VŨ NGỌC HUY - LaTeX

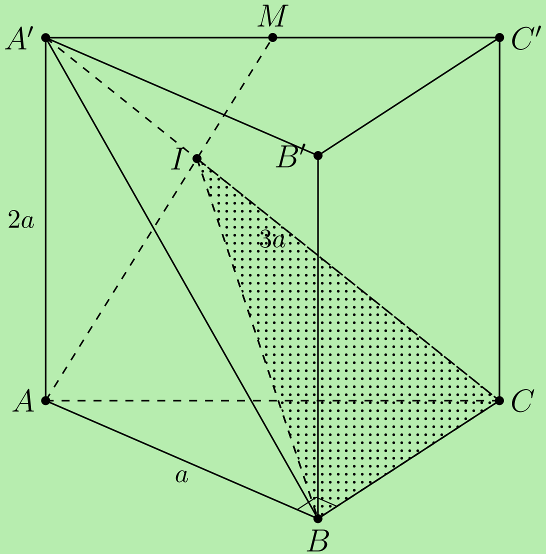
50 CHUYÊN ĐỀ

THAM KHẢO 2023

MÔN TOÁN

QUYỂN 1

- Chuyên đề bám sát theo ma trận ĐTK BGD 2023
- Full đáp án để giáo viên và học sinh tham khảo



MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ

50 CÂU PHÁT TRIỂN ĐỀ MH 2023

DẠNG 1. ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

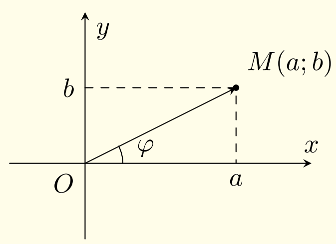
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu diễn hình học của số phức

Biểu diễn hình học của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

a) $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của z.

b) $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là mô-đun của z.



B BÀI TẬP MẪU

CÂU 1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

A) $(-6; 7)$. B) $(6; 7)$. C) $(7; 6)$. D) $(7; -6)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là $(7; -6)$.

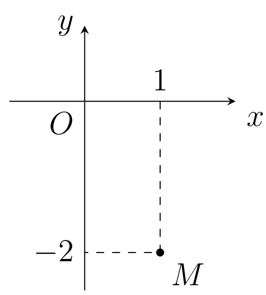
Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.1.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

A) $1 - 2i$. B) $i + 2$. C) $i - 2$. D) $1 + 2i$.



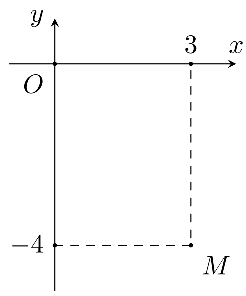
Lời giải.

Vì $M(1;-2) \Rightarrow M$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 1 - 2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 1.2.

Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

B Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

C Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là 3.

D Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

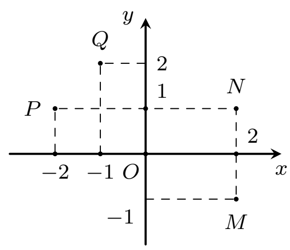
Lời giải.

Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án A □

Câu 1.3.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?



A N. B P. C M. D Q.

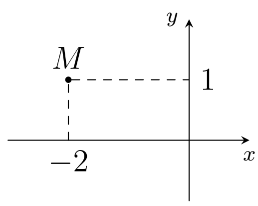
Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là $Q(-1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 1.4.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?



A $z_4 = 2 + i$. B $z_2 = 1 - 2i$. C $z_3 = -2 + i$. D $z_1 = 1 - 2i$.

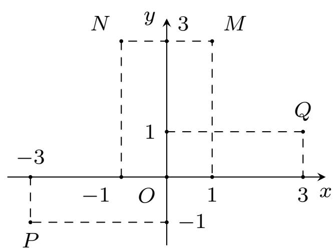
Lời giải.

Điểm $M(-2;1)$ biểu diễn số phức $z_3 = -2 + i$.

Chọn đáp án C □

Câu 1.5.

Cho số phức $z = (1 + i)(2 - i)$. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của z?



A M. B P. C N. D Q.

Lời giải.

Ta có $z = (1+i)(2-i) = 3+i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức z là $Q(3;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 1.6. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A $P(-3;4)$. B $Q(5;4)$. C $N(4;-3)$. D $M(4;5)$.

Lời giải.

Ta có $z = (1+2i)^2 = -3+4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 1.7. Biết $M(1;-2)$ là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$, số phức z bằng

A $2+i$. B $1+2i$. C $2-i$. D $1-2i$.

Lời giải.

Vì $M(1;-2)$ là điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ nên $\overline{z} = 1-2i$. Từ đó suy ra $z = 1+2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 1.8. Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và $\overline{z}$. Xác định mệnh đề đúng.

A M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.

B M và M' đối xứng với nhau qua trục tung.

C M và M' đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

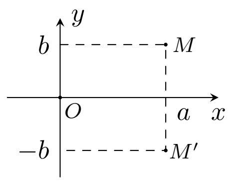
D Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

Lời giải.

Viết $z = a+bi \Rightarrow \overline{z} = a-bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Suy ra các điểm biểu diễn cho các số phức z và $\overline{z}$ lần lượt là $M(a;b)$ và $M'(a;-b)$.

Vậy M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.

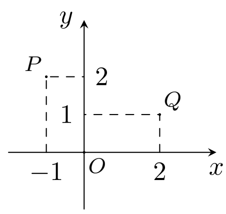


Chọn đáp án A □

Câu 1.9.

Trong hình vẽ bên, điểm P biển diễn số phức z_1, điểm Q biểu diễn số phức z_2. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$?

A $1+3i$. B $-3+i$. C $-1+2i$. D $2+i$.



Lời giải.

Nhìn vào hình vẽ trên ta thấy $z_1 = -1+2i$, $z_2 = 2+i$.

Khi đó $z_1 + z_2 = 1+3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 1.10. Cho số phức $z = 1+\sqrt{3}i$. Nghịch đảo của z có điểm biểu diễn là

(A) $N\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (C) $P\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. (D) $Q\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức $\frac{1}{z}$ là điểm $Q\left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 1.11. Cho số phức $z_1=1-2i$, $z_2=-3+i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $N(4;-3)$. (B) $M(2;-5)$. (C) $P(-2;-1)$. (D) $Q(-1;7)$.

Lời giải.

Ta có $w=z_1+z_2=(1-2i)+(-3+i)=-2-i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $P(-2;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 1.12. Cho số phức $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $Q(1;2)$. (B) $N(2;1)$. (C) $M(1;-2)$. (D) $P(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $w=iz=i(1-2i)=2+i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $N(2;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 1.13. Cho số phức $z=3-2i$. Khi đó số phức $w=z+i\overline{z}$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

(A) $H(1;-5)$. (B) $G(5;-5)$. (C) $E(1;1)$. (D) $F(5;1)$.

Lời giải.

Ta có $w=z+i\overline{z}=(3-2i)+i(3+2i)=3-2i+3i-2=1+i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $E(1;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 1.14. Cho số phức z thỏa mãn $iz+2-i=0$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(3;-4)$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $iz+2-i=0\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{i}=1+2i$.

Khi đó điểm biểu diễn cho z là $A(1;2)\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(-2;6)$.

Vậy khoảng cách từ A đến M là $|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{(-2)^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1.15. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $3-2i$, điểm B biểu diễn số phức $-1+6i$. Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau?

A. $1-2i$. B. $2-4i$. C. $2+4i$. D. $1+2i$.

Lời giải.

Ta có $A(3;-2)$ và $B(-1;6)$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_M = \dfrac{3+(-1)}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{-2+6}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2)$.

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức $1+2i$.

Chọn đáp án D □

Câu 1.16. Trên mặt phẳng phức, các điểm A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -3i$ và $z_2 = 2-2i$, $z_3 = -i-5$. Số phức z biểu diễn trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $z = -1-2i$. B. $z = -2+i$. C. $z = -1-i$. D. $z = -1+i$.

Lời giải.

Ta có $A(0;-3)$, $B(2;-2)$, $C(-5;-1)$.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+2+(-5)}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{-3+(-2)+(-1)}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(-1;-2)$.

Vậy điểm G biểu diễn cho số phức $z = -1-2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 1.17. Nếu điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thoả mãn $OM = 4$ thì

A. $|z| = \dfrac{1}{4}$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 16$. D. $|z| = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra $OM = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4 \Rightarrow |z| = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 1.18. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Nếu $OM = 2OM'$ thì

A. $|z| = 2|z'|$. B. $z' = 2z$. C. $z = 2z'$. D. $|z'| = 2|z|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = OM$, $|z'| = OM'$. Do đó, nếu $OM = 2OM'$ thì $|z| = 2|z'|$.

Chọn đáp án A □

Câu 1.19. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 8 + i$, $z_3 = 1 - 3i$ trong mặt phẳng phức Oxy. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\triangle MNP$ vuông.
B. $\triangle MNP$ đều.
C. $\triangle MNP$ cân.
D. $\triangle MNP$ vuông cân.

Lời giải.

Ta có $M(1; 1), N(8; 1), P(1; -3)$.

Dễ dàng tính được $MN = 7, NP = \sqrt{65}, MP = 4 \Rightarrow MN^2 + MP^2 = NP^2$.

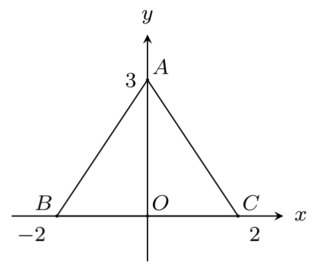
Vậy tam giác MNP vuông tại M.

Chọn đáp án A □

Câu 1.20.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. 1.
B. -1.
C. $-i$.
D. i.



Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(2; 0)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(0; 1)$ nên $z = i \Rightarrow \overline{z} = -i$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

1.1. A	1.2. A	1.3. D	1.4. C	1.5. D	1.6. A	1.7. B	1.8. A	1.9. A	1.10. D
1.11. C	1.12. B	1.13. C	1.14. C	1.15. D	1.16. A	1.17. B	1.18. A	1.19. A	1.20. B

DẠNG 2. HÀM SỐ LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số logarit

Với a là số thực dương khác 1.

- Hàm số logarit cho bởi công thức: $y = \log_a x$.
- Tập xác định: $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
- Với hàm số $y = \log_a u(x)$ thì điều kiện xác định là $u(x) > 0$.

2. Đạo hàm của hàm số logarit

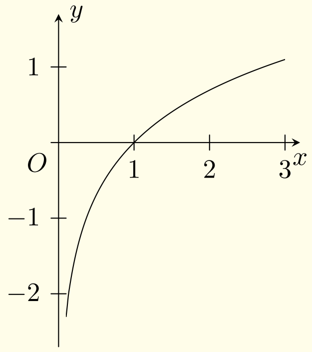
- Với $y = \ln x$ thì $y' = \dfrac{1}{x}$.
- Với $y = \log_a x$ thì $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
- Với $y = \ln u(x)$ thì $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Hàm số hợp $y = \log_a [u(x)]$ thì $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.
- Với $y = \log_a |u(x)|$ thì $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

3. Sự biến thiên của hàm số logarit

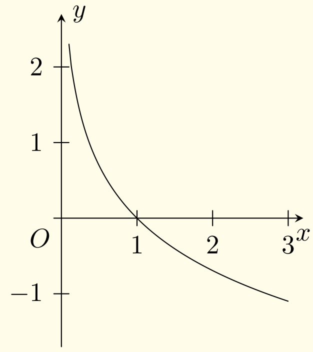
- Với $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Với $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

4. Đồ thị của hàm số logarit

$a > 1$



$0 < a < 1$



B BÀI TẬP MẪU

CÂU 2 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là

Ⓐ $y'=\dfrac{1}{x}$. Ⓑ $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$. Ⓒ $y'=\dfrac{\ln 2}{x}$. Ⓓ $y'=-\dfrac{1}{x\ln 3}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 2.1. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(3x+1)$.

Ⓐ $y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$. Ⓑ $y'=\dfrac{1}{(3x+1)\ln 3}$. Ⓒ $y'=\dfrac{3}{3x+1}$. Ⓓ $y'=\dfrac{1}{3x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y=\log_3(3x+1)\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2.2. Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(1-2x)$ là

Ⓐ $y'=\dfrac{2}{(1-2x)\ln 3}$. Ⓑ $y'=\dfrac{1}{(1-2x)\ln 3}$. Ⓒ $y'=\dfrac{-2}{(1-2x)\ln 3}$. Ⓓ $y'=\dfrac{-2\ln 3}{1-2x}$.

Lời giải.

Với $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có $y'=\dfrac{(1-2x)'}{(1-2x)\ln 3}=\dfrac{-2}{(1-2x)\ln 3}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2.3. Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(2-x)$ là

Ⓐ $y'=\dfrac{1}{(x-2)\ln 3}$. Ⓑ $y'=\dfrac{\ln 3}{2-x}$. Ⓒ $y'=\dfrac{1}{(2-x)\ln 3}$. Ⓓ $y'=\dfrac{\ln 3}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2-x)'}{(2-x)\ln 3}=\dfrac{1}{(x-2)\ln 3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2.4. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(2x+1)$.

Ⓐ $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. Ⓑ $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

Ⓒ $y'=(2x+1)\cdot\ln 3$. Ⓓ $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 3}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(2x+1)$ là $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 2.5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x+2)$.

(A) $y' = \dfrac{1}{(3x+2)}$. (B) $y' = \dfrac{3}{(3x+2)}$. (C) $y' = \dfrac{3}{(3x+2)\ln 3}$. (D) $y' = \dfrac{1}{(3x+2)\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(3x+2)\ln 3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2.6. Đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x^2+x+1\right)$ là hàm số nào sau đây?

(A) $y' = \dfrac{-(2x+1)}{x^2+x+1}$. (B) $y' = \dfrac{-1}{x^2+x+1}$. (C) $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. (D) $y' = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2.7. Đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$ là hàm số nào dưới đây?

(A) $y' = 1 + 2x\ln x$. (B) $y' = 1 + 2\ln x$. (C) $y' = 1 + \dfrac{2}{x\ln x}$. (D) $y' = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 + 2\ln x \cdot (\ln x)' = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

(A) $y' = \dfrac{x}{\ln 10}$. (B) $y' = \dfrac{\ln 10}{x}$. (C) $y' = \dfrac{1}{x\ln 10}$. (D) $y' = \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\log x)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2.9. Đạo hàm của hàm số $y = \log(1-x)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{x-1}$. (B) $\dfrac{1}{(x-1)\ln 10}$. (C) $\dfrac{1}{1-x}$. (D) $\dfrac{1}{(1-x)\ln 10}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\log(1-x)]' = \dfrac{(1-x)'}{(1-x)\ln 10} = \dfrac{-1}{(1-x)\ln 10} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2.10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln|x|$.

(A) $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$. (B) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. (C) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$. (D) $f'(x) = -\dfrac{1}{|x|}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2.11. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-3)$ tại điểm $x = 2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{\ln 3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2\ln 3}$. Ⓒ $2\ln 3$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)\ln 3} = \dfrac{2}{(2x-3)\ln 3} \Rightarrow y'(2) = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.12. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

Ⓐ $y' = \dfrac{4\ln 3}{4x+1}$. Ⓑ $y' = \dfrac{1}{(4x+1)\ln 3}$. Ⓒ $y' = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$. Ⓓ $y' = \dfrac{\ln 3}{4x+1}$.

Lời giải.

Với $x > -\dfrac{1}{4}$, ta có $y' = \dfrac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(3x^2+1)$.

Ⓐ $y' = \dfrac{6x}{3x^2+1}$. Ⓑ $y' = \dfrac{6x+1}{3x^2+1}$. Ⓒ $y' = \dfrac{1}{3x^2+1}$. Ⓓ $y' = \dfrac{3x}{3x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{6x}{3x^2+1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2+2)$.

Ⓐ $y' = \dfrac{2x}{x^2+2}$. Ⓑ $y' = \dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$. Ⓒ $y' = \dfrac{2x\ln 5}{x^2+2}$. Ⓓ $y' = \dfrac{1}{(x^2+2)\ln 5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\log_5(x^2+2)]' = \dfrac{(x^2+2)'}{(x^2+2)\ln 5} = \dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$

Vậy $y' = \dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2.15. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ trên tập xác định là

Ⓐ $\dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. Ⓑ $\dfrac{\ln 2}{x-1}$. Ⓒ $\dfrac{1}{(1-x)\ln 2}$. Ⓓ $\dfrac{\ln 2}{1-x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_8(6x-5)$.

Ⓐ $y' = \dfrac{2}{(6x-5)\ln 2}$. Ⓑ $y' = \dfrac{1}{(6x-5)\ln 8}$. Ⓒ $y' = \dfrac{6}{6x-5}$. Ⓓ $y' = \dfrac{6}{(6x-5)\ln 4}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \left(\dfrac{5}{6}; +\infty\right)$.

Khi đó ta có $y' = [\log_8(6x-5)]' = \dfrac{(6x-5)'}{(6x-5)\ln 8} = \dfrac{6}{(6x-5)\cdot 3\cdot\ln 2} = \dfrac{2}{(6x-5)\ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.17. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log_2(1-x)$.

A $y' = \dfrac{1}{\log_2(1-x)}$.   B $y' = \dfrac{1}{1-x}$.   C $y' = \dfrac{\ln 2}{1-x}$.   D $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(1-x)'}{(1-x).\ln 2} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2.18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(\sin x)$.

A $y' = \tan x$.   B $y' = -\tan x$.   C $y' = \cot x$.   D $y' = -\cot x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\ln(\sin x))' = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.19. Đạo hàm của hàm số $y = \ln x + x^2$ là

A $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^3}{3}$.   B $y' = \dfrac{1}{x} + x$.   C $y' = \dfrac{1}{x} + 2x$.   D $y' = \dfrac{1}{x} - 2x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{x} + 2x$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.20. Đạo hàm của hàm số $y = \log_8\left(x^2-3x-4\right)$ là

A $y' = \dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 2}$.   B $y' = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$.

C $y' = \dfrac{1}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.   D $y' = \dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\left(x^2-3x-4\right)'}{(x^2-3x-4)\ln 8} = \dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

Chọn đáp án D □

D BẢNG ĐÁP ÁN

2.1. A	2.2. C	2.3. A	2.4. B	2.5. C	2.6. C	2.7. D	2.8. C
2.9. B	2.10. B	2.11. A	2.12. C	2.13. A	2.14. B	2.15. A	2.16. A
2.17. D	2.18. C	2.19. C	2.20. D				

DẠNG 3. ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA - HÀM MŨ - LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.
- $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
- $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u \Rightarrow (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
- $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 3 (Đề Minh họa BGD 2022-2023).

Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\pi}$ là

A. $y' = \pi x^{\pi-1}$. B. $y' = x^{\pi-1}$. C. $y' = \dfrac{1}{\pi} x^{\pi-1}$. D. $y' = \pi x^{\pi}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = x^{\pi}$ là $y' = \pi x^{\pi-1}$.

Chọn đáp án A □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 3.1. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\mathrm{e}}$ là

A. $y' = \mathrm{e} \cdot x^{\mathrm{e}-1}$. B. $y' = x^{\mathrm{e}-1}$. C. $y' = \dfrac{1}{\mathrm{e}} x^{\mathrm{e}-1}$. D. $y' = \mathrm{e} \cdot x^{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = x^{\mathrm{e}}$ là $y' = \mathrm{e} \cdot x^{\mathrm{e}-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3.2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 + x\right)^{\alpha}$ với α là hằng số.

A. $2\alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha-1}$. B. $\alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha+1} (2x+1)$.

C. $\alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha-1} (2x+1)$. D. $\alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha-1} \cdot \left(x^2 + x\right)' = \alpha \left(x^2 + x\right)^{\alpha-1} (2x+1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3.3. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

(A) $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. (B) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. (C) $7\sqrt[6]{x}$. (D) $\sqrt[9]{x}$.

Lời giải.

Ta có $y = x^{\frac{7}{6}}$. Do đó $y' = \frac{7}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.4. Cho hàm số $y = x^{\pi}$. Giá trị của $y''(1)$ bằng

(A) $\ln^2 \pi$. (B) $\pi \ln \pi$. (C) 0. (D) $\pi(\pi - 1)$.

Lời giải.

Đạo hàm cấp một: $y' = \pi \cdot x^{\pi - 1}$.

Đạo hàm cấp hai: $y'' = \pi \cdot (\pi - 1) \cdot x^{\pi - 2}$. Do đó $y''(1) = \pi(\pi - 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2019^x$.

(A) $y' = 2019^{x-1}$. (B) $y' = 2019^x$.
(C) $y' = 2019^x \cdot \ln 2019$. (D) $y' = x{\cdot}2019^{x-1}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Ta có $y = 2019^x \Rightarrow y' = 2019^x \cdot \ln 2019$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.6. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

(A) $5^x \cdot \ln x$. (B) $x{\cdot}5^{x-1}$. (C) $5^x \cdot \ln 5$. (D) 5^x.

Lời giải.

Ta có $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.7. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

(A) $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$. (B) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2$.
(C) $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2$. (D) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.8. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ là

(A) $2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$. (B) $(4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
(C) $(2x^2+x)\, 2^{2x^2+x} \ln 2$. (D) $(4x+1)\ln(2x^2+x)$.

Lời giải.

$y' = (2x^2+x)' \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2 = (4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3.9. Đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{2x-3}$ là

A $y' = 2\mathrm{e}^{2x}$.
B $y' = \mathrm{e}^{2x-3}$.
C $y' = (2x-3)\mathrm{e}^{2x-3}$.
D $y' = 2\mathrm{e}^{2x-3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\mathrm{e}^{2x-3})' \Rightarrow y' = 2\mathrm{e}^{2x-3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3.10. Đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{x^2+x}$ là

A $(x^2+x)\cdot\mathrm{e}^{2x+1}$.
B $(2x+1)\cdot\mathrm{e}^{2x+1}$.
C $(2x+1)\cdot\mathrm{e}^{x^2+x}$.
D $(2x+1)\cdot\mathrm{e}^{x}$.

Lời giải.

Học sinh ghi công thức $(\mathrm{e}^u)' = u'\cdot\mathrm{e}^u$

$\Rightarrow y' = (x^2+x)'\cdot\mathrm{e}^{x^2+x} = (2x+1)\cdot\mathrm{e}^{x^2+x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3.11. Tính đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{\cos 2x}$.

A $y' = \sin 2x\cdot\mathrm{e}^{\cos 2x}$.
B $y' = \dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{\cos 2x}$.
C $y' = 2\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{\sin 2x}$.
D $y' = -2\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{\cos 2x}$.

Lời giải.

Ta có $(\cos u)' = -u'\sin u$.

$\Rightarrow y' = (\cos 2x)'\cdot\mathrm{e}^{\cos 2x} = -2\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{\cos 2x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3.12. Hàm số $f(x) = 2^{x^2+3x+1}$ có đạo hàm là

A $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}\ln 2}$.
B $f'(x) = 2^{x^2+3x+1}(2x+3)\ln 2$.
C $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}}$.
D $f'(x) = 2^{x^2+3x+1}(2x+3)$.

Lời giải.

$\left(2^{x^2+3x+1}\right)' = 2^{x^2+3x+1}\cdot\left(x^2+3x+1\right)'\cdot\ln 2 = 2^{x^2+3x+1}\cdot(2x+3)\cdot\ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3.13. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x + 1$ là

A $y' = 3^x\ln 3$.
B $y' = 3^x$.
C $y' = \dfrac{3^x}{\ln 3}$.
D $y' = x3^{x-1}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = 3^x + 1$ là $y' = 3^x\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 3.14. Đạo hàm của hàm số $y = 5^{\sin x}$ là

A $5^{\sin x}\cdot\ln 5\cdot\cos x$.
B $5^{\sin x}\cdot\cos x$.
C $5^{\sin x-1}\cdot\sin x$.
D $5^{\sin x}\cdot\ln 5$.

Lời giải.

Ta có $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln u$ và $(\sin x)' = \cos x$

$\Rightarrow y' = 5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.15. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$ là

(A) $(x^2 + 2)\, e^x$. (B) $x^2 e^x$. (C) $(2x - 2)e^x$. (D) $-2xe^x$.

Lời giải.

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

$\Rightarrow y' = (x^2 - 2x + 2)'\, e^x + (e^x)' \cdot (x^2 - 2x + 2) = (2x - 2) \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) = x^2 e^x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3.16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x + 1)$ là

(A) $\dfrac{2}{(2x+1) \cdot \ln x}$. (B) $\dfrac{2}{(2x+1) \cdot \ln 2}$. (C) $\dfrac{2 \cdot \ln 2}{x + 1}$. (D) $\dfrac{2}{(x+1) \cdot \ln 2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)'}{(2x+1) \cdot \ln 2} = \dfrac{2}{(2x+1) \cdot \ln 2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3.17. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (x^2 + 1)$ là

(A) $\dfrac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2}$. (B) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$. (C) $\dfrac{1}{(x^2+1) \cdot \ln 2}$. (D) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1) \cdot \ln 2} = \dfrac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3.18. Đạo hàm của hàm số $y = \log (x^2 - x)$ là

(A) $\dfrac{1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$. (B) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - x}$. (C) $\dfrac{2x - 1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$. (D) $\dfrac{2x - 1}{(x^2 - 1) \cdot \log e}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \dfrac{(x^2 - x)'}{(x^2 - x) \cdot \ln 10} = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.19. Đạo hàm của hàm số $y = \log (e^x + 2)$ là

(A) $\dfrac{e^x}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}$. (B) $\dfrac{e^x}{e^x + 2}$. (C) $\dfrac{1}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}$. (D) $\dfrac{1}{e^x + 2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \dfrac{(\mathrm{e}^x + 2)'}{(\mathrm{e}^x + 2) \cdot \ln 10} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 2) \cdot \ln 10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3.20. Đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^x - \ln(3x)$ là

A. $\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{3x}$. B. $\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$. C. $\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{x}$. D. $\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{(3x)'}{3x} = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

3.1. A	3.2. C	3.3. A	3.4. D	3.5. C	3.6. C	3.7. A	3.8. B	3.9. D	3.10.C
3.11.D	3.12.B	3.13.A	3.14.A	3.15.B	3.16.B	3.17.A	3.18.C	3.19.A	3.20.B

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

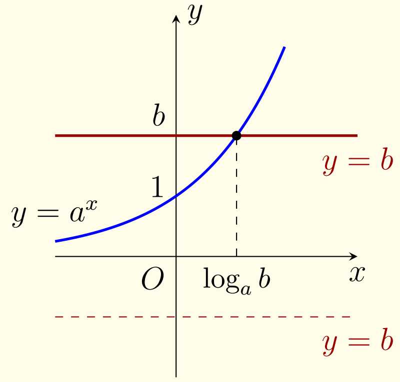
1. Công thức nghiệm của phương trình mũ

- Dạng $\boxed{a^x = b}$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

  Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

  a) $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

  b) $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.



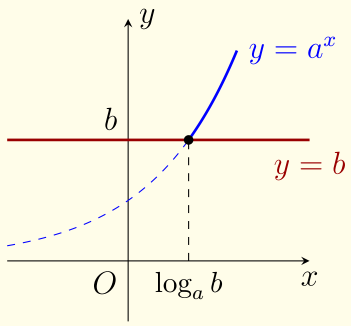
- **Tóm lại:** Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

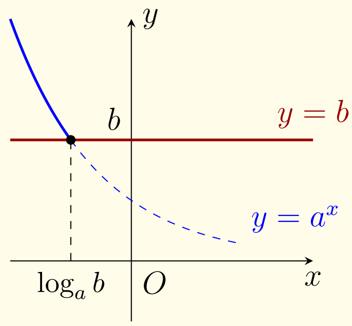
  a) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

  b) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $\boxed{a^x > b}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.





- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:

  a) Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình 1).

  b) Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình 2).

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 4. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

(A) $(-\infty; 1]$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 4.1. Phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1; x = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4.2. Nghiệm của phương trình $4^{x+1} = 8^{2x-3}$ là

(A) $x = \dfrac{11}{2}$. (B) $x = \dfrac{11}{3}$. (C) $x = \dfrac{11}{4}$. (D) $x = \dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $4^{x+1} = 8^{2x-3} \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^{3(2x-3)} \Leftrightarrow 2x + 2 = 6x - 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4.3. Tìm tập nghiệm của phương trình $4^{x^2} = 2^{x+1}$.

(A) $S = \{0; 1\}$. (B) $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

(C) $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. (D) $S = \left\{-1; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $4^{x^2} = 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{2x^2} = 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

(A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = \dfrac{1}{2}$. (D) $x = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1}=27 \Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 4.5. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2}<9^{2x+7}$.

A $(-5;+\infty)$. B $(-\infty;-5)$. C $(-4;+\infty)$. D $(-\infty;-4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x+2}<9^{2x+7} \Leftrightarrow 3^{x+2}<3^{2(2x+7)} \Leftrightarrow x+2<4x+14 \Leftrightarrow x>-4$.

