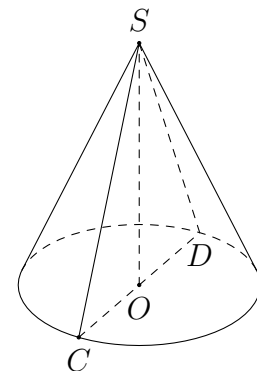
Giả sử thiết diện qua trục của ( $N$ ) là  $\triangle SCD$ .

Ta có  $\triangle SCD$  vuông cân tại  $S$  và có diện tích bằng  $2a^2$  nên

$$\frac{1}{2}SC^2 = 2a^2 \Rightarrow SC = 2a.$$

$$OC = \frac{CD}{2} = \frac{SC\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot OC \cdot SC = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\pi a^2\sqrt{2}$ .



Chọn phương án (A)

**Câu 10.** Thiết diện qua trục của một khối nón ( $N$ ) là một tam giác đều và có diện tích bằng  $4\sqrt{3}$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón ( $N$ ).

- (A)  $\frac{8\pi}{3}$ . (B)  $V = 8\pi\sqrt{3}$ . (C)  $V = 8\pi$ . (D)  $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải.**

Giả sử thiết diện qua trục của ( $N$ ) là  $\triangle SCD$ .

Ta có  $\triangle SCD$  đều và có diện tích bằng  $4\sqrt{3}$ .

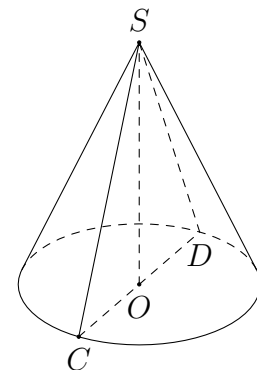
$$S_{\triangle SCD} = \frac{SC^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow SC = 4 = CD.$$

Tam giác  $SCD$  đều, có chiều cao  $SO$  nên

$$SO = \frac{SC\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$OC = \frac{CD}{2} = 2.$$

Thể tích khối nón  $V = \frac{1}{3}\pi OC^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ .



Chọn phương án **(D)**

**Câu 11.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều và khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến đường sinh bằng  $\frac{a}{2}$ . Tính diện tích toàn phần  $S_{tp}$  của hình nón.

**(A)**  $\frac{2\pi a^2}{3}$ .

**(B)**  $\frac{\pi a^2(3 + 2\sqrt{3})}{9}$ .

**(C)**  $\pi a^2$ .

**(D)**  $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{9}$ .

**Lời giải.**

Giả sử thiết diện qua trục của khối nón ( $N$ ) là  $\triangle ABC$ .

Gọi  $O$  là tâm của ( $N$ ) và  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $AC$ . Theo bài ra ta có:

$$OH = \frac{a}{2}.$$

Ta có  $\triangle ABC$  đều  $\Rightarrow \widehat{ACO} = 60^\circ$ .

$$\triangle OHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow OC = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\triangle AOC \text{ vuông tại } O \Rightarrow AO = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a; AC = BC = 2OC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Diện tích đáy của hình nón: } S = \pi OC^2 = \frac{\pi a^2}{3}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón: } S_{xq} = \pi \cdot OC \cdot AC = \frac{2\pi a^2}{3}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần } S_{tp} \text{ của hình nón: } S_{tp} = S + S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{2\pi a^2}{3} = \pi a^2.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 12.** Cho hình nón ( $N$ ) có chiều cao bằng  $6a$ . Thiết diện song song với đáy cách đáy một đoạn bằng  $2a$  có diện tích bằng  $36\pi a^2$ . Thể tích khối nón ( $N$ ) là

**(A)**  $648\pi a^3$ .

**(B)**  $162\pi a^3$ .

**(C)**  $486\pi a^3$ .

**(D)**  $108\pi a^3$ .

**Lời giải.**

Gọi  $h, r$  lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón ( $N$ ).

Ta có  $h = AO = 6a; r = OC$ .

Thiết diện song song với đáy của hình nón ( $N$ ) là đường tròn tâm  $O'$ .

Theo bài ra ta có: thiết diện cách đáy một đoạn bằng  $2a \Rightarrow OO' = 2a$ .

Gọi  $h', r'$  lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón có đỉnh là đỉnh của ( $N$ ) và đáy là đường tròn thiết diện.

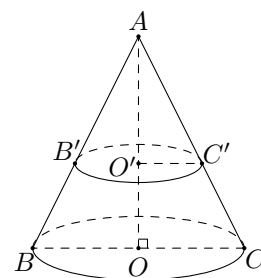
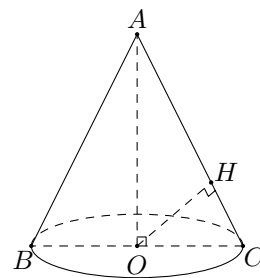
$$\Rightarrow h' = AO' = AO - OO' = 4a; r' = O'C'.$$

$$\text{Hơn nữa, diện tích đường tròn } (O'): S_{(O')} = 36\pi a^2 \Leftrightarrow \pi(r')^2 = 36\pi a^2 \Leftrightarrow r' = 6a.$$

$$\text{Theo định lý Ta-let, ta có chiều cao và bán kính đáy: } \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r = \frac{hr'}{h'} = \frac{6a \cdot 6a}{4a} = 9a.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối nón } (N) \text{ là } V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (9a)^2 \cdot 6a = 162\pi a^3.$$

Chọn phương án **(B)**



**Câu 13.** Một hình nón đỉnh  $S$  có đáy là hình tròn tâm  $O$  và  $SO = h$ . Một mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh  $S$  và tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Biết diện tích thiết diện bằng  $\frac{h^2}{3}$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón.

(A)  $V = \frac{5\pi h^3}{12}$ .

(B)  $V = \frac{17\pi h^3}{144}$ .

(C)  $V = \frac{17\pi h^3}{48}$ .

(D)  $V = \frac{5\pi h^3}{36}$ .

**Lời giải.**

$(P)$  cắt đường tròn đáy của hình nón lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Khi đó  $(P) = (SAB)$ .

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .  $\triangle OAB$  cân tại  $O \Rightarrow OI \perp AB$ .

Mặt khác  $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI)$ .

$\Rightarrow$  Góc giữa  $(P)$  với mặt phẳng đáy là  $\widehat{STO} = 60^\circ$ .

$$\triangle SOI \text{ vuông tại } O \Rightarrow OI = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{h\sqrt{3}}{3}; SI = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện bằng } \frac{h^2}{3} \Rightarrow S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \frac{h^2}{3}.$$

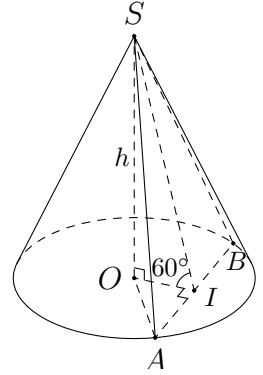
$$\text{Do đó, } AB = \frac{2S_{\triangle SAB}}{SI} = \frac{2 \cdot \frac{h^2}{3}}{\frac{2h\sqrt{3}}{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow AI = \frac{AB}{2} = \frac{h\sqrt{3}}{6}.$$

$$\triangle OIA \text{ vuông tại } I \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{h\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{h\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{h\sqrt{15}}{6}\right)^2 \cdot h = \frac{5\pi h^3}{36}.$$

Chọn phương án (D)



**Câu 14.** Cho hình nón tròn xoay đỉnh  $S$  có đáy là hình tròn tâm  $O$  và  $SO = 4$ . Một mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh  $S$  và cắt đường tròn đáy của hình nón lần lượt tại  $A, B$  sao cho  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ . Biết khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng thiết diện là  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón.

(A)  $S_{xq} = 8\pi\sqrt{3}$ .

(B)  $S_{xq} = 4\pi\sqrt{3}$ .

(C)  $S_{xq} = 6\pi$ .

(D)  $S_{xq} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ ;  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SI$ .

$\triangle OAB$  vuông cân tại  $O \Rightarrow OI \perp AB$ .

Mặt khác  $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$ .

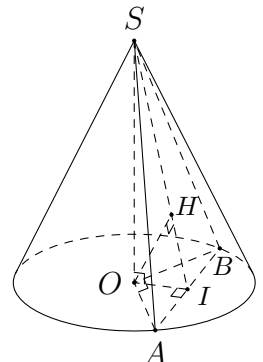
$$OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O; (SAB)) = OH = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\triangle SOI \text{ vuông tại } O \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow OI = 2.$$

$$\triangle OAB \text{ vuông cân tại } O \Rightarrow AB = 2OI = 4; OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\triangle SOA \text{ vuông tại } O \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón: } S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SO = \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\pi\sqrt{3}.$$



Chọn phương án **(A)**

**Câu 15.** Tính diện tích toàn phần  $S_{tp}$  của hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều có cạnh  $2a$ .

**(A)**  $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{3}$ .

**(B)**  $S_{tp} = \frac{4\pi a^2}{3}$ .

**(C)**  $S_{tp} = \pi a^2$ .

**(D)**  $S_{tp} = \frac{2\pi a^2}{3}$ .

**Lời giải.**

Hình nón nội tiếp tứ diện đều  $SABC$  có

• Bán kính đường tròn đáy  $r = MG = \frac{1}{3}MC = \frac{AC\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

• Độ dài đường sinh:  $l = SM = \frac{SA\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón:  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = \pi a^2$ .

Diện tích đường tròn đáy:  $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{3}$ .

Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = S + S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3} + \pi a^2 = \frac{4\pi a^2}{3}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $SA = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tính thể tích  $V$  của khối nón có đỉnh  $S$  và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác  $ABCD$ .

**(A)**  $V = \frac{\pi}{16}$ .

**(B)**  $V = \frac{\pi\sqrt{2}}{48}$ .

**(C)**  $V = \frac{\pi}{48}$ .

**(D)**  $V = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ .

**Lời giải.**

Hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = BD = 1$ .

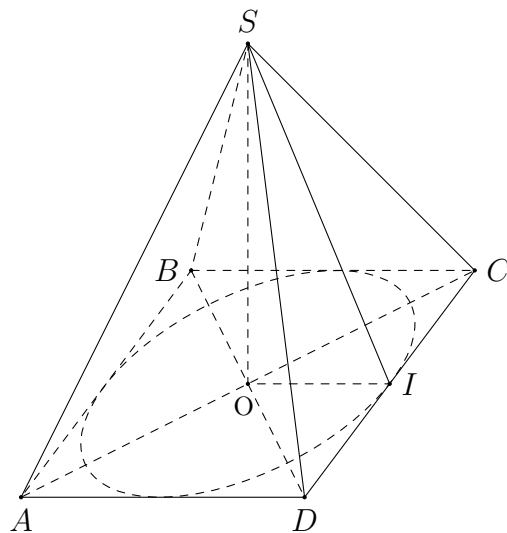
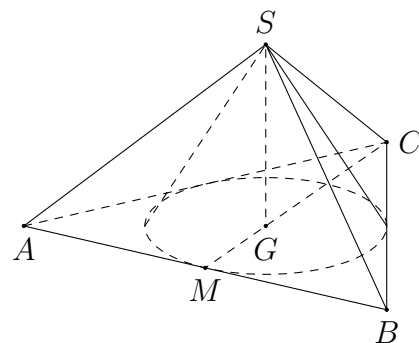
Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có bán kính đường tròn đáy  $r = OI = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , chiều cao  $h = SO = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}$ .

Khi đó thể tích khối nón tạo thành  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{48}$ .

$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{48}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 17.** Cho hình chóp đều  $S.ABC$  có chiều cao bằng  $h$ , góc giữa mặt bên và đáy bằng  $60^\circ$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón đỉnh  $S$ , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .



Ⓐ  $S_{xq} = 2\pi h^2\sqrt{7}$ .

Ⓑ  $S_{xq} = \frac{2\pi h^2\sqrt{3}}{3}$ .

Ⓒ  $S_{xq} = \frac{2\pi h^2\sqrt{7}}{3}$ .

Ⓓ  $S_{xq} = \frac{4\pi h^2}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ;  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

Khi đó,  $SG \perp (ABC)$ .

$\Rightarrow$  Góc giữa  $(SAB)$  với mặt phẳng đáy là  $\widehat{SMC} = 60^\circ$ .

$$\triangle SMG \text{ vuông tại } G \Rightarrow MG = \frac{SG}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}; SM = \frac{SG}{\sin 60^\circ} = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

$$\triangle ABC \text{ đều có } MC = 3MG = h\sqrt{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = 2h. \triangle SAM \text{ vuông tại } M \Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 + AM^2} = \sqrt{SM^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{(2h)^2}{4}} = \frac{h\sqrt{21}}{3}.$$

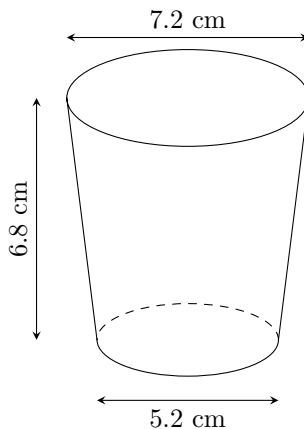
Hình nón ngoại tiếp hình chóp đều  $S.ABC$  có chiều cao  $SG = h$ , bán kính đường tròn đáy  $r = GC = 2GM = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ , độ

$$\text{dài đường sinh } l = SA = \frac{h\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Khi đó diện tích xung quanh hình nón tạo thành } S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h\sqrt{21}}{3} = \frac{2\pi h^2\sqrt{7}}{3}.$$

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 18.** Một cốc giấy có dạng hình nón cụt với các kích thước như hình vẽ.



Biết  $1 \text{ oz} = 29,57 \text{ ml}$ . Thể tích của cốc gần nhất với con số nào dưới đây?

Ⓐ 7 oz.

Ⓑ 28 oz.

Ⓒ 3 oz.

Ⓓ 4,5 oz.

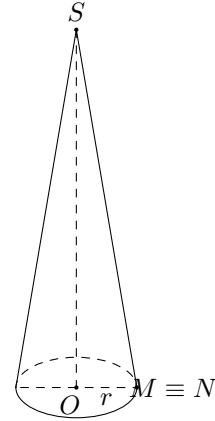
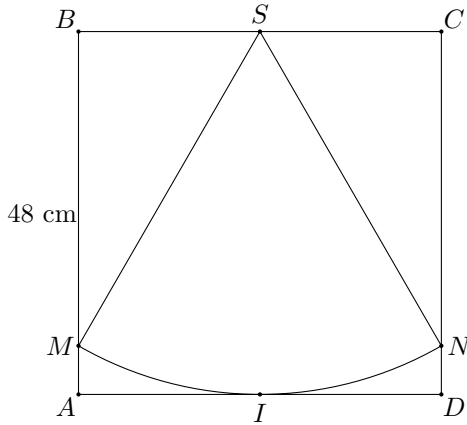
**Lời giải.**

Cốc đã cho có dạng là hình chóp cụt với bán kính 2 đáy lần lượt là  $R = 3,6 \text{ cm}$ ,  $r = 2,6 \text{ cm}$  và chiều cao  $h = 6,8 \text{ cm}$ .

$$\text{Thể tích của cốc là } V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = 207,077 \text{ cm}^3 = 207,077 \text{ ml} \approx 7 \text{ oz}.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 19.** Từ một tấm bìa hình vuông  $ABCD$  cạnh 48 cm. Gọi  $S, I$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ . Dùng compa vạch cung tròn  $MN$  có tâm là  $S$  và bán kính  $SI$  (như hình vẽ) rồi cắt tấm bìa theo cung tròn đó. Dán phần hình quạt sao cho cạnh  $SM$  và  $SN$  trùng nhau thành một cái mũ hình nón không đáy với đỉnh  $S$  (giả sử phần mép dán không đáng kể). Tính thể tích  $V$  của cái mũ đó.



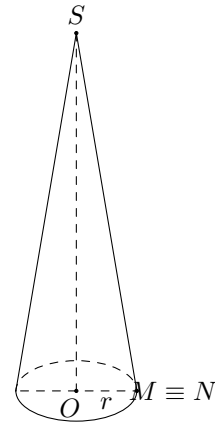
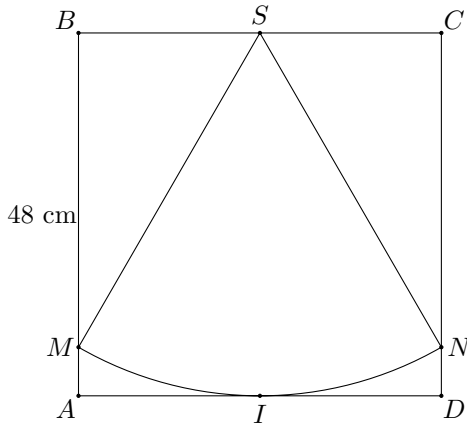
(A)  $V = \frac{512\pi\sqrt{35}}{3} \text{ cm}^3$ .

(B)  $V = \frac{512\pi\sqrt{35}}{9} \text{ cm}^3$ .

(C)  $V = 1024\pi \text{ cm}^3$ .

(D)  $V = 512\pi\sqrt{35} \text{ cm}^3$ .

**Lời giải.**



Ta có  $MN = SM = SN = 48 \text{ cm}$  nên  $\triangle SMN$  đều  $\Rightarrow \widehat{MSN} = 60^\circ$ .

Chu vi đường tròn đáy của cái mũ chính là chiều dài  $x$  của dây cung  $MN$ . Mặt khác số đo cung  $MN$  bằng số đo  $\widehat{MSN} = 60^\circ$  nên  $x = \frac{\pi \cdot 48 \cdot 60}{180} = 16\pi$ .

Gọi  $r$  là bán kính của đường tròn đáy của cái mũ, ta có  $x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} = \frac{16\pi}{2\pi} = 8$ .

Chiều cao của cái phễu  $h = \sqrt{SM^2 - r^2} = \sqrt{48^2 - 8^2} = 8\sqrt{35}$ .

Vậy thể tích cái phễu  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 8^2 \cdot 8\sqrt{35} = \frac{512\pi\sqrt{35}}{3} \text{ cm}^3$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 20.** Một chiếc ly hình nón chứa đầy rượu có chiều cao 9 cm. Người ta uống đi một phần rượu sao cho chiều cao phần rượu còn lại bằng một phần ba chiều cao ban đầu. Số phần rượu đã được uống là



Ⓐ  $\frac{8}{9}$ .

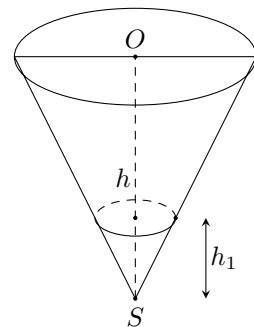
Ⓑ  $\frac{1}{3}$ .

Ⓒ  $\frac{26}{27}$ .

Ⓓ  $\frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**Gọi  $h = 9$  cm là chiều cao của ly,  $R$  là bán kính miệng ly.Thể tích ly hình nón:  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot 9 = 3\pi R^2$ .Ký hiệu  $h_1 = \frac{1}{3}h = 3$  cm là chiều cao và  $r$  là bán kính đường tròn tạo bởi mép rượu còn lại trong ly.Thể tích phần rượu còn lại:  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 3 = \pi r^2$ .Ta có:  $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi r^2}{3\pi R^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2$ .Mặt khác  $\frac{r}{R} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_1 = \frac{V}{27}$ .Thể tích phần rượu đã uống:  $V_2 = V - V_1 = \frac{26}{27}V$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 21.** Cho hình nón có chiều cao bằng  $\sqrt{3}$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $2\sqrt{3}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ⓑ  $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$ .

Ⓒ  $5\pi\sqrt{3}$ .

Ⓓ  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ .

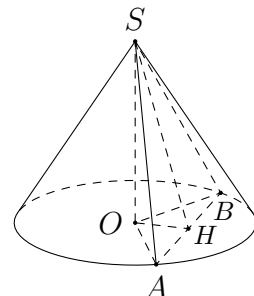
**Lời giải.**Ta có:  $h = SO = \sqrt{3}$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2 \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow SB = 2\sqrt{2}.$$

Xét  $\Delta SOB$  vuông tại  $O$ , ta có:  $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}$ .

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 22.** Cho hình nón có chiều cao bằng 4. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ  $36\pi$ .

Ⓑ  $15\pi$ .

Ⓒ  $12\pi$ .

Ⓓ  $45\pi$ .

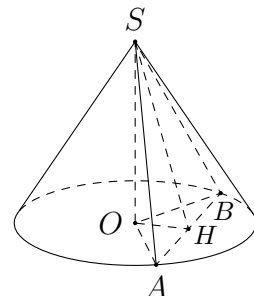
**Lời giải.**Ta có:  $h = SO = 4$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SB = 5.$$

Xét  $\Delta SOB$  vuông tại  $O$  ta có:  $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi.$$

Chọn phương án Ⓒ



**Câu 23.** Cho hình nón có bán kính đáy bằng  $\sqrt{5}$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A)  $\frac{2\sqrt{5}\pi}{3}$ .

(B)  $2\sqrt{5}\pi$ .

(C)  $10\pi$ .

(D)  $\frac{10\pi}{3}$ .

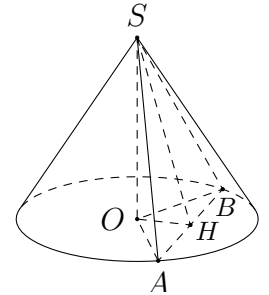
**Lời giải.**

Ta có  $r = OB = \sqrt{5}$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SB = 3.$$

$$\text{Xét } \Delta SOB \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot 2 = \frac{10\pi}{3}.$$



Chọn phương án (D)

**Câu 24.** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $9\sqrt{3}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A)  $9\pi\sqrt{3}$ .

(B)  $3\pi\sqrt{3}$ .

(C)  $27\sqrt{3}\pi$ .

(D)  $18\pi$ .

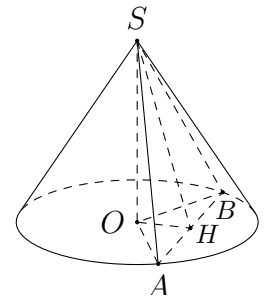
**Lời giải.**

Ta có  $r = OB = 3$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow SB = 6.$$

$$\text{Xét } \Delta SOB \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}.$$



Chọn phương án (A)

**Câu 25.** Cho hình nón có chiều cao bằng 2. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $4\sqrt{3}$ . Diện tích xung quanh của khối nón đã cho bằng

(A)  $8\pi\sqrt{3}$ .

(B)  $4\pi\sqrt{3}$ .

(C)  $24\pi$ .

(D)  $16\pi\sqrt{3}$ .

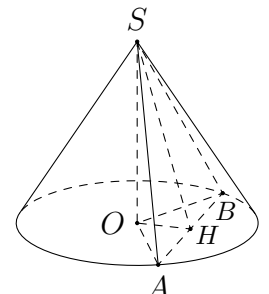
**Lời giải.**

Ta có:  $h = SO = 2$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow SB = 4.$$

$$\text{Xét } \Delta SOB \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\pi\sqrt{3}.$$



Chọn phương án (A)

**Câu 26.** Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $3\sqrt{2}$ . Diện tích xung quanh của khối nón đã cho bằng

- (A)  $9\pi\sqrt{2}$ . (B)  $\frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$ . (C)  $9\pi$ . (D)  $\frac{9\pi}{2}$ .

**Lời giải.**

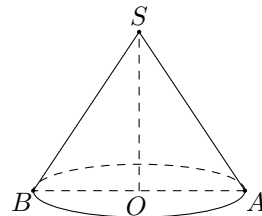
Ta có:  $AB = 3\sqrt{2}$  và  $SAB$  là tam giác vuông cân tại  $S$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông cân tại  $S$  ta có:  $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2SA^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow SA = 3$ .

$$r = OA = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \frac{9\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn phương án (B)



**Câu 27.** Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một tam giác đều có diện tích bằng  $2\sqrt{3}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A)  $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$ . (B)  $2\pi\sqrt{6}$ . (C)  $24\pi$ . (D)  $16\pi\sqrt{3}$ .

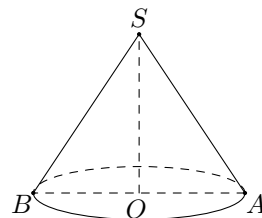
**Lời giải.**

Ta có:  $SAB$  là tam giác đều.

$$S_{\triangle SAB} = \frac{SA^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow SA = 2\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{6}; OA = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{6} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn phương án (A)



**Câu 28.** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một tam giác cân có diện tích bằng  $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A)  $\frac{375\pi\sqrt{2}}{4}$ . (B)  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{4}$ . (C)  $\frac{25\pi\sqrt{3}}{6}$ . (D)  $\frac{25\pi\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

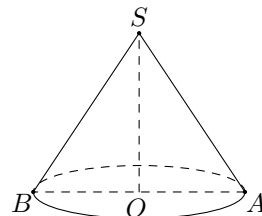
Ta có:  $SAB$  là tam giác cân tại  $S$  và góc  $ASB$  bằng  $120^\circ$ .

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} SA^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOA \text{ vuông tại } O \text{ có: } SO = SA \cdot \cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}; OA = SA \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn phương án (B)



**Câu 29.** Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác vuông cân có diện tích bằng  $\frac{9}{2}$ . Diện tích toàn phần của khối nón đã cho bằng

- (A)  $\pi \cdot \frac{6 + 3\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $\frac{9\pi}{2}$ . (C)  $\frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $\pi \cdot \frac{9 + 9\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $SAB$  là tam giác vuông cân tại  $S$ .

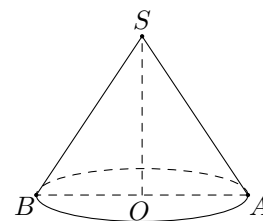
$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB = \frac{1}{2}SA^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow SA = 3.$$

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $S$  ta có:  $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ .

$$r = OA = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = \pi r(l + r) = \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \pi \cdot \frac{9 + 9\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn phương án **(D)**



**Câu 30.** Cho hình nón có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 4. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng  $\sqrt{3}$ . Diện tích của thiết diện bằng

**(A)**  $4\sqrt{3}$ .

**(B)** 4.

**(C)** 8.

**(D)** 16.

**Lời giải.**

Gọi thiết diện đã cho là tam giác  $SAB$ ;  $O$  là tâm của đường tròn đáy hình nón. Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $SK$ .

Ta có:  $OH = \sqrt{3}$  và  $SAB$  là tam giác cân tại  $S$ .

$$\text{Xét } \triangle SOK \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2^2} \Rightarrow$$

$$OK = 2\sqrt{3}.$$

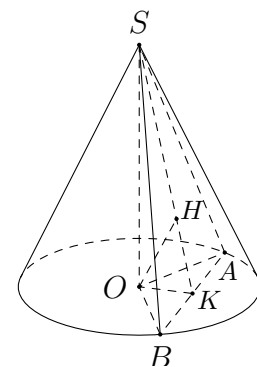
$$\text{Xét } \triangle SOK \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

$$\text{Xét } \triangle OAK \text{ vuông tại } K \text{ ta có: } AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2.$$

$$AB = 2AK = 4.$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Chọn phương án **(C)**



**Câu 31.** Cho hình nón có chiều cao bằng  $8\sqrt{2}$  và bán kính đáy bằng 5. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ . Diện tích của thiết diện bằng

**(A)** 18.

**(B)** 72.

**(C)** 36.

**(D)** 16.

**Lời giải.**

Gọi thiết diện đã cho là tam giác  $SAB$ ;  $O$  là tâm của đường tròn đáy hình nón. Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $SK$ .

Ta có:  $OH = \frac{8\sqrt{2}}{3}$  và  $SAB$  là tam giác cân tại  $S$ .

Xét  $\triangle SOK$  vuông tại  $O$  ta có:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2}$ .

Suy ra  $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2} - \frac{1}{(8\sqrt{2})^2} \Rightarrow OK = 4$ .

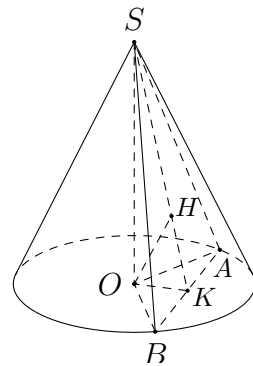
Xét  $\triangle SOK$  vuông tại  $O$  ta có:  $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 4^2} = 12$ .

Xét  $\triangle OAK$  vuông tại  $K$  ta có:  $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

$AB = 2AK = 6$ .

Vậy  $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ .

Chọn phương án **C**



**Câu 32.** Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng  $16\sqrt{3}$ . Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng

**(A)** 3.

**(B)**  $2\sqrt{3}$ .

**(C)** 9.

**(D)**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $h = SO = 6$  và  $SAB$  là tam giác đều.

$S_{\triangle SAB} = \frac{SA^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow SA = 8$ .

Xét  $\triangle SOB$  vuông tại  $O$  ta có:  $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ .

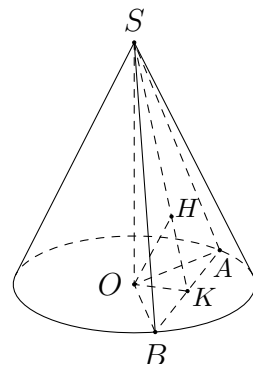
Xét  $\triangle OAK$  vuông tại  $K$  ta có:

$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$ .

Xét  $\triangle SOB$  vuông tại  $O$  ta có:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} \Rightarrow OH = 3$ .

Vậy  $OH = 3$ .

Chọn phương án **A**



**Câu 33.** Cho hình nón có đỉnh  $S$ , tâm đường tròn đáy là  $O$ , góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Một mặt phẳng qua  $S$  cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông  $SAB$ . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SO$  bằng  $3\sqrt{3}$ . Diện tích xung quanh của hình nón bằng

**(A)**  $27\pi\sqrt{3}$ .

**(B)**  $54\pi\sqrt{3}$ .

**(C)**  $108\pi\sqrt{3}$ .

**(D)**  $54\pi$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $d(AB; SO) = OH = 3\sqrt{3}$ ;  $SAB$  là tam giác vuông cân và  $\widehat{OSB} = 60^\circ$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $S$  ta có:  $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = SB \cdot \sqrt{2} \Rightarrow HB = \frac{AB}{2} = \frac{SB\sqrt{2}}{2}$ .

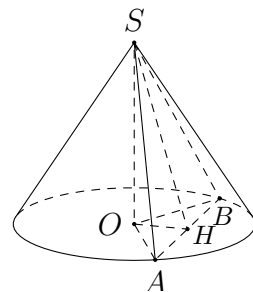
Xét  $\triangle SOB$  vuông tại  $O$  ta có:  $OB = SB \cdot \sin 60^\circ = \frac{SB\sqrt{3}}{2}$  (1).

Xét  $\triangle OHB$  vuông tại  $H$  ta có:  $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{SB\sqrt{2}}{2}\right)^2}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $\frac{SB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{27 + \frac{SB^2}{2}} \Leftrightarrow SB = 6\sqrt{3} \Rightarrow OB = 9$ .

Vậy  $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} = 54\pi\sqrt{3}$ .

Chọn phương án **(B)**



**Câu 34.** Cho hình nón có bán kính đáy bằng  $R$  và chiều cao  $SO$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $SO$  tại  $O_1$  sao cho  $SO_1 = \frac{1}{3}SO$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối nón và  $V_1$  là thể tích của khối nón cắt giới hạn bởi mặt phẳng  $(P)$  và đáy của hình nón. Tỉ số  $\frac{V_1}{V}$  bằng

**(A)**  $\frac{26}{27}$ .

**(B)**  $\frac{1}{9}$ .

**(C)**  $\frac{1}{27}$ .

**(D)**  $\frac{8}{9}$ .

**Lời giải.**

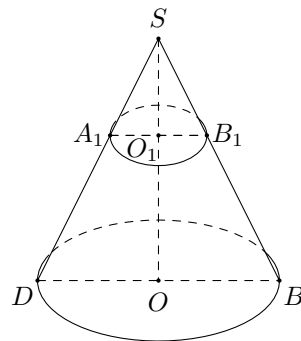
Ta có:  $\triangle SO_1B_1 \sim \triangle SOB \Rightarrow \frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1B_1}{OB} = \frac{1}{3}$ .

Gọi  $V_2$  là thể tích của khối nón có đỉnh  $S$  và đáy là đường tròn tâm  $O_1$ .

Khi đó  $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot O_1B_1^2 \cdot SO_1}{\frac{1}{3} \cdot OB^2 \cdot SO} = \left(\frac{O_1B_1}{OB}\right)^2 \cdot \frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{27}$ .

Vậy  $\frac{V_1}{V} = \frac{V - V_2}{V} = \frac{26}{27}$ .

Chọn phương án **(A)**



**Câu 35.** Cho hình nón có chiều cao  $SO = 7$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $SO$  tại  $O_1$  sao cho  $SO_1 = \frac{1}{3}SO$  được thiết diện có diện tích bằng  $16\pi$ . Thể tích của khối nón đã cho là

**(A)**  $28\pi$ .

**(B)**  $84\pi$ .

**(C)**  $588\pi$ .

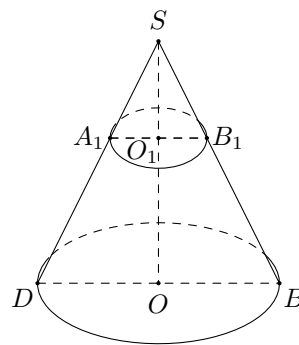
**(D)**  $336\pi$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $SO = 7$  và  $O_1B_1 = 4$ .

$$\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB \Rightarrow \frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1B_1}{OB} \Rightarrow OB = \frac{SO \cdot O_1B_1}{SO_1} = \frac{3 \cdot 4}{1} = 12.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 7 = 336\pi.$$



Chọn phương án **(D)**

**Câu 36.** Cho hình tứ diện  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $C$ ,  $CA = 2a$ ;  $SA = a\sqrt{5}$ . Mặt bên  $(SAB)$  là tam giác cân tại  $S$  và vuông góc với đáy. Thể tích của khối nón có đỉnh là  $S$  và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng

- (A)  $2\pi a^3\sqrt{3}$ . (B)  $\frac{2\pi a^3}{3}$ . (C)  $\frac{8\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ . (D)  $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải.**

Kẻ  $SO \perp AB \Rightarrow SO \perp (ABC)$ .

$\Delta ABC$  vuông cân tại  $C \Rightarrow$  tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là trung điểm  $O$  của  $AB$ .

Xét  $\Delta ABC$  vuông tại  $C$  ta có:  $AB = \sqrt{CB^2 + CA^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2a\sqrt{2}$ .

Suy ra  $OA = a\sqrt{2}$ .

Xét  $\Delta SOA$  vuông tại  $O$  ta có:  $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$ .

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h = \frac{1}{3}\pi (a\sqrt{2})^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 37.** Cho hình nón chiều cao bằng  $2a$ . Thiết diện song song và cách mặt đáy một đoạn bằng  $a$  có diện tích bằng  $\frac{9}{4}\pi a^2$ . Diện tích xung quanh của hình nón là

- (A)  $6\pi a^2\sqrt{13}$ . (B)  $3\pi a^2\sqrt{13}$ . (C)  $6\pi a^2$ . (D)  $12\pi a^3$ .

**Lời giải.**

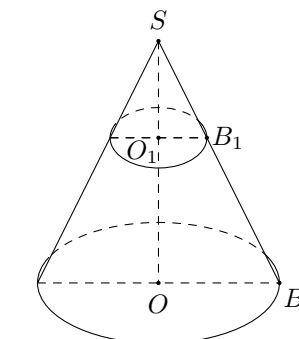
Ta có:  $O_1O = a$  và  $O_1B_1 = \frac{3a}{2}$ .

$SO_1 = SO - O_1O = a$ .

$$\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB \Rightarrow \frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1B_1}{OB} \Rightarrow OB = \frac{SO \cdot O_1B_1}{SO_1} = \frac{2a \cdot \frac{3a}{2}}{a} = 3a.$$

Xét  $\Delta SOB$  vuông tại  $O$  ta có:  $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{(2a)^2 + (3a)^2} = a\sqrt{13}$ .

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 3a \cdot a\sqrt{13} = 3\pi a^2\sqrt{13}.$$



Chọn phương án **(B)**

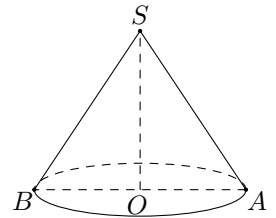
**Câu 38.** Cho hình nón có chiều cao bằng 5 và độ dài đường sinh bằng 8. Thể tích của khối trụ có đường cao trùng với đường cao của hình nón và một đáy trùng với đáy của hình nón là

Ⓐ  $195\pi$ .

Ⓑ  $5\pi\sqrt{39}$ .

Ⓒ  $\frac{5\pi\sqrt{39}}{3}$ .

Ⓓ  $16\pi\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**Ta có:  $h = SO = 5; l = SA = 8$ .Xét  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  ta có:  $r = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$ .Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là  $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (\sqrt{39})^2 \cdot 5 = 195\pi$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 39.** Cho hình nón có đỉnh  $S$ , chiều cao bằng 4 và đáy là hình tròn tâm  $O$ , bán kính bằng 3. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $S$  cắt đường tròn đáy của hình nón  $(N)$  tại hai điểm  $A, B$  với  $AB = 5$ . Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng

Ⓐ  $\frac{176}{75}$ .

Ⓑ  $\frac{5\sqrt{33}}{44}$ .

Ⓒ  $\frac{4\sqrt{33}}{15}$ .

Ⓓ  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ .

**Lời giải.**Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $SK$ .  $(SOK) \perp (SAB)$ .Suy ra  $OH \perp (SAB)$ .Ta có:  $h = SO = 4; r = OA = 3$  và  $SAB$  là tam giác cân.

$$AK = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}.$$

Xét  $\triangle OAK$  vuông tại  $K$  ta có:  $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ .Xét  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  ta có:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + \frac{1}{4^2} \Rightarrow OH =$ 

$$\frac{4\sqrt{33}}{15}.$$

$$\text{Vậy } d(O; (\alpha)) = OH = \frac{4\sqrt{33}}{15}.$$

Chọn phương án Ⓒ

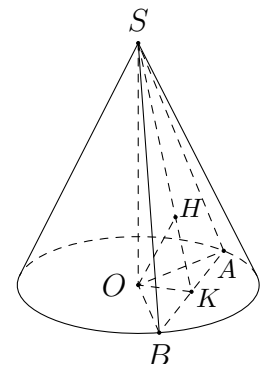
**Câu 40.** Cho hình tứ diện đều  $SABC$  cạnh  $a$ . Thể tích của khối nón nội tiếp khối tứ diện đã cho là

Ⓐ  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}$ .

Ⓑ  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{36}$ .

Ⓒ  $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{36}$ .

Ⓓ  $\frac{\pi a^3}{36}$ .

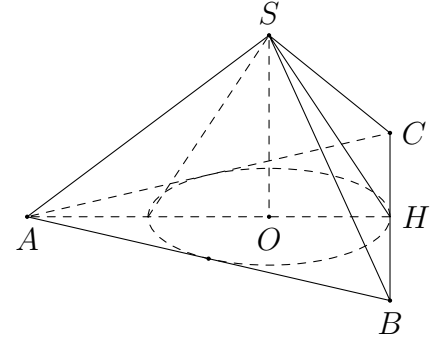
**Lời giải.**



Ta có  $SO = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$r = OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}.$$



Chọn phương án **A**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. A  | 3. D  | 4. B  | 5. C  | 6. A  | 7. C  | 8. A  | 9. A  | 10. D |
| 11. C | 12. B | 13. D | 14. A | 15. B | 16. C | 17. C | 18. A | 19. A | 20. C |
| 21. B | 22. C | 23. D | 24. A | 25. A | 26. B | 27. A | 28. B | 29. D | 30. C |
| 31. C | 32. A | 33. B | 34. A | 35. D | 36. D | 37. B | 38. A | 39. C | 40. A |

## DẠNG 41. LÔGARIT

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) **Định nghĩa logarit:**

Cho hai số thực dương  $a, b$  với  $a \neq 1, \alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ .

b) **Các tính chất logarit:** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  với  $0 < a, b, c \neq 1$ .

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc; \quad \log_a b - \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

c) **Phương trình mũ cơ bản nhất**  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (0 < a \neq 1; b > 0).$

d) **Cách giải phương trình mũ có dạng**  $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$  trong đó  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  là hệ số, cơ số  $0 < a, b \neq 1$ .

B1: Biến đổi phương trình về dạng:  $2\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0 \quad (*)$ .

B2: Đặt ẩn phụ  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t, t > 0$ , phương trình  $(*)$  trở thành  $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$ .

B3: Giải tìm  $t$  thỏa mãn  $t > 0$ .

B4: Giải phương trình mũ cơ bản  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$ . Tìm được  $x$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thỏa mãn  $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$ . Giá trị của  $\frac{x}{y}$  bằng

(A) 2.

(B)  $\frac{1}{2}$ .

(C)  $\log_2 \frac{3}{2}$ .

(D)  $\log_3 2$ .

**Lời giải.**

#### Phân tích hướng dẫn giải

**1. PHÂN TÍCH ĐỀ:** Đây là dạng tính toán liên quan đến logarit dùng định nghĩa, đẳng thức. Tìm 2 ẩn khi cho 2 phương trình.

**2. XÂY DỰNG CHƯƠNG TRÌNH GIẢI.**

B1: Đặt  $m = \log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$ , biểu thị  $x, y, 2x + y$  theo  $m$ .

B2: Lập phương trình ẩn  $m$ . Giải phương trình tìm  $m$ .

B3: Lập tỉ số  $\frac{x}{y}$ . Từ đó suy ra giá trị của  $\frac{x}{y}$ .

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y) = m \Rightarrow \begin{cases} x = 9^m \\ y = 6^m \\ 2x + y = 4^m \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^m + 6^m = 4^m \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2m} + \left(\frac{3}{2}\right)^m - 1 =$$

$$0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \frac{9^m}{6^m} = \left(\frac{3}{2}\right)^m \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án **(B)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b)$ . Giá trị của  $\frac{a}{b}$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . (C)  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ . (D)  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b) = m \Rightarrow \begin{cases} a = 4^m \\ b = 6^m \\ a + b = 9^m \end{cases} \Rightarrow 4^m + 6^m = 9^m \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} + \left(\frac{2}{3}\right)^m - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.** Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a - b}{3}$ . Tính tỉ số  $T = \frac{a}{b}$

- (A)  $T = \frac{5}{4}$ . (B)  $T = \frac{2}{3}$ . (C)  $T = \frac{3}{2}$ . (D)  $T = \frac{4}{5}$ .

**Lời giải.**

$$\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a - b}{3} = m \Rightarrow \begin{cases} a = 16^m \\ b = 20^m \\ \frac{2a - b}{3} = 25^m \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 16^m - 20^m = 3 \cdot 25^m \Leftrightarrow 2 \left(\frac{4}{5}\right)^{2m} - \left(\frac{4}{5}\right)^m - 3 =$$

$$0 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^m = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{16}{20}\right)^m = \frac{3}{2} \Leftrightarrow T = \frac{a}{b} = \frac{3}{2}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 3.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x + y)$ . Tính tỉ số  $\frac{y}{x}$

- (A)  $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ . (B)  $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$ . (C)  $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ .

**Lời giải.**

$$\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x + y) = m \Rightarrow \begin{cases} x = (\sqrt{10})^m \\ y = (\sqrt{15})^m \\ x + y = 5^m \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{10})^m + (\sqrt{15})^m = 5^m \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{m}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{m}{2}} =$$

1(1).

Xét hàm số  $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t \Rightarrow f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t \ln \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^t \ln \frac{3}{5} < 0, \forall t \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Nên phương trình  $f(t) = 0$  có duy nhất 1 nghiệm.

Từ (1) ta có  $f(m) = f(2)$  nên  $m = 2$  là một nghiệm của (1) nên (1) có nghiệm duy nhất  $m = 2$ .

Do đó  $\frac{y}{x} = \left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{3}{2}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 4.** Cho  $a, b$  là các số dương thỏa mãn  $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b-a}{2}$ . Tính giá trị  $\frac{a}{b}$ ?

**(A)**  $\frac{a}{b} = 6 - 2\sqrt{5}$ .

**(B)**  $\frac{a}{b} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$ .

**(C)**  $\frac{a}{b} = 6 + 2\sqrt{5}$ .

**(D)**  $\frac{a}{b} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b-a}{2} = t$ , ta có:

$$\begin{cases} a = 4^t \\ b = 25^t \\ \frac{4b-a}{2} = 10^t \end{cases} \Rightarrow 4 \cdot 25^t - 4^t = 2 \cdot 10^t \Leftrightarrow 4 - \left(\frac{4}{25}\right)^t = 2 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2t} + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^t - 4 = 0.$$

Đặt  $\left(\frac{2}{5}\right)^t = y > 0$ , ta có  $y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - \sqrt{5} \\ y = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow y = -1 + \sqrt{5}$ .

Từ đó  $\left(\frac{2}{5}\right)^t = -1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{4^t}{25^t} = (\sqrt{5} - 1)^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 6 - 2\sqrt{5}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho hai số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\log_{20}^a = \log_8^b = \log_{125}(5a + 12b)$ . Tính  $P = \frac{a+b}{b}$ .

**(A)**  $P = 3$ .

**(B)**  $P = 4$ .

**(C)**  $P = 2$ .

**(D)**  $P = 8$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\log_{20}^a = \log_8^b = \log_{125}(5a + 12b) = x$ .

Có  $\begin{cases} a = 20^x \\ b = 8^x \\ 5a + 12b = 125^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{2}\right)^x & (1) \\ 5 \cdot 20^x + 12 \cdot 8^x = 125^x & (2). \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 12 = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 3$ .

Khi đó  $(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 3$ .

Suy ra  $P = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = 4$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 6.** Cho các số  $a, b > 0$  thỏa mãn  $\log_3 a = \log_6 b = \log_2(a+b)$ . Giá trị  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$  bằng

**(A)** 18.

**(B)** 45.

**(C)** 27.

**(D)** 36.

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } t = \log_3 a = \log_6 b = \log_2(a+b) \Rightarrow \begin{cases} a = 3^t \\ b = 6^t \\ a+b = 2^t \end{cases} \Rightarrow 3^t + 6^t = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t = 1. \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t$  trên  $\mathbb{R}$ , có  $f(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3^t \cdot \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  và  $(1) \Leftrightarrow f(t) = f(-1) \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 45$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Cho  $\log_{27} 5 = a; \log_8 7 = b; \log_2 3 = c$ . Giá trị của  $\log_{12} 35$  bằng

**(A)**  $\frac{3b+2ac}{c+3}$ .      **(B)**  $\frac{3b+2ac}{c+2}$ .      **(C)**  $\frac{3b+3ac}{c+1}$ .      **(D)**  $\frac{3b+3ac}{c+2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\log_{27} 5 = a \Rightarrow \log_3 5 = 3a, \log_8 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b$ .

$$\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac, \log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{3b}{c}.$$

$$\log_{12} 35 = \log_{12} 7 + \log_{12} 5 = \frac{1}{\log_7 12} + \frac{1}{\log_5 12} = \frac{1}{2 \log_7 2 + \log_7 3} + \frac{1}{2 \log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_3 7}} +$$

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3b} + \frac{c}{3b}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} = \frac{3b+3ac}{c+2}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương, khác 1 và  $abc \neq 1$ . Biết  $\log_a 3 = 2, \log_b 3 = \frac{1}{4}$  và  $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$ .

Khi đó, giá trị của  $\log_c 3$  bằng bao nhiêu?

**(A)**  $\log_c 3 = \frac{1}{2}$ .      **(B)**  $\log_c 3 = 2$ .      **(C)**  $\log_c 3 = 3$ .      **(D)**  $\log_c 3 = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2}, \log_b 3 = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_3 b = 4$ .

$$\text{Khi đó ta có } \log_{abc} 3 = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c} = \frac{2}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9 + 2 \log_3 c} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow 4 \log_3 c + 18 = 30 \Leftrightarrow \log_3 c = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \frac{1}{3}.$$

Vậy  $\log_c 3 = \frac{1}{3}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Cho  $\log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13}(a+b+c)$ . Giá trị  $\log_{abc} 144$  thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**(A)**  $(-1; 0)$ .      **(B)**  $(0; 1)$ .      **(C)**  $(1; 2)$ .      **(D)**  $(2; 3)$ .

**Lời giải.**

Giả sử:  $\log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13}(a+b+c) = x$

Khi đó ta có: 
$$\begin{cases} a = 3^x \\ b = 4^x \\ c = 12^x \\ a + b + c = 13^x \end{cases} \Rightarrow 3^x + 4^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{13}\right)^x + \left(\frac{4}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 \quad (*)$$

Ta thấy  $\left(\frac{3}{13}\right)^x + \left(\frac{4}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$  là hàm liên tục nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 1$  nên  $(*)$  có nghiệm duy nhất  $x = 2$  hay  $a = 9; b = 16, c = 144 \Rightarrow \log_{abc} 144 = \log_{9 \cdot 16 \cdot 144} 144 = \frac{1}{\log_{144} 144 \cdot 16 \cdot 9} \in (0; 1)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương tùy ý khác 1 và  $xyz$  khác 1. Đặt  $a = \log_x y, b = \log_z y$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**(A)**  $\log_{xyz} (y^3 z^2) = \frac{3ab + 2b}{ab + a + b}$ .

**(B)**  $\log_{xyz} (y^3 z^2) = \frac{3ab + 2a}{a + b + 1}$ .

**(C)**  $\log_{xyz} (y^3 z^2) = \frac{3ab + 2a}{ab + a + b}$ .

**(D)**  $\log_{xyz} (y^3 z^2) = \frac{3ab + 2b}{a + b + 1}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\log_{xyz} (y^3 z^2) = 3 \log_{xyz} y + 2 \log_{xyz} z$ .

$$= \frac{3}{\log_y (xyz)} + \frac{2}{\log_z (xyz)}$$

$$= \frac{3}{\log_y x + \log_y z + 1} + \frac{2}{\log_z x + \log_z y + 1}$$

$$= \frac{3}{\log_y x + \log_y z + 1} + \frac{2}{\log_z y \cdot \log_y x + \log_z y + 1}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{2}{\frac{b}{a} + b + 1} = \frac{3ab}{ab + a + b} + \frac{2a}{ab + a + b} = \frac{3ab + 2a}{ab + a + b}$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 11.** Cho các số dương  $a, b, c$  khác 1 thỏa mãn  $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 4$ . Tính giá trị của biểu thức  $\log_c(ab)$ .

**(A)**  $\frac{6}{5}$ .

**(B)**  $\frac{8}{7}$ .

**(C)**  $\frac{10}{9}$ .

**(D)**  $\frac{7}{6}$ .

**Lời giải.**

$$\log_a(bc) = 2 \Leftrightarrow bc = a^2.$$

$$\log_b(ca) = 4 \Leftrightarrow ac = b^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{bc}{ac} = \frac{a^2}{b^4} \\ abc^2 = a^2 b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = b^5 \\ c^2 = ab^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{3}{5}} \\ c = a^{\frac{7}{5}} \end{cases} \quad (\text{do } a, b, c > 0).$$

$$\text{Khi đó: } \log_c(ab) = \log_{a^{\frac{7}{5}}} \left( a \cdot a^{\frac{3}{5}} \right) = \log_{a^{\frac{7}{5}}} \left( a^{\frac{8}{5}} \right) = \frac{8}{7}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Biết  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_2 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2$  và

$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Giá trị  $P = a + b$  là

Ⓐ  $P = 14.$

Ⓑ  $P = 13.$

Ⓒ  $P = 15.$

Ⓓ  $P = 16.$

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0, x \neq \frac{1}{2}.$$

$$\log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} = 6x - 4x^2 \Leftrightarrow \log_2(2x - 1)^2 - \log_2 x = -(2x - 1)^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = \log_2(2x) + 2x(1).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$  với  $t > 0$ .Ta có  $f(t) = \frac{1}{\ln 2 \cdot t} + 1 > 0$  với  $t > 0$  suy ra  $f(t) = \log_3 t + t$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Xét } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \text{ từ (1) ta có } f((2x - 1)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Xét } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), \text{ từ (1) ta có } f((2x - 1)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó, phương trình } \log_2 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5}). \text{ Suy ra } a = 9, b = 5 \Rightarrow P = a + b = 14.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 13.** Biết  $a = \log_{30} 10$ ,  $b = \log_{30} 150$  và  $\log_{2000} 15000 = \frac{x_1 a + y_1 b + z_1}{x_2 a + y_2 b + z_2}$  với  $x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2$  là các số nguyên, tính  $S = \frac{x_1}{x_2}$ .

Ⓐ  $S = \frac{1}{2}.$

Ⓑ  $S = 2.$

Ⓒ  $S = \frac{2}{3}.$

Ⓓ  $S = 1.$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_{2000} 15000 = \frac{\log_{30} 15000}{\log_{30} 2000} = \frac{\log_{30} 150 + 2 \log_{30} 10}{\log_{30} 2 + 3 \log_{30} 10} \quad (1).$$

$$\text{Ta có } a = \log_{30} 10 = \log_{30} 5 + \log_{30} 2 \Rightarrow \log_{30} 2 = a - \log_{30} 5 \quad (2).$$

$$b = \log_{30} 150 = 1 + \log_{30} 5 \Rightarrow \log_{30} 5 = b - 1 \text{ thay vào (2) ta được } \log_{30} 2 = a - b + 1.$$

$$\text{Ta có } \log_{2000} 1500 = \frac{b + 2a}{a - b + 1 + 3a} = \frac{2a + b}{4a - b + 1}.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 14.** Cho các số thực dương  $x, y$  khác 1 và thỏa mãn  $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x(x - y) = \log_y(x + y). \end{cases}$

Giá trị của  $x^2 + xy - y^2$  bằng



Ⓐ 0.

Ⓑ 3.

Ⓒ 1.

Ⓓ 2.

**Lời giải.**ĐK:  $x > y$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}(n) \\ x = y(l) \\ \log_x(x-y) = \log_{x^{-1}}(x+y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \log_x(x-y) + \log_x(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \log_x(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 2. \end{aligned}$$

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 15.** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} = 100$  và  $\sqrt{\log a}, \sqrt{\log b}, \log \sqrt{a}, \log \sqrt{b}$  đều là các số nguyên dương. Tính  $P = ab$ .

Ⓐ  $10^{164}$ .Ⓑ  $10^{100}$ .Ⓒ  $10^{200}$ .Ⓓ  $10^{144}$ .**Lời giải.**Ta có:  $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} = 100$ 

$$\Leftrightarrow \log a + \log b + 2\sqrt{\log a} + 2\sqrt{\log b} = 200 \Leftrightarrow (\sqrt{\log a} + 1)^2 + (\sqrt{\log b} + 1)^2 = 202 = 81 + 121(*).$$

Mà  $\sqrt{\log a}, \sqrt{\log b}, \log \sqrt{a}, \log \sqrt{b}$  đều là các số nguyên dương nên.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log a} + 1 = 9 \\ \sqrt{\log b} + 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log a = 64 \\ \log b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10^{64} \\ b = 10^{100} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } P = ab = 10^{64} \cdot 10^{100} = 10^{164}.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 16.** Cho  $\log_9 5 = a; \log_4 7 = b; \log_2 3 = c$ . Biết  $\log_{24} 175 = \frac{mb + nac}{pc + q}$ . Tính  $A = m + 2n + 3p + 4q$

Ⓐ 27.

Ⓑ 25.

Ⓒ 23.

Ⓓ 29.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_{24} 175 = \log_{24} 7 \cdot 5^2 = \log_{24} 7 + 2\log_{24} 5 = \frac{1}{\log_7 24} + \frac{2}{\log_5 24} =$$

$$\frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2^3} + \frac{2}{\log_5 3 + \log_5 2^3} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 7} + \frac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\frac{1}{\log_3 5} + \frac{3}{\log_2 5}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_2 7 \cdot \log_3 2} + \frac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\frac{1}{\log_3 5} + \frac{3}{\log_2 3 \cdot \log_3 5}} = \frac{1}{\frac{1}{2b \cdot \frac{1}{c}} + \frac{3}{2b}} + \frac{2}{\frac{1}{2a} + \frac{3}{c \cdot 2a}} =$$

$$\frac{1}{\frac{c}{2b} + \frac{3}{2b}} + \frac{2}{\frac{c}{2ac} + \frac{3}{2ac}} = \frac{2b}{c+3} + \frac{4ac}{c+3} = \frac{2b+4ac}{c+3}.$$

$$A = m + 2n + 3p + 4q = 2 + 8 + 3 + 12 = 25.$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 17.** Cho  $x, y$  là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn  $x^2 - 6y^2 = xy$ . Tính  $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$ .

(A)  $M = \frac{1}{4}$ .

(B)  $M = 1$ .

(C)  $M = \frac{1}{2}$ .

(D)  $M = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 6y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 6y^2 = 0 \quad (*)$ .

Do  $x, y$  là các số thực dương lớn hơn 1 nên ta chia cả 2 vế của  $(*)$  cho  $y^2$  ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y(n) \\ x = -2y(l) \end{cases}. \text{ Vậy } x = 3y \quad (1).$$

Mặt khác  $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)} = \frac{\log_{12} 12xy}{\log_{12}(x + 3y)^2} \quad (2).$

Thay (1) vào (2) ta có  $M = \frac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 18.** Cho  $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ . Biết  $f(\log(\log e)) = 2$ . Tính  $f(\log(\ln 10))$ .

(A) 4.

(B) 10.

(C) 8.

(D) 2.

**Lời giải.**

Đặt  $x_0 = \log(\log e)$ .

Có:  $f(x_0) = a \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}) + b \sin x_0 + 6 = 2$ .

Ta có  $f(\log(\ln 10)) = f\left(\log\left(\frac{1}{\log e}\right)\right) = f(-\log(\log e)) = f(-x_0)$ .

$$f(-x_0) = a \ln(\sqrt{x_0^2 + 1} - x_0) + b \sin(-x_0) + 6 = -a \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}) - b \sin x_0 + 6.$$

$$= -[a \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}) + b \sin x_0 + 6] + 12 = -f(x_0) + 12 = 10.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 19.** Cho  $9^x + 9^{-x} = 14$  và  $\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $P = a \cdot b$ .

(A)  $P = 10$ .

(B)  $P = -45$ .

(C)  $P = -10$ .

(D)  $P = 45$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow 3^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-2x} + 3^{-2x} = 16$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 16 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 4.$$

$$\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{-x}} = \frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3 \cdot (3^x + 3^{-x})}.$$

$$= \frac{6 + 3 \cdot 4}{2 - 3 \cdot 4} = -\frac{18}{10} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{9}{5} \Rightarrow ab = -45.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 20.** Biết phương trình  $27^x - 27^{1-x} - 16\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right) + 6 = 0$  có các nghiệm  $x = a, x = \log_3 b$  và  $x = \log_3 c$  với  $a \in \mathbb{Z}, b > c > 0$ . Tỷ số  $\frac{b}{c}$  thuộc khoảng nào sau đây?

Ⓐ  $(3; +\infty)$ .

Ⓑ  $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .

Ⓒ  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

Ⓓ  $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$27^x - 27^{1-x} - 16\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow 3^{3x} - 27 \cdot 3^{-3x} - 16(3^x - 3 \cdot 3^{-x}) + 6 = 0(1).$$

$$\text{Đặt } t = 3^x - 3 \cdot 3^{-x} \Rightarrow t^3 = 3^{3x} - 27 \cdot 3^{-3x} - 3(3^{3x} - 3 \cdot 3^{-3x}) \cdot 3^{3x} \cdot 3 \cdot 3^{-3x} \\ = 3^{3x} - 27 \cdot 3^{-3x} - 9(3^{3x} - 3 \cdot 3^{-3x}).$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow t^3 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x - 3 \cdot 3^{-x} = 1 \\ 3^x - 3 \cdot 3^{-x} = -3 \\ 3^x - 3 \cdot 3^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 3^x - 3 = 0 \\ 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 3 = 0 \\ 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ 3^x = \frac{\sqrt{21}-3}{2} \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ x = \log_3 \frac{\sqrt{21}-3}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{21}-3} \approx 2 \cdot 9.$$

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 21.** Cho hai số thực dương  $a, b$  thỏa  $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$ . Tính  $\frac{a}{b}$ .

Ⓐ  $\frac{1}{2}$ .

Ⓑ  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Ⓒ  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

Ⓓ  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**Đặt  $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} (L).$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 22.** Gọi  $a$  là một nghiệm của phương trình  $4 \cdot 2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18 \cdot 3^{2\log x} = 0$ . Khẳng định nào sau đây.đúng khi đánh giá về  $a$ ?

Ⓐ  $(a-10)^2 = 1$ .

Ⓑ  $a = 10^2$ .

Ⓒ  $a^2 + a + 1 = 2$ .

Ⓓ  $a = \frac{1}{100}$ .

**Lời giải.**Điều kiện  $x > 0$ .Chia cả hai vế của phương trình cho  $3^{2\log x}$  ta được  $4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0$ .Đặt  $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}$ ,  $t > 0$ .

$$\text{Ta có } 4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ t = -2 \end{cases} (L).$$

Với  $t = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{100}$ .

Vậy  $a = \frac{1}{100}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 23.** Tổng các nghiệm của phương trình sau  $7^{x-1} = 6 \log_7(6x - 5) + 1$  bằng  
**(A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 1. **(D)** 10.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > \frac{5}{6}$ .

Đặt  $y - 1 = \log_7(6x - 5)$  thì ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1) + 1 \\ y - 1 = \log_7(6x - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y - 5 \\ 7^{y-1} = 6x - 5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y \quad (2).$$

Xét hàm số  $f(t) = 7^{t-1} + 6t$  với  $t > \frac{5}{6}$  thì  $f(t) = 7^{t-1} \ln 7 + 6 > 0, \forall t > \frac{5}{6} \Rightarrow f(t)$  đồng biến nên.

$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$  khi đó ta có phương trình  $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$ . (3).

Xét hàm số  $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$  với  $x > \frac{5}{6}$  thì  $g'(x) = 7^{x-1} (\ln 7) - 6 \Rightarrow g''(x) = 7^{x-1} (\ln 7)^2 > 0, \forall x > \frac{5}{6}$ .

nên suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có không quá hai nghiệm.

Mặt khác  $g(1) = g(2) = 0$  nên  $x = 1$  và  $x = 2$  là 2 nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là  $x = 1$  và  $x = 2$ .

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là  $1 + 2 = 3$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 24.** Bất phương trình  $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$  có tập nghiệm là  $S = [a; b] \cup [c; +\infty)$ . Tính tổng  $a + b + c$ ?

**(A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** 3.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 3^x, t > 0$ .

Bất phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-2x-1) \geq 0.$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} t-9 \geq 0 \\ t-2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 9 \\ t-2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9(1) \\ 3^x - 2x - 1 \geq 0(2). \end{cases}$$

Xét bất phương trình (2):

Đặt  $g(x) = 3^x - 2x - 1$  trên  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = 3^x \ln 3 - 2.$$

Gọi  $x_0$  là nghiệm duy nhất của phương trình  $g(x) = 0, x_0 > 0$ .

Khi đó,  $g(x) = 0$  có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy,  $g(x) = 0$  có hai nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 1$ .

Ta có bảng biến thiên

|         |           |     |          |     |           |
|---------|-----------|-----|----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $x_0$    | $1$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$ | $0$      | $+$ |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $g(x_0)$ | $0$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có, (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Ta lại có, (1)  $\Leftrightarrow x \geq 2$ .

Kết hợp (1) và (2) suy ra,  $x \geq 2$ . (\*).

$$\text{TH2: } \begin{cases} t - 9 \leq 0 \\ t - 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 9 \\ t - 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 9(3) \\ 3^x - 2x - 1 \leq 0(4). \end{cases}$$

Xét bất phương trình (4):

Đặt  $g(x) = 3^x - 2x - 1$  trên  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = 3^x \ln 3 - 2.$$

Gọi  $x_0$  là nghiệm duy nhất của phương trình  $g(x) = 0$ ,  $x_0 > 0$ .

Khi đó,  $g(x) = 0$  có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy,  $g(x) = 0$  có hai nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 1$ .

Ta có bảng biến thiên

|         |           |     |          |     |           |
|---------|-----------|-----|----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $x_0$    | $1$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$ | $0$      | $+$ |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $g(x_0)$ | $0$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có, (4)  $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ .

Ta lại có, (3)  $\Leftrightarrow x \leq 2$ .

Kết hợp (3) và (4) suy ra,  $0 \leq x \leq 1$ . (\*\*).

Kết hợp (\*) và (\*\*) ta được tập nghiệm của BPT đã cho là  $S = [0; 1] \cup [2; +\infty)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 25.** Phương trình  $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc  $[-2017; 2017]$ .

**(A)** 1284.

**(B)** 4034.

**(C)** 1285.

**(D)** 4035.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } 2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}.$$

Đặt  $\sin^2 x = t$  với  $t \in [0; 1]$ , ta có phương trình.

$$2^t + \frac{3}{3^t} = 4 \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t = 4. \text{ Vì hàm số } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \text{ nghịch biến với } t \in [0; 1].$$

nên phương trình có nghiệm duy nhất  $t = 0$ . Do đó  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vì  $x \in [-2017; 2017]$  nên ta có  $-2017 \leq k\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi} \leq k \leq \frac{2017}{\pi}$  nên có 1285 giá trị nguyên của  $k$  thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 26.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x + 2y)$ . Tính tỉ số  $\frac{x}{y}$ ?

- (A)**  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ .      **(B)**  $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ .      **(C)**  $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ .      **(D)**  $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x + 2y) = t$ . Ta có: 
$$\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x + 2y = 4^t & (3). \end{cases}$$

Khi đó  $\frac{x}{y} = \frac{6^t}{9^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t > 0$ .

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2 \cdot 6^t + 2 \cdot 9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \text{ (thỏa mãn)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 27.** Số nghiệm của phương trình  $2^{\log_5(x+3)} = x$  là

- (A)** 0.      **(B)** 1.      **(C)** 3.      **(D)** 2.

**Lời giải.**

Đk:  $x > -3$ .

Đặt  $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$ , phương trình đã cho trở thành.

$$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \quad (1).$$

Dễ thấy hàm số  $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) = 1$  nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $t = 1$ .

Với  $t = 1$ , ta có  $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$ .

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 28.** Phương trình  $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$  có tổng các nghiệm là

- (A)** 0.      **(B)** 2.      **(C)** 3.      **(D)** 4.

**Lời giải.**

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \quad (7).$$

$$(7) \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}}\right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 10^3 \quad (7).$$

$$\text{Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t.$$

$$\text{Khi đó: } (7) \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2(N).$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (7).$$

Đặt  $y = 3^x > 0$ . Khi đó:  $(7) \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3(N) \\ y = \frac{1}{3}(N). \end{cases}$

Với  $y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ .

Với  $y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$ .

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là  $1 + (-1) = 0$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 29.** Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\sqrt{3^x + 1} \leq 3^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3^x + 1}}$ .

**(A)**  $(-\infty; 0) \cup [\log_3 2; +\infty)$ .

**(B)**  $[0; \log_3 2)$ .

**(C)**  $(0; \frac{1}{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ .

**(D)**  $(0; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có bất phương trình:  $\sqrt{3^x + 1} \leq 3^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3^x + 1} \leq \sqrt{3^x} + \frac{2}{\sqrt{3^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3^x + 1} \leq \frac{\sqrt{3^x(3^x + 1)} + 2}{\sqrt{3^x + 1}}$

$\Leftrightarrow 3^x + 1 \leq \sqrt{3^x(3^x + 1)} + 2$  (\*).

Đặt  $t = 3^x + 1 > 1 \Rightarrow 3^x = t - 1$ .

Từ đó bất phương trình (\*)  $\Leftrightarrow t \leq \sqrt{(t-1)t} + 2 \Leftrightarrow t - 2 \leq \sqrt{(t-1)t}$ .

Trường hợp 1.  $\begin{cases} 1 < t < 2 \\ (t-1)t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \\ \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \\ 1 < 3^x + 1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ .

Trường hợp 2.  $\begin{cases} t \geq 2 \\ (t-1)t \geq (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - t \geq t^2 - 4t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 2 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2$ .

Kết luận nghiệm của bất phương trình là  $\begin{cases} x \geq \log_3 2 \\ x < 0 \end{cases}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 30.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$  và  $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương, tính  $a + b$ .

**(A)**  $a + b = 14$ .

**(B)**  $a + b = 3$ .

**(C)**  $a + b = 21$ .

**(D)**  $a + b = 34$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = 15^{\log_{25} \frac{x}{2}} \\ \log_9 \frac{x + 15^{\log_{25} \frac{x}{2}}}{4} = \log_{25} \frac{x}{2} \end{cases}$

Đặt  $t = \log_{25} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot 25^t$ , ta được  $2 \cdot 25^t + 15^t = 4 \cdot 9^t \Leftrightarrow 2 \left(\frac{5}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{3}\right)^t = 4$

$\Rightarrow t = \log_{\frac{5}{3}} \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 25^t}{15^t} = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ .

Do đó  $a = 1$ ,  $b = 33$  nên  $a + b = 34$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 31.** Biết rằng phương trình  $\log_2(1 + x^{1009}) = 2018 \log_3 x$  có nghiệm duy nhất  $x_0$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A)**  $3^{\frac{1}{1008}} < x_0 < 3^{\frac{1}{1006}}$ . **(B)**  $x_0 > 3^{\frac{2}{1009}}$ . **(C)**  $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$ . **(D)**  $3^{\frac{1}{1007}} < x_0 < 1$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0$ .

Đặt  $t = \log_2(1 + x^{1009}) = 2018 \log_3 x$ . Khi đó  $t > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + x^{1009} = 2^t \\ x^{2018} = 3^t \end{cases} \Rightarrow (2^t - 1)^2 = 3^t \Leftrightarrow 2^t - 1 = (\sqrt{3})^t \Leftrightarrow (\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1 \quad (*).$$

Ta thấy hàm số  $f(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t$  luôn nghịch biến và liên tục trên  $(0; +\infty)$  và  $f(2) = 1$  nên phương trình (\*) có duy nhất một nghiệm  $t = 2$

$$\Rightarrow x^{1009} = 3 \text{ hay } x_0 = 3^{\frac{1}{1009}}.$$

$$\text{Mà } 0 < \frac{1}{1009} < \frac{1}{1008} \text{ nên } 1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 32.** Phương trình  $2 \log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$  có bao nhiêu nghiệm trong khoảng  $(0; 2018\pi)$ ?