Vậy $S=(-4;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4.6. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{100x}\geq 4^{200}$ là

A $(-\infty;4]$. B $[4;+\infty)$. C $[2;+\infty)$. D $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{100x}\geq 4^{200} \Leftrightarrow 2^{100x}\geq 2^{400} \Leftrightarrow 100x\geq 400 \Leftrightarrow x\geq 4$. Vậy $S=[4;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4.7. Nghiệm của phương trình $5^{x-4}=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

A $x=\dfrac{6}{7}$. B $x=\dfrac{1}{3}$. C $x=1$. D $x=\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $5^{x-4}=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 5^{x-4}=5^{-6x+2} \Leftrightarrow x-4=-6x+2 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.8. Bất phương trình $3^{x^2+1}>3^{2x+1}$ có tập nghiệm là

A $S=(-2;0)$. B $S=(0;2)$.

C $S=\mathbb{R}$. D $S=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2+1}>3^{2x+1} \Leftrightarrow x^2+1>2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0. \end{array}\right.$

Do đó $S=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.9. Nghiệm của phương trình $5^{2x+1}=125$ là

A $x=1$. B $x=3$. C $x=2$. D $x=4$.

Lời giải.

Ta có $5^{2x+1}=5^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.10. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$ là

Ⓐ $S = \varnothing$. Ⓑ $S = \{1; 2\}$. Ⓒ $S = \{0\}$. Ⓓ $S = \{1\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4.11. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là $(a; b)$. Khi đó giá trị của $b - a$ là

Ⓐ -2. Ⓑ -4. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 2x < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1; 3)$.

Khi đó $a = -1$ và $b = 3$. Vậy $b - a = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4.12. Giải phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$.

Ⓐ $x = -\frac{1}{8}$. Ⓑ $x = \frac{1}{4}$. Ⓒ $x = 4$. Ⓓ $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x} = 125^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2x+2} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4.13. Nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

Ⓐ $x = -\frac{1}{2}$. Ⓑ $x = -\frac{1}{5}$. Ⓒ $x = \frac{1}{4}$. Ⓓ $x = -\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(2x+1)} = 2^{-3x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4.14. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

Ⓐ $(-\infty; 6)$. Ⓑ $(0; 64)$. Ⓒ $(6; +\infty)$. Ⓓ $(0; 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 6)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 4.15. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-5x+4} \leq 1$.

Ⓐ $[1;4]$. Ⓑ $(-\infty;1] \cup [4;+\infty)$.
Ⓒ $(-\infty;1]$. Ⓓ $[4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-5x+4} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+4} \leq 2^0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Vậy $S = [1;4]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 4.16. Nghiệm của phương trình $2^{x+2} = 32$ là

Ⓐ $x = 7$. Ⓑ $x = 8$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+2} = 32 \Leftrightarrow 2^{x+2} = 2^5 \Leftrightarrow x+2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 4.17. Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

Ⓐ $x = \dfrac{7}{6}$. Ⓑ $x = \dfrac{6}{7}$. Ⓒ $x = \dfrac{1}{3}$. Ⓓ $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $5^{x-4} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 5^{x-4} = 5^{-6x+2} \Leftrightarrow x-4 = -6x+2 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4.18. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+x+1} = 8$ là

Ⓐ $\{1\}$. Ⓑ $\{-2\ ;\ 1\}$. Ⓒ $\{-2\}$. Ⓓ $\{1\ ;\ 2\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x^2+x+1 = 3 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2;1\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4.19. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4.20. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \dfrac{1}{4}$ là

Ⓐ $S = \{0\}$. Ⓑ $S = \{1\}$. Ⓒ $S = \varnothing$. Ⓓ $S = \{1;2\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.21. Số nghiệm của phương trình $3^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ là

A. 2.   B. 3.   C. 0.   D. 1.

Lời giải.

Ta có $3^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.22. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là

A. $(-\infty; 0)$.   B. $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.   C. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$.   D. $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+2} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+2} < 2^{-2x} \Leftrightarrow x + 2 < -2x \Leftrightarrow x < -\dfrac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.23. Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

A. $(4; +\infty)$.   B. $(-1; 4)$.

C. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.   D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

4.1. A	4.2. C	4.3. B	4.4. B	4.5. C	4.6. B	4.7. A	4.8. D
4.9. A	4.10. B	4.11. D	4.12. B	4.13. D	4.14. A	4.15. A	4.16. C
4.17. B	4.18. B	4.19. B	4.20. D	4.21. D	4.22. D	4.23. B	

DẠNG 5. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhận dạng cấp số cộng, cấp số nhân

- Nếu $u_{n+1} = u_n + d$, với d là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng.
- Nếu $u_{n+1} = u_n \cdot q$, với q là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân.

2. Số hạng tổng quát, số hạng thứ n

- Nếu (u_n) là cấp số cộng thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d$.
- Nếu (u_n) là cấp số nhân, thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

3. Công sai, công bội

- Cấp số cộng (u_n) có công sai là $d = u_{n+1} - u_n$.
- Cấp số nhân (u_n) có công bội là $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng, cấp số nhân

- Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số cộng (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

- Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số nhân (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

5. Điều kiện tạo thành cấp số cộng, cấp số nhân

- Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
- Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 5 (Đề minh họa BGD 2020-2021).
Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Giá trị u_3 bằng

A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_3 = u_1 \cdot q^2 \Leftrightarrow u_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 5.1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $1; 2; 4; 8; 16; 32; \ldots$. B. $2; 4; 6; 8; 16; 32; \ldots$.
C. $-2; -3; -4; -5; -6; -7; \ldots$. D. $1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots$.

Lời giải.
Nhận thấy $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên các dãy số ở đáp án B, C và D không phải là cấp số nhân.
Riêng đối với dãy $1; 2; 4; 8; 16; 32; \ldots$.ở đáp án A thỏa mãn: $u_{n+1} = 2 \cdot u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy số $1; 2; 4; 8; 16; 32; \ldots$ là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 5.2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 2. B. 9. C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.
Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 5.3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$. Tính u_3?

A. $u_3 = 18$. B. $u_3 = 6$. C. $u_3 = 8$. D. $u_3 = 4$.

Lời giải.
Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.
Chọn đáp án C □

Câu 5.4. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3; u_5 = 48$. Công bội của cấp số nhân bằng

A. 2. B. ± 2 . C. 16. D. -2.

Lời giải.
Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).
Với $u_1 = 3; u_5 = 48$ suy ra $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 \cdot q^4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \pm 2. \end{cases}$

Vậy công bội của cấp số nhân (u_n) là $q = \pm 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 5.5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

A $u_n = -3n + 2$. B $u_n = 3n - 2$. C $u_n = 3n - 5$. D $u_n = -2n + 3$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)\,d = -2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 5$.

Vậy số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là $u_n = 3n - 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.6. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d. Tìm số hạng tổng quát của (u_n)?

A $u_n = u_1 + (n-1)\,d$, $n \geq 2$. B $u_n = u_1 \cdot d^n$.

C $u_n = u_1 \cdot d^{n-1}$. D $u_n = u_1 + nd$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của (u_n) là: $u_n = u_1 + (n-1)\,d, n \geq 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 5.7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Tính công sai d?

A $d = 5$. B $d = 8$. C $d = 6$. D $d = 7$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 27 = -3 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng đã cho là

A 12. B 10. C 7. D -1.

Lời giải.

Ta có số hạng thứ hai là $u_2 = u_1 + d = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.9. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 1$ và $u_3 = 3$. Giá trị của u_4 bằng

A 6. B 9. C 4. D 5.

Lời giải.

Công sai $d = u_3 - u_2 = 2$.

Vậy $u_4 = u_3 + d = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 5.10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = -6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 3. (B) -3. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$, $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

(A) 11. (B) 12. (C) 132 . (D) 235.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có công sai d.

Theo giả thiết ta có: $u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow -12d = 84 \Leftrightarrow d = -7$.

Vậy $u_{17} = u_1 + 16d = 123 + 16 \cdot (-7) = 11$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5.12. Cho cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = -3$, số hạng cuối $u_n = 487$ và công sai $d = 5$. Hỏi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng?

(A) 69. (B) 79. (C) 89. (D) 99.

Lời giải.

Ta có: công thức cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)\,d \Rightarrow n = \dfrac{u_n - u_1}{d} + 1 = 99$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5.13. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 2$ và $u_4 = 18$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 16. (B) ± 3. (C) $\dfrac{1}{9}$. (D) 9.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ nên $\begin{cases} u_2 = u_1 \cdot q = 2 \\ u_4 = u_1 \cdot q^3 = 18 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.14. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_4 = -24$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 2. (B) -2. (C) -8. (D) $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{u_4}{u_1} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{-24}{3} \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.15. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_6 bằng

(A) 729. (B) 1458. (C) 243. (D) 486.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 3^5 = 486$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5.16. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng thứ 5 bằng

(A) 48. (B) 486. (C) 162. (D) 96.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ suy ra $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5.17. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

(A) $q = 3$. (B) $q = 5$. (C) $q = \frac{3}{2}$. (D) $q = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Theo đề ra ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ 486 = u_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow q^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5.18. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_2 = 1; u_3 = 5$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 5. (B) ± 4. (C) 4. (D) 21.

Lời giải.

Theo công thức tổng quát của cấp số nhân $u_3 = u_2 \cdot q \Leftrightarrow 5 = 1 \cdot q \Leftrightarrow q = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5.19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Ta có u_5 bằng

(A) 11. (B) 48. (C) 9. (D) 24.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, công bội $q = 2$ có số hạng tổng quát là $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Do đó $u_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.20. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = -9, u_4 = \frac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) -3. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q thì $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Theo đề ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = -9 \cdot q^3 \Rightarrow q = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

5.1. A	5.2. A	5.3. C	5.4. B	5.5. C	5.6. A	5.7. C	5.8. C
5.9. D	5.10. B	5.11. A	5.12. D	5.13. B	5.14. B	5.15. D	5.16. C

5.17. A	5.18. A	5.19. B	5.20. A

DẠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mặt phẳng

- Trong không gian, véc-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng (P). Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{n}$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

- Trong không gian $Oxyz$. Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Trong không gian $Oxyz$. Phương trình

$$ax + by + cz + d = 0$$

(với a, b, c không đồng thời bằng 0) là phương trình của một đường thẳng nào đó có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.

2. Phương trình đường thẳng

- Trong không gian, véc-tơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song với đường thẳng d. Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{n}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

- Trong không gian $Oxyz$ Đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc d: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ (với $abc \neq 0$).

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 6 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

Ⓐ $\overrightarrow{n_1}=(-1;1;1)$. Ⓑ $\overrightarrow{n_4}=(1;1;-1)$. Ⓒ $\overrightarrow{n_3}=(1;1;1)$. Ⓓ $\overrightarrow{n_2}=(1;-1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 6.1. Trong không gian $Oxyz$. Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{i}=(1;0;0)$. Ⓑ $\vec{j}=(0;1;0)$. Ⓒ $\vec{k}=(0;0;1)$. Ⓓ $\vec{t}=(1;1;1)$.

Lời giải.

Ta có $Oz\perp(Oxy)$ do đó véc-tơ $\vec{k}=(0;0;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy).

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 6.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x-2y+z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\overrightarrow{n_1}=(4;-2;-1)$. Ⓑ $\overrightarrow{n_4}=(4;2;1)$. Ⓒ $\overrightarrow{n_3}=(4;-2;0)$. Ⓓ $\overrightarrow{n_2}(4;-2;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 4x-2y+z-1=0$ suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(4;-2;1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+3z-1=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?

Ⓐ $\vec{n}=(2;1;3)$. Ⓑ $\vec{n}=(-4;2;-6)$. Ⓒ $\vec{n}=(2;1;-3)$. Ⓓ $\vec{n}=(-2;1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ nên (α) cũng nhận véc-tơ $-2\vec{n}=(-4;2;-6)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6.4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x-z+1=0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

Ⓐ $(-3;1;1)$. Ⓑ $(3;0;-1)$. Ⓒ $(3;-1;1)$. Ⓓ $(3;-1;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;0;-1)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6.5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(Q)\colon x-2y+5z+2023=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n_2}=(3;6;15)$. (B) $\vec{n_3}=(-1;2;5)$. (C) $\vec{n_1}=(-2;4;-10)$. (D) $\vec{n_4}=(-2;4;10)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;5)$ nên $-2\vec{n}=(-2;4;-10)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (Q).

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+3z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n_3}=(2;1;3)$. (B) $\vec{n_2}=(-1;3;2)$. (C) $\vec{n_4}=(1;3;2)$. (D) $\vec{n_1}=(3;1;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;3)$. □

Câu 6.7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây không phải véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+3y-5z+2=0$?

(A) $\vec{n}=(2;6;-10)$. (B) $\vec{n}=(-2;-6;-10)$.

(C) $\vec{n}=(-3;-9;15)$. (D) $\vec{n}=(-1;-3;-5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(1;;3;-5)$.

Ta có $\vec{n}=(-2;-6;-10)$ không cùng phương với $\vec{n_1}$ vì $\dfrac{1}{-2}=\dfrac{3}{-6}\neq\dfrac{-5}{-10}$.

Do đó $\vec{n}=(-2;-6;-10)$ không là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng nào sau đây nhận véc-tơ $\vec{n}=(2;1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến?

(A) $2x+y-z-1=0$. (B) $2x+y+z-1=0$.

(C) $4x+2y-z-1=0$. (D) $-2x-y-z+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

(A) $\vec{n}=(3;2;6)$. (B) $\vec{n}=(2;3;6)$. (C) $\vec{n}=(3;2;1)$. (D) $\vec{n}=(3;-2;-2)$.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1\Leftrightarrow 2x+3y+6z-6=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;6)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;1;3)$, $B(2;1;0)$ và $C(4;-1;5)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) có tọa độ là

(A) $(2;7;2)$. (B) $(-2;7;-2)$. (C) $(16;1;6)$. (D) $(16;-1;6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0;-3)$; $\overrightarrow{AC}=(5;-2;2)$.

Mặt phẳng (ABC) có cặp véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=-\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(2;7;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.11. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(A) $\overrightarrow{u_2}=(1;1;2)$. (B) $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;2)$. (C) $\overrightarrow{u_4}=(2;1;-1)$. (D) $\overrightarrow{u_1}=(2;1;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$?

(A) $\overrightarrow{u}=(1;-3;2)$. (B) $\overrightarrow{u}=(2;3;1)$. (C) $\overrightarrow{u}=(2;-6;1)$. (D) $\overrightarrow{u}=(4;-6;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{t}=(2;-3;1)$. Do đó $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{t}=(4;-6;2)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=t+2 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

(A) $(-2;1;1)$. (B) $(1;1;1)$. (C) $(2;-1;-2)$. (D) $(-2;1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{t}=(-2;1;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của Δ.

(A) $(-1;2;-1)$. (B) $(1;-2;1)$. (C) $(3;-2;-1)$. (D) $(-3;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(-3;2;1)$ nên $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{u}=(3;-2;-1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{u_2} = (2; 3; 5)$. (B) $\vec{u_3} = (0; 4; -1)$. (C) $\vec{u_1} = (2; 4; -1)$. (D) $\vec{u_4} = (2; -4; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$ có $\vec{u_3} = (0; 4; -1)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) có phương trình $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là

(A) $\vec{u} = (2; 3; -1)$. (B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$. (C) $\vec{u} = (-2; 3; -1)$. (D) $\vec{u} = (-2; -3; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; -1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+2}{-5}$ có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; 5; -2)$. (B) $\vec{u} = (3; 2; -5)$. (C) $\vec{u} = (-3; 2; -5)$. (D) $\vec{u} = (2; 3; -5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 2; -5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

(A) $\vec{u_1} = (-2; 1; -1)$. (B) $\vec{u_1} = (1; -3; 2)$. (C) $\vec{u_3} = (-1; -3; 2)$. (D) $\vec{u_4} = (1; 3; -2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_1} = (1; -3; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ có véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; -2; 1)$. (B) $\vec{u} = (-1; -3; 4)$. (C) $\vec{u} = (-2; -1; 3)$. (D) $\vec{u} = (0; -2; 3)$.

Lời giải.

Ta có Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;1)$.

Vì d song song với Δ nên cũng có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6.20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+3}{7}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_3}=(1;2;-3)$. B. $\overrightarrow{u_4}=(7;-8;5)$. C. $\overrightarrow{u_1}=(-1;-2;3)$. D. $\overrightarrow{u_3}=(5;-8;7)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_3}=(5;-8;7)$.

Chọn đáp án D □

D BẢNG ĐÁP ÁN

6.1. C	6.2. D	6.3. B	6.4. B	6.5. C	6.7. B	6.8. A	6.9. B
6.10. A	6.11. C	6.12. D	6.13. A	6.14. C	6.15. B	6.16. A	6.17. B
6.18. B	6.19. A	6.20. D					

DẠNG 7. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM GIỮA CÁC ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số giao điểm của hai đồ thị

- Muốn tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm $y = f(x)$ và đường thẳng $y = a$ ta chỉ việc vẽ đường thẳng $y = a$ (là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; a)$) và xác định số giao điểm.
- Chú ý: Phương trình của trục hoành (hay trục Ox) là $y = 0$.
- Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, khi đó số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số trên bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$.
- Trường hợp đề cho bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$, để biểu diễn đường $y = a$ ta vẽ một đường ngang sao cho hợp lí với đề bài.

2. Tìm giao điểm của hai đồ thị

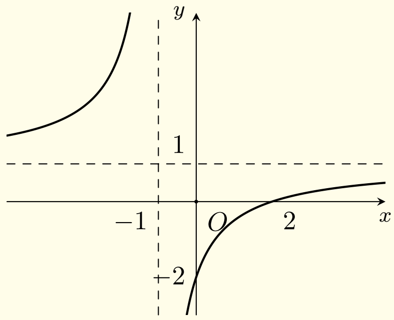
- Dựa vào đồ thị để tìm tạo độ giao điểm.
- Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm, ta được hoành độ của giao điểm sau đó thay vào hàm số để tìm tung độ.
- Muốn tìm nghiệm của phương trình $f(u(x)) = a$, ta đi giải phương trình $u(x) = x_0$ (trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = a$).

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 7 (Đề tham khảo BGD 2023).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

Ⓐ $(0; -2)$. Ⓑ $(2; 0)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(0; 2)$.



Lời giải.

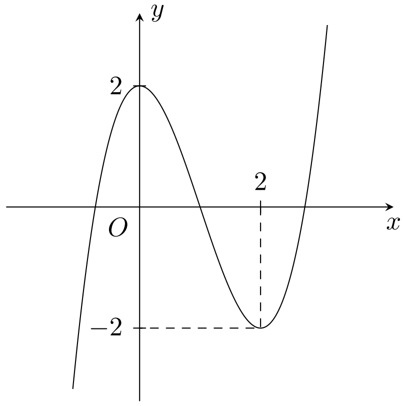
Nhìn vào hình trên ta thấy tạo độ giao điểm là $(2; 0)$.

Chọn đáp án B □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

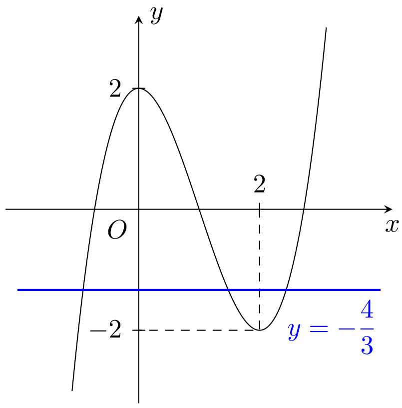
Câu 7.1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) + 4 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A 3. B 0. C 1. D 2.

Lời giải.



Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3}$.

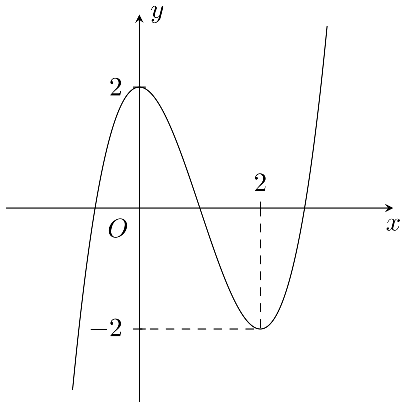
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C)\colon y = f(x)$ (hình vẽ) và $d\colon y = -\dfrac{4}{3}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Chọn đáp án A □

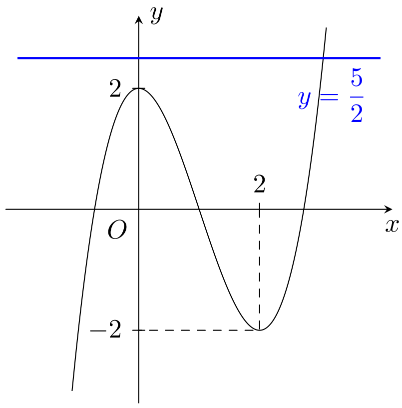
Câu 7.2.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.



Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2}$.

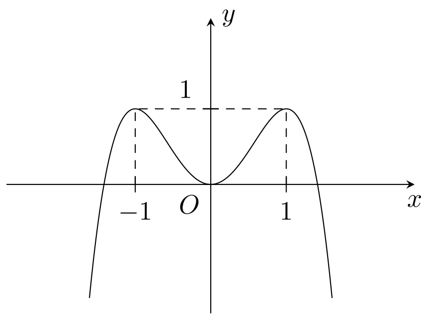
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C)\colon y = f(x)$ (hình vẽ) và $d\colon y = \dfrac{5}{2}$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

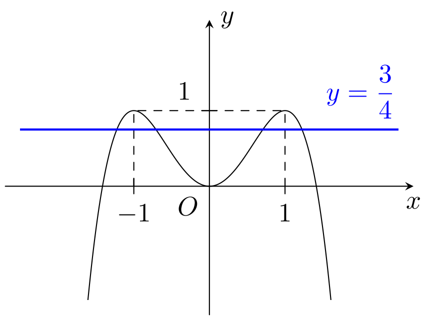
Câu 7.3.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là



(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.



Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{4}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C)\colon y = f(x)$ (hình vẽ) và $d\colon y = \dfrac{3}{4}$.

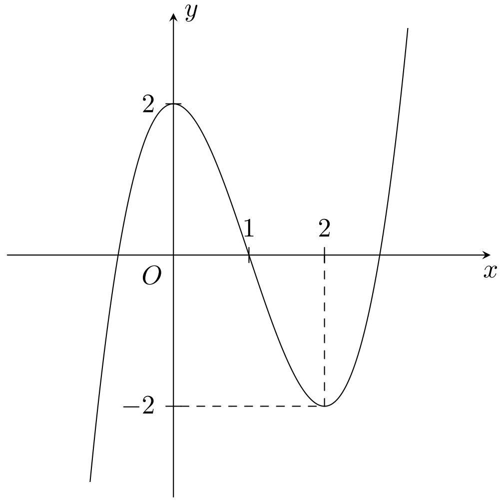
Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Chọn đáp án A □

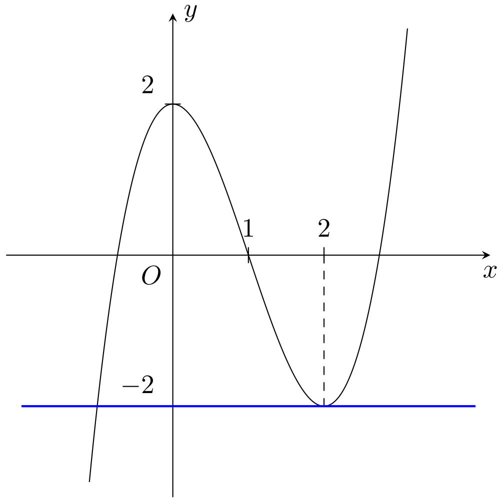
Câu 7.4.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2) = -2$ là

A 3. B 4. C 0. D 2.



Lời giải.



Nhìn đồ thị ta thấy $f(x^2) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = x_0 < 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

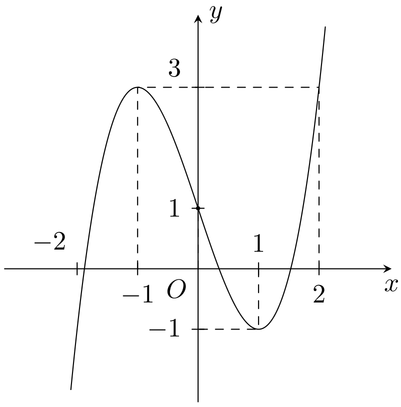
Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án D □

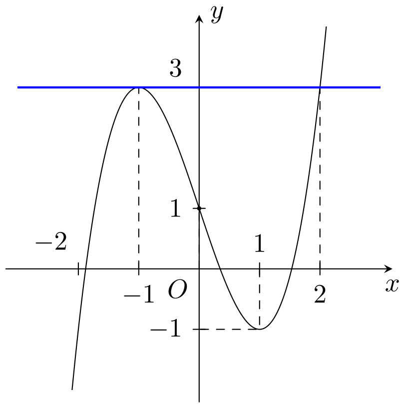
Câu 7.5.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x^2 - 2) = 3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



Lời giải.



Nhìn đồ thị ta thấy $f(x^2-2) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

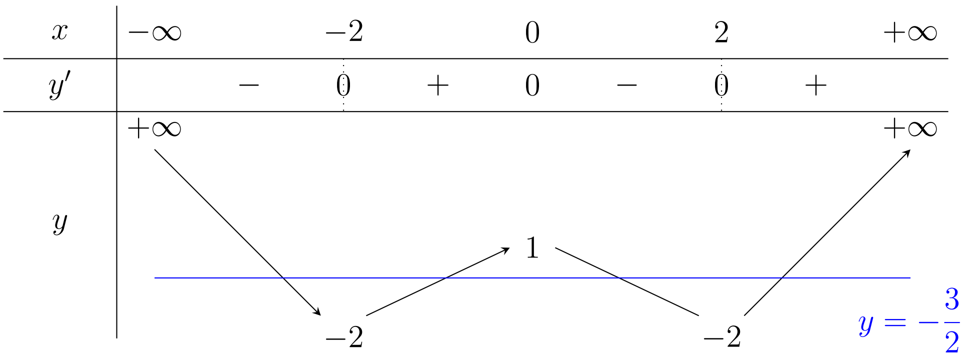
(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$. (*)

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

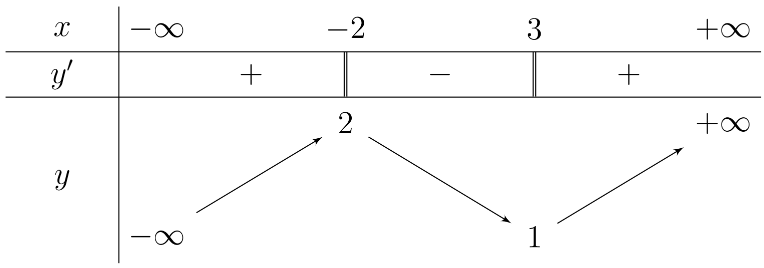
Bảng biến thiên.



Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 7.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

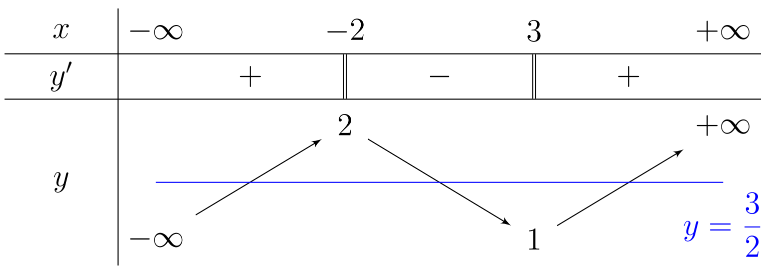
A 2. B 1. C 3 . D 4 .

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$. $(*)$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên.



Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = \dfrac{3}{2}$ có ba nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 7.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2 . Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có phương trình $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$. $(*)$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Xét bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$y=\dfrac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x)=\dfrac{3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7.9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên nhu hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm?

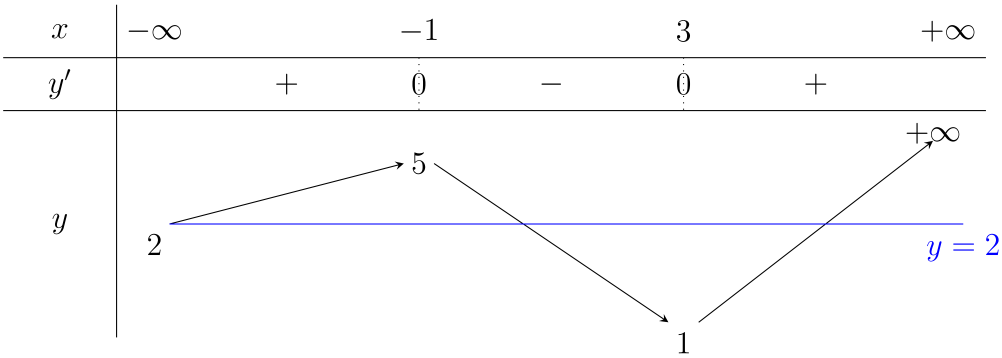
Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$. $(*)$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.

Bảng biến thiên.

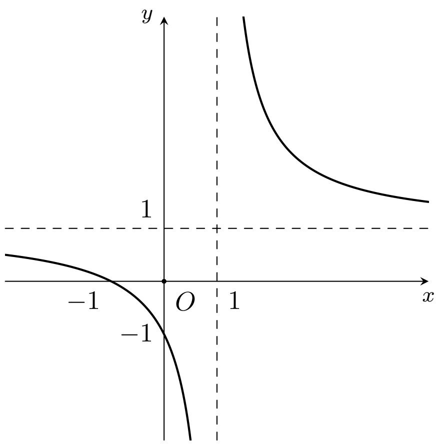


Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.
Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x)=2$ có hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án C □

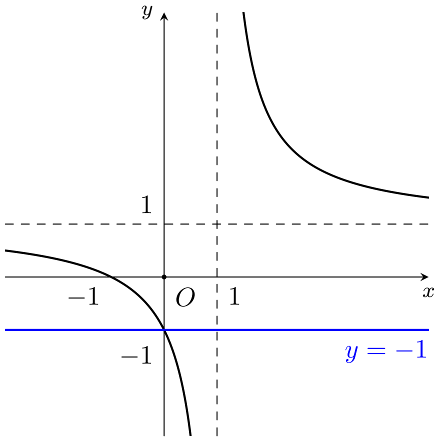
Câu 7.10.

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số bên với đường thẳng $y=-1$.

A $(0;1)$. B $(0;-1)$. C $(-1;-1)$. D $(-1;0)$.



Lời giải.



Nhìn vào hình trên ta thấy tọa độ giao điểm là $(0;-1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 7.11. Giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ với trục hoành là điểm

A $N\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. B $P\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. C $Q(-1;0)$. D $M(0;1)$.

Lời giải.

Giao với trục Oy cho $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy là điểm $N\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.12. Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.13. Đồ thị hàm số $y=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y=0 \Rightarrow x=\pm 1$. Do đó đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7.14. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

(A) 2. (B) -1. (C) -3. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3-x^2+x-1=x-1 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Với $x=0 \Rightarrow y=-1=y_1$.

Với $x=1 \Rightarrow y=0=y_2$.

Vậy tổng các tung độ của các giao điểm là $y_1+y_2=-1+0=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7.15. Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+6}{x+2}$ và đường thẳng $y=-x$.

(A) -5. (B) -7. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{5x+6}{x+2}=-x$ (với $x\neq -2$)

$$\Leftrightarrow 5x+6=-x(x+2) \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6. \end{array}\right.$$

Khi đó tổng hoành độ của các giao điểm là -7.

Chọn đáp án B ☐

Câu 7.16. Đồ thị của hàm số $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 + x + 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A 4. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $4x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hai hàm số có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D ☐

Câu 7.17. Trong các điểm sau điểm nào là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + \dfrac{2}{x-1}$ và đường thẳng $y = 2x$.

A $(2; -4)$. B $(-2; -2)$. C $(-1; 2)$. D $(2; 4)$.

Lời giải.

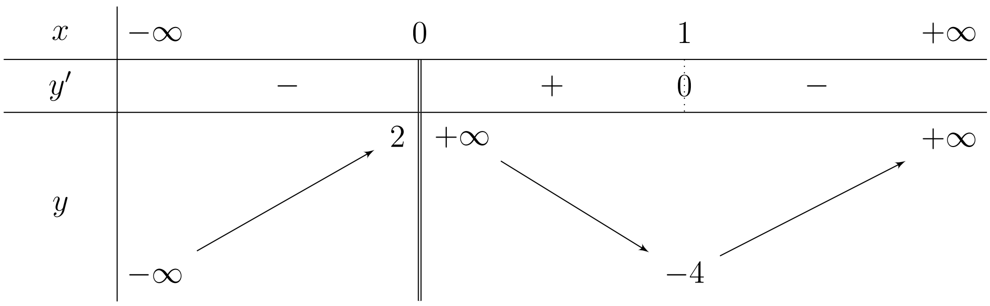
Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$x + \frac{2}{x-1} = 2x \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Từ đó ta có 2 giao điểm là $A(-1; -2)$ và $B(2; 4)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 7.18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(x) - 1 = 0$?

A 3. B 1. C 2. D 0.

Lời giải.

Số nghiệm phương trình $f(x) - 1 = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$ ↗		2 ‖ $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

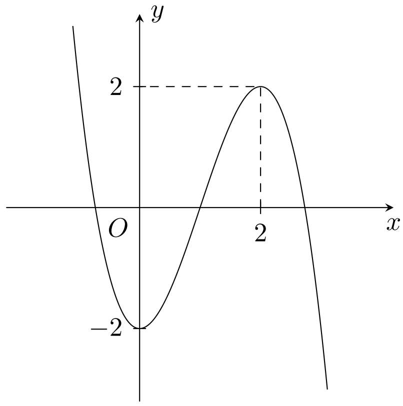
$y = 1$

Dựa vào bảng biên thiên ta được kết quả là 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

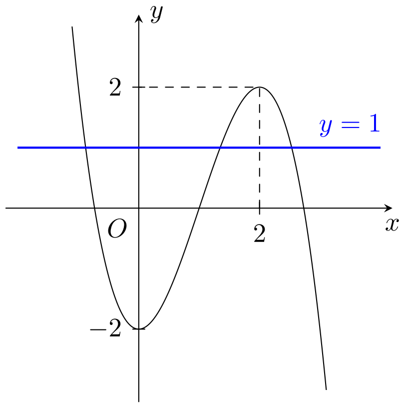
Câu 7.19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?



(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.



Ta có $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

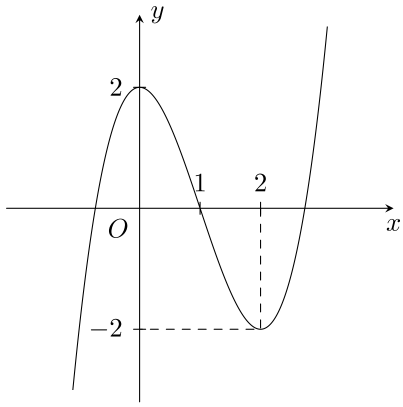
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C)\colon y = f(x)$ (hình vẽ) và $d\colon y = 1$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2.

Chọn đáp án (B) □

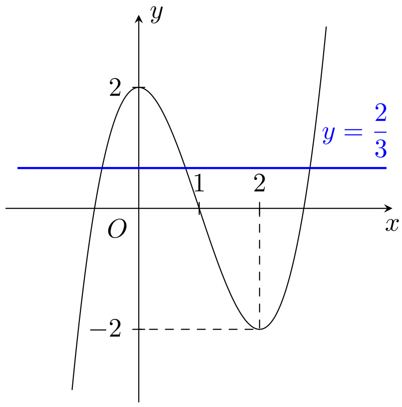
Câu 7.20.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1?



(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.



Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C)\colon y = f(x)$ (hình vẽ) và $d\colon y = \dfrac{2}{3}$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm lớn hơn 1.

Chọn đáp án (C) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

7.1. A	7.2. C	7.3. A	7.4. D	7.5. D	7.6. A	7.7. C	7.8. C
7.9. C	7.10. B	7.11. A	7.12. A	7.13. B	7.14. B	7.15. B	7.16. D
7.17. D	7.18. A	7.19. B	7.20. C				

DẠNG 8. TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. Các tính chất

- $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u=\ldots$
- $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (với k là hằng số).
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (với $a<b<c$).

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 8 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Nếu $\int\limits_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^4 g(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_{-1}^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. B. 6. C. 1. D. 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^4 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^4 g(x)\mathrm{d}x=2+3=5$.

Chọn đáp án A □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 8.1. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$. Khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$.　B. -1.　C. 1.　D. $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3} = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.2. Cho $I = \int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $J = \int\limits_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $K = \int\limits_1^5 [4f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4.　B. 2.　C. 7.　D. 8.

Lời giải.

Ta có $K = \int\limits_1^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 16 - 9 = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 8.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_b^d f(x)\mathrm{d}x = 2$ với $a < d < b$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10.　B. 3.　C. 7.　D. $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_b^d f(x)\mathrm{d}x = 5 - 2 = 3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8.4. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên K và a, b, c thuộc K. Công thức nào sau đây sai?

A. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 8.5. Cho $\int\limits_1^0 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -4$. Giá trị của $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 11. B. 7. C. -1. D. 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_1^0 f(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -3-2\cdot(-4) = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 8.6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. B. -12. C. 1. D. 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -3 + 4 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8.7. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int\limits_0^1 [4x - 3f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -9. B. -7. C. -5. D. 11.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [4x - 3f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 4x\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2x^2\Big|_0^1 - 3\cdot 3 = 2 - 9 = -7$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.8. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -4$. Khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. B. 6. C. -2. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 2 + 2\cdot(-4) = -6$.

Chọn đáp án A □

Câu 8.9. Cho hai số thực a; b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. B. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$. Ⓓ $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Lời giải.

$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8.10. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\int\limits_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -7. Ⓑ 1. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của tích phân ta có

$$\int\limits_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^2 f(x)dx + 3\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = 4 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8.11. Nếu $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^3 g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_{-1}^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ -3. Ⓓ -1.

Lời giải.

$\int\limits_{-1}^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^3 g(x)\mathrm{d}x = 2 - (-1) = 3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8.12. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [3f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng:

Ⓐ 11. Ⓑ -4. Ⓒ 16. Ⓓ -3.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 [3f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 3\cdot 2 - 2\cdot 5 = -4.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 8.13. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 1. Ⓒ -1. Ⓓ -5.

Lời giải.

$\int\limits_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)dx - \int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8.14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 9$; $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 5$. Ⓑ $I = \dfrac{9}{4}$. Ⓒ $I = 36$. Ⓓ $I = 13$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 9 + 4 = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 8.15. Cho $\int\limits_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = -4$ và $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 6. Ⓒ -8. Ⓓ -6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -4 - 2 = -6$.

Chọn đáp án D □

Câu 8.16. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

Ⓐ $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 8.17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2$, $f(4) = 2020$. Tính $I = \int\limits_1^2 f'(2x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 1009$. Ⓑ $I = 2018$. Ⓒ $I = 2022$. Ⓓ $I = 1011$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}f(2x)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}[f(4) - f(2)] = \dfrac{1}{2}(2020 - 2) = 1009$.

Chọn đáp án A □

Câu 8.18. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 18$. Khi đó $\int\limits_1^3 [5-2f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -26. Ⓑ 16. Ⓒ -31. Ⓓ -46.

Lời giải.

$\int\limits_1^3 [5-2f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 5\mathrm{d}x - 2\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5x\Big|_1^3 - 2\cdot 18 = 10-36 = -26.$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8.19. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 7$, khi đó $\int\limits_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 16. Ⓒ -18. Ⓓ 24.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)dx + 3\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 24.$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8.20. Cho $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_4^5 f(u)\mathrm{d}u = 2$ và $\int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=5$. Ⓑ $I=10$. Ⓒ $I=3$. Ⓓ $I=6$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_4^5 f(u)\mathrm{d}u = 2 \Rightarrow \int\limits_4^5 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

$\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_4^5 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_4^5 f(x)\mathrm{d}x = 5-2 = 3.$

$I = \int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3+3 = 6.$

Chọn đáp án Ⓓ □

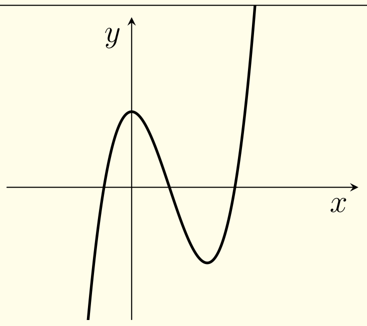
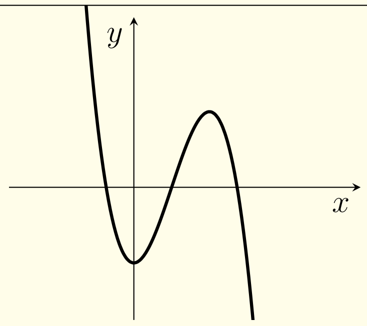
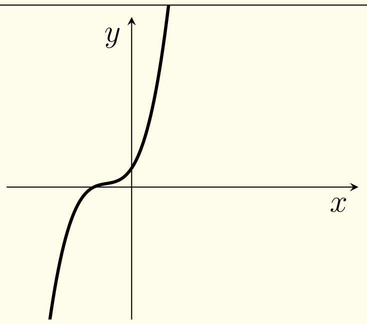
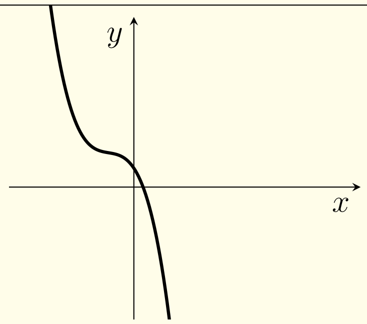
Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN

8.1. B	8.2. C	8.3. B	8.4. C	8.5. D	8.6. C	8.7. B	8.8. A
8.9. A	8.10. B	8.11. A	8.12. B	8.13. A	8.14. D	8.15. D	8.16. A
8.17. A	8.18. A	8.19. D	8.20. D				

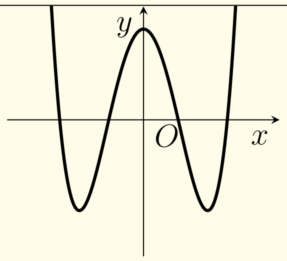
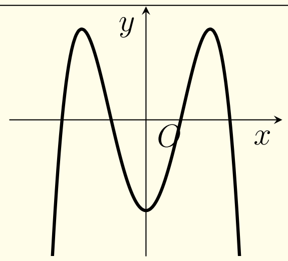
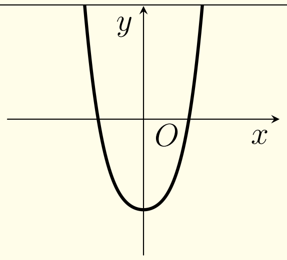
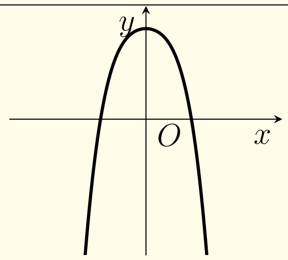
DẠNG 9. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

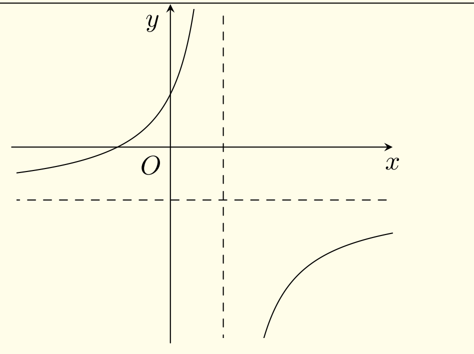
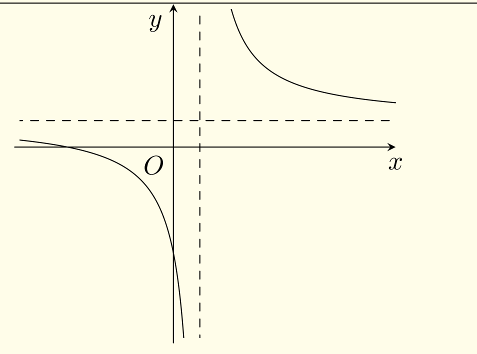
1. Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $(b^2 - 3ac > 0)$		
$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $(b^2 - 3ac \leq 0)$		

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $(a.b < 0)$		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm $(a.b \geq 0)$		

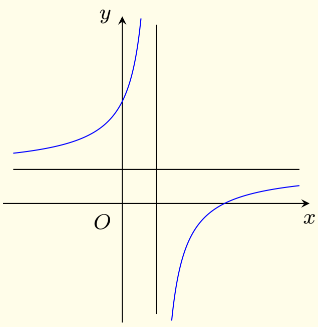
3. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ab - bc \neq 0)$

Khi $ad - bc > 0$	Khi $ad - bc < 0$
	

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 9 (De Tham khao BGD 2023).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên



Ⓐ $y = x^4 - 3x^2 + 2$.
Ⓑ $y = \dfrac{x-3}{x-1}$.
Ⓒ $y = x^2 - 4x + 1$.
Ⓓ $y = x^3 - 3x - 5$.

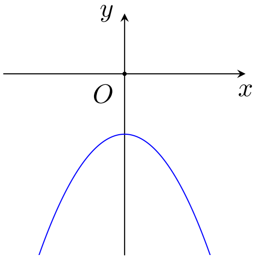
Lời giải.

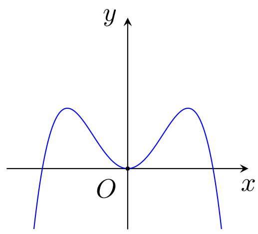
Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ có dạng như đường cong trong hình.

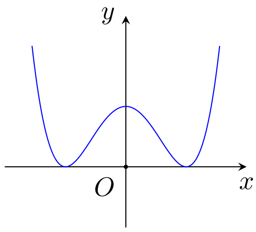
Chọn đáp án Ⓑ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

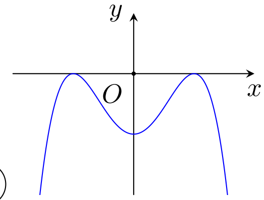
Câu 9.1. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ là hình nào sau đây?

Ⓐ  .

Ⓑ  .

(C) 

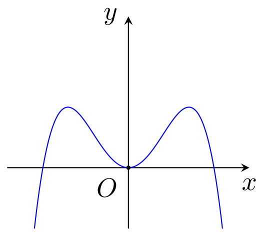
.

(D) 

.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên chỉ có phương án B thỏa mãn.



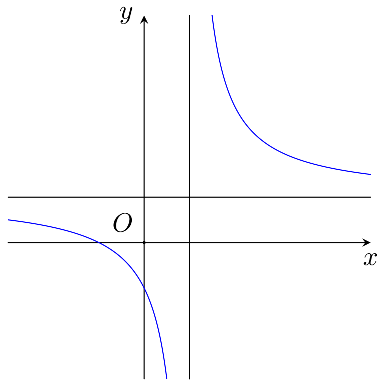
Chọn đáp án (B) □

Câu 9.2.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$ và đường tiệm cận ngang là $y = y_0 > 0$. Nên trong các hàm số đã cho chỉ có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

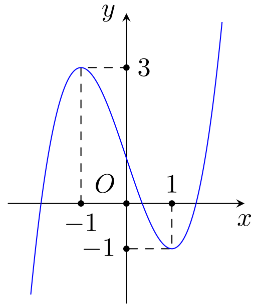
Chọn đáp án (D) □

Câu 9.3.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. (B) $y = x^3 - 3x + 1$.

(C) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. (D) $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có

- Hệ số $a > 0$.

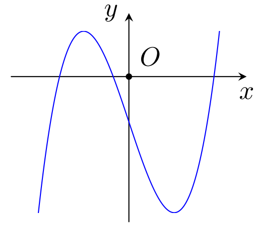
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị lần lượt là $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 9.4.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^3 - 3x - 1$.
B $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
C $y = -x^3 - 3x - 1$.
D $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Lời giải.

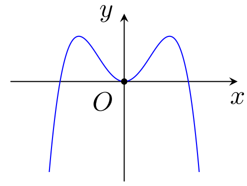
Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 9.5.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = -x^3 + 3x^2$.
B $y = x^4 + 2x^2$.
C $y = x^3 - 3x^2$.
D $y = -x^4 + 2x^2$.

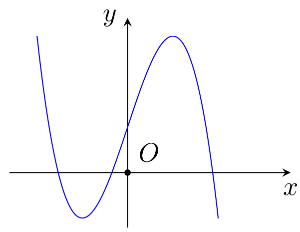
Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$ nên chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 9.6.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
B $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
C $y = -x^3 + 3x + 1$.
D $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải.

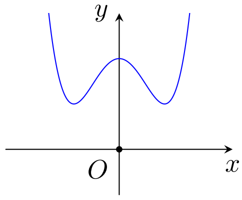
Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 9.7.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Ⓑ $y = x^3 - x^2 + 2$.
Ⓒ $y = x^3 - x + 2$. Ⓓ $y = -x^4 + x^2 + 2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a > 0$.

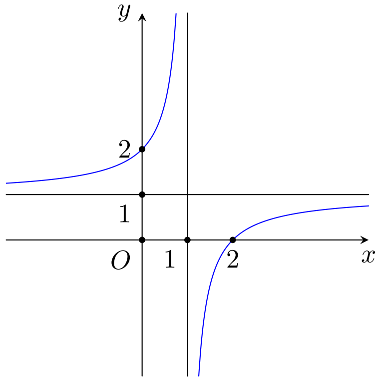
Nên chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9.8.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Ⓒ $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$.

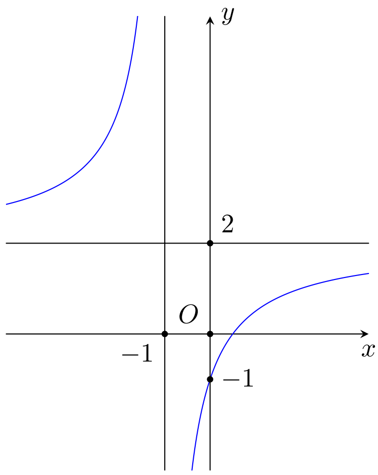
Nên trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9.9.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Ⓓ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.



Lời giải.

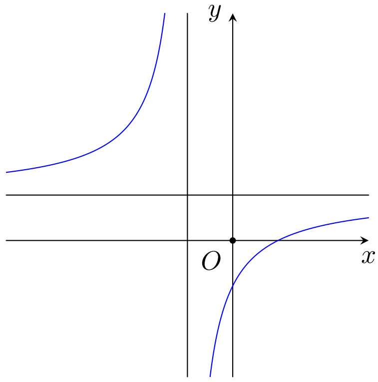
Hàm số có đồ thị trong đề bài có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng, $y = 2$ là tiệm cận ngang, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1)$. Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9.10.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

(C) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy đây là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

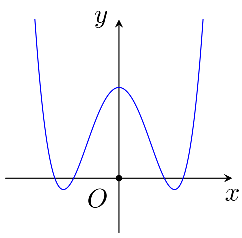
Cũng từ đồ thị hàm số suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9.11.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ?



(A) $y = x^3 - 2x^2 - 2$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

(C) $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. (D) $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Lời giải.

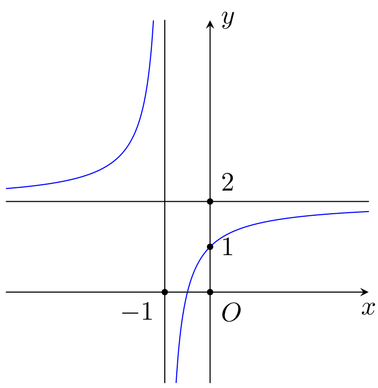
Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a > 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9.12.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

(C) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{x+3}{1-x}$.

Lời giải.

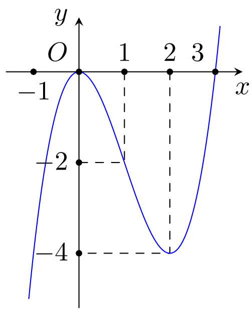
Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng, $y = 2$ là tiệm cận ngang.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9.13.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



(A) $y = x^3 + 3x^2$. (B) $y = x^3 + 3x$.
(C) $y = x^3 - 3x^2$. (D) $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có

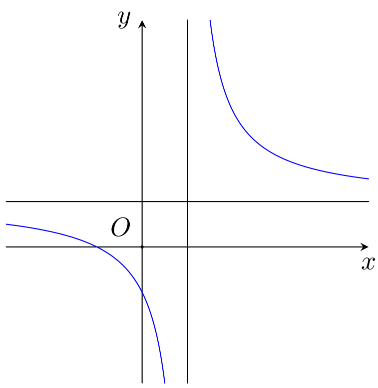
- Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1; -2)$ nên loại $y = x^3 + 3x^2$ và $y = x^3 + 3x$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2; -4)$ nên loại $y = x^3 - 3x$.

Vậy chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9.14.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (B) $y = x^4 + x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x - 1$. (D) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

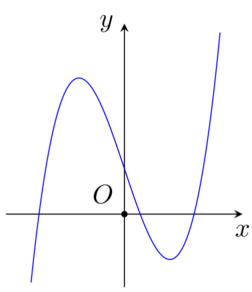
Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$ và đường tiệm cận ngang là $y = y_0 > 0$, cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = y_1 < 0$, nên trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9.15.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = -x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x + 1$. (D) $y = x^2 - 3x + 1$.

Lời giải.

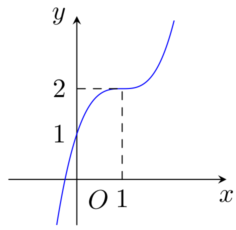
Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 9.16.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



A $y = x^3 - 3x + 1$.
B $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
C $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
D $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 9.17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
B $y = -x^3 + 3x$.
C $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
D $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên loại hai hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ và $y = -x^3 + 3x$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Do đó hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 9.18. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 3$. (B) $y = -x^3 + 3x + 2$. (C) $y = x^3 - 3x + 4$. (D) $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9.19. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$-\infty$

(A) $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$.
(B) $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$.
(C) $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$.
(D) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

- $y(\pm 1) = -4$ nên loại $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$ và $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.
- Hàm số $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nên hàm số $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$ không thỏa mãn.

Vậy hàm số $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9.20. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↘	-2

(A) $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{-2x-4}{x+1}$. (C) $y = \dfrac{x-4}{2x+2}$. (D) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -1$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

Ta cũng có $y' < 0, \forall x \neq -1$.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

9.1. B	9.2. D	9.3. B	9.4. A	9.5. D	9.6. C	9.7. A	9.8. D
9.9. D	9.10. C	9.11. D	9.12. C	9.13. C	9.14. A	9.15. C	9.16. C
9.17. D	9.18. B	9.19. A	9.20. A				

DẠNG 10. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.
- Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (với $a^2+b^2+c^2-d>0$) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 10 (Đề minh họa BGD 2022-2023).
Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+1=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(-1;-2;-3)$. (B) $(2;4;6)$. (C) $(-2;-4;-6)$. (D) $(1;2;3)$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S), ta có $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=-4\\-2c=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3.\end{cases}$

Do đó tâm của (S) có tọa độ là $I(1;2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 10.1. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-2=0$ là

(A) $B(-2;1;3)$. (B) $D(2;-1;-3)$. (C) $A(-4;2;6)$. (D) $C(4;-2;-6)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $D(2;-1;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z-10=0$. Bán kính R của mặt cầu (S) là

(A) $R=36$. (B) $R=\sqrt{6}$. (C) $R=\sqrt{114}$. (D) $R=6$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2-(-10)}=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.3. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+4)^2+(y-5)^2+(z+6)^2=9$ có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(4;-5;6)$, $R=81$.
B. $I(-4;5;-6)$, $R=81$.
C. $I(4;-5;6)$, $R=3$.
D. $I(-4;5;-6)$, $R=3$.

Lời giải.

Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu lần lượt là $I(-4;5;-6)$, $R=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 10.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(1;-3;4)$, $R=4$.
B. $I(-1;3;-4)$, $R=4$.
C. $I(-1;3;-4)$, $R=2$.
D. $I(1;-3;4)$, $R=2$.

Lời giải.

Ta có tâm $I(1;-3;4)$, $R=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 10.5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-10=0$ có bán kính bằng

A. 6.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu là $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2-(-10)}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 10.6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(2;4;1)$.
B. $(-2;-4;-1)$.
C. $(-2;4;-1)$.
D. $(2;-4;1)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(4;-6;8)$.
B. $(2;-3;4)$.
C. $(-4;6;-8)$.
D. $(-2;3;-4)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10.8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(-1;2;-3)$, $R=2$.
B. $I(1;-2;3)$, $R=2$.

(C) $I(1;-2;3)$, $R=4$. (D) $I(-1;2;-3)$, $R=4$.

Lời giải.

Tọa độ tâm và bán kính lần lượt là $I(-1;2;-3)$, $R=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(1;-2;0)$. (B) $(-1;2;0)$. (C) $(-1;-2;0)$. (D) $(1;2;0)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;2;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

(A) $I(2;4;6)$. (B) $I(-2;-4;-6)$. (C) $I(1;2;3)$. (D) $I(-1;-2;-3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $I(1;2;3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S).

(A) $(-3;-1;1)$. (B) $(3;-1;1)$. (C) $(-3;1;-1)$. (D) $(3;1;-1)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-3;-1;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10.12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm I và bán kính R của mặt cầu là

(A) $I(1;2;3)$, $R=3$. (B) $I(-1;2;-3)$, $R=3$.

(C) $I(1;-2;3)$, $R=3$. (D) $I(1;2;-3)$, $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10.13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

(A) $I(-3;2;-4)$, $R=5$. (B) $I(3;-2;4)$, $R=5$.

(C) $I(-3;2;-4)$, $R=25$. (D) $I(3;-2;4)$, $R=25$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$, bán kính $R=\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2-4}=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.14. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-1=0$ có tọa độ là

(A) $(1;-2;3)$. (B) $(2;-4;6)$. (C) $(-2;4;-6)$. (D) $(-1;2;-3)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) là $I(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

(A) $(-1;2;0)$. (B) $(2;-1;0)$. (C) $(1;-2;0)$. (D) $(-2;1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) đã cho là $I(1;-2;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-4y+8z=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R.

(A) $I(2;-2;4)$, $R=2\sqrt{6}$. (B) $I(-2;2;-4)$, $R=24$.