- (A)** 2018 nghiệm. **(B)** 1008 nghiệm. **(C)** 2017 nghiệm. **(D)** 1009 nghiệm.

**Lời giải.**

$$\text{Đk: } \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

$$2 \log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3(1 - \cos^2 x) = \log_2(\cos x).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t.$$

$$\text{Phương trình trở thành } \Leftrightarrow \log_3 \frac{2^{2t}}{1 - 2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t \text{ hay } \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1.$$

$$\text{Hàm số } f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác  $f(-1) = 1$  nên  $x = -1$  là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất  $t = -1$ .

$$\log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

$$x \in (0; 2018\pi) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} < k < \frac{6053}{6} \\ \frac{1}{6} < k < \frac{6055}{6}. \end{cases}$$

Vậy trong khoảng  $(0; 2018\pi)$  có  $1009 \cdot 2 = 2018$  nghiệm.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 33.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\log_3(2u_5 - 63) = 2 \log_4(u_n - 8n + 8)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Đặt.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \text{ Tìm số nguyên dương lớn nhất } n \text{ thỏa mãn } \frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}.$$



Ⓐ 18.

Ⓑ 17.

Ⓒ 16.

Ⓓ 19.

**Lời giải.**Ta có  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$ .

$$\text{Đặt } t = \log_3(2u_5 - 63) \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases} \quad (\text{với } n = 5) \Rightarrow 1 = 3^t - 2 \cdot 2^t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow$$

 $u_n = 8n - 4$ . Khi đó  $u_5 = 36$ .Với  $u_n = 8n - 4$  và  $u_5 = 36$ , ta có:  $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2 \cdot 36 - 63) = 2\log_4(8n - 4 - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3 9 = 2\log_4 4 \Leftrightarrow 2 = 2$  đúng  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .Ta có:  $u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n - 4) = 8$ . Vậy  $(u_n)$  là cấp số cộng có số hạng đầu  $u_1 = 4$ , công sai  $d = 8$ 

$$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = 4n^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n - 4) \cdot 16n^2}{(16n - 4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 34.** Số nghiệm của phương trình  $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$  là

Ⓐ 3.

Ⓑ 2.

Ⓒ 1.

Ⓓ 4.

**Lời giải.**ĐK:  $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$ .

$$\text{Đặt } t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$$

$$\Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t + 2).$$

$$\text{Đặt } \log_3 |t| = \log_5 (t + 2) = u.$$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t + 2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$$

$$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{cases}$$

Xét (1):  $5^u + 3^u = 2$ .Ta thấy  $u = 0$  là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm  $u = 0$  là duy nhất.Với  $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ , phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Xét (2): } \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1.$$

Ta thấy  $u = 1$  là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm  $u = 1$  là duy nhất.Với  $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$ , phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa  $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$ .**BÌNH LUẬN.**Cho  $f(x) = g(x)$  (1) nếu  $f(x), g(x)$  đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc  $g(x) = \text{const}$  và  $f(x)$  tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 35.** Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left( \sqrt{2 \log_x^2 \frac{22}{3} - 2 \log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) (24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016) \leq 0.$$

(A) 12,3.

(B) 12.

(C) 12,1.

(D) 12,2.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $0 < x \neq 1$ .

Ta có  $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016 = (x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + 22x^6 + 26x^4 + 1997x^2 + 2015 > 0$ ,  $\forall x$ .

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left( \sqrt{2 \log_x^2 \frac{22}{3} - 2 \log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) \leq 0.$$

Đặt  $t = \log_x \frac{22}{3}$ , ta có bất phương trình

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 5} + \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \leq \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-t)^2 + 1^2} \leq \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Đặt  $\vec{u} = \left(t - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và  $\vec{v} = (1-t; 1)$ . Ta có  $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{13}{2}}$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $\frac{t - \frac{1}{2}}{1-t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t - 1 = 3 - 3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}} = 12,06 \approx 12,1$ .

Nghiệm trên thỏa điều kiện.

Chọn phương án (C)

**Câu 36.** Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình  $4 \cdot 3^{\log(100x^2)} + 9 \cdot 4^{\log(10x)} = 13 \cdot 6^{1+\log x}$ .

(A) 100.

(B) 10.

(C) 1.

(D)  $\frac{1}{10}$ .

**Lời giải.**

ĐK:  $x > 0$ .

$$PT \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{2 \cdot \log(10x)} + 9 \cdot 2^{2 \cdot \log(10x)} = 13 \cdot 6^{\log(10x)} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \log(10x)} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} + 9 = 0.$$

Đặt  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} > 0$  thì phương trình trở thành:

$$4t^2 - 13t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(10x) = 0 \\ \log(10x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ x = 10. \end{cases}$$

Suy ra tích các nghiệm bằng 1.

Chọn phương án (C)

**Câu 37.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \leq 351 \cdot \sqrt{14^x}$  có dạng là đoạn  $S = [a; b]$ .

Giá trị  $b - 2a$  thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ  $(3; \sqrt{10})$ .

Ⓑ  $(-4; 2)$ .

Ⓒ  $(\sqrt{7}; 4\sqrt{10})$ .

Ⓓ  $\left(\frac{2}{9}; \frac{49}{5}\right)$ .

**Lời giải.**

$$2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \leq 351 \cdot \sqrt{14^x}$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot 7^x + 28 \cdot 2^x \leq 351 \cdot \sqrt{14^x}$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot \sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}} + 28 \cdot \sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}} \leq 351$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} + 28 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{7^x}} \leq 351.$$

Đặt  $t = \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t > 0$  thì bpt trở thành:  $49t + \frac{28}{t} \leq 351$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{49} \leq t \leq \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49} \leq \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2.$$

Khi đó  $S = [-4; 2]$ .

Giá trị  $b - 2a = 10 \in (\sqrt{7}; 4\sqrt{10})$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 38.** Tập nghiệm của bất phương trình  $(2^x - 2)^2 < (2^x + 2)(1 - \sqrt{2^x - 1})^2$  là

Ⓐ  $S = (-\infty; 0)$ .

Ⓑ  $S = [1; +\infty)$ .

Ⓒ  $S = [0; 1)$ .

Ⓓ  $S = [-3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

Đặt  $\sqrt{2^x - 1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow 2^x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2^x = t^2 + 1$ .

Bất phương trình trở thành:

$$(t^2 + 1 - 2)^2 < (t^2 + 1 + 2)(1 - t)^2 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 < (t^2 + 3)(1 - t)^2$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)^2(t + 1)^2 < (t^2 + 3)(t - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (t + 1)^2 < t^2 + 3 \\ t \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t + 1 < t^2 + 3 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t < 1.$$

Do đó  $\sqrt{2^x - 1} < 1 \Leftrightarrow 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$ .

Kết hợp điều kiện:  $0 \leq x < 1$ .

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là  $S = [0; 1)$ .

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 39.** Bất phương trình  $2^{x^2 + \sqrt{x-1} - 1} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$  có tập nghiệm  $S = [a; b]$ . Khi đó  $a + b$  bằng

Ⓐ 2.

Ⓑ 3.

Ⓒ 1.

Ⓓ 10.

**Lời giải.**

ĐK:  $x \geq 1$ .

Bất phương trình đã cho tương đương với  $\frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} \cdot 2^{\sqrt{x-1}} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{\sqrt{x-1}} + 4 \leq 2 \cdot 2^{x^2} + 2 \cdot 2^{\sqrt{x-1}}.$$

Đặt  $\begin{cases} u = 2^{x^2} \\ v = 2^{\sqrt{x-1}} \end{cases}$ , điều kiện  $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$ .

Bất phương trình trở thành.

$$uv + 4 \leq 2u + 2v \Leftrightarrow (uv - 2u) + (4 - 2v) \leq 0 \Leftrightarrow u(v - 2) - 2(v - 2) \leq 0 \Leftrightarrow (u - 2)(v - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - 2 \geq 0 \\ v - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 2 \\ v \leq 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u - 2 \leq 0 \\ v - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 2 \\ v \geq 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện  $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$  ta được.

$$\begin{cases} u \geq 2 \\ 0 < v \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \geq 2 \\ 0 < 2^{\sqrt{x-1}} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < u \leq 2 \\ v \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2^{x^2} \leq 2 \\ 2^{\sqrt{x-1}} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ \sqrt{x-1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2].$$

Kết hợp điều kiện  $x \geq 1$ , ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là  $S = [1; 2]$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 40.** Tập nghiệm của bất phương trình  $(5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \leq 2^{x+\log_2 5}$  là

**(A)**  $S = (-2; 1)$ .

**(B)**  $S = [-1; 1]$ .

**(C)**  $S = (1; 5]$ .

**(D)**  $S = (1; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } (5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \leq 2^{x+\log_2 5} \Leftrightarrow (5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \leq 2^x \cdot 5 \Leftrightarrow \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x \leq 5.$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = t \Rightarrow \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}, (t > 0), \text{ bất phương trình trở thành:}$$

$$t + \frac{1}{t} \leq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq t \leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

Do đó ta có:

$$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x \leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là  $S = [-1; 1]$ .

Chọn phương án **B**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. A  | 4. A  | 5. B  | 6. B  | 7. D  | 8. D  | 9. B  | 10. C |
| 11. B | 12. A | 13. A | 14. D | 15. A | 16. B | 17. B | 18. B | 19. B | 20. D |
| 21. D | 22. D | 23. B | 24. D | 25. C | 26. B | 27. B | 28. A | 29. A | 30. D |
| 31. C | 32. A | 33. A | 34. B | 35. C | 36. C | 37. C | 38. C | 39. B | 40. B |

## DẠNG 42. MAX, MIN CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số trên đoạn  $[a; b]$ .

- Tìm nghiệm  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$ .
- Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  so sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

(A) -16.

(B) 16.

(C) -12.

(D) -2.

Lời giải.

#### Phân tích hướng dẫn giải

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là Dạng toán max, min của hàm trị tuyệt đối có chứa tham số.

**2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:** Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số trên đoạn  $[a; b]$ .

- Tìm nghiệm  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$ .
- Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  so sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**3. HƯỚNG GIẢI:** Tìm giá trị lớn nhất hàm số  $y = |f(x)|$ , ta xét hàm số  $y = f(x)$ .

**B1:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$ .

**B2:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |f(x)|$  tại  $\max f(x)$  hoặc  $\min f(x)$ .

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Đặt  $g(x) = x^3 - 3x + m$ .

$$g'(x) = 3x^2 - 3; g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 3] \\ x = 1 \in [0; 3] \end{cases}$$

$$g(0) = m; g(1) = -2 + m; g(3) = 18 + m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;3]} g(x) = 18 + m; \min_{[0;3]} g(x) = -2 + m.$$

$$\text{Để giá trị lớn nhất hàm số } y = f(x) \text{ là } 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 18 + m = 16 \\ -2 + m > -16 \\ -2 + m = -16 \\ 18 + m < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > -14 \\ m = -14 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Vậy  $S = \{-2; -14\}$  nên tổng là  $-2 - 14 = -16$ .

Chọn phương án A

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Gọi tập  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

- A 1. B 2. C 0. D 6.

**Lời giải.**

Xét  $u = x^3 - 3x + m$ . Ta có:  $u' = 3x^2 - 3$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$ . Khi đó:

$$A = \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(1), u(2)\} = \max \{m, m-2, m+2\} = m+2. a = \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(1), u(2)\} = \min \{m, m-2, m+2\} = m-2.$$

$$\text{Ta có: } \max_{[0;2]} y = \max \{|A|, |a|\} = \max \{|m+2|, |m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \\ |m-2| = 3 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \end{cases}$$

Vậy  $S = \{\pm 1\}$ .

Chọn phương án B

**Câu 2.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^2 + x + m|$  thỏa mãn  $\min_{[-2;2]} y = 2$ . Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

- A  $-\frac{31}{4}$ . B  $-8$ . C  $-\frac{23}{4}$ . D  $\frac{9}{4}$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $u = x^2 + x + m$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

$$\max_{[-2;2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6; \min_{[-2;2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4}.$$

Nếu  $m - \frac{1}{4} \geq 0$  hay  $m \geq \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$  (thỏa mãn).

Nếu  $m + 6 \leq 0$  hay  $m \leq -6$  thì  $\min_{[-2;2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$  (thỏa mãn).

Nếu  $-6 < m < \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = 0$  (không thỏa mãn).

Ta có:  $S = \left\{ -8; \frac{9}{4} \right\}$ . Vậy tổng các phần tử của  $S$  bằng  $-\frac{23}{4}$ .

Chọn phương án C

**Câu 3.** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Có bao nhiêu số thực  $m$  để  $M = \frac{59}{2}$ ?

(A) 2.

(B) 6.

(C) 1.

(D) 4.

**Lời giải.**

Xét hàm số:  $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ .

$$\text{Có } u' = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min \{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(2) = m - 32 \\ \max_{[-1;3]} u = \max \{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(3) = m + 27. \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } M = \max \{|m - 32|, |m + 27|\} = \frac{59}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |m - 32| = \frac{59}{2} \\ |m - 32| \geq |m + 27| \end{cases} \\ \begin{cases} |m + 27| = \frac{59}{2} \\ |m + 27| \geq |m - 32| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy có 1 số thực  $m$  để  $M = \frac{59}{2}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 4.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| \frac{x - m^2 - m}{x + 2} \right|$  thỏa

$\max_{[1;2]} y = 1$ . Tích các phần tử của  $S$  bằng

(A) -16.

(B) -4.

(C) 16.

(D) 4.

**Lời giải.**

Xét  $u = \frac{x - m^2 - m}{x + 2}$ , ta có:  $u' = \frac{2 + m^2 + m}{(x + 2)^2} > 0, \forall x \in [1; 2], \forall m \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Do đó } A = \max_{[1;2]} u = u(2) = -\frac{m^2 + m - 2}{4}; a = \min_{[1;2]} u = u(1) = -\frac{m^2 + m - 1}{3}.$$

$$\max_{[1;2]} y = \max \left\{ \left| \frac{m^2 + m - 2}{4} \right|, \left| \frac{m^2 + m - 1}{3} \right| \right\} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ta có:  $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$ . Vậy tích các phần tử của  $S$  bằng -4.

Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$  trên  $[1; 2]$  bằng 2. Số phần tử của  $S$  là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 3.

**Lời giải.**

Xét hàm số:  $u = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$ .



$$u' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; u' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2]. \end{cases}$$

Ta có:  $u' > 0 \forall x \in [1; 2]$  nên  $\max_{[1; 2]} y = \left\{ \left| m + \frac{4}{3} \right|, \left| m \frac{1}{2} \right| \right\}$ .

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{10}{3} \right\}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất tính  $T = a + 2b$ .

**(A)**  $T = 3$ .

**(B)**  $T = 4$ .

**(C)**  $T = -4$ .

**(D)**  $T = 2$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2}$  (1). Dấu = xảy ra khi  $A = B$ .

Ta có:  $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2}$  (2). Dấu = xảy ra khi  $A = -B$ .

Xét hàm số  $g(x) = x^2 + ax + b$ , có  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}$ .

**Trường hợp 1:**  $-\frac{a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]$ . Khi đó  $M = \max\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có  $M \geq |4 + 2a| > 8$ .

**Trường hợp 2:**  $-\frac{a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]$ . Khi đó  $M = \max\left\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có  $M \geq \max\left\{|5 + a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\} \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |20 + 4a + a^2| \Leftrightarrow$

$$M \geq \frac{1}{8} |16 + (a+2)^2|.$$

Suy ra  $M \geq 2$ .

$$\text{Ta có: } M \text{ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là } M = 2 \text{ khi } \begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{-a^2}{2} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy  $a + 2b = -4$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[1; 2]} y$  có giá trị nhỏ nhất bằng

**(A)** 2.

**(B)** 4.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Xét hàm số:  $t = x^3 - 3x^2$  với  $x \in [1; 2]$ .

Ta có  $t' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 2) \\ x = 2 \notin (1; 2) \end{cases}; t(1) = -2, t(2) = -4$ . Nên  $\max_{[1; 2]} t = -2$  và  $\min_{[1; 2]} t = -4$ .

Do đó  $\max_{[1; 2]} y = \max_{[1; 2]} |m + t| = \max\{|m - 4|; |m - 2|\}$ .

$$= \max \{|m-4|; |2-m|\} \geq \frac{|m-4| + |2-m|}{2} \geq \frac{|(m-4) + (2-m)|}{2} = 1.$$

Dấu bằng đạt tại  $m-4 = 2-m \Leftrightarrow m = 3$ .

Chọn phương án C

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Tìm mối liên hệ giữa  $a$  và  $b$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 1.

A  $b - 8a = 0$ .

B  $b - 4a = 0$ .

C  $b + 4a = 0$ .

D  $b + 8a = 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2$ , vì  $x \in [-1; 1]$  nên  $t \in [0; 1]$ .

Ta có:  $g(t) = 8t^2 + at + b$ , đây là parabol có bề lõm quay lên và có tọa độ đỉnh là  $I\left(-\frac{a}{6}; -\frac{a^2}{32} + b\right)$ .

Trường hợp 1:  $-\frac{a}{6} \in [0; 1]$ .

Theo yêu cầu bài toán ta có: 
$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{a^2}{32} + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 \end{cases}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có:  $-64 \leq a^2 \leq 64$  do đó  $-8 \leq a \leq 8$ .

Lấy (3) + 32(2) ta có:  $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$ .

Suy ra:  $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$ .

Khi đó ta có:  $a = -8$  và  $b = 1$ .

Thử lại:  $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$ .

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$ .

Ta có:  $\max |g(t)| = 1$  khi  $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ . Nên  $a = -8$  và  $b = 1$  (thỏa mãn).

Trường hợp 2:  $-\frac{a}{6} \notin [0; 1]$ . Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \leq a + 8 \leq 2 \Leftrightarrow -10 \leq a \leq -6 \text{ (loại)}.$$

Vậy  $a = -8$  và  $b = 1$ .

Chọn phương án D

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  sao cho  $M \leq 2m$ ?

A 5.

B 7.

C 6.

D 3.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ .

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |     |       |     |
|---------|-----|-------|-----|
| $x$     | 0   | 1     | 2   |
| $g'(x)$ | +   | 0     | -   |
| $g(x)$  | $a$ | $a+1$ | $a$ |

**TH1:**  $a \leq -1 \Rightarrow m = -(a+1); M = -a \Rightarrow -2(a+1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2 \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$ .

**TH2:**  $-1 < a < 0 \Rightarrow m = 0; M > 0 \Rightarrow M > 2m$  (loại).

**TH3:**  $a \geq 0 \Rightarrow m = a; M = a+1 \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$ .

Vậy có 5 giá trị của  $a$  thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án (A)

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[1; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  sao cho  $M \geq 2m$ ?

(A) 15.

(B) 14.

(C) 16.

(D) 13.

**Lời giải.**

Xét  $u = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$  trên đoạn  $[1; 2]$ , ta có  $u' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$ .

Do đó,  $\max_{[1;2]} u = u(2) = a + \frac{16}{3}, \min_{[1;2]} u = u(1) = a + \frac{1}{2}$ .

TH1:  $a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} \geq 0 \\ a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3}$ .

TH2:  $a + \frac{16}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ m = -\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{16}{3} \leq 0 \\ -\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$ .

TH3:  $\left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{16}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow m = 0, M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|, \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\} \Rightarrow M > 2m$  (thỏa mãn).

Ta có:  $-\frac{61}{6} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow a \in \{-10; \dots; 4\}$ . Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn.

Chọn phương án (C)

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x) = |8 \cos^4 x + a \cos^2 x + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng  $a + b$  khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất.

(A)  $a + b = -8$ .

(B)  $a + b = -9$ .

(C)  $a + b = 0$ .

(D)  $a + b = -7$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \cos^2 x, t \in [0; 1]$ , ta có hàm số  $g(t) = |8t^2 + at + b|$ . Khi đó  $M = \max_{[0;1]} g(t)$ .

Do đó:

$$M \geq g(0) = |b|;$$

$$M \geq g(1) = |8 + a + b|;$$

$$M \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|2 + \frac{1}{2}a + b\right| \Rightarrow 2M \geq |4 + a + 2b|;$$

Từ đó ta có

$$4M \geq |b| + |8 + a + b| + |-4 - a - 2b| \geq |b + (8 + a + b) + (-4 - a - 2b)| = 4.$$

Hay  $M \geq 1$ .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $|b| = |8 + a + b| = \frac{|-4 - a - 2b|}{2} = 1$  và  $b, (8 + a + b), (-4 - a - 2b)$

$$\text{cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy  $a + b = -7$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \left| 2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m \right|$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để  $\max y = 3$ ?

A 1.

B 2.

C 0.

D 4.

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi:  $(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ .

Đặt  $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3+2x-x^2}$  ( $t \in [0; 2]$ ) và  $2x - x^2 = t^2 - 3$ .

Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |t^2 - t - 3 + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

Với  $u = t^2 - t - 3 + m$  ta có:  $\max_{[0;2]} u = m - 1$ ;  $\min_{[0;2]} u = m - \frac{13}{4}$ .

$$\text{Do đó } \max y = \max \left\{ |m - 1|; \left| m - \frac{13}{4} \right| \right\} = 3 \Leftrightarrow m = 4; m = \frac{1}{4}.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \left| 2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m \right|$ . Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A  $\frac{17}{8}$ .

B  $\frac{9}{8}$ .

C  $\frac{7}{8}$ .

D  $\frac{15}{8}$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định khi:  $(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ .

Đặt  $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3+2x-x^2}$  ( $t \in [0; 2]$ ) và  $2x - x^2 = t^2 - 3$ .

Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |t^2 - t - 3 + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

Với  $u = t^2 - t - 3 + m$  ta có:  $\max_{[0;2]} u = m - 1$ ;  $\min_{[0;2]} u = m - \frac{13}{4}$ .

$$\text{Do đó } \max y = \max \left\{ |m - 1|; \left| m - \frac{13}{4} \right| \right\} \geq \frac{|m - 1| + \left| m - \frac{13}{4} \right|}{2} \geq \frac{\left| m - 1 + \frac{13}{4} - m \right|}{2} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } |m - 1| = \left| \frac{13}{4} - m \right| = \frac{9}{8} \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 14.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 20. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

A -195.

B 210.

C 195.

D -210.

**Lời giải.**

Xét  $u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m$  trên đoạn  $[0; 2]$  có  $u' = x^3 - 19x + 30; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \\ x = 2. \end{cases}$

Do đó:  $\max_{[0;2]} u = \max\{u(0); u(2)\} = \max\{m; m + 6\} = m + 6; \min_{[0;2]} u = m.$

Do đó:  $\max_{[0;2]} y = \max\{|m|; |m+6|\} \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq |m+6| \leq 20 \\ |m+6| \leq |m| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 \leq m \leq -6 \\ -20 \leq m \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow -20 \leq m \leq -6.$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-20; -19; \dots, -6\}$ . Vậy  $S = -\sum_6^{20} k = -195.$

Chọn phương án (A)

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = |2x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$ ?

- (A) 4. (B) 8. (C) 31. (D) 39.

**Lời giải.**

Xét  $u = 2x^3 - 3x^2 + m$ , ta có:  $u' = 6x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Do đó:  $\begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min\{m - 5, m + 27, m, m - 1\} = m - 5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max\{m - 5, m + 27, m, m - 1\} = m + 27. \end{cases}$

**TH1:**  $m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8\}.$

**TH2:**  $m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -27 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = -(m + 27) \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30 \Rightarrow m \in \{-30; -29; -28; -27\}.$

**TH3:**  $(m - 5)(m + 27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = 0$  (thỏa mãn).

Vậy  $m \in \{-30; -29; -28; \dots; 7; 8\}.$

Chọn phương án (D)

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c, |f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $f'(0)$ .

- (A) 8. (B) 0. (C) 6. (D) 4.

**Lời giải.**

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b.$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của  $b$  với điều kiện  $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$ .

Ta có  $\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \\ a + 2b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(0) \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0). \\ c = f(0) \end{cases}$

$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq f(0) \leq 1 \\ -1 \leq f(1) \leq 1 \\ -1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0) \leq 4 + 1 + 3 = 8.$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1, \\ a + b + c = -1, \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 8 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -8x^2 + 8x - 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $f'(0)$  bằng 8.

Chọn phương án (A)

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$ . Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y = 10$ ?

(A) 2.

(B) 5.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

$$\text{Xét } u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a \text{ trên đoạn } [-1; 2], \text{ ta có: } u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} M = \max_{[-1;2]} u = \max \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1) \right\} = u(-1) = u(2) = a + 4 \\ m = \min_{[-1;2]} u = \min \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1) \right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}.$$

TH1:  $m \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ . Khi đó:  $\min_{[-1;2]} y = m; \max_{[-1;2]} y = M$ .

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a + a + 4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

TH2:  $M \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -4$ . Khi đó:  $\min_{[-1;2]} y = -M; \max_{[-1;2]} y = -m$ .

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} a \leq -4 \\ -(a + 4) - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7.$$

TH3:  $m < 0 < M \Leftrightarrow -4 < a < 0$ .

Khi đó:  $\min_{[-1;2]} y = 0; \max_{[-1;2]} y = \max\{|a + 4|, |a|\} = \max\{a + 4, -a\} < 10$ .

Suy ra  $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 0 + 10 = 10$  (loại).

Vậy  $a \in \{3; -7\}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 18.** Cho hai số thực  $x; y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-10; 10]$  của tham số  $a$  để  $M \geq 2m$ ?

(A) 17.

(B) 16.

(C) 15.

(D) 18.

Lời giải.

$$\text{Biến đổi giả thiết có: } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2} \quad (*).$$

Đặt  $f(t) = t + \sqrt{t}, t \in [0; +\infty)$ . Ta có  $f(t)$  đồng biến trên  $[0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó ta có: } (*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{y^2 + 6y + 10}\right) = f\left(\sqrt{6 + 4x - x^2}\right) \Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 = 4x - 6y \leq \sqrt{(4^2 + 6^2)(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 + \sqrt{13} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - a \in [\sqrt{13} - 3 - a; 3 + \sqrt{13} - a].$$

$$\text{TH1: } \sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{13} - 3 - a \\ M = 3 + \sqrt{13} - a \end{cases} \Rightarrow y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \\ 3 + \sqrt{13} - a \geq 2(\sqrt{13} - 3 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} - 9 \leq a \leq 9 + \sqrt{13}.$$

$$\text{TH2: } \sqrt{13} - 3 - a \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -(\sqrt{13} + 3 - a) \\ M = -(-3 + \sqrt{13} - a) \end{cases} \Rightarrow y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{13} - a \leq 0 \\ -(\sqrt{13} - 3 - a) \geq -2(\sqrt{13} + 3 - a) \end{cases} \Leftrightarrow 3 + \sqrt{13} \leq a \leq 9 + \sqrt{13}.$$

$$\text{TH3: } (\sqrt{13} - 3 - a)(3 + \sqrt{13} - a) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 < a < \sqrt{13} + 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ M > 0 \end{cases} (M \geq 2m).$$

Vậy  $a \in [\sqrt{13} - 9; 9 + \sqrt{13}]$ . Đối chiếu với  $a \in [-10; 10] \Rightarrow a \in \{-5; \dots; 10\}$ .

Chọn phương án B

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để với mọi bộ ba số thực  $a, b, c \in [1; 3]$  thì  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác?

A 10.

B 8.

C 25.

D 23.

**Lời giải.**

Xét  $u = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$  trên  $[1; 3]$ , ta có:  $u' = 6x^2 - 18x + 12$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

$$\min_{[1;3]} u = \min \{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 4.$$

$$\max_{[1;3]} u = \max \{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 9.$$

Để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác thì ta phải có  $f(a) + f(b) > f(c)$ .

Chọn  $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x), f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$  ta có điều kiện  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$ .

Ngược lại: với  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$ , ta có:  $f(a) + f(b) - f(c) \geq 2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x) > 0$ .

Vậy điều kiện cần và đủ để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác là  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$ .

$$\text{TH1: } m + 4 \geq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m + 4; \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \Rightarrow \begin{cases} m + 4 \geq 0 \\ 2(m + 4) > m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

$$\text{TH2: } m + 9 \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m - 9; \max_{[1;3]} f(x) = -m - 4 \Rightarrow \begin{cases} m + 9 \leq 0 \\ 2(-m - 9) > -m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -14.$$

$$\text{TH3: } (m + 4)(m + 9) < 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 > \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \text{ (loại)}.$$

Vậy  $m \in \{-19; -15; 2; \dots; 18; 19\}$ . Có 23 số nguyên thỏa mãn.

Chọn phương án D

**Câu 20.** Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để với mọi bộ ba số thực  $a, b, c \in [-2; 1]$  thì  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn.

A 18.

B 16.

C 14.

D 12.

**Lời giải.**

Xét  $u = x^3 - 3x + m$  trên đoạn, ta có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Khi đó: 
$$\begin{cases} \max_{[-2;1]} u = \max \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \max \{m-2, m-2, m+2\} = m+2 \\ \min_{[-2;1]} u = \min \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \min \{m-2, m-2, m+2\} = m-2. \end{cases}$$

Để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn ta phải có  $f^2(a) + f^2(b) > f^2(c)$ .

Chọn  $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x); f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$  ta có điều kiện  $2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$ .

Ngược lại với  $2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$ , ta có  $f^2(a) + f^2(b) - f^2(c) \geq 2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 - \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > 0$ .

Vậy điều kiện cần và đủ để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác là  $2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$ .

**TH1:**  $(m-2)(m+2) < 0 \Rightarrow 2 \min_{[-2;1]} f(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$  (loại).

**TH2:**  $m-2 \geq 0$

$$\Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = m-2; \max_{[-2;1]} f(x) = m+2 \Rightarrow \begin{cases} m-2 \geq 0 \\ 2(m-2)^2 > (m+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6 + 4\sqrt{2}.$$

**TH3:**  $m+2 \leq 0$

$$\Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = -(m+2); \max_{[-2;1]} f(x) = -(m-2) \Rightarrow \begin{cases} m+2 \leq 0 \\ 2(m+2)^2 > (m-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6 - 4\sqrt{2}.$$

Suy ra  $m \in \{-19, -18, \dots, -12, 12, 13, \dots, 19\}$ . Vậy có 16 số nguyên  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 21.** Gọi tập  $S$  là tập hợp giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 0. **(D)** 6.

**Lời giải.**

Xét  $u = x^3 - 3x + m$  có:  $u' = 3x^2 - 3; u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$ . Khi đó:

$$A = \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(1), u(2)\} = \max \{m, m-2, m+2\} = m+2. a = \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(1), u(2)\} = \min \{m, m-2, m+2\} = m-2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;2]} y = \max \{|A|, |a|\} = \max \{|m+2|, |m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \\ |m-2| = 3 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 22.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^4 - 8x^2 + m|$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

- (A)** -7. **(B)** 7. **(C)** 5. **(D)** -5.

**Lời giải.**



Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 8x^2 + m, x \in [-1; 1]$ , ta có  $g'(x) = 4x^3 - 16x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{cases}$   
 $g(-1) = g(1) = -7 + m, g(0) = m.$

$$\text{Do đó: } \max_{[-1;1]} f(x) = \max\{|-7 + m|, |m|\} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |-7 + m| = 5 \\ |-7 + m| \geq |m| \end{cases} \\ \begin{cases} |m| = 5 \\ |m| \geq |-7 + m| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5. \end{cases}$$

Vậy  $S = \{2; 5\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $S$  bằng 7.

Chọn phương án (B)

**Câu 23.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \left| \frac{-4x + m}{x - 3} \right|$  trên đoạn  $[-2; 2]$  bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

(A) -16.

(B) 16.

(C) 2.

(D) 14.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $g(x) = \frac{-4x + m}{x - 3}, x \in [-2; 2]$ , ta có  $g'(x) = \frac{12 - m}{(x - 3)^2}.$

$$g(-2) = -\frac{8 + m}{5}, g(2) = 8 - m.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[-2;2]} f(x) = \max \left\{ \left| -\frac{8 + m}{5} \right|, |8 - m| \right\} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \left| -\frac{8 + m}{5} \right| = 6 \\ \left| -\frac{8 + m}{5} \right| \geq |8 - m| \end{cases} \\ \begin{cases} |8 - m| = 6 \\ |8 - m| \geq \left| -\frac{8 + m}{5} \right| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 14. \end{cases}$$

Vậy  $S = \{2; 14\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $S$  bằng 16.

Chọn phương án (B)

**Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  bằng 4?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

**Lời giải.**

$f(x) = x^2 + 2x + m - 4$  có  $f'(x) = 2x + 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . Do đó

$$\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m - 1|; |m - 4|; |m - 5|\}.$$

Ta thấy  $m - 5 < m - 4 < m - 1$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ , suy ra  $\max_{[-2;1]} y$  chỉ có thể là  $|m - 5|$  hoặc  $|m - 1|$ .

$$\text{Nếu } \max_{[-2;1]} y = |m - 5| \text{ thì } \begin{cases} |m - 5| = 4 \\ |m - 5| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Nếu } \max_{[-2;1]} y = |m - 1| \text{ thì } \begin{cases} |m - 1| = 4 \\ |m - 1| \geq |m - 5| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy  $m \in \{1; 5\}$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{2x - m}{x + 2}$  với  $m$  là tham số,  $m \neq -4$ . Biết  $\min_{x \in [0;2]} f(x) + \max_{x \in [0;2]} f(x) = -8$ . Giá trị của tham số  $m$  bằng

- (A) 10. (B) 8. (C) 9. (D) 12.

**Lời giải.**

Xét hàm số xác định trên tập  $\mathcal{D} = [0; 2]$ .

Ta có  $y' = \frac{4 + m}{(x + 2)^2}$ . Nhận xét  $\forall m \neq -4$  hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên  $[0; 2]$  nên giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[0; 2]$  luôn đạt được tại  $x = 0, x = 2$ .

Theo bài ra ta có  $f(0) + f(2) = -8 \Leftrightarrow \frac{-m}{2} + \frac{4 - m}{4} = -8 \Leftrightarrow m = 12$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$ ?

- (A) 4. (B) 8. (C) 31. (D) 39.

**Lời giải.**

Xét  $u = 2x^3 - 3x^2 + m$  có  $u' = 6x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Do đó  $\begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min \{m - 5, m + 27, m, m - 1\} = m - 5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max \{m - 5, m + 27, m, m - 1\} = m + 27. \end{cases}$

+ Nếu  $m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8\}$ .

+ Nếu  $m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -27$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = -(m + 27) \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30 \Rightarrow m \in \{-30; -29; -28; -27\}$ .

Nếu  $(m - 5)(m + 27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = 0$  (thỏa mãn).

Vậy  $m \in \{-30; \dots; 8\}$  có tất cả 39 số nguyên thỏa mãn.

Chọn phương án (D)

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[1;3]} f(x) \leq 3$ ?

- (A) 4. (B) 10. (C) 6. (D) 11.

**Lời giải.**

Với  $u = x^3 - 3x^2 + m$  có  $u' = 3x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Do đó  $\begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \min \{m - 2, m, m - 4\} = m - 4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \max \{m - 2, m, m - 4\} = m. \end{cases}$

+ Nếu  $m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$  thì  $\min_{[1;3]} f(x) = m - 4 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 7 \Rightarrow m \in \{4; 5; 6; 7\}$ .

+ Nếu  $m \leq 0$  thì  $\min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ .

+ Nếu  $0 < m < 4$  thì  $\min_{[1;3]} u < 0; \max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$  (thỏa mãn).

Vậy  $m \in \{-3; \dots; 7\}$  có tất cả 11 số nguyên thỏa mãn.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = |x^2 + x + m|$ . Tổng tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để  $\min_{[-2;2]} y = 2$  bằng

**(A)**  $-\frac{31}{4}$ .

**(B)**  $-8$ .

**(C)**  $-\frac{23}{4}$ .

**(D)**  $\frac{9}{4}$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $u = x^2 + x + m$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

Khi đó: 
$$\begin{cases} \max_{[-2;2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6 \\ \min_{[-2;2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4} \end{cases}$$

+ Nếu  $m - \frac{1}{4} \geq 0$  hay  $m \geq \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$  (thỏa mãn).

+ Nếu  $m + 6 \leq 0$  hay  $m \leq -6$  thì  $\min_{[-2;2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$  (thỏa mãn).

+ Nếu  $-6 < m < \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = 0$  (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực  $m = \frac{9}{4}$  và  $m = -8$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng  $-\frac{23}{4}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 29.** Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  trên đoạn  $[-3; 2]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m \in (-2019; 2019)$  để  $2\beta \geq \alpha$ .

**(A)** 3209.

**(B)** 3215.

**(C)** 3211.

**(D)** 3213.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow y' = g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = m; g(-1) = m - 5; g(2) = m - 32; g(-3) = 243 + m.$$

$$\max_{[-3;2]} g = m + 243; \min_{[-3;2]} g = m - 32.$$

+ Nếu  $m - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 32$  thì  $\alpha = m + 243, \beta = m - 32$ . Khi đó:  $2\beta \geq \alpha \Leftrightarrow m \geq 307$ .

+ Nếu  $m + 243 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -243$  thì  $\alpha = -(m - 32); \beta = -(m + 243)$ .

Khi đó:  $2\beta \geq \alpha \Leftrightarrow m \leq -518$ .

+ Nếu  $-243 < m < 32 \Leftrightarrow (m - 32)(m + 243) < 0$  thì

$$\max \{|m + 243|, |m - 32|\} = \max\{m + 243, 32 - m\} > 0; \beta = 0.$$

Khi đó, không thỏa điều kiện  $2\beta \geq \alpha$ .

Do đó:  $-2019 < m \leq -518$  hoặc  $307 \leq m < 2019$ .

Vậy 3213 số.

Chọn phương án (D)

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  sao cho  $M \leq 2m$ ?

A 3.

B 7.

C 6.

D 5.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ .

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                              |   |   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$     | 0                                                                            | 1 | 2 |
| $g'(x)$ | +                                                                            | 0 | - |
| $g(x)$  | $  \begin{array}{ccc}  & a+1 & \\  a \nearrow & & \searrow a  \end{array}  $ |   |   |

Do  $2m \geq M > 0$  nên  $m > 0$  suy ra  $g(x) \neq 0 \forall x \in [0; 2]$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0. \end{cases}$$

Nếu  $a < -1$  thì  $M = -a, m = -a - 1 \Rightarrow 2(-a - 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$ .

Nếu  $a > 0$  thì  $M = a + 1, m = a \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1$ .

Do đó  $a \leq -2$  hoặc  $a \geq 1$ , do  $a$  nguyên và thuộc đoạn  $[-3; 3]$  nên  $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$ .

Vậy có 5 giá trị của  $a$  thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án (D)

**Câu 31.** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính  $a + 2b$ .

A 3.

B 4.

C -4.

D 2.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2} \quad (1). \text{ Dấu = xảy ra khi } A = B.$$

$$\text{Ta có } \max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2} \quad (2). \text{ Dấu = xảy ra khi } A = -B.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 + ax + b, \text{ có } g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } \frac{-a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]. \text{ Khi đó } M = \max\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có } M \geq |4 + 2a| > 8.$$

Trường hợp 2:  $\frac{-a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]$ . Khi đó  $M = \max \left\{ |1 - a + b|, |9 + 3a + b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có  $M \geq \max \left\{ |5 + a + b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\} \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |20 + 4a + a^2| \Leftrightarrow$

$$M \geq \frac{1}{8} |16 + (a + 2)^2|.$$

Suy ra  $M \geq 2$ .

Vậy  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là  $M = 2$  khi  $\begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{-a^2}{2} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$

Do đó  $a + 2b = -4$ .

Chọn phương án C

**Câu 32.** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-3; 2]$  bằng  $\frac{275}{2}$ ?

A 4.

B 0.

C 2.

D 1.

**Lời giải.**

$$y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m| \leq \frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \leq \frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2] \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq -\frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2] \\ m + \frac{275}{2} \geq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq \min g(x); \forall x \in [-3; 2] \\ m + \frac{275}{2} \geq \max g(x); \forall x \in [-3; 2]. \end{cases}$$

Xét  $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2]$ .

Khảo sát hàm số trên đoạn  $[-3; 2]$  ta được  $\min = -243; \max = 32$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq -243 \\ m + \frac{275}{2} \geq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{211}{2} \\ m \geq -\frac{211}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{211}{2}.$$

Như vậy  $m = -\frac{211}{2} \Leftrightarrow y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m| \leq \frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2]$ .

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi  $m = -\frac{211}{2}$  nên có 1 giá trị cần tìm.

Chọn phương án D

**Câu 33.** Cho hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[-2; 1]} y$  có giá trị nhỏ nhất là

A 3.

B 2.

C 1.

D 5.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 + 2x - 4$ , ta có  $t' = 2x + 2$ .

$t' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1)$ .

$t(-2) = -4, t(-1) = -5, t(1) = -1$ .

Suy ra:  $\max_{[-2; 1]} (t + m) = m - 1, \min_{[-2; 1]} (t + m) = m - 5$ , do đó.

$$\max_{[-2;1]} y = \max_{[-2;1]} |t+m| = \max \{|m-5|, |m-1|\} = \max \{|m-5|, |1-m|\} \geq \frac{|m-5| + |1-m|}{2} \geq \frac{|(m-5) + (1-m)|}{2}$$

2 dấu bằng đặt tại  $m-5 = 1-m \Leftrightarrow m=3$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 34.** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[1;2]} y$  có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

**(A)** 2.

**(B)** 4.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Xét hàm số:  $t = x^3 - 3x^2$  với  $x \in [1; 2]$ .

Ta có  $t' = 3x^2 - 6x$ ;  $t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 2) \\ x = 2 \notin (1; 2) \end{cases}$ ;  $t(1) = -2$ ,  $t(2) = -4$ . Nên  $\max_{[1;2]} t = -2$  và  $\min_{[1;2]} t = -4$ .

Do đó  $\max_{[1;2]} y = \max_{[1;2]} |m+t| = \max \{|m-4|; |m-2|\}$ .

$$= \max \{|m-4|; |2-m|\} \geq \frac{|m-4| + |2-m|}{2} \geq \frac{|(m-4) + (2-m)|}{2} = 1.$$

Dấu bằng đặt tại  $m-4 = 2-m \Leftrightarrow m=3$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 35.** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m+2}{x-2} \right|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[-1;1]} y$  có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

**(A)**  $\frac{3}{2}$ .

**(B)**  $\frac{1}{2}$ .

**(C)** 2.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có  $y = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x-2} - m \right| = |t-m|$ , trong đó  $t = \frac{x^2 - x + 2}{x-2} \in [-2; -1], \forall x \in [-1; 1]$ .

$$t' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = 4 \notin (-1; 1). \end{cases}$$

$$t(-1) = -\frac{4}{3}, t(0) = -1, t(1) = -2.$$

Do đó  $\max_{[-1;1]} y = \max_{[-1;1]} |t-m| = \max \{|m+2|, |m+1|\} = \max \{|m+2|, |-m-1|\}$ .

$$\geq \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \geq \frac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng đặt tại  $m+2 = -m-1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 36.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$  trên  $[1; 2]$  bằng 2. Số phần tử của  $S$  là

**(A)** 3.

**(B)** 1.

**(C)** 2.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Xét hàm số:  $f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}$ .

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2]. \end{cases}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} y = \max \left\{ \left| m + \frac{4}{3} \right|, \left| m + \frac{1}{2} \right| \right\}.$$

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \left| m + \frac{4}{3} \right| = 2 \\ \left| m + \frac{4}{3} \right| > \left| m + \frac{1}{2} \right| \end{cases} \\ \begin{cases} \left| m + \frac{1}{2} \right| = 2 \\ \left| m + \frac{1}{2} \right| > \left| m + \frac{4}{3} \right| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án (C)

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-3; -1]$  có giá trị nhỏ nhất bằng

A 26.

B 18.

C 28.

D 16.

**Lời giải.**

Xét  $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$  trên đoạn  $[-3; -1]$  ta có:  $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$ .

Do đó  $A = \max_{[-3; -1]} u = u(-1) = 26 - m^2$ ;  $a = \min_{[-3; -1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$ .

Do  $M = \max_{[-3; -1]} y = \max \{ |26 - m^2|, |6 - 3m^2| \}$  và  $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$ .

Vậy  $M \geq 18$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 38.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2018^{2(x^2 - y + 1)} = \frac{2x + y}{(x + 1)^2}$ . Giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của

biểu thức  $P = 2y - 3x$  bằng

A  $P_{\min} = \frac{3}{4}$ .

B  $P_{\min} = \frac{5}{6}$ .

C  $P_{\min} = \frac{7}{8}$ .

D  $P_{\min} = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$2018^{2(x^2 - y + 1)} = \frac{2x + y}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - y + 1) = \log_{2018}(2x + y) - \log_{2018}(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_{2018}(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1) = \log_{2018}(2x + y) + 2(2x + y) (*)$$

Xét hàm:  $f(t) = \log_{2018} t + 2t, t > 0$ .

$$\text{Suy ra } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2018} + 2 > 0, \forall t > 0.$$

Do đó hàm  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Mà } (*) \Leftrightarrow f(x^2 + 2x + 1) = f(2x + y) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + y \Leftrightarrow y = x^2 + 1.$$

$$\text{Khi đó: } P = 2y - 3x = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}.$$

Kết luận:  $P_{\min} = \frac{7}{8}$  khi  $x = \frac{3}{4}$ .

Chọn phương án C

**Câu 39.** Cho hàm số  $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

- (A)  $a < 0, b < 0$ .      (B)  $a > 0, b > 0$ .      (C)  $a < 0, b > 0$ .      (D)  $a > 0, b < 0$ .

**Lời giải.**

**Cách 1.** Xét  $g(x) = 8x^4 + ax^2 + b, g'(x) = 32x^3 + 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{16} \end{cases}$ .

Ta có  $\max_{[-1;1]} f(x) = 1 \Rightarrow g(0) = b \in [-1; 1]$ .

**TH1.**  $a > 0$ . Ta có  $g(1) = g(-1) = 8 + a + b > 1$ . Suy ra  $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$  không thỏa YCBT.

**TH2.**  $a < 0$ .

Nếu  $-\frac{a}{16} > 1 \Leftrightarrow a < -16$ . Ta có  $g(1) = g(-1) = 8 + a + b < -1$ . Suy ra  $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$  không thỏa YCBT.

Nếu  $-\frac{a}{16} < 1 \Leftrightarrow a > -16$ .

Ta có BBT

|         |             |                        |     |                       |             |
|---------|-------------|------------------------|-----|-----------------------|-------------|
| $x$     | -1          | $-\frac{\sqrt{-1}}{4}$ | 0   | $\frac{\sqrt{-1}}{4}$ | 1           |
| $g'(x)$ | -           | 0                      | +   | 0                     | +           |
| $g(x)$  | $8 + a + b$ | $b - \frac{a^2}{32}$   | $b$ | $b - \frac{a^2}{32}$  | $8 + a + b$ |

$\max_{[-1;1]} f(x) = b = 1$ . Khi đó YCBT  $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{32} \geq -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq 64 \\ a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8$  (thỏa  $a > -16$ ).

$\max_{[-1;1]} f(x) = 8 + a + b = 1$ . Khi đó, YCBT  $\Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 1 \\ b - \frac{a^2}{32} \geq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ \frac{a^2}{32} + a + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ -24 \leq a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \Rightarrow b = 1$ .

$\max_{[-1;1]} f(x) = \left| b - \frac{a^2}{32} \right| = 1$ . Khi đó, YCBT  $\Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{a^2}{32} = -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{32} - 1 \\ 6 + a + \frac{a^2}{32} \leq 0 \\ a \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$ .

Vậy  $a = -8, b = 1$  thỏa YCBT.

**Cách 2.** Đặt  $t = x^2$  khi đó ta có  $g(t) = 8t^2 + at + b$ .



Vì  $x \in [-1; 1]$  nên  $t \in [0; 1]$ .

Theo yêu cầu bài toán thì ta có:  $0 \leq g(t) \leq 1$  với mọi  $t \in [0; 1]$  và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số  $g(t)$  là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-\Delta}{32} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1(1) \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1(2) \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32(3). \end{cases}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có:  $-64 \leq a^2 \leq 64$  do đó  $-8 \leq a \leq 8$ .

Lấy (3) + 32(2) ta có:  $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$ .

Suy ra:  $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$ .

Khi đó ta có  $a = -8$  và  $b = 1$ .

Kiểm tra:  $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$ .

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$ .

Vậy  $\max |g(t)| = 1$  khi  $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$  (t/m).

Chọn phương án C

**Câu 40.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m|$  bằng 1. Số phần tử của  $S$  là

A 0.

B 1.

C 4.

D 3.

**Lời giải.**

Đặt  $\sin x = t$  ( $t \in [-1; 1]$ )  $\Rightarrow y = |t^2 - 2t + m|$ .

Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 2t + m$  có  $f'(t) = 2t - 2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1; 1]$ .

Có  $f(-1) = m + 3, f(1) = m - 1$ . Khi đó  $\begin{cases} \max_{[-1; 1]} f(x) = \max\{m + 3; m - 1\} = m + 3 \\ \min_{[-1; 1]} f(x) = \min\{m + 3; m - 1\} = m - 1. \end{cases}$

TH1:  $|m + 3| \geq |m - 1| \Leftrightarrow m \geq -1$

$\Rightarrow \max f(x) = |m + 3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2(l) \\ m = -4(l). \end{cases}$

TH1:  $|m + 3| < |m - 1| \Leftrightarrow m < -1$

$\Rightarrow \max f(x) = |m - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(l) \\ m = 0(l) \end{cases}$

$\Rightarrow$  Không tồn tại  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án A

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. C  | 4. B  | 5. A  | 6. C  | 7. C  | 8. D  | 9. A  | 10. C |
| 11. D | 12. B | 13. B | 14. A | 15. D | 16. A | 17. A | 18. B | 19. D | 20. B |
| 21. B | 22. B | 23. B | 24. B | 25. D | 26. D | 27. D | 28. C | 29. D | 30. D |
| 31. C | 32. D | 33. B | 34. D | 35. B | 36. C | 37. B | 38. C | 39. C | 40. A |

## DẠNG 43. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CÓ CHỨA THAM SỐ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT.

Thường sử dụng các phương pháp sau:

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.
3. Phương pháp hàm số.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \text{ với } b, c > 0; 0 < a \neq 1.$$

$$\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a |x| \text{ với } \alpha \neq 0; 0 < a \neq 1.$$

$$\text{Nếu } a > 1 \text{ thì với } \forall x_1, x_2 > 0: x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

$$\text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì với } \forall x_1, x_2 > 0: x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (0 < a \neq 1).$$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad (0 < a \neq 1).$$

$$\text{Phương trình bậc hai có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình bậc hai có hai nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow P < 0.$$

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho phương trình  $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[1; 2]$  là

Ⓐ  $(1; 2).$

Ⓑ  $[1; 2].$

Ⓒ  $[1; 2).$

Ⓓ  $[2; +\infty).$

Lời giải.

**Phân tích hướng dẫn giải**

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm điều kiện của tham số để phương trình logarit có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Viết lại phương trình logarit về dạng phương trình bậc hai đối với 1 biểu thức logarit.

B2: Đặt ẩn phụ là biểu thức logarit và tìm điều kiện cho ẩn phụ.

B2: Tìm điều kiện cho phương trình ẩn phụ.

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

Điều kiện:  $x > 0$ .

Ta có:  $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0(1)$ .

Đặt  $t = \log_2 x$ , với  $x \in [1; 2]$  thì  $t \in [0; 1]$ , khi đó ta có phương trình:

$$(1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1 \end{cases} \quad (2).$$

Nhận thấy với mỗi số thực  $t \in [0; 1]$  cho ta một số thực  $x \in [1; 2]$ , do đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow (2)$  có 2 nghiệm phân biệt thuộc  $[0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 1 \\ m - 1 \in [0; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 0 \leq m - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$ .

Vậy  $1 \leq m < 2$ .

Chú ý: Đối với phương trình bậc hai chứa tham số, nếu  $\Delta$  có dạng chính phương thì nên tìm cụ thể hai nghiệm của phương trình.

Chọn phương án **C**

**3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 1.** Cho phương trình  $\log_3^2 x + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số thực  $m$  mà phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[1; 3]$ . Số phần tử của tập  $S$  là

**(A)** 2.

**(B)** 0.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0$

Phương trình:  $\log_3^2 x + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3m \log_3(3x) + 2m^2 + m - 1 = 0$ .

Đặt  $t = \log_3 x$ , với  $x \in [1; 3]$  thì  $t \in [0; 1]$ , khi đó ta có phương trình  $t^2 + 3mt + 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -m - 1 \\ t = -2m + 1 \end{cases}$ .

Khi đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[0; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -m - 1 \leq 1 \\ 0 \leq -2m + 1 \leq 1 \\ -m - 1 \neq -2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq -1 \\ 0 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$$

Vậy không có giá trị nào của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.** Cho phương trình  $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$  (với  $m$  là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc  $[1; 81]$  là

**(A)** 2.**(B)** 3.**(C)** 4.**(D)** 5.

**Lời giải.**

Ta có:  $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$ .

Đặt  $t = \log_3 x$  vì  $x \in [1; 81] \Rightarrow t \in [0; 4]$ .

Khi đó phương trình đã cho trở thành:  $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = m - 2. \end{cases}$

ycbt  $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m - 2 \leq 4 \\ m - 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 6 \\ m \neq 5 \end{cases}$ . Vậy có 4 số nguyên  $m$  thỏa ycbt.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 3.** Cho phương trình  $4\log_3^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0$  (với  $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn  $[1; 9]$ ?

**(A)** 0.**(B)** 2.**(C)** 1.**(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có  $4\log_3^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_3 x = 2 - m. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn  $[1; 9]$  khi và chỉ khi (1) có một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 9] \setminus \{3\}$  tức  $\begin{cases} 0 \leq 2 - m \leq 2 \\ 2 - m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 2 \\ m \neq 1. \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$  có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $(0; 1)$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$  có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $(0; 1)$

**(A)**  $m > \frac{9}{4}$ .**(B)**  $0 < m < \frac{9}{4}$ .**(C)**  $0 < m < \frac{1}{4}$ .**(D)**  $m > -\frac{9}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x + m = 0(1)$ .

Đặt  $t = \log_3 x$  với  $x \in (0; 1)$  thì  $t < 0$ , khi đó ta có phương trình  $t^2 + 3t + m = 0(2)$ .

Nhận thấy với mỗi số thực  $t < 0$  cho ta một số thực  $x \in (0; 1)$ , do đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  Phương

trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4m > 0 \\ \frac{-3}{2} < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 5.** Cho phương trình  $(\log_3 x)^2 + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$ . Gọi  $S$  là tập tất cả các số tự nhiên  $m$  mà phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 \geq \frac{10}{3}$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

(A) 6.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 10.

**Lời giải.**

Với  $m \in \mathbb{N}$ .

$$PT \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + 3m(1 + \log_3 x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t.$$

$$\text{Ta được phương trình: } t^2 + 3mt + 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - m \\ t = 1 - 2m. \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $1 - 2m \neq -1 - m \Leftrightarrow m \neq 2$ .

$$\text{Khi đó } x_1 + x_2 \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3^{1-2m} + 3^{-1-m} \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-2m} + 3^{-m} - 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{-m} \geq 1 \Leftrightarrow -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$  có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $(0; 1)$ .

(A)  $0 < m < \frac{1}{4}$ .(B)  $0 \leq m < \frac{1}{4}$ .(C)  $m \leq \frac{1}{4}$ .(D)  $-\frac{1}{4} < m < 0$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } 4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x = -m(1).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \text{ với } x \in (0; 1) \text{ thì } t < 0, \text{ khi đó ta có phương trình } t^2 + t = -m. \quad (*)$$

$$\text{Xét } f(t) = t^2 + t (t \in (-\infty; 0)). \text{ Có } f'(t) = 2t + 1; f(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên

|         |           |                |     |
|---------|-----------|----------------|-----|
| $t$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $f'(t)$ | $-$       | $0$            | $+$ |
| $f(t)$  | $+\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ |

Nhận thấy với mỗi số thực  $t < 0$  cho ta một số thực  $x \in (0; 1)$ , do đó yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow (*)$  có hai nghiệm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\log_2^2(2x) - 2\log_2 x^2 - m - 1 = 0$  có nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm thuộc đoạn  $[\frac{1}{2}; 16]$ ?

(A) 10.

(B) 8.

(C) 7.

(D) 6.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0$ . Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$(1 + \log_2 x)^2 - 4\log_2 x - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x = m.$$

Đặt  $t = \log_2 x$ , với mỗi  $x \in \left[\frac{1}{2}; 16\right]$  thì cho một giá trị  $t \in [-1; 4]$ .

Khi đó ta được phương trình  $t^2 - 2t = m$ .

Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 2t$  trên đoạn  $[-1; 4]$ .

Ta có  $f'(t) = 2t - 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ .

Bảng biến thiên của  $f(t)$

|         |      |      |     |
|---------|------|------|-----|
| $t$     | $-1$ | $1$  | $4$ |
| $f'(t)$ | $-$  | $0$  | $+$ |
| $f(t)$  | $3$  | $-1$ | $8$ |

Từ bảng biến thiên suy ra  $m \in \{-1\} \cup (3; 8]$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 8.** Tìm  $m$  để phương trình:  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$  có nghiệm thuộc đoạn  $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$ .

**(A)**  $m \in \mathbb{R}$ .

**(B)**  $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$ .

**(C)**  $m \in \emptyset$ .

**(D)**  $-3 < m \leq \frac{7}{3}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 2$ . Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow (m-1)[-2\log_2(x-2)]^2 + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Đặt  $t = \log_2(x-2)$ . Vì  $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$ .

$$\text{Phương trình (1) trở thành } (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}. \quad (2)$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}, t \in [-1; 1]$ .

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |    |               |
|---------|----|---------------|
| $x$     | -1 | 1             |
| $f'(t)$ |    | +             |
| $f(t)$  | -3 | $\frac{7}{3}$ |

Phương trình đã cho có nghiệm  $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Leftrightarrow$  khi phương trình (2) có nghiệm  $t \in [-1; 1]$ .

Từ bảng biến thiên suy ra  $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 9.** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3(mx) = 2\log_3(x+1)$  có hai nghiệm phân biệt là

**(A)**  $m \geq 4$ .

**(B)**  $m > 4$ .

**(C)**  $m < 0$  và  $m \geq 4$ .

**(D)**  $m < 0$  và  $m > 4$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_3(mx) = 2\log_3(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = x^2 + 2x + 1 \end{cases} (*).$$

Ta thấy  $x = 0$  không là nghiệm của (\*).

$$\text{Với } x \neq 0: (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Xét hàm số  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$  với  $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}).$$

Bảng biến thiên:

|         |                     |                     |                     |           |
|---------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|
| $x$     | -1                  | 0                   | 1                   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -                   |                     | - 0 +               |           |
| $f(x)$  | 0<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>4 | 4<br>↗<br>$+\infty$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $m > 4$  là giá trị cần tìm.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho phương trình  $\ln^2(x^2+1) - 8\ln(x^2+1) - m = 0$  (với  $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

**(A)** 0..

**(B)** 15..

**(C)** 16..

**(D)** 17..

**Lời giải.**

Đặt  $t = \ln(x^2+1)$  (vì  $x^2+1 \geq 1$  nên  $t \geq 0$ ), khi đó ta có phương trình  $t^2 - 8t = m$  (\*). Nhận thấy: nếu  $t = 0$  thì ta có một giá trị  $x = 0$ . Nếu  $t > 0$  thì  $x = \pm\sqrt{e^t - 1}$ . Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 8t$  với  $t \geq 0$ . Ta có bảng biến thiên:

|         |                 |                         |           |
|---------|-----------------|-------------------------|-----------|
| $t$     | 0               | 4                       | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | -               | 0                       | +         |
| $f(t)$  | 0<br>↘<br>$-16$ | $-16$<br>↗<br>$+\infty$ | $+\infty$ |



Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow (*)$  có hai nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow -16 < m < 0$ . Vậy có 15 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 11.** Cho phương trình  $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$  với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm thuộc  $[16; +\infty)$ .

**(A)**  $1 < m \leq 2$ .

**(B)**  $1 < m \leq \sqrt{5}$ .

**(C)**  $\frac{3}{4} \leq m \leq \sqrt{5}$ .

**(D)**  $1 \leq m \leq \sqrt{5}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \log_2 x$  với  $x \in [16; +\infty)$  thì  $t \geq 4$ , khi đó ta có phương trình  $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3) (*)$ .

- Với  $m \leq 0$  thì phương trình vô nghiệm, do  $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 2t - 3} > 0 \\ t - 3 > 0 \end{cases}, \forall t \geq 4$ .

- Với  $m > 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = m^2(t - 3)^2 \Leftrightarrow (1 - m^2)t^2 + 2(3m^2 - 1)t - 3(1 + 3m^2) = 0 (1)$ .

+ Nếu  $m = 1 \Rightarrow t = 3$ : không thỏa mãn.

+ Nếu  $m \neq 1$  thì  $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (loại)} \\ t = \frac{-3m^2 - 1}{1 - m^2} \end{cases}$ .

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{-3m^2 - 1}{1 - m^2} \geq 4 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{5}$  (thỏa mãn).

Chọn phương án **(B)**

**Câu 12.** Cho phương trình  $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x - 5} = m(\log_3 x + 1)$  với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm thuộc  $[27; +\infty)$ .

**(A)**  $0 < m < 2$ .

**(B)**  $0 \leq m < \frac{1}{4}$ .

**(C)**  $0 \leq m \leq 1$ .

**(D)**  $0 \leq m < 1$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \log_3 x$  với  $x \in [27; +\infty)$  thì  $t \geq 3$ , khi đó ta có phương trình  $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = m(t + 1) (*)$ .

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 5 \end{cases}$ .

- Với  $m < 0$  thì phương trình vô nghiệm, do  $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 4t - 5} \geq 0 \\ t + 1 > 0 \end{cases}, \forall t \geq 5$ .

- Với  $m = 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 4t - 5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$ .

- Với  $m > 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = m^2(t + 1)^2 \Leftrightarrow (1 - m^2)t^2 - (2m^2 + 4)t - 5 - m^2 = 0. (**)$

+ Nếu  $m = 1 \Rightarrow t = -1$ : không thỏa mãn.

+ Nếu  $m \neq 1$  thì  $(**) \Leftrightarrow (t + 1)[(1 - m^2)t - m^2 - 5] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{m^2 + 5}{1 - m^2} \end{cases}$ .

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{m^2 + 5}{1 - m^2} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{6m^2}{1 - m^2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ , kết hợp  $m > 0$  suy ra  $0 < m < 1$ .

Vậy với  $0 \leq m < 1$  thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc  $[27; +\infty)$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$  vô nghiệm.

- (A)  $m \in (\sqrt{2}; 2)$ . (B)  $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . (C)  $m \in (-\sqrt{2}; 2)$ . (D)  $m \in (-2; \sqrt{2})$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 |\cos x| - 2m \log |\cos x| - m^2 + 4 = 0$ . (\*)

Đặt  $\log |\cos x| = t$ . Do  $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow t \leq 0$ .

Khi đó phương trình (\*) trở thành:  $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0$ . (1)

Phương trình (\*) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) \geq 0 \\ \frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{-m^2 + 4}{1} > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4 < 0 \\ \begin{cases} 2m^2 - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ -m^2 + 4 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ \begin{cases} m \geq \sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2$$

Chọn phương án (C)

**Câu 14.** Cho hàm số  $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$ . Số các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| < 15$  là

- (A) 14. (B) 11. (C) 12. (D) 13.

**Lời giải.**

Ta có:  $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] = \log_3 (x^2 - x + 1 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 \\ 2x^2 - (m+3)x + 1 - m = x^2 - x + 1 - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt thỏa mãn } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 - 3m > 0 \\ 2^2 - 1 + 1 - 3m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{3}.$$

Theo giả thiết  $|x_1 - x_2| < 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 225 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 221 < 0 \Leftrightarrow -13 < m < 17$  Do đó  $-13 < m < 2 - \sqrt{3}$ . Vậy số các giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn là 13.

Chọn phương án (D)

**Câu 15.** Cho phương trình  $\log_9 x^2 - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m$  ( $m$  là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 4. (B) 6. (C) Vô số. (D) 5.

**Lời giải.**

$$\text{Phương trình } \log_9 x^2 - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ 5 - \frac{1}{x} = m(2). \end{cases}$$

Cách 1. Xét  $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$  trên khoảng  $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ .

Có  $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{x}\right) = 5$ .

Ta có bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$ :

|         |               |           |
|---------|---------------|-----------|
| $x$     | $\frac{1}{5}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +             |           |
| $f(x)$  | 0             | 5         |

Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (2) có nghiệm  $x > \frac{1}{5}$ .

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow 0 < m < 5$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m > 0$  nên  $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2. (2)  $\Leftrightarrow (5 - m)x = 1$  (3).

Với  $m = 5$ , phương trình (3) thành  $0 \cdot x = 1$  (vô nghiệm).

Với  $m \neq 5$ , (3)  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5 - m}$ .

Xét  $x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5 - m} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{m}{5 \cdot (5 - m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m > 0$  nên  $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 16.** Cho phương trình  $(x - 2) \log_5^2(x - m) + (x - 3) \log_5(x - m) = 1$  với  $m$  là tham số. Tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng  $(3; +\infty)$  là tập  $S = (a; +\infty)$ . Đánh giá nào sau đây đúng?

**(A)**  $-3 < a < -1$ .

**(B)**  $-1 < a < 1$ .

**(C)**  $1 < a < 2$ .

**(D)**  $2 < a < 5$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = \log_5(x - m)$ . Phương trình đã cho trở thành.

$$(x - 2)t^2 + (x - 3)t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{x - 2} \end{cases} (x > 3).$$

+) Với  $t = -1 \Rightarrow x = m + \frac{1}{5} > 3 \Leftrightarrow m > \frac{14}{5}$ .

+) Với  $t = \frac{1}{x - 2} \Rightarrow x - m = 5^{\frac{1}{x - 2}} \Leftrightarrow m = x - 5^{\frac{1}{x - 2}}$ .

Mà hàm số  $f(x) = x - \frac{1}{5^{x-2}}$  đồng biến trên  $(3; +\infty) \Rightarrow m > f(3) = -2$ .

Kết hợp hai trường hợp trên ta được  $m \in (-2; +\infty) \Rightarrow a = -2$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 17.** Tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho phương trình  $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$  có đúng ba nghiệm phân biệt là

**(A)** 2.

**(B)**  $\frac{3}{2}$ .

**(C)** 0.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có:  $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2((x-1)^2 + 2) = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) (*)$ .

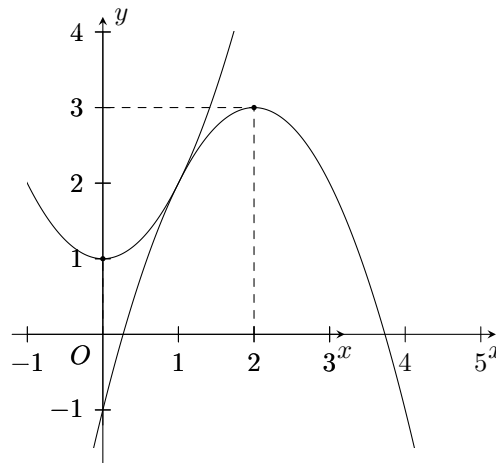
Đặt  $f(t) = 2^t \log_2(t+2), t \geq 0; f(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$  hàm số  $f(t) = 2^t \log_2(t+2)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó  $(*) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f[2|x-m|] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-m) = (x-1)^2 \\ 2(x-m) = -(x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 = 2m \\ x^2 + 1 = 2m \end{cases} (I)$ .

Vẽ đồ thị của hai hàm số  $f(x) = -x^2 + 4x - 1$  và  $g(x) = x^2 + 1$  trên cùng một hệ trục tọa độ.



Từ đồ thị suy ra (I) có 3 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Vậy tổng các giá trị của  $m$  là  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Cho phương trình  $3^x + m = \log_3(x-m)$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in (-15; 15)$  để phương trình đã cho có nghiệm?

**(A)** 15.

**(B)** 16.

**(C)** 9.

**(D)** 14.

**Lời giải.**

Đặt  $\log_3(x - m) = a \Leftrightarrow x - m = 3^a$ .

Ta có:  $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \Leftrightarrow 3^x + x = 3^a + a$ .

Xét hàm số  $f(t) = 3^t + t$ , với  $t \in \mathbb{R}$ . Có  $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên tập xác định.

Do đó  $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(a) \Leftrightarrow x = a \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$ .

Xét hàm số  $g(x) = 3^x - x$ , với  $x \in \mathbb{R}$ . Có  $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$ .

Ta có bảng biến thiên

|         |           |                                        |           |
|---------|-----------|----------------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\log_3 \frac{1}{\ln 3}$               | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$                                    | $+$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g\left(\log_3 \frac{1}{\ln 3}\right)$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là  $m \in \left(-\infty; -g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)\right)$ .

Vậy số giá trị nguyên của  $m \in (-15; 15)$  để phương trình đã cho có nghiệm là 14.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$  có nghiệm.

**(A)**  $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$ . **(B)**  $1 \leq m \leq e - 1$ . **(C)**  $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$ . **(D)**  $1 \leq m < e - 1$ .

**Lời giải.**

Đặt  $u = \ln(m + \sin x)$  ta được hệ phương trình:  $\begin{cases} u = \ln(m + \sin x) \\ \ln(m + u) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m + \sin x \\ e^{\sin x} = m + u \end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra:  $e^u + u = e^{\sin x} + \sin x$  (\*)

Xét hàm số  $f(t) = e^t + t$  có  $f'(t) = e^t + 1 > 0, t \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó  $(*) \Leftrightarrow f(u) = f(\sin x) \Leftrightarrow u = \sin x$ .