(C) $I(2;-2;4)$, $R=24$. (D) $I(-2;2;-4)$, $R=2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-12=0$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Tính $T=a+b-c$.

(A) 2. (B) -4. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$; suy ra $a=1$, $b=-2$, $c=3$.

Vậy $T=a+b-c=-4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.18. Trong không gian $Oxyz$, tâm I của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0$ có tọa độ là

(A) $I(4;1;0)$. (B) $I(4;-1;0)$. (C) $(-4;1;0)$. (D) $(-4;-1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(4;1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10.19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$. Tọa độ tâm I của (S) là

(A) $I(-1;-2;-3)$. (B) $I(-1;2;3)$. (C) $I(1;-2;-3)$. (D) $I(1;-2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm I là $I(1;-2;-3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10.20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+10=0$ có bán kính R bằng

(A) $R=1$. (B) $R=2$. (C) $R=3$. (D) $R=4$.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=10$.

Suy ra $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2-10}=2$.

Chọn đáp án (B) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

10.1. B	10.2. D	10.3. D	10.4. D	10.5. C	10.6. D	10.7. B	10.8. A
10.9. D	10.10. C	10.11. A	10.12. C	10.13. B	10.14. D	10.15. C	10.16. D
10.17. B	10.18. A	10.19. C	10.20. B				

DẠNG 11. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q)\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Khi đó

$$\cos((P),(Q)) = \left|\cos\left(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right)\right| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- Lưu ý: $0^\circ \leq ((P),(Q)) \leq 90^\circ$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 11 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) vuông góc với nhau nên góc giữa chúng bằng 90°.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 11.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - z + 1 = 0$ và $(Q)\colon x + y + 2z + 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng đó.

A. 30°. B. 60°. C. 45°. D. 120°.

Lời giải.

$\vec{n}_P = (1; -2; -1)$ là một véctơ pháp tuyến của (P).

$\vec{n}_Q = (1; 1; 2)$ là một véctơ pháp tuyến của (Q).

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Chọn đáp án B □

Câu 11.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - z - 3 = 0$. Tính góc giữa (P) và mặt phẳng (Oxy).

A. 45°. B. 90°. C. 30°. D. 60°.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$, mặt phẳng (Oxy) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy), ta có $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 11.3. Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q)\colon x - y - 5 = 0$ là

A. 90°. B. 60°. C. 45°. D. 30°.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng (Q).

Ta có $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), $\vec{n} = (1; -1; 0)$ là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Khi đó $\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{OH}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 11.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x - y - 6 = 0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q). Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

A. 45°. B. 60°. C. 30°. D. 90°.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 0)$.

Vì $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) nên (Q) nhận $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ là vectơ pháp tuyến.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \cos\left((P), (Q)\right) = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{OH}\right)\right| &= \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OH}\right|}{|\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{OH}\right|} \\ &= \dfrac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 45°.

Chọn đáp án A □

Câu 11.5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa mặt phẳng $(\alpha)\colon \sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) là

A. 90°. B. 30°. C. 45°. D. 60°.

Lời giải.

Ta có vec-tơ pháp tuyến của (α) và (Oxy) lần lượt là $\vec{n} = \left(\sqrt{2}; 1; 1\right)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (α) và (Oxy), khi đó $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 11.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q)\colon x-y-11=0$ bằng bao nhiêu?

A 90°. B 60°. C 45°. D 30°.

Lời giải.

Vì $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt (P) nên $OH\perp(P)$.

Do đó (P) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2;-1;-2)$.

(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1;-1;0)$.

$$\cos((P),(Q)) = \left|\cos\left(\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(P)}\right|} = \frac{|2\cdot1-1\cdot(-1)-2\cdot0|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $((P),(Q)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 11.7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+2=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z+1=0$. Góc giữa (P) và (Q) là

A 120°. B 90°. C 30°. D 60°.

Lời giải.

$(P)\colon x-2y-z+2=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1;-2;-1)$.

$(Q)\colon 2x-y+z+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2;-1;1)$.

Áp dụng công thức

$$\cos((P),(Q)) = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot2+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra góc giữa (P) và (Q) là 60°.

Chọn đáp án D □

Câu 11.8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+(m+1)y-2z+m=0$ và $(Q)\colon 2x-y+3=0$, với m là tham số thực. Để (P) vuông góc với (Q) thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

A $m=3$. B $m=-1$. C $m=-5$. D $m=1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;m+1;-2)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2;-1;0)$.

Để $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2-m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 11.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

(A) $3x - 2y + 2z + 6 = 0$. (B) $x - 2y - z - 3 = 0$.
(C) $2x + 2y - z - 1 = 0$. (D) $x + y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$.

Áp dụng phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng (P) là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 6 = 0.$$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (3;-2;2)$.

- Mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 6 = 0$ trùng với mặt phẳng (P) nên loại $3x - 2y + 2z + 6 = 0$.
- Mặt phẳng $x - 2y - z - 3 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;-2;-1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_1 = 5 \neq 0$ nên loại $x - 2y - z - 3 = 0$.
- Mặt phẳng $2x + 2y - z - 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2;2;-1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_2 = 0$ nên chọn $2x + 2y - z - 1 = 0$.
- Mặt phẳng $x + y + z + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_3 = (1;1;1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_3 = 3 \neq 0$ nên loại $x + y + z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $x - my + z - 1 = 0$ $(m \in \mathbb{R})$, mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và qua điểm $A(1;-3;1)$. Tìm số thực m để hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc.

(A) $m = -\frac{1}{3}$. (B) $m = \frac{1}{3}$. (C) $m = 3$. (D) $m = -3$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1;-3;1)$, $\vec{i} = (1;0;0)$.

Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(1;-3;1)$ và chứa trục Ox suy ra (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{i}\right] = (0;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;-m;1)$.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-m) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$, mặt phẳng $(Q)\colon x-3y+5z-2=0$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

(A) $-\dfrac{5}{7}$. (B) $-\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. (C) $\dfrac{5}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q=(1;-3;5)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) ta có

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-3)-2\cdot 5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}}=\frac{15}{3\sqrt{35}}=\frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.12. Trong không gian $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x-\sqrt{3}y+2z+1=0$ và mặt phẳng (Oxy). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\alpha=30^\circ$. (B) $\alpha=60^\circ$. (C) $\alpha=90^\circ$. (D) $\alpha=45^\circ$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\left(1;-\sqrt{3};2\right)$.

Mặt phẳng $(Oxy)\colon z=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-4}{-6}=1$ và $(Q)\colon x+2y+3z+7=0$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

(A) $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$. (B) $\dfrac{3}{5\sqrt{19}}$. (C) $\dfrac{5}{3\sqrt{19}}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-4}{-6}=1\Leftrightarrow(P)\colon 2x+3y-z-9=0$ suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;3;-1)$.

$(Q)\colon x+2y+3z+7=0\Rightarrow(Q)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=(1;2;3)$.

Gọi α $(0^\circ\le\alpha\le 90^\circ)$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Ta có

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 2+(-1)\cdot 3|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{5}{14}.$$

Từ đó ta ta tìm được

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{171}{25}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{3\sqrt{19}}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q)\colon x+(2m-1)z+7=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\dfrac{\pi}{4}$.

(A) $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=4 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P), (Q) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;2)$, $\vec{n}_{(Q)}=(1;0;2m-1)$. Vì (P) tạo với (Q) góc $\dfrac{\pi}{4}$ nên

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{4}=\left|\cos\left(\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right)\right| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|1+2(2m-1)|}{3\cdot\sqrt{1+(2m-1)^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2(4m-1)^2=9\left(4m^2-4m+2\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 4m^2-20m+16=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11.15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-1=0$ và $(\beta)\colon 2x-y+mz-m+1=0$, với m là tham số thực. Giá trị của m để $(\alpha)\perp(\beta)$ là

(A) 1. (B) -4. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;1;1)$ và (β) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\beta)}=(2;-1;m)$.

Ta có $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(\beta)}\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}\cdot\vec{n}_{(\beta)}=0\Leftrightarrow 1+m=0\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+z-3=0$ và $(\beta)\colon 3x-4y+5z=0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) bằng

(A) 90°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 45°.

Lời giải.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β).

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-1;1)$, $\vec{n}_{(\beta)}=(3;-4;5)$. Suy ra

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\cdot\vec{n}_{(\beta)}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(\beta)}\right|}=\frac{|6+4+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y-6=0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q). Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 30°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon x-y-6=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)}=(1;-1;0)$.

Theo giả thiết điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}_{(Q)}=\overrightarrow{OH}=(2;-1;-2)$. Do đó

$$\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{|1.2+(-1)(-1)+0\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=45^\circ$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 11.18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 30°. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $\left(\widehat{\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}}\right)=30^\circ \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=30^\circ$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11.19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 120°. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $\left(\widehat{\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}}\right)=120^\circ \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 11.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết cô-sin góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng $\frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=60^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

D BẢNG ĐÁP ÁN

11.1. B	11.2. A	11.3. C	11.4. A	11.5. D	11.6. C	11.7. D	11.8. D
11.9. C	11.10. C	11.11. D	11.12. D	11.13. D	11.14. A	11.15. C	11.16. B
11.17. B	11.18. A	11.19. C	11.20. C				

DẠNG 12. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN CỦA SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

a) Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$, i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

b) Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

c) Chú ý

- Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a$ là số thực.
- Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

d) Hai số phức bằng nhau $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

e) Hai số phức $z_1 = a + bi$; $z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$. Rõ ràng $\overline{\overline{z}} = z$

3. Biểu diễn hình học

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$.

4. Mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$và số $k \in \mathbb{R}$.

a) Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

b) Hiệu hai số phức: $z + z' = a - a' + (b - b')i$.

c) Nhân hai số phức: $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b)i$.

d) Chia 2 số phức:

- Số phức nghịch đảo: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

- Nếu $z \neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z' \cdot \overline{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\dfrac{z'}{z}$ cho $\overline{z}$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 12 (ĐỀ MINH HỌA BGD 2022-2023).

Cho số phức $z = 2 + 9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

(A) -77. (B) 4. (C) 36. (D) 85.

Lời giải.

Ta có $z^2 = (2 + 9i)^2 = 4 + 36i + 81i^2 = -77 + 36i$ nên phần thực của số phức z^2 bằng -77.

Chọn đáp án (A) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 12.1. Số phức liên hợp của $z = (2 + 4i) + (1 - 3i)$ là

(A) $\overline{z} = -3 - i$. (B) $\overline{z} = 1 + 3i$. (C) $\overline{z} = 3 + i$. (D) $\overline{z} = 3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = (2 + 4i) + (1 - 3i) = 3 + i \Rightarrow \overline{z} = 3 - i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12.2. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$, biết $z = \dfrac{(1 + i)3i}{1 - i}$.

(A) 0. (B) -1. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(1 + i)3i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)^2 \cdot 3i}{1 - i^2} = \dfrac{2i \cdot 3i}{2} = -3$.

Suy ra $\overline{z} = -3$.

Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 0.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12.3. Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là

(A) $3 + 2i$. (B) $-3 - 2i$. (C) $-2 + 3i$. (D) $-3 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là $3 + 2i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12.4. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_2 - z_1)$ là

(A) $\overline{w} = 8 - 15i$. (B) $\overline{w} = 4 + 4i$. (C) $\overline{w} = 4 - 4i$. (D) $\overline{w} = 8 + 15i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(z_2 - z_1) = 2[(4+5i) - (2+3i)] = 4 + 4i \Rightarrow \overline{w} = 4 - 4i$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.5. Cho số phức $z = 4 - 2i$. Phần ảo của số phức $3 - 4z$ là

A -4.	B -8.	C -2.	D 8.

Lời giải.

Ta có $3 - 4z = 3 - 4(4 - 2i) = -13 + 8i$.

Vậy phần ảo của $3 - 4z$ bằng 8.

Chọn đáp án D □

Câu 12.6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + (1+i)\overline{z}$.

A $|w| = \sqrt{10}$.	B $|w| = 4$.	C $|w| = \sqrt{15}$.	D $|w| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = (2 - 3i) + (1+i)(2+3i) = 3 - i \Rightarrow |w| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.7. Phần ảo của số phức $z = (2 - 3i)^2 - (1+i)^2$ là

A -10.	B $-10i$.	C $-14i$.	D -14.

Lời giải.

Ta có $z = (2-3i)^2 - (1+i)^2 = -5 - 14i$.

Suy ra, phần ảo của số phức z là -14.

Chọn đáp án D □

Câu 12.8. Cho số phức $z = -2 + xi, (x \in \mathbb{R})$ có mô-đun bằng

A $\sqrt{x^2+2}$.	B $\sqrt{x^2+4}$.	C $|x| + 2$.	D $|2x|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |-2 + xi| = \sqrt{(-2)^2 + x^2} = \sqrt{x^2+4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12.9. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A 1.	B 11.	C 12.	D $12i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1+2i) - 2(2-3i) = -1 + 12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Chọn đáp án C □

Câu 12.10. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z.

A $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$.	B $|z| = 34$.	C $|z| = \sqrt{34}$.	D $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=\dfrac{(1-13i)(2+i)}{5}=\dfrac{15-25i}{5}=3-5i$.
Suy ra $|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.11. Cho số phức $z=(1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A -4. B $2i$. C 4. D 2.

Lời giải.

Ta có $z=(1+i)^2(1+2i)=2i(1+2i)=-4+2i$.

Do đó phần ảo của z là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 12.12. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$.

A $\overline{z}=3-2i$. B $\overline{z}=-3-2i$. C $\overline{z}=2-3i$. D $\overline{z}=-2-3i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=3-2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.13. Số phức $z=4-3i$ có mô-đun bằng

A $2\sqrt{2}$. B 25. C 5. D 8.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.14. Cho số phức $z=5-4i$. Số phức $z-2$ có

A Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4.
B Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4.
C Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.
D Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$.

Lời giải.

Với $z=5-4i$ ta có $z-2=5-4i-2=3-4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án B □

Câu 12.15. Cho số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-2i$. Số phức liên hợp của số phức $w=z_1+z_2$ là

A $\overline{w}=3+i$. B $\overline{w}=3-i$. C $\overline{w}=3-2i$. D $\overline{w}=1-4i$.

Lời giải.

Vì $z_1=2+3i$ và $z_2=1-2i$ nên $w=z_1+z_2=2+3i+1-2i=3+i$.

Suy ra $\overline{w}=3-i$.

Chọn đáp án B □

Câu 12.16. Cho các số phức $z_1=2-3i$, $z_2=1+4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức z_1z_2.

A $-14-5i$. B $-10-5i$. C $-10+5i$. D $14-5i$.

Lời giải.

Ta có $z_1z_2 = (2-3i)(1+4i) = 14+5i$.

Vậy $\overline{z_1z_2} = 14-5i$.

Chọn đáp án D □

Câu 12.17. Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính mô-đun của số phức z_1+z_2.

A $|z_1+z_2| = 5$. B $|z_1+z_2| = \sqrt{13}$. C $|z_1+z_2| = 1$. D $|z_1+z_2| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z_1+z_2 = (1+i)+(2-3i) = 3-2i$.

Vậy $|z_1+z_2| = |3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12.18. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (-3-4i)(2+i)+1-3i$.

A $\overline{z} = -1+14i$. B $\overline{z} = 1-14i$. C $\overline{z} = 1+14i$. D $\overline{z} = -1-14i$.

Lời giải.

Ta có $z = (-3-4i)(2+i)+1-3i = -1-14i$.

Vậy số phức liên hợp của z là $\overline{z} = -1+14i$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.19. Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính mô-đun của z_1+z_2.

A $|z_1+z_2| = 1$. B $|z_1+z_2| = \sqrt{5}$. C $|z_1+z_2| = \sqrt{13}$. D $|z_1+z_2| = 5$.

Lời giải.

Ta có $z_1+z_2 = 3-2i$.

Vậy $|z_1+z_2| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.20. Cho hai số phức $z_1 = 3+i$ và $z_2 = 2-4i$. Mô-đun của số phức z_1z_2 bằng

A 10. B $10\sqrt{2}$. C -10. D 20.

Lời giải.

Ta có $z_1z_2 = (3+i)(2-4i) = 10-10i$.

Vậy $|z_1z_2| = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

12.1. D	12.2. A	12.3. A	12.4. C	12.5. D	12.6. A	12.7. D	12.8. B
12.9. C	12.10. C	12.11. D	12.12. A	12.13. C	12.14. B	12.15. B	12.16. D
12.17. B	12.18. A	12.19. C	12.20. B				

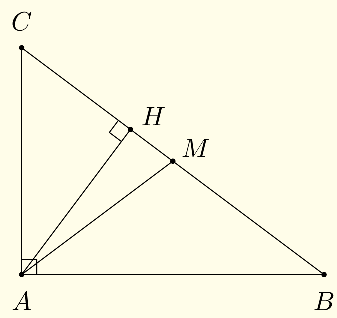
DẠNG 13. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h$ với B: diện tích đáy, h: chiều cao.

b) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM. Khi đó



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- $BH \cdot BC = AB^2$; $CH \cdot CB = CA^2$.
- $AB \cdot AC = AH \cdot BC$; $AM = \dfrac{1}{2}BC$.
- $CH \cdot BH = AH^2$.
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.
- $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$; $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$; $\cot\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{AC}$.

c) Đường chéo của hình vuông cạnh a có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.

d) Đường cao của tam giác đều cạnh a có độ dài bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

e) Diện tích tam giác bất kỳ

- $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
- $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.
- $S_{\triangle ABC} = \dfrac{abc}{4R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

f) Trường hợp đặc biệt

- Diện tích tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$.
- Diện tích của tam giác đều cạnh a là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

g) Diện tích hình chữ nhật $S = a \cdot b$, trong đó a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

h) Diện tích hình vuông cạnh a là $S = a^2$.

i) Diện tích hình thoi $S = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$, trong đó AC và BD là hai đường chéo.

j) Diện tích hình thang $S = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \cdot h}{2}$, trong đó h là chiều cao của hình thang.

k) Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = AH \cdot CD$, trong đó AH là chiều cao của tam giác ABD.

l) Định lí hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

m) Định lí hàm số côsin

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

n) Công thức đường trung tuyến

- $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.
- $m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.
- $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 13 (Đề tham khảo 2023). Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A 4. B 12. C 8. D 6.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = B \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$.

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 13.1. Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là a, $2a$, $3a$ bằng

(A) $3a^3$. (B) $2a^3$. (C) $6a^3$. (D) $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13.2. Gọi h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích đáy và thể tích của hình lăng trụ. Chiều cao khối lăng trụ là

(A) $\frac{V}{S}$. (B) $\frac{S}{V}$. (C) $\frac{3V}{S}$. (D) $\frac{1}{3}SV$.

Lời giải.

Ta có $V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13.3. Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và có thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ đã cho.

(A) $h = a$. (B) $h = 3a$. (C) $h = 9a$. (D) $h = \frac{a}{3}$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó, thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{3a^3}{a^2} \Rightarrow h = 3a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.4. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $V = \frac{2a^3}{3}$. (B) $V = 4a^3$. (C) $V = \frac{4a^3}{3}$. (D) $V = \frac{4a^2}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V = 2a \cdot 2a^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.5. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là

(A) 4. (B) 48. (C) 16. (D) 12.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là $V = B \cdot h = 4 \cdot 3 = 12$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13.6. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 24 cm^2, chiều cao bằng 3 cm thì có thể tích bằng

A. 8 cm^3. B. 72 cm^3. C. 126 cm^3. D. 24 cm^3.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 24 \cdot 3 = 72\ \text{cm}^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13.7. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $4a^2$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng a. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $4a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $3a^3$. D. a^3.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 4a^2 \cdot a = 4a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.8. Khối lăng trụ có chiều cao bằng h, diện tích đáy bằng B có thể tích là

A. $V = \frac{1}{3}B \cdot h$. B. $V = \frac{1}{2}B \cdot h$. C. $V = \frac{1}{6}B \cdot h$. D. $V = B \cdot h$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 13.9. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó?

A. 36. B. 27. C. 16. D. 24.

Lời giải.

Gọi a là độ dài một cạnh của khối lập phương $(a > 0)$.

Theo giả thiết ta có $a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$.

Diện tích một mặt của khối lập phương cạnh bằng 2 là $2^2 = 4$.

Tổng diện tích các mặt của khối lập phương là $6 \cdot 4 = 24$.

Chọn đáp án D □

Câu 13.10. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 cm^2, chiều cao bằng 2 cm có thể tích bằng

A. 8 cm^3. B. $\frac{8}{3}$ cm^3. C. 4 cm^3. D. 6 cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.11. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy a^2 và chiều cao a là

A. a^3. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $3a^3$. D. $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = a^2 \cdot a = a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13.12. Nếu một khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng B và cạnh bên bằng h thì có thể tích là

(A) Bh. (B) $\frac{1}{3}Bh$. (C) $\frac{1}{2}Bh$. (D) $3Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Bh$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13.13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy là 15 và chiều cao của lăng trụ là 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) 200. (B) 150. (C) 100. (D) 50.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 10 \cdot 15 = 150$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.14. Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

(A) 9. (B) 8. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có thể tích của hình lập phương cạnh a là a^3.

Do đó khi tăng cạnh hình lập phương lên 2 lần thì thể tích là $(2a)^3 = 8a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.15. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Diện tích đáy là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối lăng trụ cần tìm là $V = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13.16. Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a.

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) a^3. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Vì lăng trụ đứng nên đường cao bằng a.

Vì đáy là tam giác đều nên diện tích đáy là $S = \frac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ cần tìm là $V = S \cdot h = a^2\sqrt{3} \cdot a = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13.17. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ biết $AC' = 2a\sqrt{3}$.

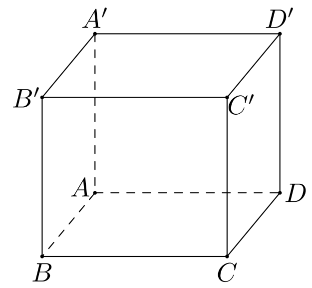
(A) $V = a^3$.　(B) $V = 24\sqrt{3}a^3$.　(C) $V = 8a^3$.　(D) $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình lập phương bằng x. Suy ra $AC' = x\sqrt{3}$.

Ta có $x\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$.

Thể tích khối lập phương là $V = x^3 = 8a^3$.



Chọn đáp án (C) □

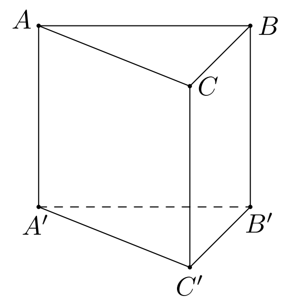
Câu 13.18. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $3a^3$.　(B) $6a^3$.　(C) a^3.　(D) $3a^2$.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot a^2 = 3a^3$.



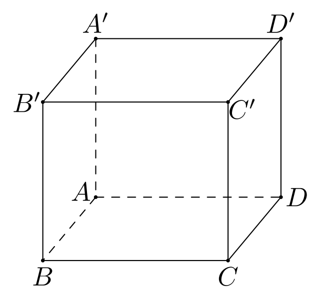
Chọn đáp án (A) □

Câu 13.19. Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 4$, $AD = 5$ và $AA' = 6$ là

(A) $V = 200$.　(B) $V = 100$.　(C) $V = 120$.　(D) $V = 130$.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = AB \cdot AD \cdot AA' = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.



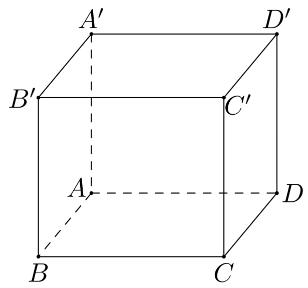
Chọn đáp án (C) □

Câu 13.20. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có độ dài hai đường chéo $AC = 2a$ và $BD = a$, cạnh bên $AA' = 3a$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

(A) $V = 6a^3$. (B) $V = 12a^3$. (C) $V = 3a^3$. (D) $V = 2a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy hình thoi là $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$.
Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2 \cdot 3a = 3a^3$.



Chọn đáp án (C) □

(D) BẢNG ĐÁP ÁN

13.1. C	13.2. A	13.3. B	13.4. B	13.5. D	13.6. B	13.7. A	13.8. D
13.9. D	13.10. A	13.11. A	13.12. A	13.13. B	13.14. B	13.15. C	13.16. D
13.17. C	13.18. A	13.19. C	13.20. C				

DẠNG 14. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

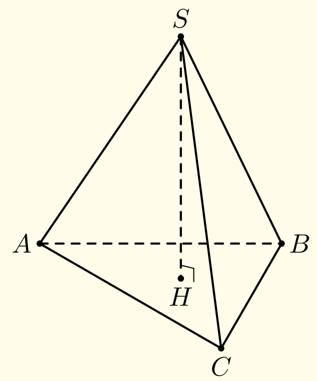
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

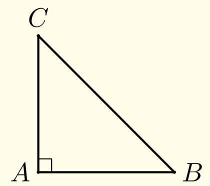
Trong đó:

- B là diện tích đa giác đáy.
- h là chiều cao khối chóp.

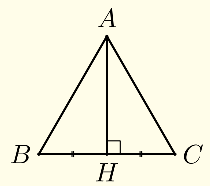


2. Diện tích đa giác

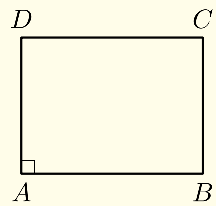
- Diện tích tam giác vuông: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.



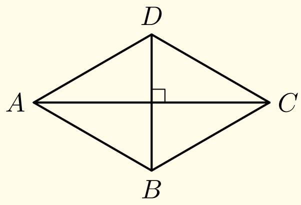
- Diện tích tam giác đều: $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$.



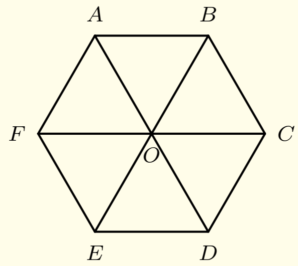
- Diện tích hình chữ nhật: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD$.



- Diện tích hình thoi: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$.



- Diện tích lục giác đều: $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle OAB}$.

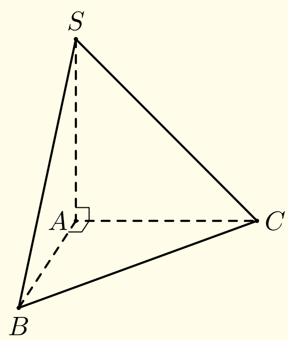


B BÀI TẬP MẪU

CÂU 14 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2$, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (Tham khảo hình vẽ). Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) 12. (B) 2. (C) 6. (D) 4.



Lời giải.

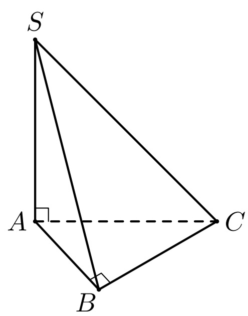
Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SA = \dfrac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2$.

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 14.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = 2a$, $BC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

(A) a^3. (B) $3a^3$. (C) $4a^3$. (D) $2a^3$.



Lời giải. $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = 2a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 14.2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đường cao SA và đáy $ABCD$ là hình thoi. Thể tích khối chóp đã cho được tính theo công thức nào sau đây?

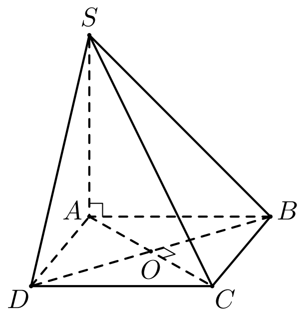
A $\dfrac{1}{3}SA\cdot AB^2$.   B $\dfrac{1}{3}SA\cdot AC\cdot BD$.   C $\dfrac{1}{6}SA\cdot AC\cdot BD$.   D $\dfrac{1}{2}SA\cdot AB^2$.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SA=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot SA=\dfrac{1}{6}SA\cdot AC\cdot BD$.



Chọn đáp án C □

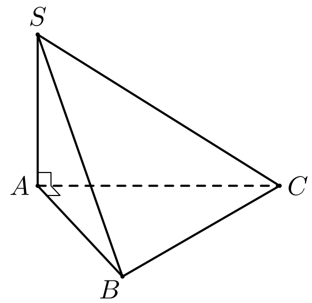
Câu 14.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SA=2a$ và tam giác ABC vuông tại A có $AB=3a$, $AC=4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A $6a^3$.   B $8a^3$.   C $4a^3$.   D $12a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3a\cdot 4a=6a^2$.

$V_{SABC}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot 2a\cdot 6a^2=4a^3$.



Chọn đáp án C □

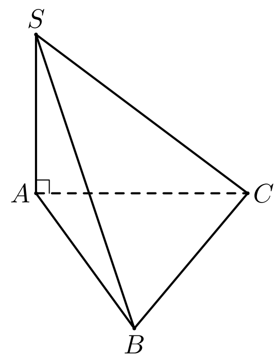
Câu 14.4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.   B $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.   C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.   D $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

$V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot SA=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn đáp án (A) □

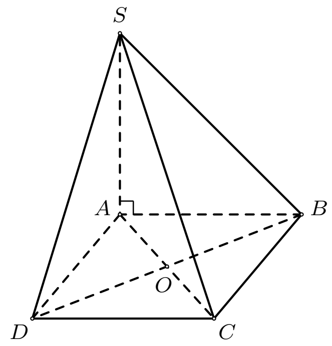
Câu 14.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $h = SA = a\sqrt{3}$; $B = S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 14.6. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) 2. (B) 15. (C) 10. (D) 30.

Lời giải.

Thể tích khối khóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}10 \cdot 3 = 10$.

Chọn đáp án (C) □

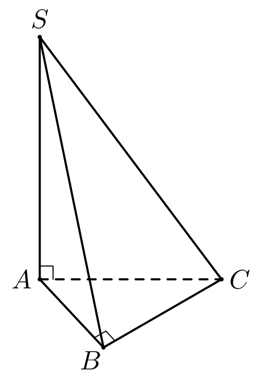
Câu 14.7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) a^3. (B) $\dfrac{1}{3}a^3$. (C) $3a^3$. (D) $\dfrac{1}{6}a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp là

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}BA \cdot BC \cdot SA = \dfrac{1}{6}a \cdot 2a \cdot 3a = a^3$.



Chọn đáp án (A) □

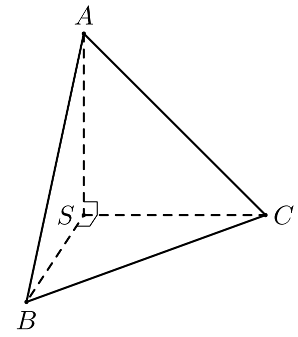
Câu 14.8. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$, thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) 60. (B) 10. (C) 20. (D) 30.

Lời giải.

Dễ thấy $SA \perp (SBC)$

nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle SBC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 10.$



Chọn đáp án B □

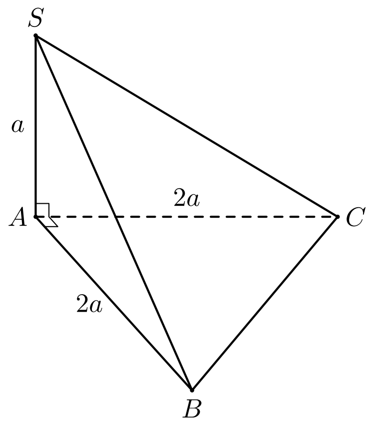
Câu 14.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A $4a^3$. B $\dfrac{2a^3}{3}$. C $2a^3$. D $\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \dfrac{2a^3}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 14.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{1}{3}a^3$. B $2a^3$. C $3a^3$. D a^3.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \dfrac{1}{3}a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 14.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $4\sqrt{2}a^3$. B $12\sqrt{2}a^3$. C $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. D $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

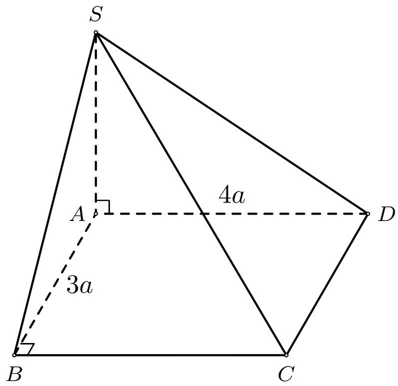
Lời giải.

Diện tích đáy hình chữ nhật là

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 3a \cdot 4a = 12a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot 12a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 14.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B, biết $SA = AC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

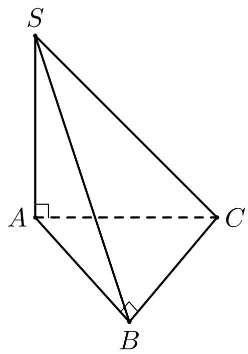
(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. (B) $\dfrac{4}{3}a^3$. (C) $\dfrac{2}{3}a^3$. (D) $\dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có $AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} AB^2 \cdot SA = \dfrac{1}{6} \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2a = \dfrac{2}{3}a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 14.13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

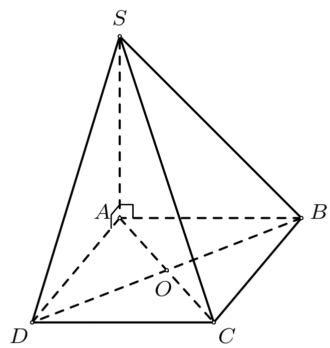
(A) $3a^3$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $9a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$, đường cao $SA = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 3a = a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 14.14. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 3$, $AB = 4$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 12.   (B) 6.   (C) 18.   (D) 20.

Lời giải.

- Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.
- Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 6$.

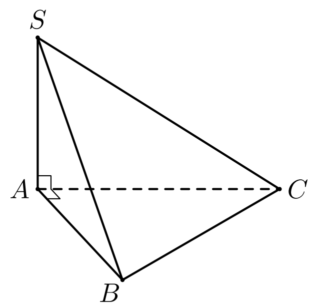
Chọn đáp án (B) □

Câu 14.15. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = 32$.   (B) $V = 192$.   (C) $V = 40$.   (D) $V = 24$.

Lời giải.

Ta có $10^2 = 8^2 + 6^2$ hay $BC^2 = CA^2 + AB^2$.
Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A.
Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.
Thể tích của khối chóp $S.ABC$:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 14.16. Cho hình chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng 1 chiều cao bằng 4. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $2\sqrt{3}$.   (B) $6\sqrt{3}$.   (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.   (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử đáy là hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.
Ta có diện tích của hình lục giác đều là $S = 6 \cdot S_{\triangle OAB} = 6 \cdot \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
Vậy thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14.17. Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 2 và chiều cao $h = 12$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $24\sqrt{3}$.   (B) $12\sqrt{3}$.   (C) $6\sqrt{3}$.   (D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối chóp tam giác đều là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 14.18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

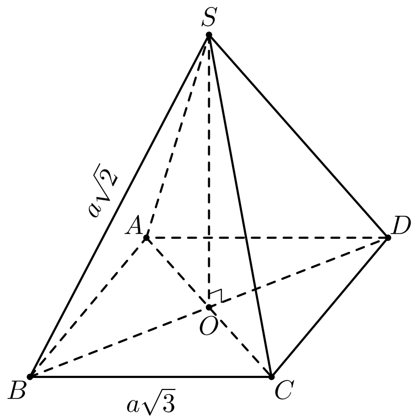
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $S_{ABCD} = \left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3a^2$; $OB = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$;

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{6a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 14.19. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, có chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

$h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $S = a^2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}h \cdot S = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14.20. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 là

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Cho $ABCD$ là tứ diện đều.

Gọi F là trung điểm CD, G là tâm của tam giác đều BCD, ta có $AG \perp (BCD)$; $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

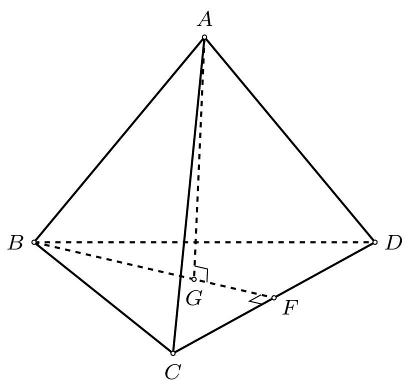
Xét tam giác ABG vuông tại G:

$AB = 3$, $BG = \dfrac{2}{3}BF = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

Ta có $S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2}BF \cdot CD = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AG \cdot S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

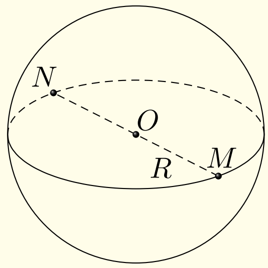
14.1. D	14.2. C	14.3. C	14.4. A	14.5. C	14.6. C	14.7. A	14.8. B
14.9. B	14.10. A	14.11. A	14.12. C	14.13. D	14.14. B	14.15. A	14.16. A
14.17. D	14.18. A	14.19. B	14.20. C				

DẠNG 15. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa liên quan mặt cầu

- Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cho trước một khoảng cách luôn bằng R không đổi được gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu $S(O, R)$, tức là



$$S(O, R) = \{M \mid OM = R\}.$$

- Đoạn thẳng nối 2 điểm phân biệt trên mặt cầu gọi là dây cung của mặt cầu.
- Dây cung lớn nhất của mặt cầu được gọi là đường kính của mặt cầu(gấp đôi bán kính).

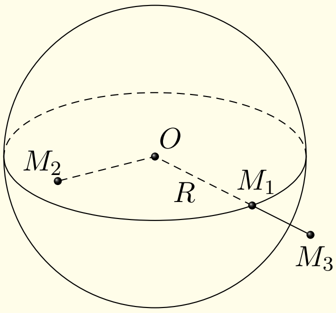
2. Các công thức tính toán

- Diện tích mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

3. Vị trí tương đối giữa một điểm và mặt cầu

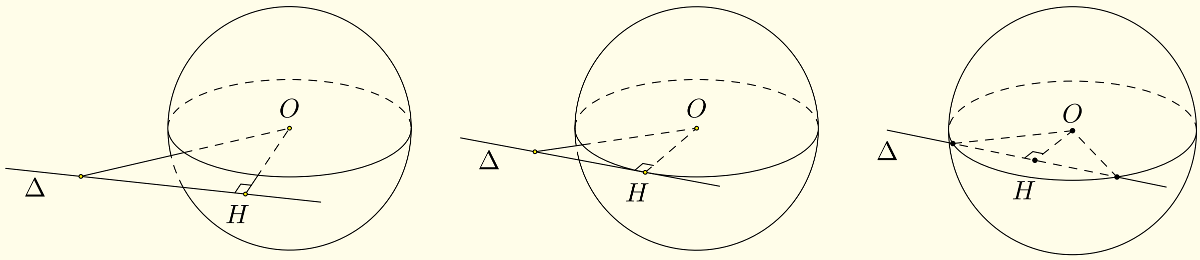
Có 3 vị trí tương đối giữa một điểm M và mặt cầu $S(O, R)$, đó là

- M thuộc $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- M nằm bên trong $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- M nằm ngoài $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.



4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O, R)$, đó là



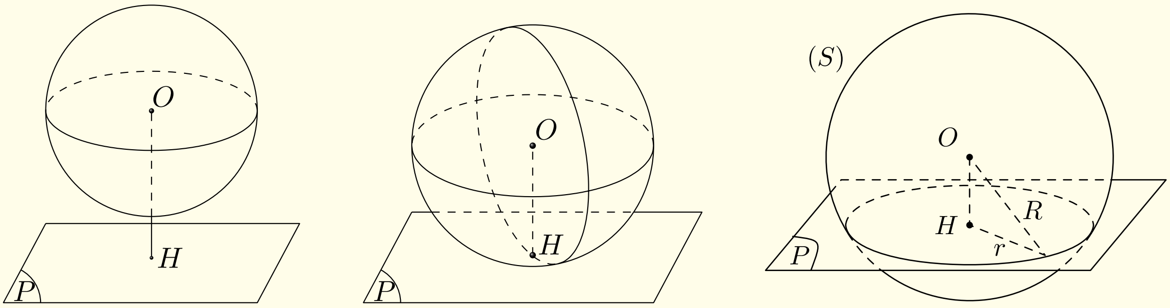
- Δ không có điểm chung với $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, \Delta) > R$.
- Δ tiếp xúc với $S(O, R)$ khi và chỉ khi Δ và $S(O, R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$.

- Δ cắt $S(O,R)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $d\big(O,\Delta\big) < R$.

! Trường hợp đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi Δ là tiếp tuyến của mặt cầu và H là tiếp điểm của Δ với mặt cầu.

5. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O,R)$, đó là



- (P) không có điểm chung với $S(O,R)$ khi và chỉ khi $d\big(O,(P)\big) > R$.
- (P) tiếp xúc $S(O,R)$ khi và chỉ khi (P) và $S(O,R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d\big(O,(P)\big) = R$.
- (P) cắt $S(O,R)$ theo giao tuyến là một đường tròn khi và chỉ khi $d\big(O,(P)\big) < R$.

!

- Trường hợp mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi (P) là tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm của (P) với mặt cầu.
- Trường hợp mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu cầu thì đường tròn giao tuyến được gọi là đường tròn lớn và mặt phẳng được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu.
- Khi mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thì (C) có tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm O mặt cầu lên mặt phẳng (P), đồng thời (C) có bán kính r tính theo công thức $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, với $d = d\big(O,(P)\big)$.

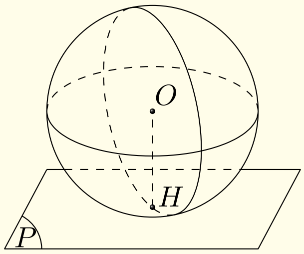
B BÀI TẬP MẪU

CÂU 15 (Đề tham khảo 2023). Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến (P). Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $d < R$. (B) $d > R$. (C) $d = R$. (D) $d = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O,R)$ khi và chỉ khi $d\big(O,(P)\big) = R \Leftrightarrow d = R$.



$d\big(O,(P)\big) = R$

Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 15.1. Cho mặt cầu có diện tích bằng 36π thì khối cầu tương ứng có thể tích bằng

(A) 72π. (B) 18π. (C) 9π. (D) 36π.

Lời giải.

Với R là bán kính mặt cầu ta có $S = 4\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = 3$.

Khi đó thể tích khối cầu tương ứng là $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi R^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15.2. Diện tích mặt cầu có đường kính R là

(A) $2\pi R^2$. (B) $4\pi R^2$. (C) $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. (D) πR^2.

Lời giải.

Mặt cầu có đường kính R thì có bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$.

Do đó diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15.3. Cho khối cầu có bán kính $R = 3$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

(A) 108π. (B) 36π. (C) 4π. (D) 12π.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.4. Diện tích S của mặt cầu có bán kính r bằng

(A) $S = 4\pi r^2$. (B) $S = 3\pi r^2$. (C) $S = \pi r^2$. (D) $S = 2\pi r^2$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính bằng r là $S = 4\pi r^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15.5. Công thức tính thể tích khối cầu bán kính R là

(A) $V = 4\pi R^3$. (B) $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. (C) $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3$. (D) $V = \pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối cầu bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.6. Cho khối cầu có bán kính $R = 2$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

(A) 32π. (B) 16π. (C) $\dfrac{16\pi}{3}$. (D) $\dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính $R = 2$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15.7. Cho khối cầu $(\mathcal{T})$ tâm O bán kính R. Gọi S và V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $S = \pi R^2$. (B) $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. (C) $S = 2\pi R^2$. (D) $V = 4\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức đúng là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.8. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

(A) 144π. (B) 288π. (C) 48π. (D) 72π.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính $R = 6$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.9. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. Khi đó bán kính của mặt cầu là

(A) $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (C) $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (D) $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{S}{4\pi} = \dfrac{8\pi a^2}{12\pi} = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.10. Cho mặt cầu có bán kính $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

(A) $3\sqrt{3}\pi$. (B) $\frac{3}{2}\pi$. (C) $\sqrt{3}\pi$. (D) 3π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu có bán kính $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là $S = 4\pi r^2 = 3\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15.11. Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện có diện tích bằng

(A) 36π. (B) 288π. (C) 144π. (D) 72π.

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện có diện tích là $S = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.12. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

(A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích mặt cầu (S_1) và (S_2). Khi đó $\begin{cases} S_1 = 4\pi R_1^2 \\ S_2 = 4\pi R_2^2. \end{cases}$

Vậy $\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15.13. Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng

(A) 4π. (B) 16π. (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) 2π.

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính $R = 1$ thì có diện tích $S = 4\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15.14. Cho mặt cầu có bán kính $R = 5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

(A) $\frac{100\pi}{3}$. (B) $\frac{500\pi}{3}$. (C) 100π. (D) 25π.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 5$ là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.15. Một mặt cầu có diện tích bằng 36π, bán kính của mặt cầu đó bằng

(A) 3. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 6.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Khi đó, ta có diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 36\pi \Leftrightarrow R^2 = 9 \Leftrightarrow R = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15.16. Diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 3$ bằng

(A) 12π. (B) 6π. (C) 36π. (D) 18π.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.17. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

(A) 0. (B) Vô số. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Có vô số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước, các mặt cầu đó đi qua 1 điểm trên đường tròn đồng thời có tâm I thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15.18. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua hai điểm A và B là

(A) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

(B) Trung điểm của đường thẳng AB.

(C) Đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

(D) Mặt phẳng song song với đường thẳng AB.

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu đi qua 2 điểm A, B cho trước. Khi đó ta có $\Leftrightarrow \begin{array}{l} I \text{là tâm của mặt cầu} (S) \\ IA = IB \end{array}$

$\Leftrightarrow I \in (P)$: mặt phẳng trung trực của đoạn

Vậy tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm A, B cho trước là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Chọn đáp án (A) □

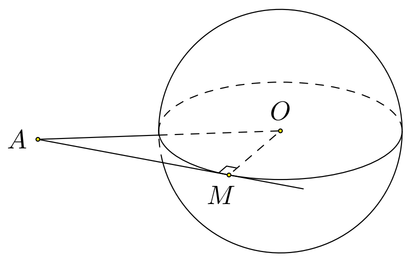
Câu 15.19. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài mặt cầu với $OA = d$. Qua A kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M. Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng AM?

(A) $\sqrt{R^2 - 2d^2}$. (B) $\sqrt{R^2 + d^2}$. (C) $\sqrt{d^2 - R^2}$. (D) $\sqrt{2R^2 - d^2}$.

Lời giải.

Vì Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M nên Δ tiếp xúc với một đường tròn lớn của mặt cầu $S(O; R)$ tại M.

Do đó $\triangle OMA$ vuông tại M, suy ra $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$.



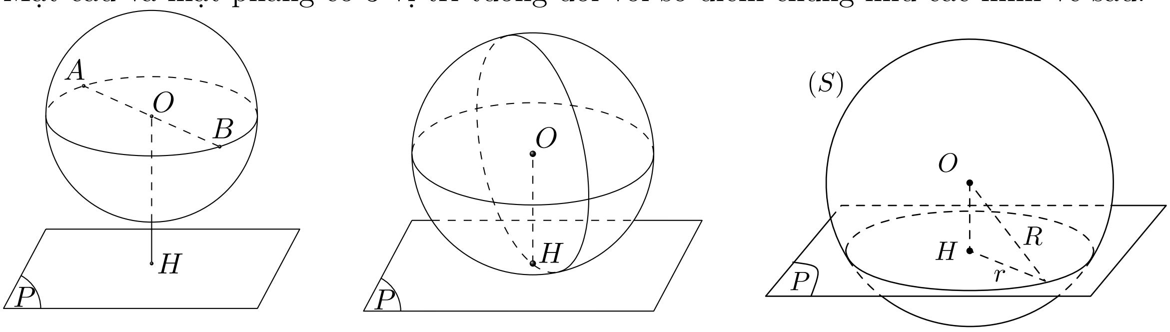
Chọn đáp án (C) □

Câu 15.20. Số điểm chung giữa mặt cầu và mặt phẳng không thể là

(A) 2. (B) Vô số. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Mặt cầu và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối với số điểm chung như các hình vẽ sau:



không có điểm chung *có 1 điểm chung* *có vô số điểm chung*

Vậy không xảy ra trường hợp mặt phẳng và mặt cầu có đúng 2 điểm chung.

Chọn đáp án (A) □

(D) BẢNG ĐÁP ÁN

15.1. D	15.2. D	15.3. B	15.4. A	15.5. B	15.6. D	15.7. B	15.8. B
15.9. C	15.10. D	15.11. C	15.12. D	15.13. A	15.14. C	15.15. A	15.16. C
15.17. B	15.18. A	15.19. C	15.20. A				

DẠNG 16. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

- Số phức có dạng $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$. Phần thực của z là a, phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.

- Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

  ⊕ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

  ⊕ $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

  ⊕ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

  ⊕ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

  ⊕ Tổng và tích của z và $\bar{z}$ luôn là một số thực.

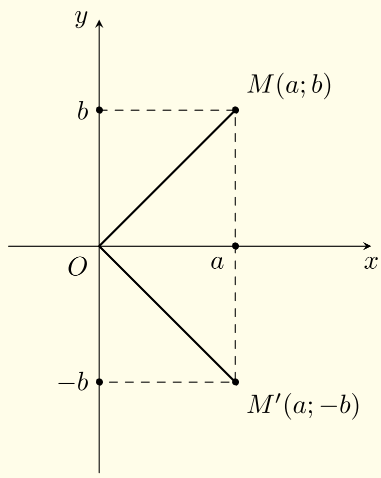
- Lưu ý: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$; với $n \in \mathbb{N}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i\,(a_1, a_2, b_2, b_2 \in \mathbb{R})$.
Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



- **Biểu diễn hình học của số phức**

  - Số phức $z = a + bi(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.

- z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox.

- **Mô đun của số phức**
  - Mô đun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  - Ta có: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$; $|z| = |\bar{z}|$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 16 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

(A) -3. (B) -2. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3.

Chọn đáp án (A) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 16.1. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)i$ lần lượt là

(A) 1 và 2. (B) -2 và 1. (C) 1 và -2. (D) 2 và 1.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$.

Vậy phần thực và phần ảo của z lần lượt là -2 và 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16.2. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$. Tổng phần thực, phần ảo của tổng hai số phức đã cho là

(A) $S = 3$. (B) $S = 7$. (C) $S = 4$. (D) $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (5 - 3i) + (-1 + 2i) = 4 - i$.

Vậy tổng phần thực và phần ảo của tổng hai số phức đã cho là $S = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16.3. Phần ảo của số phức $z = 4 - 5i$ là

(A) $-5i$. (B) -5. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 4 - 5i$ là -5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16.4. Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

Ⓐ $-1 + 2i$. Ⓑ $-1 - 2i$. Ⓒ $1 + 2i$. Ⓓ $-2 + i$.

Lời giải.

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$, a, $b \in \mathbb{R}$ là số phức $z = a - bi$, a, $b \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.5. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp z là

Ⓐ $\overline{z} = -2 - 3i$. Ⓑ $\overline{z} = 3 - 2i$. Ⓒ $\overline{z} = -2 + 3i$. Ⓓ $\overline{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Do đó $z = 2 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 16.6. Số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

Ⓐ 8. Ⓑ $-8i$. Ⓒ -8. Ⓓ 5.

Lời giải.

Số phức $z = 5 - 8i$ có phần ảo là -8.

Chọn đáp án C □

Câu 16.7. Mô-đun của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

Ⓐ $2\sqrt{5}$. Ⓑ 4. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.8. Cho $z = 3 + 2i$. Tìm mô-đun của z.

Ⓐ $|z| = 5$. Ⓑ $|z| = 13$. Ⓒ $|z| = \sqrt{13}$. Ⓓ $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.9. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 8i$ là

Ⓐ $-6 + 8i$. Ⓑ $6 + 8i$. Ⓒ $-6 - 8i$. Ⓓ $8 - 6i$.

Lời giải.

Ta có số phức $z = a + bi$ sẽ có số phức liên hợp là $\overline{z} = a - bi$.

Do đó số phức liên hợp của $z = 6 - 8i$ là $\overline{z} = 6 + 8i$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.10. Số phức liên hợp của số phức z có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là

Ⓐ $\overline{z} = 4 + 5i$. Ⓑ $\overline{z} = 4 - 5i$. Ⓒ $\overline{z} = 5 - 4i$. Ⓓ $\overline{z} = 5 + 4i$.

Lời giải.

Ta có số phức z có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là $z = 4 + 5i$.

Do đó $\overline{z} = \overline{4 + 5i} = 4 - 5i$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.11. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$.

B Phần thực và phần ảo của z lần lượt là 3 và -4.

C Biểu diễn số phức z lên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(3; -4)$.

D Mô-đun của số phức z bằng 5.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 3 - 4i$ là $\overline{z} = 3 + 4i$.

Mệnh đề "Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$" sai.

Chọn đáp án A □

Câu 16.12. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo

A $z = -2i$. B $z = 2 + 2i$. C $z = -1 + \sqrt{2}i$. D $z = -2$.

Lời giải.

Số phức thuần ảo là $z = -2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.13. Phần ảo của số phức $z = 2 + 3i$ là

A $2i$. B $3i$. C 2. D 3.

Lời giải.

Ta có $z = 2 + 3i$. Phần ảo của số phức z là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 16.14. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

A $\overline{z} = 2 + 3i$. B $\overline{z} = -2 + 3i$. C $z = 3 + 2i$. D $\overline{z} = 3 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.15. Mô-đun của số phức $z = 7 - 5i$ bằng

A $2\sqrt{6}$. B 74. C 24. D $\sqrt{74}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16.16. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Tính $|z|$.

A $|z| = \sqrt{5}$. B $|z| = 13$. C $|z| = \sqrt{13}$. D $|z| = 5$.

Lời giải.

$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 16.17. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

A 12. B 5. C 7. D 1.

Lời giải.

Mô-đun của z bằng $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.18. Cho số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

A -8. B 8. C 5. D $-8i$.

Lời giải.

Ta có $z = 5 - 8i$ có phần ảo bằng -8.

Chọn đáp án A □

Câu 16.19. Mô-đun của số phức $2 + 3i$ bằng

A $\sqrt{13}$. B 13. C $\sqrt{5}$. D 5.

Lời giải.

Ta có $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.20. Mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$ là

A 5. B 7. C 3. D 4.

Lời giải.

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.21. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$. Giá trị $a - b$ bằng

A 1. B 5. C -5. D -1.

Lời giải.

Số phức $z = -3 + 2i$, có phần thực $a = -3$, phần ảo $b = 2$. Do đó $a - b = -3 - 2 = -5$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.22. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là

A $3 - 2i$. B $3 + 2i$. C $2 + 3i$. D $2 - 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là $z = 3 + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.23. Với x, y là các số thực thì số phức $z = x - 1 + (y + 2)i$ là số ảo khi và chỉ khi

Ⓐ $y=-2$. Ⓑ $x=1,\ y\neq -2$. Ⓒ $y=-2,\ x\neq 1$. Ⓓ $x=1$.

Lời giải.

Ta có $z=x-1+(y+2)i$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16.24. Cho số phức $z=-2+i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

Ⓐ Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1. Ⓑ Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng i.
Ⓒ Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng $-i$. Ⓓ Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1.

Lời giải.

Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16.25. Mô-đun của số phức $z=5-4i$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 41. Ⓒ $\sqrt{41}$. Ⓓ 3.

Lời giải.

$|z|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16.26. Cho số phức $z=2+\sqrt{3}i$. Mô-đun của z bằng

Ⓐ 5. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{7}$. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{2^2+3}=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16.27. Phần thực của số phức $(2-i)(1+2i)$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $(2-i)(1+2i)=2+4i-i-2i^2=4+3i$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 16.28. Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là

Ⓐ $-1+2i$. Ⓑ $-1-2i$. Ⓒ $2-i$. Ⓓ $1+2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là $\overline{z}=1+2i$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 16.29. Mô-đun của số phức $\text{z}=5-2i$ bằng

Ⓐ 29. Ⓑ $\sqrt{29}$. Ⓒ 3. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $|z|=|5-2i|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

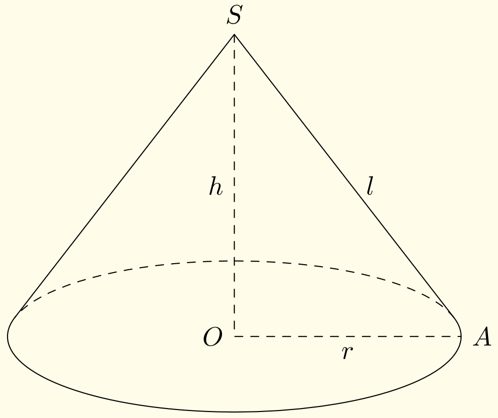
D BẢNG ĐÁP ÁN

16.1. B	16.2. A	16.3. B	16.4. C	16.5. D	16.6. C	16.7. A	16.8. C
16.9. B	16.10. B	16.11. A	16.12. A	16.13. D	16.14. A	16.15. D	16.16. D
16.17. B	16.18. A	16.19. A	16.20. A	16.21. C	16.22. B	16.23. D	16.24. D
16.25. C	16.26. C	16.27. C	16.28. D	16.29. B			

DẠNG 17. HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

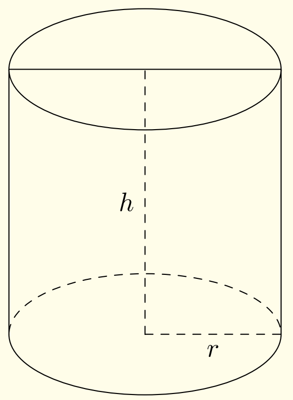
1. Hình nón, khối nón



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{\text{xq}} = \pi r l$.
- Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
- Công thức tính thể tích của khối nón $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
- Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông SOA, ta có

$$l^2 = h^2 + r^2; \cos\widehat{ASO} = \frac{h}{l}; \sin\widehat{ASO} = \frac{r}{l}; \tan\widehat{ASO} = \frac{r}{h}.$$

2. Hình trụ, khối trụ



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi r l$.
- Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi r l + 2\pi r^2$.
- Công thức tính thể tích của khối nón $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 17 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho hình nón có đường kính đáy $2r$ và độ dài đường sinh ℓ. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $2\pi r\ell$. (B) $\frac{2}{3}\pi r\ell^2$. (C) $\pi r\ell$. (D) $\frac{1}{3}\pi r^2\ell$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r\ell$.

Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 17.1. Cho hình nón có bán kính đáy $r = a$ và độ dài đường sinh $l = 3a$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $3\pi a^2$. (B) πa^2. (C) $4\pi a^2$. (D) $10\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi a \cdot 3a = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án (A) □

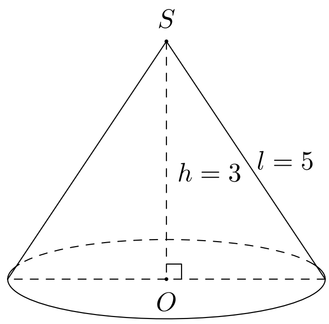
Câu 17.2. Một khối nón có chiều cao bằng 3, độ dài đường sinh bằng 5. Thể tích của khối nón là

(A) 12π. (B) 16π. (C) 15π. (D) $\frac{80\pi}{3}$.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17.3. Cho khối nón có bán kính đáy bằng $R = 1$, đường sinh $l = 4$. Diện tích xung quanh của khối nón là

(A) 8π. (B) 12π. (C) 4π. (D) 6π.

Lời giải.

$S_{\text{xq}} = \pi Rl = 4\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.4. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 4π. Ⓑ 12π. Ⓒ 12. Ⓓ 4.

Lời giải.

Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

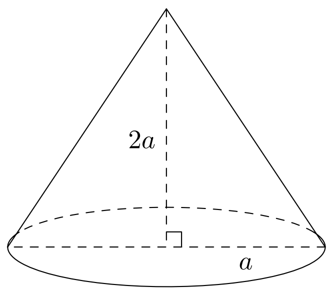
Chọn đáp án A □

Câu 17.5. Cho khối nón có độ dài đường cao bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $2\pi a^3$. Ⓑ $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\pi a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \pi a^2 = \dfrac{2\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 17.6. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho là

Ⓐ $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $4\pi\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối nón, thể tích khối nón đã cho là

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2\sqrt{3} = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Chọn đáp án C □

Câu 17.7. Cho khối nón có thể tích V. Khi tăng bán kính đường tròn đáy lên 2 lần thì được khối nón mới có thể tích bằng

Ⓐ $4V$. Ⓑ $2V$. Ⓒ $\dfrac{2V}{3}$. Ⓓ $\dfrac{4V}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối nón ban đầu là $V = \dfrac{1}{3}\pi h r^2$.

Tăng bán kính đáy lên 2 lần thì thể tích khối nón mới là $V_m = \dfrac{1}{3}\pi h(2r)^2 = 4\left(\dfrac{1}{3}\pi h r^2\right) = 4V$.

Chọn đáp án A □

Câu 17.8. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $\dfrac{r}{2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}\pi r l$. Ⓑ $\pi r l$. Ⓒ $\dfrac{1}{6}\pi r l$. Ⓓ $2\pi r l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{xq} = \pi\frac{r}{2}l = \frac{1}{2}\pi rl$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.9. Một khối trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ?

(A) $V = \frac{4a^2}{3}$. (B) $V = \frac{4a^3}{3}$. (C) $V = 4a^3$. (D) $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = Bh = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.10. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $r = \frac{1}{2}l$ là

(A) l^2. (B) πl^2. (C) $2\pi l^3$. (D) $2\pi l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình trụ là $S = 2\pi rl = 2\pi \cdot \frac{1}{2}l \cdot l = \pi l^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17.11. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm, chiều cao $h = 7$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này là

(A) 70π cm^2. (B) $\frac{70}{3}\pi$ cm^2. (C) $\frac{35}{3}\pi$ cm^2. (D) 35π cm^2.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi$ cm^2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.12. Một hình trụ tròn có bán kính đáy $r = 50$ cm và chiều cao $h = 50$ cm. Diện tích xung quanh hình trụ bằng

(A) 5000π cm^2. (B) 5000 cm^2. (C) 2500π cm^2. (D) 2500 cm^2.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đó là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = 5000\pi$ cm^2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.13. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường cao h và bán kính đáy r bằng

(A) $4\pi rh$. (B) πrh. (C) $2\pi rh$. (D) $\frac{1}{3}\pi rh$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.14. Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng $10cm$. Biết thể tích khối trụ bằng 90π cm^3. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

(A) 36π cm^2. (B) 81π cm^2. (C) 60π cm^2. (D) 78π cm^2.

Lời giải.

Ta có $h = l = 10$ cm.

$V = 90\pi \Leftrightarrow \pi r^2 \cdot h = 90\pi \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$ cm.

Vậy $S_{\text{xq}} = 2\pi rl = 60\pi$ cm^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17.15. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

(A) 100π m^2. (B) 100 m^2. (C) 50 m^2. (D) 50π m^2.

Lời giải.

Ta có chu vi đáy $C = 2\pi R = 5$ m.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi Rl = 5 \cdot 20 = 100$ m^2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17.16. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $3a\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ đó là

(A) $3\pi a^3$. (B) $3\pi a^3\sqrt{3}$. (C) πa^3. (D) $\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 3a\sqrt{3} = 3\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17.17. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng $12a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) πa^3. (B) $4\pi a^3$. (C) $6\pi a^3$. (D) $5\pi a^3$.

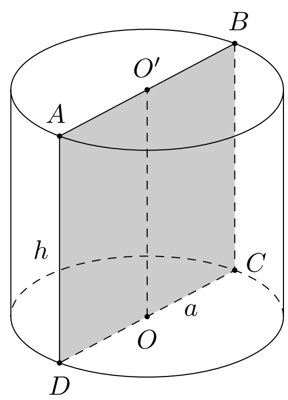
Lời giải.

Ta có bán kính $r = a$. Gọi h là chiều cao của hình trụ.

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật.

Theo bài ra ta có $2(h + 2a) = 12a \Leftrightarrow h = 4a$.

Vậy thể tích của khối trụ bằng $V = \pi r^2 h = \pi a^2(4a) = 4\pi a^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17.18. Cho khối trụ có đường sinh bằng 2, thể tích 18π. Diện tích toàn phần của khối trụ bằng

(A) 20π. (B) 10π. (C) 12π. (D) 30π.

Lời giải.

Ta có hình trụ $l = h = 2$.

Khối trụ có: $V = 18\pi \Rightarrow \pi R^2 h = 18\pi \Rightarrow \pi R^2 \cdot 2 = 18\pi \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Ta có $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{2\text{đáy}} = 2\pi R l + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 30\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 17.19. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 2, chiều cao bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 12π. B. 6π. C. 4π. D. 18π.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 17.20. Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h là

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $V = \pi r h$. C. $V = \pi r^2 h$. D. $V = 2\pi r h$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

17.1. A	17.2. B	17.3. C	17.4. A	17.5. D	17.6. C	17.7. A	17.8. A
17.9. C	17.10. B	17.11. A	17.12. A	17.13. C	17.14. C	17.15. B	17.16. B
17.17. B	17.18. D	17.19. A	17.20. C				

DẠNG 18. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường thẳng

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.
- Điểm M thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow M(x_0 + at_1; y_0 + at_2; z_0 + at_3)$.
- Nếu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ thì $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc của d.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

(A) $P(1; 2; 3)$. (B) $Q(1; 2; -3)$. (C) $N(2; 1; 2)$. (D) $M(2; -1; -2)$.

Lời giải.

Thay toạ độ điểm $Q(1; 2; -3)$ vào phương trình d ta có
$\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{2-2}{-1} = \dfrac{-3+3}{-2}$. Suy ra $Q \in d$.
Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 18.1. Cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{1}$. Khi đó Δ đi qua điểm M có tọa độ

(A) $(2;\ 3;\ 0)$. (B) $(0;\ 0;\ 1)$. (C) $(1;\ -1;\ 2)$. (D) $(0;\ 2;\ -1)$.

Lời giải.

Dễ thấy Δ đi qua điểm $M\,(2;\ 3;\ 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d?

(A) $N\,(1; 0; 1)$. (B) $F\,(3; -4; 5)$. (C) $M\,(0; 2; 1)$. (D) $E\,(2; -2; 3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $E(2;-2;3)$ vào d ta được $\dfrac{2-1}{1}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{3-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $E(2;-2;3)$.
Thay tọa độ điểm $N(1;0;1)$ vào d ta được $\dfrac{1-1}{1}=\dfrac{0}{-2}=\dfrac{1-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $N(1;0;1)$.
Thay tọa độ điểm $F(3;-4;5)$ vào d ta được $\dfrac{3-1}{1}=\dfrac{-4}{-2}=\dfrac{5-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $F(3;-4;5)$.
Thay tọa độ điểm $M(0;2;1)$ vào d ta được $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{2}{-2}=\dfrac{1-1}{2}$ không thỏa mãn nên chọn $M(0;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(2;3;-2)$. B. $M(1;1;-3)$. C. $Q(3;2;-2)$. D. $P(-1;1;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ có phương trình $\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}$.
Nên theo đề bài thì đường thẳng d đi qua điểm $P(-1;1;-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 18.4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$?

A. $P(1;1;2)$. B. $N(2;-1;2)$. C. $Q(-2;1;-2)$. D. $M(-2;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2;1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18.5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(0;5;-8)$. B. $Q(1;2;-3)$. C. $M(2;-1;2)$. D. $P(0;2;-8)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng

- $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{5-2}{-3}=\dfrac{-8+3}{5}=-1$. Suy ra $N\in d$.
- $\dfrac{1-1}{1}=\dfrac{2-2}{-3}=\dfrac{-3+3}{5}=0$. Suy ra $Q\in d$.
- $\dfrac{2-1}{1}=\dfrac{-1-2}{-3}=\dfrac{2+3}{5}=1$. Suy ra $M\in d$.
- $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{2-2}{-3}\neq\dfrac{-8+3}{5}$. Suy ra $P\notin d$.

Chọn đáp án D □

Câu 18.6. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M nào bên dưới?

(A) $M(5;-4;7)$. (B) $M(-5;11;-15)$. (C) $M(-5;7;-12)$. (D) $M(5;4;-7)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm M trong bốn đáp án A, B, C, D vào phương trình đường thẳng Δ ta thấy điểm $M(-5;11;-15)$ thỏa mãn. Vậy đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-5;11;-15)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

(A) $Q(-2;1;-2)$. (B) $M(-2;-2;1)$. (C) $P(1;1;2)$. (D) $N(2;-1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2;1;-2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18.8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-4t \\ z=5t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

(A) $M(5;5;5)$. (B) $M(3;-4;5)$. (C) $M(2;-1;0)$. (D) $M(8;,9;10)$.

Lời giải.

Thay $t=0$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=0. \end{cases}$

Do đó điểm $M(2;-1;0)$ thuộc d .

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không nằm trên đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$?

(A) $M(1;-1;0)$. (B) $N(3;0;3)$. (C) $P(-3;-3;-6)$. (D) $Q(5;1;5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ M vào phương trình đường thẳng Δ ta được $0=0=0$ (đúng). Suy ra $M\in\Delta$.

Thay tọa độ N vào phương trình đường thẳng Δ ta được $1=1=1$ (đúng). Suy ra $N\in\Delta$.

Thay tọa độ P vào phương trình đường thẳng Δ ta được $-2=-2=-2$ (đúng). Suy ra $P\in\Delta$.

Thay tọa độ Q vào phương trình đường thẳng Δ ta được $2=2=\dfrac{5}{3}$ (Vô lý)

$\Rightarrow Q\notin\Delta$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây thuộc (d)?

(A) $M(1;2;2)$. (B) $N(0;2;3)$. (C) $P(-1;4;2)$. (D) $Q(-1;2;1)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng (d), ta thấy chỉ có đáp án $N(0;2;3)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$?

(A) $(3;-2;1)$. (B) $(2;-1;-3)$. (C) $(-2;1;3)$. (D) $(-3;2;1)$.

Lời giải.

Do đường thẳng Δ: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ luôn đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nên đường thẳng đã cho đi qua điểm $A(2;-1;-3)$, các điểm còn lại không thuộc d.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.12. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$?

(A) $P(-1;-3;-6)$. (B) $Q(-1;7;11)$. (C) $M(1;3;6)$. (D) $N(3;-1;1)$.

Lời giải.

Điểm M, N và Q thuộc đường thẳng d. Do đó loại $Q(-1;7;11)$, $M(1;3;6)$, $N(3;-1;1)$. Điểm $P(-1;-3;-6) \notin d \Rightarrow$ chọn $P(-1;-3;-6)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18.13. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{3}$

(A) $M(1;2;1)$. (B) $Q(1;-2;-1)$. (C) $N(-1;3;2)$. (D) $P(-1;2;1)$.

Lời giải.

Theo phương trình đường thẳng, đường thẳng d đi qua điểm $P(-1;2;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $Q\,(1\,;2\,;3)$. (B) $M\,(3\,;-1\,;2)$. (C) $P\,(2\,;-2\,;3)$. (D) $N\,(-1\,;5\,;4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ 4 điểm M, N, P, Q vào phương trình đường thẳng d ta có:

- $\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 2 = 2 - 3t \\ 3 = 3 - t \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q \in d.$
- $\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ -1 = 2 - 3t \\ 2 = 3 - t \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M \in d.$
- $\begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ -2 = 2 - 3t \\ 3 = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{4}{3} \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm $\Rightarrow P \notin d$.
- $\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 5 = 2 - 3t \\ 4 = 3 - t \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow N \in d$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$?

(A) $P\,(2;-1;3)$. (B) $M\,(-1;1;-2)$. (C) $N\,(1;-1;2)$. (D) $Q\,(-2;1;-3)$.

Lời giải.

Xét điểm $N\,(1;-1;2)$ ta có $\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{-1+1}{-1} = \dfrac{2-2}{3}$ nên điểm $N\,(1;-1;-2)$ thuộc đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

(A) $P\,(1;2;5)$. (B) $N\,(1;5;2)$. (C) $Q\,(-1;1;3)$. (D) $M\,(1;1;3)$.

Lời giải.

- **Cách 1.** Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có véctơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì phương trình đường thẳng d là
$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, ta chọn đáp án $N(1; 5; 2)$.

- **Cách 2.** Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d , ta có
$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 5 + t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$ (Vô lý).
Loại đáp án $P(1; 2; 5)$.
Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có $\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 5 = 5 + t \\ 2 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$. Nhận đáp án $N(1; 5; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{-5}$ đi qua điểm

(A) $(-1; 2; -3)$. (B) $(1; -2; 3)$. (C) $(-3; 4; 5)$. (D) $(3; -4; -5)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.18. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

(A) $P(1; 2; 5)$. (B) $N(1; 5; 2)$. (C) $M(1; 1; 3)$. (D) $Q(-1; 1; 3)$.

Lời giải.

Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow N(1; 5; 2) \in d$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18.19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$. Điểm nào sau đây không thuộc d?

(A) $P(3; 2; -1)$. (B) $Q(-3; -2; 1)$. (C) $M(4; -1; 1)$. (D) $N(2; 5; -3)$.

Lời giải.

Thay lần lượt các tọa độ trên vào phương trình đường thẳng d, ta thấy $Q(-3;-2;1)$ là điểm không thuộc d.

Chọn đáp án B □

Câu 18.20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A $(3;2;3)$. B $(2;1;3)$. C $(3;1;2)$. D $(3;1;3)$.

Lời giải.

Thay $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{3}{3}$ (đúng).

Chọn đáp án D □

Câu 18.21. Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ không đi qua điểm nào sau đây?

A $M(1;2;-1)$. B $M(1;2;1)$. C $M(-1;1;1)$. D $M(5;4;-5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d

- $\dfrac{1-1}{2}=\dfrac{2-2}{1}=\dfrac{-1+1}{-2}=0$. Suy ra $M\in d$.
- $\dfrac{1-1}{2}=\dfrac{2-2}{1}\neq\dfrac{1+1}{-2}$. Suy ra $M\notin d$.
- $\dfrac{-1-1}{2}=\dfrac{1-2}{1}=\dfrac{1+1}{-2}$. Suy ra $M\in d$.
- $\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4-2}{1}=\dfrac{-5+1}{-2}$. Suy ra $M\in d$.

Chọn đáp án B □

Câu 18.22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-5}$. Đường thẳng d không đi qua điểm nào sau đây?

A $P(3;1;5)$. B $Q(0;7;-10)$. C $M(-2;3;0)$. D $N(-1;5;-5)$.

Lời giải.

Đường thẳng có phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$, suy ra đường thẳng đã cho đi qua điểm $M(-2;3;0)$.

Thay tọa độ điểm $N(-1;5;-5)$ vào phương trình đường thẳng d ta có
$\dfrac{-1+2}{1}=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{-5}{-5}=1$.
Suy ra điểm N thuộc đường thẳng d.

Thay tọa độ điểm $P(3;1;5)$ vào phương trình đường thẳng d ta có

$\dfrac{3+2}{1} \neq \dfrac{1-3}{2}$.

Suy ra điểm P không thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18.23. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$d\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=2-2t \\ z=3+ \end{cases}$?

(A) $Q(0;1;4)$. (B) $M(3;2;-2)$. (C) $N(1;1;2)$. (D) $M(3;3;-6)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của lần lượt các điểm đã cho vào phương trình đường thẳng d chỉ thấy tọa độ của điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d?

(A) $N(1;0;1)$. (B) $F(3;-4;5)$. (C) $M(0;2;1)$. (D) $E(2;-2;3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm E, N, F vào phương trình đường thẳng d ta thấy thỏa mãn nên E, N, F thuộc d.

Thay tọa độ các điểm Mvào phương trình đường thẳng d ta thấy không thỏa mãn nên M không thuộc d.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$. Điểm nào dưới đây KHÔNG thuộc đường thẳng d?

(A) $N\,(1;\ -1;\ -2)$. (B) $P\,(-1;\ 0;\ 0)$. (C) $Q\,(-3;\ 1;\ -2)$. (D) $M\,(3;\ -2;\ -4)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d ta thấy tọa độ của Q không thỏa mãn phương trình $\left(\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{1+1}{-1}\neq\dfrac{-2+2}{-2}\right)$.

Vậy điểm Q không thuộc đường thẳng d .

Chọn đáp án (C) □

Câu 18.26. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$?

(A) $Q\,(2;-5;4)$. (B) $N\,(0;-2;6)$. (C) $P\,(4;-8;10)$. (D) $M\,(-2;1;4)$.

Lời giải.

Vì khi thay điểm $Q(2;-5;4)$ vào phương trình đường thẳng d ta được

$\dfrac{2+2}{2} = \dfrac{-5-1}{-3} = \dfrac{4-4}{2}$ (sai).

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

18.1. A	18.2. C	18.3. D	18.4. C	18.5. D	18.6. B	18.7. A	18.8. C
18.9. D	18.10. B	18.11. B	18.12. A	18.13. D	18.14. C	18.15. C	18.16. B
18.17. B	18.18. B	18.19. B	18.20. D	18.21. B	18.22. A	18.23. D	18.24. C
18.25. C	18.26. A						

DẠNG 19. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số nhận biết việc đổi dấu của đạo hàm $f'(x)$ để kết luận

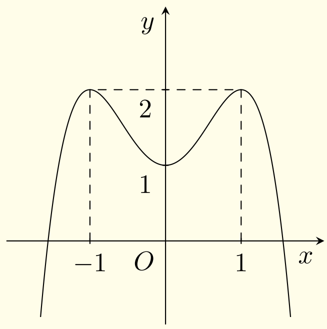
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 19 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

(A) $(-1; 2)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(1; 0)$.



Lời giải.

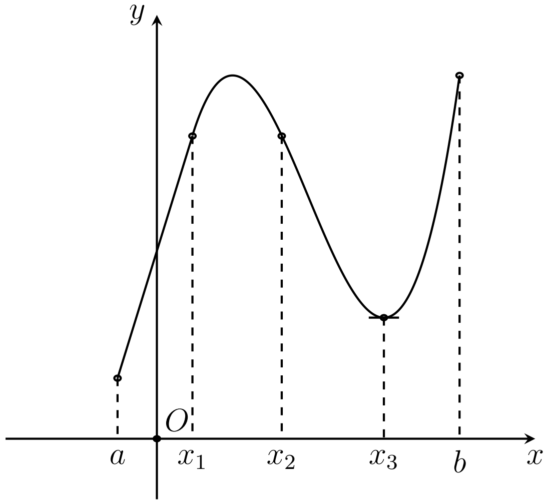
Quan sát đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có toạ độ là $(0; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 19.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?



(A) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$.

(B) $f'(x_2) > 0$.

(C) $f'(x_3) = 0$.

(D) $f'(x_1) > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đạo hàm và nghịch biến trong khoảng $(c; d)$ chứa x_2, suy ra $f'(x_2) \leq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn khẳng định **sai**.

(A) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

(C) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

(D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f'(x)$ tại điểm $x = 3$ không đổi dấu nên $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 4 lần, và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19.4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như bảng sau.

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	21	↗	22	↘	-3	↗	$+\infty$

Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số trên bằng

Ⓐ 19. Ⓑ 18. Ⓒ 0. Ⓓ 22.

Lời giải.

Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số là $21 - 3 = 18$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 19.5.

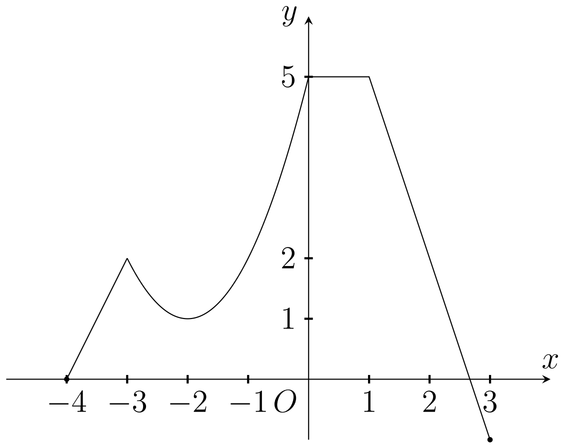
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 3]$ và có đồ thị trên đoạn $[-4; 3]$ như hình bên. Hãy xác định số điểm cực đại của đồ thị hàm số đó.

Ⓐ 3.

Ⓑ 0.

Ⓒ 2.

Ⓓ 1.



Lời giải.

Từ đồ thị bài cho ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm tại $x = -3$ nên hàm số đạt cực đại tại đó. Vậy hàm số có một cực đại.

Chọn đáp án Ⓓ □

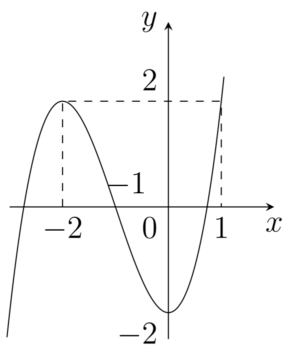
Câu 19.6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$, có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $y' < 0,\ \forall x \in (-2; 0)$.

Ⓑ Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$.

Ⓒ Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Ⓓ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.



Lời giải.

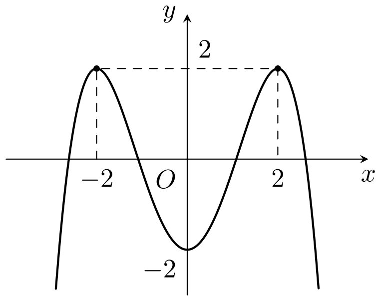
Khẳng định **sai** là: "Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$". Lí do: có thể thấy với $x > 1$ thì $f(x) > f(-2)$.

Sửa lại đúng: "Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.7.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



(A) $x = 0$.

(B) $y = -2$.

(C) $M(0; -2)$.

(D) $N(2; 2)$.

Lời giải.

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0; -2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19.8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) Hàm số đã cho không có cực trị.

(B) Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

(C) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.

(D) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải.

Hàm số không xác định tại x_1 nên x_1 không là điểm cực trị.

Tại x_2 hàm số không có đạo hàm nhưng vẫn xác định, đồng thời đạo hàm đổi dấu khi qua x_2 nên x_2 là điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		1		2		3		4
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$			4				4		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				3				$-\infty$

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số có ba điểm cực trị.

(B) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

(C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

(D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$. Giá trị cực đại $y = 4$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Giá trị cực tiểu là $y = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19.11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

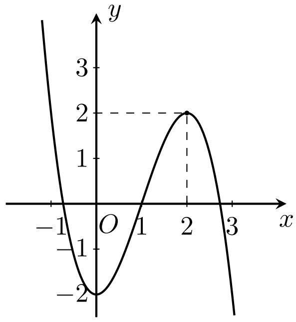
Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu hai lần.

Vậy số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(-1; 3)$?



A) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
B) Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
C) Hàm số không có điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
D) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) + x$ cũng có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) + 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$.

Dựa vào đồ thị $f^{'}(x)$ ta có $f^{'}(x) = -1$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	-1		x_1		x_2		x_3		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$g(x_3)$	$\searrow$	$g(3)$

Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chọn đáp án D □

Câu 19.13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A) 5. B) 6. C) 4. D) 7.

Lời giải.

Ta có $y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$

$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2. & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) cho chúng ta 3 nghiệm phân biệt, (2) cho chúng ta 1 nghiệm và không trùng với nghiệm $x = 0, x = 2$ nên $y = f(f(x))$ có 6 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 19.14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(2-x)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3. B 2. C 0. D 1 .

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội 3, $x = -1$ là nghiệm kép, $x = 2$ là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 19.15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A $x = \frac{1}{2}$. B $x = -2$. C $x = 1$. D $x = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $y = f(2x)$, ta có $y' = 2 \cdot f'(2x)$.

Ta suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y' = 2 \cdot f'(2x)$ là

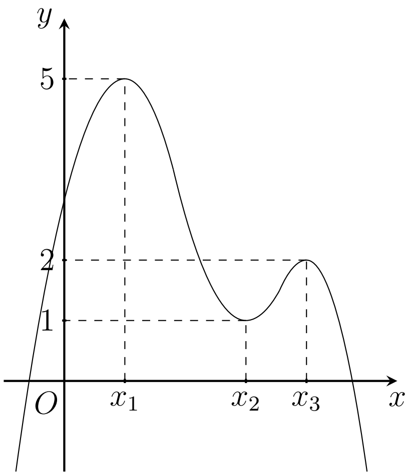
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$2f'(2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 19.16.

Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) + \dfrac{2017 - 2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là



A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - \dfrac{2018}{2017}$.

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow f'(x) - \dfrac{2018}{2017} = 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2018}{2017}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 19.17. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|ax^2|x| + bx^2 + c|x| + d\right|$ là

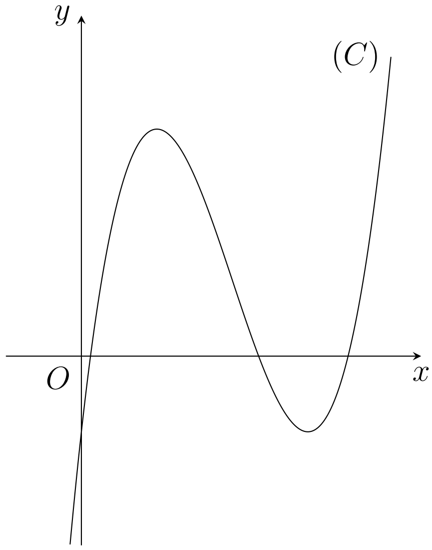
A 7. B 11. C 5. D 9.

Lời giải.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1) = 3 \\ y'(1) = 0 \\ y(3) = -1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = -1. \end{cases}$.

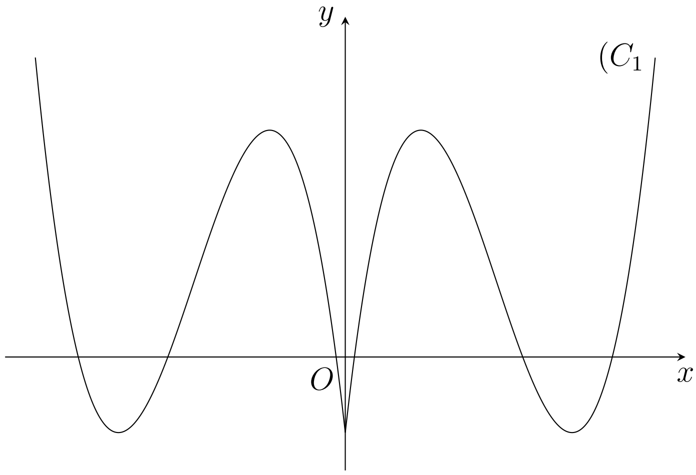
Vậy hàm số đã cho là $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) như sau:



Từ đồ thị (C), ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = \left|x\right|^3 - 6x^2 + 9\left|x\right| - 1$ gồm có hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

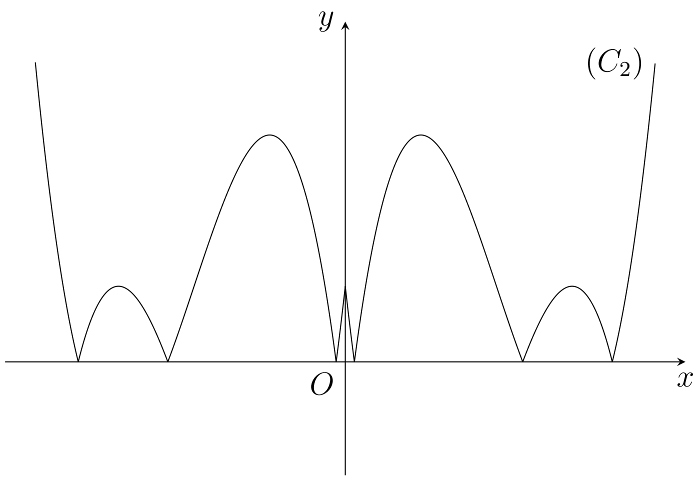
+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần 1 qua trục tung



Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = \left|\left|x\right|^3 - 6x^2 + 9\left|x\right| - 1\right|$ gồm có hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.