Khi đó ta được:  $\ln(m + \sin x) = \sin x \Leftrightarrow e^{\sin x} - \sin x = m$ . (\*\*)

Đặt  $a = \sin x, a \in [-1; 1]$ . Phương trình (\*\*) trở thành:  $e^a - a = m$  (\*\*)

Xét hàm số  $g(a) = e^a - a$  trên  $[-1; 1]$ .

Hàm số  $g(a) = e^a - a$  liên tục trên  $[-1; 1]$  và có  $\min_{[-1; 1]} g(a) = g(0) = 1; \max_{[-1; 1]} g(a) = g(1) = e - 1$ .

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (\*\*) có nghiệm  $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq e - 1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 20.** Cho phương trình  $m \ln^2(x + 1) - (x + 2 - m) \ln(x + 1) - x - 2 = 0$  (1). Tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$  là khoảng  $(a; +\infty)$ . Khi đó  $a$  thuộc khoảng

**(A)**  $(3.7; 3.8)$ . **(B)**  $(3.6; 3.7)$ . **(C)**  $(3.8; 3.9)$ . **(D)**  $(3.5; 3.6)$ .

**Lời giải.**

Theo đề ra ta chọn điều kiện của  $x$  là  $x > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$ .

TH1:  $m = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0$

TH2:  $m \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow$  Xét hàm số  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+2}$  với  $x > 0$  Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)$  có  $g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}, x > 0$

Hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên  $(0; +\infty)$  có nhiều nhất một nghiệm trên  $(0; +\infty)$

Mặt khác:  $g(2) \cdot g(3) < 0$  và hàm số  $4y = g(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  Suy ra  $g(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm trên  $(2; 3)$

Từ đó suy ra  $g(x) = 0$  có một nghiệm duy nhất có một nghiệm duy nhất  $x_0 \in (2; 3)$ .

$\Rightarrow f'(x) = 0$  có một nghiệm duy nhất có một nghiệm duy nhất  $x_0 \in (2; 3)$ .

Bảng biến thiên

|      |   |                            |                   |                            |              |           |
|------|---|----------------------------|-------------------|----------------------------|--------------|-----------|
| $x$  | 0 | 2                          | $x_0$             | 3                          | 4            | $+\infty$ |
| $y'$ |   | +                          | -                 | 0                          | -            | -         |
| $y$  | 0 | $\nearrow \frac{\ln 3}{4}$ | $\nearrow f(x_0)$ | $\searrow \frac{\ln 5}{6}$ | $\searrow 0$ |           |

Để có 2 nghiệm thỏa mãn  $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$  thì  $0 < \frac{1}{m} < \frac{\ln 5}{6} \Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5} \Rightarrow a = \frac{6}{\ln 5} \approx 3,728$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 21.** Giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $4\log_9^2(3x) + (2m-3)\log_3 x - 2m - 1 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 = 12$  thuộc khoảng nào sau đây?

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > 0$ .

Ta có  $pt \Leftrightarrow (1 + \log_3 x)^2 + (2m-3)\log_3 x - 2m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + (2m-1)\log_3 x - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3^{2m} \end{cases}$$

Theo đề, ta có:  $x_1 + x_2 = 12 \Leftrightarrow 3 + 3^{2m} = 12 \Rightarrow m = 1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 22.** Phương trình  $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2018; 2018]$  để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

**(A)** 2019.

**(B)** 2018.

**(C)** 2020.

**(D)** 2021.

**Lời giải.**

Ta có:  $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m} \Leftrightarrow 3^{2x^2-3x+m} - 3^{x^2-x+2} = 3^{x^2-2x+m} - 9$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-x}(3^{x^2-2x+m} - 9) = 3^{x^2-2x+m} - 9 \Leftrightarrow (3^{x^2-x} - 1)(3^{x^2-2x+m} - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-x} = 1 \\ 3^{x^2-2x+m} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 2x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0(2) \end{cases}$$

Để phương trình đầu có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt  $x \neq$

$1, x \neq 0$ .

$$\text{Khi } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \neq m < 3.$$

Vì  $m \in [-2018; 2018]$  và  $m \in \mathbb{Z}$  nên có 2020 giá trị  $m$  cần tìm.

Chọn phương án **C**

**Câu 23.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $4(\log_3 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{3}} x + m = 0$  có hai nghiệm thuộc  $(0; 1)$ .

**(A)**  $0 < m < \frac{1}{5}$ .

**(B)**  $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{4}$ .

**(C)**  $-1 < m < \frac{1}{4}$ .

**(D)**  $0 < m < \frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Pt:  $4(\log_3 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{3}} x + m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + \log_3 x = -m \quad (1)$ .

Đặt  $t = \log_3 x$ , ta được phương trình  $t^2 + t = -m$  với  $t \in (-\infty; 0)$  khi  $x \in (0; 1)$ .

Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x \in (0; 1)$  khi phương trình  $t^2 + t = -m$  có hai nghiệm  $t \in (-\infty; 0)$ .

Xét hàm số  $y = t^2 + t$  trên  $(-\infty; 0)$ .

|     |           |                |     |
|-----|-----------|----------------|-----|
| $t$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $y$ | $+\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ |

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 24.** Điều kiện cần và đủ của tham số  $m$  để phương trình  $\log_5^2 x - (m - 1) \log_5 x + 4 - m = 0$  có hai nghiệm phân biệt thuộc  $[1; 25]$  là

**(A)**  $3 < m \leq 4$ .

**(B)**  $3 \leq m \leq \frac{10}{3}$ .

**(C)**  $\frac{10}{3} < m \leq 4$ .

**(D)**  $3 < m \leq \frac{10}{3}$ .

**Lời giải.**

Pt:  $\log_5^2 x - (m - 1) \log_5 x + 4 - m = 0 \quad (1)$ .

Đặt  $t = \log_5 x$ , với  $t \in [0; 2]$  khi  $x \in [1; 25]$ .

Ta được phương trình  $t^2 - (m - 1)t + 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} \quad (*)$ .

Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x \in [1; 25]$  khi phương trình (\*) có hai nghiệm  $t \in [0; 2]$ .

Xét hàm số  $y = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1}$  trên  $[0; 2]$ .

Ta có  $y' = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1. \end{cases}$

BBT.

|      |           |      |           |           |     |                |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----|----------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $0$       | $1$ | $4$            | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $+$       | $0$ | $+$            |           |
| $y$  | $-\infty$ |      | $-\infty$ | $+\infty$ | $4$ | $\frac{10}{3}$ | $+\infty$ |

$$\Rightarrow 3 < m \leq \frac{10}{3}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 \cdot x_2 = 27$

- (A)**  $m = -2$ .      **(B)**  $m = -1$ .      **(C)**  $m = 1$ .      **(D)**  $m = 2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > 0$ .

Đặt  $t = \log_3 x$ , ta có phương trình  $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$ .

GS:  $t_1 = \log_3 x_1, t_2 = \log_3 x_2 \Rightarrow t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 x_1 x_2 = 3$ .

Vậy để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 > 0 \\ m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 26.** Tổng tất cả các giá trị  $m$  để phương trình  $3^{x^2-2x+1} \log_3(x^2+3-2x) = 9^{|x-m|} \log_3(2|x+m|+2)$  có đúng ba nghiệm phân biệt là

- (A)** 4.      **(B)** 2.      **(C)** 0.      **(D)** 3.

**Lời giải.**

Ta có  $3^{x^2-2x+1} \log_3(x^2+3-2x) = 9^{|x-m|} \log_3(2|x+m|+2)$  (1)

$$\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2} \cdot \log_3[(x-1)^2+2] = 3^{2|x-m|} \cdot \log_3(2|x-m|+2) \quad (2).$$

Xét hàm số  $f(t) = 3^t \cdot \log_3(t+2), t \geq 0$ .

Vì  $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó (2)  $\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \quad (3) \\ x^2 = 2m - 1 \quad (4). \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (4)

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{ thay vào PT (4) thỏa mãn.}$$

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (3)

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}, \text{ thay vào PT (3) thỏa mãn.}$$

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau.



(4)  $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$ , với  $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ . Thay vào PT (3) tìm được  $m = 1$ .

KL:  $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$ .

Cách 2. Xem phương trình (3) và (4) là hai đường cong. Ta sẽ tìm điểm chung của hai đường cong đó.

Ta giải hệ:  $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \\ x^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = 1. \end{cases}$

Như vậy với  $m = 1$  thì (3) và (4) có nghiệm chung là  $x = 1$ .

Thay  $m = 1$  vào lần lượt vào 2 phương trình ta được 3 nghiệm  $\{\pm 1; 3\}$ . Vậy ta nhận  $m = 1$ .

Xét  $m \neq 1$ , phương trình có 3 nghiệm khi (3) có 2 nghiệm phân biệt và (4) có nghiệm kép hoặc ngược lại. Như vậy ta có:

$$\begin{cases} \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Từ đó ta có 3 giá trị của tham số  $m$  là  $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x - \frac{3}{\log_2(x+1)} = m$  có hai nghiệm phân biệt.

**(A)**  $-1 < m \neq 0$ .

**(B)**  $m > -1$ .

**(C)** Không tồn tại  $m$ .

**(D)**  $-1 < m < 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Xét hàm số  $f(x) = x - \frac{3}{\log_2(x+1)}$ ;  $f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1) \cdot \ln 2 \cdot \log_2^2(x+1)} > 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Bảng biến thiên

|      |    |           |           |
|------|----|-----------|-----------|
| $x$  | -1 | 0         | $+\infty$ |
| $y'$ | +  |           | +         |
| $y$  | -1 | $+\infty$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình  $x - \frac{3}{\log_2(x+1)} = m$  có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $m > -1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 28.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $m \cdot 5^{x^2-3x+2} + 5^{4-x^2} = 5^{6-3x} + m$  có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Ⓐ 3.

Ⓑ 2.

Ⓒ 1.

Ⓓ 4.

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} 5^{x^2-3x+2} = u \\ 5^{4-x^2} = v \end{cases} \Rightarrow u \cdot v = 5^{6-3x}$ . Khi đó phương trình trở thành  $mu + v = uv + m \Leftrightarrow m(u-1) - v(u-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (u-1)(m-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x^2-3x+2} = 1 \\ 5^{2-x^2} = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 4 - x^2 = \log_5 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x^2 = 4 - \log_5 m \end{cases}$$

Để phương trình có ba nghiệm thì:

+) TH1:  $x^2 = 4 - \log_5 m$  có nghiệm kép.

Tức  $4 - \log_5 m = 0 \Leftrightarrow m = 525$ .

+) TH2:  $x^2 = 4 - \log_5 m$  có một nghiệm bằng 1.

Tức  $4 - \log_5 m = 1 \Leftrightarrow m = 75$ .

+) TH3:  $x^2 = 4 - \log_5 m$  có một nghiệm bằng 2.

Tức  $4 - \log_5 m = 4 \Leftrightarrow m = 1$ .

Vậy có 3 giá trị của  $m$  cần tìm.

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 29.** Với giá trị của tham số  $m$  thì phương trình  $(m+1)9^x - 2(2m-3)3^x + 6m+5 = 0$  có hai nghiệm trái dấu?

Ⓐ  $-4 < m < -1$ .Ⓑ Không tồn tại  $m$ .Ⓒ  $-1 < m < \frac{3}{2}$ .Ⓓ  $-1 < m < -\frac{5}{6}$ .**Lời giải.**

Đặt  $3^x = t > 0$ . Phương trình đã cho trở thành:  $\underbrace{(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5}_{f(t)} = 0$ . (\*)

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow (*)$  có hai nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa mãn  $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 30.** Cho phương trình  $(\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} - (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} - x^2 - 2mx - m = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc  $(\frac{1}{2}; 2)$ .

Ⓐ  $-\frac{1}{8} < m < 0$ .Ⓑ  $-\frac{4}{5} < m < 0$ .Ⓒ  $-\frac{1}{8} < m < 1$ .Ⓓ  $\Rightarrow -\frac{1}{8} < m < 2$ .**Lời giải.**

Ta có:  $(\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} - (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} - x^2 - 2mx - m = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} = (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} + x^2 + 2mx + m$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} + x^2 + 2mx + 2 = (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} + 2x^2 + 4mx + 2 + m.$$

Xét hàm số:  $f(t) = (\sqrt{2} + 1)^t + t$ .

Ta có hàm số  $f(t) = (\sqrt{2} + 1)^t + t$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó phương trình có dạng  $f(x^2 + 2mx + 2) = f(2x^2 + 4mx + 2 + m)$

$$\Rightarrow x^2 + 2mx + 2 = 2x^2 + 4mx + 2 + m \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{x^2}{2x + 1}.$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng  $(\frac{1}{2}; 2)$  khi và chỉ khi phương trình  $m = -\frac{x^2}{2x + 1}$  có hai nghiệm thuộc  $(\frac{1}{2}; 2)$ .

Xét hàm số  $y = -\frac{x^2}{2x + 1}$  trên khoảng  $(\frac{1}{2}; 2)$ .

$$\text{Ta có } y' = -\frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|------|-----------|------|----------------|---------------|-----|-----|-----------|
| $y'$ |           | $-$  | $0$            | $+$           | $0$ | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      | $+\infty$      |               | $0$ |     | $-\infty$ |

Biểu đồ biến thiên của hàm số  $y = -\frac{x^2}{2x+1}$  trên khoảng  $(\frac{1}{2}; 2)$ . Bảng trên mô tả dấu của đạo hàm và giá trị của hàm số tại các điểm đặc biệt. Các mũi tên trong bảng  $y$  cho thấy hàm số giảm từ  $+\infty$  tại  $x = -1$  xuống đến  $-\infty$  tại  $x = 2$ , với một cực tiểu tại  $x = 0$  (giá trị  $y = 0$ ). Các giá trị cụ thể được ghi chú: tại  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{8}$ ; tại  $x = 2$ ,  $y = -\frac{4}{5}$ .

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} < m < 0.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 31.** Với những giá trị nào của  $m$  thì phương trình:  $3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2$  có nghiệm.

**(A)**  $m \geq 8$ .

**(B)**  $m \geq 7$ .

**(C)**  $m \geq 6$ .

**(D)**  $m \geq 5$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 = m.$$

Đặt:  $t = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow t \geq 1$ .

Khi đó phương trình trở thành  $3^t + 4^t + t = m$ .

Ta có hàm số  $f(t) = 3^t + 4^t + t$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Để phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow m \geq \min_{[1;+\infty)} (3^t + 4^t + t) \Leftrightarrow m \geq 8$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 32.** Với những giá trị nào của  $m$  thì phương trình:  $(\sqrt{5} - 2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5} - 2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$  có nghiệm duy nhất.

**(A)**  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}, m \neq 0$ .

**(B)**  $m < -\frac{1}{2}$ .

**(C)**  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ .

**(D)**  $m > -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(\sqrt{5} - 2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5} - 2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$ .

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5} - 2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2x^3+mx^2} - 2(2x^3 + mx^2) = (\sqrt{5} - 2)^{x^3+4mx^2-m} - 2(x^3 + 4mx^2 - m)$$

Xét hàm số:  $f(t) = (\sqrt{5} - 2)^t - t$ .

Ta có hàm số  $f(t) = (\sqrt{5} - 2)^t - t$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó phương trình có dạng  $f(2x^3 + mx^2) = f(x^3 + 4mx^2 - m)$

$$\Rightarrow 2x^3 + mx^2 = x^3 + 4mx^2 - m \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + m = 0.$$

Xét hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + m \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m. \end{cases}$$

+) TH1:  $m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  khi đó hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + m$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Vậy khi đó phương trình có một nghiệm duy nhất.

+) TH1:  $m \neq 0 \Rightarrow y(0) = m, y(2m) = -4m^3 + m$ . Khi đó để phương trình có một nghiệm duy nhất khi  $y(0) \cdot y(2m) > 0 \Leftrightarrow m(-4m^3 + m) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thì phương trình sau có nghiệm  $(2 + \sqrt{3})^{\sin x + m} -$

$$(7 + 4\sqrt{3})^{\cos^2 x - \frac{1}{2}} + m = \cos 2x - \sin x$$

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Ta có:  $(2 + \sqrt{3})^{\sin x + m} - (7 + 4\sqrt{3})^{\cos^2 x - \frac{1}{2}} + m = \cos 2x - \sin x$ .

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{\sin x + m} - (2 + \sqrt{3})^{2\cos^2 x - 1} + m = \cos 2x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{\sin x + m} + \sin x + m = (2 + \sqrt{3})^{\cos 2x} + \cos 2x$$

Xét hàm số:  $f(t) = (2 + \sqrt{3})^t + t$ .

Ta có hàm số  $f(t) = (2 + \sqrt{3})^t + t$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó phương trình có dạng  $f(\sin x + m) = f(\cos 2x)$

$$\Rightarrow \sin x + m = \cos 2x \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = m.$$

Đặt:  $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1; 1]$ .

Khi đó phương trình trở thành  $-2t^2 - t + 1 = m$ .

Để phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow \min_{[-1;1]}(-2t^2 - t + 1) \leq m \leq \max_{[-1;1]}(-2t^2 - t + 1) \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{9}{8}$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 34.** Giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $25^x - 4(m + 1) \cdot 5^x + 5(4m - 1) = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1 + 4)(x_2 + 4) = 30$  thuộc khoảng nào sau đây?

**(A)**  $(6; 7)$ .

**(B)**  $(4; 5)$ .

**(C)**  $(3; 4)$ .

**(D)**  $(2; 3)$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = 5^x$ , ta có phương trình

$$t^2 - 4(m+1)t + 5(4m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 4m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5 \\ 5^x = 4m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5^x = 4m-1(1). \end{cases}$$

Ta có  $(x_1+4)(x_2+4) = 30 \Leftrightarrow 5 \cdot (x_2+4) = 30 \Leftrightarrow x_2 = 2$ .

. Thay vào (1) ta được  $5^2 = 4m-1 \Leftrightarrow m = \frac{26}{4}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 35.** Giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $9^x - 2(2m+1) \cdot 3^x + 243 = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1+3)(x_2+3) = 30$  thuộc khoảng nào sau đây?

- (A)** (6; 7). **(B)** (8; 9). **(C)** (7; 8). **(D)** (2; 3).

**Lời giải.**

Đặt  $t = 3^x$ , ta có phương trình  $t^2 - 2(2m+1)t + 243 = 0$ .

GS: phương trình có nghiệm  $t_1 = 3^{x_1}, t_2 = 3^{x_2} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 3^{x_1+x_2} = 243 = 3^5 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5$ .

Ta có  $(x_1+3)(x_2+3) = 30 \Leftrightarrow x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9 = 30 \Leftrightarrow x_1x_2 = 6$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 36.$$

Mà theo đề bài  $t_1 + t_2 = 4m + 2 = 36 \Leftrightarrow m = \frac{34}{4}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 36.** Giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x + 4 - m = 0$  có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1+4)(x_2+4) = 48$  thuộc khoảng nào sau đây?

- (A)** (1; 2). **(B)** (1; 3). **(C)** (0; 1). **(D)** (0; 2).

**Lời giải.**

Đặt  $t = \log_2 x$ , ta có phương trình  $t^2 - 3t + 4 - m = 0$ .

GS: phương trình có nghiệm  $t_1 = \log_2 x_1, t_2 = \log_2 x_2 \Rightarrow t_1 + t_2 = \log_2 x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 = 8$ .

Ta có  $(x_1+4)(x_2+4) = 48 \Leftrightarrow x_1x_2 + 4(x_1+x_2) + 16 = 48 \Leftrightarrow x_1+x_2 = 6$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 2.$$

Mà theo đề bài  $t_1 \cdot t_2 = 4 - m = 2 \Leftrightarrow m = 2$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 37.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để tồn tại duy nhất cặp  $(x; y)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5) = 1$  và  $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - m = 0$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

- (A)** 3. **(B)** 4. **(C)** 5. **(D)** 6.

**Lời giải.**

Ta có:

$$\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3 = 2x - 6y + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

Ta thấy phương trình  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$  là phương trình đường tròn tâm  $I(1; -3)$  bán kính

$$R = \sqrt{12}.$$

Để tồn tại duy nhất cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán khi đường thẳng  $\Delta: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$  tiếp xúc với đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$ .

$$\text{Khi và chỉ khi } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3} + 3 - m - \sqrt{3}|}{2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + 4\sqrt{3} \\ m = 3 - 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 38.** Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\log_5(\sqrt{mx}) = \log_5(x+1)$  có hai nghiệm phân biệt là

$$\text{(A)} m \geq 4.$$

$$\text{(B)} m > 4.$$

$$\text{(C)} m < 0 \text{ và } m \geq 4.$$

$$\text{(D)} m < 0 \text{ và } m > 4.$$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log(\sqrt{mx}) = \log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{mx} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad (*)$$

Ta thấy  $x = 0$  không là nghiệm của  $(*)$ .

$$\text{Với } x \neq 0: (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Xét hàm số  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$  với  $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\} \text{)}.$$

Bảng biến thiên:

| $x$     | -1                  | 0                   | 1              | $+\infty$ |
|---------|---------------------|---------------------|----------------|-----------|
| $f'(x)$ | -                   |                     | - 0 +          |           |
| $f(x)$  | 0<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>4 | ↗<br>$+\infty$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $m > 4$  là giá trị cần tìm.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 39.** Cho bất phương trình  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0$  ( $m$  là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn  $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$  là

$$\text{(A)} [-3; +\infty).$$

$$\text{(B)} \left(\frac{7}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{(C)} \left[-3; \frac{7}{3}\right].$$

$$\text{(D)} \left(-\infty; \frac{7}{3}\right).$$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 2$ .

$$\text{Ta có: } (m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 \geq 0.$$

Đặt  $t = \log_2(x-2)$ , ta có phương trình trở thành:  $(m-1)t^2 + (m-5)t + m-1 \geq 0 (*)$ .

Với  $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right]$ , ta có:  $t \in [-1; 1]$ .

$$(*) \Leftrightarrow m \geq \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}, t \in [-1; 1].$$

Để bất phương trình có nghiệm  $t \in [-1; 1]$ .

Khi và chỉ khi  $m \geq \min_{[-1; 1]} \left( \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} \right)$ .

$$f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}. \text{ Ta có: } f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} \geq 0, \forall t \in [-1; 1].$$

Suy ra:  $f(-1) \leq f(t) \leq f(1), \forall t \in [-1; 1]$  hay  $-3 \leq f(t) \leq \frac{7}{3}, \forall t \in [-1; 1]$ .

Vậy  $m \geq -3$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 40.** Cho bất phương trình  $\log_2^2(2x) - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0$  ( $m$  là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc đoạn  $[4; 4\sqrt{2}]$  là

$$\textcircled{\text{A}} m \leq \frac{7}{2}.$$

$$\textcircled{\text{B}} m \geq \frac{9}{2}.$$

$$\textcircled{\text{C}} m \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{\text{D}} m \geq \frac{7}{4}.$$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0$ .

$$\log_2^2(2x) - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + (1-m)\log_2 x + m - 2 \leq 0$$

Với  $x \in [4; 4\sqrt{2}] \Rightarrow t \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$ , ta có bất phương trình bậc hai  $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0$ .

Bài toán trở thành tìm  $m$  để bất phương trình:  $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$ .

$$t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] (*).$$

$$\text{Vì } t-1 > 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right], \text{ nên } (*) \Leftrightarrow t+2-m \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

Chọn phương án **B**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. B  | 4. B  | 5. B  | 6. A  | 7. D  | 8. D  | 9. B  | 10. B |
| 11. B | 12. D | 13. C | 14. D | 15. A | 16. A | 17. D | 18. D | 19. B | 20. A |
| 21. B | 22. C | 23. D | 24. D | 25. C | 26. D | 27. B | 28. A | 29. A | 30. A |
| 31. A | 32. C | 33. D | 34. A | 35. B | 36. B | 37. D | 38. B | 39. A | 40. B |



**DẠNG 44.****NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN****KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nếu  $F'(x) = f(x)$ .

a) Công thức nguyên hàm từng phần  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \int g(x) dx = G(x) (C = 0). \end{cases}$

Khi đó ta có  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$  hay  $\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x) dx$ .

b) Công thức tích phân từng phần  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \int g(x) dx = G(x) (C = 0). \end{cases}$

Khi đó ta có  $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$  hay  $\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)] \Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x) dx$ .

c) Công thức đạo hàm của hàm số sơ cấp và hàm hợp

•  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

•  $(e^x)' = e^x$ .

•  $(\sin u)' = u' \cos u$ .

•  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ .

•  $(e^u)' = e^u u'$ .

•  $(\cos u)' = -u' \sin u$ .

•  $(uv)' = u'v + uv'$ .

•  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

d) Nguyên hàm các hàm số thường gặp

•  $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$ .

•  $\int e^x dx = e^x + C$ .

•  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ , với  $\alpha \neq -1$ .

•  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .

•  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ .

•  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\cos 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$  là

(A)  $-\sin 2x + \cos 2x + C$ .

(B)  $-2 \sin 2x + \cos 2x + C$ .

(C)  $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$ .

(D)  $2 \sin 2x - \cos 2x + C$ .

Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

b) HƯỚNG GIẢI:

— **Bước 1:** Dựa trên giả thuyết  $\cos 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$  ta tìm được hàm số  $f(x) \cdot e^x$ .

— **Bước 2:** Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta tính được  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx$  bằng cách đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

### LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có  $\cos 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$  suy ra  $f(x) \cdot e^x = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x$ .

Xét  $I = \int f(x) \cdot e^x dx$ .

Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

Khi đó ta có  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = -2 \sin 2x - \cos 2x + C$ .

Chọn phương án (C)

## 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\sin 3x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot e^x$  là

(A)  $3 \cos 3x - \sin 3x + C$ .

(B)  $-3 \cos 3x - \cos 3x + C$ .

(C)  $3 \sin 3x - \cos 3x + C$ .

(D)  $3 \cos 3x - \cos 3x + C$ .

Lời giải.

Ta có  $\sin 3x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$  suy ra  $f(x) \cdot e^x = (\sin 3x)' = 3 \cos 3x$ .

Xét  $I = \int f(x) \cdot e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

Khi đó ta có  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = 3 \cos 3x - \sin 3x + C$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$ . Biết  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{e^x}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot x^2$  là

$$\text{(A)} x \cdot e^x + C. \quad \text{(B)} x \cdot e^x - 2e^x + C. \quad \text{(C)} -x \cdot e^x + 2e^x + C. \quad \text{(D)} x \cdot e^x + 2e^x + C.$$

**Lời giải.**

Ta có  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{e^x}$  suy ra  $\frac{f(x)}{e^x} = (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

Suy ra  $f(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$ .

Xét  $I = \int f'(x) \cdot x^2 dx = \int \frac{e^x x - e^x}{x^2} \cdot x^2 \cdot dx = \int (e^x x - e^x) \cdot dx = \int e^x x dx - \int e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$\int e^x x dx - \int e^x dx = \left( x \cdot e^x - \int e^x dx \right) - \int e^x dx = x \cdot e^x - 2e^x + C.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $x^2 - 3x + 1$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot e^{2x}$  là

$$\text{(A)} \frac{4x - 11e^{2x}}{2} + C. \quad \text{(B)} 2x - 2e^{2x} + C. \quad \text{(C)} \frac{4x - 5e^{2x}}{2} + C. \quad \text{(D)} \frac{4x - 5e^{2x}}{2} + C.$$

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 3x + 1$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$  suy ra  $\frac{f(x)}{x} = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$ .

Suy ra  $f(x) = 2x^2 - 3x$  suy ra  $f(x) = 4x - 3$ .

Xét  $I = \int (4x - 3) \cdot e^{2x} dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 4x - 3 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4 dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$I = \int (4x - 3) \cdot e^{2x} dx = \frac{(4x - 3) \cdot e^{2x}}{2} - 2 \int e^{2x} dx = \frac{(4x - 3) \cdot e^{2x}}{2} - e^{2x} + C = \frac{4x - 5e^{2x}}{2} + C.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\sin^2 x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot e^x$  là

- (A)  $2 \cos x - \cos 2x + C$ . (B)  $\sin 2x - \sin^2 x + C$ . (C)  $2 \sin x - \sin^2 x + C$ . (D)  $\sin 2x + \sin^2 x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sin^2 x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^x$  suy ra  $f(x) \cdot e^x = (\sin^2 x)' = \sin 2x$ .

Xét  $I = \int f(x) \cdot e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = \sin 2x - \sin^2 x + C.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\cos^2 x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^{2x}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot e^{2x}$  là

- (A)  $-\sin 2x + 2 \cos^2 x + C$ . (B)  $\sin 2x - 2 \cos^2 x + C$ .  
(C)  $-\sin 2x - 2 \sin^2 x + C$ . (D)  $-\sin 2x - 2 \cos^2 x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\cos^2 x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^{2x}$  suy ra  $f(x) \cdot e^{2x} = (\cos^2 x)' = -\sin 2x$ .

Xét  $I = \int f'(x) \cdot e^{2x} dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = f(x) \cdot e^{2x} - 2 \int f(x) \cdot e^{2x} dx = -\sin 2x - 2 \cos^2 x + C.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 6.** Cho  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

- (A)  $\int f(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$ . (B)  $\int f(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$ .  
(C)  $\int f(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$ . (D)  $\int f(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$  suy ra  $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2}\right)' = -\frac{1}{x^3}$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}. \text{ Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có}$$

$$\int f'(x) \ln x dx = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^3}(x \ln x) - \frac{1}{2x^2} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 7.**  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của  $f(x)e^{2x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

(A)  $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C.$

(B)  $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$

(C)  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C.$

(D)  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C.$

**Lời giải.**

$F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của  $f(x)e^{2x}$  suy ra  $f(x)e^{2x} = 2x$ .

Đặt  $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cdot e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x)e^{2x} dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx = 2x - 2 \int f(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 8.** Cho  $F(x) = (x - 1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

(A)  $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C.$

(B)  $\int f'(x)e^{2x} dx = (4 - 2x)e^x + C.$

(C)  $\int f'(x)e^{2x} dx = (x - 2)e^x + C.$

(D)  $\int f'(x)e^{2x} dx = (2 - x)e^x + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = (x - 1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$  suy ra  $f(x)e^{2x} = [(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1)e^x$ .

Đặt  $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cdot e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x)e^{2x} dx &= f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx \\ &= [e^x + (x - 1)e^x] - 2 \int f(x)e^{2x} dx \\ &= (e^x + (x - 1)e^x) - 2(x - 1)e^x + C = (2 - x)e^x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án (D)

**Câu 9.** Cho  $F(x) = \frac{1}{3x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

(A)  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

(B)  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3} + C.$

(C)  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C.$

(D)  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{1}{3x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$  suy ra  $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{3x^3}\right)' = -\frac{1}{x^4}$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x) \ln x dx = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^3}(x \ln x) - \frac{1}{3x^3} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 10.** Cho  $F(x) = e^x \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

**(A)**  $\int f'(x)e^{2x} dx = -e^x (\sin x + \cos x) + C.$

**(B)**  $\int f'(x)e^{2x} dx = e^x (\sin x + \cos x) + C.$

**(C)**  $\int f'(x)e^{2x} dx = -e^x (\sin x - \cos x) + C.$

**(D)**  $\int f'(x)e^{2x} dx = e^x (\sin x - \cos x) + C.$

**Lời giải.**

Vì  $F(x) = e^x \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$  nên  $f(x)e^{2x} = F'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$ .

Đặt  $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cdot e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

Ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x)e^{2x} dx &= f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} dx \\ &= e^x (\cos x - \sin x) - 2 \int f(x)e^{2x} dx \\ &= e^x (\cos x - \sin x) - 2e^x \cos x + C = -e^x (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **A**

**Câu 11.** Cho  $F(x) = \frac{e^x}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $(f(x) + f'(x))e^x$ .

**(A)**  $\int (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = \frac{e^x (xe^x - e^x)}{x^2} + C.$

**(B)**  $\int (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = \frac{e^{2x}}{x} + C.$

**(C)**  $\int (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = -\frac{e^{2x}}{x} + C.$

**(D)**  $\int (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = -\frac{e^x (xe^x - e^x)}{x^2} + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{e^x}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  suy ra  $f(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$ .

Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x. \end{cases}$

Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int f(x)e^x dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x) dx \Rightarrow \int (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = e^x f(x) + C = \frac{e^x (xe^x - e^x)}{x^2} + C.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 12.** Cho  $F(x) = x^2 e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

**(A)**  $\int f'(x) \ln x \, dx = e^x (x^3 \ln x + 2x^2 \ln x + x^2) + C.$

**(B)**  $\int f'(x) \ln x \, dx = -e^x (x^3 \ln x + 2x^2 \ln x - x^2) + C.$

**(C)**  $\int f'(x) \ln x \, dx = e^x (x^3 \ln x - 2x^2 \ln x - x^2) + C.$

**(D)**  $\int f'(x) \ln x \, dx = e^x (x^3 \ln x + 2x^2 \ln x - x^2) + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = x^2 e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$  suy ra  $\frac{f(x)}{x} = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x) \ln x \, dx &= f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \, dx \\ &= \left( \frac{f(x)}{x} \right) (x \ln x) - x^2 e^x + C \\ &= x \ln x (2xe^x + x^2 e^x) - x^2 e^x + C \\ &= e^x (x^3 \ln x + 2x^2 \ln x - x^2) + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **D**

**Câu 13.** Cho  $F(x) = \frac{\cos x}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$ . Tìm một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cos x$ .

**(A)**  $\int f'(x) \cos x \, dx = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} + x \cos x + C.$

**(B)**  $\int f'(x) \cos x \, dx = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} - x \cos x + C.$

**(C)**  $\int f'(x) \cos x \, dx = \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} + x \cos x + C.$

**(D)**  $\int f'(x) \cos x \, dx = \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} - x \cos x + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{\cos x}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$  suy ra  $f(x) \sin x = \left( \frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x) \cos x dx &= f(x) \cos x - \int f(x) \sin x dx \\ &= (f(x) \sin x) \cot x + \int f(x) \sin x dx \\ &= \left( \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} \right) \cot x + x \cos x + C \\ &= -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} + x \cos x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = f(0) = 1$ . Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx$ .

**(A)**  $I = 1$ . **(B)**  $I = -1$ . **(C)**  $I = 0$ . **(D)**  $I = 2$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = (f(x) \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -1 + 1 = 0.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 1$ . Biết  $\int_0^1 e^x (f(x) + f'(x)) dx = ae + b$ . Tính  $S = a^{2017} + b^{2018}$ .

**(A)**  $S = 1$ . **(B)**  $S = -1$ . **(C)**  $S = 0$ . **(D)**  $S = 2$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}$ .

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 f(x) e^x dx = (e^x f(x)) \Big|_0^1 = \int_0^1 e^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = (e^x f(x)) \Big|_0^1 = f(1)e - f(0) = e - 1.$$

Vậy  $a = 1$ ;  $b = -1 \Rightarrow S = 2$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 16.** Cho  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  và  $b = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot e^x dx$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



$$\textcircled{\textbf{A}} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x} dx = e^a \cot a - b.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x} dx = -e^a \cot a - b.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x} dx = e^a \cot a + b.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x} dx = -e^a \cot a + b.$$

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cot x \end{cases}$ . Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x} dx = -e^x \cot x \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} + \int_a^{\frac{\pi}{2}} e^x \cot x dx = e^a \cot a + b.$$

Chọn phương án  $\textcircled{\textbf{C}}$

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = 1$  và  $f(1) - 2f(0) = 2$ . Tính  $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx$ .

$$\textcircled{\textbf{A}} I = 0.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} I = 3.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} I = -1.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} I = 1.$$

**Lời giải.**

Xét tích phân  $\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = 1$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \frac{1}{x+1} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{(x+1)^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = \frac{f(x)}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2}f(1) - f(0) + \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 1 + I \Rightarrow I = 0.$$

Chọn phương án  $\textcircled{\textbf{A}}$

**Câu 18.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  với  $F(1) = 1$ ,  $\int_0^1 F(x) dx = -1$ .

Tính  $\int_0^1 xf(x) dx$ .

$$\textcircled{\textbf{A}} \int_0^1 xf(x) dx = 0.$$

$$\textcircled{\textbf{B}} \int_0^1 xf(x) dx = -1.$$

$$\textcircled{\textbf{C}} \int_0^1 xf(x) dx = -2.$$

$$\textcircled{\textbf{D}} \int_0^1 xf(x) dx = 2.$$

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = F(x). \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$I = \int_0^1 x f(x) dx = (x F(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx = 1 - (-1) = 2.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(1) \sin 1 = 10$ . Tính  $I = \int (f(x) \cos x + f'(x) \sin x) dx$ .

**(A)**  $I = 20$ .

**(B)**  $I = -10$ .

**(C)**  $I = -20$ .

**(D)**  $I = 10$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \sin x. \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 f(x) \cos x dx = (\sin x f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 (f(x) \cos x + f'(x) \sin x) dx = f(1) \sin 1 = 10.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp hai  $f''(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) + f(0) = 0$

và  $\int_0^1 f(x) dx = 2018$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)**  $\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = 2018$ .

**(B)**  $\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = -4036$ .

**(C)**  $\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = -2018$ .

**(D)**  $\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = 4036$ .

**Lời giải.**

$$\text{Xét tích phân } \int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - x \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (2x - 1) dx \\ v = f'(x). \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = \left[ (x^2 - x) f'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx.$$

Xét tích phân  $\int_0^1 (2x - 1) f(x) dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = f(x) \end{cases}$ . Ta có

$$\int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx = (2x - 1) f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = (x^2 - x) f'(x) \Big|_0^1 - (2x - 1) f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x) dx = 4036.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

**(A)**  $-\sin x + \cos x + C$ . **(B)**  $-\sin x - \cos x + C$ . **(C)**  $\sin x - \cos x + C$ . **(D)**  $\sin x + \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$(\cos x)' = f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow -\sin x = f(x) \cdot e^x.$$

Tính  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = -\sin x - \cos x + C.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

**(A)**  $\cos x - \sin x + C$ . **(B)**  $-\sin x - \cos x + C$ . **(C)**  $\sin x - \cos x + C$ . **(D)**  $\sin x + \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$(\sin x)' = f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow \cos x = f(x) \cdot e^x.$$

Tính  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = \cos x - \sin x + C.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\sin 3x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

**(A)**  $3 \cos 3x - \sin 3x + C.$

**(B)**  $-3 \cos 3x - \sin 3x + C.$

**(C)**  $-3 \cos 3x + \sin 3x + C.$

**(D)**  $3 \cos 3x + \sin 3x + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $\sin 3x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$(\sin 3x)' = f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow 3 \cos 3x = f(x) \cdot e^x.$$

Tính  $I = \int f'(x) \cdot e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot e^x dx = f(x) \cdot e^x - \int f(x) \cdot e^x dx = 3 \cos 3x - \sin 3x + C.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x^3}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$  là

**(A)**  $x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$

**(B)**  $x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C.$

**(C)**  $x^2 \ln x - x + C.$

**(D)**  $-x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$

**Lời giải.**

Ta có  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x^3}$  nên ta có

$$(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

Tính  $I = \int f'(x) \ln x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \cdot \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x^2}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$  là

- Ⓐ  $x \ln x - x + C$ .      Ⓑ  $-x \ln x + x + C$ .      Ⓒ  $x \ln x + x + C$ .      Ⓓ  $-x \ln x - x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x^2}$  nên ta có

$$(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Tính  $I = \int f'(x) \ln x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot \ln x \, dx = f(x) \cdot \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $xf(x)$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$  là

- Ⓐ  $\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C$ .      Ⓑ  $\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$ .      Ⓒ  $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} + C$ .      Ⓓ  $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\ln x$  là một nguyên hàm của hàm số  $xf(x)$  nên ta có

$$(\ln x)' = xf(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = xf(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Tính  $I = \int f'(x) \ln x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cdot \ln x \, dx = f(x) \cdot \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \, dx = \frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{1}{x^3} \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Chọn phương án Ⓓ

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = x^2 + 2x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

- Ⓐ  $2x - x^2 + C$ .      Ⓑ  $x^2 + C$ .      Ⓒ  $-x^2 + C$ .      Ⓓ  $2x + 2 + x^2 + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = x^2 + 2x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$(x^2 + 2x + 3)' = xf(x) \Leftrightarrow 2x + 2 = e^x f(x).$$

Tính  $I = \int f'(x)e^x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x)e^x \, dx = f(x)e^x - \int f(x)e^x \, dx = 2x + 2 - \int (2x + 2) \, dx = -x^2 + C.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên mỗi khoảng của  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Biết  $F(x) = \frac{1}{x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

- (A)  $-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C$ . (B)  $-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C$ . (C)  $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C$ . (D)  $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{1}{x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = f(x)e^x \Leftrightarrow -\frac{2}{x^3} = e^x f(x).$$

Tính  $I = \int f'(x)e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx = -\frac{2}{x^3} + \int \frac{2}{x^3} dx = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 29.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên mỗi khoảng của tập hợp  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Biết  $F(x) = \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $x^2 f(x)$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)x^2 \ln x$  là

- (A)  $-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C$ . (B)  $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C$ . (C)  $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C$ . (D)  $-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $x^2 f(x)$  nên ta có

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^2 f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^4}.$$

Tính  $I = \int f'(x)x^2 \ln x dx = - \int \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx = -\frac{2}{x^3} + \int \frac{2}{x^3} dx = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = \frac{x^4}{16}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$  là

- (A)  $\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$ . (B)  $\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} + C$ . (C)  $\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{4} + C$ . (D)  $-\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \frac{x^4}{16}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$  nên ta có

$$\left(\frac{x^4}{16}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Tính  $I = \int f'(x) \ln x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x)x^2 \ln x \, dx = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 31.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = -xe^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$  là

$$\text{(A)} (-2x+1)e^x + C. \quad \text{(B)} -(3x+1)e^{2x} + C. \quad \text{(C)} -(3x+1)e^x + C. \quad \text{(D)} -(3x-1)e^x + C.$$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = -xe^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$  nên ta có

$$(-xe^x)' = f(x)e^{2x} \Leftrightarrow -(x+1)e^x = f(x)e^{2x}.$$

Tính  $I = \int f'(x)e^{2x} \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x)e^{2x} \, dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} \, dx = -(x+1)e^x - 2xe^x + C = -(3x+1)e^x + C.$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = 2(x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  thỏa mãn  $f(0) = 0$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^x$  là

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} (x^2 + 2x + 2)e^x + C. & \text{(B)} (-x^2 - 2x + 2)e^{2x} + C. \\ \text{(C)} (x^2 - 2x + 2)e^x + C. & \text{(D)} (x^2 + 2x + 2)e^x + C. \end{array}$$

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = 2(x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^x$  nên ta có

$$(2(x-1)e^x)' = f(x)e^x \Leftrightarrow 2xe^x = f'(x)e^x \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

$$\text{Có } f(x) = \int f'(x) \, dx = \int 2x \, dx = x^2 + C.$$

$$\text{Và } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2.$$

$$\text{Tính } I = \int f(x)e^x \, dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cos x$  là

**(A)**  $x \sin x + \cos x + C$ . **(B)**  $\sin x - x \cos x + C$ . **(C)**  $x \sin x + x \cos x + C$ . **(D)**  $\sin x + x \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$  nên ta có

$$\left( \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x \right)' = f(x) \sin x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \sin x = f(x) \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Tính } I = \int f'(x) \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \cos x dx = f(x) \cos x + \int f(x) \sin x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x + x \sin x + C = \cos x + x \sin x + C.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x + x \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cos x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \sin x$  là

**(A)**  $x \sin x + \cos x + C$ . **(B)**  $\sin x - x \cos x + C$ . **(C)**  $x \sin x + x \cos x + C$ . **(D)**  $\sin x + x \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x + x \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cos x$  nên ta có

$$\left( \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x + x \cos x \right)' = f(x) \cos x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \cos x = f(x) \cos x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Tính } I = \int f'(x) \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \sin x dx = f(x) \sin x - \int f(x) \cos x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x + x \cos x + C = \sin x + x \cos x + C.$$

Chọn phương án **D**



**Câu 35.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cos x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \sin x$  là

(A)  $2 \sin x - 2x \cos x + C$ .

(B)  $2 \sin x + x \cos x + C$ .

(C)  $2 \sin x - x \cos x + C$ .

(D)  $-2 \sin x - 2x \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = x^2 \sin x + 2 \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$  nên ta có

$$(x^2 \sin x + 2x \cos x)' = f(x) \cos x \Leftrightarrow (x^2 + 2) \cos x = f(x) \cos x \Rightarrow f(x) = x^2 + 2.$$

Tính  $I = \int f'(x) \sin x \, dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra  $I = \int f'(x) \sin x \, dx = f(x) \sin x - \int f(x) \cos x \, dx = (x^2 + 2) \sin x - (x^2 \sin x + 2x \cos x) + C = 2 \sin x - 2x \cos x + C$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 36.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x) = (x^2 - 4) \cos x - 2x \sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cos x$  là

(A)  $2x \sin x - 2 \cos x + C$ .

(B)  $-2 \cos x - 2x \sin x + C$ .

(C)  $2 \cos x + 2x \sin x + C$ .

(D)  $2 \cos x - 2x \sin x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $F(x) = (x^2 - 4) \cos x + 2 \sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$  nên ta có

$$((x^2 - 4) \cos x - 2x \sin x)' = f(x) \sin x \Leftrightarrow (2 - x^2) \sin x = f(x) \sin x \Rightarrow f(x) = 2 - x^2.$$

Tính  $I = \int f'(x) \cos x \, dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x) \cos x \, dx = f(x) \cos x + \int f(x) \sin x \, dx \\ &= (2 - x^2) \cos x + (x^2 - 4) \cos x - 2x \sin x + C \\ &= -2 \cos x - 2x \sin x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

**Câu 37.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $x^2 + 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $[f(x) + xf'(x)] \ln^2 x$  là

(A)  $x(2x + 2) \ln x + 2(x^2 + 2x) + C$ .

(B)  $x(2x + 2) \ln x - 2(x^2 + 2x) + C$ .

(C)  $(2x + 2) \ln x - 2(x^2 + 2x) + C$ .

(D)  $(2x + 2) \ln x + 2(x^2 + 2x) + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 + 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$  nên ta có  
 $(x^2 + 2x)' = f(x) \ln x \Leftrightarrow 2x + 2 = f(x) \ln x$ .

Tính  $I = \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = [f(x) + xf'(x)] \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} \, dx \\ v = xf(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx = xf(x) \ln^2 x - 2 \int f(x) \ln x \, dx \\ &= x(2x + 2) \ln x - 2(x^2 + 2x) + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $[f(x) + xf'(x)] \ln^2 x$  là

- (A)  $x \sin x \ln x - 2 \sin x + C$ . (B)  $x \cos x \ln x + 2 \sin x + C$ .  
 (C)  $x \cos x \ln x - 2 \sin x + C$ . (D)  $x \sin x \ln x - 2 \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$  nên ta có

$$(\sin x)' = f(x) \ln x \Leftrightarrow \cos x = f(x) \ln x.$$

Tính  $I = \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = [f(x) + xf'(x)] \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} \, dx \\ v = xf(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx = xf(x) \ln^2 x - 2 \int f(x) \ln x \, dx \\ &= x \cos x \ln x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)**

**Câu 39.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\frac{\cos x}{2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $[f(x) + xf'(x)] \ln^2 x$  là

- (A)  $-\frac{1}{2}x \sin x \ln x + \cos x + C$ . (B)  $\frac{1}{2}x \sin x \ln x - \cos x + C$ .  
 (C)  $\frac{1}{2}x \sin x \ln x + \cos x + C$ . (D)  $-\frac{1}{2}x \sin x \ln x - \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\frac{\cos x}{2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \ln x$  nên ta có

$$\left(\frac{\cos x}{2}\right)' = f(x) \ln x \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{2} = f(x) \ln x.$$

Tính  $I = \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = [f(x) + xf'(x)] \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} \, dx \\ v = xf(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x \, dx = xf(x) \ln^2 x - 2 \int f(x) \ln x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} x \sin x \ln x - \cos x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 40.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $x^2 - 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$ , họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \sin^2 x$  là

**(A)**  $(2 - 2x) \sin x - 4 \cos x + C$ .

**(B)**  $(2 - 2x) \sin x + 4 \cos x + C$ .

**(C)**  $(2x - 2) \sin x - 4 \cos x + C$ .

**(D)**  $(2 - 2x) \sin x - 2 \cos x + C$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x^2 - 2x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \sin x$  nên ta có

$$(x^2 - 2x)' = f(x) \sin x \Leftrightarrow 2x - 2 = f(x) \sin x.$$

Tính  $I = \int f'(x) \sin^2 x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin^2 x \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \sin x \cos x \, dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x) \sin^2 x \, dx = f(x) \sin^2 x - 2 \int f(x) \sin x \cos x \, dx \\ &= (2x - 2) \sin x - 2 \int (2x - 2) \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Tính  $I_1 = \int (2x - 2) \cos x \, dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x - 2 \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \, dx \\ v = \sin x. \end{cases}$$

Suy ra  $I_1 = (2x - 2) \sin x - 2 \int \sin x \, dx = (2x - 2) \sin x + 2 \cos x + C$ .

Vậy  $I = (2 - 2x) \sin x - 4 \cos x + C$ .

Chọn phương án **(A)**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. B  | 3. D  | 4. B  | 5. D  | 6. C  | 7. B  | 8. D  | 9. C  | 10. A |
| 11. A | 12. D | 13. A | 14. C | 15. D | 16. C | 17. A | 18. D | 19. D | 20. D |
| 21. B | 22. A | 23. A | 24. A | 25. A | 26. D | 27. C | 28. B | 29. D | 30. B |
| 31. C | 32. C | 33. A | 34. D | 35. A | 36. B | 37. B | 38. C | 39. D | 40. A |

## DẠNG 45. LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ.

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $f(x) = m$  là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x), y = m$ . Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x), y = m$ .
- $f(x) = g(x)$  là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x), y = g(x)$ . Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x), y = g(x)$ .
- Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản

| Hàm $x$                                                           | Hàm hợp                                                            |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 1. $c = 0$ 2. $x = 1$                                             |                                                                    |
| 3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} (n \in \mathbb{N}; n > 1)$           | 4. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{N}; n > 1)$   |
| 5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$             | 6. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \forall u > 0$             |
| 7. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ | 8. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \forall u \neq 0$ |
| 9. $(k \cdot x)' = k$                                             | 10. $(k \cdot u)' = k \cdot u'$                                    |
| 11. $(\cos x)' = -\sin x$                                         | 12. $(\cos u)' = -u' \sin u$                                       |
| 13. $(\sin x)' = \cos x$                                          | 14. $(\sin u)' = u' \cos u$                                        |
| 15. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$                              | 16. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$                              |
| 17. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$                             | 18. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$                             |

Đạo hàm của hàm hợp:  $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot f'(u(x))$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |      |           |     |           |
|---------|-----------|------|------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$  | $+\infty$ |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$  | $0$       | $+$ |           |
| $y$     | $+\infty$ |      | $-2$ | $-1$ | $-2$      |     | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  của phương trình  $2f(\sin x) + 3 = 0$  là

(A) 4.

(B) 6.

(C) 3.

(D) 8.

Lời giải.

## Phân tích hướng dẫn giải

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán liên quan đến giao điểm của hai đồ thị.

b) HƯỚNG GIẢI:

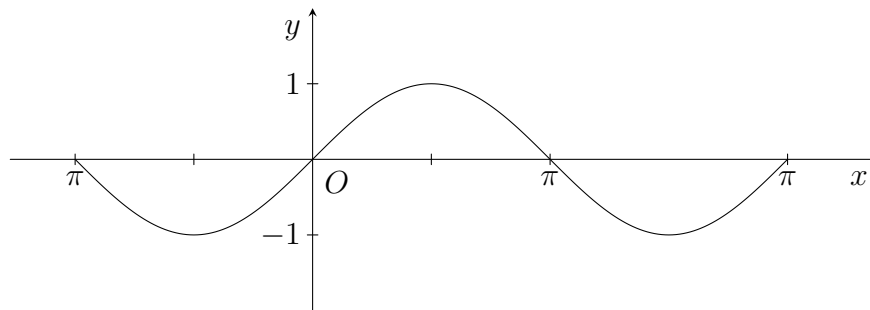
- **Bước 1:** Từ phương trình  $2f(\sin x) + 3 = 0$  chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(u)$ ,  $y = C$ .
- **Bước 2:** Dựa vào đồ thị  $y = f(x) \Rightarrow$  giá trị của  $u = \sin x \Rightarrow$  giá trị của  $x$ .
- **Bước 3:** Chọn đáp án.

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

$$\text{Ta có } 2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ \sin x = a_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \sin x = a_3 \in (0; 1) & (3) \\ \sin x = a_4 \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên  $[-\pi; 2\pi]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$ .

**Trình bày theo hướng khác:**

## Phân tích hướng dẫn giải

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng dùng bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  để tìm số nghiệm thuộc đoạn  $[a; b]$  của PT  $c.f(g(x)) + d = m$ .

b) HƯỚNG GIẢI:

- **Bước 1:** Đặt ẩn phụ  $t = g(x)$ . Với  $x \in [a; b] \Rightarrow t \in [a; b]$ .
- **Bước 2:** Với  $c.f(g(x)) + d = m \Rightarrow f(t) = k$ .
- **Bước 3:** Sử dụng BBT của hàm số  $y = f(t)$  để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn  $[a; b]$  của PT  $f(t) = k$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Đặt  $t = \sin x$ ,  $t \in [-1; 1]$  thì phương trình  $2f(\sin x) + 3 = 0$  (1) trở thành

$$2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}. \quad (2)$$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(t)$ ,  $t \in [-1; 1]$ :

|         |           |      |     |      |           |                    |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|--------------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |                    |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$  | $0$       |                    |
| $y$     | $+\infty$ |      |     | $-1$ |           | $+\infty$          |
|         |           |      | $0$ |      | $-2$      |                    |
|         |           |      |     |      |           | $y = -\frac{3}{2}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm  $t \in [-1; 1]$  của phương trình (1) là 2 nghiệm phân biệt  $t_1 \in (-1; 0)$ ,  $t_2 \in (0; 1)$ .

Bảng biến thiên hàm số  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [-\pi; 2\pi]$

|     |           |                  |     |                 |       |                  |        |
|-----|-----------|------------------|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$       | $-1$             | $0$ | $1$             | $0$   | $-1$             | $0$    |

+ Với  $t_1 \in (-1; 0) \Rightarrow \sin x = t_1 \in (-1; 0) \Rightarrow$  phương trình có 4 nghiệm  $x \in [-\pi; 2\pi]$ .

+ Với  $t_2 \in (0; 1) \Rightarrow \sin x = t_2 \in (0; 1) \Rightarrow$  phương trình có 2 nghiệm  $x \in [-\pi; 2\pi]$ .

Vậy số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  của phương trình  $2f(\sin x) + 3 = 0$  là  $2 + 4 = 6$ .

Chọn phương án **(B)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $y$     | $+\infty$ |      |     | $-1$ | $+\infty$ |
|         |           | $-2$ |     | $-2$ |           |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; 3\pi]$  của phương trình  $2f(\cos x) + 3 = 0$  là

**(A)** 6.

**(B)** 8.

**(C)** 3.

**(D)** 10.

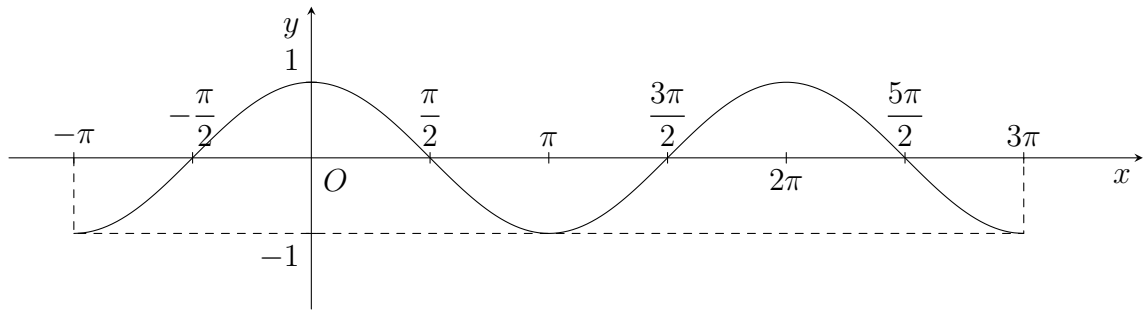
**Lời giải.**

Ta có

$$2f(\cos x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ \cos x = a_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = a_3 \in (0; 1) & (3) \\ \cos x = a_4 \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên  $[-\pi; 3\pi]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 3\pi]$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$  |           |
| $y$     | $+\infty$ | $-2$ | $-1$ | $-2$ | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; 3\pi]$  của phương trình  $2f(-\cos x + 2) - 1 = 0$  là

**A** 6.

**B** 8.

**C** 7.

**D** 9.

**Lời giải.**

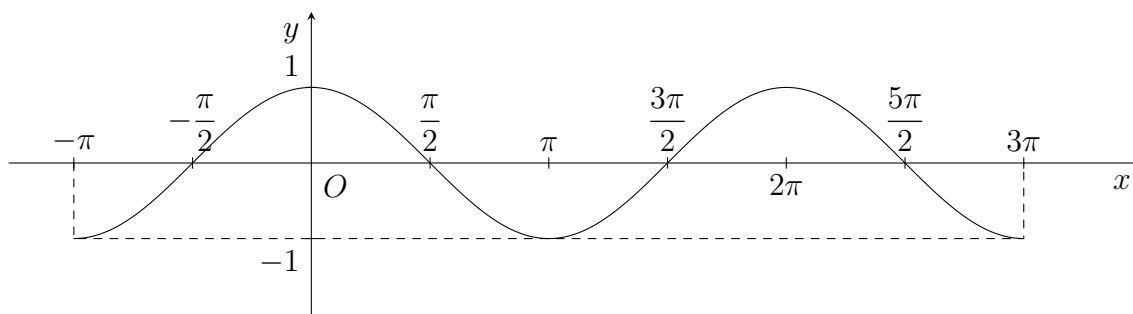
Ta có

$$\begin{aligned}
 2f(-\cos x + 2) - 1 = 0 &\Leftrightarrow f(-\cos x + 2) = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x + 2 = a_1 \in (-\infty; -1) \\ -\cos x + 2 = a_2 \in (-1; 0) \\ -\cos x + 2 = a_3 \in (0; 1) \\ -\cos x + 2 = a_4 \in (1; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 - a_1 < -1 \\ \cos x = 2 - a_2 > 1 \\ \cos x = 2 - a_3 > 1 \\ \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 - a_1 < -1 \\ \cos x = 2 - a_2 > 1 \\ \cos x = 2 - a_3 > 1 \\ \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (1; 3] \\ \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (3; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = (2 - a_1) < -1 \\ \cos x = (2 - a_2) > 1 \\ \cos x = (2 - a_3) > 1 \\ \cos x = (2 - a_4) \in [-1; 1) \\ \cos x = (2 - a_4) < -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Chỉ có phương trình  $\cos x = (2 - a_4) \in [-1; 1)$  có nghiệm.

Xét đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên  $[-\pi; 3\pi]$





Ta thấy  $\begin{cases} 2 - a_4 = -1 \\ 2 - a_4 = m \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = 3 \\ a_4 = 2 - m. \end{cases}$

+) Với  $a_4 = 3$  suy ra phương trình  $\cos x = (2 - a_4) = -1$  có 3 nghiệm.

+) Với  $\begin{cases} a_4 = 2 - m \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow$  phương trình  $\cos x = m$  có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 3\pi]$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $y$     | $+\infty$ | $-3$ | $1$ | $-1$ | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 3\pi]$  của phương trình  $2f(\sin x) + 3 = 0$  là

**(A)** 4.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 6.

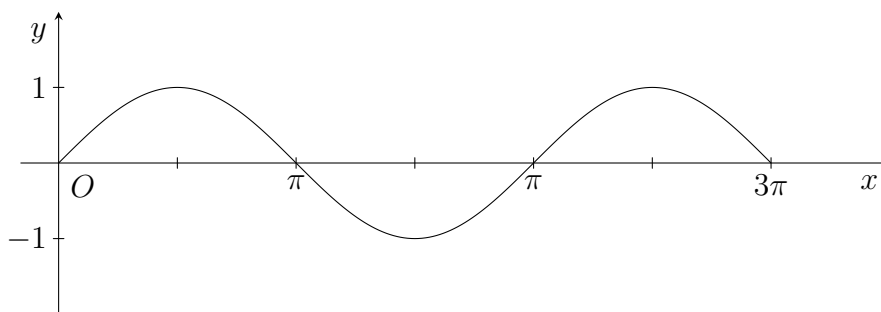
**Lời giải.**

Ta có

$$2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 \in (-\infty; -2) \\ \sin x = a_2 \in (-2; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 < -2 \\ \sin x = a_2 \in (-2; -1) \\ \sin x = a_2 \in (-1; 0) \\ \sin x = a_2 = -1 \\ \sin x = a_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_2 \in (-1; 0) & (1) \\ \sin x = a_2 = -1 & (2). \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên  $[0; 3\pi]$



Ta thấy

- Phương trình (1) có 2 nghiệm.
- Phương trình (2) có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |   |           |   |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |   |   |
| $y'$ |           | - | 0 | +         | 0 | - |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |           | 0 |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |
|      |           |   |   |           |   |   |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  của phương trình  $2f(\sin x - 1) + 4 = 0$  là

**(A)** 0.

**(B)** 3.

**(C)** 5.

**(D)** 6.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 2f(\sin x - 1) + 4 = 0 &\Leftrightarrow f(\sin x - 1) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 1 \\ \sin x - 1 = m \in (3; +\infty) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 > 1 & (1) \\ \sin x = m + 1 > 3 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Các phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có không có nghiệm nào thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |    |           |
|---------|-----------|---|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | —  | 0         |
| $f(x)$  | 0,5       | 5 | -2 | 2         |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  của phương trình  $3f(\tan x) + 1 = 0$  là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

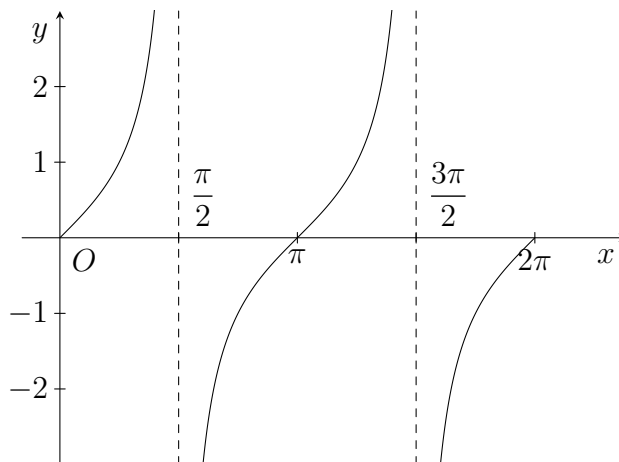
(D) 5.

**Lời giải.**

Ta có

$$3f(\tan x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\tan x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = m \in (1; 2) & (1) \\ \tan x = n \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = \tan x$  trên  $[0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ :  $f(0) = 0, f(2\pi) = 0$ .



Ta thấy

— Phương trình (1) có 2 nghiệm.

— Phương trình (2) có 2 nghiệm.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |    |           |
|---------|-----------|---|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -  | 0         |
| $f(x)$  | -0,5      | 5 | -7 | 1         |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  của phương trình  $3f(\cot x) + 1 = 0$  là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

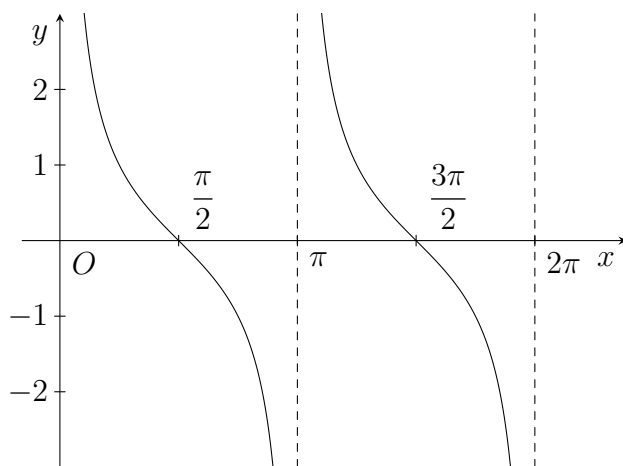
(D) 5.

**Lời giải.**

Ta có

$$3f(\cot x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\cot x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = m \in (-1; 2) & (1) \\ \cot x = n \in (2; +\infty) & (2). \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = \cot x$  trên  $[0; 2\pi] \setminus \{0; \pi; 2\pi\}$ .



Ta thấy

- Phương trình (1) có 2 nghiệm.
- Phương trình (2) có 2 nghiệm.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[0; 2\pi] \setminus \{0; \pi; 2\pi\}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |    |           |
|---------|-----------|---|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -  | 0         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 5 | -7 | 1         |

Số nghiệm thuộc đoạn  $[-3; 3]$  của phương trình  $2f(x^2 - 2x) + 1 = 0$  là

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 4.

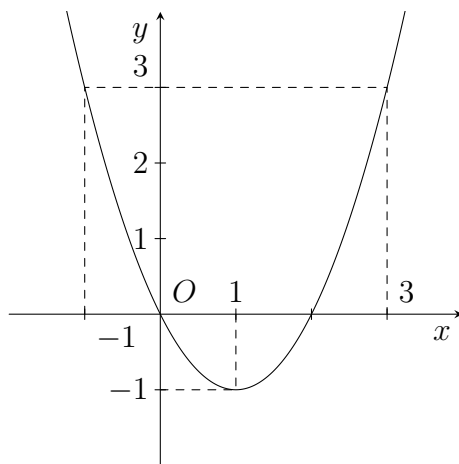
**(D)** 5.

**Lời giải.**

Ta có

$$2f(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x = a_2 \in (-1; 3) & (2) \\ x^2 - 2x = a_3 \in (3; +\infty) & (3). \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = x^2 - 2x$  trên  $[-3; 3]$ .



Ta thấy

- Phương trình (1) vô nghiệm.
- Phương trình (2) có 2 nghiệm.
- Phương trình (3) có 2 nghiệm không thuộc  $[-3; 3]$ .

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-3; 3]$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |                |           |     |
|---------|-----------|------|----------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $3$            | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$            | $-$       | $0$ |
| $f(x)$  |           |      | $5$            |           | $1$ |
|         | $-\infty$ |      | $-\frac{3}{2}$ |           |     |

Số nghiệm thuộc nửa khoảng  $(-\infty; 2020]$  của phương trình  $2f(f(2x-1)) + 3 = 0$  là

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 5.

**Lời giải.**

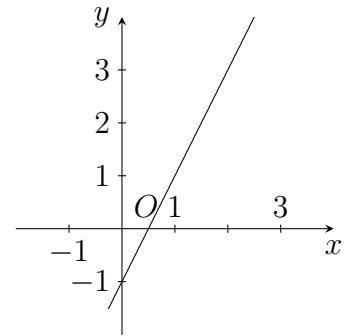
Ta có

$$2f(f(2x-1)) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(f(2x-1)) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x-1) = a \in (-\infty; -2) \\ f(2x-1) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = b_1 \in (-\infty; -2) & (1) \\ 2x-1 = b_2 \in (-\infty; -2), b_2 > b_1 & (2) \\ 2x-1 = b_3 \in (-2; 3), b_3 > b_2. & (3) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = 2x - 1$  trên  $(-\infty; 2020]$ . Ta thấy

- Phương trình (1) có 1 nghiệm.
- Phương trình (2) có 1 nghiệm.
- Phương trình (3) có 1 nghiệm thuộc  $(0; 3)$ .



Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-3; 3]$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |            |      |            |            |     |            |     |
|---------|-----------|------------|------|------------|------------|-----|------------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $0$  | $2$        | $+\infty$  |     |            |     |
| $f'(x)$ |           | $-$        | $0$  | $+$        | $0$        | $-$ | $0$        | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ |            |      | $1$        |            |     | $-\infty$  |     |
|         |           | $\searrow$ |      | $\nearrow$ | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |     |
|         |           |            | $-3$ |            | $-1$       |     |            |     |

Số nghiệm dương của phương trình  $2f(f(x-1)) + 3 = 0$  là

**(A)** 3.

**(B)** 2.

**(C)** 4.

**(D)** 5.

**Lời giải.**

Ta có

$$2f(f(x-1)) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(f(x-1)) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x-1) = a \in (-\infty; -1) \\ f(x-1) = b \in (-1; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = b_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ x-1 = b_2 \in (-1; 0) & (2) \\ x-1 = d \in (-\infty; -1) & (3) \\ x-1 = e \in (-1; 0) & (4) \\ x-1 = f \in (0; 2) & (5) \\ x-1 = g \in (2; +\infty) & (6) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra phương trình có các nghiệm dương: } \begin{cases} x = b_2 + 1 \\ x = e + 1 \\ x = f + 1 \end{cases}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |     |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |           |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |     | $1$ |           |     | $-\infty$ |     |

Số nghiệm dương của phương trình  $2f(\sqrt{x^2 - 2x}) - 5 = 0$  là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 5.

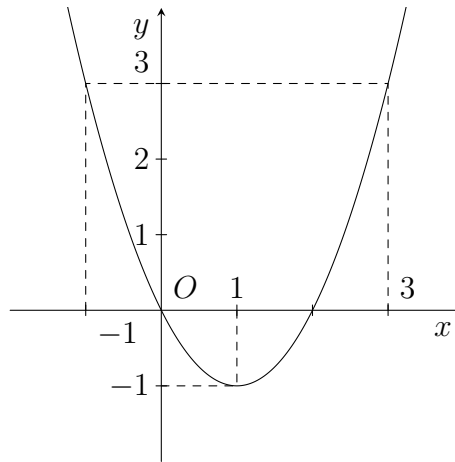
**Lời giải.**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} 2f(\sqrt{x^2 - 2x}) - 5 = 0 &\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 - 2x}) = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = a \in (-\infty; -1) \\ \sqrt{x^2 - 2x} = b \in (2; +\infty) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = b \in (2; +\infty) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x = b^2, b \in (2; +\infty). \end{aligned}$$

Xét đồ thị hàm số  $y = x^2 - 2x$



Suy ra phương trình  $x^2 - 2x = b^2, b \in (2; +\infty)$  có hai nghiệm trái dấu.

Trong đó nghiệm dương:  $x > 1 + \sqrt{5}$  thỏa mãn  $x \geq 2$ .

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn phương án (A)

**Câu 11.**

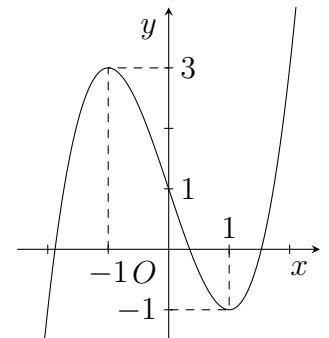
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sin x) = 3\sin x + m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

(A) -9.

(B) -10.

(C) -6.

(D) -5.



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số ta có  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ;  $f(x) = 3x^2 - 3$ .

Đặt  $u = \sin x, (-1 \leq u \leq 1)$ .

Xét hàm số  $u = \sin x$ ,  $(-1 \leq u \leq 1)$ .

$u' = \cos x$ ;  $u = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , do  $x \in (0; \pi)$  (giả thiết)  $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ .

Bảng biến thiên

|      |           |                 |       |
|------|-----------|-----------------|-------|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $u'$ | +         | 0               | -     |
| $u$  | 0         | 1               | 0     |

Suy ra  $x \in (0; \pi) \Rightarrow u \in (0; 1] \Rightarrow 0 < u \leq 1$ .

Vậy dựa vào bảng biến thiên ta có với mỗi  $u \in (0; 1)$  phương trình  $\sin x = u$  có 2 nghiệm  $x \in (0; \pi)$ .

Và  $u = 1 \Rightarrow \sin x = u = 1$  có một nghiệm  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Khi đó phương trình

$$f(\sin x) = 3 \sin x + m \Leftrightarrow f(u) = 3u + m \Leftrightarrow f(u) - 3u = m.$$

Xét hàm số  $g(x) = f(x) - 3x$ .

$$g'(x) = f'(x) - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên

|         |           |                 |   |   |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|---|---|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$     | 0 | 1 | $\sqrt{2}$      | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         | 0               | - | - | 0               | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $1 + 4\sqrt{2}$ |   |   | $1 - 4\sqrt{2}$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có với  $x \in (0; 1]$  thì phương trình  $f(x) - 3x = m$  có nghiệm khi

$$g(1) \leq m < g(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1 \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}.$$

Tổng các giá trị của  $S$  bằng 10.

Chọn phương án **(B)**

### Câu 12.

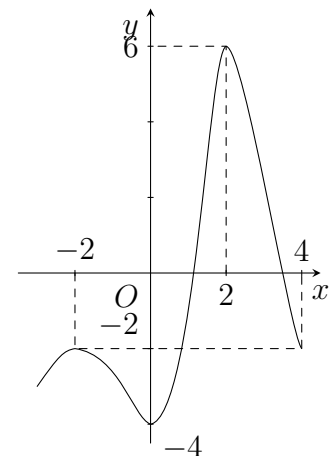
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} - 1\right) + x = m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[-2; 2]$

**(A)** 8.

**(B)** 9.

**(C)** 10.

**(D)** 11.





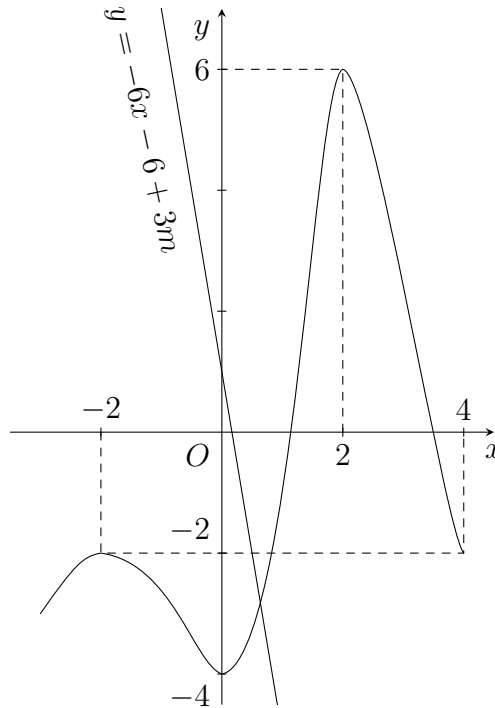
**Lời giải.**

Đặt  $t = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} > 0$ ; với  $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [0; 2]$ .

Khi đó phương trình

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} - 1\right) + x = m \Leftrightarrow f(t) = -6t - 6 + 3m.$$

Xét hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x) = -6x - 6 + 3m$  trên  $[0; 2]$  có đồ thị như sau



Với  $x \in [0; 2] \Rightarrow d: y = -6x - 6 + 3m$  thay đổi và đi qua từ điểm  $A(0; -4)$  tới điểm  $B(2; 6)$  và luôn có giao điểm với  $y = f(x)$ . Suy ra

$$g(0) = -6 \cdot 0 - 6 + 3m = -4 \Rightarrow m = \frac{2}{3},$$

$$g(2) = -6 \cdot 2 - 6 + 3m = 6 \Rightarrow m = 8.$$

Vậy giá trị của  $m$  cần tìm để phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán có nghiệm  $\frac{2}{3} \leq m \leq 8$ .

Suy ra có 8 giá trị của  $m$  là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m(x - 4)$  cắt đồ thị của hàm số  $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$  tại bốn điểm phân biệt?

**(A)** 1.

**(B)** 5.

**(C)** 3.

**(D)** 7.

**Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = m(x - 4) \Rightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)} = m, (x \neq 4) \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)}$  và  $y = m$ .

Ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9)(x - 4) + 2x(x^2 - 1)(x - 4) - (x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x - 4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x - 4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0.$$

Giải phương trình bằng máy tính bỏ túi ta được 4 nghiệm

$$\begin{cases} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{cases}.$$

Các nghiệm này đã được lưu chính xác ở trong bộ nhớ của máy tính bỏ túi.

Bảng biến thiên:

|         |           |       |       |       |   |           |           |
|---------|-----------|-------|-------|-------|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 4 | $x_4$     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +     | 0     | -     | 0 | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 2,58  | -     | 9,67  | - | $+\infty$ | $+\infty$ |
|         |           |       | -2,28 |       |   | 383,5     |           |

Từ bảng biến thiên và  $m \in \mathbb{Z}$  suy ra  $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

Chọn phương án **(B)**

#### Câu 14.

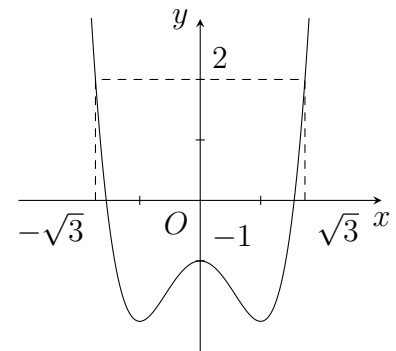
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đặt  $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x - m$ , với  $m$  là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để bất phương trình  $g(x) \geq 0$  đúng với  $\forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  là

**(A)**  $m \leq 3f(\sqrt{3})$ .

**(B)**  $m \leq 3f(0)$ .

**(C)**  $m \geq 3f(1)$ .

**(D)**  $m \geq 3f(-\sqrt{3})$ .



#### Lời giải.

Ta có  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x - m \geq 0 \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m$ .

Đặt  $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$ ,  $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3}) - 6 = 0 \\ h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3}) - 6 = 0 \\ h(0) = 3f(0) = 0 \\ h(1) = 3f(1) < 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

|      |                |        |        |               |
|------|----------------|--------|--------|---------------|
| $x$  | $-\sqrt{3}$    | $0$    | $1$    | $\sqrt{3}$    |
| $h'$ | $-$            | $0$    | $-$    | $-$           |
| $h$  | $h(-\sqrt{3})$ | $h(0)$ | $h(1)$ | $h(\sqrt{3})$ |

Vậy  $g(x) \leq m \Leftrightarrow g(x) \leq h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$ . Số các giá trị tham số  $m$  để đường thẳng  $y = x + m$  luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho trọng tâm tam giác  $OAB$  nằm trên đường tròn  $x^2 + y^2 - 3y = 4$  là

**(A)** 1.

**(B)** 0.

**(C)** 3.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x+1}{x-2} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 \quad (*)$$

Theo yêu cầu bài toán: (\*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + (m-3)2 - 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m.$$

Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  suy ra  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$ , ta có

$$G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{y_1+y_2}{3}\right) = G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{x_1+x_2+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3-m+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3+m}{3}\right).$$

Ta có  $G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3+m}{3}\right) \in (C): x^2 + y^2 - 3y = 4$  nên

$$\left(\frac{3-m}{3}\right)^2 + \left(\frac{3+m}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3+m}{3} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{15}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn đề bài.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $5$  | $-3$ | $+\infty$ |

Phương trình  $|f(1 - 3x) + 1| = 3$  có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4.

(B) 3.

(C) 6.

(D) 5.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = 5 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = -3. \end{cases}$

Xét hàm số  $g(x) = f(1 - 3x) + 1$ ,  $g'(x) = -3f'(1 - 3x)$ .

Suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = -1 \\ 1 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

Ta có  $g\left(\frac{2}{3}\right) = f(-1) + 1 = 6$ ;  $g\left(-\frac{2}{3}\right) = f(3) + 1 = -2$ .

Mặt khác  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ . Do đó

$$f'(1 - 3x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1 - 3x < 3 \Leftrightarrow -2 < -3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}.$$

Suy ra:  $g'(x) = -3f'(1 - 3x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$  nên ta có bảng biến thiên như sau

|          |           |                |               |           |     |           |
|----------|-----------|----------------|---------------|-----------|-----|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |     |           |
| $g'(x)$  |           | $-$            | $+$           | $-$       |     |           |
| $g(x)$   | $+\infty$ | $-2$           | $6$           | $-\infty$ |     |           |
| $ g(x) $ | $+\infty$ | $0$            | $2$           | $6$       | $0$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình  $|f(1 - 3x) + 1| = 3$  có 4 nghiệm.

**Chú ý:** Ta có thể làm nhanh như sau

- $f(x) \rightarrow f(1 - 3x)$  chỉ thay đổi tính đơn điệu và cực trị ngược lại:  $y_{CT} = 5$ ,  $y_{CD} = -3$ .
- $f(1 - 3x) \rightarrow f(1 - 3x) + 1$ : Tịnh tiến lên trên 1 đơn vị nên  $y_{CT} = 6$ ,  $y_{CD} = -2$ .
- $f(1 - 3x) + 1 \rightarrow |f(1 - 3x) + 1|$ : Lật dưới lên trên sẽ được như hình sau:

|                   |           |      |     |           |     |           |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $f(1 - 3x) + 1$   | $+\infty$ | $-2$ | $6$ | $-\infty$ |     |           |
| $ f(1 - 3x) + 1 $ | $+\infty$ | $0$  | $2$ | $6$       | $0$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng suy ra phương trình  $|f(1 - 3x) + 1| = 3$  có 4 nghiệm.

Chọn phương án **(A)**

### Câu 17.

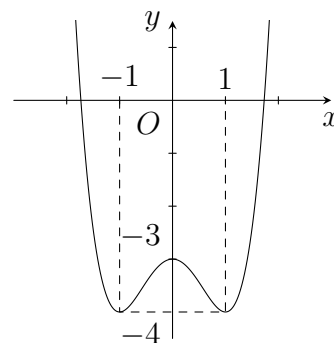
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như đường cong như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  có 6 nghiệm phân biệt.

**(A)**  $-4 < m < -3$ .

**(B)**  $0 < m < 3$ .

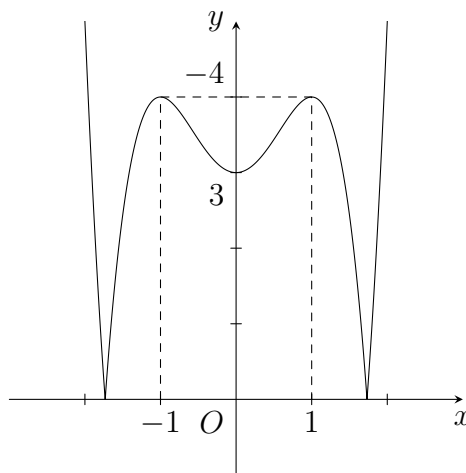
**(C)**  $m > 4$ .

**(D)**  $3 < m < 4$ .



### Lời giải.

Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có được bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nằm trên trục hoành, lấy đối xứng phần dưới trục hoành qua trục hoành.



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  và đường thẳng  $y = m$ .

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$ , phương trình có 6 nghiệm khi  $3 < m < 4$ .

Chọn phương án **(D)**

### Câu 18.

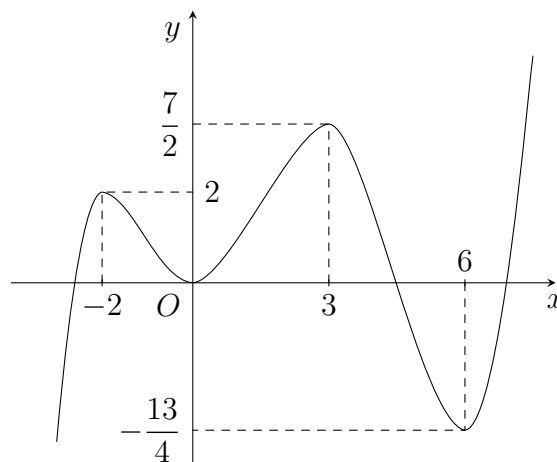
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $f(2x^3 - 6x + 2) = m$  có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-1; 2]$ ?

**(A)** 1.

**(B)** 0.

**(C)** 2.

**(D)** 3.



**Lời giải.**

Xét hàm số  $g(x) = 2x^3 - 6x + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .

$$g'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau

|         |    |   |    |   |
|---------|----|---|----|---|
| $x$     | -1 | 1 | 2  |   |
| $g'(x)$ | 0  | - | 0  | + |
| $g(x)$  | 6  |   | -2 | 6 |

Đặt  $t = 2x^3 - 6x + 2$ , với  $x \in [-1; 2]$  thì  $t \in [-2; 6]$ .

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét với mỗi giá trị  $t_0 \in (-2; 6]$  thì phương trình  $t_0 = 2x^3 - 6x + 2$  có hai nghiệm phân biệt  $x \in [-1; 2]$  và tại  $t_0 = -2$  thì phương trình  $t_0 = 2x^3 - 6x + 2$  có một nghiệm duy nhất.

Với nhận xét trên và đồ thị hàm số trên đoạn  $[-2; 6]$  thì phương trình  $f(2x^3 - 6x + 2) = m$  có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-1; 2]$  khi và chỉ khi phương trình  $f(t) = m$  có 3 nghiệm phân biệt trên nửa khoảng  $(-2; 6]$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-2; 4]$  và có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |    |    |    |   |   |
|---------|----|----|----|---|---|
| $x$     | -2 | -1 | 1  | 4 |   |
| $f'(x)$ | +  | 0  | -  | 0 | + |
| $f(x)$  | 0  | 3  | -1 | 1 |   |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(3 \cos x + 1) = -\frac{m}{2}$  có nghiệm?

**(A)** 8.

**(B)** 6.

**(C)** 7.

**(D)** 9.

**Lời giải.**

Ta có:  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 3 \cos x + 1 \leq 4$ .

Đặt  $t = 3 \cos x + 1$ , khi đó để phương trình  $f(3 \cos x + 1) = -\frac{m}{2}$  có nghiệm thì phương trình  $f(t) = -\frac{m}{2}$  có nghiệm  $t \in [-2; 4]$ .

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{m}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2$ .

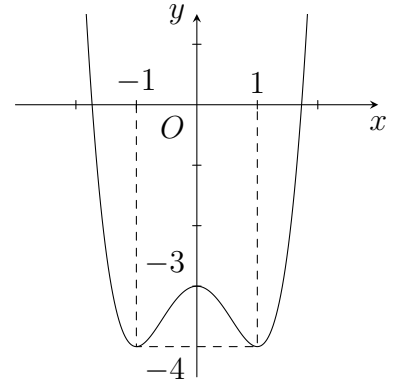
Do  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ .

Vậy, có tất cả 9 giá trị thỏa mãn.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Tìm  $m$  để phương trình  $f(e^{x^2}) = m^2 + 5m$  có hai nghiệm thực phân biệt.



- (A)  $m = -4$ .      (B)  $m > -3$ .      (C)  $m > -4$ .      (D)  $\begin{cases} m < -4 \\ m > -1 \end{cases}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = e^{x^2} \geq e^0 = 1$ . Khi đó ứng với mỗi nghiệm  $t > 1$ , ta được hai nghiệm  $x$ .

Từ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , ta thấy phương trình  $f(t) = m^2 + 5m$  có đúng một nghiệm  $t > 1$  khi và chỉ khi

$$m^2 + 5m > -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > -1 \end{cases}.$$

Chọn phương án (D)

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |                |           |     |     |           |
|------|-----------|------|----------------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $2$            | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$            | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-\frac{1}{5}$ |           | $1$ |     | $-\infty$ |

Số nghiệm thực của phương trình  $5f(1 - 2x) + 1 = 0$  là

- (A) 0.      (B) 1.      (C) 3.      (D) 2.

**Lời giải.**

Xét phương trình  $5f(1 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1 - 2x) = -\frac{1}{5}$ . (1)

Đặt  $1 - 2x = t (t \in \mathbb{R})$ , khi đó phương trình (1) trở thành phương trình  $f(t) = -\frac{1}{5}$ . (2)

Số nghiệm  $x$  của phương trình (1) bằng số nghiệm  $t$  của phương trình (2).

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và đường thẳng  $y = -\frac{1}{5}$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng  $y = -\frac{1}{5}$  và đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có đúng 2 giao điểm phân biệt nên phương trình (2) có 2 nghiệm  $t$  phân biệt.

Vậy số nghiệm của phương trình  $5f(1 - 2x) + 1 = 0$  là 2.

Chọn phương án (D)

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

|         |           |      |      |     |     |           |   |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $4$ | $+\infty$ |   |           |
| $f'(x)$ |           | +    | +    | 0   | -   | 0         | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0    |      | 3   |     | -1        | 1 | $+\infty$ |

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(3\cos x + 1) = -\frac{m}{2}$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 2\pi]$ ?

(A) 8.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 9.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 3\cos x + 1$ . Phương trình trở thành  $f(t) = -\frac{m}{2}$  (\*)

Khi  $x \in [0; 2\pi]$  thì  $t \in [-2; 4]$ , do đó phương trình đã cho có nghiệm  $x \in [0; 2\pi]$  khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm  $t \in [-2; 4]$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với  $t \in [-2; 4]$  thì tập giá trị của hàm số  $f(t)$  là đoạn  $[-1; 3]$ , nên phương trình (\*) có nghiệm  $t \in [-2; 4]$  khi và chỉ khi

$$-1 \leq -\frac{m}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2.$$

Mà  $m$  nguyên nên có tất cả 9 giá trị.

Chọn phương án (D)

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là một hàm bậc ba có bảng biến thiên

|      |           |     |     |           |     |     |           |
|------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $-$ | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |     | $1$ |           | $4$ |     | $-\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(e^{x^2}) = m$  có đúng ba nghiệm phân biệt?

(A) 3.

(B) Vô số.

(C) 1.

(D) 2.

**Lời giải.**

Đặt  $t = e^{x^2}$ , điều kiện  $t = e^{x^2} \geq e^0 = 1$ . Khi đó phương trình  $f(e^{x^2}) = m$  (1) trở thành  $f(t) = m$  (2).

Ta có sự tương ứng giữa  $t$  và  $x$  như sau: mỗi giá trị  $t > 1$  cho tương ứng 2 giá trị  $x$ , với  $t = 1$  thì chỉ có một giá trị tương ứng là  $x = 0$ , với  $t < 1$  thì không cho giá trị  $x$  nào tương ứng.

Do đó phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt  $t_1, t_2$  thỏa mãn  $t_1 = 1 < t_2$ , các nghiệm còn lại khác hai nghiệm trên (nếu có) thì phải bé hơn 1.

Vì phương trình (2) có một nghiệm  $t_1 = 1$  nên  $m = f(1) = 1$ . Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $m = 1$  thỏa mãn bài toán.

Vậy có một giá trị nguyên của  $m$ .

Chọn phương án (C)



**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $3|f(2x-1)| - 10 = 0$  là

|      |                             |             |                |           |
|------|-----------------------------|-------------|----------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                   | 0           | 1              | $+\infty$ |
| $y'$ | -                           |             | - 0 +          |           |
| $y$  | $+\infty$<br>↘<br>$-\infty$ | 1<br>↘<br>3 | ↗<br>$+\infty$ |           |

(A) 2.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 3.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2x - 1$ , phương trình đã cho trở thành  $|f(t)| = \frac{10}{3}$ . Với mỗi giá trị  $t$  thì tương ứng có một giá trị  $x = \frac{t+1}{2}$  nên số nghiệm  $t$  của phương trình  $|f(t)| = \frac{10}{3}$  bằng số nghiệm  $x$  của phương trình  $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ .

Từ bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số  $y = |f(x)|$  như sau

|      |                     |                |                     |                |           |
|------|---------------------|----------------|---------------------|----------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$           | $x_0$          | 0                   | 1              | $+\infty$ |
| $y'$ | -                   | +              |                     | - 0 +          |           |
| $y$  | $+\infty$<br>↘<br>0 | ↗<br>$+\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>3 | ↗<br>$+\infty$ |           |

trong đó  $x_0$  là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục hoành.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình  $|f(t)| = \frac{10}{3}$  có 4 nghiệm  $t$  phân biệt nên phương trình

$$3|f(2x-1)| - 10 = 0$$

có 4 nghiệm  $x$  phân biệt.

Chọn phương án (C)

**Câu 25.**

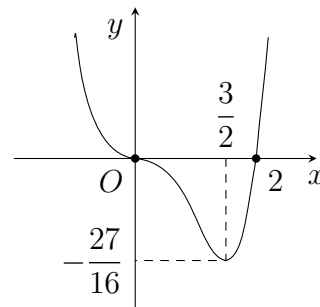
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$  có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$ ?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 5.



**Lời giải.**

Ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = g(x) = 2|\sin x|$  trên đoạn  $[-\pi; 2\pi]$

|        |        |                  |        |                 |        |                  |        |
|--------|--------|------------------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|
| $x$    | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$  | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $g(x)$ | 0      | ↗<br>2           | ↘<br>0 | ↗<br>2          | ↘<br>0 | ↗<br>2           | ↘<br>0 |

Phương trình  $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$  có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  khi và chỉ khi phương trình  $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$  có 2 nghiệm phân biệt  $t \in (0; 2)$ .

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$  suy ra phương trình  $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$  có 2 nghiệm phân biệt  $t \in (0; 2)$  khi và chỉ khi

$$-\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Do  $m$  nguyên nên  $m \in \{1; 2\}$ .

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **C**

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

|         |           |                                                                                                                      |   |   |   |           |
|---------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1                                                                                                                    |   |   | 5 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -                                                                                                                    | 0 | + | 0 | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | <div><div><div></div><div><math>-3</math></div><div><math>10</math></div><div><math>-\infty</math></div></div></div> |   |   |   |           |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x^2 + 1)| = m$  có 6 nghiệm phân biệt.

**(A)** 12.

**(B)** 198.

**(C)** 6.

**(D)** 190.

**Lời giải.**

Đặt  $t = x^2 + 1$ , điều kiện  $t \geq 1$ , từ đó phương trình trở thành  $|f(t)| = m, t \geq 1$ .

Do  $t \geq 1$  nên ta xét bảng biến thiên của hàm  $y = f(t)$  trên  $[1; +\infty)$  như sau

|         |                                                                                                                                                                           |   |   |   |   |           |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|-----------|
| $t$     | 1                                                                                                                                                                         |   |   |   | 5 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | 0                                                                                                                                                                         | + | 0 | - |   |           |
| $f(t)$  | <div><div><div><math>-3</math></div><div><math>\nearrow</math></div><div><math>10</math></div><div><math>\searrow</math></div><div><math>-\infty</math></div></div></div> |   |   |   |   |           |

Bảng biến thiên của hàm số  $y = |f(t)|$  trên  $[1; +\infty)$  là

|          |   |    |           |
|----------|---|----|-----------|
| $t$      | 1 | 5  | $+\infty$ |
| $ f(t) $ | 3 | 10 | $+\infty$ |

```

graph LR
    A[3] --> B[0]
    B --> C[10]
    C --> D[0]
    D -- "y=m" --> E[+infinity]
  
```

The diagram illustrates a sequence of values for  $|f(t)|$  at  $t=1, 5, +\infty$ . The values are 3, 10, and  $+\infty$  respectively. Arrows indicate transitions: from 3 to 0, from 0 to 10, from 10 to 0, and from 0 to  $+\infty$  (labeled  $y=m$ ).

Cứ mỗi nghiệm  $t > 1$  cho được hai nghiệm  $x$ , do vậy để phương trình  $|f(x^2 + 1)| = m$  có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình  $|f(t)| = m$  cần có 3 nghiệm  $t > 1$ .

Dựa bảng biến thiên của hàm  $y = |f(t)|$  ở trên ta có điều kiện  $3 < m < 10$ , mặt khác  $m$  nguyên nên  $m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

Vậy có 6 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **C**

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau:

|        |           |         |        |           |
|--------|-----------|---------|--------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$     | $1$    | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-2018$ | $2018$ | $-\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x + 2017) - 2018| = m$  có đúng 4 nghiệm phân biệt?

(A) 4034.

(B) 4035.

(C) 4036.

(D) 4037.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = f(x + 2017) - 2018$  có đồ thị bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số  $y = f(x)$  sang trái 2017 đơn vị, sau đó tịnh xuống dưới 2018 đơn vị. Ta được bảng biến thiên của hàm số  $y = g(x) = f(x + 2017) - 2018$  như sau

|        |           |         |         |           |
|--------|-----------|---------|---------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2017$ | $-2016$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $-4036$ | $0$     | $-\infty$ |

Khi đó đồ thị hàm số  $y = |f(x + 2017) - 2018|$  gồm hai phần

- Phần 1: Giữ nguyên toàn bộ phần đồ thị hàm số  $y = g(x)$  nằm phía trên trục hoành.
- Phần 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số  $y = g(x)$  qua  $Ox$ .

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = |g(x)|$  như sau

|          |           |       |         |         |           |
|----------|-----------|-------|---------|---------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $x_0$ | $-2017$ | $-2016$ | $+\infty$ |
| $ g(x) $ | $+\infty$ | $0$   | $4036$  | $0$     | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình  $|f(x + 2017) - 2018| = m$  có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $0 < m < 4036$  mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên có 4035 giá trị  $m$  cần tìm. Chọn đáp án B.

Chọn phương án (B)

**Câu 28.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.

Tìm tất cả các giá trị  $m$  để phương trình  $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| =$

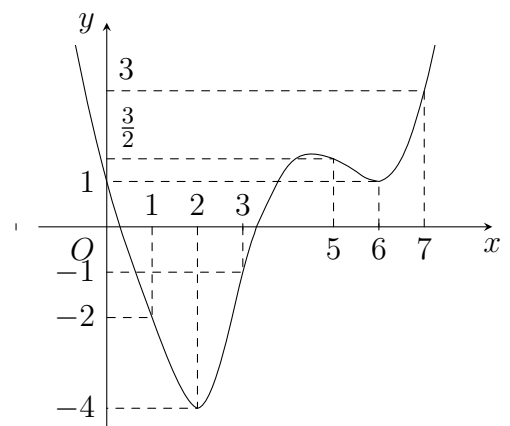
$m$  có nghiệm.

(A)  $-4 \leq m \leq -2$ .

(B)  $m > -4$ .

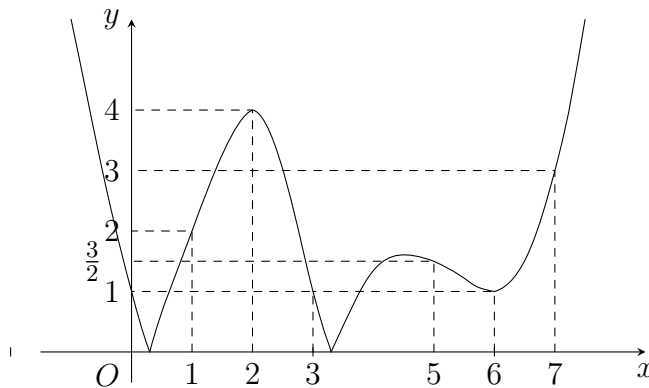
(C)  $2 < m < 4$ .

(D)  $2 \leq m \leq 4$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm  $y = |f(x)|$  là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$

|      |               |      |     |               |     |
|------|---------------|------|-----|---------------|-----|
| $x$  | $-\infty$     | $-1$ | $1$ | $+\infty$     |     |
| $t'$ | $-$           | $0$  | $+$ | $0$           | $-$ |
| $t$  | $\frac{3}{2}$ | $1$  | $2$ | $\frac{3}{2}$ |     |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1; 2]$ .

Vậy phương trình  $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$  có nghiệm khi và chỉ khi phương trình  $|f(t)| = m$  có nghiệm  $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $|f(2x - 3)| - m = 0$  có đúng 2 nghiệm phân biệt là

|         |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $-$ | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Đặt  $2x - 3 = t$  phương trình đã cho trở thành  $|f(t)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = m$ . (\*)

Số nghiệm của phương trình (\*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = |f(t)|$  và đường thẳng  $y = m$  song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số  $y = |f(t)|$ .

| $t$      | $-\infty$ | $t_0$ | 0   | 1   | $+\infty$ |
|----------|-----------|-------|-----|-----|-----------|
| $f(t)$   | $+\infty$ | $0$   | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $ f(t) $ | $+\infty$ | $0$   | $1$ | $3$ | $+\infty$ |

Do hàm số  $t = 2x - 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên số nghiệm  $t$  của phương trình (\*) bằng số nghiệm  $x$  của phương trình đã cho.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (\*) có 2 nghiệm  $\Leftrightarrow 0 < m < 3$ .

Với  $m \in \mathbb{Z}$  suy ra  $m \in \{1; 2\}$ .

Chọn phương án **A**

### Câu 30.

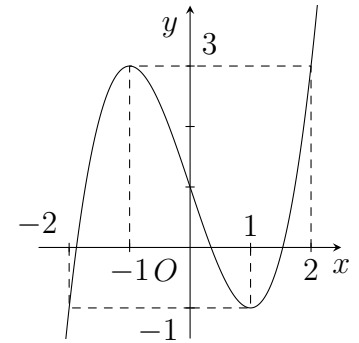
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình  $|f(|x^2 - 2x|)| = 1$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

**A** 9.

**B** 7.

**C** 6.

**D** 8.



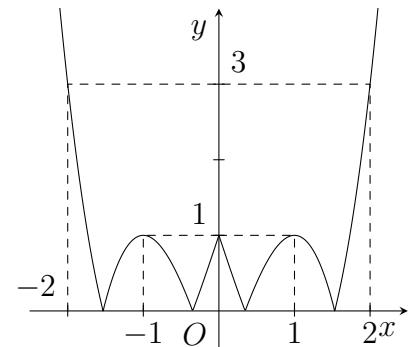
### Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số  $y = |f(|x|)|$  có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nằm bên phải trục  $Oy$  và đối xứng của chính phần đồ thị này qua  $Oy$ . Sau đó giữ nguyên phần đồ thị phía trên  $Ox$  và lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới  $Ox$  qua  $Ox$ . Như vậy đồ thị hàm số  $y = |f(|x|)|$  như hình vẽ bên.

Từ phương trình  $|f(|x^2 - 2x|)| = 1$  Đặt  $t = x^2 - 2x$  ta được  $|f(|t|)| = 1$ . Khi đó dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị hàm số  $y = |f(|t|)|$  cắt đường thẳng  $y = 1$  tại 5 điểm là  $t_1 = a \in (-2; 1)$ ,  $t_2 = -1$ ,  $t_3 = 0$ ,  $t_4 = 1$ ,  $t_5 = b \in (1; 2)$ .

Với  $t = x^2 - 2x$ , ta có

$$t = 2x - 2 \Rightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$



Ta có bảng biến thiên như hình bên. Dựa vào bảng biến thiên ta có

|      |           |      |           |
|------|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1    | $+\infty$ |
| $t'$ | +         | 0    | -         |
| $t$  | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |

—  $x^2 - 2x = a \in (-2; -1)$  vô nghiệm.

—  $x^2 - 2x = -1$  có đúng 1 nghiệm  $x$ .

—  $x^2 - 2x = 0$  có đúng 2 nghiệm  $x$ .

—  $x^2 - 2x = 1$  có đúng 2 nghiệm  $x$ .

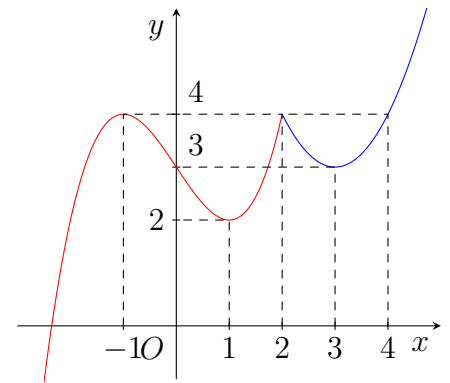
—  $x^2 - 2x = b$  có đúng 2 nghiệm  $x$ .

Chọn phương án **(B)**

### Câu 31.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn  $[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}]$ .

**(A)**  $2 < m \leq 3$ . **(B)**  $2 < m < 3$ . **(C)**  $3 \leq m < 4$ . **(D)**  $3 \leq m \leq 4$ .



### Lời giải.

Đặt  $t = |x^2 - 2x|$ , với  $x \in [-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}]$ .

Ta thấy hàm số  $u(x) = x^2 - 2x$  liên tục trên đoạn  $[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}]$  và  $u' = 2x - 2$ ;  $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Bảng biến thiên:

|          |                |   |      |   |                |
|----------|----------------|---|------|---|----------------|
| $x$      | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 1    | 2 | $\frac{7}{2}$  |
| $u'(x)$  |                | - | 0    | - |                |
| $u(x)$   | $\frac{21}{4}$ | 0 | $-1$ | 0 | $\frac{21}{4}$ |
| $ u(x) $ | $\frac{21}{4}$ | 0 | 1    | 0 | $\frac{21}{4}$ |

Nhận xét:

— với  $t = 0$  hoặc  $1 < t \leq \frac{21}{4}$  thì phương trình  $t = |x^2 - 2x|$  có 2 nghiệm phân biệt;

— với  $t = 1$  thì phương trình  $t = |x^2 - 2x|$  có 3 nghiệm phân biệt;

— với mỗi  $t \in (0; 1)$  thì phương trình  $t = |x^2 - 2x|$  có 4 nghiệm phân biệt.

Với  $t = |x^2 - 2x|$  phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  thành  $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$ .

Dựa vào đồ thị  $f$  ta biện luận số nghiệm của phương trình  $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$  trong các trường hợp sau

— Trường hợp 1:  $m = 2$ . Ta có  $f(t) = 2 \Leftrightarrow t = 1$ .

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 3 nghiệm phân biệt.

— Trường hợp 2:  $2 < m < 3$ . Ta có

$$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (0; 1) \\ t = b \in (1; 2). \end{cases}$$

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 6 nghiệm phân biệt.

— Trường hợp 3:  $m = 3$ . Ta có

$$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = b \in (1; 2) \\ t = 3. \end{cases}$$

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 6 nghiệm phân biệt.

— Trường hợp 4:  $3 < m < 4$ . Ta có

$$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (2; 3) \\ t = b \in (3; 4). \end{cases}$$

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 4 nghiệm phân biệt.

— Trường hợp 5:  $m = 4$ . Ta có

$$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4. \end{cases}$$

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 4 nghiệm phân biệt.

— Trường hợp 6:  $4 < m < f\left(\frac{21}{4}\right)$ . Ta có  $f(t) = m$  có 1 nghiệm thuộc  $\left(1; \frac{21}{4}\right)$ .

Khi đó phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có 2 nghiệm phân biệt.

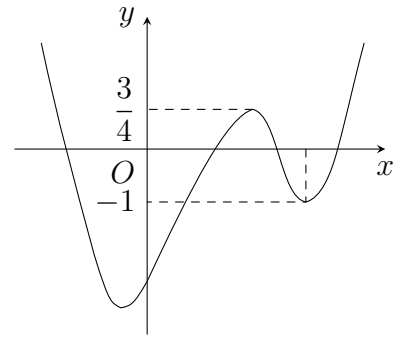
Vậy phương trình  $f(|x^2 - 2x|) = m$  có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$  khi và chỉ khi  $2 < m \leq 3$ .

Chọn phương án **A**

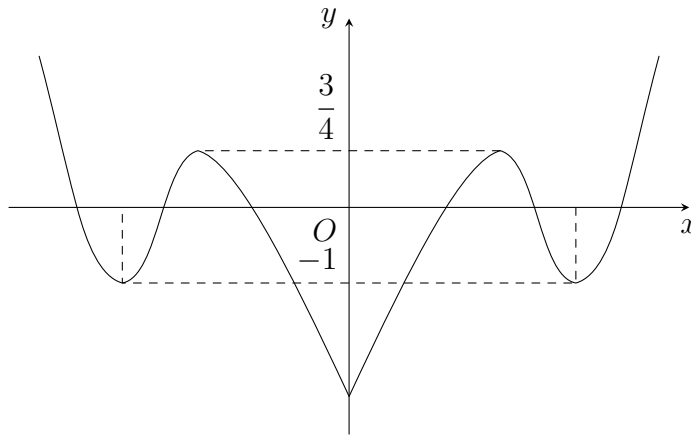
**Câu 32.**

Cho đồ thị hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(|x + m|) = m$  có 4 nghiệm phân biệt là

- (A) 0. (B) Vô số. (C) 1. (D) 2.

**Lời giải.**

Ta có đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  như sau:



Đồ thị hàm số  $y = f(|x + m|)$  có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  dọc theo trục  $Ox$  nên số nghiệm của phương trình  $f(|x + m|) = m$  bằng số nghiệm của phương trình  $f(|x|) = m$ . Do đó, phương trình  $f(|x + m|) = m$  có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị của hàm số

$$y = f(|x|) \text{ cắt đường thẳng } y = m \text{ tại 4 điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1. \end{cases}$$

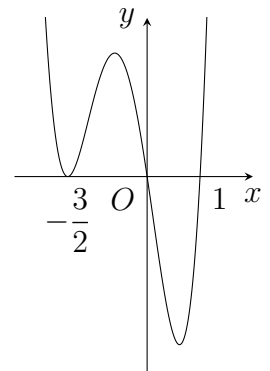
Vì  $m$  nguyên nên  $m = -1$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 33.**

Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$ ;  $f(0) = 3$ ;  $f(1) = 0$ ;  $f(2) > 3$ . Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Với  $m \in (0; 3)$  số nghiệm thực của phương trình  $f(x^2 - 3) = m$ ; ( $m$  là tham số thực), là

- (A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  ta có bảng biến thiên sau:



|         |           |                |     |     |           |
|---------|-----------|----------------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$            | $+$ | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  |           |                | $3$ | $0$ |           |

Đặt  $t = x^2 - 3 \Rightarrow t \geq -3$ , ta có phương trình  $\begin{cases} f(t) = m \\ m \in (0; 3) \end{cases}$  (\*) có 3 nghiệm phân biệt, hơn nữa do

$f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$ ;  $f(2) > 3$  nên phương trình (\*) có 3 nghiệm phân biệt  $t_1, t_2, t_3 \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$  (thỏa mãn điều kiện) suy ra mỗi phương trình  $t_i = x^2 - 3$ ;  $t_i \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ ;  $i = 1, 2, 3$ ; đều có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình  $f(x^2 - 3) = m$  có tất cả 6 nghiệm phân biệt với  $m \in (0; 3)$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 34.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên:

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$ | $-2$ | $+\infty$ |     |

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình  $f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$  có nghiệm.

**(A)**  $m \geq 1$ .

**(B)**  $m \geq -2$ .

**(C)**  $m \geq 4$ .

**(D)**  $m \geq 0$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t(x) = \sqrt{x-1}+1$ ,  $t \geq 1$ .

Bất phương trình trở thành  $f(t) \leq m$  ( $t \geq 1$ )

Bất phương trình (\*) có nghiệm với  $t \geq 1$  thì  $\min_{[1; +\infty)} f(t) \leq m$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $\min_{[1; +\infty)} f(t) = -2 \Rightarrow m \geq -2$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 35.**

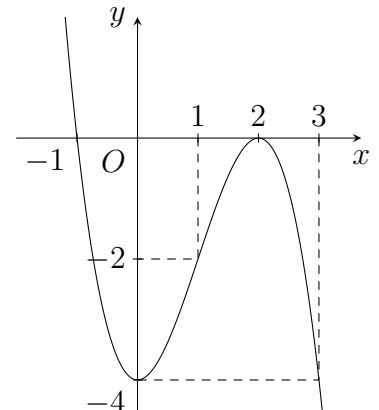
Cho hàm số  $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$  có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng với  $m > \alpha$  thì bất phương trình  $(4-x^2)(3-\sqrt{4-x^2}) < m+6$  luôn đúng với mọi  $m$ . Hãy cho biết kết luận nào sau đây đúng?

**(A)**  $\alpha$  là số nguyên âm.

**(B)**  $\alpha$  là số nguyên dương.

**(C)**  $\alpha$  là số hữu tỉ dương.

**(D)**  $\alpha$  là số vô tỉ.



**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{4 - x^2}$ ;  $0 \leq t \leq 2$ . Khi đó bất phương trình trên trở thành

$$-t^3 + 3t^2 - 4 < m + 2 \quad (*)$$

Để  $(4 - x^2)(3 - \sqrt{4 - x^2}) < m + 6$  luôn đúng với mọi  $m$  thì  $(*)$  luôn đúng với mọi  $t \in [0; 2]$ .

Tức là  $f(t) < m + 2$  luôn đúng với mọi  $t \in [0; 2]$

$$\Leftrightarrow m + 2 > \max_{[0;2]} f(t) \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 36.** Cho h số  $y = x^3 - 3x^2$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để bất phương trình  $(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x})^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} - 9 \leq m$  có nghiệm.

|      |           |   |   |           |    |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |    |   |           |
| $y'$ |           | + | 0 | -         | 0  | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   | 0 |           | -4 |   | $+\infty$ |

**A** 12.

**B** 13.

**C** 14.

**D** 15.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $-1 \leq x \leq 2$ .

Đặt  $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ . Với  $-1 \leq x \leq 2$  thì  $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{6}$ .

Ta có  $t^2 = 3 + 2\sqrt{2+x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{2+x-x^2} = t^2 - 3$ .

Bất phương trình đã cho trở thành

$$m \geq t^3 - 3t^2 = f(t), \quad t \in [\sqrt{3}; \sqrt{6}].$$

Bảng biến thiên của hàm số  $f(t)$  trên đoạn  $[\sqrt{3}; \sqrt{6}]$  là

|      |           |   |            |   |            |           |
|------|-----------|---|------------|---|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | $\sqrt{3}$ | 2 | $\sqrt{6}$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0          | - | 0          | +         |
| $y$  | $-\infty$ |   | 0          |   | -4         |           |
|      |           |   |            |   |            | $+\infty$ |

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow m \geq \min_{[\sqrt{3}; \sqrt{6}]} f(t) = -4$ .

Từ  $m \geq -4$  kết hợp  $m \in [-10; 10]$  và  $m$  nguyên nên có 15 giá trị của  $m$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 4 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |   | 4 |           |

```

graph LR
    x1["x: -∞"] --> f1["f'(x): +∞"]
    x2["x: 1"] --> f2["f'(x): 1"]
    x3["x: 4"] --> f3["f'(x): 4"]
    x4["x: +∞"] --> f4["f'(x): -∞"]
  
```

Bất phương trình  $f(e^x) < e^{2x} + m$  nghiệm đúng với mọi  $x \in (\ln 2; \ln 4)$  khi và chỉ khi

- (A)  $m \geq f(2) - 4$ . (B)  $m \geq f(2) - 16$ . (C)  $m > f(2) - 4$ . (D)  $m > f(2) - 16$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(e^x) < e^{2x} + m$  nghiệm đúng với mọi  $x \in (\ln 2; \ln 4)$  khi và chỉ khi

$$m > f(e^x) - e^{2x}, \forall x \in (\ln 2; \ln 4) \quad (*)$$

Đặt  $t = e^x \Rightarrow t \in (2; 4)$ , bất phương trình (\*) trở thành

$$m > f(t) - t^2, \forall t \in (2; 4).$$

Xét hàm số  $g(t) = f(t) - t^2$  trên  $(2; 4)$ .

Ta có  $g(t) = f(t) - 2t < 0$  (do  $f(t) < 4, \forall t \in (2; 4)$ ).

Vậy  $g(t) = f(t) - t^2$  nghịch biến trên  $(2; 4)$ .

Suy ra:  $g(t) < g(2) = f(2) - 4$ .

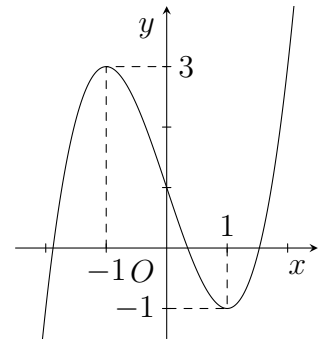
Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có  $m \geq f(2) - 4$ .

Chọn phương án (A)

### Câu 38.

Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  có đồ thị hàm số như hình bên. Sử dụng đồ thị hàm số đã cho, tìm số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $8|x|^3 - 6|x|(x^2 + 1)^2 = (m - 1)(x^2 + 1)^3$  có nghiệm.

- (A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.



**Lời giải.**

Phương trình

$$8 \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right|^3 - 6 \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = m - 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right|^3 - 3 \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| + 1 = m.$$

Đặt  $t = \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \geq 0$ . Ta có  $x^2 + 1 \geq 2x$ , suy ra  $0 \leq \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1$ . Do đó  $0 \leq t \leq 1$ .

Phương trình trở thành  $t^3 - 3t + 1 = m$ . (\*)

Số nghiệm của phương trình (\*) là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  (chỉ xét với  $x \in [0; 1]$ ) và đường thẳng  $y = m$ .

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*) có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1]$  khi và chỉ khi  $-1 \leq m \leq 1$ .

Như vậy có 3 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán đã cho.

Chọn phương án (C)

### Câu 39.

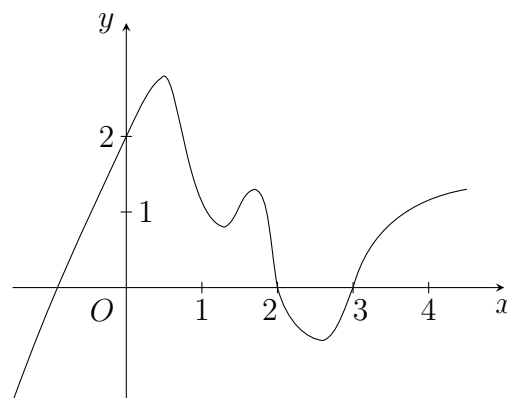
Cho hàm số  $y = f(x)$  có liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình  $f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x - 1)^2$ .

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

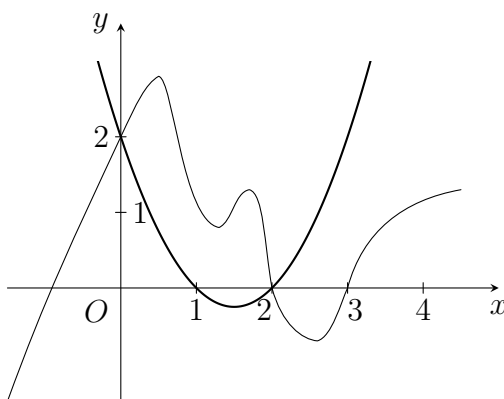


**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 &= (x^2 - 2)^3 - 3(x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3x^3 + 9x + 2 \\ \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) &= (x^3 - 3x)^2 - 3(x^3 - 3x) + 2. \end{aligned}$$

Đặt  $t = x^3 - 3x$  ta có phương trình  $f(t) = t^2 - 3t + 2$



$$\text{Dựa vào đồ thị thì } f(t) = t^2 - 3t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 0 \\ x^3 - 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Chọn phương án (C)

**Câu 40.**

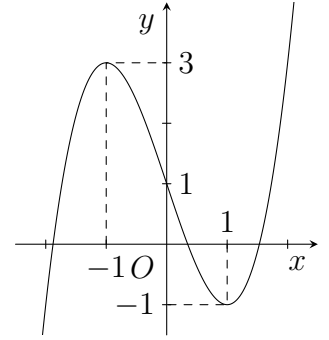
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của  $m$  để cho phương trình  $f(\sin x) = 3 \sin x + m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

Ⓐ -5.

Ⓑ -8.

Ⓒ -10.

Ⓓ -6.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sin x$ , do  $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1] \Rightarrow t \in (0; 1]$ .

Phương trình đã cho trở thành

$$f(t) = 3t + m \Leftrightarrow f(t) - 3t = m. \quad (*)$$

Đặt  $g(t) = f(t) - 3t$ . Ta có:  $g(t) = f(t) - 3t$ . (1)

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , ta có:  $\forall t \in (0; 1]: f(t) < 0$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $\forall t \in (0; 1]: g(t) < 0$ .

Do đó hàm số  $g(t)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

Phương trình (\*) có nghiệm  $t \in (0; 1]$

$$\Leftrightarrow \min_{[0;1]} g(t) \leq m < \max_{[0;1]} g(t)$$

$$\Leftrightarrow g(1) \leq m < g(0)$$

$$\Leftrightarrow f(1) - 3 \leq m < f(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

Vậy  $m$  nguyên là  $m = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow S = -10$ .

Chọn phương án Ⓒ

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. C  | 3. B  | 4. A  | 5. C  | 6. C  | 7. A  | 8. A  | 9. A  | 10. A |
| 11. B | 12. A | 13. B | 14. A | 15. D | 16. A | 17. D | 18. A | 19. D | 20. D |
| 21. D | 22. D | 23. C | 24. C | 25. C | 26. C | 27. B | 28. D | 29. A | 30. B |
| 31. A | 32. C | 33. C | 34. B | 35. A | 36. D | 37. A | 38. C | 39. C | 40. C |

## DẠNG 46. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $F(u(x))$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Đạo hàm của hàm số hợp

$$- g'(x) = f' \left[ u(x) \right] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f' \left[ u(x) \right]$$

$$- g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f' \left[ u(x) \right] = 0. \end{cases}$$

- Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  khi biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ .

B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  với trục hoành.

B2. Xét dấu của hàm số  $y = f'(x)$ , ta làm như sau.

- \* Phần đồ thị của  $f'(x)$  nằm bên trên trục hoành trong khoảng  $(a; b)$  thì  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (a; b)$ .
- \* Phần đồ thị của  $f'(x)$  nằm bên dưới trục hoành trong khoảng  $(a; b)$  thì  $f'(x) < 0$ ,  $x \in (a; b)$ .

- Lập bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x) + u(x)$  khi biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ .

B1. Đạo hàm  $g'(x) = f'(x) + u'(x)$ . Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -u'(x)$ .

B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và đồ thị hàm số  $y = -u'(x)$ .

B3. Xét dấu của hàm số  $y = g'(x)$ , ta làm như sau.

- \* Phần đồ thị của  $f'(x)$  nằm bên trên đồ thị  $-u'(x)$  trong khoảng  $(a; b)$  thì  $g'(x) > 0$ ,  $x \in (a; b)$ .
- \* Phần đồ thị của  $f'(x)$  nằm bên dưới đồ thị  $-u'(x)$  trong khoảng  $(a; b)$  thì  $g'(x) < 0$ ,  $x \in (a; b)$ .

$$\bullet \text{ Đạo hàm của hàm hợp } \left[ f(u(x)) \right]' = u'(x) \cdot f'(u).$$

- Định lý về cực trị của hàm số

$\nabla$  Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathcal{D}$ .

$\nabla$  Điểm  $x_0 \in \mathcal{D}$  là điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  khi  $f'(x_0) = 0$  hoặc  $f'(x_0)$  không xác định và  $f'(x)$  đổi dấu khi đi qua  $x_0$ .

- Sự tương giao của hai đồ thị

▽ Hoàn chỉnh độ giao điểm của hai đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  (1).

▽ Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của hai cực trị.

- Tính chất đổi dấu của biểu thức:

Gọi  $x = \alpha$  là một nghiệm của phương trình:  $f(x) = 0$ . Khi đó

▽ Nếu  $x = \alpha$  là nghiệm bội bậc chẵn  $((x - \alpha)^2, (x - \alpha)^4, \dots)$  thì hàm số  $y = f(x)$  không đổi dấu khi đi qua  $\alpha$ .

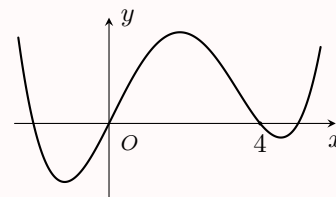
▽ Nếu  $x = \alpha$  là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ  $((x - \alpha), (x - \alpha)^3, \dots)$  thì hàm số  $y = f(x)$  đổi dấu khi đi qua  $\alpha$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

### Ví dụ 1.

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  là

- (A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 11.



Lời giải.

### Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm hợp  $f(u(x))$  khi biết đồ thị hàm số  $f(x)$ .

### 2. HƯỚNG GIẢI

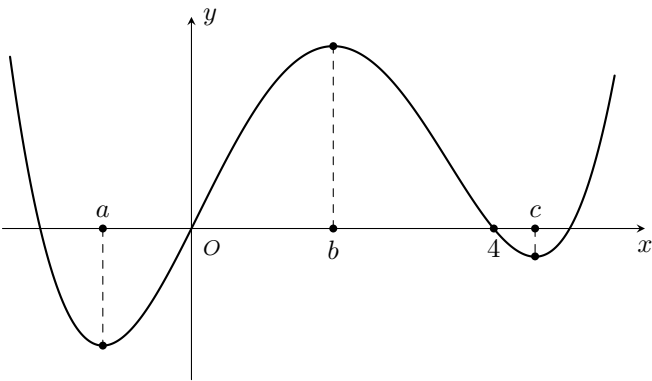
B1. Tính đạo hàm của hàm số:  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ .

B2. Dựa vào đồ thị của hàm  $f(x)$  ta suy ra số nghiệm của phương trình  $g'(x) = 0$ .

B3. Lập bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  và suy ra số cực trị.

### LỜI GIẢI CHI TIẾT





Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của  $y = f(x)$  như sau

|         |           |        |        |        |           |
|---------|-----------|--------|--------|--------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $a$    | $b$    | $c$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$    | $+$    | $0$    | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(c)$ | $+\infty$ |

$g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (x^3 + 3x^2)' f'(x^3 + 3x^2) = (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2).$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ \begin{cases} x^3 + 3x^2 = a < 0 & (1) \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 4) & (2) \\ x^3 + 3x^2 = c > 4 & (3) \end{cases} \end{cases}$

Xét hàm số  $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |
| $h'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $h(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $0$ | $+\infty$ |     |

Từ bảng biến thiên, ta thấy.

- Đường thẳng  $y = a$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 1 điểm.
- Đường thẳng  $y = b$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 3 điểm.
- Đường thẳng  $y = c$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình  $g'(x) = 0$  có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  có 7 cực trị.

### Cách trình bày khác

**1. DẠNG TOÁN** Đây là Dạng toán sử dụng đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của hàm số  $y = f(x)$  (hoặc  $y = f'(x)$ ) để tìm cực trị hàm số  $g(x) = f(u(x))$ .

## 2. HƯỚNG GIẢI

B1: Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ .

▽ Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$  xác định cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

▽ Lập bảng biến thiên

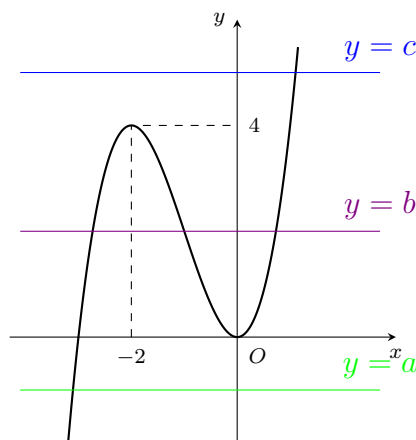
| $x$     | $-\infty$ | $a$ | $b$    | $c$ | $+\infty$ |     |        |           |
|---------|-----------|-----|--------|-----|-----------|-----|--------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$    | $+$ | $0$       | $-$ | $0$    | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     | $f(a)$ |     | $f(b)$    |     | $f(c)$ | $+\infty$ |

B2: Tìm các điểm tới hạn của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ .

▽ Đạo hàm  $g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$ .

$$\nabla \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4. \end{cases}$$

B3: Khảo sát hàm số  $h(x) = x^3 + 3x^2$  để tìm số giao điểm của đồ thị  $h(x) = x^3 + 3x^2$  với các đường thẳng  $y = a$ ,  $y = b$ ,  $y = c$



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|         |           |        |     |        |     |        |     |           |
|---------|-----------|--------|-----|--------|-----|--------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $a$    |     | $b$    |     | $c$    |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$    | $0$ | $+$    | $0$ | $-$    | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(a)$ |     | $f(b)$ |     | $f(c)$ |     | $+\infty$ |

Ta có  $g(x) = f\left(x^3 + 3x^2\right) \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2 + 6x\right) \cdot f'\left(x^3 + 3x^2\right)$ .

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'\left(x^3 + 3x^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4. \end{cases}$

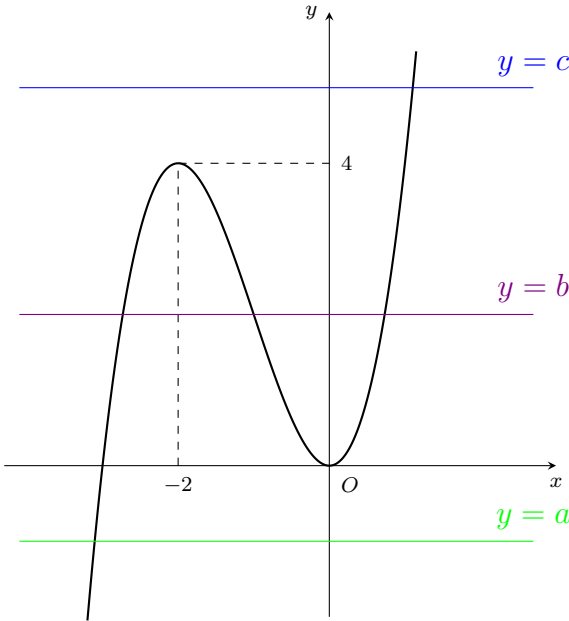
Xét hàm số  $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$ .

Cho  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |           |      |     |           |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |           |
| $h'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $h(x)$  |           |      | $4$ |           | $0$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |           |     |           |

Ta có đồ thị của hàm  $h(x) = x^3 + 3x^2$  như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng  $y = a$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 1 điểm.

Đường thẳng  $y = b$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 3 điểm.

Đường thẳng  $y = c$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 1 điểm.

Như vậy phương trình  $g(x) = 0$  có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  có 7 cực trị.

Chọn phương án C

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

#### Câu 1.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên.

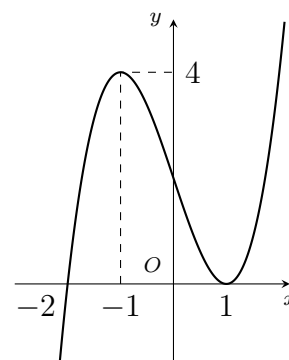
Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^2 - 3)$ .

A 2.

B 3.

C 4.

D 5.



#### Lời giải.

Ta có  $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 (\text{nghiệm kép}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 (\text{nghiệm kép}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

| $x$  | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $g'$ | $-$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $0$  | $-$  | $0$ | $+$ | $0$ | $+$       |
| $g$  | <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> |      |      |     |     |     |           |

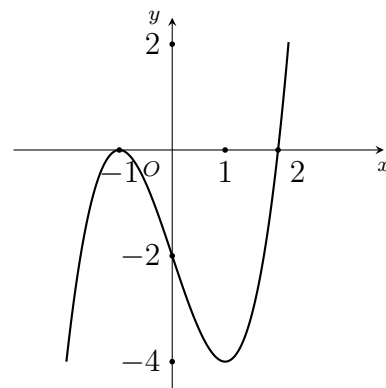
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án B

#### Câu 2.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $f(x)$  như hình vẽ. Số điểm cực trị hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$  là

- (A) 6.                      (B) 5.                      (C) 4.                      (D) 3.



**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 1)$ .

**Nhận xét:**

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2; x = 3. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $0$        | $1$        | $2$        | $3$        | $+\infty$  |
|---------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $g'(x)$ |           | $-$        | $0$        | $+$        | $0$        | $-$        | $+$        |
| $g(x)$  |           | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |
|         |           | $g(-1)$    |            | $g(1)$     |            | $f(3)$     |            |

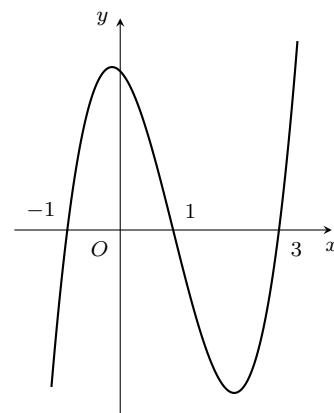
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

Chọn phương án (D)

**Câu 3.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$ . Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm  $f'(x)$ . Hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 3.                      (D) 4.



**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$ .



**Câu 5.**

Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  như sau. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(4x^2 - 4x)$  là

- (A) 9. (B) 5. (C) 7. (D)

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $2$ | $-1$ | $+\infty$ |

3.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Ta có:  $y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x)$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Ta có khi  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 4x = -1$  và  $f(-1) = -3 \neq 0$ .

Mặt khác:  $4x^2 - 4x = (2x - 1)^2 - 1 \geq -1$  nên:

$4x^2 - 4x = a$  vô nghiệm.

$4x^2 - 4x = b$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

$4x^2 - 4x = c$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_3, x_4$ .

$4x^2 - 4x = d$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_5, x_6$ .

Vậy phương trình  $y = 0$  có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Chọn phương án (C)

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $2$ | $-1$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $f(x^2 - 2x)$  là

- (A) 9. (B) 3. (C) 7. (D) 5.

**Lời giải.**

| $x$ | $-\infty$        | $-1$ | $0$        | $1$         | $+\infty$        |
|-----|------------------|------|------------|-------------|------------------|
| $y$ | $+\infty$<br>$a$ | $-3$ | $2$<br>$b$ | $-1$<br>$c$ | $+\infty$<br>$d$ |

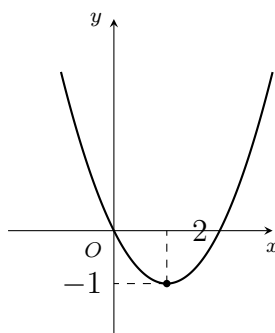
Từ bảng biến thiên ta có phương trình  $f'(x) = 0$  có các nghiệm tương ứng là

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét hàm số  $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y = 2(x - 1)f(x^2 - 2x)$ .

$$\text{Giải phương trình } y = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)f(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4). \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số  $h(x) = x^2 - 2x$



Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2); (3); (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm. Các nghiệm đều phân biệt nhau.

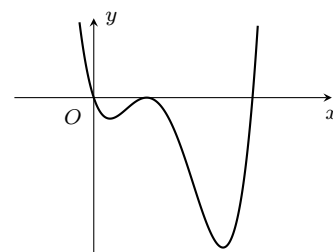
Vậy phương trình  $y = 0$  có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có 7 điểm cực trị.

Chọn phương án C

### Câu 7.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ Đồ thị của hàm số  $y = (f(x))^2$  có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

- A 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
- B 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
- C 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
- D 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



### Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên



|         |           |          |        |          |           |
|---------|-----------|----------|--------|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$    | $0$    | $x_2$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$      | $0$    | $+$      | $0$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |          | $f(0)$ |          | $+\infty$ |
|         |           | $f(x_1)$ |        | $f(x_2)$ |           |

$$y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0. \end{cases}$$

Quan sát đồ thị ta có  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$  và  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = x_2 \end{cases}$  với  $x_1 \in (0; 1)$  và  $x_2 \in (1; 3)$ .

Suy ra  $y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ x \in (0; x_1) \cup (1; x_2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; x_1) \cup (1; x_2) \cup (3; +\infty).$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số  $y = (f(x))^2$

|      |           |        |       |          |        |     |           |           |
|------|-----------|--------|-------|----------|--------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$    | $x_1$ | $1$      | $x_2$  | $3$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $-$       | $0$    | $+$   | $0$      | $+$    | $0$ | $+$       |           |
| $y$  | $+\infty$ |        |       | $y(x_1)$ |        |     | $y(x_2)$  | $+\infty$ |
|      |           | $y(0)$ |       |          | $y(1)$ |     | $y(3)$    |           |

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Chọn phương án **(D)**

### Câu 8.

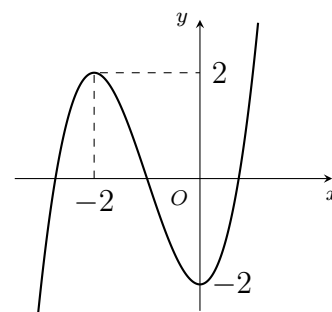
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(-x^2 + 3x)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

**(A)** 3.

**(B)** 4.

**(C)** 5.

**(D)** 6.



### Lời giải.

Ta có  $g'(x) = (-2x + 3) \cdot f'(-x^2 + 3x)$  ;.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |           |                         |     |               |     |                         |           |     |
|------|-----------|-------------------------|-----|---------------|-----|-------------------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $3$ | $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ | $+\infty$ |     |
| $g'$ |           | $+$                     | $0$ | $-$           | $0$ | $+$                     | $0$       | $-$ |
| $g$  |           |                         |     |               |     |                         |           |     |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn phương án B

### Câu 9.

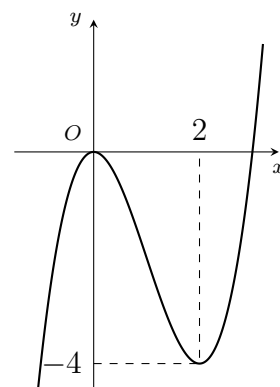
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f[f(x)]$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3.

B 5.

C 4.

D 6.



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy  $f(x)$  đạt cực trị tại  $x = 0, x = 2$ .

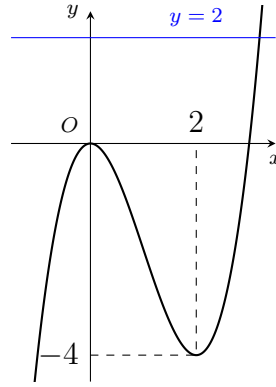
Suy ra  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{nghiệm đơn}) \\ x = 2(\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$

Ta có  $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0. \end{cases}$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{nghiệm đơn}) \\ x = 2(\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$$

$$\text{— } f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}.$$

46. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP  $F(U(X))$  KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ MINH HỌA LẦN 1



Dựa vào đồ thị suy ra:

- ✓ Phương trình (1) có hai nghiệm  $x = 0$  (nghiệm kép) và  $x = a$  ( $a > 2$ ).
- ✓ Phương trình (2) có một nghiệm  $x = b$  ( $b > a$ ).

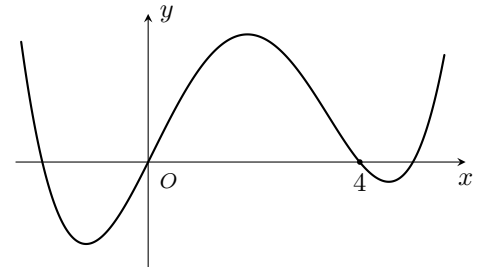
Vậy phương trình  $g'(x) = 0$  có 4 nghiệm bội lẻ là  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = a$  và  $x = b$ . Suy ra hàm số  $g(x) = f[f(x)]$  có 4 điểm cực trị.

Chọn phương án **C**

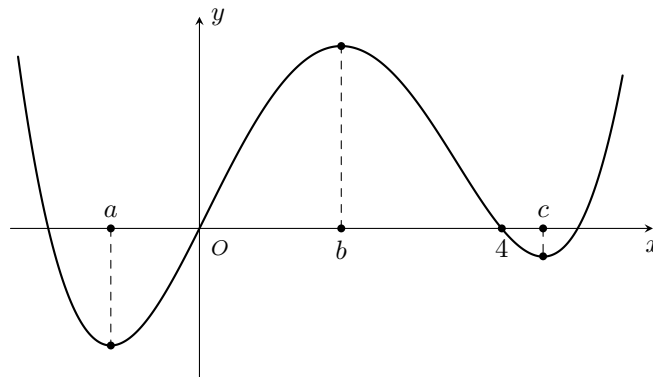
**Câu 10.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(-x^4 + 4x^2)$  là

- (A) 5.      (B) 3.      (C) 7.      (D) 11.



**Lời giải.**



Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của  $y = f(x)$  như sau:

|         |           |        |     |        |     |        |     |           |
|---------|-----------|--------|-----|--------|-----|--------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $a$    |     | $b$    |     | $c$    |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$    | $0$ | $+$    | $0$ | $-$    | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(a)$ |     | $f(b)$ |     | $f(c)$ |     | $+\infty$ |

$$g(x) = f(-x^4 + 4x^2) \Rightarrow g'(x) = (-x^4 + 4x^2)' f'(-x^4 + 4x^2) = (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 8x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \\ -x^4 + 4x^2 = a < 0 \quad (1) \\ -x^4 + 4x^2 = b \in (0; 4) \quad (2) \\ -x^4 + 4x^2 = c > 4 \quad (3) \end{cases}$$

Xét hàm số  $h(x) = -x^4 + 4x^2$

$$\Rightarrow h'(x) = -4x^3 + 8x \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |             |     |            |           |     |     |     |
|---------|-----------|-------------|-----|------------|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $h'(x)$ |           | $+$         | $0$ | $-$        | $0$       | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h(x)$  |           |             |     |            |           |     |     |     |

Từ bảng biến thiên, ta thấy.

- Đường thẳng  $y = a < 0$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 2 điểm.
- Đường thẳng  $y = b \in (0; 4)$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 4 điểm.
- Đường thẳng  $y = c > 4$  cắt đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại 0 điểm.

Như vậy, phương trình  $g'(x) = 0$  có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  có 7 cực trị.

Chọn phương án **C**

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |            |     |            |      |            |           |            |
|------|-----------|------------|-----|------------|------|------------|-----------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$        |     | $1$        | $2$  |            | $+\infty$ |            |
| $y'$ |           | $+$        | $0$ | $-$        | $  $ | $+$        | $0$       | $-$        |
| $y$  |           | $3$        |     |            |      | $2$        |           |            |
|      | $-\infty$ | $\nearrow$ |     | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |           | $\searrow$ |
|      |           |            |     |            |      |            |           | $-\infty$  |

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(3 - x)$ .

**A** 2.

**B** 3.

**C** 5.

**D** 6.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = -f'(3 - x)$ .

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(3-x) = 0 \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1. \end{cases}$
- $g'(x)$  không xác định  $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$ .

Bảng biến thiên

|      |           |   |   |      |           |   |           |   |
|------|-----------|---|---|------|-----------|---|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | 3    | $+\infty$ |   |           |   |
| $g'$ |           | + | 0 | -    |           | + | 0         | - |
| $g$  |           |   | 2 |      |           | 3 |           |   |
|      | $-\infty$ |   |   | $-1$ |           |   | $-\infty$ |   |

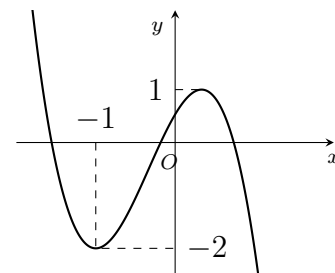
Vậy hàm số  $g(x) = f(3-x)$  có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án **(B)**

### Câu 12.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x) + 2x$  là

- (A)** 4.      **(B)** 1.      **(C)** 3.      **(D)** 2.



**Lời giải.**

Đặt  $g(x) = f(x) + 2x$  suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_0 > -1. \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta có: Trên  $(-\infty; -1)$  thì  $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$ .

- Trên  $(-1; x_0)$  thì  $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$ .
- Trên  $(x_0; +\infty)$  thì  $f'(x) < -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 < 0$ .

|         |                                |      |       |           |     |
|---------|--------------------------------|------|-------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$                      | $-1$ | $x_0$ | $+\infty$ |     |
| $g'(x)$ | $+$                            | $0$  | $+$   | $0$       | $-$ |
| $g(x)$  | <div><math>f(x_0)</math></div> |      |       |           |     |

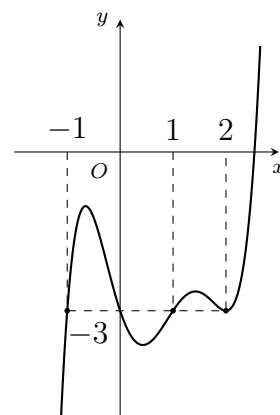
Vậy hàm số  $g(x) = f(x) + 2x$  có 1 cực trị.

Chọn phương án **(B)**

### Câu 13.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = f(x) + 3x$  có bao nhiêu điểm cực trị?

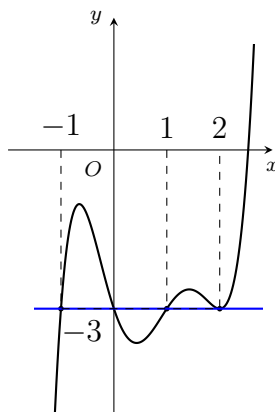
- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 7.



**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = f'(x) + 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$ .

Suy ra số nghiệm của phương trình  $g'(x) = 0$  chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số  $f'(x)$  và đường thẳng  $y = -3$ .



Dựa vào đồ thị ta suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ .

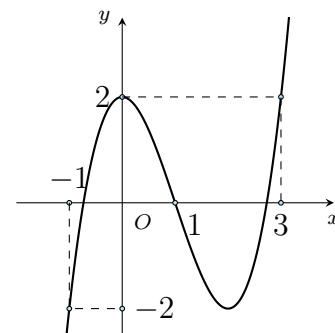
Ta thấy  $x = -1, x = 0, x = 1$  là các nghiệm đơn và  $x = 2$  là nghiệm kép nên đồ thị hàm số  $g(x) = f(x) + 3x$  có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2017$ .

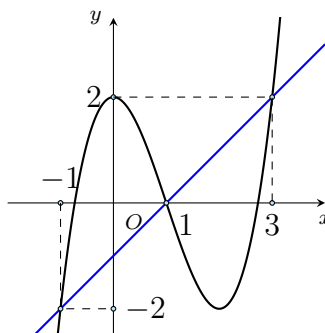
- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 7.



**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x - 1)]$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  tại 3 điểm:  $(-1; -2)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(3; 2)$ .



Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ đều là các nghiệm đơn.}$$

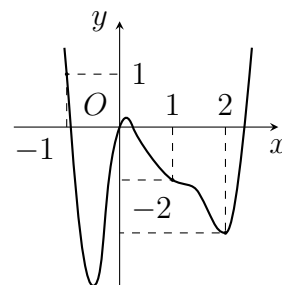
Vậy hàm số  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án B

### Câu 15.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $g(x) = 2f(x) + x^2$  đạt cực tiểu tại điểm

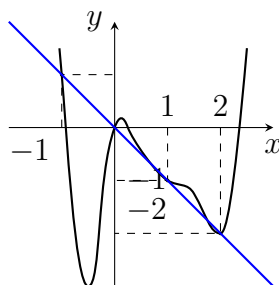
- A  $x = -1$ . B  $x = 0$ . C  $x = 1$ . D  $x = 2$ .



### Lời giải.

Ta có  $g(x) = 2f(x) + x^2$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$ .

Suy ra số nghiệm của phương trình  $g'(x) = 0$  chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số  $f'(x)$  và đường thẳng  $y = -x$ .



$$\text{Dựa vào đồ thị ta suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |           |      |     |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $g'$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$       |
| $g$  |           |      |     |     |     |           |

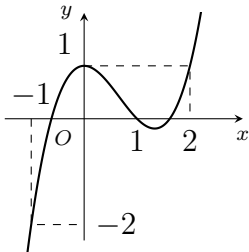
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $g(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

Chọn phương án **B**

Câu 16.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$  đạt cực đại tại.

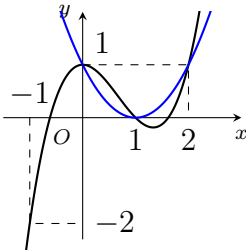
- A**  $x = -1$ .
- B**  $x = 0$ .
- C**  $x = 1$ .
- D**  $x = 2$ .



Lời giải.

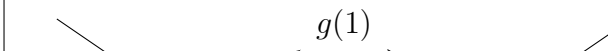
Ta có  $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$ .

Suy ra số nghiệm của phương trình  $g'(x) = 0$  chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số  $f'(x)$  và parapol  $(P): y = (x - 1)^2$ .



Dựa vào đồ thị ta suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                      |     |     |     |           |     |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                            | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |
| $g'(x)$ | $-$                                                                                  | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |
| $g(x)$  |  |     |     |     |           |     |     |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

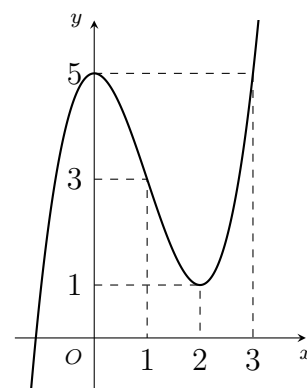
Chọn phương án **C**



**Câu 17.**

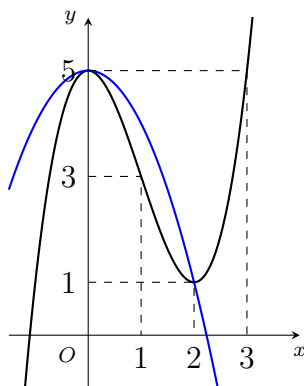
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = 3f(x) + x^3 - 15x + 1$  là

- (A) 2.                      (B) 1.                      (C) 3.                      (D) 4.



**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 3f'(x) + 3x^2 - 15$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5 - x^2$ .



Đồ thị hàm số  $f'(x)$  cắt đồ thị hàm số  $y = 5 - x^2$  tại hai điểm  $A(0; 5)$ ,  $B(2; 1)$ .

Trong đó  $x = 0$  là nghiệm bội bậc 2;  $x = 2$  là nghiệm đơn.

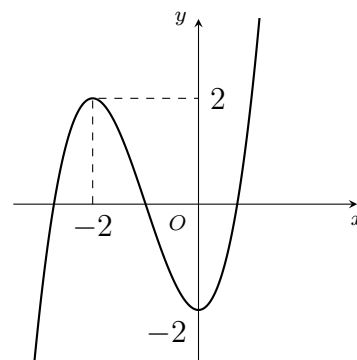
Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Chọn phương án (B)

**Câu 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(-x^2 + 3x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3.                      (B) 4.                      (C) 5.                      (D) 6.



**Lời giải.**

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Ta có  $g(x) = f(-x^2 + 3x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 3) \cdot f'(-x^2 + 3x)$ .

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

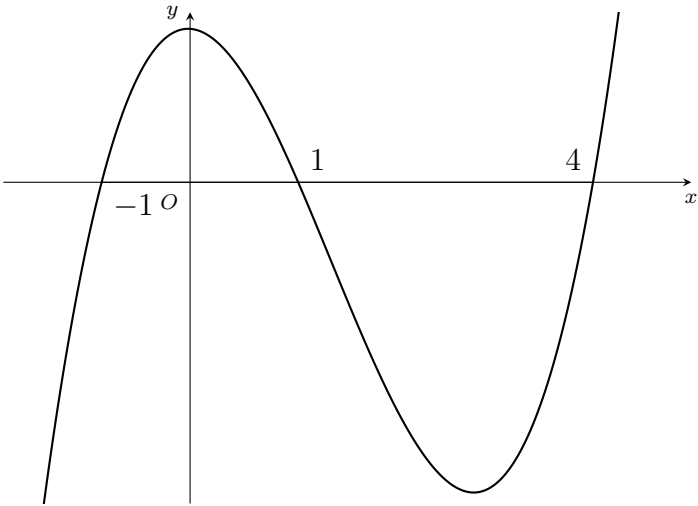
Như vậy phương trình  $g'(x) = 0$  có tất cả 5 nghiệm đơn phân biệt.  
Vậy hàm số  $g(x) = f(-x^2 + 3x)$  có 5 cực trị.

Chọn phương án **C**

Câu 19.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A** 3.
- B** 2.
- C** 5.
- D** 4.



Lời giải.

Gọi  $x = a$ , với  $1 < a < 4$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = f(x)$ .  
Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|         |           |        |        |           |     |
|---------|-----------|--------|--------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$    | $a$    | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$    | $-$    | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(0)$ | $f(a)$ | $+\infty$ |     |

Ta có  $y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2)$ .

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$ , với  $1 < a < 4$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x^2)$

|      |           |                |        |               |           |
|------|-----------|----------------|--------|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\sqrt{a}$    | $0$    | $\sqrt{a}$    | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$            | $+$    | $0$           | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $f(-\sqrt{a})$ | $f(0)$ | $f(\sqrt{a})$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $y = f(x^2)$  có 3 cực trị.

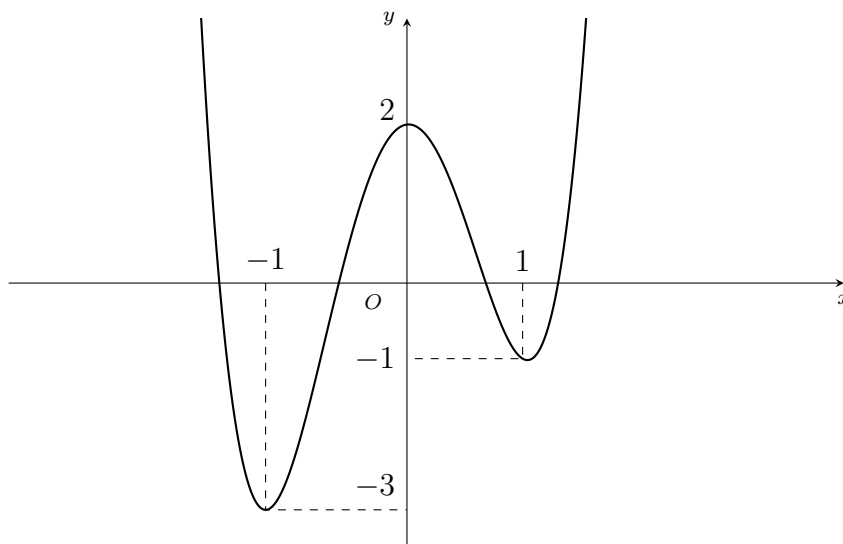
Chọn phương án **A**

### Câu 20.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  là

- (A)** 3. **(B)** 9. **(C)** 5. **(D)**

7.



### Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $2$ |      | $+\infty$ |
|         |           | $-3$ |     | $-1$ |           |

Ta có  $y = f(x^2 + 2x) \Rightarrow y' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$ .

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -1 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$

|      |           |               |      |      |     |               |           |           |
|------|-----------|---------------|------|------|-----|---------------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1-\sqrt{2}$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $-1+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ |           | $-$           | $0$  | $+$  | $0$ | $-$           | $0$       | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |               |      |      |     |               |           | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  có 5 cực trị.

Chọn phương án **C**

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |      | $3$ |     | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(6 - 3x)$  là

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Ta có  $y' = -3 \cdot f'(6 - 3x)$ .

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x = -3 \\ 6 - 3x = 1 \\ 6 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |           |     |               |     |           |     |     |
|------|-----------|-----|---------------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $\frac{5}{3}$ | $3$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ | $-$       | $0$ | $+$           | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

**Nhận xét:**  $y'$  đổi dấu 3 lần khi đi qua các nghiệm nên phương trình  $y' = 0$  có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số  $y = f(6 - 3x)$  có 3 cực trị.

Chọn phương án **C**

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-5$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |      | $3$  |     | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^2 - 5)$  là

**(A)** 7.

**(B)** 1.

**(C)** 5.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 5)$ .

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = a, & a < -5 \\ x^2 - 5 = b, & -5 < b < -2. \\ x^2 - 5 = c, & -2 < c < 3 \\ x^2 - 5 = d, & d > 3. \end{cases}$$

- Phương trình  $x^2 = a + 5 < 0$ ,  $a < -5$  nên phương trình vô nghiệm.
- Phương trình  $x^2 = b + 5 > 0$ ,  $-5 < b < -2$  nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình  $x^2 = c + 5 > 0$ ,  $-2 < c < 3$  nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình  $x^2 = d + 5 > 0$ ,  $d > 3$  nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

**Nhận xét:** 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình  $g'(x) = 0$  có 7 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số  $g(x) = f(x^2 - 5)$  có 7 cực trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | 4 |   | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f[(x+1)^2]$  là

**A** 5.

**B** 3.

**C** 2.

**D** 4.

**Lời giải.**

Ta có  $g(x) = f[(x+1)^2] = f(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+2) \cdot f'(x^2 + 2x + 1)$ .

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 1 = a, & a < 0 \\ x^2 + 2x + 1 = b, & 0 < b < 3 \\ x^2 + 2x + 1 = c, & c > 3. \end{cases}$$

- $x^2 + 2x + 1 - a = 0$  có  $\Delta = 4a < 0$ ,  $a < 0$  nên phương trình vô nghiệm.
- $x^2 + 2x + 1 - b = 0$  có  $\Delta = 4b > 0$ ,  $0 < b < \frac{1}{2}$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
- $x^2 + 2x + 1 - c = 0$  có  $\Delta = 4c > 0$ ,  $c > 3$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

**Nhận xét:** 5 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình  $g'(x) = 0$  có 5 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số  $g(x) = f[(x+1)^2]$  có 5 cực trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | 4    |     | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$  là

(A) 6.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 4.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ .

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \\ f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \frac{x^2+1}{x} = a, & a < -2 \\ \frac{x^2+1}{x} = b, & -2 < b < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} = c, & c > 2. \end{cases}$$

•  $x^2-1=0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x = \pm 1$ .

• Xét hàm số  $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ta có  $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ .

Cho  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Bảng biến thiên

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +    | 0   | -   | +         |
| $y$  |           |      | -2  | 2   |           |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy.

✓  $h(x) = a$  có 2 nghiệm phân biệt, với  $a < -2$ .

✓  $h(x) = b$  vô nghiệm, với  $-2 < b < 2$ .

✓  $h(x) = c$  có 2 nghiệm phân biệt, với  $c > 2$ .

Vậy hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$  có 6 điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | 1    |     | 2   |           |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  là

**A** 8.

**B** 7.

**C** 1.

**D** 3.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ .

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = a, & a < -1 \\ \frac{x+1}{x-1} = b, & -1 < b < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} = c, & 0 < c < 2 \\ \frac{x+1}{x-1} = d, & d > 2 \end{cases}.$$

Xét hàm số  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

• Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có  $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$ .

• Bảng biến thiên

| $x$     | $-\infty$                                                                           | $1$ | $+\infty$                                                                           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | $+$                                                                                 |     | $+$                                                                                 |
| $f(x)$  |  |     |  |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình  $h(x) = a, h(x) = b, h(x) = c, h(x) = d$  đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  có 8 cực trị.

Chọn phương án **A**

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $+$  | $0$ | $-$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $1$  | $2$ | $1$ | $+\infty$ |

Hàm số  $g(x) = 3f(x) + 1$  đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây?

☐ (A)  $x = -1$ .

☐ (B)  $x = 1$ .

☐ (C)  $x = \pm 1$ .

☐ (D)  $x = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 3f'(x)$ .

Do đó điểm cực tiểu của hàm số  $g(x)$  trùng với điểm cực tiểu của hàm số  $y = f(x)$ .

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là  $x = \pm 1$ .

Chọn phương án ☒ (C)

**Câu 27.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ Hàm

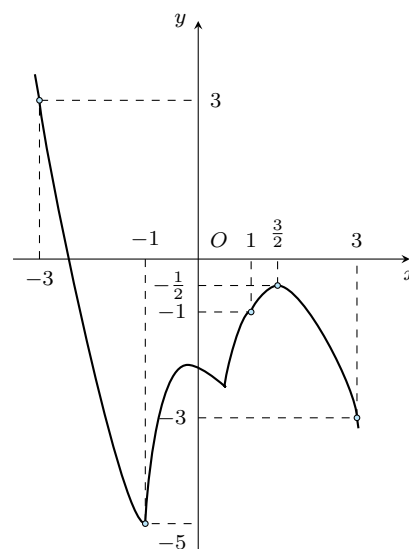
số  $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + 2020$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

☐ (A)  $x = 3$ .

☐ (B)  $x = 1$ .

☐ (C)  $x = -3$ .

☐ (D)  $x = \pm 3$ .

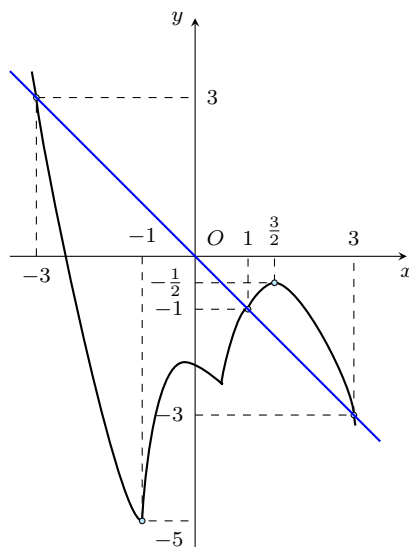


**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = f'(x) + x$ . Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$ .

Nhận thấy đường thẳng  $y = -x$  cắt đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  lần lượt tại ba điểm  $x = \pm 3$ ;  $x = 1$ .





Ta có bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + 2020$

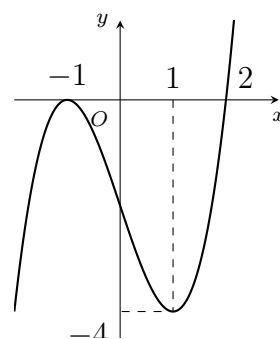
|         |           |      |         |        |           |     |     |           |
|---------|-----------|------|---------|--------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $1$     | $3$    | $+\infty$ |     |     |           |
| $g'(x)$ |           | $+$  | $0$     | $-$    | $0$       | $+$ | $0$ | $-$       |
| $g(x)$  |           |      | $g(-3)$ |        | $g(3)$    |     |     |           |
|         | $-\infty$ |      |         | $g(1)$ |           |     |     | $-\infty$ |

$$f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$$

Chọn phương án **(D)**

### Câu 28.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2)$ . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



- (A) Hàm số  $g(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = \pm 2$ .
- (B) Hàm số  $g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .
- (C) Hàm số  $g(x)$  có 5 điểm cực trị.
- (D) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

### Lời giải.

Ta có:  $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$ .

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

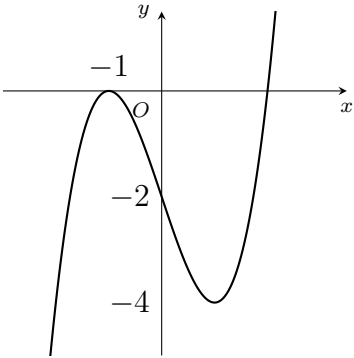
|                        |           |      |      |     |     |     |           |
|------------------------|-----------|------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$                    | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $2x$                   | $-$       | $-$  | $-$  | $0$ | $+$ | $+$ | $+$       |
| $f'\left(2-x^2\right)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$       |
| $g(x)$                 | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $+$ | $0$ | $+$       |

Chọn phương án **C**

Câu 29.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f\left(x^2 - 2x - 1\right)$  đạt cực đại tại giá trị nào sau đây?

- A**  $x = 2.$
- B**  $x = 0.$
- C**  $x = -1.$
- D**  $x = 1.$



Lời giải.

Ta có  $g'(x) = (2x - 2) \cdot f'\left(x^2 - 2x - 1\right).$

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

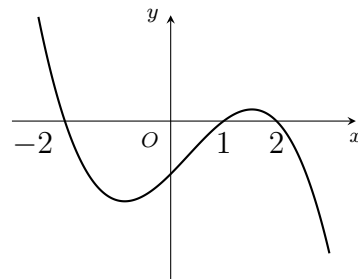
|         |           |         |     |        |     |        |           |
|---------|-----------|---------|-----|--------|-----|--------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$    | $0$ | $1$    | $2$ | $3$    | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$     | $+$ | $0$    | $+$ | $0$    | $+$       |
| $g(x)$  |           | $g(-1)$ |     | $g(1)$ |     | $f(3)$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại  $x = 1.$

Chọn phương án **D**

Câu 30.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2) = f(-2) = 0$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  có dạng như hình bên dưới. Hàm số  $y = f^2(x)$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- (A)  $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ .      (B)  $(-1; 1)$ .      (C)  $(-2; -1)$ .      (D)  $(1; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ , với  $f(2) = f(-2) = 0$ .

Ta có bảng biến thiên

|         |           |      |     |        |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|--------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ |     | $1$    |     | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$    | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  |           |      | $0$ |        |     | $0$ |           |     |
|         | $-\infty$ |      |     | $f(1)$ |     |     | $-\infty$ |     |

Ta có  $y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$ .

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{cases}$ .

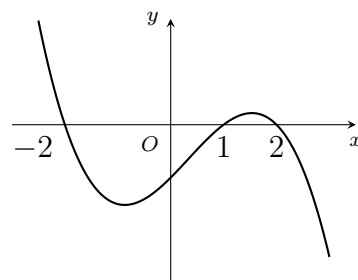
Bảng xét dấu

|              |           |         |        |        |           |
|--------------|-----------|---------|--------|--------|-----------|
| $x$          | $-\infty$ | $-2$    | $1$    | $2$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$      | $+$       | $0$     | $-$    | $0$    | $-$       |
| $f(x)$       | $-$       | $0$     | $-$    | $-$    | $-$       |
| $y = f^2(x)$ | $+\infty$ |         | $y(1)$ |        | $+\infty$ |
|              |           | $y(-2)$ |        | $y(2)$ |           |

Chọn phương án (D)

**Câu 31.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên và  $f(-2) = f(2) = 0$ . Hàm số  $g(x) = [f(3-x)]^2$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- (A)  $(-2; -1)$ .      (B)  $(1; 2)$ .      (C)  $(2; 5)$ .      (D)  $(5; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , suy ra bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  như sau

|      |           |              |     |                 |              |           |
|------|-----------|--------------|-----|-----------------|--------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$         |     | $1$             | $2$          | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$          | $0$ | $-$             | $0$          | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $\nearrow 0$ |     | $\searrow y(1)$ | $\nearrow 0$ |           |
|      |           |              |     |                 |              | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra  $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$ .

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x) = 0 \\ f(3-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2 \\ 3-x = 1 \\ 3-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$

Vì  $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Do đó  $-2f(3-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Bảng biến thiên

|            |           |     |     |     |           |
|------------|-----------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $5$ | $+\infty$ |
| $f'(3-x)$  | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |
| $-2f(3-x)$ | $+$       | $0$ | $+$ | $+$ | $0$       |
| $g'(x)$    | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |

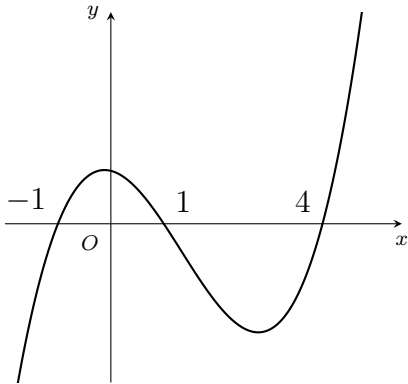
Suy ra hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 1), (2; 5)$ .

Chọn phương án **C**

Câu 32.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(|3-x|)$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- A**  $(-\infty; -1)$ .
- B**  $(-1; 2)$ .
- C**  $(2; 3)$ .
- D**  $(4; 7)$ .



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ .

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $4$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     |     |     |     |     | $+\infty$ |

Ta có  $g(x) = f(|3 - x|) = \begin{cases} f(3 - x), & \text{khi } x \leq 3 \\ f(x - 3), & \text{khi } x > 3. \end{cases}$

- Với  $x \leq 3$  khi đó  $g'(x) = -f'(3 - x)$ .

Hàm số  $g(x)$  đồng biến  $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow -f'(3 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x < -1 \\ 1 < 3 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 2. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện  $x \leq 3$ , ta được  $-1 < x < 2$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 2)$ .

- Với  $x > 3$  khi đó  $g'(x) = f'(x - 3)$ .

Hàm số  $g(x)$  đồng biến  $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow f'(x - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 3 < 1 \\ x - 3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện  $x > 3$ , ta được  $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 7. \end{cases}$

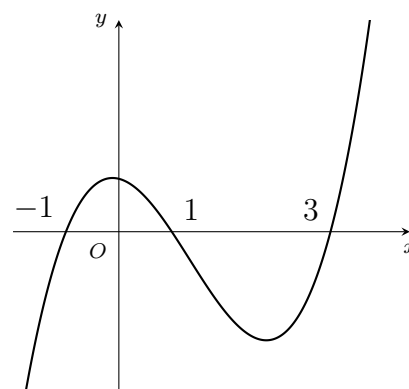
Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(3; 4)$  và  $(7; +\infty)$ .

Chọn phương án B

### Câu 33.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A 5. B 3. C 2. D 7.



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ .

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     |     |     |     |     | $+\infty$ |

Ta có  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3}) \Rightarrow g'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$ .

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 3} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2 + 4x + 2 = 0 \\ x^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \pm \sqrt{2} \\ x = -2 \pm \sqrt{10} \end{cases}$

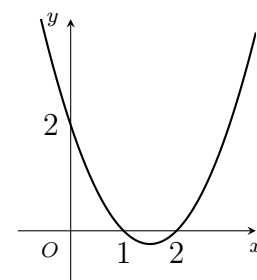
Vì  $g'(x) = 0$  có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$  có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án **(A)**

### Câu 34.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$  đồng biến trong khoảng nào sau đây

- (A)**  $(-\infty; -1)$ .      **(B)**  $(-\infty; \frac{1}{2})$ .      **(C)**  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .      **(D)**  $(-1; +\infty)$ .



### Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ .

|         |           |     |     |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ |     |     |           |     | $+\infty$ |

Ta có  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$

$\Rightarrow g'(x) = (x+1) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right) \cdot f'(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ .

Dễ thấy  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . (1).

Đặt  $u = u(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ .

Dễ thấy  $\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} > 0 \Leftrightarrow u(x) > 0$  (2).

Mặt khác  $\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 2} + \sqrt{(x+1)^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1$

$\Leftrightarrow u(x) < 1 \quad (3).$

Từ (2), (3)  $\Rightarrow 0 < u(x) < 1.$

Kết hợp đồ thị ta suy ra  $f'(u) > 0$ , với  $0 < u < 1 \quad (4).$

Từ (1) và (4)  $\Rightarrow g(x)$  ngược dấu với dấu của nhị thức  $h(x) = x + 1.$

Bảng biến thiên

|         |           |                           |           |
|---------|-----------|---------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$                      | $+\infty$ |
| $h(x)$  |           | $-$                       | $+$       |
| $g'(x)$ |           | $+$                       | $-$       |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow \quad \searrow$ | $-\infty$ |

Chọn phương án **A**

**Câu 35.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|         |           |              |               |                    |     |
|---------|-----------|--------------|---------------|--------------------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$         | $3$           | $+\infty$          |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$          | $-$           | $0$                | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow 5$ | $\searrow -3$ | $\nearrow +\infty$ |     |

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|f(1 - 3x) + 1| = m$  có nhiều nghiệm nhất?

- A**  $m > 0.$
- B**  $m < 2.$
- C**  $0 < m < 2.$
- D**  $m < 0.$

**Lời giải.**

Đặt  $g(x) = f(1 - 3x) + 1 \Rightarrow g'(x) = -3 \cdot f'(1 - 3x).$

Cho  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = -1 \\ 1 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|          |           |                |               |           |     |
|----------|-----------|----------------|---------------|-----------|-----|
| $x$      | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |     |
| $g'(x)$  | $-$       | $0$            | $+$           | $0$       | $-$ |
| $g(x)$   | $+\infty$ | $-2$           | $6$           | $-\infty$ |     |
| $ g(x) $ | $+\infty$ | $2$            | $6$           | $+\infty$ |     |

Để phương trình  $|f(1 - 3x) + 1| = m$  có nhiều nghiệm nhất  $\Leftrightarrow$  đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị  $y = |g(x)|$  tại nhiều điểm nhất  $\Leftrightarrow 0 < m < 2$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ.

| $x$     | $-\infty$ | $x_0$     | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $+\infty$ | 3 | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình  $3|f(2x - 1)| - 10 = 0$  là

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)** 4.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2x - 1$ , phương trình đã cho trở thành  $|f(t)| = \frac{10}{3}$ .

Với mỗi nghiệm của  $t$  thì có một nghiệm  $x = \frac{t + 1}{2}$  nên số nghiệm của phương trình  $|f(t)| = \frac{10}{3}$  bằng số nghiệm của  $3|f(2x - 1)| - 10 = 0$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = |f(x)|$  là

| $x$      | $-\infty$ | $x_0$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------|---|---|-----------|
| $ f(x) $ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |

Suy ra phương trình  $|f(t)| = \frac{10}{3}$  có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình  $3|f(2x - 1)| - 10 = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

**Câu 37.**

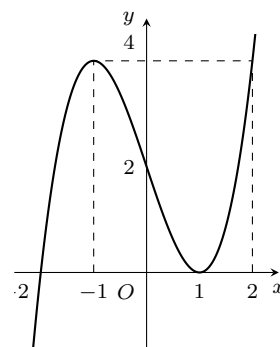
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $g(x) = f^3(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 5.



**Lời giải.**

Ta có  $g(x) = f^3(x) \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot f'(x) \cdot f^2(x)$ .

Vì  $f^2(x) > 0$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$  nên  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Từ đó suy ra  $g(x) = f^3(x)$  có hai điểm cực trị.

Chọn phương án **B**



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. D  | 3. C  | 4. A  | 5. C  | 6. C  | 7. D  | 8. B  | 9. C  | 10. C |
| 11. B | 12. B | 13. B | 14. B | 15. B | 16. C | 17. B | 18. C | 19. A | 20. C |
| 21. C | 22. A | 23. A | 24. A | 25. A | 26. C | 27. D | 28. C | 29. D | 30. D |
| 31. C | 32. B | 33. A | 34. A | 35. C | 36. C | 37. B |       |       |       |

## DẠNG 47. ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- 1. Định lý:** Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên  $(a; b)$  thì
- $\forall u; v \in (a; b): f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ .
  - Phương trình  $f(x) = k (k = \text{const})$  có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng  $(a; b)$ .
- 2. Định lý:** Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên  $(a; b)$ , đồng thời  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0$  thì phương trình  $f(x) = k (k = \text{const})$  có duy nhất nghiệm trên  $(a; b)$ .

### 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2020$  và  $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$ ?

(A) 2019.

(B) 6.

(C) 2020.

(D) 4.

**Lời giải.**

#### Phân tích hướng dẫn giải

#### 1. Phương pháp

Tìm hàm đặc trưng của bài toán, đưa phương trình về dạng  $f(u) = f(v)$ .

#### 2. HƯỚNG GIẢI:

- B1: Đưa phương trình đã cho về dạng  $f(u) = f(v)$ .
- B2: Xét hàm số  $y = f(t)$  trên miền  $D$ .
  - \* Tính  $y$  và xét dấu  $y$ .
  - \* Kết luận tính đơn điệu của hàm số  $y = f(t)$  trên  $D$ .
- B3: Tìm mối liên hệ giữa  $x; y$  rồi tìm các cặp số  $(x; y)$  rồi kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

#### LỜI GIẢI CHI TIẾT

ĐK:  $x > -1$ .

Ta có

$$\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow 3 \log_3(3x + 3) + 3^{\log_3(3x + 3)} = 3(2y + 1) + 3^{2y + 1}. \quad (*)$$

Xét hàm số  $f(t) = 3t + 3^t$  trên  $\mathbb{R}$ , vì  $f'(t) = 3 + 3^t \cdot \ln 3 > 0, \forall t > 0$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Từ đó

$$(*) \Leftrightarrow f(\log_3(3x + 3)) = f(2y + 1) \Leftrightarrow \log_3(3x + 3) = 2y + 1.$$

Mặt khác  $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow \log_3(3x + 3) \in [1; \log_3(6063)] \Rightarrow 2y + 1 \in [1; \log_3(6063)]$ .

$$\begin{cases} 1 \leq 2y + 1 \leq \log_3(6063) \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 3. \text{ Vậy có 4 cặp } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

Chọn phương án **(D)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2019; 2019]$  để phương trình:

$$2019^x + \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{mx - 2m - 1}{x - 2} = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?}$$

**(A)** 4038.

**(B)** 2019.

**(C)** 2017.

**(D)** 4039.

**Lời giải.**

TXĐ:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} & 2019^x + \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{mx - 2m - 1}{x - 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2019^x + \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{m(x - 2) - 1}{x - 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & 2019^x + \frac{2x - 1}{x + 1} - \frac{1}{x - 2} = -m. \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt  $f(x) = 2019^x + \frac{2x - 1}{x + 1} - \frac{1}{x - 2}$ . Khi đó  $f'(x) = 2019^x \ln 2019 + \frac{3}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x - 2)^2} > 0 \forall x \in \mathcal{D}$ .

Ta có bảng biến thiên

| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $3$       | $+\infty$ |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $y'$ | +         |           | +         | +         |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình  $(*)$  có 3 nghiệm thực phân biệt thì  $-m > 2 \Rightarrow m < -2$ .

Mà  $m \in [-2019; 2019]$  và  $m \in \mathbb{Z}$  nên có 2017 giá trị  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $0 \leq y \leq 2020$  và  $\log_3 \left( \frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x$ ?

**(A)** 2019.

**(B)** 11.

**(C)** 2020.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có: 
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có: PT  $\Leftrightarrow \log_3(2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y(*)$ .

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t$  trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$  do đó hàm số  $f(t) = \log_3 t + t$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

(\*) có dạng  $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$ .

Vì  $0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2(2021)$ .

$\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ . Vậy có 11 cặp  $(x; y)$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để tồn tại cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn

$e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$ , đồng thời thỏa mãn  $\log_3^2(3x + 2y - 1) - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$ ?

**(A)** 6.

**(B)** 5.

**(C)** 8.

**(D)** 7.

**Lời giải.**

Ta có

$$e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y} + (3x + 5y) = e^{x+3y+1} + (x + 3y + 1). \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = e^t + t$  trên  $\mathbb{R}$ . Ta có  $f(t) = e^t + 1 > 0$  nên hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó  $(1) \Leftrightarrow f(3x + 5y) = f(x + 3y + 1) \Leftrightarrow 3x + 5y = x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x$ .

Thế vào phương trình còn lại ta được  $\log_3^2 x - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$ .  $(2)$

Đặt  $t = \log_3 x$ . Số nghiệm của phương trình  $(2)$  chính là số nghiệm của phương trình.

$$t^2 - (m + 6)t + m^2 + 9 = 0. \quad (3)$$

Phương trình  $(3)$  có nghiệm khi  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$ .

Do đó có 5 số nguyên  $m$  thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 4.** Có bao nhiêu số nguyên của  $m$  để phương trình  $\log_2(2x + m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$  có hai nghiệm thực phân biệt?

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 4.

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{m}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \log_2(2x + m) - 2\log_2 x = x^2 - 2(x + 2m) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x + m) + 2(x + 2m) + 1 = \log_2 x^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(2x + m) + 2(x + 2m) = \log_2 x^2 + x^2$$

Xét  $f(u) = \log_2 u + u$ ,  $(u > 0)$ .

$f(u) = \frac{1}{u \ln 2} + 1 > 0$ , do đó hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow f(2(2x+m)) = f(x^2) \\ &\Leftrightarrow 2(2x+m) = x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 2m\end{aligned}$$

Xét hàm số  $g(x) = x^2 - 4x, (x > 0)$

|         |     |      |           |
|---------|-----|------|-----------|
| $x$     | 0   | 2    | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$ | 0    | $+$       |
| $g(x)$  | 0   | $-4$ | $+\infty$ |

Phương trình có 2 nghiệm dương khi  $-4 < 2m < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$  suy ra có 1 giá trị nguyên.

Chọn phương án **C**

**Câu 5.** Biết  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_7 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$  và  $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$  với  $a, b$  là hai số nguyên dương. Tính  $a + b$ .

**(A)**  $a + b = 13$ .

**(B)**  $a + b = 11$ .

**(C)**  $a + b = 16$ .

**(D)**  $a + b = 14$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ .

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log_7 (4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7 (2x) + 2x.$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_7 t + t$  có  $f(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$  nên là hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó ta có } 4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Khi đó

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5}) \text{ hoặc } x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5}).$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}. \text{ Do đó } a = 9; b = 5 \text{ và } a + b = 9 + 5 = 14.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 6.** Biết phương trình  $\log_5 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = 2 \log_3 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$  có một nghiệm dạng  $x = a + b\sqrt{2}$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $2a + b$ .

**(A)** 3.

**(B)** 8.

**(C)** 4.

**(D)** 5.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_5 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = 2 \log_3 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = 2 \log_3 \left( \frac{x - 1}{2\sqrt{x}} \right) (1).$$

DKXD:  $x > 1$ .

$$(1) \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x} + 1) + 2\log_3 2\sqrt{x} = \log_5 x + 2\log_3 (x - 1) (*).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_5 t + 2\log_3 (t - 1)$ , với  $t > 1$ .

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 5} + \frac{2}{(t - 1) \ln 3} > 0 \text{ với mọi } t > 1, \text{ suy ra } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty).$$

Từ (\*) ta có  $f(2\sqrt{x} + 1) = f(x)$  nên suy ra  $2\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2}$  (do  $x > 1$ ).

$$\text{Suy ra } x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3; b = 2 \Rightarrow 2a + b = 8.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 7.** Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $3^{x-3} + \sqrt[3]{m-3x} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$  có 3 nghiệm phân biệt.

**(A)** 45.

**(B)** 34.

**(C)** 27.

**(D)** 38.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} 3^{x-3} + \sqrt[3]{m-3x} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} &= 3^x + 1 \\ \Leftrightarrow 3^{x-3} + \sqrt[3]{m-3x} + [(x-3)^3 + 27 + m - 3x] \cdot 3^{x-3} &= 3^x + 1. \\ \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 &= 3^3 + 3^{3-x}(1) \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27 \cdot 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3.$$

Đặt  $a = 3 - x; b = \sqrt[3]{m - 3x}$ , phương trình (1) trở thành

$$3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27 \cdot 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3.$$

Xét hàm số  $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 3t^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

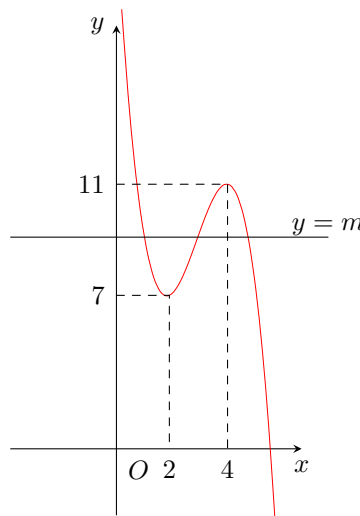
$$(1) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{m - 3x}$$

$$\Leftrightarrow m = (3 - x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$$

$$g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Đồ thị:



Dựa vào đồ thị ta thấy điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt là  $7 < m < 11$  hay  $m \in \{8; 9; 10\}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 8.** Tìm các giá trị  $m$  để phương trình  $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$  có nghiệm.

(A)  $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$ .

(B)  $-5 \leq m \leq 5$ .

(C)  $5 - \sqrt{6} \leq |m| \leq 5 + \sqrt{6}$ .

(D)  $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} &= \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5) \\ \Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} &= \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)} \\ \Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) &= 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5). \end{aligned}$$

Xét  $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$ , vì  $f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(5; +\infty)$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) &= f(|m| + 5) \\ \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 &= |m| + 5 \\ \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 &= |m|. \end{aligned}$$

Mà  $-\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$  nên để phương trình có nghiệm ta phải có  $5 - \sqrt{6} \leq |m| \leq 5 + \sqrt{6}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 9.** Số nghiệm thực của phương trình  $6^x = 3 \log_6(5x + 1) + 2x + 1$  là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x > -\frac{1}{5}$ .

PT:  $\Leftrightarrow 6^x + 3x = 3 \log_6(5x + 1) + 5x + 1 \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^{\log_6(5x + 1)} + 3 \log_6(5x + 1)(1)$ .

Xét hàm số  $f(t) = 6^t + 3t$ , vì  $f'(t) = 6^t \cdot \ln 6 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  nên  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó  $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(\log_6(5x + 1)) \Leftrightarrow x = \log_6(5x + 1) \Leftrightarrow \log_6(5x + 1) - x = 0$ .

Xét hàm số  $h(x) = \log_6(5x + 1) - x$  trên  $\left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ , ta có

$$h(x) = \frac{5}{(5x + 1) \ln 6} - 1.$$

$$h'(x) = -\frac{25}{(5x + 1)^2 \ln 6} < 0, \forall x > -\frac{1}{5} \text{ và } \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^+} h(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1.$$

Bảng biến thiên:

|         |                |          |           |
|---------|----------------|----------|-----------|
| $x$     | $-\frac{1}{5}$ | $x_0$    | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | +              | 0        | -         |
| $h(x)$  | $-\infty$      | $h(x_0)$ | $-1$      |

Từ BBT suy ra phương trình  $h(x) = 0$  có nhiều nhất 2 nghiệm thuộc khoảng  $\left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ .

Mà  $h(0) = 0, h(1) = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm  $x = 0, x = 1$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Tính tổng  $S$  tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0.$$

**(A)**  $S = 1$ .

**(B)**  $S = 2$ .

**(C)**  $S = -1$ .

**(D)**  $S = 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > -\frac{1}{3}$ .

Phương trình tương đương.

$$\ln(5^x + 3^x) - \ln(6x + 2) + 5(5^x + 3^x) - 5(6x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2). \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = \ln t + 5t, t > 0$ . Có  $f(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$  nên  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Từ (1) suy ra  $f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0$ .

Xét  $g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2, g(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6$ .

$$g'(x) = 5^x(\ln 5)^2 + 3^x(\ln 3)^2 > 0, \forall x > -\frac{1}{3}.$$

Nên  $g'(x) = 0$  có không quá 1 nghiệm suy ra  $g(x) = 0$  có không quá 2 nghiệm trên  $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ . Mà

$g(0) = g(1) = 0$ . Vậy phương trình có tập nghiệm là  $\{0, 1\}$ . Do đó  $S = 1$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 11.** Số nghiệm của phương trình  $\ln \frac{\sqrt{x^2 + 80}}{3^x} = 2 \cdot 3^{x+1} - 2\sqrt{x^2 + 80} + \ln 3$  là

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 0.

**Lời giải.**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \ln \sqrt{x^2 + 80} + 2\sqrt{x^2 + 80} = \ln 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+1} \quad (1).$$

Xét hàm số  $f(t) = \ln t + 2t, \forall t > 0$ ; Ta có:  $f'(t) = \frac{1}{t} + 2 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$  Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Từ (1) suy ra  $f(\sqrt{x^2 + 80}) = f(3^{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 80} = 3^{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 80 = 9^{x+1} \Leftrightarrow 9^{x+1} - x^2 - 80 = 0$ .

Xét hàm số  $g(x) = 9^{x+1} - x^2 - 80$  trên  $\mathbb{R}$ . Ta có:



$$g(x) = 2 \cdot 9^{x+1} \ln 3 - 2x$$

$$g'(x) = 4 \cdot 9^{x+1} (\ln 3)^2 - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -\log_9 (2 \ln^2 3) - 1 \Rightarrow g(x_0) = g(-\log_9 (2 \ln^2 3) - 1) \approx 3,7 > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

|          |           |                         |           |
|----------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$      | 6         | $-\log_9(2\ln^2 3) - 1$ | $+\infty$ |
| $g''(x)$ |           | - 0 +                   |           |
| $g'(x)$  | $+\infty$ | $g'(x_0)$               | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Rightarrow$  phương trình  $g(x) = 0$  có nhiều nhất một nghiệm.

$$\text{Mà } g(1) = 0.$$

Do đó phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho phương trình  $2^x + m = \log_2(x - m)$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in (-18; 18)$  để phương trình đã cho có hai nghiệm?

**(A)** 20.

**(B)** 17.

**(C)** 9.

**(D)** 21.

**Lời giải.**

Điều kiện  $x > m$ .

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2^x + x = x - m + \log_2(x - m) \Leftrightarrow 2^x + x = 2^{\log_2(x-m)} + \log_2(x - m)(1).$$

Xét hàm số  $f(t) = 2^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$ ; Ta có:  $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Từ (1) suy ra } f(x) = f(\log_2(x - m)) \Leftrightarrow x = \log_2(x - m) \Leftrightarrow x - m = 2^x \Leftrightarrow m = x - 2^x.$$

Xét hàm số  $g(x) = x - 2^x$  trên  $(m; +\infty)$ .

Ta có:

$$g'(x) = 1 - 2^x \ln 2 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e) \Rightarrow g(\log_2(\log_2 e)) = \log_2(\log_2 e) - \log_2 e$$

$$\lim_{x \rightarrow m^+} g(x) = m - 2^m; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Bảng biến thiên:

|         |           |                               |           |
|---------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$     | $m$       | $\log_2(\log_2 e)$            | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | + 0 -                         |           |
| $g(x)$  | $m - 2^m$ | $\log_2(\log_2 e) - \log_2 e$ | $-\infty$ |

Do đó. Phương trình đã cho có 2 nghiệm khi:

$$m - 2^m < m < \log_2(\log_2 e) - \log_2 e \Leftrightarrow m < \log_2(\log_2 e) - \log_2 e \approx -0,91$$

Vì  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-18; 18) \end{cases}$  nên  $m \in \{-17; -16; -15; \dots; -1\}$ .

Vậy có 17 giá trị của  $m$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 13.** Cho phương trình.

$$2^{-|m^3|-3m^2+1} \cdot \log_{81} (|x^3| - 3x^2 + 1 + 2) + 2^{-|x^3|-3x^2+1} \cdot \log_3 \left( \frac{1}{||m^3| - 3m^2 + 1| + 2} \right) = 0$$

Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị  $m$  nguyên để phương trình đã cho có 6 nghiệm hoặc 7 nghiệm hoặc 8 nghiệm phân biệt. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập  $S$ .

**(A)** 20.

**(B)** 19.

**(C)** 14.

**(D)** 28.

**Lời giải.**

Ta có

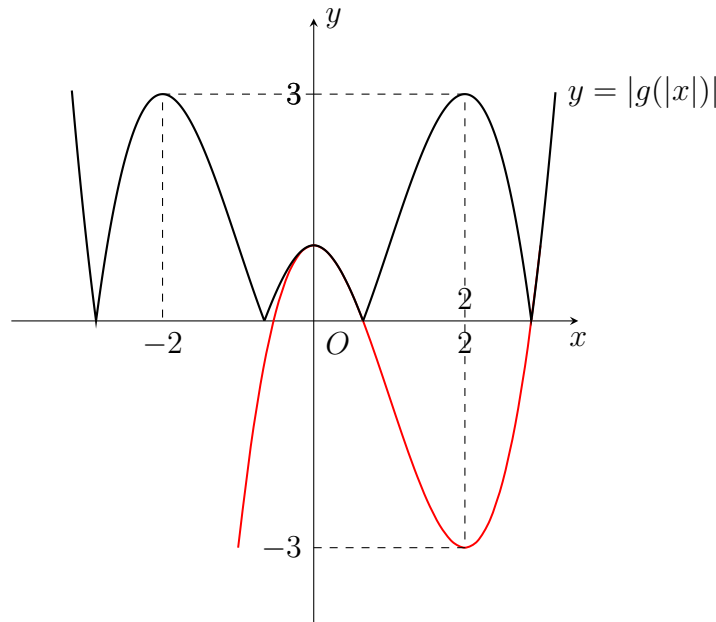
$$\begin{aligned} & 2^{-|m^3|-3m^2+1} \cdot \log_{81} (|x^3| - 3x^2 + 1 + 2) + 2^{-|x^3|-3x^2+1} \cdot \log_3 \left( \frac{1}{||m^3| - 3m^2 + 1| + 2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2^{|x^3|-3x^2+1} \cdot \log_3 (|x^3| - 3x^2 + 1 + 2) = 2^{|m^3|-3m^2+1} \cdot \log_3 (||m^3| - 3m^2 + 1| + 2) \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = 2^t \cdot \log_3 t$  với  $t \geq 2$ ; Ta có  $f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_3 t + 2^t \cdot \frac{1}{t \ln 3} > 0 \forall t \geq 2$ .

Suy ra hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

Do đó phương trình tương đương với  $||m^3| - 3m^2 + 1| = |x^3| - 3x^2 + 1$  (1).

Vẽ đồ thị hàm số  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  từ đó suy ra đồ thị  $|g(x)|$  và đồ thị của  $|g(|x|)|$  như hình vẽ.



Từ đồ thị suy ra (1) có 6, 7, 8 nghiệm  $\Leftrightarrow 0 < |g(|m|)| < 3$ .

Từ đồ thị suy ra các giá trị nguyên của  $m$  là  $-3, -1, 0, 1, 3$ .

Vậy  $S = 20$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 14.** Cho phương trình  $2^{x^2} \log_2 (x^2 + 2) = 4^{|x+a|} [\log_2 (2|x+a|) + 2]$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị  $a$  thuộc đoạn  $[0; 2020]$  và chia hết cho 3 để phương trình có hai nghiệm. Hãy tính tổng các phần tử của  $S$ .

(A) 0.

(B) 2041210.

(C) 680403.

(D) 680430.

**Lời giải.**

Phương trình tương đương.

$$\begin{aligned} 2^{x^2} \log_2 (x^2 + 2) &= 2^{2|x+a|} [\log_2 (2|x+a|) + 2] \\ \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{x^2} \log_2 (x^2 + 2) &= 4 \cdot 2^{2|x+a|} [\log_2 (2|x+a|) + 2] \\ \Leftrightarrow 2^{x^2+2} \log_2 (x^2 + 2) &= 2^{2|x+a|+2} [\log_2 (2|x+a|) + 2] (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = 2^t \log t, t \geq 2$ . Có  $f(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2 t + \frac{2^t}{t \ln 2} > 0, \forall t \geq 2$ , nên  $f(t)$  đồng biến  $[2; +\infty)$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 + 2) = f(2|x+a| + 2) \\ x^2 + 2 \geq 2; 2|x+a| + 2 \geq 2 \end{cases} &\Leftrightarrow x^2 = 2|x+a| (1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(x+a) \\ x^2 = -2(x+a) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2a = 0 (2) \\ x^2 + 2x + 2a = 0 (3). \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2)  $\Delta_{(2)} = 1 + 2a$ , phương trình (3) có  $\Delta_{(3)} = 1 - 2a$ .

Vì  $\Delta_{(2)} + \Delta_{(3)} = 2 > 0$  nên ít nhất một trong hai phương trình (2), (3) luôn có hai nghiệm phân biệt. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, ta xét các trường hợp sau:

\* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt:  $\Delta_{(2)} > 0 \Leftrightarrow 1 + 2a > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$ . Khi đó  $\Delta_{(3)} < 0$  nên (3) vô nghiệm. Trường hợp này thỏa mãn điều kiện bài toán.

\* TH1: (3) có hai nghiệm phân biệt:  $\Delta_{(3)} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$ . Khi đó  $\Delta_{(2)} < 0$  nên (2) vô nghiệm. Trường hợp này cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

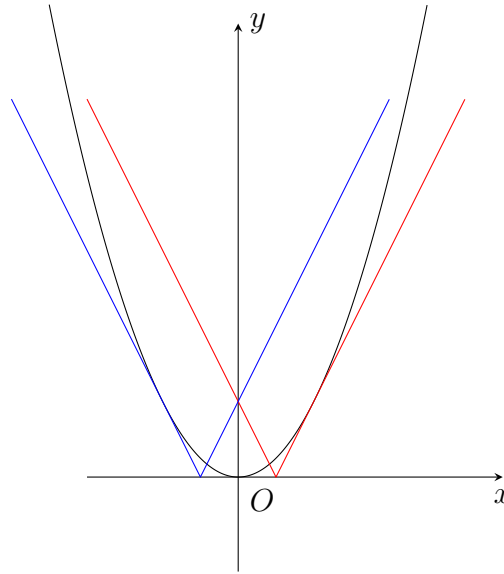
Vì  $a \in [0; 2020]$  và chia hết cho 3 nên  $a \in S = \{3; 6; 9; 12; \dots, 2019\}$ .

Tổng các phần tử của  $S$  là  $3 + 6 + 9 + \dots + 2019 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 673$ .  
 $= 3(1 + 2 + 3 + \dots + 673) = 3 \cdot \frac{673 \cdot 674}{2} = 680403$ .

**BỔ SUNG CÁCH 2.**

Xét phương trình  $x^2 = 2|x+a| (*)$ .

Vẽ đồ thị hàm số  $y = x^2$  (1);  $y = 2|x+a|$  (2) trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Xét 2 vị trí nhánh trái và phải của đồ thị hàm số (2) tiếp xúc với (1) khi đó dễ dàng tìm được  $a = \frac{-1}{2}; a = \frac{1}{2}$  ứng với đồ thị (2); (3) (hình vẽ).

Từ đồ thị nhận xét:

Phương trình (\*) đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Vì  $a \in [0; 2020]$  và chia hết cho 3 nên  $a \in S = \{3; 6; 9; 12; \dots, 2019\}$ .

Tổng các phần tử của  $S$  là  $3 + 6 + 9 + \dots + 2019 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 673$ .  
 $= 3(1 + 2 + 3 + \dots + 673) = 3 \cdot \frac{673 \cdot 674}{2} = 680403$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 15.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $a$  để phương trình.

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-a| + 2) = 0.$$

có 3 nghiệm thực phân biệt?

**(A)** 0.

**(B)** 2.

**(C)** 1.

**(D)** 3.

**Lời giải.**

PT đã cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{2|x-a|}} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3) + \frac{1}{2^{x^2-2x}} \log_{2^{-1}}(2|x-a| + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{2|x-a|}} \log_2(x^2 - 2x + 3) = \frac{1}{2^{x^2-2x}} \log_2(2|x-a| + 2) \\ &\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|} \log_2(2|x-a| + 2) \\ &\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|+2} \log_2(2|x-a| + 2)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t, \forall t \geq 2$ ; Ta có:  $f'(t) = 2^t \ln t + \frac{2^t}{t \ln 2} > 0, \forall t \geq 2 \Rightarrow$  Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

Từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} f(x^2 - 2x + 3) &= f(2|x - a| + 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x - a| + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x - a| (*) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x - a) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 (2) \\ x^2 = 2a - 1 (3). \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (\*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

\* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ \Delta_{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a > 0 \\ 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

\* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta_{(2)} = 0 \\ \Delta_{(3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 2a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

\* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ  $\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases}$  có nghiệm.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 1. \end{cases}$$

Khi  $a = 1$  ta có: (2) trở thành  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

(3) trở thành  $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

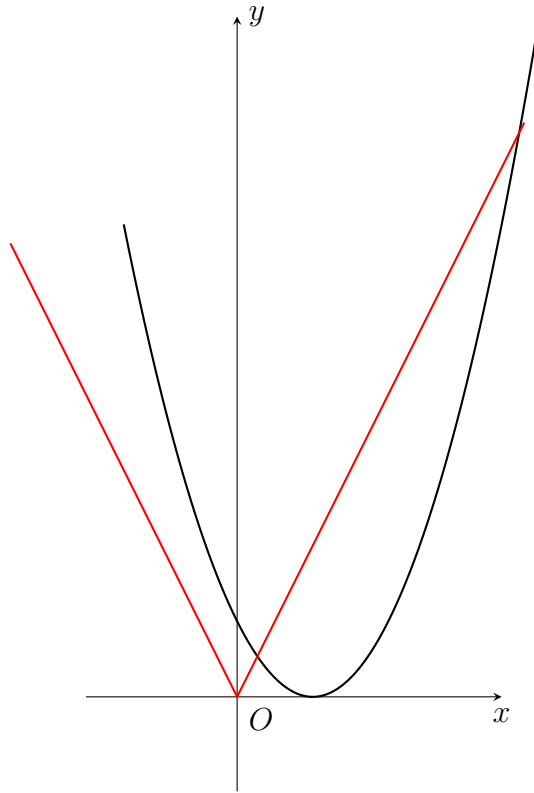
Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy  $a \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$ .

**BỔ SUNG CÁCH 2.**

Xét phương trình  $x^2 - 2x + 1 = 2|x - a| (*)$ .

Vẽ đồ thị hàm số  $y = x^2 - 2x + 1 (1); y = 2|x - a| (2)$  trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Nhận xét (\*) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(a - x) \text{ có nghiệm kép} \\ x^2 - 2x + 1 = 2(x - a) \text{ có nghiệm kép} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases} \text{ Vậy có 3 giá trị của } a \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 16.** Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số  $a$  để phương trình  $3^{x^2-2x+1-2|x-a|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-a|+2)$  có đúng ba nghiệm phân biệt.

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 0.

**Lời giải.**

$$\text{PT đã cho tương đương với } 3^{x^2-2x+3-(2|x-a|+2)} = \frac{\ln(2|x-a|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-a|+2} \cdot \ln(2|x-a|+2)(1).$$

Xét hàm số  $f(t) = 3^t \cdot \ln t, \forall t \geq 2$ ; Ta có:  $f'(t) = 3^t \ln 3 \cdot \ln t + \frac{3^t}{t} > 0, \forall t \geq 2 \Rightarrow$  Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

$$\text{Từ (1) suy ra } f(x^2-2x+3) = f(2|x-a|+2) \Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-a|+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 2|x-a| (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1 = 2(x-a) \\ x^2-2x+1 = -2(x-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2a+1 = 0(2) \\ x^2 = 2a-1(3). \end{cases}$$

Phương trình (\*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

\* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ \Delta_{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a > 0 \\ 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

\* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta_{(2)} = 0 \\ \Delta_{(3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 2a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

\* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ  $\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases}$  có nghiệm.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 1. \end{cases}$$

Khi  $a = 1$  ta có: (2) trở thành  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

(3) trở thành  $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy  $a \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 17.** Tìm số giá trị nguyên của  $m$  thuộc  $[-20; 20]$  để phương trình

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

có nghiệm.

**(A)** 12.

**(B)** 23.

**(C)** 25.

**(D)** 10.

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$ .

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$ ,  $t \in (0; +\infty)$ .

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$  nên hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x \\
 &\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2 + 4} - x) = (\sqrt{x^2 + 4} - x) - 8x \\
 &\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \\
 &\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{4} \\
 &\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \\
 &\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 = \frac{1 - 2m}{2}
 \end{aligned}$$

Xét hàm số  $g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} + x^2$  với  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

Ta có  $g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\sqrt{x^2 + 4} + x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của  $g(x)$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |           |
| $g(x)$  | $-2$      | $+\infty$ |

Để phương trình có nghiệm thì  $\frac{1 - 2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$ .

Do  $m$  nguyên thuộc  $[-20; 20]$  nên số giá trị  $m$  là 23.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thỏa mãn  $4 + 9 \cdot 3^{x^2 - 2y} = (4 + 9^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$ . Giá trị nhỏ

nhất của biểu thức  $P = \frac{x + 2y + 18}{x}$  là

**(A)** 9.

**(B)**  $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ .

**(C)**  $1 + 9\sqrt{2}$ .

**(D)** 17.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 4 + 9 \cdot 3^{x^2 - 2y} &= (4 + 9^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2} \\
 \Leftrightarrow 4 + 3^{x^2 - 2y + 2} &= [4 + 3^{2(x^2 - 2y)}] \cdot 7^{2y - x^2 + 2} \\
 \Leftrightarrow \frac{4 + 3^{x^2 - 2y + 2}}{7^{x^2 - 2y + 2}} &= \frac{4 + 3^{2(x^2 - 2y)}}{7^{2(x^2 - 2y)}}. \quad (*)
 \end{aligned}$$



Xét hàm số  $f(t) = \frac{4+3^t}{7^t}$  trên  $\mathbb{R}$ . Ta có  $f'(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow f(x^2 - 2y + 2) = f[2(x^2 - 2y)] \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2y + 2 = 2(x^2 - 2y) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2 \end{aligned}$$

Từ đó  $P = \frac{x^2 + x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 1 \Leftrightarrow P \geq 9$ .

Dấu xảy ra khi và chỉ khi  $x = 4$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 19.** Cho các số dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_5 \left( \frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x + 2y \leq 4$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$  bằng

**(A)**  $\frac{31\sqrt{6}}{4}$ .

**(B)**  $11\sqrt{3}$ .

**(C)**  $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ .

**(D)** 19.

**Lời giải.**

ĐK:  $\begin{cases} \frac{x+y-1}{2x+3y} > 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y > 1$ .

Ta có:

$$\log_5 \left( \frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x + 2y \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_5(x+y-1) + 1) + 5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y) + 2x+3y$$

$$\Leftrightarrow \log_5[5(x+y-1)] + 5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y) + 2x+3y. \quad (*)$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_5(t) + t$  trên  $(0; +\infty)$ , vì  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

$$(*) \Leftrightarrow 5(x+y-1) \leq 2x+3y \Leftrightarrow 3x+2y \leq 5.$$

Mặt khác, ta có

$$A = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \left(9x + \frac{4}{x}\right) + \left(4y + \frac{9}{y}\right) - (3x + 2y) \geq 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 5 = 19.$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{4}{x} \\ 4y = \frac{9}{y} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy GTNN của  $A$  là 19.

Chọn phương án **(D)**

**Câu 20.** Cho hai số thực  $x, y$  lớn hơn 1 và thỏa mãn  $y^x \cdot (e^x)^{e^y} \geq x^y \cdot (e^y)^{e^x}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$ .

**(A)**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**(B)**  $2\sqrt{2}$ .

**(C)**  $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ .

**(D)**  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Với  $x, y > 1$ , ta có

$$\begin{aligned} y^x \cdot (e^x)^{e^y} &\geq x^y \cdot (e^y)^{e^x} \\ \Leftrightarrow \ln(y^x \cdot (e^x)^{e^y}) &\geq \ln(x^y \cdot (e^y)^{e^x}) \\ \Leftrightarrow x \ln y + x e^y &\geq y \ln x + y e^x \\ \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} + \frac{e^y}{y} &\geq \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số  $g(t) = te^t - e^t + 1 - \ln t$  trên  $[1; +\infty)$ , có  $g'(t) = te^t - \frac{1}{t} > 0, \forall t \geq 1$ .

Hàm số  $g(t)$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$  nên  $g(t) > g(1) = 1 > 0, \forall t > 1$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{e^t}{t}$  trên  $(1; +\infty)$ , có  $f(t) = \frac{g(t)}{t^2} > 0, \forall t > 1$ , nên  $f(t)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

Với  $x, y > 1$  thì  $(1) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow y \geq x$ .

Đặt  $u = \log_x y$ . Do  $y \geq x > 1$  nên  $u \geq 1$ . Ta có  $P = h(u) = \frac{1+u}{2} + \frac{1}{u}$ . Nhận thấy  $h(u) = \frac{u^2 - 2}{2u^2}$ , nên  $h(u) = 0$  khi  $u = \sqrt{2}$ ,  $h(u) < 0$  khi  $1 \leq u < \sqrt{2}$ ,  $h(u) > 0$  khi  $u > \sqrt{2}$ . Dẫn tới  $P = h(u) \geq h(\sqrt{2}) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ ,  $\forall u \geq 1$ , đẳng thức xảy ra khi  $u = \sqrt{2}$ .

Vậy  $\min P = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ , đạt được khi  $y = x^{\sqrt{2}}$  và  $x > 1$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 21.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $0 \leq x, y \leq 1$  trong đó  $x, y$  không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và  $\log_3 \left( \frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1) \cdot (y+1) - 2 = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$  với  $P = 2x + y$

**(A)** 2.

**(B)** 1.

**(C)**  $\frac{1}{2}$ .

**(D)** 0.

**Lời giải.**

Từ điều kiện đề bài và  $\frac{x+y}{1-xy} > 0; 1-xy \neq 0 \Rightarrow x+y > 0; 1-xy > 0$  khi đó

$$\log_3 \left( \frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1) \cdot (y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy)(1).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t (t > 0)$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$  là hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Vậy phương trình (1)} \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow P = 2x + \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 2x + \frac{1-x}{1+x} \text{ với } x \in [0; 1] \text{ có } f(x) = 2 + \frac{-2}{(x+1)^2} \text{ cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$f(0) = 1; f(1) = 2 \Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = 1.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 22.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\ln \left( \frac{1-2x}{x+y} \right) = 3x + y - 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$

$$\text{của } P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

**(A)**  $P_{\min} = 8$ .

**(B)**  $P_{\min} = 4$ .

**(C)**  $P_{\min} = 2$ .

**(D)**  $P_{\min} = 16$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

Từ giả thiết  $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x+y-1 \Leftrightarrow \ln(1-2x) + (1-2x) = \ln(x+y) + (x+y)(1)$ .

Xét hàm số  $f(t) = \ln t + t$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$  do đó hàm  $f(t)$  đơn điệu.

Vậy  $(1) \Leftrightarrow 1-2x = x+y \Leftrightarrow 3x+y=1(2)$ .

Có  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$ .

Đặt  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$ , ta có  $g(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2}$  suy ra  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ .

Do đó  $\min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(x) = 8$ . Vậy  $P_{\min} = 8$ .

Bổ sung: có thể đánh giá  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x} \geq \frac{4}{x + \frac{1}{2} - x} = \frac{1}{8}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 23.** Cho hai số thực  $x, y$  không âm thỏa mãn  $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$  là

**(A)**  $-\frac{1}{2}$ .

**(B)** 1.

**(C)**  $\frac{1}{2}$ .

**(D)** -1.

**Lời giải.**

$x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_2 (2(x+1)^2) = \log_2 (2y+1) + (2y+1)$ .

Xét hàm số  $f(t) = t + \log_2 t, (t > 0); f'(t) = 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$ .

Suy ra  $2(x+1)^2 = 2y+1 \Rightarrow 2y = 2(x+1)^2 - 1$ .

$P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1 = e^{2x-1} + 4x^2 - 2(x+1)^2 + 1 + 1 = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x = g(x)$ .

$g(x) = 2e^{2x-1} + 4x - 4$  là hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$  nên  $g(x) = 0$  có tối đa 1 nghiệm, nhằm được nghiệm  $x = \frac{1}{2}$  nên nghiệm đó là duy nhất.

|         |               |                |           |
|---------|---------------|----------------|-----------|
| $x$     | 0             | $\frac{1}{2}$  | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -             | 0              | +         |
| $g(x)$  | $\frac{1}{e}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |

Vậy  $\min P = -\frac{1}{2}$  tại  $x = \frac{1}{2}$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 24.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thay đổi thỏa mãn đẳng thức  $(xy-1) \cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y) \cdot 2^{x^2+y}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $y_{\min}$  của  $y$ .

- (A)  $y_{\min} = 3$ . (B)  $y_{\min} = 2$ . (C)  $y_{\min} = 1$ . (D)  $y_{\min} = \sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(xy - 1)2^{2xy-1} = (x^2 + y)2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy - 1 - 1)2^{2xy-1} = (x^2 + y)2^{x^2+y+1}(1)$ .

Xét hàm  $f(t) = (t - 1) \cdot 2^t$  với  $t \geq 1$ .

Khi đó  $f'(t) = 2^t + (t - 1) \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0$  với  $\forall t \geq 1$ .

Từ (1)  $\Leftrightarrow 2xy - 1 = x^2 + y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$ .

$$y = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

Loại  $x = -1$  vì điều kiện của  $x$  nên  $f(2) = 2$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 25.** Cho  $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ x, y \geq 1 \end{cases}$  sao cho  $\ln\left(2 + \frac{x}{y}\right) + x^3 - \ln 3 = 19y^3 - 6xy(x + 2y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

$m$  của biểu thức  $T = x + \frac{1}{x + 3y}$ .

- (A)  $m = 1 + \sqrt{3}$ . (B)  $m = 2$ . (C)  $m = \frac{5}{4}$ . (D)  $m = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\ln\left(2 + \frac{x}{y}\right) + x^3 - \ln 3 = 19y^3 - 6xy(x + 2y) \Leftrightarrow \ln(2y + x) + (2y + x)^3 = \ln(3y) + (3y)^3 \quad (1).$$

Xét hàm số  $f(t) = \ln(t) + t^3$  với  $t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t} + 3t^2 > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$  đồng biến.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow 2y + x = 3y \Leftrightarrow x = y \Rightarrow T = x + \frac{1}{4x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM.

$$T = x + \frac{1}{4x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} \geq \frac{3x}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4x}} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = 1.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 26.** Cho  $x; y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x - 4)$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y$ .

- (A) 3. (B)  $5 + 2\sqrt{5}$ . (C)  $3 - 2\sqrt{5}$ . (D)  $1 + \sqrt{5}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } 5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+4y} - 3^{-x-4y} + x + 4y = 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1(1).$$

Xét hàm số  $f(t) = 5^t - 3^{-t} + t$  trên  $\mathbb{R}$ .

Vì  $f'(t) = 5^t \cdot \ln 5 + 3^{-t} \cdot \ln 3 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}(2)$ .

Từ (1) và (2) ta có  $x + 4y = xy - 1(3)$ . Dễ thấy  $x = 4$  không thỏa mãn (3).

Với  $x \neq 4$ , (3)  $\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-4}$  kết hợp điều kiện  $y > 0$  suy ra  $x > 4$ .

$$\text{Do đó } P = x + y = x + \frac{x+1}{x-4}.$$

Xét hàm số  $g(x) = x + \frac{x+1}{x-4}$  trên  $(4; +\infty)$ .

Ta có

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | 4         | $4 + \sqrt{5}$  | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | 0               | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $5 + 2\sqrt{5}$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $P_{\min} = \min_{(4; +\infty)} g(x) = 5 + 2\sqrt{5}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 27.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $5^{x+2y} + \frac{3}{3xy} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = x + y$ .

- (A)**  $T_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$ .      **(B)**  $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$ .      **(C)**  $T_{\min} = 1 + \sqrt{5}$ .      **(D)**  $T_{\min} = 5 + 3\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Theo đề ra ta có

$$5^{x+2y} + \frac{3}{3xy} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1$$

$$\text{Xét } f(t) = 5^t - \frac{1}{3^t} + t. \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x + 2y = xy - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2}. \text{ Do } y > 0, x > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2.$$

$$\text{Ta có: } T = x + y = x + \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2 - x + 1}{x-2}.$$

$$T = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \in (2; +\infty) \\ x = 2 - \sqrt{3} \notin (2; +\infty). \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | 2         | $2 + \sqrt{3}$  | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | 0               | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $3 + 2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy  $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$  tại  $x = 2 + \sqrt{3}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 28.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{x-3y}{xy+1} = xy + 3y - x + 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x + \frac{1}{y}$ .

- (A)  $A_{\min} = \frac{14}{3}$ . (B)  $A_{\min} = -\frac{14}{3}$ . (C)  $A_{\min} = -6$ . (D)  $A_{\min} = 6$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x - 3y > 0$ .

$$\log_3 \frac{x-3y}{xy+1} = xy + 3y - x + 1 \Leftrightarrow \log_3(x-3y) - \log_3(xy+1) = xy + 3y - x + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-3y) + (x-3y) = \log_3(xy+1) + xy + 1(1).$$

Xét hàm  $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$ .

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$  nên  $(1) \Leftrightarrow x - 3y = xy + 1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{x+3}$ .

$$A = x + \frac{1}{y} = x + \frac{x+3}{x-1}.$$

$$\text{Đặt } A = A(x) = x + \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow A(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ do } x, y > 0.$$

|      |           |           |   |           |
|------|-----------|-----------|---|-----------|
| $x$  | 0         | 1         | 3 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -         | - | +         |
| $y$  | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 | $+\infty$ |

Chọn phương án (D)

**Câu 29.** Cho  $x, y > 0$  thỏa  $2019^{2(x^2-y+2)} - \frac{4x+y+2}{(x+2)^2} = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = 2y - 4x$ .

- (A) 2018. (B) 2019. (C)  $\frac{1}{2}$ . (D) 2.

**Lời giải.**

Ta có:

$$2019^{2(x^2-y+2)} - \frac{4x+y+2}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^{2(x^2+4x+4)-2(4x+y+2)} = \frac{4x+y+2}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2019^{2(x+2)^2} \cdot (x+2)^2 = 2019^{2(4x+y+2)} \cdot (4x+y+2)(*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x+2)^2 \\ v = 4x+y+2 \end{cases} (u, v > 0).$$

Khi đó:  $(*) \Leftrightarrow 2019^{2u} \cdot u = 2019^{2v} \cdot v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$ .

với  $f(t) = 2019^{2t} \cdot t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = 2019^{2t} \cdot 2 \ln 2019 \cdot t + 2019^{2t} > 0, \forall t > 0$ .

Do đó:  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4x+y+2 \Leftrightarrow y = x^2+2$

$$\Rightarrow P = 2y - 4x = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2.$$

Vậy  $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 30.** Cho 2 số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + 2y$  là

- (A)**  $P_{\min} = \frac{11}{2}$ .      **(B)**  $P_{\min} = \frac{27}{5}$ .      **(C)**  $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$ .      **(D)**  $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} &= 9 - (x-1)(y+1) \\ \Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) &= 9 \\ \Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1) + x-1] &= 9 \\ \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x-1 &= \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1) \\ \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x+1-2 &= \frac{9}{y+1} - 2 + \log_3 \frac{9}{y+1}. \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t - 2$  với  $t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$  với mọi  $t > 0$  nên hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến và liên tục trên  $(0; +\infty)$ .

Từ đó suy ra  $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$ , do  $x > 0$  nên  $y \in (0; 8)$ .

$$\text{Vậy } P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \geq -3 + 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2} \text{ khi } 2(y+1) = \frac{9}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 31.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

$P_{\min}$  của  $P = x + y$ .

- (A)**  $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$ .      **(B)**  $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$ .      **(C)**  $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$ .      **(D)**  $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} &= 3xy + x + 3y - 4 \\ \Leftrightarrow \log_3(1-y) - \log_3(x+3xy) &= 3xy + x + 3y - 4 \\ \Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) &= \log_3(x+3xy) + (x+3xy) \end{aligned}$$

Xét hàm  $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ . Suy ra hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Suy ra  $\log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (x+3xy) \Leftrightarrow 3(1-y) = x+3xy$

$$\Rightarrow x = \frac{3(1-y)}{1+3y} \Rightarrow x+y = y + \frac{3(1-y)}{1+3y} \geq \frac{4\sqrt{3}-4}{3}. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 32.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$ . Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$ .

- (A)** 3.      **(B)** 2.      **(C)** 1.      **(D)** 4.

**Lời giải.**

Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$ ,  $t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$ . Vậy hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến và liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó: } f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2(1).$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.$$

$$\text{Ta có } x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y + 1$ .

$$\text{Do đó từ (1), suy ra: } x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$

Đặt  $t = x + y$ ,  $t > 0$ .

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (nhận)}.$$

Bảng biến thiên.

|      |                |   |           |
|------|----------------|---|-----------|
| $x$  | 0              | 3 | $+\infty$ |
| $y'$ |                | + | -         |
| $y$  | $-\frac{1}{8}$ | 1 | $-\infty$ |

Dựa vào BBT, ta có  $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 33.** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = 2y - 3x$ .

**(A)**  $P_{\min} = \frac{1}{2}$ .

**(B)**  $P_{\min} = \frac{7}{8}$ .

**(C)**  $P_{\min} = \frac{3}{4}$ .

**(D)**  $P_{\min} = \frac{5}{6}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Cách 1: Ta có } 2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2-y+1) = \log_{2018} \frac{2x+y}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2(2x+y) = \log_{2018}(2x+y) - \log_{2018}(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_{2018}(x+1)^2 = 2(2x+y) + \log_{2018}(2x+y).$$

$$\text{Có dạng } f[(x+1)^2] = f(2x+y) \text{ với } f(t) = 2t + \log_{2018} t, (\forall t > 0).$$

Xét hàm số  $f(t) = 2t + \log_{2018} t$ ,  $(\forall t > 0)$ , ta có  $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \cdot \ln 2018} > 0 (\forall t > 0)$  nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Khi đó  $f[(x+1)^2] = f(2x+y) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$ .

$$\text{Ta có } P = 2y - 3x = 2(x^2 + 1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2.$$

Bảng biến thiên



|      |           |               |               |           |
|------|-----------|---------------|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$     |           |
| $y'$ |           | $-$           | $0$           | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |               | $\frac{7}{8}$ | $+\infty$ |

Vậy  $P_{\min} = \frac{7}{8}$  khi  $x = \frac{3}{4}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 34.** Cho 2 số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + 2y$  là

- (A)**  $P_{\min} = \frac{11}{2}$ .      **(B)**  $P_{\min} = \frac{27}{5}$ .      **(C)**  $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$ .      **(D)**  $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } \log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \\ & \Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9 \\ & \Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1) + x-1] = 9 \\ & \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x-1 = \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1) \\ & \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x+1-2 = \frac{9}{y+1} - 2 + \log_3 \frac{9}{y+1} \quad (*). \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t - 2$  với  $t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$  với mọi  $t > 0$  nên hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến và liên tục trên  $(0; +\infty)$ .

Từ (\*) suy ra  $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$ , do  $x > 0$  nên  $y \in (0; 8)$ .

$$\text{Vậy } P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \geq -3 + 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2} \text{ khi } 2(y+1) = \frac{9}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 35.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 x + x(x+y) \geq \log_2(6-y) + 6x$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$  bằng

- (A)**  $\frac{59}{3}$ .      **(B)** 19.      **(C)**  $\frac{53}{3}$ .      **(D)**  $8 + 6\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 6. \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \log_2 x + x(x+y) \geq \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 \geq \log_2[x(6-y)] + x(6-y) \quad (*).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$  với  $t > 0$ , Ta có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$  nên hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(x^2) \geq f[x(6-y)] \Leftrightarrow x^2 \geq x(6-y) \Leftrightarrow x \geq 6-y \Leftrightarrow x+y \geq 6(**) \text{ (do } x > 0).$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức (\*\*), ta có:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{3}{2}(x+y) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \cdot 6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{8}{y}} = 19$$

. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng 19.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 36.** Cho  $x, y$  là các số dương thỏa mãn  $\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}$ . Tính  $T = 10M - m$ .

**(A)**  $T = 60$ .

**(B)**  $T = 94$ .

**(C)**  $T = 104$ .

**(D)**  $T = 50$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 5y^2) - \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + \log_2 2 + 2(x^2 + 5y^2) - (x^2 + 10xy + y^2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 10y^2) + 2(x^2 + 5y^2) &\leq \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + (x^2 + 10xy + y^2) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 &\leq x^2 + 10xy + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10xy + 9y^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 9 \end{aligned}$$

$$P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 9}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Đặt  $t = \frac{x}{y}$ , điều kiện:  $1 \leq t \leq 9$ .

$$f(t) = \frac{t^2 + t + 9}{t + 1}; f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{11}{2}; f(2) = 5; f(9) = \frac{99}{10}.$$

Nên  $M = \frac{99}{10}, m = 5$ . Vậy  $T = 10M - m = 94$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 37.** Vậy  $A_{\min} = 6$ . Cho các số thực dương  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $4 + 9 \cdot 3^{x^2 - 2y} = (4 + 9^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x + 2y + 18}{x}$ .

**(A)**  $P = 9$ .

**(B)**  $P = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ .

**(C)**  $P = 1 + 9\sqrt{2}$ .

**(D)** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta đặt  $t = x^2 - 2y, t \in \mathbb{R}$ .

Phương trình  $4 + 9 \cdot 3^{x^2 - 2y} = (4 + 9^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$  trở thành.

$$4 + 9 \cdot 3^t = (4 + 9^t) \cdot \frac{49}{7^t} \Leftrightarrow 4(7^t - 49) + 9^t \left[ 9 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^t - 49 \right] = 0.$$

Nhận thấy  $t = 2$  là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh  $t = 2$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Xét  $t > 2$ :  $7^t > 49$  và  $9 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^t > 49$  nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.

Xét  $t < 2$ :  $7^t < 49$  và  $9 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^t < 49$  nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy  $t = x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2}{2}$  thay vào

$$P = \frac{x + 2y + 18}{x} = \frac{x^2 + x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 1 = 9$$

Dấu bằng đạt được khi  $x = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 4$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 38.** Cho  $x, y$  là các số thực lớn hơn 1 sao cho  $y^x(e^x)^{e^y} \geq x^y(e^y)^{e^x}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$ .

**A**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B**  $2\sqrt{2}$ .

**C**  $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ .

**D**  $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải.**

Cách 1.

Ta có:

$$\begin{aligned} y^x(e^x)^{e^y} &\geq x^y(e^y)^{e^x} \\ \Leftrightarrow \ln(y^x(e^x)^{e^y}) &\geq \ln(x^y(e^y)^{e^x}) \\ \Leftrightarrow x \ln y + xe^y &\geq y \ln x + ye^x \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} &\geq \frac{y}{\ln y + e^y} (*) \end{aligned}$$

(vì  $y = e^x + \ln x$  có  $y = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1$  nên  $y \geq y(1) = e > 0$ ).

Xét hàm số:  $f(t) = \frac{t}{\ln t + e^t}$  trên  $(1; +\infty)$  ta có  $f'(t) = \frac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{(\ln t + e^t)^2}$ .

Với hàm số  $g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t$  có  $g'(t) = (\ln t + e^t - 1 - te^t)' = \frac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$ .

Nên  $g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f(t) < 0; \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$  là hàm nghịch biến trên  $(1; +\infty)$  nên với (\*)  $f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq x > 1$ .

Khi đó  $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ .

Dấu “=” xảy ra khi:  $\frac{1}{2} \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$ .

Vậy:  $P_{\min} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 39.** Tính giá trị của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - xy + 1$  biết rằng  $4^{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} = \log_2 [14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}]$  với  $x \neq 0$  và  $-1 \leq y \leq \frac{13}{2}$ .

(A)  $P = 4$ .

(B)  $P = 2$ .

(C)  $P = 1$ .

(D)  $P = 3$ .

**Lời giải.**

Xét  $4^{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} = \log_2 [14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}]$ .

Ta có  $4^{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \geq 4^{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} - 1} = 4$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = \pm 1$ ,

Mặt khác  $14 - (y - 2)\sqrt{y + 1} = 14 + 3\sqrt{y + 1} - (\sqrt{y + 1})^3$ .

Đặt  $t = \sqrt{y + 1}$  ta có  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{2}$ . Xét hàm số  $f(t) = -t^3 + 3t + 14$ . Ta tìm GTLN - GTNN của

hàm số trên đoạn  $\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]$  được  $\min_{\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right) = \frac{56 - 9\sqrt{30}}{4}$ ;  $\max_{\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f(1) = 16$ .

Suy ra  $\log_2 [14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}] \leq \log_2 16 = 4$ ,

Từ và suy ra ta có  $\begin{cases} x = \pm 1 \\ t = \sqrt{y + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ . Thay vào  $P = 2$ .

Chọn phương án (B)

**Câu 40.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  và  $\log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1$ . Xét biểu thức  $P = 16yx^2 - 2x(3y + 2) - y + 5$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $P$ . Khi đó giá trị của  $T = (4m + M)$  bằng bao nhiêu?

(A) 16.

(B) 18.

(C) 17.

(D) 19.

**Lời giải.**

Ta có

$\log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1 \Leftrightarrow 2(2x + y) - \log(11 - (2x + y)) - 1 = 0$ .

Đặt  $t = 2x + y$ ,  $0 < t < 11$ . Phương trình trở thành:  $2t - \log(11 - t) - 1 = 0$ . (1).

Xét hàm số  $f(t) = 2t - \log(11 - t) - 1$  trên khoảng  $(0; 11)$ .

Có  $f'(t) = 2 + \frac{1}{11 - t} > 0$ ,  $\forall t \in (0; 11)$ . Do đó hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến.

Dễ thấy (1) có nghiệm  $t = 1$ . Do đó  $t = 1$  là nghiệm duy nhất của (1).

Suy ra  $2x = 1 - y$ . Khi đó  $P = 16y \frac{(1 - y)^2}{4} - (1 - y)(3y + 2) - y + 5 = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$ .

Xét hàm số  $g(y) = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$  trên  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ , có.

$g'(y) = 12y^2 - 10y + 2 > 0$ ,  $\forall y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

Do đó,  $\min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(y) = g(0) = 3$ ,  $\max_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(y) = g(1) = 4$ .

Suy ra  $m = 3$ ,  $M = 4$ .

Vậy  $T = 4 \cdot 3 + 4 = 16$ .

Chọn phương án (A)

BẢNG ĐÁP ÁN

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. B  | 3. B  | 4. C  | 5. D  | 6. B  | 7. C  | 8. C  | 9. B  | 10. A |
| 11. C | 12. B | 13. A | 14. C | 15. D | 16. B | 17. B | 18. A | 19. D | 20. C |
| 21. B | 22. A | 23. A | 24. B | 25. C | 26. B | 27. B | 28. D | 29. D | 30. D |
| 31. B | 32. C | 33. B | 34. D | 35. B | 36. B | 37. A | 38. C | 39. B | 40. A |

## DẠNG 48.

## TÍCH PHÂN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ẨN



### KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các tính chất tích phân:

$$— \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$— k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx (k \neq 0).$$

$$— \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$— \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$— \int_a^b f(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

2. Công thức đổi biến số:  $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du, u = u(x).$

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du, u = u(x).$$

Phương pháp đổi biến số thường được sử dụng theo hai cách sau đây:

$$— \text{Giả sử cần tính } \int_a^b g(x) dx. \text{ Nếu ta viết được } g(x) \text{ dưới dạng } f(u(x)) u'(x) \text{ thì } \int_a^b g(x) dx =$$

$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$ . Vậy bài toán quy về tính  $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$ , trong nhiều trường hợp thì tích phân mới này đơn giản hơn.

— Giả sử cần tính  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ . Đặt  $x = x(t)$  thỏa mãn  $\alpha = x(a), \beta = x(b)$  thì

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt = \int_a^b g(t) dt$$

trong đó  $g(t) = f(x(t)) \cdot x'(t)$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , và thỏa mãn  $xf(x^3) + f(1 - x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi đó  $\int_{-1}^0 f(x) dx$  bằng

(A)  $-\frac{17}{20}$ .

(B)  $-\frac{13}{4}$ .

(C)  $\frac{17}{4}$ .

(D)  $-1$ .

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải**

1) KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Công thức đổi biến số trong tích phân:  $\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$

Tính chất tích phân:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a).$$

2) HƯỚNG GIẢI:

B1: Nhân cả hai vế của phương trình với  $x$ , rồi sử dụng tích phân hai vế để tính  $\int_{-1}^1 f(x) dx.$

B2: Nhân cả hai vế của phương trình với  $x$ , rồi sử dụng tích phân hai vế để tính  $\int_0^1 f(x) dx.$

B3: Kết luận  $\int_{-1}^0 f(x) dx.$

**LỜI GIẢI CHI TIẾT**

**Cách 1:** Ta có:

$$\begin{aligned} xf(x^3) + f(1-x^2) &= -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) &= -x^{11} + x^7 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*) \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^1 xf(1-x^2) dx &= \int_{-1}^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(t) dt + 0 &= -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t) dt = -4 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = -4 \end{aligned}$$



Mặt khác:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 x f(1-x^2) dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^0 f(t) dt = -\frac{5}{8} \\
 &\Leftrightarrow \frac{5}{6} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Theo tính chất tích phân ta có:  $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \frac{-13}{4}$ .

**Cách 2:** Bậc cao nhất vế phải là  $x^{10}$ , bậc cao nhất vế phải là  $x.f(x^3)$ . Kết luận:  $f(x)$  bậc 3 vì  $x.(x^3)^3 = x^{10}$ .

Hệ số của bậc cao nhất vế phải là  $-1$ . Kết luận: Hệ số của bậc cao nhất vế trái là  $-1$ .

Vậy  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ .

$x.f(x^3) = -x^{10} + x \cdot a(x^3)^2 + \dots = -x^{10} + ax^7 + \dots$  Vế phải không có  $x^7$ . Vậy  $a = 0$ .

Kết luận  $f(x) = -x^3 + bx + c$ .

$$\begin{aligned}
 x.f(x^3) + f(1-x^2) &= -x^{10} + bx^4 + cx - (1-x^2)^3 + b(1-x^2) + c \\
 &= -x^{10} + bx^4 + cx - 1 + 3x^2 - 3x^4 + x^6 + b - bx^2 + c \\
 &= -x^{10} + x^6 + (b-3)x^4 + (3-b)x^2 + cx + b + c - 1.
 \end{aligned}$$

Tóm lại  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ . Suy ra  $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-13}{4}$ .

Chọn phương án **(B)**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$ .

Khi đó  $I = \int_0^2 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $I = e + 4$ .

**(B)**  $I = 8$ .

**(C)**  $I = 2$ .

**(D)**  $I = e + 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 [2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4] dx \\
 \Leftrightarrow & 3 \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1} dx + 4 \int_0^2 dx \\
 \Leftrightarrow & 3 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 f(2-x) d(2-x) = \int_0^2 e^{x^2-2x+1} d(x^2-2x+1) + 8 \\
 \Leftrightarrow & 3 \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = e^{x^2-2x+1} \Big|_0^2 + 8 \\
 \Leftrightarrow & 4 \int_0^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(\ln x) + f(1 - \ln x) = x$ .

Khi đó  $I = \int_0^1 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{e-1}{2}$ .

**(B)**  $\frac{e+1}{2}$ .

**(C)**  $\frac{e}{2}$ .

**(D)**  $\frac{2}{e-1}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(\ln x) + f(1 - \ln x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x}f(\ln x) + \frac{1}{x}f(1 - \ln x) = 1 \quad (*)$ .

Lấy tích phân từ 1 đến  $e$  cả hai vế của  $(*)$ , ta được.

$$\begin{aligned}
 & \int_1^e \left[ \frac{1}{x}f(\ln x) + \frac{1}{x}f(1 - \ln x) \right] dx = \int_1^e dx \\
 \Leftrightarrow & \int_1^e \frac{1}{x}f(\ln x) dx + \int_1^e \frac{1}{x}f(1 - \ln x) dx = e - 1 \\
 \Leftrightarrow & \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) - \int_1^e f(1 - \ln x) d(1 - \ln x) = e - 1 \quad (**)
 \end{aligned}$$

Đặt  $t = \ln x$ . Đổi cận  $\Big|_x = e \rightarrow t = 1^x = 1 \rightarrow t = 0$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(1-t) d(1-t) = e - 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = e - 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **A**

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn  $\begin{cases} f(1) = -2 \ln 2 \\ f(2) = a + b \ln 3; a, b \in \mathbb{Q} \\ x(x+1) \cdot f(x) + f(x) = x^2 + x. \end{cases}$

Tính  $a^2 + b^2$ .

**A**  $\frac{25}{4}$ .

**B**  $\frac{9}{2}$ .

**C**  $\frac{5}{2}$ .

**D**  $\frac{13}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $x(x+1) \cdot f(x) + f(x) = x^2 + x \quad (1)$ .

Chia cả 2 vế của biểu thức (1) cho  $(x+1)^2$  ta được

$$\begin{aligned} &\frac{x}{x+1} \cdot f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right] = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\} \\ &\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C \\ &\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x} (x - \ln|x+1| + C). \end{aligned}$$

Mặt khác,  $f(1) = -2 \ln 2 \Leftrightarrow 2(1 - \ln 2 + C) = -2 \ln 2 \Leftrightarrow C = -1$ .

Do đó  $f(x) = \frac{x+1}{x} (x - \ln|x+1| - 1)$ .

Với  $x = 2$  thì  $f(2) = \frac{3}{2}(1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$ . Suy ra  $a = \frac{3}{2}$  và  $b = -\frac{3}{2}$ .

Vậy  $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(1) = e$  và  $(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f(x) - x^3$

với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

(A)  $-\frac{1}{e} - \frac{2}{3}$ .

(B)  $e - \frac{2}{3}$ .

(C)  $e - \frac{1}{e}$ .

(D)  $e - \frac{2}{e} - \frac{4}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f(x) - x^3 \Leftrightarrow \frac{xf(x) - (x+2)f(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right] = e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{e^{-x}f(x)}{x^2} = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + C \cdot x^2 e^x$ .

Vì  $f(1) = e \Rightarrow -1 + C \cdot e = e \Leftrightarrow C = 1 + \frac{1}{e}$ .

Do đó  $f(x) = -x^2 + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \cdot x^2 e^x$ .

Vậy

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left[ -x^2 + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \cdot x^2 e^x \right] dx = \int_0^1 -x^2 dx + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \int_0^1 x^2 e^x dx \\ &= -\frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \int_0^1 x^2 d(e^x) = -\frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \left[ e - \int_0^1 2xe^x dx \right] = -\frac{1}{3} + e + 1 - 2 \left(1 + \frac{1}{e}\right) \int_0^1 x d(e^x) \\ &= \frac{2}{3} + e - 2 \left(1 + \frac{1}{e}\right) \left[ e - \int_0^1 e^x dx \right] = \frac{2}{3} + e - 2 \left(1 + \frac{1}{e}\right) [e - (e - 1)] = -\frac{4}{3} + e - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Chọn phương án (D)

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và thỏa mãn  $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$ ,  $\int_3^9 f(x) dx =$

2019. Tính  $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .

(A)  $I = -\frac{688}{3}$ .

(B)  $I = \frac{688}{3}$ .

(C)  $I = \frac{886}{3}$ .

(D)  $I = \frac{68}{3}$ .

**Lời giải.**

Xét  $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ . Đặt  $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ .

Đổi cận  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3. \end{cases}$

Khi đó  $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dt$ .

Mà  $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$  hay  $f\left(\frac{2}{t}\right) = -\frac{5t}{2} - \frac{2}{3}f(3t)$ .

Nên  $I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[ -\frac{5t}{2} - \frac{2}{3}f(3t) \right] dt = -\frac{5}{4} \int_1^3 t dt - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3t) dt = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3t) dt (1).$

Đặt  $u = 3t \Rightarrow dt = \frac{1}{3} du$ . Đổi cận  $\Big|_t = 3 \Rightarrow u = 9^t = 1 \Rightarrow u = 3.$

Khi đó  $I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(u) du = -5 - \frac{2019}{9} = -\frac{688}{3}.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và thỏa mãn  $2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2,$

$\int_1^2 xf(x) dx = 5.$  Giá trị  $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right) dx$  bằng

**(A)**  $-\frac{103}{48}.$

**(B)**  $\frac{103}{24}.$

**(C)**  $\frac{103}{48}.$

**(D)**  $-\frac{103}{12}.$

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x). \end{cases}$

Ta có  $\int_1^2 x \cdot f(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow 5 = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x) dx (1).$

Lần lượt thay  $x = 1$  và  $x = \frac{1}{2}$  vào  $2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$  ta được.

$\begin{cases} 2f(2) - f(1) = 1 \\ 2f(1) - f(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = \frac{3}{4} \\ f(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 2f(2) - f(1) - 5 = -4 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = -2.$

Lại có  $2f(2x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \Rightarrow 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{7}{24}$

$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -4 - \frac{7}{24} = -\frac{103}{24}.$

Đặt  $t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{t^2} dt$  ta có  $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-2}{t^2} dt = 2 \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-1}{t^2} dt (2).$

Đặt  $u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{1}{u^2} du$  ta có  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_2^1 f(u) \cdot \frac{-1}{u^2} du = \int_2^1 f(t) \cdot \frac{-1}{t^2} dt = -\frac{103}{24}.$

Thay vào (2) ta được  $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = 2 \cdot \left(-\frac{103}{24}\right) = -\frac{103}{12}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 7.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = 9$  và  $9f(x) + [f(x) - x]^2 = 9$ . Tính  $T = f(1) - f(0)$ .

**(A)**  $T = 2 + 9 \ln 2$ .

**(B)**  $T = 9$ .

**(C)**  $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2$ .

**(D)**  $T = 2 - 9 \ln 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 9f(x) + [f(x) - x]^2 = 9 &\Leftrightarrow 9[f(x) - 1] = -[f(x) - x]^2 \Leftrightarrow -\frac{f(x) - 1}{[f(x) - x]^2} = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \left[ \frac{1}{f(x) - x} \right] &= \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{f(x) - x} = \frac{1}{9} \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - x} = \frac{x}{9} + C \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{9}{x + 9C}. \end{aligned}$$

Do  $f(0) = 9$  nên  $C = \frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{x + 1} + x$ .

Vậy  $T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left( \frac{9}{x + 1} + x \right) dx = \left( 9 \ln |x + 1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9 \ln 2 + \frac{1}{2}$ .

Chọn phương án **(C)**

**Câu 8.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 2]$ . Biết  $f(0) = 1$  và

$f(x) \cdot f(2 - x) = e^{2x^2 - 4x}$ , với mọi  $x \in [0; 2]$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f(x)}{f(x)} dx$ .

**(A)**  $I = -\frac{16}{3}$ .

**(B)**  $I = -\frac{16}{5}$ .

**(C)**  $I = -\frac{14}{3}$ .

**(D)**  $I = -\frac{32}{5}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) \cdot f(2 - x) = e^{2x^2 - 4x}$

$\Rightarrow \ln [f(x) \cdot f(2 - x)] = \ln e^{2x^2 - 4x}$

$\Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2 - x) = 2x^2 - 4x \quad (*)$ .

Mặt khác, với  $x = 0$ , ta có  $\begin{cases} f(0) \cdot f(2) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$  nên  $f(2) = 1$ .

Xét

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f(x)}{f(x)} dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot \frac{f(x)}{f(x)} dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 3x^2) d(\ln[f(x)]) \\ &= \left( (x^3 - 3x^2) \ln[f(x)] \right) \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln[f(x)] dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) \cdot \ln[f(x)] dx \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt  $t = 2 - x \Rightarrow dx = -dt$ . Đổi cận  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0. \end{cases}$

$$\text{Do đó } I = - \int_2^0 3(2-t)t \cdot \ln[f(2-t)] dt = \int_0^2 (6t - 3t^2) \cdot \ln[f(2-t)] dt.$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên } I = \int_0^2 (6x - 3x^2) \cdot \ln[f(2-x)] dx \quad (2).$$

$$\text{Cộng 2 vế của (1) và (2), ta được } 2I = \int_0^2 (6x - 3x^2) \cdot (\ln[f(x)] + \ln[f(2-x)]) dx.$$

$$\text{Hay } I = \frac{1}{2} \int_0^2 (6x - 3x^2) \cdot (\ln[f(x)] + \ln[f(2-x)]) dx (**).$$

$$\text{Thế (*) vào (**), ta có } I = \frac{1}{2} \int_0^2 (6x - 3x^2) \cdot (2x^2 - 4x) dx = -\frac{16}{5}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(2) = \frac{1}{15}$

và  $f(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0$ . Biết  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{b} \ln \frac{c}{2}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $S = a + b + c$ .

**(A)**  $S = 3$ .

**(B)**  $S = 4$ .

**(C)**  $S = 5$ .

**(D)**  $S = 6$ .

**Lời giải.**

Do  $f(x) > 0$ , với mọi  $x \in (0; +\infty)$  nên  $f(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{f(x)}{f^2(x)} = 2x + 4$ .

Suy ra  $\frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C$ .

Mặt khác  $f(2) = \frac{1}{15}$  nên  $C = 3$  hay  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ .

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 6.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\begin{cases} f(0) = f(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$ ,

với  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tính  $\int_0^1 f(x-1) dx$ .

**(A)**  $\frac{1}{2}$ .

**(B)**  $-\frac{1}{4}$ .

**(C)**  $\frac{1}{4}$ .

**(D)**  $\frac{7}{4}$ .

**Lời giải.**

Lấy đạo hàm theo hàm số  $y$ .

$$f(x+y) = f(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) + 3x^2 \Rightarrow f(x) = 1 + 3x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f(x) dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1. \text{ Do đó } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x-1) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1) dx = \frac{1}{4}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4, \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2.$

Giá trị của tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  thuộc khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(5; 9).$

**(B)**  $(3; 6).$

**(C)**  $(\sqrt{2}; 5).$

**(D)**  $(1; 4).$

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t \cdot f(\tan t)}{\tan^2 t + 1} (\tan^2 t + 1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \cdot f(\tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \cdot f(\tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t) dt \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = 6.$$

$$\text{Đặt } x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt.$$

$$\text{Đổi cận } t = 0 \Rightarrow x = 0; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = \int_0^1 f(x) dx. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 6.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, đồng biến, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(3) = \frac{2}{3}$  và  $[f(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A)  $2613 < f^2(8) < 2614$ .

(B)  $2614 < f^2(8) < 2615$ .

(C)  $2618 < f^2(8) < 2619$ .

(D)  $2616 < f^2(8) < 2617$ .

**Lời giải.**

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$  nên suy ra  $f(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Mặt khác  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  nên.

$$[f(x)]^2 = (x+1)f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}, \forall x \in (0; +\infty);$$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C;$$

Từ  $f(3) = \frac{2}{3}$  suy ra  $C = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}$ .

Như vậy  $f(x) = \left( \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2$ .

Bởi thế:

$$f(8) = \left( \frac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 = \left( 9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left( 9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^4.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{(f(x))^2 + 1}$  và  $f(0) = 0$ . Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1; 3]$  lần lượt là

(A)  $M = 20; m = 2$ .

(B)  $M = 4\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$ .

(C)  $M = 20; m = \sqrt{2}$ .

(D)  $M = 3\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{(f(x))^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}} = 2x$ .

Lấy nguyên hàm hai vế ta có  $\sqrt{(f(x))^2 + 1} = x^2 + C$ , do  $f(0) = 0$  nên  $C = 1$ .

Vậy  $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2} = x\sqrt{x^2 + 2}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

Ta có  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0$  với mọi  $x \in [1; 3]$  nên  $f(x)$  đồng biến trên  $[1; 3]$ .

Vậy  $M = f(3) = 3\sqrt{11}; m = f(1) = \sqrt{3}$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ ,

với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x) dx$  bằng

(A)  $-\frac{\pi}{4}$ .

(B)  $\frac{1}{4}$ .

(C)  $\frac{\pi}{4}$ .

(D)  $-\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Bài ra  $f(0) = 0$  và  $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$  nên  $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Ta có:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d[f(x)] = [xf(x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$

Suy ra:  $I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$

Mặt khác,

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}.$$

Suy ra:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2}(*).$

Đặt  $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$

Nên từ (\*)  $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}.$

Vậy  $I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{4}.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 7$  và

$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$  Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{7}{5}.$

**(B)**  $1.$

**(C)**  $\frac{7}{4}.$

**(D)**  $4.$

**Lời giải.**

Ta có  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} f(x) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx.$  Suy ra  $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = -\frac{1}{3}.$

Hơn nữa ta dễ dàng tính được  $\int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = \frac{1}{63}.$

Do đó  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \cdot 21 \int_0^1 \frac{x^3}{3} f(x) dx + 21^2 \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) + 7x^3]^2 dx = 0.$

Suy ra  $f(x) = -7x^3$ , do đó  $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$ . Vì  $f(1) = 0$  nên  $C = \frac{7}{4}$ .

Vậy  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{4} \int_0^1 (x^4 - 1) dx = \frac{7}{5}.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn  $f(0) = 0$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{\pi}{4}$ .

**(B)**  $\frac{\pi}{2}$ .

**(C)** 2.

**(D)** 1.

**Lời giải.**

Ta có  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = [-\cos x \cdot f(x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx$ . Suy ra  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ .

Hơn nữa  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[ \frac{2x + \sin 2x}{4} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

Do đó  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \cos x]^2 dx = 0.$

Suy ra  $f(x) = \cos x$ , do đó  $f(x) = \sin x + C$ . Vì  $f(0) = 0$  nên  $C = 0$ .

Ta được  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ .

Giá trị  $\int_0^2 (x+1) f\left(\frac{x}{2}\right) dx$  bằng

**(A)**  $-\frac{8}{5}$ .

**(B)**  $\frac{4}{5}$ .

**(C)**  $-\frac{12}{5}$ .

**(D)**  $\frac{2}{5}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f\left(\frac{x}{2}\right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}.$

$$\int_0^2 (x+1)f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2(x+1) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 6f(1) - 2f(0) - 4 \int_0^1 f(u) du;$$

$$\left(u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} dx; \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=1 \end{cases}\right).$$

$$f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\right) dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx + 6 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} \quad (1)$$

Tính  $\int_0^1 6x^2 f(x^3) dx$ .

Đặt  $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 \cdot dx; x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=1$ .

$$\int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx \quad (2).$$

Tính  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3 dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \quad (3).$

Thay kết quả (2) và (3) vào (1) ta được:  $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + 6 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -4.$

Thay lần lượt  $x=0; x=1$  vào  $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$  ta được

$$f(0) = 6; f(1) = 6f(1) + 3 \Rightarrow f(1) = -\frac{3}{5}.$$

Vậy  $\int_0^2 (x+1)f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 6f(1) - 2f(0) - 4 \int_0^1 f(u) du = 6 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 2 \cdot 6 - 4 \cdot (-4) = \frac{2}{5}.$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , và các tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$

Biết rằng  $f(0) = 0$ , tính  $f\left(\frac{\pi}{3}\right).$

**(A)**  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$       **(B)**  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$       **(C)**  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$       **(D)**  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

**Lời giải.**

Ta có  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$

Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\cos x. \end{cases}$

Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$

Xét

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \cos x]^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = -\frac{\pi}{4} + \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \cos x]^2 dx &= 0 \Rightarrow f(x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \cos x \end{aligned}$$

Suy ra  $f(x) = \sin x + C.$

Mà  $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$

Khi đó  $f(x) = \sin x.$

Vậy  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$  và

$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4.$  Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**(A)** 1.

**(B)** 8.

**(C)** 10.

**(D)** 80.

**Lời giải.**

Xét

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + (ax + b)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 [f(x) \cdot (ax + b)] dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= 4 + 2a \int_0^1 xf(x) dx + 2b \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{3a}(ax + b)^3 \Big|_0^1 = 4 + 2(a + b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \end{aligned}$$

Cần xác định  $a, b$  để  $\frac{a^2}{3} + (2 + b)a + b^2 + 2b + 4 = 0$  (1).

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn  $a.$

Ta có:  $\Delta = b^2 + 4b + 4 - \frac{4}{3}(b^2 + 2b + 4) = \frac{-(b - 2)^2}{3} \leq 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6.$

Khi đó:  $\int_0^1 [f(x) + (-6x + 2)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2$ .

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 (6x - 2)^3 dx = \frac{1}{24} (6x - 2)^4 \Big|_0^1 = 10.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 20.** Xét hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện  $f(1) = 1$  và  $f(2) = 4$ .

$$\text{Tính } J = \int_1^2 \left( \frac{f(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx.$$

**(A)**  $J = 1 + \ln 4$ .

**(B)**  $J = 4 - \ln 2$ .

**(C)**  $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$ .

**(D)**  $J = \frac{1}{2} + \ln 4$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } J = \int_1^2 \left( \frac{f(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left( \frac{f(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left( 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4. \end{aligned}$$

Chọn phương án **D**

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) f[f(x)] dx = 10$  và  $f(0) = 1, f(1) = 2$ .

Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**(A)** 10.

**(B)** 3.

**(C)** 1.

**(D)** 30.

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow dt = f(x) dx; x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 1, x = 1 \Rightarrow t = f(1) = 2.$$

$$\text{Khi đó } 10 = \int_0^1 f(x) f[f(x)] dx = \int_1^2 f(t) dt.$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = 10.$$

Chọn phương án **A**

**Câu 22.** Cho  $\int_0^1 (1-x^2) f(x) dx = 10$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f(\sin x) dx$ .

- (A)  $I = 5\pi$ . (B)  $I = 10\pi$ . (C)  $I = 10$ . (D)  $I = 5$ .

**Lời giải.**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot f(\sin x) \cdot \cos x dx.$$

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$  và  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ .

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 (1-t^2) f(t) dt = 10.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 23.** Cho  $\int_1^e f(x) dx = 1$  và  $\int_1^e \frac{(x-1)f(x)}{x} dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^1 f(e^x) dx$  bằng

- (A) 3. (B) -1. (C) 1. (D) -3.

**Lời giải.**

Đặt  $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = t dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$  và  $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e$ .

$$\text{Do đó: } \int_0^1 f(e^x) dx = \int_1^e f(t) \frac{dt}{t}.$$

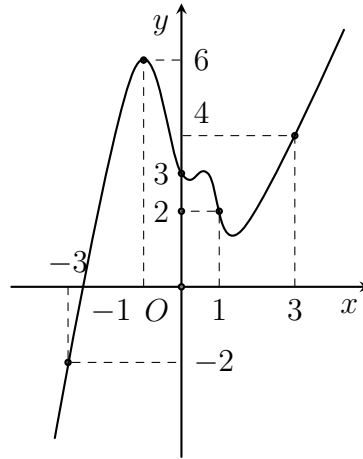
Mặt khác theo giả thiết có:

$$2 - 1 = \int_1^e \frac{(x-1)f(x)}{x} dx - \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[ \frac{(x-1)f(x)}{x} - f(x) \right] dx = \int_1^e -\frac{f(x)}{x} dx.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(e^x) dx = \int_1^e f(t) \frac{dt}{t} = -1.$$

Chọn phương án (B)

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên dưới



Khi đó tổng  $\int_{-2}^0 f(2x+1) dx + \int_0^2 f(x+1) dx$  bằng

(A) 4.

(B) 10.

(C) 0.

(D) 6.

**Lời giải.**

Đặt  $t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2 dx$ .

$$\text{Ta có } \int_{-2}^0 f(2x+1) dx = \int_{-3}^1 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 f(t) dt = \frac{f(1) - f(-3)}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2.$$

Đặt  $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$ .

$$\text{Ta có } \int_0^2 f(x+1) dx = \int_1^3 f(t) dt = f(3) - f(1) = 4 - 2 = 2.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^0 f(2x+1) dx + \int_0^2 f(x+1) dx = 2 + 2 = 4.$$

Chọn phương án (A)

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$ , với mọi

$x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_1^5 xf(x) dx$  bằng

(A)  $-\frac{31}{4}$ .

(B)  $\frac{17}{4}$ .

(C)  $\frac{33}{4}$ .

(D)  $\frac{49}{4}$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có  $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$  nên suy ra  $f(1) = 2$ ,  $f(5) = 5$ .

$$\text{Suy ra } I = \int_1^5 xf(x) dx = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_1^5 f(x) dx.$$

Đặt  $x = t^3 + 3t + 1 \Rightarrow dx = (3t^2 + 3) dt$ .

Với  $x = 1 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 5 \Rightarrow t = 1$ .



$$\text{Do đó } \int_1^5 f(x) dx = \int_0^1 f(t^3 + 3t + 1)(3t^2 + 3) dt = \int_0^1 (3t + 2)(3t^2 + 3) dt = \frac{59}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = 23 - \frac{59}{4} = \frac{33}{4}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn 
$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(x) = -e^x f^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của  $f(\ln 2)$

**(A)**  $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$ .      **(B)**  $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$ .      **(C)**  $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ .      **(D)**  $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \text{ (do } f(x) > 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - C}.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ ta được } f(0) = \frac{1}{e^0 - C} \stackrel{f(0) = \frac{1}{2}}{\Rightarrow} C = -1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $2[f(x)]^3 + 3f(x) + 5 = x$  với

$$\forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_5^{10} f(x) dx.$$

**(A)**  $I = 0$ .      **(B)**  $I = 3$ .      **(C)**  $I = 5$ .      **(D)**  $I = 6$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = x \Rightarrow dx = (6t^2 + 3) dt \text{ và.}$$

$$x = 5 \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$x = 10 \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = 10 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy } I = \int_5^{10} f(x) dx = \int_0^1 t(6t^2 + 3) dt = 3.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn  $bf(a) + af(b) = 1$ , với mọi

$$a, b \in [0; 1]. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**(A)**  $I = \frac{\pi}{2}$ .      **(B)**  $I = \frac{1}{2}$ .      **(C)**  $I = \frac{\pi}{4}$ .      **(D)**  $I = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ .

Với  $x = 0$  thì  $t = 0$ ; Với  $x = 1$  thì  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Ta được:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt$ .

Đặt  $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$ .

Với  $x = 0$  thì  $t = \frac{\pi}{2}$ ; Với  $x = 1$  thì  $t = 0$ .

Ta được:  $I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt$ .

Suy ra:  $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin t) \cos t + f(\cos t) \sin t] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 29.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thỏa mãn  $f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6x}{\sqrt{3x+1}}, \forall x \in [a; b]$ .

Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**(A)** 2.

**(B)** 4.

**(C)** -1.

**(D)** 6.

**Lời giải.**

Ta có:  $f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \quad (*)$ .

Đặt  $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ .

Với  $x = 0 \Rightarrow u = 0$  và  $x = 1 \Rightarrow u = 1$ .

Khi đó  $\int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$  thay vào (\*), ta được:

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Chọn phương án **B**

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm trên  $[1; 2]$  thỏa mãn  $f(1) = g(1) = 0$  và.

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Tính tích phân  $I = \int \left[ \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) dx \right]$ .

**(A)**  $\frac{1}{2}$ .

**(B)** 4.

**(C)** -1.

**(D)**  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có 
$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x) + 2017x = (x+1)f(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(x+1)^2}g(x) + \frac{x}{x+1}g'(x) \right] - \left[ \frac{(x+1)}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}f(x) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[ \frac{x}{x+1}g(x) \right] - \left[ \frac{(x+1)}{x}f(x) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}g(x) + \frac{x+1}{x}f(x) = x + C \end{aligned}$$

Mà  $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Leftrightarrow I = \int_1^2 \left[ \frac{x+1}{x}f(x) - \frac{x+1}{x}f(x) \right] dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  và thoả mãn  $f(x) - 8x^3f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$

Tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$  có kết quả dạng  $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$  tối giản. Tính  $a + b + c$ .

**(A)** 6.

**(B)** -4.

**(C)** 4.

**(D)** -10.

**Lời giải.**

Ta có:  $f(x) - 8x^3f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow f(x) = 8x^3f(x^4) - \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 8x^3f(x^4) dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (1).$$

Xét  $\int_0^1 8x^3f(x^4) dx = \int_0^1 2f(x^4)d(x^4) = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2I.$

Xét  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ . Đặt  $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx.$

Đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}.$

Nên  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)t dt}{t} = \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Do đó (1)  $\Rightarrow I = 2I - \left( \frac{2-\sqrt{2}}{3} \right) \Rightarrow I = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$ . Nên  $a = 2, b = 1, c = 3.$

Vậy  $a + b + c = 6.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thoả mãn điều kiện.

$f(x) + 2f(1 - x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0; 1]$ . Tính  $I = \int_0^1 f(1 - x^2) dx$

(A)  $I = \frac{4}{15}$ .

(B)  $I = 1$ .

(C)  $I = -\frac{2}{15}$ .

(D)  $I = \frac{2}{15}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = 1 - x, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$ .

Ta có  $f(x) + 2f(1 - x) = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow f(x) + 2f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 3$

$\Rightarrow f(1 - t) + 2f(t) = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow 2f(x) + f(1 - x) = 3x^2 - 3$ .

Ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1 - x) = 3x^2 - 6x \\ 2f(x) + f(1 - x) = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1 - x) = 3x^2 - 6x \\ 4f(x) + 2f(1 - x) = 6x^2 - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 3x^2 + 6x - 6 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x - 2.$$

Khi đó  $f(1 - x^2) = (1 - x^2)^2 + 2(1 - x^2) - 2 = x^4 - 4x^2 + 1$ .

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 f(1 - x^2) dx = \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 1) dx = -\frac{2}{15}.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 33.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ , biểu thức  $f(x) = f(x)\sqrt{3x + 1}$ , với mọi  $x > 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A)  $2 < f(5) < 3$ .

(B)  $4 < f(5) < 5$ .

(C)  $1 < f(5) < 2$ .

(D)  $3 < f(5) < 4$ .

**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f(x)} &= \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f(x)}{f(x)} dx = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} dx \\ \Leftrightarrow \ln[f(x)] \Big|_1^5 &= \frac{1}{3} \int_1^5 \frac{d(3x + 1)}{\sqrt{3x + 1}} \Leftrightarrow \ln[f(5)] - \ln[f(1)] = \frac{2}{3} \sqrt{3x + 1} \Big|_1^5 \\ \Leftrightarrow \ln[f(5)] &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,7937 \end{aligned}$$

Vậy  $3 < f(5) < 4$ .

Chọn phương án (D)

**Câu 34.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + x^{2019} f(x^{2020}) = \sqrt{1 - x^2}$  với mọi  $x$

thuộc  $[0; 1]$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

(A)  $1020604\pi$ .

(B)  $\frac{2017\pi}{8072}$ .

(C)  $\frac{505\pi}{2021}$ .

(D)  $\frac{\pi}{8076}$ .

**Lời giải.**

Có  $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x^{2019} f(x^{2020}) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .

Đặt  $t = x^{2020} \Rightarrow dt = 2020 \cdot x^{2019} dx$  và  $\int_0^1 x^{2019} f(x^{2020}) dx = \frac{1}{2020} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2020} \int_0^1 f(x) dx$ .

Vậy  $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x^{2019} f(x^{2020}) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2021}{2020} \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{505\pi}{2021}$ .

Chọn phương án **C**

**Câu 35.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[4; 8]$  và  $f(x) \neq 0 \forall x \in [4; 8]$ . Biết rằng

$\int_4^8 \frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$  và  $f(4) = \frac{1}{4}$ ,  $f(8) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(6)$ .

**(A)**  $\frac{5}{8}$ .

**(B)**  $\frac{2}{3}$ .

**(C)**  $\frac{3}{8}$ .

**(D)**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\int_4^8 \left( \frac{f(x)}{f^2(x)} \right) dx = -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^8 = -\frac{1}{f(8)} + \frac{1}{f(4)} = 2$  (1).

Gọi  $k$  là một hằng số thực, ta sẽ tìm  $k$  để  $\int_4^8 \left( \frac{f(x)}{f^2(x)} + k \right)^2 dx = 0$ .

Ta có

$$\int_4^8 \left( \frac{f(x)}{f^2(x)} + k \right)^2 dx = \int_4^8 \frac{(f(x))^2}{(f(x))^4} dx + 2k \int_4^8 \left( \frac{f(x)}{f^2(x)} \right) dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (1 + 2k)^2$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{2} \text{ thì } \int_4^8 \left( \frac{f(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int_4^6 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$$

Chú ý:  $\int_a^b f(x) dx = 0$  không được phép suy ra  $f(x) = 0$  nhưng  $\int_a^b [f(x)]^{2k} dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 36.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn điều kiện  $4xf(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in$

$[0; 1]$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**(A)**  $\frac{\pi}{20}$ .

**(B)**  $\frac{\pi}{16}$ .

**(C)**  $\frac{\pi}{6}$ .

**(D)**  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải.**

Vì  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  và  $4xf(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [0; 1]$  nên ta có

$$\int_0^1 [4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow \int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx + \int_0^1 3f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (1).$$

Lại có  $\int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x^2) d(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2 \int_0^1 f(t) dt = 2I$

và  $\int_0^1 3f(1-x) dx = -3 \int_0^1 f(1-x) d(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3 \int_0^1 f(u) du = 3I.$

Đồng thời  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}.$

Vậy  $(1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 37.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx$ .

**(A)**  $I = 3.$

**(B)**  $I = -1.$

**(C)**  $I = 1.$

**(D)**  $I = -3.$

**Lời giải.**

Đặt  $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$  Và  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1.$

Do đó  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1 + \tan^2 x} \cdot (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{1 + t^2} \cdot dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} \cdot dx.$

Ta có:  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{[(x^2 + 1) - 1] f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow 1 - I = 2 \Leftrightarrow I = -1.$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 38.** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Giá

trị của tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  thuộc khoảng nào sau đây?

**(A)**  $(5; 6).$

**(B)**  $(3; 4).$

**(C)**  $(1; 2).$

**(D)**  $(2; 3).$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 & xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 \Rightarrow & \int_1^2 [xf(x^2) - f(2x)] dx = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2x} - 2\right) dx \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_1^2 f(x^2) d(x^2) - \frac{1}{2} \int_1^2 f(2x) d(2x) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \ln x - 2x\right) \Big|_1^2 \\
 & \stackrel{u=x^2, v=2x}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \int_1^4 f(u) du - \frac{1}{2} \int_2^4 f(v) dv = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^4 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left[ \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \right] - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{7}{2} - \ln 2 \approx 2 \cdot 80852819.
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 39.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1$ . Tích

phân  $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$  bằng

**(A)**  $\frac{1}{2}$ .

**(B)** 2.

**(C)**  $\frac{3}{2}$ .

**(D)** 4.

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$ . Đổi cận  $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 16 \Rightarrow t = 4$ .

$$\text{Suy ra } 1 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} \cdot 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx \Rightarrow \cot x dx = \cot x \cdot \frac{dt}{2 \sin x \cos x} = \frac{dt}{2 \sin^2 x} = \frac{dt}{2t}.$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Do đó } 1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = 4x \Rightarrow dt = 4 dx. \text{ Đổi cận } x = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = 1 \Rightarrow t = 4.$$

Suy ra  $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x) dx}{x} = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{\frac{t}{4}} \cdot \frac{dt}{4} = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} \cdot dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$

Chọn phương án A



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C  | 2. A  | 3. B  | 4. D  | 5. A  | 6. D  | 7. C  | 8. B  | 9. D  | 10. C |
| 11. A | 12. A | 13. D | 14. D | 15. A | 16. D | 17. D | 18. B | 19. C | 20. D |
| 21. A | 22. C | 23. B | 24. A | 25. C | 26. B | 27. B | 28. C | 29. B | 30. A |
| 31. A | 32. C | 33. D | 34. C | 35. D | 36. A | 37. B | 38. D | 39. A |       |

## DẠNG 49. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

### 1 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối đã cho bằng

(A)  $a^3$ .

(B)  $\frac{a^3}{3}$ .

(C)  $\frac{a^3}{2}$ .

(D)  $\frac{a^3}{6}$ .

**Lời giải.**

**CÁCH 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng.**

Phân tích hướng dẫn giải.

**1. Dạng toán:** Tính thể tích khối chóp, biết góc giữa hai mặt phẳng.

*Phương pháp:*

Tìm đường cao của hình và khai thác được giả thiết góc của đề bài.

**2. Hướng giải:**

**B1:** Tìm đường cao của hình: học sinh phải tìm đường cao bằng cách suy ra từ các quan hệ vuông góc giữa đường với đường để chứng minh được đường vuông góc với mặt, hay phục dựng hình ẩn để xác định đường cao.

**B2:** •Để khai thác được giả thiết góc ta thường làm:

+ Xác định được góc. Trong quá trình xác định góc phải tránh bấy khi đưa về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nó là góc không tù.

+ Cần chọn ẩn (Là chiều cao hay cạnh đáy nếu giả thiết chưa có) sau đó sử dụng giả thiết góc để tìm ẩn.

•Có thể sử dụng nhiều phương pháp khác ngoài hai cách truyền thống để tính góc giữa hai mặt bên.

*Phương pháp khoảng cách:* giả sử  $\varphi$  là góc giữa hai mặt bên  $\alpha$  và  $\beta$

$$\sin \varphi = \frac{d(M, (\alpha))}{d(M, d)} \text{ ở đây } d = (\alpha) \cap (\beta), M \in (\beta).$$

*Phương pháp diện tích hai mặt bên:* giả sử  $\varphi$  là góc giữa hai mặt bên  $(ABC)$  và  $(ABD)$

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABD}}{3AB} \cdot \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{3V_{ABCD} \cdot AB}{2S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABD}}.$$

*Công thức đa giác chiếu:*  $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Hai tam giác vuông  $SAB$  và  $SAC$  bằng nhau chung cạnh huyền  $SA$ .

Kẻ  $BI$  vuông góc với  $SA$  suy ra  $CI$  cũng vuông góc với  $SA$  và  $IB = IC$ .

$SA \perp IC, SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC)$  tại  $I$ .

$$V_{S.ABC} = V_{A.IBC} + V_{S.IBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle IBC}AI + \frac{1}{3}S_{\triangle IBC}SI \\ = \frac{1}{3}S_{\triangle IBC}(AI + SI) = \frac{1}{3}S_{\triangle IBC}SA.$$

$((SAB), (SAC)) = (IB, IC) \Rightarrow (IB, IC) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 60^\circ$  hoặc  $\widehat{BIC} = 120^\circ$ .

Ta có  $IC = IB < AB = a$  mà  $BC = a\sqrt{2}$  nên tam giác  $IBC$  không thể đều suy ra  $\widehat{BIC} = 120^\circ$ .

Trong tam giác  $IBC$  đặt  $IB = IC = x (x > 0)$  có:

$$\cos 120^\circ = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB \cdot IC} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2x^2 - (a\sqrt{2})^2}{2x^2} \\ \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow IB = IC = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác  $ABI$  vuông tại  $I$  có:  $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Trong tam giác  $SAB$  vuông tại  $B$  đường cao  $BI$  có:  $AB^2 = IA \cdot SA \Rightarrow SA = \frac{AB^2}{IA} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}.$

Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle IBC}SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}IB \cdot IC \cdot SA \sin \widehat{BIC} = \frac{1}{6} \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 a\sqrt{3} \sin 120^\circ = \frac{a^3}{6}.$

## CÁCH 2: Xác định đường cao của hình chóp.

Phân tích hướng dẫn giải.

**1. Dạng toán:** Đây là dạng toán tính thể tích khối chóp có lồng ghép góc giữa hai mặt phẳng. Phương pháp.

Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp  $V = \frac{1}{3}S \cdot h.$

## 2. Hướng giải:

B1: Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $S$ . Khi đó tứ giác  $ABHC$  là hình vuông.

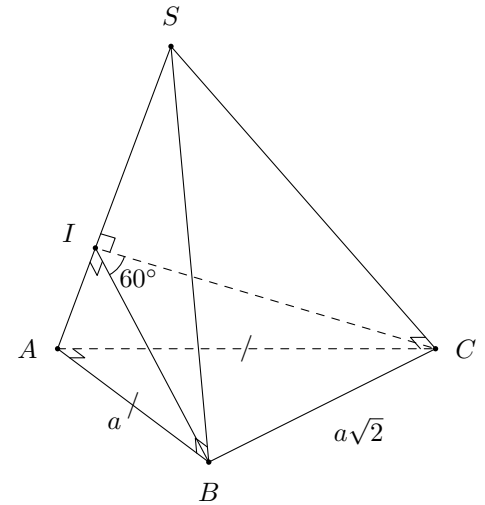
B2: Xác định góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$  rồi từ đó tính độ dài đường cao  $SH$ .

B3: Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn phương án **D**

**Lời giải.**



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên phẳng  $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$ .

Ta có  $\begin{cases} SH \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SDH) \Rightarrow AB \perp BH$ . Chứng minh tương tự  $AC \perp HC$ .

Lại có  $AB = AC \Rightarrow ABHC$  là hình vuông.

Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  lên  $SA$ . Khi đó  $CK \perp SA$  ( $\triangle SBA = \triangle SCA$ ).

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$  bằng góc giữa hai đường  $BK$  và  $CK$ .

$$\text{Đặt } SB = x, \text{ khi đó: } BK^2 = CK^2 = \frac{SC^2 \cdot CA^2}{SC^2 + CA^2} = \frac{a^2 x^2}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 \cdot x^2}{a^2 + x^2}.$$

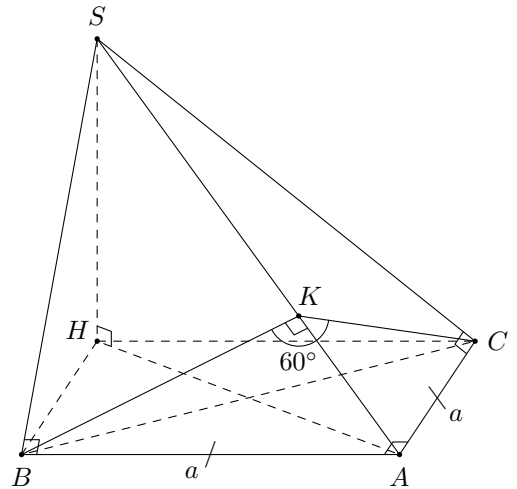
$$\text{và } \left| \cos \widehat{BKC} \right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \left| \frac{BK^2 + CK^2 - BC^2}{2BK \cdot CK} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |2 \cdot BK^2 - BC^2| = BK^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot BK^2 - BC^2 = BK^2 \\ 2 \cdot BK^2 - BC^2 = -BK^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BK^2 = BC^2 \\ 3 \cdot BK^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 \cdot x^2}{a^2 + x^2} = 2a^2 \\ 3 \cdot \frac{a^2 \cdot x^2}{a^2 + x^2} = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -a^2(l) \\ x = a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Với  $x = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = a$ .

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot HS = \frac{a^3}{6}.$$



## 2 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ , với  $AB > \sqrt{5}$ ,  $BC = 2$ . Các cạnh bên đều bằng  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$  và cùng tạo với mặt đáy góc  $60^\circ$ . Thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A)  $V = \frac{3\sqrt{3}}{3}$ .

(B)  $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

(C)  $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(D)  $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Lời giải.**

Kẻ  $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$ .

Ta có 
$$\begin{cases} HA^2 = SA^2 - SH^2 \\ HB^2 = SB^2 - SH^2 \\ HC^2 = SC^2 - SH^2 \end{cases}$$

Mà  $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC$ . Suy ra  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Đặt  $AB = AC = x > \sqrt{5}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4HA} = \frac{2x^2}{4HA} = \frac{x^2}{2HA} \quad (1).$$

Từ  $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{SA; (ABC)} = \widehat{SAH} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{SH}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2} SA = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{6}}{8} \\ \cos 60^\circ = \frac{HA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

Gọi  $I = AH \cap BC$  mà  $AB = AC \Rightarrow IB = IC = \frac{BC}{2} = 1$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Thay vào (1) ta được  $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2}{9} = \frac{2x^2\sqrt{2}}{9} \Rightarrow 8x^4 =$

$$81(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

Kết hợp với  $x > \sqrt{5}$  ta được  $x = 3$ .

Suy ra  $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$ .

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{6}}{8} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật.  $E$  là điểm trên cạnh  $AD$  sao cho  $BE$  vuông góc với  $AC$  tại  $H$  và  $AB > AE$ , cạnh  $SH$  vuông góc với mặt phẳng đáy, góc  $\widehat{BSH} = 45^\circ$ .

Biết  $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}, BE = a\sqrt{5}$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng

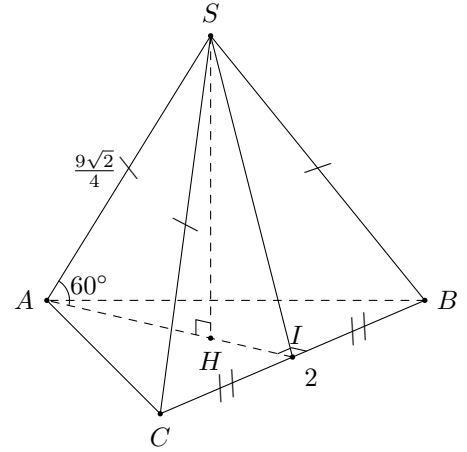
**(A)**  $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$ .

**(B)**  $\frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$ .

**(C)**  $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$ .

**(D)**  $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải.**



Đặt  $AB = x$ ,  $\triangle ABE$  vuông tại  $A \Rightarrow AB^2 + AE^2 = BE^2$   
 $\Rightarrow AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{5a^2 - x^2}$ .

Xét  $\triangle ABE$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  có.

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5a^2 - x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 2a. \end{cases}$$

Loại  $x = a$  và  $AE = 2a > AB = a$ .

$$\text{Suy ra } AB = 2a \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SH =$$

$$\frac{BH}{\tan \widehat{BSH}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B, \text{ đường cao } BH \Rightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BH^2}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot BH}{\sqrt{AB^2 - BH^2}} = 4a.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} \cdot 2a \cdot 4a = \frac{32a^3\sqrt{5}}{15}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 3.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = AD = a\sqrt{2}$ ,  $BC = BD = a$ , khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACD)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  và thể tích tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng

**(A)**  $90^\circ$ .

**(B)**  $45^\circ$ .

**(C)**  $30^\circ$ .

**(D)**  $60^\circ$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

$$\text{Xét } \triangle ACD \text{ cân tại } A \text{ và } \triangle BCD \text{ cân tại } B \text{ nên } \begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases}$$

$$\Rightarrow CD \perp (ABM)$$

$$\Rightarrow ((ACD), (BCD)) = \widehat{AMB}.$$

Kẻ  $BH$  vuông góc với  $AM$  tại  $H \Rightarrow BH \perp AM$ .

Mà  $CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp BH \Rightarrow BH \perp (ACD)$ .

$$\text{Suy ra } V_{ABCD} = \frac{1}{2}BH \cdot S_{\triangle ACD} \text{ với } BH = d(B, (ACD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{3V}{BH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}.$$

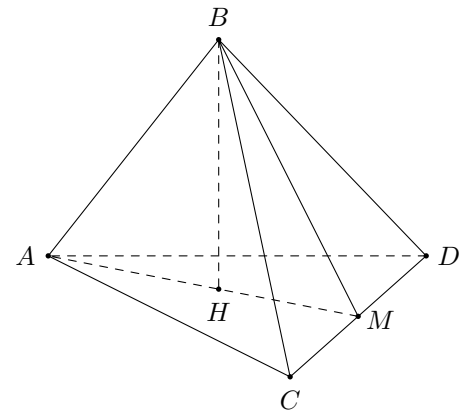
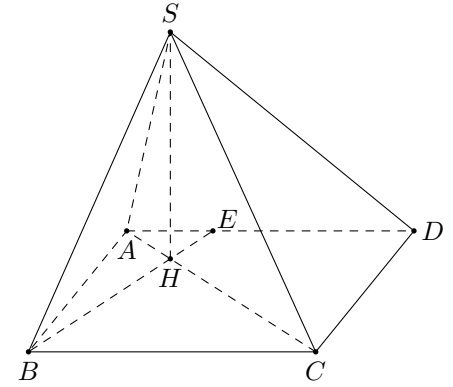
Đặt  $CD = 2x$ .

$$\text{Suy ra } AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AM \cdot CD = x\sqrt{2a^2 - x^2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } BHM \text{ vuông tại } H \text{ có } \sin \widehat{BMH} = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{AMB} = 45^\circ \Rightarrow ((ACD), (BCD)) = 45^\circ.$$



Chọn phương án B

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$ , đáy  $ABCD$  là hình thoi, góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc miền trong của hình thoi  $ABCD$ , biết  $AM$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$  và  $AM = 4$ . Độ dài cạnh  $AB$  bằng bao nhiêu nếu thể tích khối lăng trụ bằng 12?

- (A)  $AB = 2$ . (B)  $AB = 2\sqrt{3}$ . (C)  $AB = 4$ . (D)  $AB = 4\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } AB = x, \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} BD = x \\ AC = x\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có  $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AM$  là hình chiếu của  $AM$  trên mặt phẳng  $(ABC)$

$$\Rightarrow (AM, (ABCD)) = (AM, AM) = \widehat{AMA} = 60^\circ.$$

$$\text{Xét } \triangle AAM \text{ vuông tại } A, \text{ có } \sin \widehat{AMA} = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta lại có } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 12 \Leftrightarrow AA' \cdot S_{ABCD} = 12 \Leftrightarrow S_{ABCD} = 2\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow AB = 2.$$

Vậy  $AB = 2$ .

Chọn phương án A

**Câu 5.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  cạnh đáy bằng 1, khoảng cách từ tâm của tam giác  $ABC$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  bằng  $\frac{1}{6}$ . Thể tích của khối lăng trụ bằng

- (A)  $\frac{3}{16}$ . (B)  $\frac{\sqrt{12}}{16}$ . (C)  $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ . (D)  $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là tâm tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB$

$$\Rightarrow \frac{d(I, (ABC))}{d(A, (ABC))} = \frac{IM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(A, (ABC)) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Xét tứ diện  $A'.ABC$  có  $A'A \perp (ABC)$ . Kẻ  $AH \perp A'M$  (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2).$$

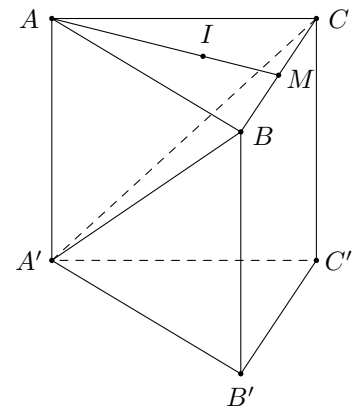
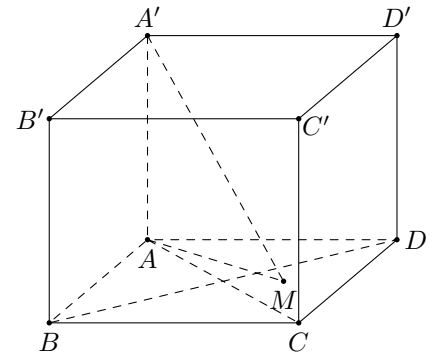
$$\text{Từ (1), (2) ta có } AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d(A, (A'BC)) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle A'AM \text{ vuông: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = \frac{AM \cdot AH}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

Chọn phương án C

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  với  $BA = BC = 5a$ ;  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SBA)$  bằng  $\alpha$  với  $\cos \alpha = \frac{9}{16}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng



(A)  $\frac{50a^3}{3}$ .

(B)  $\frac{125\sqrt{7}a^3}{9}$ .

(C)  $\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$ .

(D)  $\frac{50a^3}{9}$ .

**Lời giải.**

Ta có hai tam giác vuông  $SAB$  và  $SBC$  bằng nhau và chung cạnh huyền  $SB$ .

Kẻ  $AI \perp SB \Rightarrow CI \perp SB$  và góc giữa hai mặt phẳng  $(SBA)$  và  $(SBC)$  là góc giữa hai đường thẳng  $AI$  và  $CI \Rightarrow \widehat{(AI; CI)} = \alpha$ .

Do  $\widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ > \widehat{AIC} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \widehat{AIC} = -\frac{9}{16}$ .

Có  $AC = 5\sqrt{2}a$ ,  $\triangle AIC$  cân tại I, nên có:

$$\frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = \cos \widehat{AIC} \Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow AI^2 = 16a^2 \Rightarrow AI = 4a$$

$$\Rightarrow BI = 3a \Rightarrow SI = \frac{AI^2}{IB} = \frac{16}{3}a \Rightarrow SB = \frac{25a}{3}.$$

**Cách 1.** Dựng  $SD \perp (ABC)$  tại D. Ta có:  $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$ .

Tương tự  $BC \perp CD$ .

Nên tứ giác  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $5a \Rightarrow BD = 5\sqrt{2}a$

$$\Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot \frac{1}{2}BA^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25a^3 = \frac{125\sqrt{7}a^3}{18}.$$

$$\text{CÁCH 2: } V_{S.ABC} = V_{S.ACI} + V_{B.ACI} = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ACI} + \frac{1}{3}BI \cdot S_{ACI} = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ACI}$$

$$\triangle ACI \text{ cân tại I, nên } S_{ACI} = \frac{1}{2}AI^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 16a^2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{25a}{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}a^2}{2} = \frac{125\sqrt{7}a^3}{18}.$$

Chọn phương án (C)

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $BC = 2BA = 4a$ ,  $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = 90^\circ$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SBA)$  bằng  $60^\circ$  và  $SC = SB$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

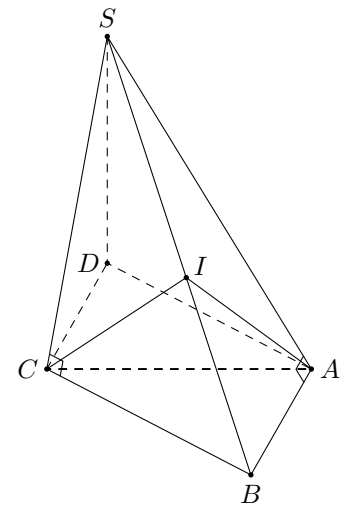
(A)  $\frac{32a^3}{3}$ .

(B)  $\frac{8a^3}{3}$ .

(C)  $\frac{16a^3}{3}$ .

(D)  $\frac{16a^3}{9}$ .

**Lời giải.**





Tam giác  $SBC$  cân cạnh đáy  $BC = 4a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$  thì ta có  $\triangle SEB$  vuông tại  $E$ . Đưa về bài toán gốc với chóp  $S.ABE$ .

Hai tam giác vuông  $SAB, SEB$  bằng nhau vì chung cạnh huyền  $SB, AB = EB = \frac{1}{2}BC = 2a$ .

Kẻ  $AI \perp SB \Rightarrow EI \perp SB$  và góc giữa hai mặt phẳng  $(SBA)$  và  $(SBC)$  cũng là góc giữa hai mặt phẳng  $(SBA)$  và  $(SBC)$  là góc giữa hai đường thẳng  $AI$  và  $EI \Rightarrow \widehat{(AI; EI)} = 60^\circ$ .

Do  $\widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ > \widehat{AIE} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIE} = 120^\circ \Rightarrow \cos \widehat{AIE} = -\frac{1}{2}$ .

Có  $AE = 2\sqrt{2}a, \triangle AIE$  cân tại  $I$ , nên có:  $\frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = \cos \widehat{AIE}$

$$\Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AI^2 = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

$$BI = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SI = \frac{AI^2}{IB} = \frac{4a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \frac{6a}{\sqrt{3}}$$

**Cách 1.** Dựng  $SD \perp (ABC)$  tại  $D$ . Ta có:  $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases}$

$\Rightarrow BA \perp AD$ . Tương tự  $BE \perp ED$ .

Nên tứ giác  $ABED$  là hình vuông cạnh  $2a$

$$\Rightarrow BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2a.$$

$$\text{Thể tích. } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot \frac{1}{2}BC \cdot BA = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4a^2 = \frac{8a^3}{3}.$$

**Cách 2:**  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SB \cdot 2S_{AEI}$ .

$$S_{AEI} = \frac{1}{2}AI^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{8a^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{3}a^2}{3} = \frac{8a^3}{3}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 8.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCB)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

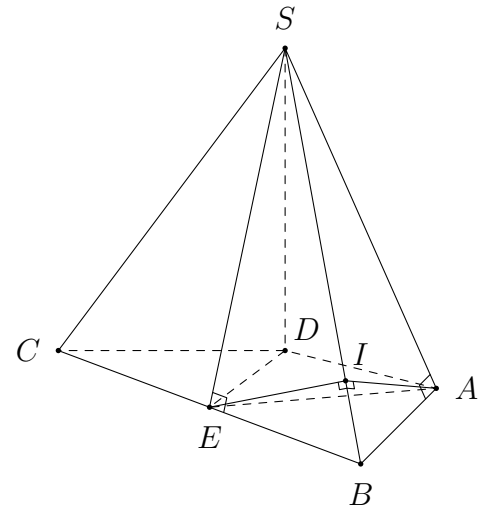
**(A)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ , và  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ABC$ .

Theo giả thiết  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow MS = MB = MA = MC \Rightarrow M$  thuộc trục đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC \Rightarrow MG \perp (ABC)$ .

Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $G$  qua cạnh  $AC$  thì  $\Rightarrow SD \perp (ABC)$ .

Từ giả thiết suy ra hai tam giác vuông bằng nhau  $SAB$  và  $SCB$ .

Do đó từ  $A$  kẻ  $AI \perp SB, I \in SB$  thì  $CI \perp SB$ .

Nên góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCB)$  bằng góc  $(AI, CI) = 60^\circ$ .

$$\text{Do } \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 120^\circ \Rightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } BD = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2}{\sqrt{3}}a \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^3 = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}.$$

Chọn phương án B

**Câu 9.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$ ;  $AB = a$ ;  $AC = a\sqrt{5}$ ;  $\widehat{ABC} = 135^\circ$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(ABD)$ ,  $(BCD)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của tứ diện  $ABCD$  bằng

A  $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$

B  $\frac{a^3}{\sqrt{2}}.$

C  $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$

D  $\frac{a^3}{6}.$

**Lời giải.**

Dựng  $DH \perp (ABC)$ .

Ta có  $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$ . Tương tự  $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$ .

Tam giác  $AHB$  có  $AB = a, \widehat{ABH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle HAB$  vuông cân tại  $A \Rightarrow AH = AB = a, HB = a\sqrt{2}$ .

Áp dụng định lý cosin, ta có  $BC = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Dựng  $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp DB \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ . và  $HF \perp (DBC)$ .

Suy ra  $((DBA), (DBC)) = (HE, HF) = \widehat{EHF}$  và tam giác  $HEF$  vuông tại  $E$ .

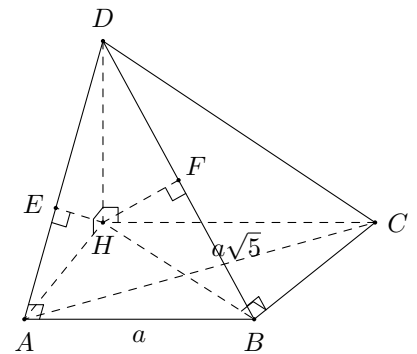
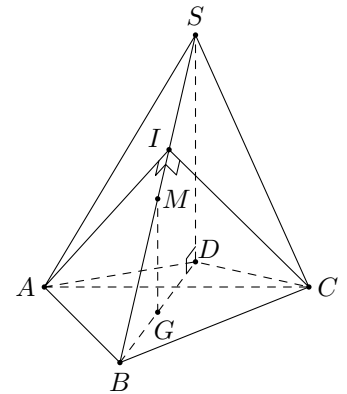
$$\text{Đặt } DH = x, \text{ khi đó } HE = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}, HF = \frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn phương án D

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = \sqrt{2}a, AC = a, BC = \sqrt{3}a, \widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$  và hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$  tạo với nhau một góc  $\alpha$  sao cho  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$



bằng

(A)  $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ .

(B)  $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ .

(C)  $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ .

(D)  $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết:  $AB = \sqrt{2}a, AC = a, BC = \sqrt{3}a$

$\Rightarrow BC^2 = 3a^2 = 2a^2 + a^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

Dựng  $SD \perp (ABC)$ . Dễ chứng minh được  $ABDC$  là hình chữ nhật.

$DB = AC = a, DC = AB = \sqrt{2}a$ . Gọi  $SD = h$ .

Áp dụng công thức tính nhanh:  $\frac{DB}{SB} \cdot \frac{DC}{SC} = \cos \alpha$ .

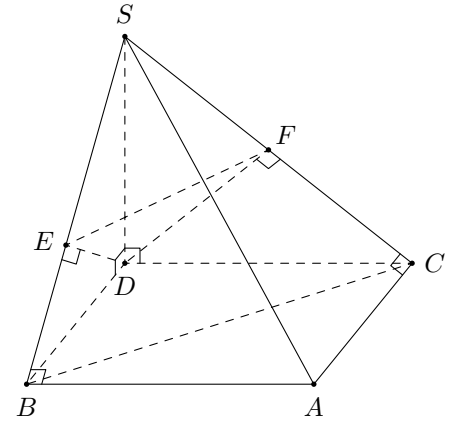
Chọn  $a = 1$ :  $\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow h^4 + 3h^2 - 4 = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = 1$

$\Rightarrow h = SD = 1$ .

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Vì chọn  $a = 1$ , theo đề bài ta chọn được  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ .

Chọn phương án (D)



**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB > 2a$  và  $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$ . Biết sin của góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $\frac{\sqrt{11}}{11}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A)  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ .

(B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ .

(C)  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .

(D)  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải.**

- Dựng  $SD \perp (ABC)$  tại  $D$ . Ta có:  $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$ .

Và:  $\begin{cases} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD \Rightarrow ABCD$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow DA = BC = a\sqrt{2}, DC = AB = a$ .

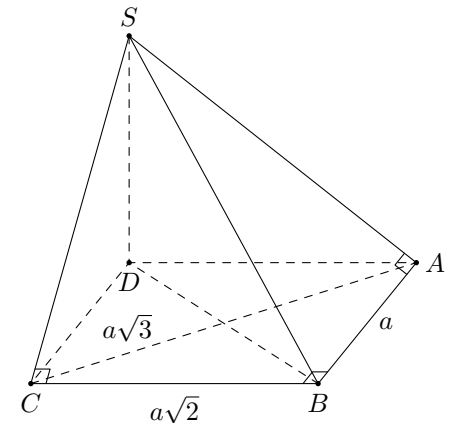
- Sử dụng công thức  $\sin(SB, (SAC)) = \frac{d(B, (SAC))}{SB}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{11} = \frac{d(B, (SAC))}{SB} = \frac{d(D, (SAC))}{SB} \Rightarrow \frac{1}{d^2(D, (SAC))} = \frac{11}{SB^2} \quad (1).$$

- Lại có:

$$\frac{1}{d^2(D, (SAC))} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - BD^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{11}{SB^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} SB^2 = 6a^2 \\ SB^2 = \frac{11}{3}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SB = a\sqrt{6} \\ SB = a\sqrt{\frac{11}{3}} \end{cases}$$



Theo giả thiết  $SB > 2a \Rightarrow SB = a\sqrt{6} \Rightarrow SD = a\sqrt{3}$ .

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3}SD \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = 4$ ,  $SB = 6$ ,  $SC = 12$  và  $\widehat{ASB} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BSC} = 90^\circ$  và  $\widehat{CSA} = 120^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

**(A)**  $36\sqrt{3}$ .

**(B)**  $36\sqrt{2}$ .

**(C)**  $24\sqrt{3}$ .

**(D)**  $24\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Trên tia  $SA, SB$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $SM = SN = 12$ .

Khi đó ta có:

Tam giác  $SMN$  đều  $\Rightarrow MN = 12$ .

Tam giác  $SNC$  vuông tại  $S$  nên  $CN = SC\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .

Tam giác  $SMC$  cân tại  $S$  có  $MC = \sqrt{SC^2 + SM^2 - 2SC \cdot SM \cdot \cos \widehat{CSM}} = 12\sqrt{3}$ .

Từ đó suy ra  $MC^2 = MN^2 + CN^2 \Rightarrow$  tam giác  $CMN$  vuông tại  $N$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(CMN)$ .

Vì  $SC = SM = SN = 12$  nên  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CMN$

$\Rightarrow H$  là trung điểm của  $MC \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = 6$ .

$$S_{CMN} = \frac{1}{2}MN \cdot NC = 72\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.CMN} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{CMN} = 144\sqrt{2}.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.MNC} = 24\sqrt{2}.$$

Chọn phương án **D**

**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ , góc giữa  $AB$  và  $(SBC)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

**(A)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

**(B)**  $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$ .

**(C)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ .

**(D)**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải.**

Dựng hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $SB$ .

Do  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  nên hình chóp  $S.ABC$  nội tiếp mặt cầu tâm  $I$  đường kính  $SB$ .

Do  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

$OI$  là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

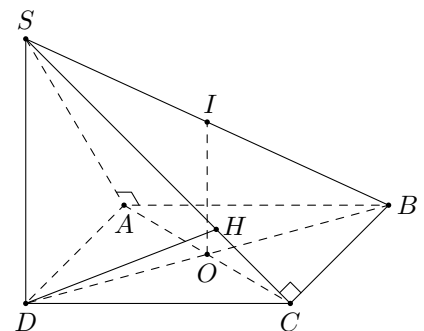
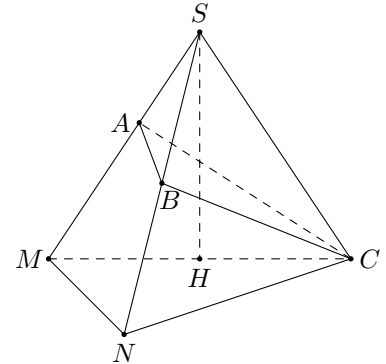
Suy ra  $OI \perp (ABC) \Rightarrow SD \perp (ABC)$ .

Mà  $(AB, (SBC)) = (DC, (SBC)) = (CD, CS) = \widehat{DCS} = 60^\circ$

$$SD = CD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Từ đây ta suy ra: } V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn phương án **A**



**Câu 14.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ,  $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $SB$  và  $(SAC)$  thỏa mãn  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$ , khoảng cách từ  $S$  đến mặt đáy nhỏ hơn  $2a$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

- (A)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ . (B)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ . (C)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ . (D)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$ .

**Lời giải.**

+ Gọi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  lên đáy  $(ABC)$ , đặt  $SD = x$  ( $0 < x < 2a$ ).

Ta có  $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DC$ . Tương tự ta cũng có  $AB \perp DB$ .

+ Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $\widehat{CAB} = 120^\circ \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$  và  $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle DBC$  đều cạnh  $a\sqrt{3}$ .

+ Tam giác  $SDC$  vuông tại  $D \Rightarrow SB = \sqrt{3a^2 + x^2}$ .

+ Kẻ  $DK \perp SC$  tại  $K \Rightarrow DK \perp (SAC) \Rightarrow d(D; (SAC)) = DK = \frac{x \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + x^2}}$ .

+ Gọi  $I = BD \cap AC$ , xét  $\triangle DIC$  vuông tại  $C$  và  $\widehat{BDC} = 60^\circ$

$\Rightarrow DI = \frac{DC}{\cos \widehat{BDC}} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow B$  là trung điểm của  $DI \Rightarrow d(B; (SAC)) = \frac{1}{2}d(D; (SAC))$ .

Theo giả thiết  $\varphi = (SB; (SAC)) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{d(B; (SAC))}{SB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{xa\sqrt{3}}{2(3a^2 + x^2)} \Leftrightarrow x^2 + 3a^2 - 4ax =$

$0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 4\frac{x}{a} + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 3a \end{cases}$ . So sánh với điều kiện suy ra  $x = a$ .

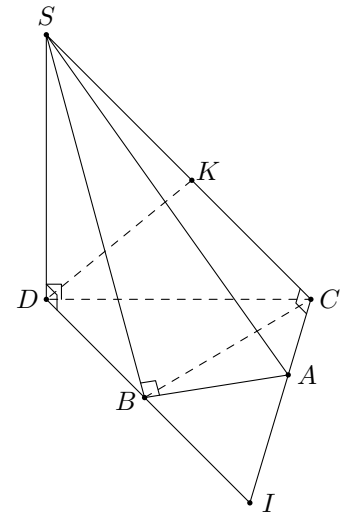
Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .

Chọn phương án (C)

**Câu 15.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ ,  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Biết khoảng cách từ  $A$  đến  $(MBC)$  bằng  $\frac{6a}{\sqrt{21}}$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A)  $\frac{8a^3\sqrt{39}}{3}$ . (B)  $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$ . (C)  $\frac{4a^3\sqrt{13}}{3}$ . (D)  $2a^3\sqrt{3}$ .

**Lời giải.**



Trong mp  $(ABC)$  xác định điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $C$ .

Khi đó ta có:  $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD; \begin{cases} CB \perp CD \\ CB \perp SC \end{cases} \Rightarrow CB \perp SD.$

Vậy  $SD \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot S_{\triangle ABC}.$

Có tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = a^2\sqrt{3}.$

Ta đi tìm  $SD$  Gọi  $I$  là trung điểm  $AC$ .

vì tam giác  $ABC$  đều,  $ABCD$  nội tiếp đường tròn đường kính  $BD$

$I \in BD \Rightarrow AC \perp BD.$

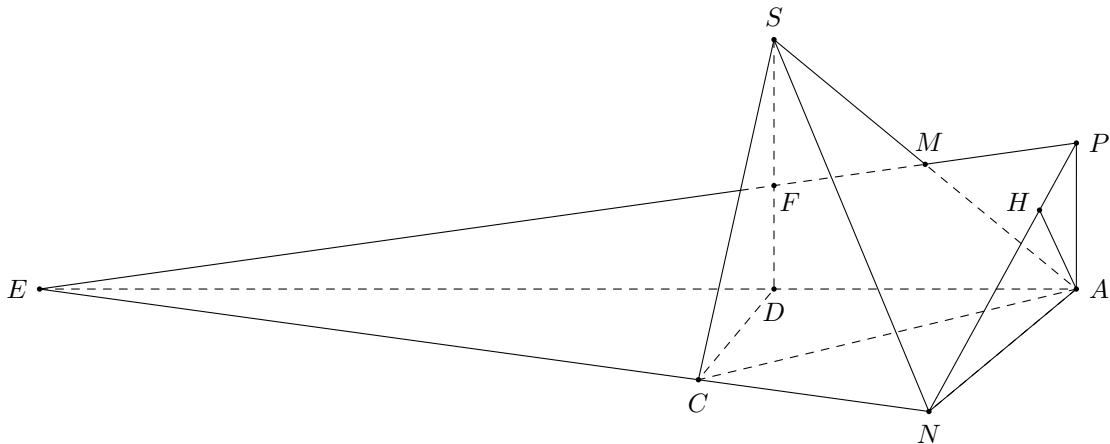
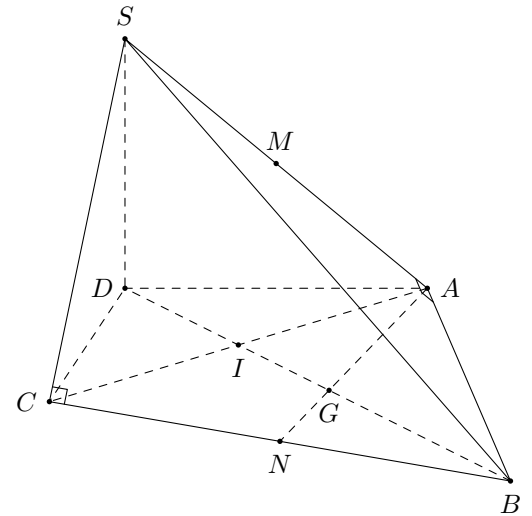
Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $N$  là trung điểm  $BC$ .

Vì tam giác  $ABC$  đều  $\Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow AN \parallel CD$ , tương tự  $CG \parallel BD$ .

Dễ thấy  $AGCD$  là hình thoi  $\Rightarrow CD = AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}2a = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$  (1).

Xét hình chóp  $S.ANCD$  có đáy  $ANCD$  là hình thang vuông tại  $C, N$ .

Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(MNC)$  bằng  $\frac{6a}{\sqrt{21}}$  vì  $(MNC) \equiv (MBC).$



Trong mp  $(ABCD)$  gọi  $\{E\} = CN \cap AD$ .

Trong mp  $(SAD)$  kẻ tia  $At \parallel SD$  gọi  $\{P\} = EM \cap At$ .

Gọi  $K$  là hình chiếu của  $G$  trên mặt phẳng  $(CMB)$ .

Khi đó ta có  $\begin{cases} AP \parallel SD \Rightarrow AP \perp CN \\ AN \perp CN \end{cases} \Rightarrow (APN) \perp CN.$

Trong mp  $(APN)$  kẻ  $AH \perp PN$  ta có  $AH = d(A, (MCN)) = \frac{6a}{\sqrt{21}}.$

Mà tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a \Rightarrow AN = a\sqrt{3}$ .

$$\text{Từ } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{21}{36a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow AP = 2a.$$

Để thấy  $\triangle APM = \triangle SFM \Rightarrow SF = AP = 2a$  (2).

Xét tam giác  $EAN$  có  $CD \parallel AN$  nên  $\frac{ED}{EA} = \frac{CD}{AN} = \frac{2}{3}$  (theo (1)).

Xét tam giác  $EAP$  có  $FD \parallel PA$  nên  $\frac{FD}{PA} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow \frac{FD}{PA} = \frac{2}{3}$   
 $\Rightarrow FD = \frac{4a}{3}$  (3).

Từ (2) và (3) ta có  $SD = SF + FD = \frac{10a}{3}$ .

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10a}{3} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{10a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 16.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , tam giác  $SBA$  vuông tại  $B$ , tam giác  $SAC$  vuông tại  $C$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$  theo  $a$ .

**(A)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $D$  là hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ , suy ra  $SD \perp (ABC)$ .

Ta có  $SD \perp AB$  và  $SB \perp AB(gt)$ , suy ra  $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$ .

Tương tự có  $AC \perp DC$  hay tam giác  $ACD$  vuông ở  $C$ .

Để thấy  $\triangle SBA = \triangle SCA$  (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra  $SB = SC$ .

Từ đó ta chứng minh được  $\triangle SBD = \triangle SCD$  nên cũng có  $DB = DC$ .

Vậy  $DA$  là đường trung trực của  $BC$ , nên cũng là đường phân giác của góc  $\widehat{BAC}$ .

Ta có  $\widehat{DAC} = 30^\circ$ , suy ra  $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Ngoài ra góc giữa hai mặt

phẳng  $(SAB)$  và  $(ABC)$  là  $\widehat{SBD} = 60^\circ$ , suy ra  $\tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow$

$$SD = BD \tan \widehat{SBD} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là điểm  $H$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IH}$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  là  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là

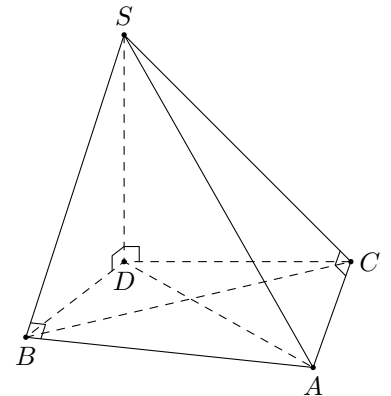
**(A)**  $V = \frac{a^3}{9}$ .

**(B)**  $V = \frac{a^3}{6}$ .

**(C)**  $V = \frac{a^3}{18}$ .

**(D)**  $V = \frac{a^3}{3}$ .

**Lời giải.**



Dễ thấy hai tam giác  $SAB$  và  $SAC$  bằng nhau (cạnh chung  $SB$ ), gọi  $K$  là chân đường cao hạ từ  $A$  trong tam giác  $SAB$  suy ra  $((SAB), (SBC)) = \widehat{AKC}$ .

TH 1: Nếu  $\widehat{AKC} = 60^\circ$  và  $I$  là trung điểm  $AC \Rightarrow \widehat{IKC} = 30^\circ$ .

Ta có  $IB = IC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $BH = \frac{4}{3}BI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .

Từ giả thiết  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B \Rightarrow AC \perp BI \Rightarrow IC \perp IK$ .

Trong  $\triangle ICK$  vuông tại  $I$  ta có:

$$\tan \widehat{IKC} = \frac{IC}{IK} \Leftrightarrow IK = \frac{IC}{\tan 30^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Như vậy  $IK > IB$  (vô lý).

TH 2: Nếu  $\widehat{AKC} = 120^\circ$  tương tự phần trên ta có:

$$\tan \widehat{IKC} = \frac{IC}{IK} \Leftrightarrow IK = \frac{IC}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Do  $SB \perp (AKC) \Rightarrow SB \perp IK$  nên  $\triangle BIK$  vuông tại  $K$  và  $BK = \sqrt{IB^2 - IK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Như vậy tam giác  $BKI$  đồng dạng với tam giác  $BHS$  suy ra:  $SH = \frac{IK \cdot BH}{BK} = \frac{2a}{3}$ .

Vậy thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{9}$ .

Chọn phương án (A)

**Câu 18.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$ ,  $BC = CD = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$  bằng

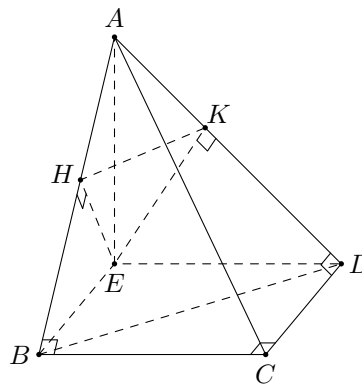
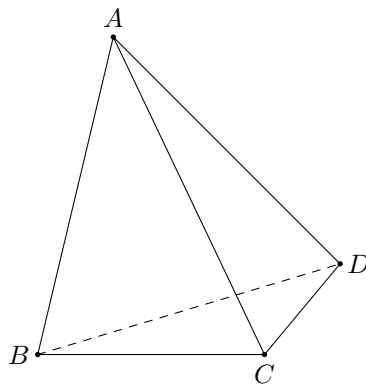
(A)  $60^\circ$ .

(B)  $30^\circ$ .

(C)  $45^\circ$ .

(D)  $90^\circ$ .

**Lời giải.**



Gọi  $E$  là hình chiếu của  $A$  lên mặt phẳng  $(BCD)$ .

Kết hợp đề bài  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp BE$ ;  $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AE \end{cases} \Rightarrow CD \perp ED$  và  $BC = CD = a$ .

Suy ra tứ giác  $BCDE$  là hình vuông cạnh  $a$ .

Khi đó  $AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = a$ .



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  lên  $(ABC), (ACD)$  thì  $EH \perp (ABC), EK \perp (ACD)$  nên góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$  là góc  $(EH, EK)$ .

Nhận xét 2 tam giác  $AEB$  và  $AED$  là vuông cân tại  $E$  nên  $EH = EK = \frac{a\sqrt{2}}{2}; HK = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

suy ra tam giác  $EHK$  đều.

Vậy số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$  là  $60^\circ$ .

Chọn phương án A

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = BC = a\sqrt{3}$ ,  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{2}$ . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  bằng

A  $2\pi a^2$ .

B  $8\pi a^2$ .

C  $16\pi a^2$ .

D  $12\pi a^2$ .

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  lên  $(ABC)$ .

Ta có:  $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$ . Tương tự  $AH \perp AB$ .

Và  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$  nên  $ABCH$  là hình vuông.

Gọi  $O = AC \cap BH$ ,  $O$  là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng  $d$  qua  $O$  vuông góc với  $(ABCH)$ , dựng mặt phẳng trung trực của  $SA$  qua trung điểm  $J$  cắt  $d$  tại  $I \Rightarrow I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Có  $IJ \perp SA \Rightarrow IJ \parallel AB \Rightarrow I$  là trung điểm  $SB$ , hay  $I = d \cap SC$ .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp:

$$r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}; IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do  $AH \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC)) = HK$  ( $K$  là hình chiếu của  $H$  lên  $SC$  và  $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = a\sqrt{2}$ . Tam giác  $SHC$  vuông tại  $H \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$ .

Tam giác  $SHA$  vuông tại  $H \Rightarrow SA = 3a$ . Suy ra  $JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3}$ .

Vậy  $S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$ .

Chọn phương án D

**Câu 20.** Tứ diện  $ABCD$  có  $BC = 3, CD = 4, \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ, (AD, BC) = 60^\circ$ . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$  bằng

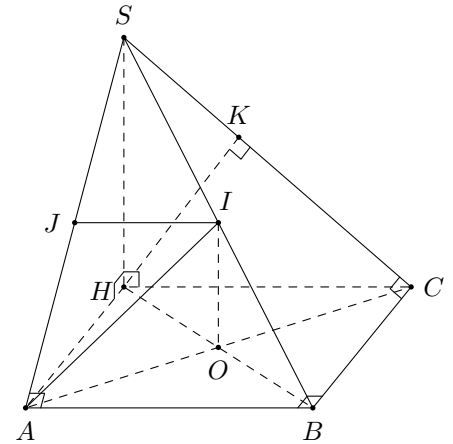
A  $\frac{\sqrt{43}}{86}$ .

B  $\frac{4\sqrt{43}}{43}$ .

C  $\frac{\sqrt{43}}{43}$ .

D  $\frac{2\sqrt{43}}{43}$ .

**Lời giải.**



Gọi  $H$  là chân đường cao của tứ diện  $ABCD$ .

Ta có:  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB \quad (1).$

Lại có:  $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD \quad (2).$

Mà  $\widehat{BCD} = 90^\circ$ . Từ đây ta suy ra  $HBCD$  là hình chữ nhật.

Mặt khác:  $(AD, BC) = (AD, HD) = \widehat{ADH} = 60^\circ$ .

Suy ra:  $AH = HD \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ .

Chọn hệ trục  $Oxyz \equiv H \cdot DBA$  như hình vẽ.

Ta có:  $H(0; 0; 0)$ ,  $A(0; 0; 3\sqrt{3})$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(3; 4; 0)$ ,  $D(3; 0; 0)$ .

$\overrightarrow{AD} = (3; -3; -3\sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{AC} = (3; 4; -3\sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{AB} = (0; 4; -3\sqrt{3})$ .

Gọi  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  lần lượt là một véc-tơ pháp tuyến của  $(ABC)$  và  $(ABD)$ .

Suy ra:  $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -9\sqrt{3}; -12)$ ;  $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = (21\sqrt{3}; 0; 21)$ .

Vậy  $\cos((ABC), (ADC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 21\sqrt{3} - 9\sqrt{3} \cdot 0 - 12 \cdot 21|}{\sqrt{0^2 + (-9\sqrt{3})^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(21\sqrt{3})^2 + 0^2 + (21)^2}} = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$

Chọn phương án **D**

**Câu 21.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$  và  $BC = 1$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ,  $BD = 2$ ,  $AB = 3$ .

Khoảng cách từ  $B$  đến  $(ACD)$  bằng

**(A)**  $\frac{\sqrt{6}}{7}.$

**(B)**  $\frac{\sqrt{42}}{7}.$

**(C)**  $\frac{\sqrt{7}}{7}.$

**(D)**  $\frac{\sqrt{14}}{7}.$

**Lời giải.**

Theo giả thiết  $BC = 1$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ,  $BD = 2 \Rightarrow BC^2 + DC^2 = BD^2$

$\Rightarrow \triangle BCD$  vuông tại  $C$ .

Dựng hình chữ nhật  $BCDE \Rightarrow BC \parallel ED$  mà  $DC \perp BC \Rightarrow DC \perp DE$ , lại có  $DC \perp AD \Rightarrow DC \perp (ADE) \Rightarrow DC \perp AE \quad (1).$

Chứng minh tương tự  $BC \perp (ABE) \Rightarrow BC \perp AE \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra  $AE \perp (BCDE)$ .

Kẻ  $EH \perp AD$  tại  $H$ . Do  $DC \perp (ADE)$

nên  $DC \perp EH \Rightarrow EH \perp (ACD)$ .

Do  $BE \parallel CD \Rightarrow d(B, (ACD)) = d(E, (ACD)) = EH$ .

Ta có  $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$

Suy ra  $\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{EA^2} + \frac{1}{ED^2} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} \Rightarrow EH = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$

Vậy  $d(B, (ACD)) = EH = \frac{\sqrt{42}}{7}.$

Chọn phương án **B**

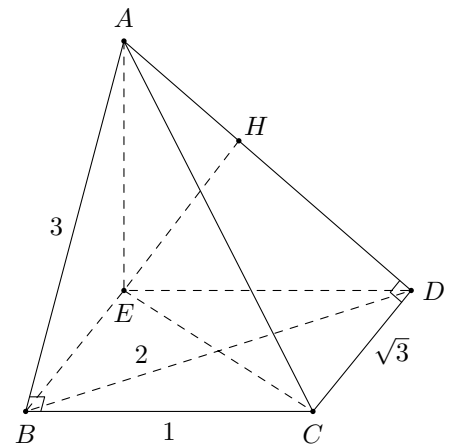
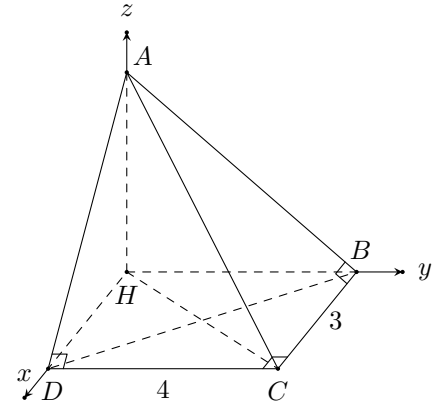
**Câu 22.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt đáy,  $SA = BC$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên các cạnh  $SB$  và  $SC$  lần lượt là  $M$  và  $N$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(AMN)$  bằng

**(A)**  $45^\circ.$

**(B)**  $60^\circ.$

**(C)**  $15^\circ.$

**(D)**  $30^\circ.$



**Lời giải.**

Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  có đường kính là  $AD$ .

Khi đó tam giác  $ABD$  vuông tại  $B \Rightarrow AB \perp BD$ .

Ta có  $\begin{cases} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$ .

Ta có  $\begin{cases} BD \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $AN \perp SD$ .

Do đó  $SD \perp (AMN)$  suy ra  $((ABC), (AMN)) = (SA, SD) = \widehat{ASD}$ .

Xét tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$  có  $\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA}$ .

Với  $AD = 2R_{\triangle ABC} = 2 \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} SA$ .

Do đó  $\tan \widehat{ASD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ \Rightarrow ((ABC), (AMN)) = 30^\circ$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ,  $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $SB$  và  $(SAC)$  thỏa mãn  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$ , khoảng cách từ  $S$  đến mặt đáy nhỏ hơn  $2a$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

**(A)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  lên đáy  $(ABC)$ .

Đặt  $SD = x$  ( $0 < x < 2a$ ).

Ta có  $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DC$ .

Tương tự ta cũng có  $AB \perp DB$ .

Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $\widehat{CAB} = 120^\circ \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$  và  $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle DBC$  đều cạnh  $a\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SDC$  vuông tại  $D \Rightarrow SC = \sqrt{3a^2 + x^2} = SB$ .

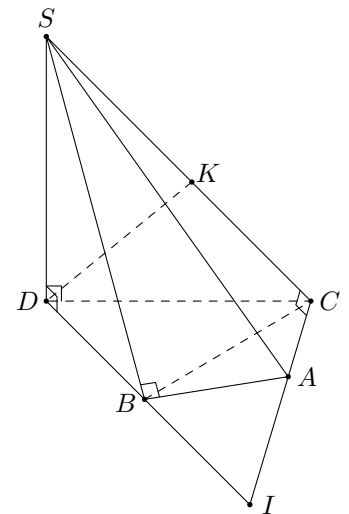
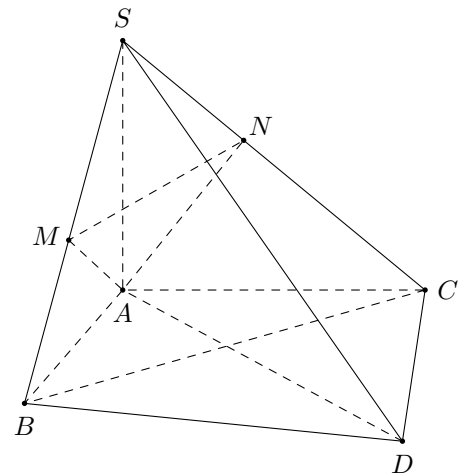
Kẻ  $DK \perp SC$  tại  $K \Rightarrow DK \perp (SAC)$

$$\Rightarrow d(D, (SAC)) = DK = \frac{x \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + x^2}}.$$

Gọi  $I = BD \cap AC$ , xét  $\triangle DIC$  vuông tại  $C$  và  $\widehat{BDC} = 60^\circ$

$$\Rightarrow DI = \frac{DC}{\cos \widehat{BDC}} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow B \text{ là trung điểm của } DI \Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{1}{2}d(D, (SAC)).$$

$$\text{Theo giả thiết } \varphi = (SB, (SAC)) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{d(B, (SAC))}{SB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{xa\sqrt{3}}{2(3a^2 + x^2)}$$



$$\Leftrightarrow x^2 + 3a^2 - 4ax = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 4\frac{x}{a} + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 3a \end{cases}. \text{ So sánh với điều kiện suy ra } x = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn phương án **C**

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = AB = \sqrt{3}$ ;  $SB = \sqrt{6}$ ;  $AC = 2BC = 2$ ;  $SC = \sqrt{5}$ . Khoảng cách từ  $A$  đến  $(SBC)$  bằng

**(A)**  $\frac{\sqrt{30}}{6}$ .

**(B)**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**(C)**  $\frac{\sqrt{13}}{6}$ .

**(D)**  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ .

**Lời giải.**

Đựng điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình chữ nhật.

Áp dụng định lý Pitago ta có các tam giác  $SAB$ ;  $ABC$ ;  $SBC$  lần lượt vuông góc tại  $A, B, C$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD \quad (1) \text{ và } \begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD \quad (2).$$

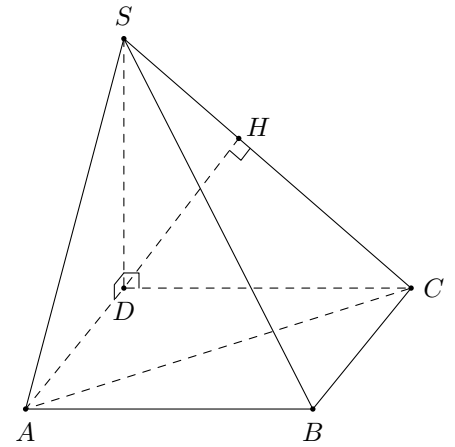
Từ (1); (2)  $\Rightarrow SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$ .

Vậy  $(SBC) \perp (SDC)$  theo giao tuyến  $SC$ .

Kẻ  $DH$  vuông góc với  $SC$  tại  $H$  thì  $DH \perp (SBC)$ .

$$\text{Có } AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = DH = \frac{DS \cdot DC}{\sqrt{DS^2 + DC^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Chọn phương án **D**



**Câu 25.** Cho hình chóp  $S.ABC$ , đáy là tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng  $a\sqrt{3}$ . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp  $S.ABC$ .

**(A)**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .

**(B)**  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

**(C)**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ .

**(D)**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên mặt phẳng đáy  $(ABC)$ ;  $M, N, K$  lần lượt là hình chiếu của  $S$  trên  $AB, BC, CA$ .

Vì diện tích các mặt bên của hình chóp bằng nhau nên ta có  $\frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}SN \cdot BC = \frac{1}{2}SK \cdot CA$  và vì tam giác  $ABC$  đều nên ta có

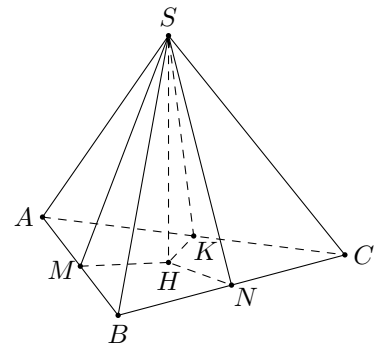
$$SM = SN = SK \Rightarrow HM = HN = HK.$$

**TH1:** nếu  $H$  nằm trong tam giác  $ABC \Rightarrow H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều  $ABC$ .

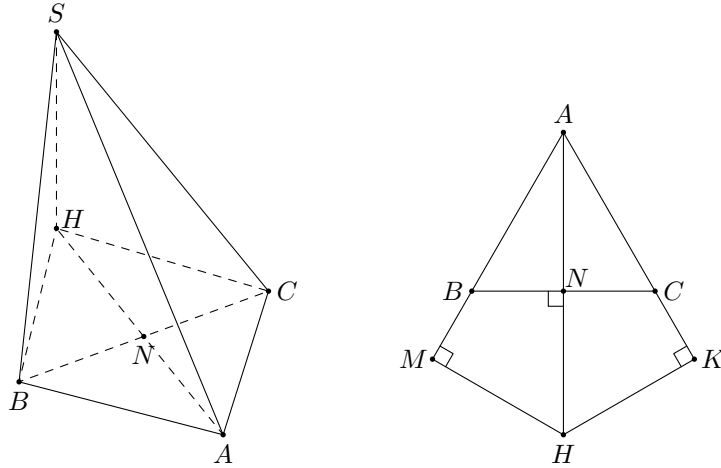
$$\text{Khi đó ta có } AH = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } SA = SB = SC = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$



**TH2:** Nếu  $H$  nằm ngoài tam giác  $ABC$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $H$  nằm khác phía với  $A$  so với đường thẳng  $BC$ .



Tương tự như trên ta vẫn có  $HM = HN = HK$ . Vì tam giác  $ABC$  đều nên  $H$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$  và  $AM = AB + BN = \frac{3a}{2} \Rightarrow HB = \frac{BN}{\cos 60^\circ} = \frac{a}{2} : \frac{1}{2} = a$ ,  $AH = AM : \cos 30^\circ = \frac{3a}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Vì thể cạnh  $SA$  không thể bằng  $a\sqrt{3} \Rightarrow SB = SC = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Vậy  $V_{\min} = \min \left\{ \frac{a^3\sqrt{2}}{6}, \frac{a^3\sqrt{6}}{12} \right\} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$

Chọn phương án **C**

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành thỏa mãn  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $BC = 2a$ . Biết tam giác  $SBC$  cân tại  $S$ , tam giác  $SCD$  vuông tại  $C$  và khoảng cách từ  $D$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

**A**  $\frac{2a^3}{3\sqrt{5}}.$

**B**  $\frac{a^3}{3\sqrt{5}}.$

**C**  $\frac{a^3}{3\sqrt{3}}.$

**D**  $\frac{a^3}{\sqrt{5}}.$

**Lời giải.**

Nhận thấy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  (do  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ).

Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $A$  ta có tứ giác  $ACDE$  là hình chữ nhật, và tam giác  $EBC$  là tam giác đều cạnh  $2a$ .

Do  $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}d(E, (SBC)).$

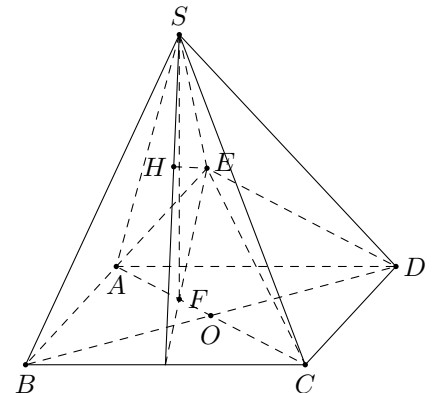
Hay  $d(E, (SBC)) = 2 \cdot d(D, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $BC$ .

Ta có:  $BC \perp EI, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SEI).$

Trong  $mp(SEI)$  kẻ  $EH$  vuông góc với  $SI$  tại  $H$ .

Khi đó:  $d(E, (SBC)) = EH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$



Ta có  $CD \perp (SAC)$  (Do  $CD \perp SC, CD \perp AC$ ) Suy ra  $AB \perp (SAC)$ .

Xét tam giác  $SBE$  có  $SA$  vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác  $SBE$  cân tại  $S$ .

Xét hình chóp  $S.EBC$  có đáy là tam giác đều  $EBC$ , các cạnh bên  $SE = SB = SC$ .

Nên gọi  $F = EI \cap CA$  ta có  $SF \perp (EBC)$ .

$$\text{Tam giác } EHI \text{ vuông tại } H \text{ nên } \sin \hat{I} = \frac{HE}{EI} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Tam giác } SIF \text{ vuông tại } F \text{ nên } SF = FI \cdot \tan \hat{I} = \frac{1}{3}EI \cdot \frac{\sin \hat{I}}{\sqrt{1 - \sin^2 \hat{I}}} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2}} = \frac{2a}{\sqrt{15}}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SF \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}SF \cdot AB \cdot CA = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{15}} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3}{3\sqrt{5}}.$$

Chọn phương án **(A)**

**Câu 27.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAB$  và tam giác  $SCD$  cân tại  $S$ . Biết hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SCD)$  có tổng diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$  và chúng vuông góc với nhau. Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng

**(A)**  $\frac{a^2}{4}$ .

**(B)**  $\frac{a^2}{12}$ .

**(C)**  $\frac{a^2}{6}$ .

**(D)**  $\frac{a^2}{3}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $CD$ .

Khi đó  $EF \parallel AD \Rightarrow EF \perp AB$ .

Do  $\triangle SAB$  và  $\triangle SCD$  cân tại  $S$  nên  $SE \perp AB$  và  $SF \perp CD$ .

$$\text{Lúc đó có } \begin{cases} SE \perp AB \\ EF \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEF) \Rightarrow (ABCD) \perp (SEF).$$

Do đó, chân đường cao hạ từ  $S$  xuống đáy là  $H$  phải nằm trên giao tuyến  $EF$  của  $(ABCD)$  và  $(SEF)$ .

Mặt khác, giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng  $d$  qua  $S$  và song song  $AB$  nên  $SE \perp d$  và  $SF \perp d$ , tức là  $\widehat{ESF}$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ , hay nói cách khác ta có  $SE \perp SF$ .

$$\text{Xét tam giác } SEF \text{ vuông tại } S \text{ có } SH^2 = \frac{SE^2 \cdot SF^2}{SE^2 + SF^2} = \frac{SE^2 \cdot SF^2}{(SE + SF)^2 - 2SE \cdot SF} \quad (1).$$

$$\text{Ta có } SE \cdot SF = SH \cdot EF = 2S_{\triangle SEF}.$$

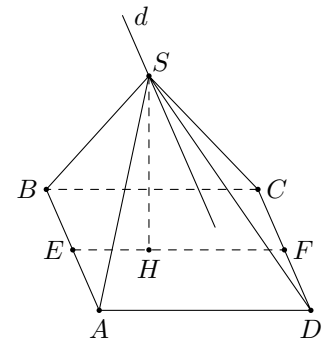
$$\text{Từ giả thiết } S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SCD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow SE \cdot AB + SF \cdot CD = \sqrt{3}a^2 \text{ hay } SE + SF = \sqrt{3}a.$$

$$\text{Thay vào (1) ta có } SH^2 = \frac{SH^2 \cdot EF^2}{(SE + SF)^2 - 2SH \cdot EF} = \frac{SH^2 \cdot a^2}{3a^2 - 2SH \cdot a} \Rightarrow SH = a.$$

$$\text{Vậy thể tích hình chóp } S.ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  và khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$  bằng  $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$ . Tính thể tích khối  $S.ABC$ .



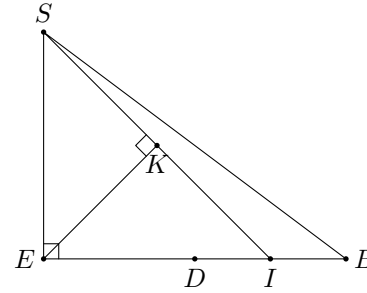
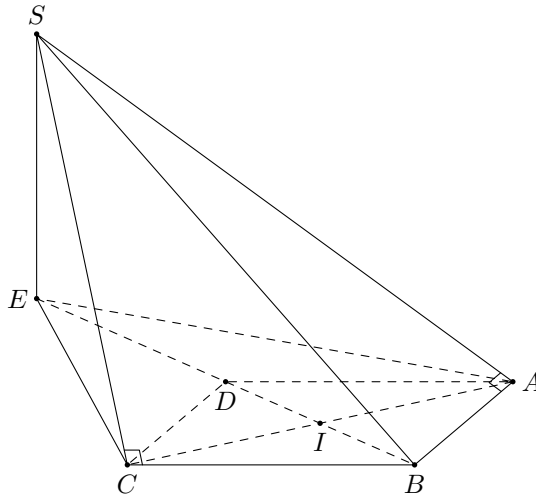
Ⓐ  $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{10}$ .

Ⓑ  $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{10}$ .

Ⓒ  $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{5}$ .

Ⓓ  $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{2}$ .

**Lời giải.**



Hạ  $SE \perp (ABC)$  tại  $E$  ta có  $\begin{cases} AB \perp SE \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAE) \Rightarrow AB \perp AE \Rightarrow \widehat{BAE} = 90^\circ$ .

Chứng minh tương tự có  $\widehat{BCE} = 90^\circ$ .

Hai tam giác vuông  $BCE$  và  $BAE$  bằng nhau suy ra  $\widehat{CBE} = \widehat{ABE} = 60^\circ$ .

Gọi  $D$  là trung điểm của  $BE$  suy ra tứ giác  $ABCD$  là hình thoi và  $BD = DE = a$ .

Gọi  $I$  là tâm hình thoi  $ABCD$  có  $BI = \frac{1}{3}EI$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{1}{3}d(E, (SAC)) \Rightarrow d(E, (SAC)) = 3 \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Do  $\begin{cases} CA \perp BD \\ CA \perp SE \end{cases} \Rightarrow CA \perp (SEI) \Rightarrow (SAC) \perp (SEI)$ .

Hạ  $EK \perp SI$  tại  $K$  ta có  $EK \perp (SAC)$  tại  $K$  suy ra  $d(E, (SAC)) = EK \Rightarrow EK = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$ .

Tam giác  $SBE$  vuông tại  $E$  đường cao  $EK$  có  $\frac{1}{EK^2} = \frac{1}{EI^2} + \frac{1}{SE^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SE^2} = \frac{1}{EK^2} - \frac{1}{EI^2} = \frac{7}{12a^2} - \frac{4}{9a^2} = \frac{5}{36a^2} \Rightarrow SE = \frac{6a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SE = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin 120^\circ \right) \cdot SE = \frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3\sqrt{15}}{10}.$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 29.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ,  $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$ . Khi  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  thì thể tích khối chóp đã cho bằng

Ⓐ  $3a^3$ .

Ⓑ  $a^3$ .

Ⓒ  $\frac{3a^3}{4}$ .

Ⓓ  $\frac{a^3}{4}$ .

**Lời giải.**



Kẻ  $SH \perp (ABC)$ ,  $H \in (ABC)$  suy ra  $SH \perp AB$  và  $SH \perp AC$ .

Khi đó ta có  $\begin{cases} SH \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$ .

Chứng minh tương tự ta có  $AC \perp CH$  suy ra tứ giác  $ABHC$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$ . Do đó góc  $BHC$  bằng  $60^\circ$ .

Dễ thấy  $\triangle AHB = \triangle AHC \Rightarrow HB = HC$  nên  $\triangle HBC$  đều.

Ta có:  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$  suy ra  $BC^2 = 3a^2$ .

Do đó  $HB^2 = HC^2 = BC^2 = 3a^2$ .

Dễ thấy  $\triangle SHB = \triangle SHC \Rightarrow SB = SC$  nên  $\triangle SAB = \triangle SAC$ .

Trong mặt phẳng  $(SAB)$  kẻ  $BK \perp SA$ , ( $K \in SA$ ).

Trong mặt phẳng  $(SAC)$  kẻ  $CK_1 \perp SA$ , ( $K_1 \in SA$ ).

Xét hai tam giác vuông  $\triangle KAB$  và  $\triangle K_1AC$  có  $AB = AC$ ,  $\widehat{BAK} = \widehat{CAK_1}$  (vì  $\triangle SAB = \triangle SAC$ ).

Suy ra  $\triangle KAB = \triangle K_1AC \Rightarrow AK = AK_1$  mà  $K$  và  $K_1$  nằm giữa  $S$  và  $A$  nên  $K \equiv K_1$ .

Từ đó ta có  $CK \perp SA$  và  $BK = CK$ .

Do đó  $\cos \alpha = \left| \cos \widehat{BKC} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{BK^2 + CK^2 - BC^2}{2BK \cdot CK} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{2BK^2 - BC^2}{2BK^2} \right| = \frac{3}{4} \quad (1).$

Đặt  $SH = x$ , ( $x > 0$ ).

Xét  $\triangle SHB$  có  $SB^2 = SH^2 + HB^2 = 3a^2 + x^2$ .

Xét  $\triangle SAB$  vuông tại  $B$  có  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BS^2} \Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2 + x^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2}$ .

Thay vào (1) ta có  $\left| \frac{\frac{2a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2} - 3a^2}{\frac{2a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2}} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$ .

Vậy thể tích khối chóp  $S.ABC$  là  $\frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^3}{4}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 30.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ , tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$ , tam giác  $SBC$  cân tại  $S$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$  bằng  $\frac{2a}{3}$ .

Thể tích của khối chóp đã cho bằng

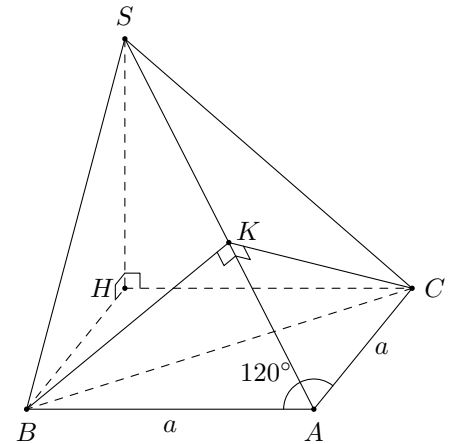
**(A)**  $\frac{a^3}{6}$ .

**(B)**  $\frac{3a^3}{2}$ .

**(C)**  $\frac{a^3}{2}$ .

**(D)**  $\frac{a^3}{3}$ .

**Lời giải.**





Gọi  $M$  trung điểm của  $BC$   $SM \perp BC$  (1).

Lấy điểm  $H \in (ABC)$  sao cho  $ABMH$  là hình chữ nhật.

Cùng với giả thiết ta có:  $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AH \end{cases} \Rightarrow AB \perp SH$  (2).

Lại có  $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp MH \end{cases} \Rightarrow BC \perp SH$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $SH \perp (ABC)$ .

Gọi  $K = AC \cap BH$  và  $I$  là điểm trên đoạn  $SH$  sao cho  $HI = \frac{1}{3}HS$ .

Do  $SB \parallel (IAC) \Rightarrow d(SB, AC) = d(SB, (IAC)) = d(S, (IAC)) = 2d(H, (IAC)) = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(H, (IAC)) = \frac{a}{3}$ .

Ta có  $\frac{1}{[d(H, (IAC))]^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{a^2} - \frac{4}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HI = a$  và  $SH = 3a$ .

Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}3a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{2}$ .

Chọn phương án **(D)**

**Câu 31.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC$  và  $E$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $D$ . Mặt phẳng  $(MNE)$  chia khối tứ diện  $ABCD$  thành hai khối đa diện. Trong đó, khối tứ diện  $ABCD$  có thể tích là  $V$ , khối đa diện chứa đỉnh  $A$  có thể tích  $V'$ . Tính tỉ số  $\frac{V'}{V}$ .

**(A)**  $\frac{7}{18}$ .

**(B)**  $\frac{11}{18}$ .

**(C)**  $\frac{13}{18}$ .

**(D)**  $\frac{1}{18}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $P = EN \cap CD$  và  $Q = EM \cap AD$ .

Suy ra  $P, Q$  lần lượt là trọng tâm của  $\triangle BCE$  và  $\triangle ABE$ .

Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $BCD$ , suy ra  $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BNE} = S$ . Ta có  $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} = \frac{S}{3}$ .

Gọi  $h$  là chiều cao của tứ diện  $ABCD$ , suy ra

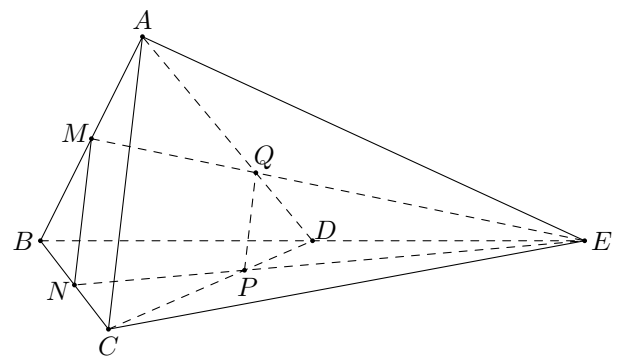
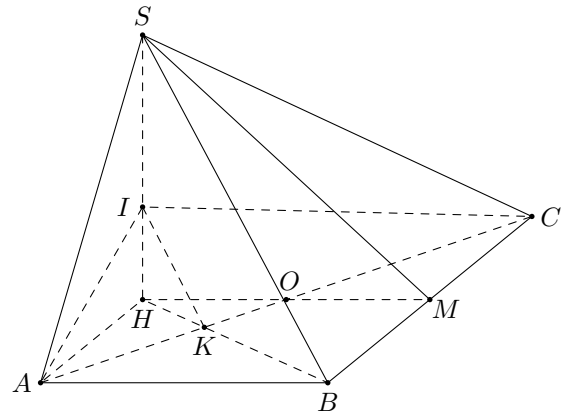
$$d[M, (BCD)] = \frac{h}{2}; d[Q, (BCD)] = \frac{h}{3}.$$

Khi đó  $V_{M.BNE} = \frac{1}{3}S_{\triangle BNE} \cdot d[M, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{6}$

$$V_{Q.PDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle PDE} \cdot d[Q, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{27}.$$

Suy ra  $V_{PQD.NMB} = V_{M.BNE} - V_{Q.PDE} = \frac{S \cdot h}{6} - \frac{S \cdot h}{27} = \frac{7S \cdot h}{54} = \frac{7}{18} \cdot \frac{S \cdot h}{3} = \frac{7}{18} \cdot V_{ABCD}$

$$\Rightarrow V = V - \frac{7}{18} \cdot V = \frac{11}{18}V \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{11}{18}.$$



Vậy  $\frac{V'}{V} = \frac{11}{18}$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$ ,  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  và góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ ?

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ .      (B)  $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$ .      (C)  $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ .      (D)  $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\triangle SAB = \triangle SBC$  (c. g. c), trong tam giác  $SAB$  kẻ đường cao  $AE \perp SB$  khi đó  $CE \perp SB$ . Khi đó góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  là góc giữa hai đường thẳng  $AE$  và  $CE$ .

Dễ dàng nhận thấy góc  $\widehat{AEC} = 120^\circ$  (vì nếu  $\widehat{AEC} = 60^\circ$  thì  $AE = AC = AB = 2a$  điều này vô lí vì tam giác  $AEB$  vuông tại  $E$ ).

Trong tam giác  $AEC$  cân tại  $E$  kẻ đường cao  $EK$  ta có:

$$AE = \frac{AK}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

Trong tam giác vuông  $ABE$  có:  $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ .

Trong tam giác  $SAB$  có:  $BS = \frac{AB^2}{BE} = \sqrt{6}$ .

Ta có:  $V_{B.EAC} = \frac{1}{3} \cdot BE \cdot S_{\triangle EAC} = \frac{1}{3} \cdot BE \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EC \cdot \sin 120^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^3$ .

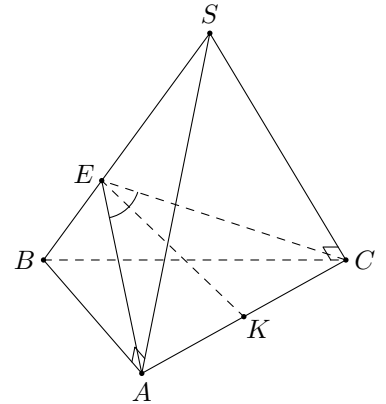
$$\text{Do đó: } \frac{V_{B.EAC}}{V_{B.SAC}} = \frac{BE}{BS} \cdot \frac{BA}{BA} \cdot \frac{BC}{BC} = \frac{BE}{BS} \Rightarrow V_{B.SAC} = \frac{BS}{BE} \cdot V_{B.EAC} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{9}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3.$$

Chọn phương án **(D)**

**Câu 33.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 1,  $M$  và  $N$  lần lượt là hai điểm di động trên hai cạnh  $AB, AC$ . ( $M$  và  $N$  không trùng với  $A$ ) sao cho mặt phẳng  $(DMN)$  luôn vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $V_1, V_2$  lần lượt là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của tứ diện  $ADMN$ . Tính tích  $V_1 \cdot V_2$ .

- (A)  $V_1 \cdot V_2 = \frac{\sqrt{2}}{27}$ .      (B)  $V_1 \cdot V_2 = \frac{\sqrt{2}}{24}$ .      (C)  $V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{324}$ .      (D)  $V_1 \cdot V_2 = \frac{8}{9}$ .

**Lời giải.**



Kẻ  $DH \perp MN \Rightarrow DH \perp (ABC)$  (vì  $(DMN) \perp (ABC)$ ). Suy ra  $H$  là trọng tâm của tam giác đều  $ABC$ .

Như vậy  $M$  và  $N$  là hai điểm di động nhưng  $MN$  luôn đi qua trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Đặt  $AM = x, AN = y (0 < x, y \leq 1)$ .

$$+ DH^2 = DA^2 - AH^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$+ S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{MAN} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy. \quad (*)$$

$$+ S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMH} + S_{\triangle ANH} = \frac{1}{2} AH(x+y) \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12}(x+y). \quad (**)$$

$$\text{Do đó } V_{ADMN} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} xy \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} xy. \quad (***)$$

Mặt khác từ (\*) và (\*\*) suy ra  $x + y = 3xy, (0 < x, y \leq 1)$ .

$$\text{Đặt } t = x \cdot y \Rightarrow x + y = 3t. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 0 < 3t \leq 2 \\ 9t^2 - 4t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} t \geq \frac{4}{9} \\ t \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{2}{3}.$$

Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - 3tX + t = 0$  (1)  $\left(\frac{4}{9} \leq t \leq \frac{2}{3}\right)$ .

Ta tìm  $t \in \left[\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right]$  để (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc  $(0; 1]$  hoặc có nghiệm kép thuộc  $(0; 1]$ .

Ta có  $X = \frac{1}{3}$  không phải là nghiệm của (1) nên  $(1) \Leftrightarrow t = \frac{X^2}{3X - 1}$ .

$$\text{Đặt } g(X) = \frac{X^2}{3X - 1}, X \in (0; 1]. \text{ Ta có: } g'(X) = \frac{3X^2 - 2X}{(3X - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của  $g(X)$

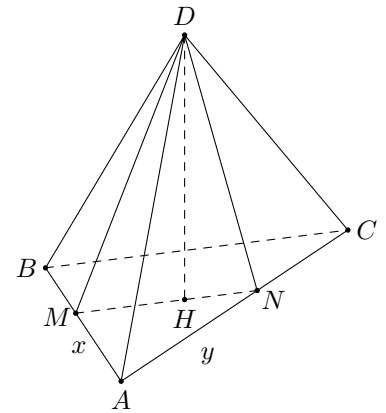
| $X$     | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 1             |  |
|---------|---|---------------|---------------|---------------|--|
| $g'(X)$ | + | -             | - 0 +         | +             |  |
| $g(X)$  | 0 | $+\infty$     | $\frac{9}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |  |

Dựa vào BBT, (1) có 2 nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm kép thuộc  $(0; 1]$  thì

$$\frac{9}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} (tm) \Rightarrow \frac{9}{4} \leq xy \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Kết hợp (***) ta có } \frac{\sqrt{2}}{27} \leq V_{ADMN} \leq \frac{\sqrt{2}}{24} \Rightarrow V_1 = \frac{\sqrt{2}}{27}, V_2 = \frac{\sqrt{2}}{24} \Leftrightarrow V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{324}.$$

Chọn phương án C



 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. B  | 3. B  | 4. A  | 5. C  | 6. C  | 7. B  | 8. B  | 9. D  | 10. D |
| 11. C | 12. D | 13. A | 14. C | 15. B | 16. B | 17. A | 18. A | 19. D | 20. D |
| 21. B | 22. A | 23. C | 24. D | 25. C | 26. A | 27. D | 28. B | 29. D | 30. D |
| 31. B | 32. D | 33. C |       |       |       |       |       |       |       |

## DẠNG 50. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ LIÊN KẾT

### 1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng  $\mathcal{K}$ .

**Định nghĩa 1.** Giả sử  $\mathcal{K}$  là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và  $y = f(x)$  là một hàm số xác định trên  $\mathcal{K}$ . Ta nói:

- a) Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là đồng biến (tăng) trên  $\mathcal{K}$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- b) Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là nghịch biến (giảm) trên  $\mathcal{K}$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên  $\mathcal{K}$  gọi chung là đơn điệu trên  $\mathcal{K}$ .

**Nhận xét.**

- a) Nếu hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{D}$  thì hàm số  $f(x) + g(x)$  cũng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{D}$ . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu  $f(x) - g(x)$ .
- b) Nếu hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{D}$  thì hàm số  $f(x) \cdot g(x)$  cũng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{D}$ . Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số  $f(x), g(x)$  không là các hàm số dương trên  $\mathcal{D}$ .
- c) Cho hàm số  $u = u(x)$ , xác định với  $x \in (a; b)$  và  $u(x) \in (c; d)$ . Hàm số  $f[u(x)]$  cũng xác định với  $x \in (a; b)$ . Ta có nhận xét sau:

(a) Giả sử hàm số  $u = u(x)$  đồng biến với  $x \in (a; b)$ . Khi đó, hàm số  $f[u(x)]$  đồng biến với  $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$  đồng biến với  $u \in (c; d)$ .

(b) Giả sử hàm số  $u = u(x)$  nghịch biến với  $x \in (a; b)$ . Khi đó, hàm số  $f[u(x)]$  nghịch biến với  $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$  nghịch biến với  $u \in (c; d)$ .

**Định lí 1.** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $\mathcal{K}$ . Khi đó:

- a) Nếu hàm số đồng biến trên khoảng  $\mathcal{K}$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ .
- b) Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng  $\mathcal{K}$  thì  $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ .

**Định lí 2.** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $\mathcal{K}$ . Khi đó:

- a) Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .
- b) Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $\mathcal{K}$ .

c) Nếu  $f'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  không đổi trên  $\mathcal{K}$ .

**Chú ý:** Khoảng  $K$  trong định lí trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thiết “Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó. Chẳng hạn: Nếu hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$ .

Ta thường biểu diễn qua bảng biến thiên như sau:

|         |        |        |
|---------|--------|--------|
| $x$     | $a$    | $b$    |
| $f'(x)$ | +      |        |
| $f(x)$  | $f(a)$ | $f(b)$ |

**Định lí 3.** (mở rộng của định lí 2). Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $\mathcal{K}$ . Khi đó:

a) Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .

b) Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .

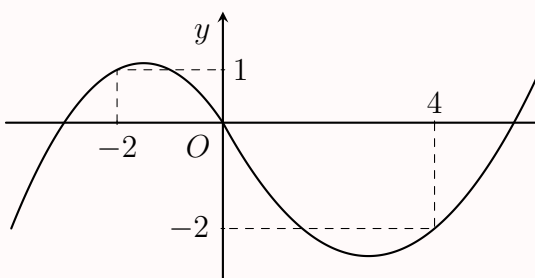
**Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên  $\mathcal{K}$ .

(a) Nếu  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm  $x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .

(b) Nếu  $f'(x) \leq 0$  với mọi  $x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm  $x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $\mathcal{K}$ .

## 2 BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

Ⓑ  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

Ⓒ  $(-2; -1)$ .

Ⓓ  $(2; 3)$ .

**Lời giải.**

**Phân tích hướng dẫn giải.**

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm khoảng đơn điệu của hàm ẩn dạng  $g(x) = f[u(x)] + v(x)$  khi biết đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ .

b) HƯỚNG GIẢI:

Cách 1 B1: Tính đạo hàm của hàm số  $g(x)$ ,  $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$ .

B2: Sử dụng đồ thị của  $f'(x)$ , lập bảng xét dấu của  $g'(x)$ .

B3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2 B1: Tính đạo hàm của hàm số  $g(x)$ ,  $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$ .

B2: Hàm số  $g(x)$  đồng biến  $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$ ; (Hàm số  $g(x)$  nghịch biến  $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0$ ) (\*).

B3: Giải bất phương trình (\*) (dựa vào đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ ) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 3 (Trắc nghiệm).

B1: Tính đạo hàm của hàm số  $g(x)$ ,  $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$ .

B3: Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $K \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in K$ ; (Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $K \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in K$ ) (\*).

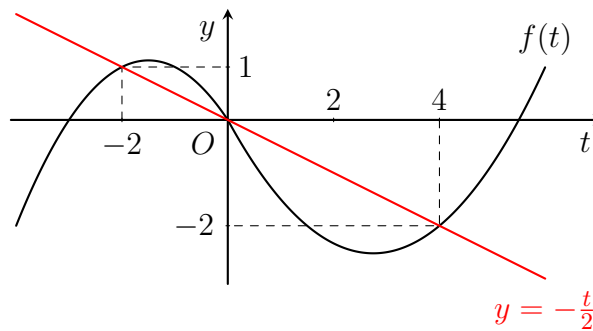
B3: Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào  $g'(x)$  để loại các phương án sai.

**Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:**

Cách 1 Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$ .

Hàm số nghịch biến  $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > -\frac{1 - 2x}{2}$ .

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số  $y = f'(t)$  và  $y = -\frac{t}{2}$ .



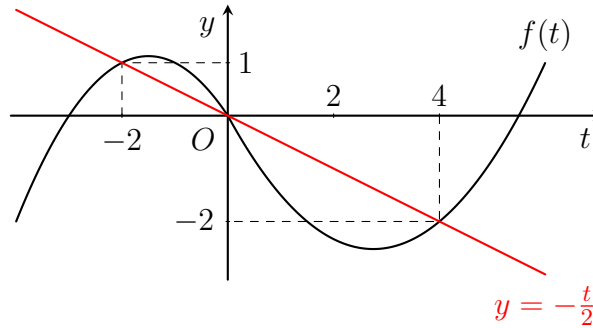
Dựa vào đồ thị ta có:  $f'(t) > -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 4. \end{cases}$

Khi đó:  $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Cách 2 Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$ .

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) = -\frac{1 - 2x}{2}$ .

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số  $y = f'(t)$  và  $y = -\frac{t}{2}$ .



Từ đồ thị ta có:  $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ . Khi đó:  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = -2 \\ 1 - 2x = 0 \\ 1 - 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$ .

Ta có bảng xét dấu:

|         |           |                |               |               |          |
|---------|-----------|----------------|---------------|---------------|----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$            | $+$           | $0$           | $-$      |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy: hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -\frac{3}{2})$  và  $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ .

**Phân tích hướng dẫn giải.**

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng xét tính đơn điệu của hàm liên kết  $h(x) = f(u) + g(x)$  khi biết BBT, BXD, đồ thị của hàm số.

b) KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

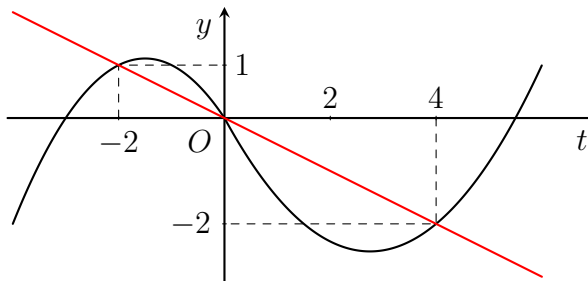
- Cách tính đạo hàm của hàm hợp.
- Các bước lập bảng biến thiên của hàm số.
- Đồ thị và sự tương giao hai đồ thị.

c) HƯỚNG GIẢI: Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$   
 $\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) + 2x - 1 = 0$ .

Đặt  $t = 1 - 2x \Rightarrow 0 = -2f'(t) - t \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$ .

Vẽ đường thẳng  $y = -\frac{x}{2}$  và đồ thị hàm số  $f'(x)$  trên cùng một hệ trục





Dựa vào đồ thị  $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = -2, t = 0, t = 4$ .

Hàm số  $g(x)$  nghịch biến  $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4. \end{cases}$

Như vậy  $f'(1-2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 1-2x \leq 0 \\ 4 \leq 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2}. \end{cases}$

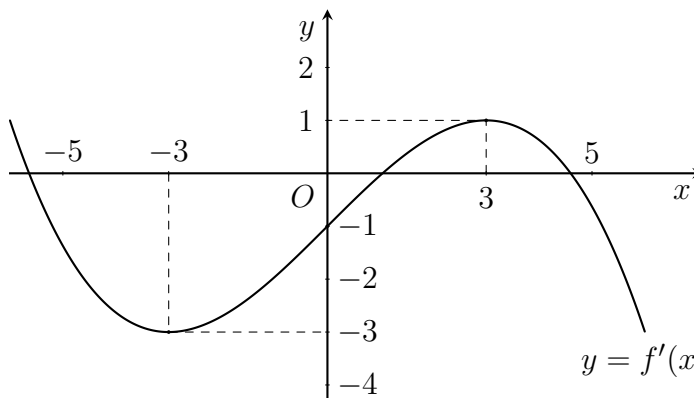
Vậy hàm số  $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên các khoảng  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ .

Mà  $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  nên hàm số  $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

Chọn phương án **A**

### 3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số  $g(x) = f(3x + 1) - 3x^2 + x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



**A**  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

**B**  $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ .

**C**  $(-1; 0)$ .

**D**  $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = 3f'(3x + 1) - (6x + 2) + 3$ .

Hàm  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $K$  khi

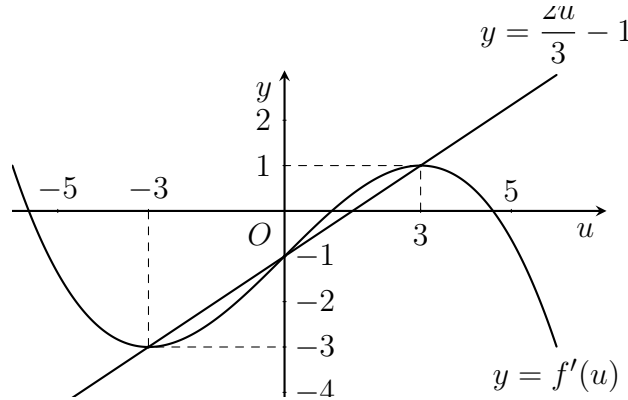
$g'(x) \geq 0$  (dấu = xảy ra tại một số hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow 3f'(3x + 1) - (6x + 2) + 3 \geq 0$  (1).

Đặt  $u = 3x + 1$  ta được:  $h(u) = 3f'(u) - 2u + 3$ .

Ta có:  $(1) \Leftrightarrow 3f'(u) - 2u + 3 \geq 0 \Leftrightarrow f'(u) \geq \frac{2u}{3} - 1$ .

Từ đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  ta có đồ thị hàm số  $y = f'(u)$  và  $y = \frac{2u}{3} - 1$  như hình vẽ



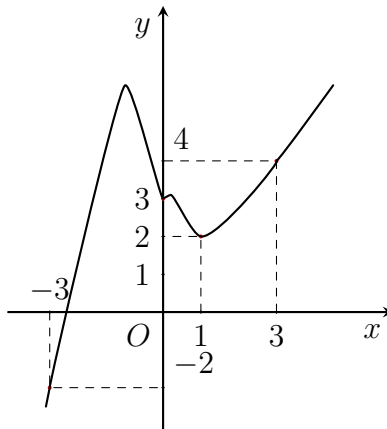
Để  $h(u) \geq 0$  ta cần có đồ thị  $y = f'(u)$  phải nằm bên trên của đồ thị hàm  $y = \frac{2u}{3} - 1$ .

Từ đó ta có  $h(u) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ u \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 3x + 1 \leq 3 \\ 3x + 1 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \\ x \leq -\frac{4}{3} \end{cases}$

Cho nên ta chọn được đáp án vì  $\left(0; \frac{2}{3}\right) \subset \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 2.** Cho hàm số  $f(x)$ . Đồ thị  $y = f'(x)$  cho như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(x - 1) - \frac{x^2}{2}$  nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



**(A)**  $(2; 4)$ .

**(B)**  $(0; 1)$ .

**(C)**  $(-2; 1)$ .

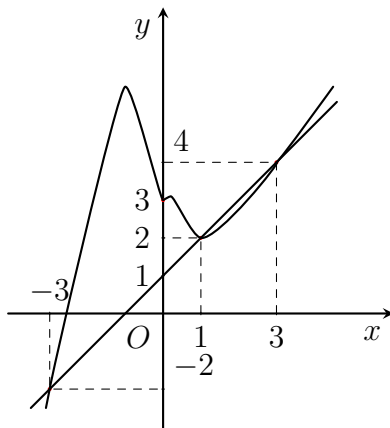
**(D)**  $(1; 3)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $g(x) = f(x - 1) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x - 1) - x$   
 $\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - 1) - x = 0 \Leftrightarrow f'(x - 1) = (x - 1) + 1$ .

Đặt  $t = x - 1$  thì  $f'(t) = t + 1$ .

Vẽ đường thẳng  $y = x + 1$  trên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  (như hình vẽ bên).



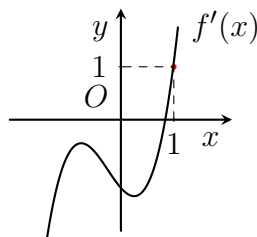
Dựa vào đồ thị  $f'(t) = t + 1 \Leftrightarrow t = -3, t = 1, t = 3$ .

Hàm số nghịch biến  $g'(x) = f'(x-1) - x \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \leq t \Leftrightarrow t \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$ .

Do đó  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 4)$  vậy  $g(x)$  nghịch biến trên  $(2; 4)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên.



Hàm số  $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2 - 2x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A**  $(-1 - \sqrt{2}; -1)$ .

**B**  $(-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$ .

**C**  $(-1; +\infty)$ .

**D**  $(-1; -1 + \sqrt{2})$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2 - 2x$

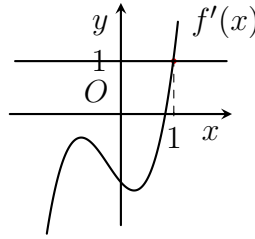
$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) - 2x - 2 = 2(x + 1)[f'(x^2 + 2x) - 1]$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)[f'(x^2 + 2x) - 1] = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 + \sqrt{2}, x = -1 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Xét } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ f(x^2 + 2x) > 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ f(x^2 + 2x) < 1 \end{cases} \quad (II).$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và  $y = 1$ .



Dựa vào đồ thị ta có:  $f'(x^2 + 2x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x > 1$  và  $f'(x^2 + 2x) < 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x < 1$ .

$$\text{Xét hệ (I): } \begin{cases} x + 1 > 0 \\ f'(x^2 + 2x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \begin{cases} x > -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x > -1 + \sqrt{2} \\ x < -1 - \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

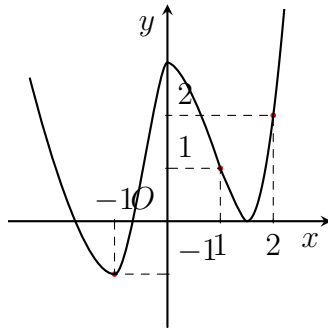
$$\text{Xét hệ (II): } \begin{cases} x + 1 < 0 \\ f'(x^2 + 2x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < x < -1.$$

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1 - \sqrt{2}; -1)$  và  $(-1 + \sqrt{2}; +\infty)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị dưới đây.



Đặt  $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** Hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .
- B** Đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị.
- C** Hàm số  $y = g(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .
- D** Hàm số  $y = g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

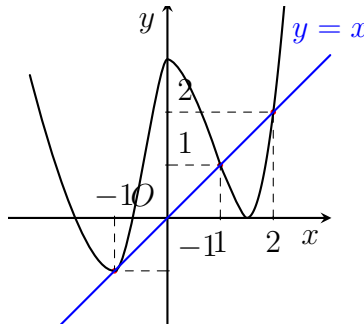
**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = f'(x) - x$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$  (\*).

Số nghiệm của phương trình (\*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và đường thẳng  $y = x$ .

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm  $(-1; -1); (1; 1); (2; 2)$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$



Bảng xét dấu  $g'(x)$ :

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $g(x)$ | +         | 0    | +   | 0   | +         |

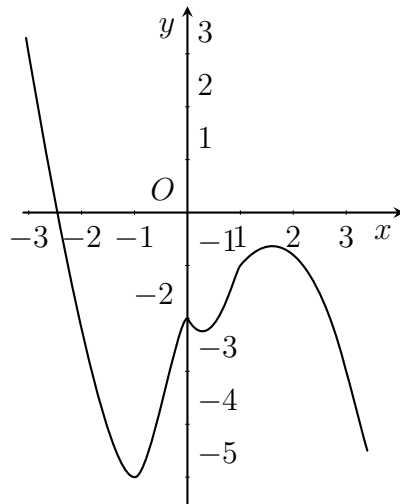
Từ bảng xét dấu  $g'(x)$  ta thấy hàm số  $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ .

Đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(2; +\infty)$ ; nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

Hàm số  $y = g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ.



Hỏi hàm số  $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-2; 0)$ .

**(B)**  $(1; 3)$ .

**(C)**  $(-1; \frac{3}{2})$ .

**(D)**  $(-3; 1)$ .

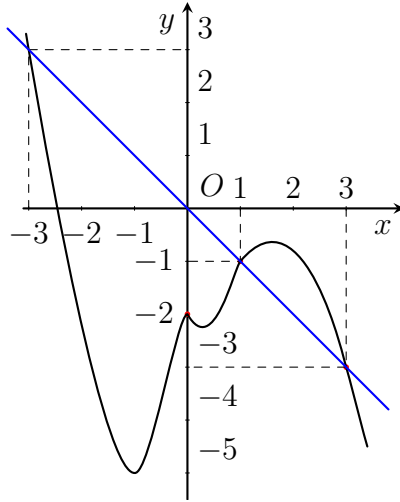
**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1$ .

Hàm số  $g(x)$  nghịch biến  $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > x - 1$ .

Đặt  $t = 1 - x$ . Khi đó (1) trở thành  $f'(t) > -t$  (2).

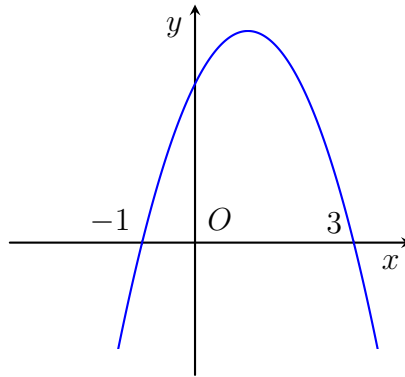
Bất phương trình (2) được thỏa khi  $f(x) > -x$  hay đồ thị hàm số  $f'(x)$  nằm phía trên đồ thị hàm số  $y = -x$ .



Từ đồ thị ta được  $\begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$ . Vậy chọn khoảng  $(-2; 0)$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ sau.



Hàm số  $g(x) = f(2x^4 - 1)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A**  $(1; +\infty)$ .      **B**  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .      **C**  $(-\infty; -1)$ .      **D**  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$ .

a) TH1:  $x \geq 0$ . Để hàm số  $g(x)$  đồng biến thì

$$\begin{aligned} f'(2x^4 - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in [0; \sqrt[4]{2}]. \end{aligned}$$

b) TH2:  $x < 0$ . Để hàm số  $g(x)$  đồng biến thì

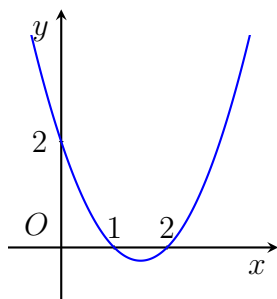
$$f'(2x^4 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 1 \leq -1 \\ 2x^4 - 1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

$$\text{So sánh với điều kiện } x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[4]{2}].$$

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $[0; \sqrt[4]{2}]$  và  $(-\infty; -\sqrt[4]{2}]$ . Do đó chọn khoảng  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau đây.



Hàm số  $y = f(x - x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Ⓑ  $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ .

Ⓒ  $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

Ⓓ  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = f(x - x^2)$ .

Ta có:  $y' = (1 - 2x)f'(x - x^2)$

$$\Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x - x^2 = 1 \\ x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 1 = 0 (VN) \\ x^2 - x + 2 = 0 (VN). \end{cases}$$

Ta lại có:  $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{1}{4} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x) \Rightarrow f'(x - x^2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

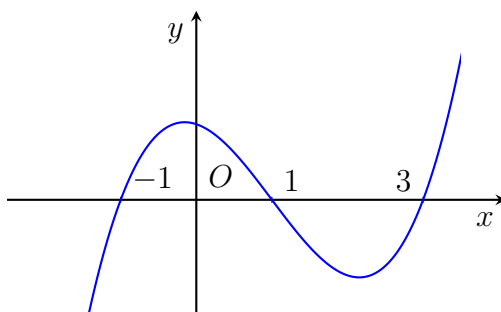
Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x - x^2)$

|      |           |               |           |
|------|-----------|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0             | -         |
| $y$  | $-\infty$ | $\frac{1}{4}$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

Chọn phương án Ⓐ

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A)  $(1; 2)$ .

(B)  $(-\infty; -3)$ .

(C)  $(0; 1)$ .

(D)  $(-2; 0)$ .

**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $y$  |           |      |     |     |           |

Đặt  $g(x) = f(x^2 + 2x)$ , ta có  $g'(x) = (x^2 + 2x)' \cdot f'(x^2 + 2x) = 2(x + 1) \cdot f'(x^2 + 2x)$ .

Hàm số  $g(x)$  đồng biến khi

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot f'(x^2 + 2x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \leq 0 \end{cases} & (2) \end{cases}.$$

$$\text{a) Xét (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -1 \leq x^2 + 2x \leq 1 \\ x^2 + 2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2} \\ x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -1 + \sqrt{2} \\ x \geq 1. \end{cases}$$

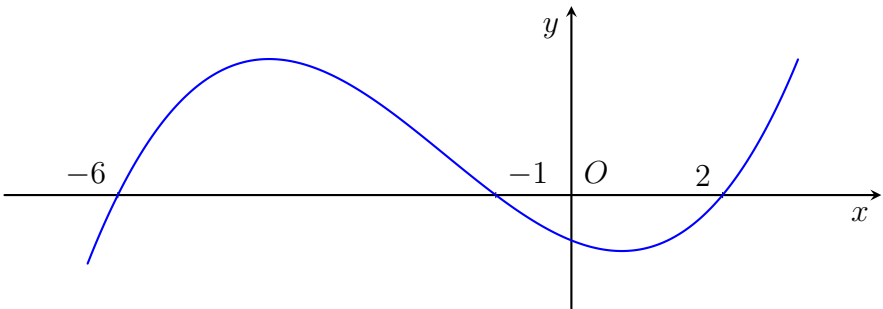
$$\text{b) Xét (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x \leq -1 \\ 1 \leq x^2 + 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = -1 \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \begin{cases} x = -1 \\ \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \\ x \geq -1 + \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 - \sqrt{2} \\ x = -1. \end{cases}$$

Chọn phương án (A)

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên dưới.





Hàm số  $g(x) = f(3 - x^2)$  đồng biến trên khoảng?

- (A)**  $(2; 3)$ .                      **(B)**  $(-1; 0)$ .                      **(C)**  $(-2; -1)$ .                      **(D)**  $(0; 1)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị, ta có bảng xét dấu

|      |           |      |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-6$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $+$       |

$g'(x) = -2xf'(3 - x^2).$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ f(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{cases}$

$f(3 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < 3 - x^2 < -1 \\ 2 < 3 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x < 3 \\ -1 < x < 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên:

|               |           |      |      |      |     |     |     |     |           |
|---------------|-----------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(3 - x^2)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |
| $-2x$         | $+$       | $ $  | $+$  | $ $  | $+$ | $ $ | $-$ | $ $ | $-$       |
| $g'$          | $-$       | $0$  | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$       |

Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên  $(-1; 0)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $0$ | $5$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |

Biết:  $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó, hàm số  $g(x) = f(f(x) - 1) + x^3 + 3x^2 + 2020$  nghịch biến trong khoảng nào dưới đây:

- ☒ (A)  $(-2; 0)$ .
- ☐ (B)  $(0; 5)$ .
- ☐ (C)  $(-2; 5)$ .
- ☐ (D)  $(-\infty; -2)$ .

Lời giải.

Ta có:  $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) + 3x^2 + 6x$ .

Vì  $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f(x) - 1 < 4$ .

Từ bảng xét dấu của  $f'(x) \Rightarrow f'(f(x) - 1) < 0$ .

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

|                            |           |      |      |     |     |           |
|----------------------------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x$                        | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $5$ | $+\infty$ |
| $f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $+$ | $-$       |
| $3x^2 + 6x$                | $+$       | $ $  | $+$  | $0$ | $+$ | $+$       |

Do đó, hàm  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

Chọn phương án ☒ (A)

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên của đạo hàm  $f'(x)$  như sau:

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $f'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       |

Hỏi hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x) + 2020$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

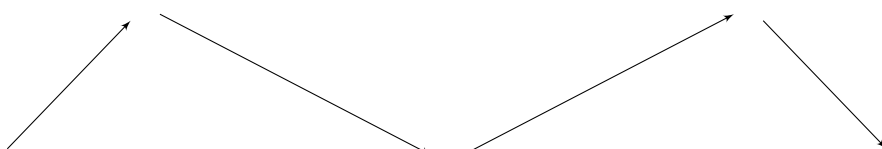
- ☒ (A) 1.
- ☐ (B) 2.
- ☐ (C) 3.
- ☐ (D) 4.

Lời giải.

Ta có  $g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \overset{\text{theo BBT } f(x)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                      |      |                |     |                |     |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------|-----|----------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                            | $-1$ | $1 - \sqrt{2}$ | $1$ | $1 + \sqrt{2}$ | $3$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $+$                                                                                  | $0$  | $-$            | $0$ | $+$            | $0$ | $-$       |
| $g(x)$  |  |      |                |     |                |     |           |

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta Chú ý: Dấu của  $g'(x)$  được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

$$x \in (3; +\infty) \rightarrow 2x - 2 > 0. \quad (1)$$

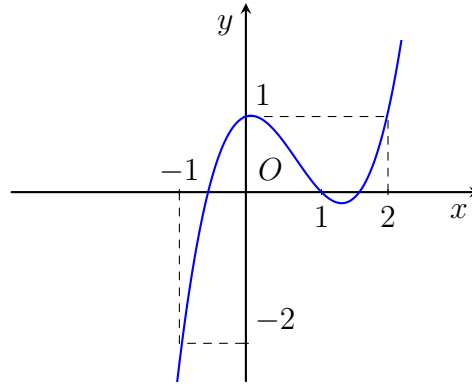
$$x \in (3; +\infty) \rightarrow x^2 - 2x > 3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} f'(x^2 - 2x) < 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) < 0$  trên khoảng  $(3; +\infty)$  nên  $g'(x)$  mang dấu  $-$ .

Nhận thấy các nghiệm  $x = \pm 1$  và  $x = 3$  là các nghiệm bội lẻ nên  $g'(x)$  qua nghiệm đổi dấu.

Chọn phương án **(A)**

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới.



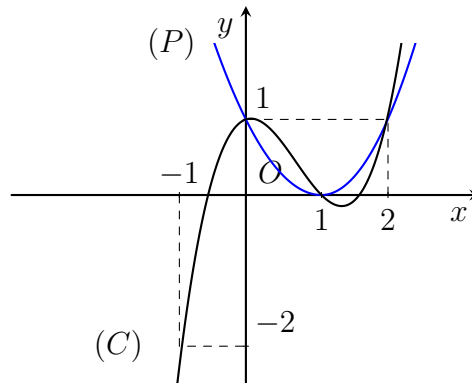
Hàm số  $g(x) = f(3x - 1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$  nghịch biến trên khoảng.

- (A)**  $(-\infty; 1)$ . **(B)**  $(1; 2)$ . **(C)**  $(-3; 1)$ . **(D)**  $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 3f'(3x - 1) - 3(9x^2 - 12x + 4)$ ;  $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3x - 1) \leq (3x - 2)^2 \cdot (1)$ .

Đặt  $t = 3x - 1$  khi đó  $(1) \Rightarrow f'(t) \leq (t - 1)^2$ .



Dựa vào đồ thị ta suy ra  $f'(t) \leq (t - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ . (vì phần đồ thị của  $f'(t)$  nằm phía dưới đồ thị hàm số  $y = (t - 1)^2$ ).

$$\text{Như vậy } f'(3x - 1) \leq (3x - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \leq 0 \\ 1 \leq 3x - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vậy hàm số  $g(x) = f(3x - 1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$  nghịch biến trên các khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$  và  $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

|         |           |      |      |     |     |           |     |     |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |

Đặt  $y = g(x) = 2f(1 - x) + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 3$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A** Hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .
- B** Hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .
- C** Hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .
- D** Hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $y' = g'(x) = -2f'(1 - x) + x^3 - 3x^2 + 2x$ .

Dựa vào bảng xét dấu  $f'(x)$  ta có  $f'(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

$$-2f'(1 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(1 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - x < -1 \\ 0 < 1 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2).$$

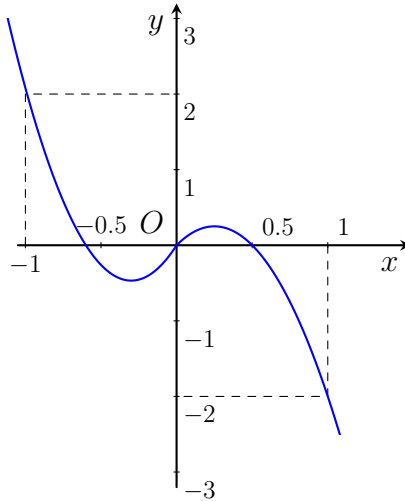
Bảng xét dấu  $y' = g'(x)$

| $x$          | $-\infty$ | $0$ |     | $1$ |     | $2$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
|--------------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $-2f'(1-x)$  | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |           |
| $x^3-3x^2+2$ | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $ $ | $-$ |           |
| $g'(x)$      | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $ $ |     |           |

Vậy hàm số đồng biến trên  $(0; 1)$ .

Chọn phương án **C**

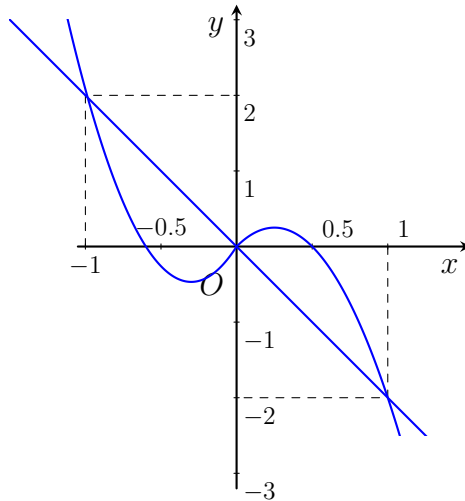
**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số  $g(x) = f(2x + 3) + 4x^2 + 12x + 1$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .      Ⓑ  $\left(-\frac{5}{2}; -2\right)$ .      Ⓒ  $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ .      Ⓓ  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .

**Lời giải.**



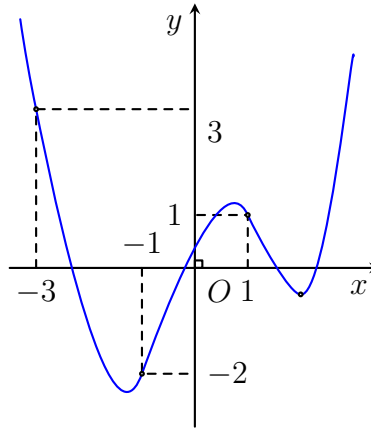
$$y = f(x) \Rightarrow y = -2x.$$

Hàm số  $g(x)$  đồng biến  $\Rightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(2x + 3) + 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow f'(2x + 3) > -2(2x + 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 < -1 \\ 0 < 2x + 3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Xét hàm số  $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(-1; 1)$ .

(B) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(-3; 1)$ .

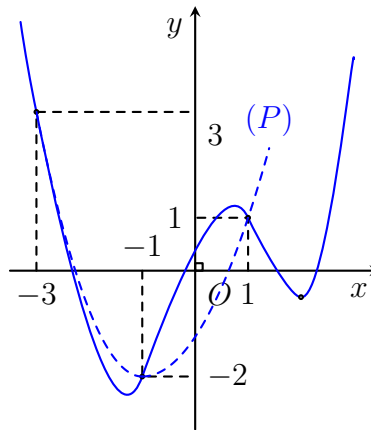
(C) Hàm số  $g(x)$  đồng biến  $(-3; -1)$ .

(D) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ .  
 $+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ . Đặt  $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$  có đồ thị (P).

Dựa vào đồ thị  $y = f'(x)$ , ta có: 
$$\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$



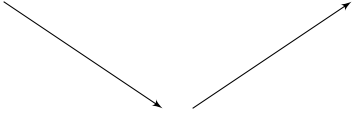
Vẽ đồ thị (P) của hàm số  $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$  trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ trên (đường nét đứt), Đồ thị (P) đi qua các điểm  $(-3; 3)$ ,  $(-1; -2)$ ,  $(1; 1)$  với đỉnh  $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$ .

Ta thấy:

a) Trên khoảng  $(-1; 1)$  thì  $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ , nên  $g'(x) > 0 \forall x \in (-1; 1)$ .

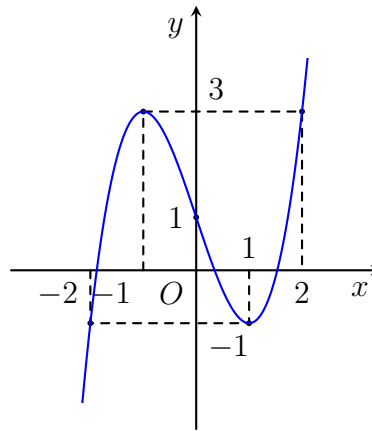
b) Trên khoảng  $(-3; -1)$  thì  $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ , nên  $g'(x) < 0 \forall x \in (-3; -1)$ .

Từ những nhận xét trên, ta có bảng biến thiên của hàm  $y = g'(x)$  trên  $[-3; 1]$  như sau:

|      |                                                                                    |    |   |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|----|---|
| $x$  | -3                                                                                 | -1 | 1 |
| $g'$ | -                                                                                  | 0  | + |
| $g$  |  |    |   |

Chọn phương án **(A)**

**Câu 16.** Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(-1; 1)$ . Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Hàm số  $g(x) = f(x+1) - \frac{x^2 + 4x + 3}{2}$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-\infty; -2)$ .

**(B)**  $(-3; -1)$ .

**(C)**  $(0; 1)$ .

**(D)**  $(-1; 0)$ .

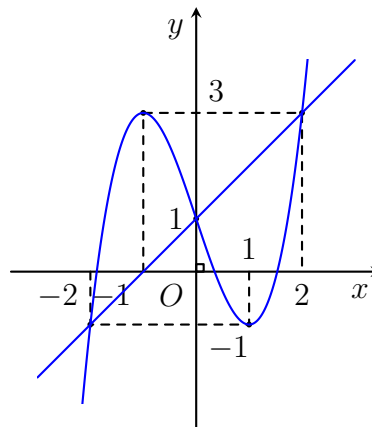
**Lời giải.**

Ta có:  $g(x) = f(x+1) - \frac{x^2 + 4x + 3}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) - x - 2$ .

Hàm số đồng biến  $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x+1) > x+2$  (1).

Đặt  $x+1 = t$ . Bất phương trình (1) có dạng:  $f'(t) > t+1$ .

Xét hai hàm số  $y = f'(t)$  và  $y = t+1$ :

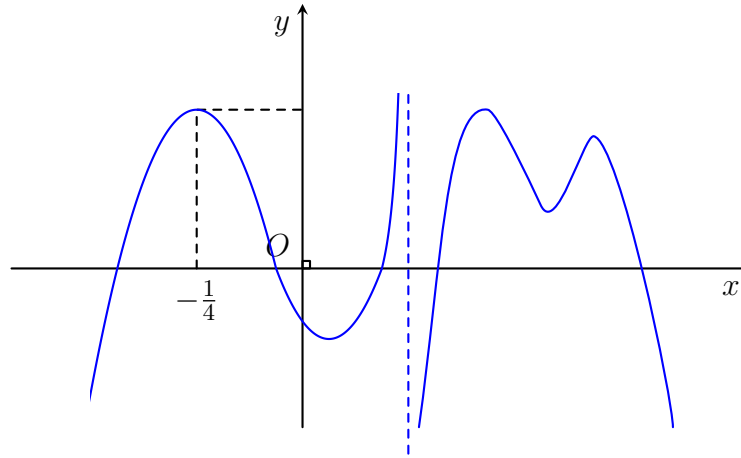


Dựa vào đồ thị ta có:  $f'(t) > t+1 \Rightarrow \begin{cases} t \in (-2; 0) \\ t > 2. \end{cases}$

Ta có  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x+1 < 0 \\ x+1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -1 \\ x > 1. \end{cases}$

Chọn phương án **(B)**

**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $f'(x)$  như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 + x)$ ?



**(A)** 10.

**(B)** 11.

**(C)** 12.

**(D)** 13.

**Lời giải.**

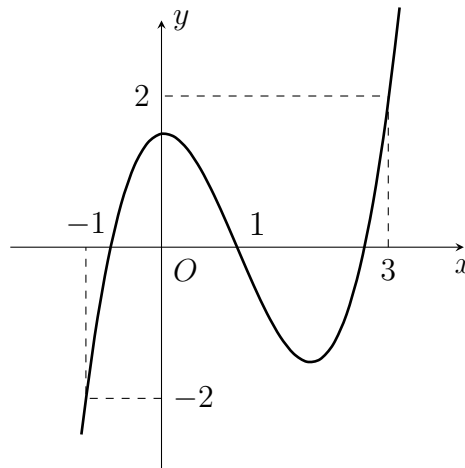
Ta có  $y' = (2x+1)f'(x^2+x)$ ;  $x^2+x=m$  có nghiệm khi và chỉ khi  $m \geq -\frac{1}{4}$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm  $f'(x)$  cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn  $-\frac{1}{4}$  và có một tiệm cận.

Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn  $-\frac{1}{4}$  và 1 điểm không xác định thì  $y=0$  có hai nghiệm. Từ đây dễ dàng suy ra hàm  $y = f(x^2+x)$  có 11 cực trị.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2020$ .





Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(1; 3)$ .

(B) Hàm số  $g(x)$  có 2 điểm cực trị đại.

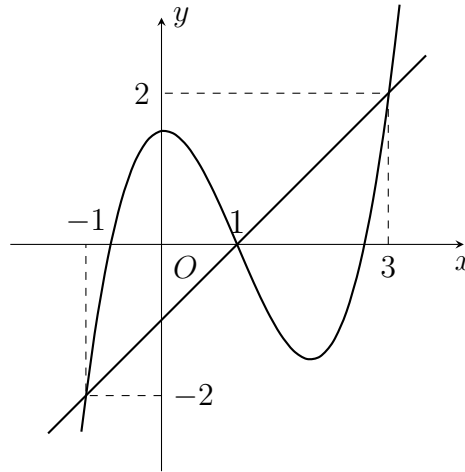
(C) Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(-1; 1)$ .

(D) Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $g(x) = 2f(x) - 2x + 2 = 2[f(x) - (x - 1)]$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại 3 điểm:  $(-1; -2), (1; 0), (3; 2)$ .



Dựa vào đồ thị ta có

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f(x) - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow 2[f(x) - (x - 1)] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 3 < x. \end{cases}$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow 2[f(x) - (x - 1)] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3. \end{cases}$$

Chọn phương án (C)

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như hình vẽ.

|         |           |      |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$       |

Tìm khoảng đồng biến của hàm số  $y = g(x) = 2f(1 - x) - \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^3$ .

(A)  $(-\infty; 0)$ .

(B)  $(2; 3)$ .

(C)  $(0; 2)$ .

(D)  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Coi  $f'(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 1)$  có bảng xét dấu như trên.

$$g'(x) = -2f'(1 - x) - x^4 + 5x^3 - 6x^2.$$

Ta đi xét dấu  $g'(x) = P + Q$ . Với:

$$P = -2f'(1 - x) = -2(3 - x)(2 - x)(1 - x)(-x) = 2x(3 - x)(2 - x)(1 - x).$$

Bảng xét dấu của  $P$ .

|     |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |           |
|-----|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$ | $-\infty$ |   | 0 |   | 1 |   | 2 |   | 3 |   | $+\infty$ |
| $P$ |           | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |           |

$$Q = -x^4 + 5x^3 - 6x^2 = -x^2(x-2)(x-3).$$

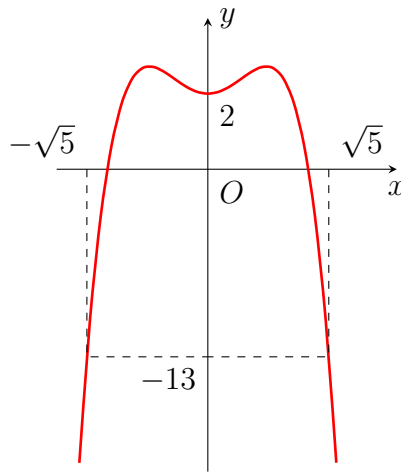
Bảng xét dấu của  $Q$

|     |           |   |   |   |   |   |   |   |           |
|-----|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$ | $-\infty$ |   | 0 |   | 2 |   | 3 |   | $+\infty$ |
| $Q$ |           | - | 0 | - | 0 | + | 0 | - |           |

Từ hai BXD của  $P, Q$ . Ta có  $P > 0, Q > 0$  với  $\forall x \in (2; 3)$  nên  $g'(x) = P + Q > 0$  với  $\forall x \in (2; 3)$ .

Chọn phương án **B**

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ



Xét hàm số  $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$  với  $m$  là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để  $g(x) \leq 0$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$  là

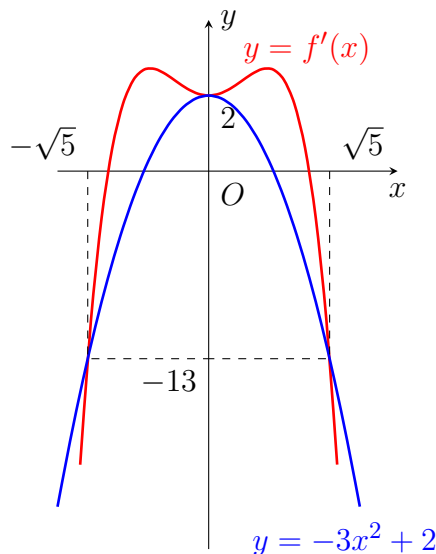
**(A)**  $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$

**(B)**  $m \geq \frac{2}{3}f(0).$

**(C)**  $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}).$

**(D)**  $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$

**Lời giải.**



Ta có  $g(x) \leq 0$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$   
 $\Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5} \leq 3m$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$   
 $\Leftrightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} (2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}) \leq 3m$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$  (\*).

Đặt  $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$ .

Ta có  $h'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$ ,  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}. \end{cases}$

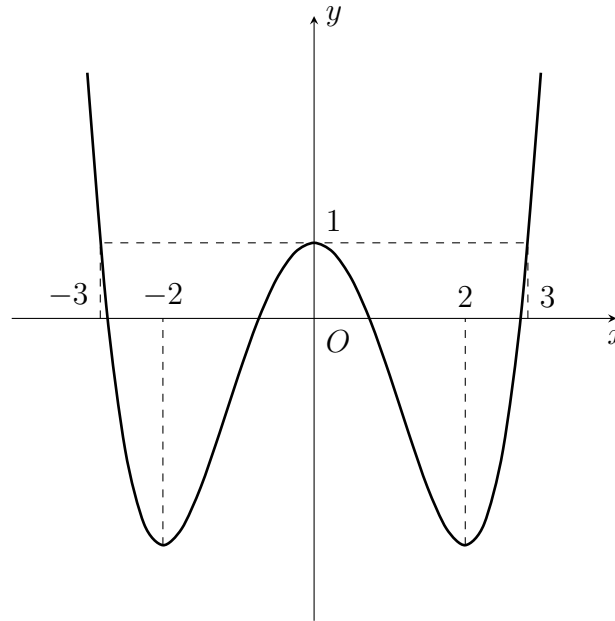
Dựa vào đồ thị ta thấy  $f'(x) \geq -3x^2 + 2$  với mọi  $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow h(x)$  luôn đồng biến trên  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$\Rightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5})$ .

Vậy (\*)  $\Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) \leq 3m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$ .

Chọn phương án **A**

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Hàm số  $y = f(2x - 1) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**(A)**  $(-6; -3)$ .

**(B)**  $(3; 6)$ .

**(C)**  $(6; +\infty)$ .

**(D)**  $(-1; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $y' = 2f'(2x - 1) + x^2 + 2x - 2 = 2f'(2x - 1) + (x + 1)^2 - 3$ .

Nhận xét: Hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$  và  $f'(x) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3. \end{cases}$

Do đó ta xét các trường hợp:

Với  $-6 < x < -3 \Rightarrow -13 < 2x - 1 < -7$  suy ra hàm số đồng biến (loại).

Với  $3 < x < 6 \Rightarrow 5 < 2x - 1 < 11$  suy ra hàm số đồng biến (loại).

Với  $x > 6 \Rightarrow 2x - 1 > 11$  suy ra hàm số đồng biến (loại).

Với  $-1 < x < 0 \Rightarrow -3 < 2x - 1 < -1$  nên và  $-3 < (x+1)^2 - 3 < -2$  suy ra hàm số nghịch biến (nhận).

Chọn phương án **(D)**

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

|         |           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | 2 |   | 3 |   | 4 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | + | 0 | - | 0 | + |           |

Hàm số  $g(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)**  $(1; +\infty)$ . **(B)**  $(-\infty; -1)$ . **(C)**  $(-1; 0)$ . **(D)**  $(0; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 3[f'(x+2) - (x^2 - 3)]$ .

Với  $x \in (-1; 0) \Rightarrow x+2 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x+2) > 0$  lại có  $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1; 0)$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .

Chú ý:

+) Ta xét  $x \in (1; 2) \subset (1; +\infty) \Rightarrow x+2 \in (3; 4) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0$ .

Suy ra hàm số nghịch biến trên  $(1; 2)$  nên loại hai phương án A, D.

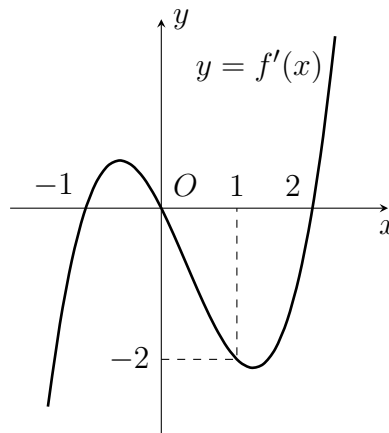
+) Tương tự ta xét.

$x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x+2 \in (-\infty; 0) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; -2)$ .

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  nên loại phương án B.

Chọn phương án **(C)**

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau.



Hàm số  $g(x) = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)**  $(-\sqrt{3}; -1)$ . **(B)**  $(0; 1)$ . **(C)**  $(-1; 1)$ . **(D)**  $(1; \frac{3}{2})$ .

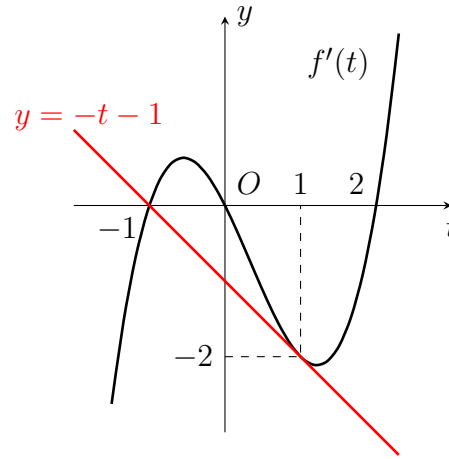
**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 6x \cdot f'(x^2 - 2) + 6x^3 - 6x = 6x[f'(x^2 - 2) + x^2 - 1]$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) + x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Đặt  $t = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x^2 - 2) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t - 1$ .

Đồ thị của hàm số  $y = f'(t)$  và  $y = -t - 1$  như hình vẽ sau



Từ đồ thị, ta có  $f'(t) = -t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$  ( $t = -1$  là nghiệm đơn và  $t = 1$  là nghiệm kép)

$$\Rightarrow f'(x^2 - 2) = -(x^2 - 2) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$  ( $x = 0, x = \pm 1$  là nghiệm đơn và  $x = \pm\sqrt{3}$  là nghiệm kép).

Bảng xét dấu  $g'(x)$

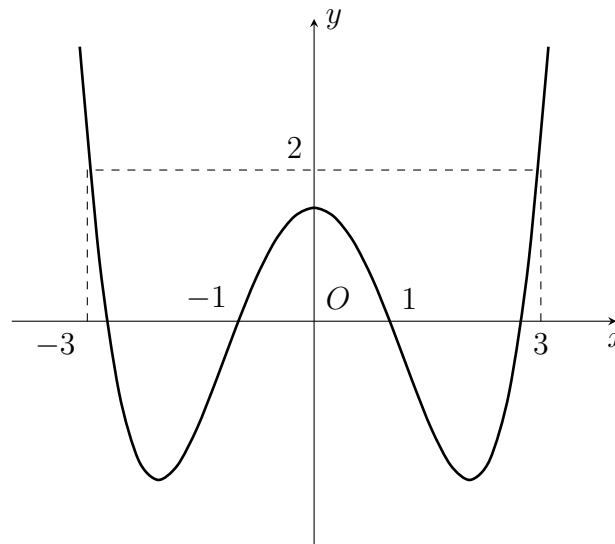
|         |           |             |     |      |     |     |     |     |     |            |     |           |
|---------|-----------|-------------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ |     | $-1$ |     | $0$ |     | $1$ |     | $\sqrt{3}$ |     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$         | $0$ | $-$  | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$        | $0$ | $+$       |

$$\left( \text{vì } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left[ f'\left(-\frac{7}{4}\right) - \frac{3}{4} \right] < 0 \right).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$  với  $a, b, c, d, e, f$  là các số thực, đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $y = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?



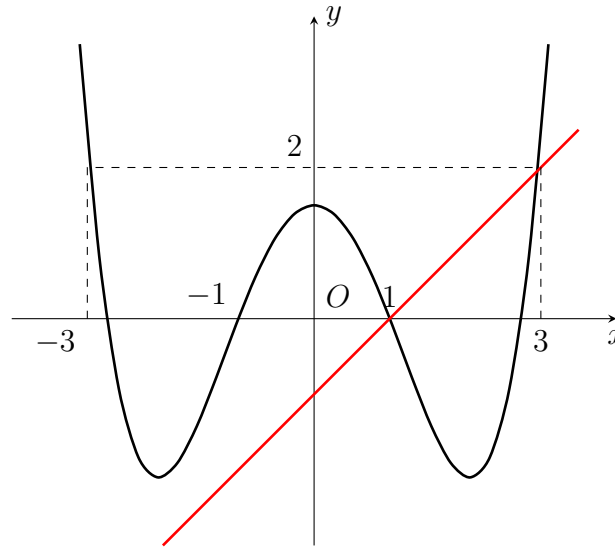
Ⓐ  $\left(-\frac{3}{2}; -1\right).$

Ⓑ  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$

Ⓒ  $(-1; 0).$

Ⓓ  $(1; 3).$

Lời giải.



Cách 1: Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) - 4x$ .

Có:  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) - 4x > 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) < -2x(1).$

Đặt  $t = 1 - 2x$ , bất phương trình (1) trở thành  $f(t) < t - 1$ .

Vẽ đường thẳng  $y = x - 1$ . Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng  $y = x - 1$  nằm trên đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  trên khoảng  $(1; 3) \Rightarrow f'(t) < t - 1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1 - 2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .

Cách 2: Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) - 4x$ .

Có  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(1 - 2x) = -2x \Leftrightarrow f(1 - 2x) = (1 - 2x) - 1$ .

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và  $y = t - 1, (t = 1 - 2x)$ .

Từ đồ thị ta có  $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$ . Khi đó  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu

|         |           |      |     |           |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |     |     |
| $g'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$ .

Cách 3: Cách trắc nghiệm.

Ta có:  $g(x) = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) - 4x$ .

Ta lần lượt thử các đáp án.

Thử đáp án A: Chọn  $x = -1, 25 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \Rightarrow g'(-1, 25) = -2f'(3, 5) - 5$ .

Nhìn đồ thị  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(3, 5) > 0 \Rightarrow g'(-1, 25) < 0 \Rightarrow$  loại đáp án A.

Thử đáp án B: Chọn  $x = 0, 25 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g'(0, 25) = -2f'(0, 5) - 1$ .

Nhìn đồ thị  $f(x)$  ta thấy  $f(0, 5) > 0 \Rightarrow g(0, 25) < 0 \Rightarrow$  loại đáp án B.

Thử đáp án C: Chọn  $x = -0, 5 \in (-1; 0) \Rightarrow g'(-0, 5) = -2f'(2) + 2$ .

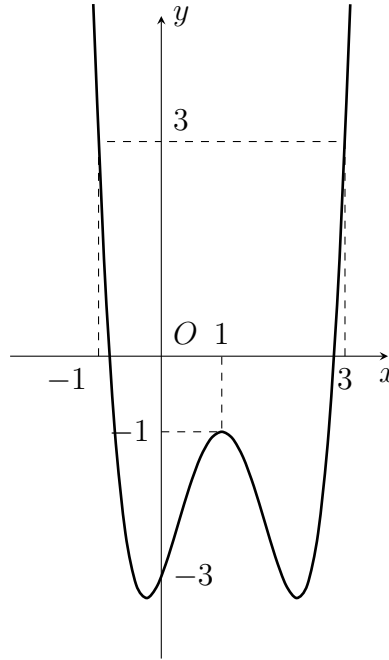
Nhìn đồ thị  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(2) < 0 \Rightarrow -2f'(2) > 0 \Rightarrow g'(-0,5) > 0 \Rightarrow$  Chọn đáp án C.

Thử đáp án D: Chọn  $x = 2 \in (1; 3) \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) - 8$ .

Nhìn đồ thị  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(-3) > 0 \Rightarrow -2f'(-3) < 0 \Rightarrow g'(2) < 0 \Rightarrow$  loại đáp án

Chọn phương án **C**

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số  $g(x) = f(3x - 1) - 27x^3 + 54x^2 - 27x + 4$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

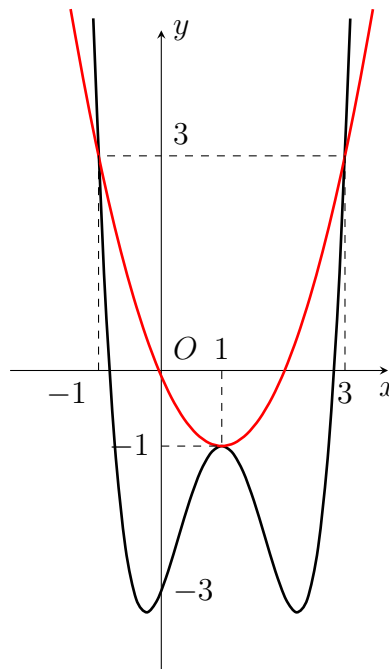
**(A)**  $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ .

**(B)**  $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$ .

**(C)**  $(0; 3)$ .

**(D)**  $(4; +\infty)$ .

**Lời giải.**



Cách 1. Ta có:  $g(x) = f(3x - 1) - (3x - 1)^3 + 3(3x - 1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x - 1) - (3x - 1)^2 + 2(3x - 1)]$ .

Có  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3x - 1) > (3x - 1)^2 - 2(3x - 1)(1)$ .

Đặt  $t = 3x - 1$ , bất phương trình (1) trở thành  $f(t) > t^2 - 2t$ .

Vẽ Parabol  $y = x^2 - 2x$ . Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số  $f'(x)$  nằm trên đồ thị hàm số  $y = x^2 - 2x$  trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(3; +\infty)$ .

$$\text{Suy ra } f'(t) > t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 < -1 \\ 3x - 1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy hàm số  $g(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(\frac{4}{3}; +\infty)$ .

Cách 2. Ta có:  $g(x) = f(3x - 1) - (3x - 1)^3 + 3(3x - 1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x - 1) - (3x - 1)^2 + 2(3x - 1)]$ .

Có:  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 2(3x - 1)$ .

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và  $y = t^2 - 2t$ , ( $t = 3x - 1$ ).

$$\text{Từ đồ thị ta có: } f(t) = t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \text{ (nghiệm âm kép)} \\ t = 3. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = -1 \\ 3x - 1 = 1 \\ 3x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = 3. \end{cases} \text{ (nghiệm âm kép)}$$

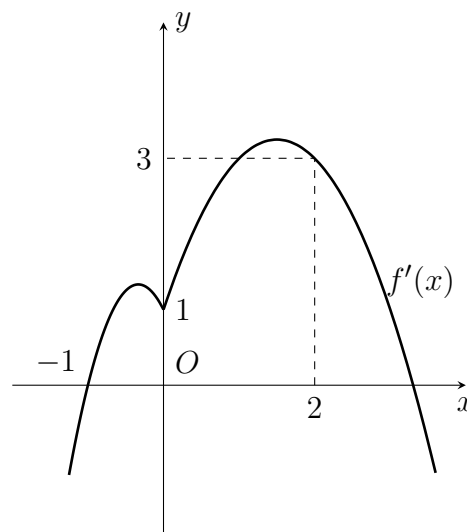
Ta có bảng xét dấu

| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |   | $\frac{2}{3}$ |   | 3 |   | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|---|---|---------------|---|---|---|-----------|
| $g'(x)$ |           | + | 0 | - | 0             | - | 0 | + |           |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(3; +\infty)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 26.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $f(-1) = 0$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Hàm số  $y = |2f(x - 1) - x^2|$  đồng biến trên khoảng

**(A)**  $(3; +\infty)$ .

**(B)**  $(-1; 2)$ .

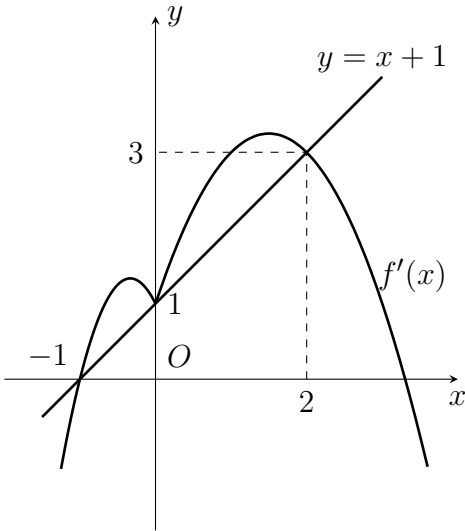
**(C)**  $(0; +\infty)$ .

**(D)**  $(0; 3)$ .



Lời giải.

Đặt  $g(x) = 2f(x - 1) - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2[f(x - 1) - (x - 1) - 1]$



Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và đồ thị hàm số  $y = x + 1$  ta có:

$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x - 1) > (x - 1) + 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 3.$

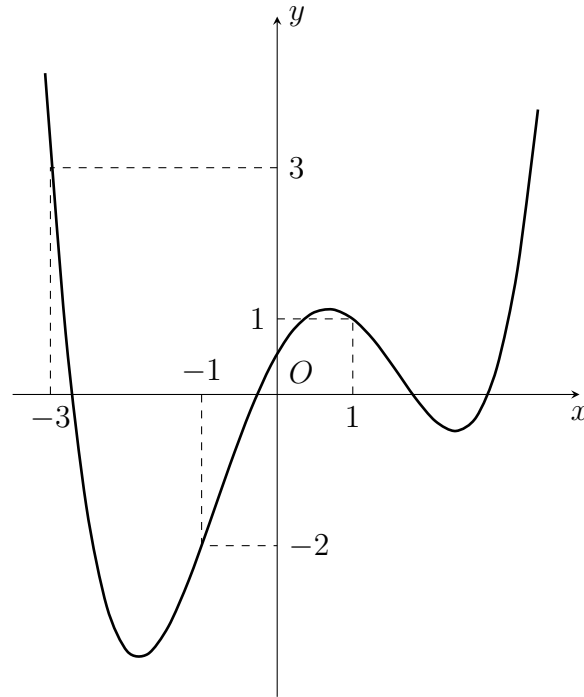
Bảng biến thiên

|         |                                                                    |     |     |     |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                          | $0$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$                                                                | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |
| $g(x)$  | <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> |     |     |     |           |

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số  $y = |2f(x - 1) - x^2|$  đồng biến trên khoảng  $(0; 3)$ .

Chọn phương án **D**

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau



Hàm số  $g(x) = 3f(1 - 2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ  $(1; 2)$ . Ⓑ  $(-3; -1)$ . Ⓒ  $(0; 1)$ . Ⓓ  $(-1; 2)$ .

**Lời giải.**

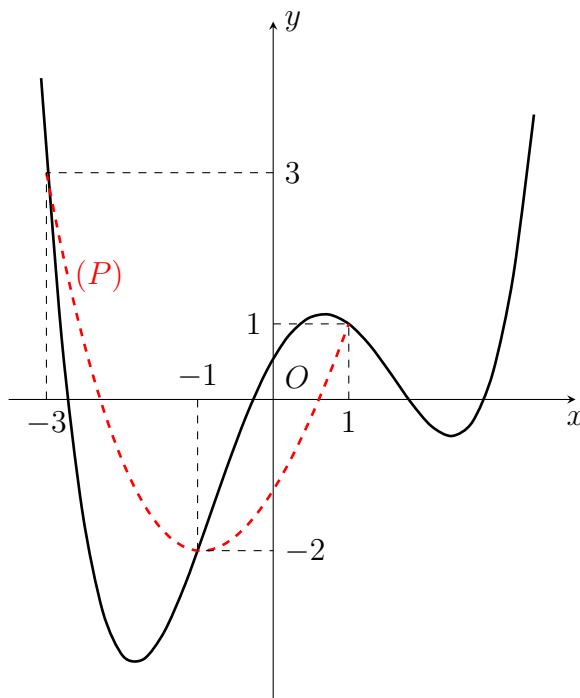
Ta có  $g'(x) = -6f'(1 - 2x) + 24x^2 - 42x + 6$ .

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) < 4x^2 - 7x + 1 (*)$ .

Đặt  $1 - 2x = t \Leftrightarrow x = \frac{1 - t}{2}$ .

Ta có  $(*)$  trở thành  $f'(t) < 4 \cdot \left(\frac{1 - t}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1 - t}{2} + 1 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$ .

Ta vẽ parabol  $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$  trên cùng hệ trục  $Oxy$  với đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau (đường nét đứt), ta thấy  $(P)$  có đỉnh  $I(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16})$  và đi qua các điểm  $(-3; 3), (-1; -2), (1; 1)$ .



Từ đồ thị hàm số ta thấy trên khoảng  $(-3; 1)$  ta có  $f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < t < -1$   
 $\Leftrightarrow -3 < 1 - 2x < -1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn:  $f(x) = (1 - x^2)(x - 5)$ .  
Hàm số  $y = 3f(x + 3) - x^3 + 12x$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**(A)**  $(1; 5)$ .

**(B)**  $(2; +\infty)$ .

**(C)**  $(-1; 0)$ .

**(D)**  $(-\infty; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $f(x) = (1 - x^2)(x - 5)$  suy ra  $f(x + 3) = [1 - (x + 3)^2](x + 3 - 5) = -(x + 4)(x + 2)(x - 2)$ .

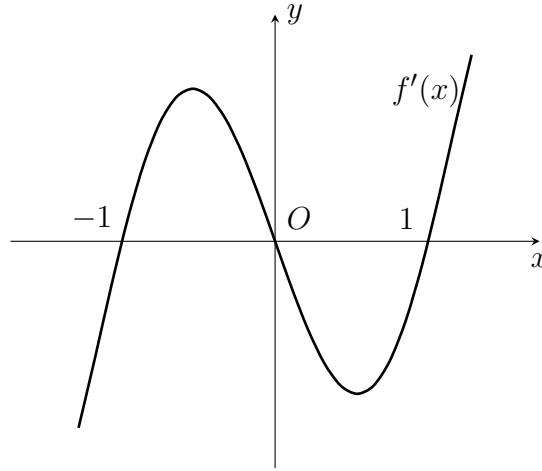
Mặt khác:  $y' = 3 \cdot f(x + 3) - 3x^2 + 12 = -3[(x + 4)(x + 2)(x - 2) + (x^2 - 4)] = -3(x - 2)(x + 2)(x + 5)$ .

Xét  $y' < 0 \Leftrightarrow -3(x - 2)(x + 2)(x + 5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -2 \\ x > 2. \end{cases}$

Vậy hàm số  $y = 3f(x + 3) - x^3 + 12x$  nghịch biến trên các khoảng  $(-5; -2)$  và  $(2; +\infty)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $y = f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ



Hàm số  $g(x) = f(f'(x))$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ  $(1; +\infty)$ .

Ⓑ  $(-\infty; -2)$ .

Ⓒ  $(-1; 0)$ .

Ⓓ  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

Vì các điểm  $(-1; 0)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \\ c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1.$$

Ta có:  $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x)$ .

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 - x)(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^3 - x = 1 \\ x^3 - x = -1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = 1,325 \\ x = -1,325 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |          |      |                       |     |                      |     |         |           |     |     |     |
|---------|-----------|----------|------|-----------------------|-----|----------------------|-----|---------|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1.325$ | $-1$ | $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $1.325$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $g'(x)$ |           | $-$      | $0$  | $+$                   | $0$ | $-$                  | $0$ | $+$     | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |

Dựa vào bảng biến thiên  $\Rightarrow g(x)$  nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$ .

Chọn phương án Ⓑ

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 20]$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$  đồng biến trên  $(0; 2)$ ?

Ⓐ 16.

Ⓑ 17.

Ⓒ 18.

Ⓓ 19.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*).$$

$$\text{Có } g'(x) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m).$$

$$\text{Vì } 2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2) \text{ nên } g(x) \text{ đồng biến trên } (0; 2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x - m \geq 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \leq m - 3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x \geq m + 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} (**).$$

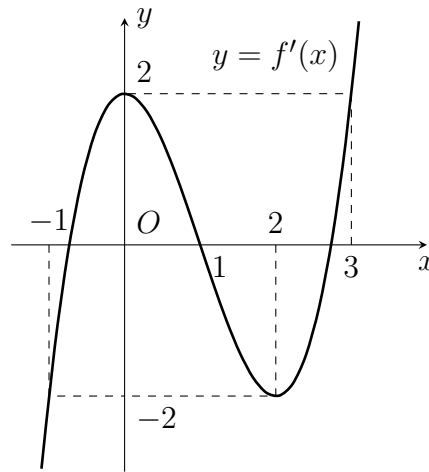
$$\text{Có } h(x) = x^2 + 3x \text{ luôn đồng biến trên } (0; 2) \text{ nên từ } (**) \Rightarrow \begin{cases} m - 3 \geq 10 \\ m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1. \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in [-10; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{Có 18 giá trị của tham số } m.$$

Vậy có 18 giá trị của tham số  $m$  cần tìm.

Chọn phương án Ⓒ

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Đặt  $g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2019$  với  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(5; 6)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

Ⓐ 4.

Ⓑ 11.

Ⓒ 14.

Ⓓ 20.

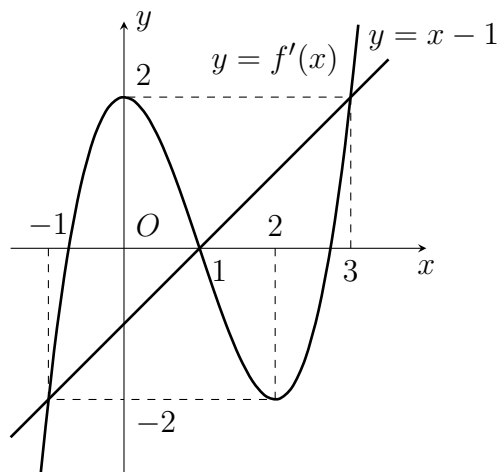
**Lời giải.**

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x - m) - (x - m - 1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = f'(x) - (x - 1).$$

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  và đồ thị  $y = x - 1$  trên hình vẽ ta suy ra  $h(x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ta có  $g'(x) = h(x - m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x - m \leq 1 \\ x - m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq x \leq m + 1 \\ x \geq m + 3. \end{cases}$

Do đó hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(m - 1; m + 1)$  và  $(m + 3; +\infty)$ .

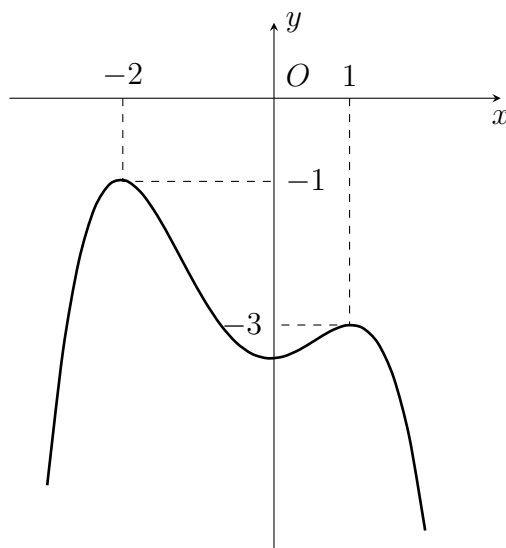
Do vậy, hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2. \end{cases}$

Do  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{1; 2; 5; 6\}$ , tức  $S = \{1; 2; 5; 6\}$ .

Tổng các phần tử của  $S$  bằng 14.

Chọn phương án **C**

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $-2020 < m < 2020$  để hàm số  $g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6\right)$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$

**(A)** 2021.

**(B)** 2020.

**(C)** 2019.

**(D)** 2022.

**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$ .

Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$  suy ra  $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3; 0) \\ &\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3; 0) \\ &\Leftrightarrow m \geq \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}. \end{aligned}$$

— Ta có  $-3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3$  dấu “=” khi  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ .

—  $-x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3; 0)$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}$ , dấu “=” khi  $x = -1$ .

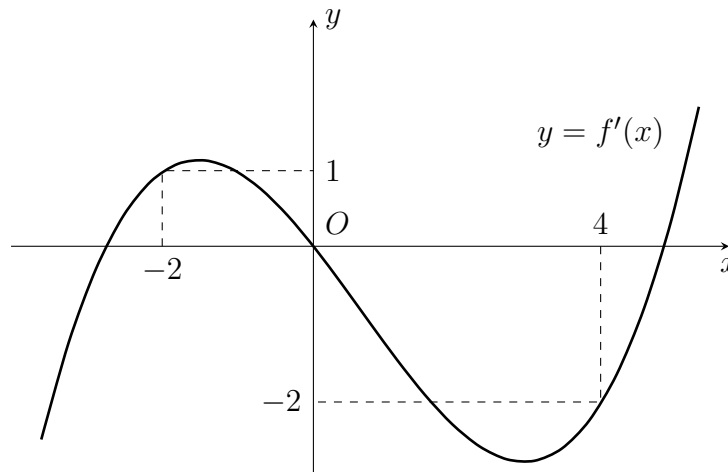
Suy ra  $\frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}, \forall x \in (-3; 0)$ , dấu “=” khi  $x = -1$ .

$$\Rightarrow \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} = -\frac{3}{8}.$$

Vậy  $m \geq -\frac{3}{8}$ , mà  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $-2020 < m < 2020$  nên có 2020 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **(B)**

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

**(A)** 2.

**(B)** 3.

**(C)** 0.

**(D)** 1.

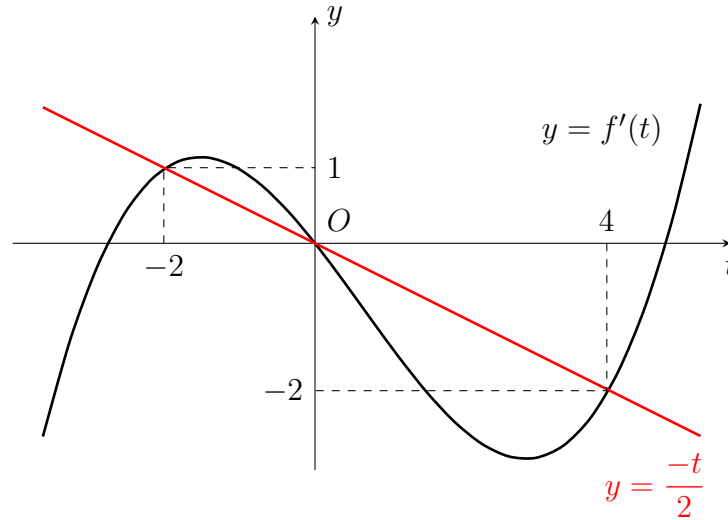
**Lời giải.**

Ta có  $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$ .

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = x - m \text{ thì } (*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}.$$

Vẽ đường thẳng  $y = -\frac{x}{2}$  trên cùng hệ trục  $Oxy$  với đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có  $f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4. \end{cases}$

Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2) \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3. \end{cases}$$

Vì  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{2; 3\}$ .

Vậy có hai giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

Chọn phương án **(A)**

**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m < 2020$  để hàm số  $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

**(A)** 2018.

**(B)** 2019.

**(C)** 2020.

**(D)** 2021.

**Lời giải.**

Ta có:  $g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \cdot f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ .

Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty).$$

Ta có:  $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Do đó:  $f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty). & (2) \end{cases}$

Hàm số  $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$  có bảng biến thiên:



|         |      |           |
|---------|------|-----------|
| $x$     | 2    | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |      | —         |
| $h(x)$  | $-m$ | $-\infty$ |

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm  $m$  thỏa mãn.

Điều kiện (1)  $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$ , kết hợp điều kiện  $m < 2020$  suy ra có 2019 giá trị  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m < 2020$  để hàm số  $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

Chọn phương án **(B)**

**Câu 35.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)e^x$ , có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-2019; 2019]$  để hàm số  $y = g(x) = f(\ln x) - mx^2 + mx - 2$  nghịch biến trên  $(1; e^2)$ ?

**(A)** 2018.

**(B)** 2019.

**(C)** 2020.

**(D)** 2021.

**Lời giải.**

Trên  $(1; e^2)$  ta có  $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x) - 2mx + m = \ln x + 1 - (2x - 1)m$ .

Để hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên  $(1; e^2)$  thì  $g'(x) = \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{2x - 1} \leq m, \forall x \in (1; e^2).$$

Xét hàm số  $h(x) = \frac{\ln x + 1}{2x - 1}$  trên  $(1; e^2)$ , ta có  $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x} - 2 \ln x}{(2x - 1)^2} < 0, \forall x \in (1; e^2)$ , từ đây suy ra  $m \geq 1$ .

Vậy có 2019 giá trị nguyên của  $m$  thỏa bài toán.

Chọn phương án **(B)**

 BẢNG ĐÁP ÁN 

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B  | 2. A  | 3. A  | 4. D  | 5. A  | 6. D  | 7. A  | 8. A  | 9. B  | 10. A |
| 11. A | 12. D | 13. C | 14. B | 15. A | 16. B | 17. B | 18. C | 19. B | 20. A |
| 21. D | 22. C | 23. D | 24. C | 25. D | 26. D | 27. A | 28. B | 29. B | 30. C |
| 31. C | 32. B | 33. A | 34. B | 35. B |       |       |       |       |       |