+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.

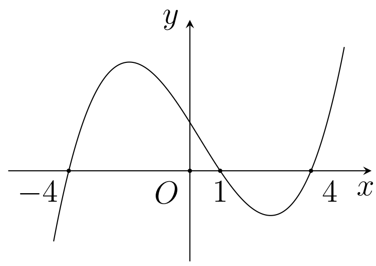


Do đó, đồ thị (C_2) có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.18.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(5 - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(5 - x^2)$, ta có

$$y' = -2x \cdot f'(5 - x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 5 - x^2 = -4 \\ 5 - x^2 = 1 \\ 5 - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Do đó hàm số $y = f(5 - x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}.$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

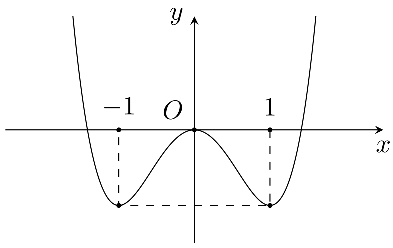
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 19.20.

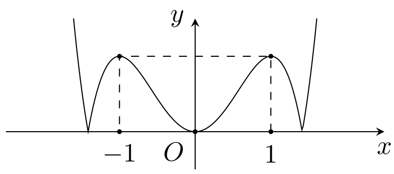
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. B 3. C 4. D 2.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.



Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

19.1. B	19.2. C	19.3. D	19.4. B	19.5. D	19.6. B	19.7. C	19.8. B
19.9. B	19.10. C	19.11. B	19.12. D	19.13. B	19.14. B	19.15. C	19.16. D
19.17. B	19.18. B	19.19. C	19.20. A				

DẠNG 20. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

Như vậy, để tìm tìm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 20 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = \dfrac{1}{3}$. Ⓑ $y = -\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $y = -\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $y = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $y = \dfrac{2}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án Ⓓ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 20.1. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

Ⓐ $y = \dfrac{2-x}{x}$. Ⓑ $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

Ⓒ $y = x^4 - x^2 - 2$. Ⓓ $y = \dfrac{3x^2-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét đáp án $y = x^4 - x^2 - 2$ có $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét đáp án $y=\dfrac{3x^2-1}{x+1}$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Xét đáp án $y=\dfrac{2-x}{x}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.
Xét đáp án $y=x^3-x^2+x-3$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Chọn đáp án A □

Câu 20.2. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=10+\dfrac{1}{x-10}$?

A $y=-10$. B $x=-10$. C $y=10$. D $x=10$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(10+\dfrac{1}{x-10}\right)=10\Rightarrow y=10$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 20.3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

A $x=1$. B $x=-1$. C $y=1$. D $y=-1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^\pm}(x-2)=-3$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^\pm}(x+1)=0$ nên
$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x-2}{x+1}=+\infty$.
Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 20.4. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

A $x=-1$. B $y=-1$. C $x=1$. D $y=2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{2+0}{1-0}=2$.
Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là $y=2$.
Chọn đáp án D □

Câu 20.5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ là

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$, suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty$, suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.
Chọn đáp án D □

Câu 20.6. Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y=\dfrac{2x^2+3x+2}{2-x}$. (B) $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$. (C) $y=\dfrac{1+x^2}{1+x}$. (D) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.7. Đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$. (B) $y=\dfrac{2x^2+3x+2}{2-x}$. (C) $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$. (D) $y=\dfrac{1+x^2}{1+x}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$. Suy ra $y=-1$ là TCN của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20.8. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ là

(A) $x=1$. (B) $x=\dfrac{1}{2}$. (C) $y=\dfrac{1}{2}$. (D) $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{2x+1}{2x-1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{2x+1}{2x-1}=-\infty$, do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20.9. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

(A) $x=2$ và $y=1$. (B) $x=1$ và $y=2$. (C) $x=2$ và $y=-3$. (D) $x=-2$ và $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+3}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$ nên $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x+3}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+3}{x-2}=-\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20.10. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

(A) $x=2$. (B) $y=2$. (C) $x=1$. (D) $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-2}{x-1}=+\infty$, do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.11. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-6}{x-2}$ là

(A) $y-3=0$. (B) $x-2=0$. (C) $x-3=0$. (D) $y-2=0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-6}{x-2} = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.12. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-2x}{-x+2}$ là

(A) $x = -2$, $y = -2$. (B) $x = -2$, $y = -2$. (C) $x = -2$, $y = -2$. (D) $x = 2$, $y = 2$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1-2x}{-x+2}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.13. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu chỉ tính TCĐ và TCN)?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{x^2+1} = 0$ nên đường tiệm cận ngang là $y = 0$.
Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20.14. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+3}$ là

(A) $x = -3$. (B) $y = 1$. (C) $x = 1$. (D) $y = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{x-2}{x+3} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x-2}{x+3} = -\infty$, do đó đường thẳng $x = -3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20.15. Đồ thị của hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

(A) $y = \dfrac{1}{2x^2+x}$. (B) $y = \mathrm{e}^x$. (C) $y = 2x^2 + x$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = 2x^2 + x$ không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.16. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ là

(A) $y = -1$. (B) $y = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x}{x+1} = -1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{x+1} = -1$.
Suy ra $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20.17. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-4x}{2x-1}$?

(A) $y = \dfrac{1}{2}$. (B) $y = -2$. (C) $y = 2$. (D) $y = 4$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-4}{2-\frac{1}{x}} = -2$. Suy ra $y=-2$ là tiệm cận ngang của hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20.18. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

(A) $y = 2$. (B) $x = -1$. (C) $y = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{2x+1}{x+1} = +\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20.19. Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là $x = 1$?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x}$. (B) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. (C) $y = \dfrac{2x}{1-x}$. (D) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x}$ có tiệm cận đứng $x = 0$ loại đáp án A.
- Hàm số $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra đồ thị không có tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ loại đáp án D.
- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{1-x}$ có tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = 1$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (C) □

Câu 20.20. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{x+3}$?

(A) $x = 2$. (B) $x = -3$. (C) $y = -1$. (D) $y = -3$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{2-x}{x+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-3)^+} y = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{2-x}{x+3} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -3$.

Chọn đáp án (B) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

20.1. A	20.2. C	20.3. B	20.4. D	20.5. D	20.6. D	20.7. A	20.8. B
20.9. A	20.10. C	20.11. D	20.12. D	20.13. D	20.14. A	20.15. C	20.16. A
20.17. B	20.18. B	20.19. C	20.20. B				

DẠNG 21. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình logarit

- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

2. Bất phương trình logarit

a) Nếu $a > 1$ thì

- $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.
- $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

b) Nếu $0 < a < 1$ thì

- $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.
- $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$.
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 21 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2) > 0$ là

(A) $(2;3)$. (B) $(-\infty;3)$. (C) $(3;+\infty)$. (D) $(12;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có $\log(x-2) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 10^0 \Leftrightarrow x-2 > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 21.1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 4$ là

(A) $x = 15$. (B) $x = 9$. (C) $x = 17$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 2^4 \Leftrightarrow x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 17$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21.2. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) -3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ vì $x^2 - 3x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1$ là 0.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21.3. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64}(x+1) = \dfrac{1}{2}$.

(A) 7. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) -1. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có $\log_{64}(x+1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa điều kiện).

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \dfrac{1}{2}$.

(A) $x = \dfrac{23}{2}$. (B) $x = -6$. (C) $x = 6$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình $\log_{25}(x+1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21.5. Nghiệm của phương trình $\log_5(2x-1)^3 = 6$ là

(A) 10. (B) 12. (C) 13. (D) 14.

Lời giải.

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

$\log_5(2x-1)^3 = 6 \Leftrightarrow 3\log_5(2x-1) = 6 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5^2 \Leftrightarrow x = 13$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21.6. Tìm các nghiệm của phương trình $\log_3(2x-3) = 2$.

(A) $x = \dfrac{9}{2}$. (B) $x = 6$. (C) $x = 5$. (D) $x = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

$\log_3(2x-3)=2 \Leftrightarrow 2x-3=9 \Leftrightarrow x=6.$

Chọn đáp án B □

Câu 21.7. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-2x)=2$ là

A 1. B 2. C 4. D 3.

Lời giải.

$\log_2(x^2-2x)=2 \Leftrightarrow x^2-2x=4 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 21.8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2+3x)\le 2$ là

A $[-4;-3)\cup(0;1]$.
B $(0;1]$.
C $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.
D $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2\left(x^2+3x\right)\le 2 \\ \Leftrightarrow\ & 0<x^2+3x\le 2^2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^2+3x>0 \\ x^2+3x-4\le 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>0 \end{array}\right. \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} -4\le x<-3 \\ 0<x\le 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-4;-3)\cup(0;1]$.

Chọn đáp án A □

Câu 21.9. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+3)=1$.

A $S=\{1\}$. B $S=\{3\}$. C $S=\{-1\}$. D $S=\{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$.

$\log_3(2x+3)=1 \Leftrightarrow 2x+3=3 \Leftrightarrow x=0.$

Vậy $S=\{0\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x-1)<\log_5(x+2)$ là

(A) $S = (-\infty; 3)$. (B) $S = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$. (C) $S = (-2; 3)$. (D) $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_5(2x-1) < \log_5(x+2) \Leftrightarrow 2x - 1 < x + 2 \Leftrightarrow x < 3$.

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x < 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 2$ là

(A) $(10; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $[100; +\infty)$. (D) $(-\infty; 10)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Bất phương trình $\log x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 100$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[100; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21.12. Phương trình $\log_2(3x+1) = -4$ có tập nghiệm là

(A) $\varnothing$. (B) $\left\{-\frac{5}{16}\right\}$. (C) $\left\{\frac{17}{48}\right\}$. (D) $\{5\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x+1) = -4 \Leftrightarrow 3x + 1 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 3x = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{16}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.13. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \geq 3$ là

(A) $[6; +\infty)$. (B) $[9; +\infty)$. (C) $(8; +\infty)$. (D) $[8; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Do đó, tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \geq 3$ là $[8; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21.14. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1) = \log_2(2x-1)$ là

(A) $\{2\}$. (B) $\varnothing$. (C) $\{0; 1; 2\}$. (D) $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

$\log_2(x^2-1) = \log_2(2x-1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = 2 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.15. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$ là

(A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = 4$. (D) $x = 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\log_2 5 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2[(x+3)(x-1)]=\log_2 5 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x>1 \\ (x+3)(x-1)=5 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x>1 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=2.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.16. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)+\log_2(x-1)>0$ là

(A) $(5;6)$. (B) $[5;6)$. (C) $(1;6)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-6x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>5.$

Với điều kiện trên, bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)+\log_2(x-1)>0$ tương đương với

$$\begin{aligned}
& -\log_2\left(x^2-6x+5\right)+\log_2(x-1)>0 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(x^2-6x+5\right)<\log_2(x-1) \\
\Leftrightarrow\ & x^2-6x+5<x-1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-7x+6<0 \\
\Leftrightarrow\ & 1<x<6.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(5;6)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.17. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}4$ là

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\leq 4 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 7 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x\leq 7.$

Vì $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 3 < x \leq 7 \end{cases}$ nên ta chọn $x \in \{4; 5; 6; 7\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 21.18. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x-4) = 1$ là

A $x = 3$. B $x = 6$. C $x = 4$. D $x = 5$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 4 \\ \log_3(x-2) - \log_3(x-4) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ \log_3 \dfrac{x-2}{x-4} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{x-2}{x-4} = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ x - 2 = 3x - 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \ x = 5. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 21.19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A $(-1; 6)$. B $\left(\dfrac{5}{2}; 6\right)$. C $(-\infty; 6)$. D $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x - 5 > 0 \\ x + 1 < 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 21.20. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = \log_4(2x)$ là

A $\{2 \pm \sqrt{3}\}$. B $\{2 + \sqrt{3}\}$. C $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. D $\{2 - \sqrt{3}\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2(x-1) = \log_4(2x) \\ \Leftrightarrow\ & 2\log_2(x-1) = \log_2 2x \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 = 2x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được: $x = 2+\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

21.1. C	21.2. C	21.3. A	21.4. D	21.5. C	21.6. B	21.7. B	21.8. A
21.9. D	21.10. B	21.11. C	21.12. B	21.13. D	21.14. A	21.15. A	21.16. A
21.17. B	21.18. D	21.19. D	21.20. B				

DẠNG 22. PHÉP ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n các thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện cho hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

3. Hoán vị

- Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
- Số các hoán vị của n phần tử là $\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$.

4. Chỉnh hợp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.
- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với $1 \leq k \leq n$.

5. Tổ hợp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.
- Số các tổ hợp chập k của n phần tử là $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \leq k \leq n$.
- Một số tính chất của các số C_n^k:

  i) $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

  ii) $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k$ với $1 \leq k < n$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 22 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho tập hợp A có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của A bằng

(A) 225. (B) 30. (C) 210. (D) 105.

Lời giải.

Số tập con gồm hai phần tử của A có 15 phần tử là số tổ hợp chập 2 của 15 phần tử.

Do đó, số tập con gồm hai phần tử của A là $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$.

Chọn đáp án (D) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 22.1. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.
(B) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{P}_n}{k!}$.
(C) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.
(D) $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

Lời giải.

$\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \dfrac{1}{k!} \cdot \mathrm{A}_n^k \Rightarrow \mathrm{A}_n^k = k! \cdot \mathrm{C}_n^k$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2. Số các chỉnh hợp chập 2 của n phần tử là

(A) $n(n-1)$. (B) $2n$. (C) $\dfrac{n(n-1)}{2!}$. (D) $2! \cdot n(n-1)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.3. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A?

(A) A_6^3. (B) P_6. (C) P_3. (D) C_6^3.

Lời giải.

Số tập con có 3 phần tử của tập hợp A gồm 6 phần tử là số tổ hợp chập 3 của 6 phần tử. Do đó, số tập con cần tìm là C_6^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.4. Cho n, $k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k$. Tìm công thức đúng.

(A) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
(B) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.
(C) $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
(D) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$.

Lời giải.

Công thức đúng là $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22.5. Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là

A 20. B 90. C 100. D 45.

Lời giải.

Số tập hợp con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Chọn đáp án D □

Câu 22.6. Cho tập hợp X gồm 10 phần tử. Số các hoán vị của 10 phần tử của tập hợp X là

A 10^{10}. B 10^2. C 2^{10}. D $10!$.

Lời giải.

Số các hoán vị của 10 phần tử là $10!$.

Chọn đáp án D □

Câu 22.7. Cho tập $A = \{1; 2; 3; \ldots; 9; 10\}$. Một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của A là

A $\{1; 2\}$. B $2!$. C A_{10}^2. D C_{10}^2.

Lời giải.

Mỗi tập hợp con gồm 2 phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của tập A. Mà $\{1; 2\}$ là một tập con gồm 2 phần tử của A hay một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của A.

Chọn đáp án A □

Câu 22.8. Công thức nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. B $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{(n-k)!}{k!}$. C $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. D $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lời giải.

Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n là $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.9. Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{P}_n = n!$. B $\mathrm{P}_n = n - 1$. C $\mathrm{P}_n = (n-1)!$. D $\mathrm{P}_n = n$.

Lời giải.

Ta có P_n là kí hiệu số các hoán vị của n phần tử. Do đó $\mathrm{P}_n = n!$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.10. Lớp 12A có 43 học sinh và lớp 12B có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ lớp 12A và 12B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A 43. B 30. C 1290. D 73.

Lời giải.

Tổng số học sinh của hai lớp là $43 + 30 = 73$. Do đó số cách chọn là 73.

Chọn đáp án D □

Câu 22.11. Một học sinh cần mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau và các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

(A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

Lời giải.

Mua một cây bút mực có 8 cách.

Mua một cây bút chì có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, để mua được 1 cây bút mực và 1 cây bút chì ta có $8 \cdot 8 = 64$ cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.12. Một học sinh cần mua một cây bút để viết bài. Bút mực có 8 loại khác nhau, bút chì có 8 loại khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

(A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

Lời giải.

Công việc mua bút có 2 phương án thực hiện độc lập nhau.

Phương án 1: Mua một cây bút mực có 8 cách.

Phương án 2: Mua một cây bút chì có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $8 + 8 = 16$ cách mua một cây bút chì để viết bài

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.13. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ?

(A) C_3^3. (B) C_{10}^3. (C) A_{10}^3. (D) P_3.

Lời giải.

Số cách chọn ra 3 học sinh từ 10 học sinh là C_{10}^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.14. Từ thành phố A có 10 con đường đến thành phố B, từ thành phố B có 7 con đường đến thành phố C. Từ A đến C phải qua B, hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C mà chỉ đi qua B đúng một lần?

(A) 10. (B) 7. (C) 17. (D) 70.

Lời giải.

Để đi từ A đến C ta thực hiện hai hành động liên tiếp.

Hành động 1: Đi từ A đến B có 10 cách.

Hành động 2: Đi từ B đến C có 7 cách.

Theo quy tắc nhân, đi từ A đến C có $10 \cdot 7 = 70$ cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.15. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại, 1 loại nước uống trọng 3 loại. Hỏi có bao nhiêu cách lập thực đơn?

Ⓐ 73. Ⓑ 75. Ⓒ 85. Ⓓ 95.

Lời giải.

Lập thực đơn gồm 3 hành động liên tiếp.

Hành động 1: Chọn 1 món ăn có 5 cách.

Hành động 2: Chọn 1 loại quả có 5 cách.

Hành động 3: Chọn 1 loại nước uống có 3 cách.

Theo quy tắc nhân, có $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ cách lập thực đơn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22.16. Một tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam?

Ⓐ $\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_6^1$. Ⓑ $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^1$. Ⓒ $\mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_6^1$. Ⓓ $\mathrm{A}_4^2 + \mathrm{A}_6^1$.

Lời giải.

Để chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam thì ta thực hiện 2 hành động liên tiếp.

Hành động 1: Chọn 2 học sinh nam có C_4^2 cách.

Hành động 2: Chọn 1 học sinh nữ có C_6^1 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^1$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22.17. Trong một trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả sút luân lưu. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu?

Ⓐ C_{11}^5. Ⓑ A_{11}^5. Ⓒ $5!$. Ⓓ $11!$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn và sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu là một chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy số cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu là A_{11}^5.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22.18. Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 5 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có đúng 2 học sinh?

Ⓐ $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2$. Ⓑ $\mathrm{A}_6^2 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_4^2$. Ⓒ $\mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_4^2$. Ⓓ $\mathrm{A}_6^2 + \mathrm{A}_5^2 + \mathrm{A}_4^2$.

Lời giải.

Chọn 2 học sinh khối 12 có C_6^2 cách.

Chọn 2 học sinh khối 11 có C_5^2 cách.

Chọn 2 học sinh khối 10 có C_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân, có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.19. Một câu lạc bộ có 30 thành viên. Có bao nhiêu cách chọn một ban quản lí gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư kí?

(A) A_{30}^3. (B) C_{30}^3. (C) $30!$. (D) $3!$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 3 người và sắp xếp vào 3 vị trí là một chỉnh hợp chập 3 của 30 thành viên. Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là A_{30}^3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.20. Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra cùng lúc 3 quả cầu từ hộp đó là

(A) 720. (B) 10^3. (C) 120. (D) 3^{10}.

Lời giải.

Số cách chọn cùng lúc 3 quả cầu từ một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt là C_{30}^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22.21. Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng 2 lần. Số cách để chọn ra những màu cần dùng và tô lên bản đồ là

(A) A_6^4. (B) 10. (C) C_6^4. (D) 6^4.

Lời giải.

Số cách chọn 4 màu từ 6 màu và tô vào 4 nước trên bản đồ (không có màu nào được dùng 2 lần) là A_6^4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.22. Có bao nhiêu cách phân công 3 bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật?

(A) 9^3. (B) 3^9. (C) A_9^3. (D) C_9^3.

Lời giải.

Mỗi cách phân công ba bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật là một tổ hợp chập 3 của 9. Nên số cách phân công là C_9^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.23. Cho 20 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

(A) 8000. (B) 1140. (C) 6480. (D) 600.

Lời giải.

Chọn 3 điểm từ 20 điểm ta được một tam giác nên số tam giác được tạo thành từ 20 điểm đã cho là C_{20}^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.24. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy?

(A) 18. (B) 21. (C) 42. (D) 10.

Lời giải.

Số cách lấy 2 viên bi từ 7 viên bi là $\mathrm{C}_7^2 = 21$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.25. Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là

(A) $6! + 4!$. (B) $6! \cdot 4!$. (C) $\mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_{10}^6$. (D) $10!$.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là $10!$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22.26. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập hợp X, hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

(A) 35. (B) 210. (C) 840. (D) 5040.

Lời giải.

Số cách lập số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau từ tập hợp X là $\mathrm{A}_7^3 = 210$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.27. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

(A) 5^2. (B) 2^5. (C) A_5^2. (D) C_5^2.

Lời giải.

Từ 5 chữ số của tập X, ta lấy 2 chữ số bất kì rồi sắp xếp vị trí được một số có hai chữ số. Như vậy có A_5^2 số được tạo thành.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22.28. Giả sử 9 vận động viên tham gia một cuộc thi bơi lội. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba?

(A) 84. (B) 729. (C) 504. (D) 3^9.

Lời giải.

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba là $\mathrm{A}_9^3 = 504$ kết quả.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22.29. Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$?

(A) C_7^3. (B) A_9^3. (C) A_7^3. (D) C_9^3.

Lời giải.

Số tập con gồm 3 phần tử của tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$ là số tổ hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy có C_7^3 tập hợp.

Chọn đáp án A □

Câu 22.30. Một hộp có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho có đúng 1 bi đỏ?

A $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_4^1$.	B $\mathrm{A}_5^1 \cdot \mathrm{A}_{12}^2$.	C $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^2$.	D $\mathrm{A}_5^1 \cdot \mathrm{A}_8^1 \cdot \mathrm{A}_4^1$.

Lời giải.

Chọn 1 bi đỏ có C_5^1 cách.

Chọn 2 bi còn lại có C_{12}^2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^2$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

22.1. B	22.2. A	22.3. D	22.4. C	22.5. D	22.6. D	22.7. A	22.8. A
22.9. A	22.10. D	22.11. D	22.12. A	22.13. B	22.14. D	22.15. B	22.16. B
22.17. B	22.18. A	22.19. A	22.20. C	22.21. A	22.22. D	22.23. B	22.24. B
22.25. D	22.26. B	22.27. C	22.28. C	22.29. A	22.30. C		

DẠNG 23. NGUYÊN HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên **K** nếu $\boxed{F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.}$

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là hằng số.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
• $\int 0\,\mathrm{d}x = C$	
• $\int \mathrm{d}x = x + C$	
• $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	• $\int (ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ (\alpha \neq -1)$
• $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C$	• $\int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot\ln\|ax+b\| + C$
• $\int \alpha^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C,\ (0 < \alpha \neq 1)$	• $\int \alpha^{ax+b} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\alpha^{ax+b}}{\ln\alpha} + C$
• $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	• $\int \mathrm{e}^{(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{(ax+b)} + C$
• $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	• $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$
• $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	• $\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$
• $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	• $\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$
• $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	• $\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 23. Cho $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng** ?

Ⓐ $F'(x) = \dfrac{2}{x^2}$. Ⓑ $F'(x) = \ln x$. Ⓒ $F'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ⓓ $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \left(\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 23.1. Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

(A) $\frac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$. (B) $-\frac{1}{4}\sin(4x+7) + 3$.

(C) $\sin(4x+7) - 1$. (D) $-\sin(4x+7) + x$.

Lời giải.

Ta có $\int \cos(4x+7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(4x+7) + C$ nên hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\frac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là:

(A) $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$. (B) $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$.

(C) $-\frac{x^4+x^2+3}{3x} + C$. (D) $\frac{-x^4+x^2+3}{3x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.3. Tìm $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$

(A) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cos 5x + C$. (B) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

(C) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\cos 5x + C$. (D) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -5\cos 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.4. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x+3)$.

(A) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$. (B) $F(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$.

(C) $F(x) = \sin(2x+3) + C$. (D) $F(x) = -\sin(2x+3) + C$.

Lời giải.

$F(x) = \int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$ là:

(A) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x+1} + C$. (B) $\frac{1}{\ln 3}3^{2x+1} + C$. (C) $\frac{1}{2}3^{2x+1} + C$. (D) $\frac{1}{2}3^{2x+1}\ln 3 + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $\displaystyle\int a^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a} + C$.

Ta có: $\displaystyle\int 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3^{2x+1}}{2\ln 3} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 23.6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \mathrm{e}^x + 1$ là

A. $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^x + x + C$.
B. $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^x + 1 + C$.
C. $F(x) = 2x^3 + \mathrm{e}^x + x + C$.
D. $F(x) = 6x + \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \mathrm{e}^x + 1\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + \mathrm{e}^x + x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 23.7. Công thức nguyên hàm nào sau đây không đúng?

A. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.
B. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$.
C. $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$.
D. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 23.8. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $-3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.
B. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.
C. $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.
D. $3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.9. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $-\sin x + C$.
B. $-\sin x + 3x^2 + C$.
C. $\sin x + 3x^2 + C$.
D. $\cos x + 6x^2 + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

A. $\cos^2 x - \sin x + C$.
B. $\sin^2 x + \sin x + C$.
C. $\cos 2x - \sin x + C$.
D. $-\cos 2x + \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\int(\sin 2x+\cos x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x+C'\\ &= -\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right)+\sin x+C'\\ &= \sin^2 x+\sin x+C \quad \left(C=C'-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 23.11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-1$ là

A $-\mathrm{e}^{x}-x+C$. B $\mathrm{e}^{-x}-x+C$. C $\mathrm{e}^{x}+x+C$. D $-\mathrm{e}^{-x}-x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}-x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 23.12. Khẳng định nào đây đúng?

A $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. B $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$.

C $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. D $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 23.13. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x+4x$ là

A $2^x\ln 2+2x^2+C$. B $\frac{2^x}{\ln 2}+2x^2+C$. C $2^x\ln 2+C$. D $\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Lời giải.

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2^x+4x\right)\mathrm{d}x=\int 2^x\,\mathrm{d}x+\int 4x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+2x^2+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 23.14. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-9$ là:

A $\frac{1}{4}x^4+C$. B $4x^3-9x+C$. C $\frac{1}{2}x^4-9x+C$. D $4x^4-9x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^3-9\right)\mathrm{d}x=2\frac{x^4}{4}-9x+C=\frac{x^4}{2}-9x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.15. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. B $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

C $\int a^x\,\mathrm{d}x=a^x+C\ \ (0<a\neq 1)$. D $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}+C\ \ (x\neq 0)$.

Lời giải.

Ta có $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 23.16. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a;b]$.

(B) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$ (C là hằng số).

(C) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ (C là hằng số) với $x \neq 0$.

(D) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số).

Lời giải.

$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số và $\alpha \neq -1$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

(A) $-\frac{x^4+x^2+3}{3x} + C$.

(B) $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.

(C) $\frac{-x^4+x^2+3}{3x} + C$.

(D) $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-2} - x^2 - \frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23.18. Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

(A) $f(x) = -\sin x$. (B) $f(x) = -\cos x$. (C) $f(x) = \sin x$. (D) $f(x) = \cos x$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là

(A) $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$.

(B) $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$.

(C) $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$.

(D) $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$.

Lời giải.

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23.20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là

(A) $\ln|x-1| + C$. (B) $-\frac{1}{(x-1)^2} + C$. (C) $2\ln|x-1| + C$. (D) $\ln(x-1) + C$.

Lời giải.

Có $\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$.

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là $\ln|x-1| + C$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

23.1. A	23.2. A	23.3. A	23.4. A	23.5. A	23.6. A	23.7. A	23.8. C
23.9. C	23.10. B	23.11. D	23.12. D	23.13. B	23.14. C	23.15. B	23.16. D
23.17. B	23.18. D	23.19. A	23.20. A				

DẠNG 24. TÍCH PHÂN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a < c < b$.
- $k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x$ với $(k \neq 0)$.
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$.
- $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 24 (Đề minh họa BGD 2022-2023).
Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2\right] \mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ -2.

Lời giải.

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: là dạng toán sử dụng tính chất để tính tích phân xác định của hàm số.

2. Hướng giải:

B1. Dựa trên giả thiết $I = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2\right] \mathrm{d}x$, ta tính tích phân $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x$.

B2. Ta có $I = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x$.

Ta có $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2\left(x\Big|_0^2\right) = -2$.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 24.1. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 [3f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, khi đó $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. B. -4. C. 17. D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 [3f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 &\Leftrightarrow 3\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 10\\ &\Leftrightarrow 3\cdot 3 - \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 10\\ &\Leftrightarrow \int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 24.2. Trong các công thức sau đây, công thức nào đúng?

A. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_b^a v\,\mathrm{d}u$.

B. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

C. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

D. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv - \int\limits_b^a v\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Công thức tính tích phân từng phần $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$, $f(3)=5$ và $\int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=6$. Khi đó $f(1)$ bằng

Ⓐ 10.   Ⓑ 11.   Ⓒ 1.   Ⓓ -1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3=6 \Leftrightarrow f(3)-f(1)=6 \Leftrightarrow 5-f(1)=6 \Leftrightarrow f(1)=-1$.

Vậy $f(1)=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$; $F(b)=2$. Tính $F(a)$.

Ⓐ 1.   Ⓑ 3.   Ⓒ -1.   Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $1=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=2-F(a)$. Suy ra $F(a)=2-1=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 24.5. Cho $\int\limits_{-3}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-7$. Tính $\int\limits_{-3}^2 3\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$?

Ⓐ 4.   Ⓑ 21.   Ⓒ -21.   Ⓓ -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-3}^2 3f(x)\,\mathrm{d}x=3\int\limits_{-3}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3\cdot(-7)=-21$.

Chọn đáp án C □

Câu 24.6. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=9$ và $\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-1$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -8.   Ⓑ -10.   Ⓒ 8.   Ⓓ 10.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=9-(-1)=10.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 24.7. Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(2)$ bằng

(A) $1+\dfrac{1}{2}\ln 5$.   (B) $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$.   (C) $1+\ln\dfrac{5}{3}$.   (D) $1+\ln 5$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2)-F(1)$.

Mặt khác $\int\limits_1^2 F'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}\ln 5 - \dfrac{1}{2}\ln 3 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$.

Suy ra $F(2)-F(1) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$.

Do đó $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3} + F(1) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.8. Cho hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c thuộc K. Công thức nào sau đây **sai**?

(A) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a<b<c$.

(C) $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ nên $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1)-F(2)$ bằng

(A) $\int\limits_1^2 [-F(x)]\,\mathrm{d}x$.   (B) $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.   (C) $\int\limits_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$.   (D) $\int\limits_2^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $F(1)-F(2) = F(x)\Big|_2^1 = \int\limits_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24.10. Với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có

(A) $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.   (B) $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.   (D) $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, với $a < b$.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.11. Nếu $\int\limits_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_{-1}^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A -3. B -1. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - (-1) = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 24.12. Nếu $\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. B -2. C 2. D -4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -3 - 1 = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.13. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Giá trị của $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 3. B 1. C -3. D -1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.14. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thoả $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$; $F(2) = 11$. Khi đó $F(1)$ bằng

A 16. B 4. C 6. D 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow F(2) - F(1) = 5 \Leftrightarrow 11 - F(1) = 5 \Leftrightarrow F(1) = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 24.15. Nếu $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int\limits_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -6. (B) -1. (C) -5. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + (-3) = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.16. Nếu $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -7. (B) 3. (C) 7. (D) -10.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a < c < b$, ta có

$$\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.17. Giả sử $\int\limits_{0}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int\limits_{9}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \int\limits_{0}^{9} [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 143$. (B) $I = 58$. (C) $I = 122$. (D) $I = 26$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{9} [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{9}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 26$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.18. Cho $\int\limits_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Khi đó $\int\limits_{2}^{5} [2 - 4f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 36. (B) -36. (C) 34. (D) -34.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{2}^{5} [2 - 4f(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{2}^{5} \mathrm{d}x - 4\int\limits_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(2x\Big|_{2}^{5}\right) - 4 \cdot 10 = 2(5-2) - 40 = -34$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.19. Nếu $\int\limits_{1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = -4$ thì $\int\limits_{0}^{1} [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

(A) 11. (B) 5. (C) -1. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{1} [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = -3 - 2 \cdot (-4) = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a,\ b,\ c\in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 24.21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**.

Ⓐ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$.

Ⓑ $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Lời giải.

Khẳng định $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$ sai.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 24.22. Cho hàm số phức $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;7]$ sao cho $\int\limits_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^7 g(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Giá trị của $\int\limits_1^7 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ -5. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^7 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^7 g(x)\,\mathrm{d}x=2-(-3)=5$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24.23. Cho các số thực $a,\ b$ $(a<b)$. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

Ⓐ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f'(a)-f'(b)$.

Ⓑ $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

Ⓒ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a)$.

Ⓓ $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên R, có $f(8) = 20$; $f(4) = 12$. Tính tích phân $I = \int\limits_4^8 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 16$. (B) $I = 4$. (C) $I = 32$. (D) $I = 8$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_4^8 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_4^8 = f(8) - f(4) = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.25. Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

(A) 5. (B) 29. (C) 19. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và a, b, $c \in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(C) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 24.27. Cho $\int\limits_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^7 h(x)\,\mathrm{d}x = 10$, khi đó $\int\limits_5^7 h(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_5^7 h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^7 h(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_5^7 h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^7 h(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_5^7 h(x)\,\mathrm{d}x = 10 - 4 = 6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.28. Cho $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $I = \int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y$.

(A) $I = -3$. (B) $I = -5$. (C) $I = 5$. (D) $I = 3$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y$.

Suy ra $\int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $f(b) = 5$ và $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $f(a)$ bằng

(A) 4. (B) 6. (C) -4. (D) -6.

Lời giải.

Ta có $1 = \int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = 5 - f(a) \Rightarrow f(a) = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$ ($F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$).

(C) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(D) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ là đúng.

Do $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là sai.

Vì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$ là sai vì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Vì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ là sai vì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(x\Big|_{-a}^{a}\right) = 2a.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.31. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x+2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = \dfrac{5}{2}$. (B) $I = \dfrac{7}{2}$. (C) $I = \dfrac{17}{2}$. (D) $I = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_{-1}^{2} [x+2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right) + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.32. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x+2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = \dfrac{17}{2}$. (B) $I = \dfrac{5}{2}$. (C) $I = \dfrac{11}{2}$. (D) $I = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \left(\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right) + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} + 4 - 3 = \dfrac{5}{2}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.33. Tính $I = \int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \mathrm{e}^3 + \dfrac{1}{2}$. (B) $I = \mathrm{e}^3 - 1$. (C) $I = \mathrm{e} - 1$. (D) $\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_{0}^{1}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{3}.$ □

Câu 24.34. Nếu $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_{2}^{1} \pi f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 5π. (B) $\dfrac{\pi}{5}$. (C) -5π. (D) $\dfrac{-\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{2}^{1} \pi f(x)\,\mathrm{d}x = -\pi\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -5\pi.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24.35. Cho $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int\limits_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, khi đó tích phân $\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 7. (B) 1. (C) 12. (D) -12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -3 + 4 = 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 24.36. Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^1 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 2. B 6. C 5. D 3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 3 = 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 24.37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $f(b) = 5$ và $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{5}$. Tính $f(a)$.

A $f(a) = \sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 3\right)$. B $f(a) = 3\sqrt{5}$.

C $f(a) = \sqrt{5}\left(3 - \sqrt{5}\right)$. D $f(a) = \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 3\right)$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \left(f(x)\Big|_a^b\right) = f(b) - f(a) = 3\sqrt{5}.$

Suy ra $f(a) = f(b) - 3\sqrt{5} = 5 - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 3\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 24.38. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 (2x + 1)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2$. B $I = 4$. C $I = 5$. D $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 (2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left((x^2 + x)\Big|_0^2\right) = 4 + 2 = 6.$

Chọn đáp án D □

Câu 24.39. Tích phân $\int\limits_1^2 3^{x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{2}{\ln 3}$. B $2\ln 3$. C $\dfrac{3}{2}$. D 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 3^{x-1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 3^{x-1}\,\mathrm{d}(x-1) = \left(\dfrac{3^{x-1}}{\ln 3}\Big|_1^2\right) = \dfrac{2}{\ln 3}.$

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

24.1. A	24.2. B	24.3. D	24.4. A	24.5. C	24.6. D	24.7. B	24.8. D
24.9. C	24.10. D	24.11. C	24.12. D	24.13. D	24.14. C	24.15. B	24.16. B
24.17. D	24.18. D	24.19. B	24.20. A	24.21. A	24.22. C	24.23. B	24.24. D
24.25. B	24.26. A	24.27. A	24.28. B	24.29. A	24.30. A	24.31. A	24.32. B
24.34. C	24.35. B	24.36. C	24.37. A	24.38. D	24.39. A		

DẠNG 25. NGUYÊN HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.
  Họ nguyên hàm của $f(x)$ trên K là $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

2. Tính chất

- $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Một số công thức nguyên hàm cơ bản

- $\int 0\,\mathrm{d}x = C$,
- $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$,
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \longrightarrow \int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$,
- $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \longrightarrow \int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$,
- $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C \longrightarrow \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b} + C$,
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \longrightarrow \int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$,
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \longrightarrow \int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$,
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C \longrightarrow \int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$,
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C \longrightarrow \int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C$,
- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \longrightarrow \int \mathrm{e}^{ax+b} = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$,
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \longrightarrow \int a^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 25 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + x^2 + C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + x^2 + C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \dfrac{x^2}{2} + C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 25.1. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin x$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 25.2. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 4^x$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4^x \ln 4 + C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4^{x+1} + C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^{x+1}}{x+1} + C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 4^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 25.3. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 2x$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 25.4. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + 3$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2 + 3x + C$.
Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.
Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$.
Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2+3x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 25.5. Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2x+1}\mathrm{e}^{2x}-x^2+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-x^2+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}-x^2+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x}-2+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{2x}-2x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-x^2+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 25.6. Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|2x+1|+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|2x+1|+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 25.7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$.

B. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$.

C. $\int \,\mathrm{d}x = x+C$.

D. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ chỉ đúng khi $n\neq -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 25.8. Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=\sin(2x+1)$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cos(2x+1)+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\cos(2x+1)+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 25.9. Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=-4\sin 2x+2\cos x-\mathrm{e}^x$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4\cos 2x-2\sin x-\mathrm{e}^x+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cos 2x+2\sin x-\mathrm{e}^x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -8\cos 2x+2\sin x-\mathrm{e}^x+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 8\cos 2x+2\sin x-\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-4\sin 2x+2\cos x-\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = 2\cos 2x+2\sin x-\mathrm{e}^x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 25.10. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

(A) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.
(B) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x + C$.
(C) $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.
(D) $\displaystyle\int \left(2^x + \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \left(2^x + \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \mathrm{e}^x + C$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25.11. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ là

(A) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C$.
(B) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - x^3 + 5x + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - 6x + C$.
(D) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - 3x^2 + 5\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25.12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\displaystyle\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + C$.
(B) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.
(C) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} + C$.
(D) $\displaystyle\int x^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}x^8 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25.13. $F(x) = \sin 2x$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = \cos 2x$. (B) $f(x) = 2\cos 2x$. (C) $f(x) = -2\cos 2x$. (D) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, nên $F(x) = \sin 2x$ là nguyên hàm của $f(x) = 2\cos 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25.14. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^2 - \dfrac{1}{x^2} + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 - \dfrac{1}{x^2} + C.$
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^2 + \ln|x| + C.$
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \ln|x| + C.$

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(2x + \dfrac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = x^2 + \ln|x| + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25.15. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25.16. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 3x + \cos 4x$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos x + \dfrac{1}{4}\sin x + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{4}\sin 4x + C.$
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cos 3x - 4\sin 4x + C.$
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cos 3x - \dfrac{1}{4}\sin 4x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin 3x + \cos 4x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{4}\sin 4x + C.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25.17. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C.$
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C.$
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25.18. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x + 1 + C.$
(C) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + x^2 + x + C.$
(D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + C.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25.19. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 7^x$ là

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C.$
(B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 7^x \ln 7 + C$.   Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 7^{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25.20. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ là

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{(1+x)^2} + C$.   Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+x) + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \log|1+x| + C$.   Ⓓ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|1+x| + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x| + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN

25.1. C	25.2. D	25.3. B	25.4. C	25.5. B	25.6. C	25.7. D	25.8. A
25.9. B	25.10. D	25.11. A	25.12. C	25.13. B	25.14. D	25.15. C	25.16. B
25.17. B	25.18. A	25.19. A	25.20. D				

DẠNG 26. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý:

- $f(x)$ **đồng biến** trên K: đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải.
- $f(x)$ **nghịch biến** trên K: đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 26 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				0		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.   B. $(3; +\infty)$.   C. $(-\infty; 1)$.   D. $(1; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 26.1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0\,;\,2)$. Ⓑ $(0\,;\,+\infty)$. Ⓒ $(-2\,;\,0)$. Ⓓ $(2\,;\,+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 26.2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(3; +\infty)$. Ⓒ $(1; 3)$. Ⓓ $(-2; -2)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên đã cho nhận thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 26.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(-1; 0)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 26.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; 3)$.
(B) $(-3; 2)$.
(C) $(2; +\infty)$.
(D) $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2\,;\,1)$.
(B) $(-2; 2)$.
(C) $(-\infty;\,-2)$.
(D) $(1\,;\,+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-2\,;\,1)$ và $(1; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-2;\ 0)$. **B** $(-\infty;\ -2)$. **C** $(0;\ 2)$. **D** $(0;\ +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;\ 0)$ và $(2;\ +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26.8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				3		

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $(0; +\infty)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(-\infty; 5)$. **D** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 26.9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	
			2				$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A $(2; +\infty)$. **B** $(-\infty; -2)$. **C** $(2; 3)$. **D** $(-2; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 26.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-1		

(A) $(0\,;\,+\infty)$. (B) $(0\,;\,1)$. (C) $(-3\,;\,-2)$. (D) $(-1\,;\,+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;\,0)$ và $(1;+\infty)$.
Ta có $(-3\,;\,-2) \subset (-\infty\,;\,0)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-3\,;\,-2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26.11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y			0		|| $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ||		0		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -3)$. (B) $(-3; -2)$. (C) $(-3; -1)$. (D) $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26.12. Cho hàm số $f(x)$có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			2				2		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-2; 3)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26.13. Cho hàm số $y = f(x)$có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ vừa nghịch biến vừa đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

x	$-\infty$	-2	-1		1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án D □

Câu 26.14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	3

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26.15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 1)$. **B** $(-2; 2)$. **C** $(0; 2)$. **D** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 26.16. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A $(2; 3)$. **B** $(-2; 3)$. **C** $(-3; +\infty)$. **D** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Theo BBT hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 26.17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 0)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(2; +\infty)$. **D** $(-2; 2)$.

Lời giải.

Theo BBT hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 26.18. Cho hàm số $f(x)$có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. **B** $(-1;0)$. **C** $(-2;0)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 26.19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 26.20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $y' > 0$, $\forall x \neq -1$.

Từ đó suy ra hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

26.1. A	26.2. C	26.3. D	26.4. D	26.5. B	26.6. A	26.7. A	26.8. D	26.9. B	26.10. C
26.11. B	26.12. D	26.13. D	26.14. A	26.15. C	26.16. A	26.17. B	26.18. B	26.19. C	26.20. A

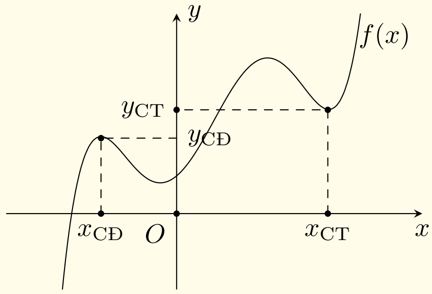
DẠNG 27. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.



2. Chú ý

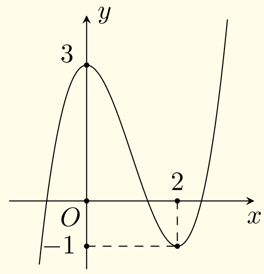
a) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là $y_{CĐ}$ (y_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị.

b) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 27 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là



Ⓐ -1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

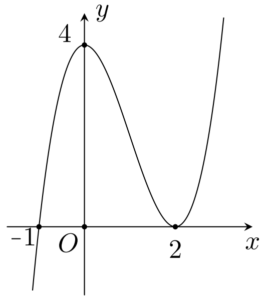
Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có giá trị cực đại là $y_{CĐ} = 3$.

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 27.1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



(A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$. (D) Hàm số có hai điểm cực trị.

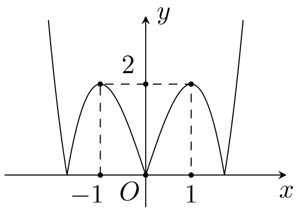
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ nên mệnh đề "Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

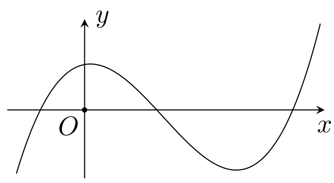
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

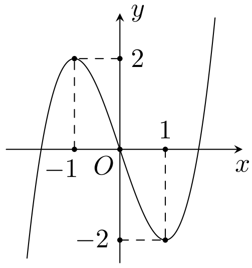
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực đại của hàm số.

Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 2$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 27.5.

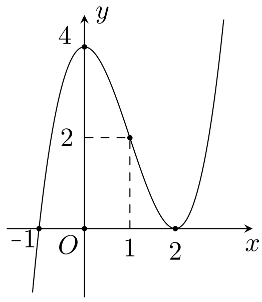
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Do đó hàm số $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.

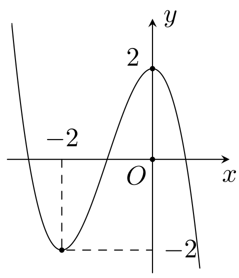
Chọn đáp án D □

Câu 27.6.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $x = -2$ và $x = 0$.

Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 1$.



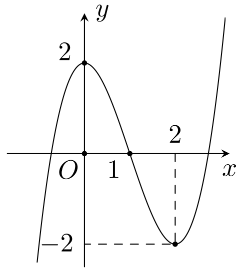
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 27.7.

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



(A) $x = 0$. (B) $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.

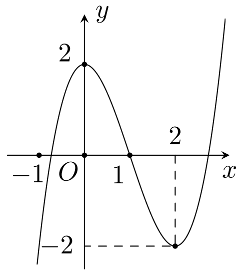
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.8.

Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị là x_1, x_2. Tích x_1x_2 bằng



(A) 4. (B) 0. (C) -4. (D) -2.

Lời giải.

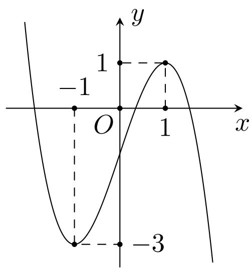
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $f(x)$ có điểm cực đại $x = 0$ và điểm cực tiểu $x = 2$.

Vậy tích các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $0 \times 2 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.9.

Cho đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số là



(A) 1. (B) 4. (C) -1. (D) -3.

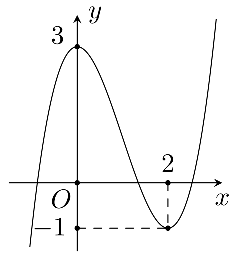
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy được điểm cực đại của đồ thị có tọa độ là $(1; 1)$ nên giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) Giá trị cực đại của hàm số là 0.

(B) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

(C) Điểm cực tiểu của hàm số là -1.

(D) Điểm cực đại của hàm số là 3.

Lời giải.

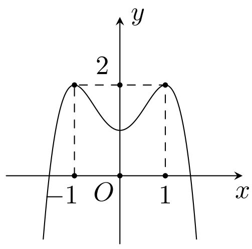
Từ đồ thị ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.11.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số là

(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.



Lời giải.

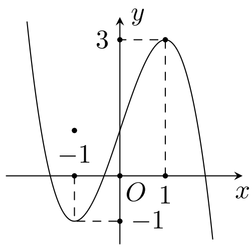
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị cực đại của hàm số bằng

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) -1.



Lời giải.

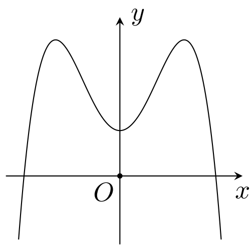
Từ đồ thị ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.13.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.



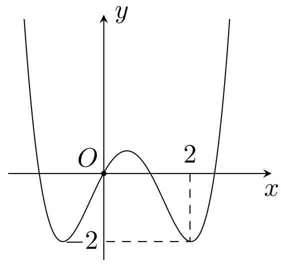
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27.14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) Hàm số có hai điểm cực trị âm và một điểm cực trị dương.

(B) Hàm số có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.

(C) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

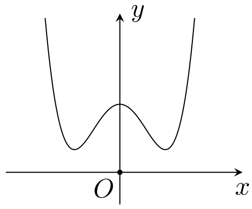
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.15.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



(A) 2.　(B) 1.　(C) 3.　(D) 0.

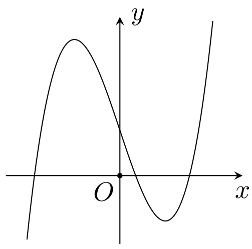
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.16.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



(A) 2.　(B) 0.　(C) 3.　(D) 1.

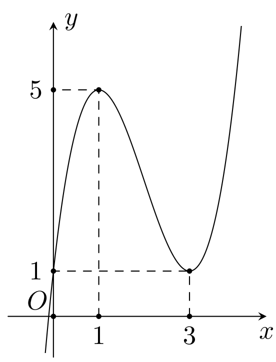
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực tiểu của hàm số là



(A) 2.　(B) 0.　(C) 5.　(D) 1.

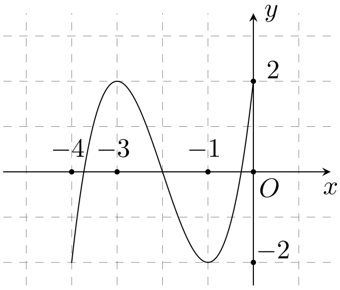
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\text{CT}} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 27.18.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-4; 0]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?



A $x = -2$.   B $x = -1$.   C $x = -3$.   D $x = 2$.

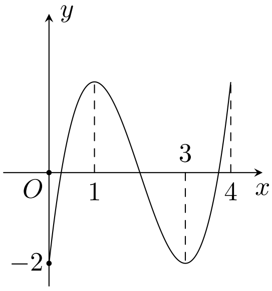
Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 27.19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.   B Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.   D Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

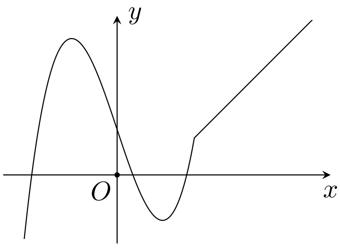
Lời giải.

Mệnh đề "Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 27.20.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là



A 0.   B 1.   C 2.   D 3.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

27.1. C	27.2. D	27.3. A	27.4. B	27.5. D	27.6. C	27.7. D	27.8. B
27.9. A	27.10. B	27.11. D	27.12. B	27.13. C	27.14. B	27.15. A	27.16. A
27.17. D	27.18. B	27.19. A	27.20. B				

DẠNG 28. LÔGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết $\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b}$

a)
- $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b$, $\log_a(a^\alpha) = \alpha$

b) Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:
- $\log_a(b_1b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

c) Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:
- $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- Đặc biệt: với $a, b > 0$, $a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{a} = -\log_a b$

d) Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0$, $a \neq 1$, với mọi α ta có:
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

e) Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1$, $c \neq 1$, ta có:
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

f) Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên
- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10
  Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số e
  Viết: $\log_e b = \ln b$ với $e \approx 2{,}71828\ldots$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 28 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a) - \ln(2a)$ bằng

A. $\ln a$. B. $\ln \dfrac{2}{3}$. C. $\ln(6a^2)$. D. $\ln \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\ln(3a) - \ln(2a) = \ln\left(\dfrac{3a}{2a}\right) = \ln\dfrac{3}{2}$. □

Câu 28.1. Với a là số nguyên dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{2}} a^3$ bằng

(A) $-3\log_2 a$. (B) $3 - \log_2 a$. (C) $\dfrac{3}{2}\log_2 a$. (D) $3\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} a^3 = 3\log_{2^{-1}} a = -3\log_2 a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \sqrt{a}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}\log_3 a$. (B) $\dfrac{1}{2} + \log_3 a$. (C) $2\log_3 a$. (D) $-\dfrac{1}{2}\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 \sqrt{a} = \log_3 a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_3 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng

(A) $1 - \log_3 a$. (B) $3 - \log_3 a$. (C) $\dfrac{1}{\log_3 a}$. (D) $1 + \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.4. Với a là số thực dương khác 1, giá trị $\log_a(a^3\sqrt[4]{a})$ bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) 7 . (C) 12 . (D) $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(a^3\sqrt[4]{a}) = \log_a\left(a^3 \cdot a^{\frac{1}{4}}\right) = \log_a a^{3+\frac{1}{4}} = \log_a a^{\frac{13}{4}} = \dfrac{13}{4}\log_a a = \dfrac{13}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28.5. Với mọi a, b, x là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

(A) $x = 5a + 3b$. (B) $x = a^5 + b^3$. (C) $x = a^5b^3$. (D) $x = 3a + 5b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2(a^5b^3) \Rightarrow x = a^5b^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.6. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $A = \log_a\left(a^3\sqrt{a^7}\right)$ là

(A) 3. (B) $\dfrac{7}{2}$. (C) $\dfrac{13}{2}$. (D) $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a\left(a^3\sqrt{a^7}\right)=\log_a\left(a^3a^{\frac{7}{2}}\right)=\log_a a^{\frac{13}{2}}=\dfrac{13}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28.7. Cho hai số thực dương x, $y>1$ thoả mãn $y=x\sqrt{x}$. Giá trị của $\log_x\left(x^2y\right)$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. B. $\dfrac{8}{3}$. C. 3. D. $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_x\left(x^2y\right)=\log_x x^2+\log_x y=2\log_x x+\log_x x\sqrt{x}=2+\log_x x^{\frac{3}{2}}=2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28.8. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_2\left(\dfrac{a^2}{4}\right)$ bằng

A. $2(1-\log_2 a)$. B. $2\log_2 a-1$. C. $2(\log_2 a-1)$. D. $2(\log_2 a+1)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{a^2}{4}\right)=2\log_2 a-2=2(\log_2 a-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28.9. Cho a là số thực dương $a\neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=1$. B. $P=9$. C. $P=\dfrac{1}{3}$. D. $P=3$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3=\log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 28.10. Với a, b là hai số thực dương tuỳ ý, $\log_3\left(a^3\sqrt{b}\right)$ bằng

A. $3\log_3 a+\dfrac{1}{2}\log_3 b$. B. $3\log_3 a+2\log_3 b$. C. $\dfrac{3}{2}\log_3(ab)$. D. $\dfrac{3}{2}\log_3(a+b)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(a^3\sqrt{b}\right)=\log_3 a^3+\log_3\sqrt{b}=3\log_3 a+\dfrac{1}{2}\log_3 b$.

Chọn đáp án A □

Câu 28.11. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_3 a=\log_{27}\left(a^2\sqrt{b}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a=b$. B. $a^2=b$. C. $a=b^2$. D. $a^3=b$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3 a=\log_{27}\left(a^2\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow\log_3 a=\frac{1}{3}\log_3\left(a^2\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow 3\log_3 a=\log_3\left(a^2\sqrt{b}\right)$$

$\Leftrightarrow\log_3 a^3=\log_3\left(a^2\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt{b}\Leftrightarrow a^2=b.$

Chọn đáp án B □

Câu 28.12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

(A) $\frac{1}{2}\log_2 a$. (B) $2+\log_2 a$. (C) $2\log_2 a$. (D) $\frac{1}{2}+\log_2 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.13. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{3}}(9a^2)$ bằng

(A) $-2-2\log_3 a$. (B) $-2-2\log_{\frac{1}{3}} a$. (C) $2+2\log_{\frac{1}{3}} a$. (D) $2+2\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(9a^2) = -\log_3(9a^2) = -\left(\log_3 9+\log_3 a^2\right) = -(2+2\log_3 a) = -2-2\log_3 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.14. Cho $0<a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)$ là

(A) 3. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)=\log_a a+\log_a\sqrt[3]{a^2}=1+\log_a a^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.15. Cho a là số thực dương tùy ý. Giá trị của $\log_2(4a^2)$ bằng

(A) $4+\frac{1}{2}\log_2 a$. (B) $2(\log_2 a+1)$. (C) $2+\log_2 a$. (D) $8\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(4a^2)=\log_2 4+\log_2 a^2=2+2\log_2 a=2(1+\log_2 a)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.16. Cho a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{a^2}\right)$ bằng

(A) $1+2\ln a$. (B) $1-2\ln a$. (C) $1+\ln(2a)$. (D) $1-\ln(2a)$.

Lời giải.

Với $a>0$, ta có: $\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{a^2}\right)=\ln\mathrm{e}-\ln a^2=1-2\ln a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.17. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}\cdot b^3=27$. Giá trị của $\log_3 a+6\log_3 b$ bằng

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{a}\cdot b^3=27 \Leftrightarrow \sqrt{a}=\left(\frac{3}{b}\right)^3 \Rightarrow \log_3\sqrt{a}=\log_3\left(\frac{3}{b}\right)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 a=3(1-\log_3 b)\Rightarrow \log_3 a+3\log_3 b=6$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.18. Giá trị của $\log_2(4\sqrt{2})$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) 4. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(4\sqrt{2}) = \log_2\left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.19. Với a là số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_{a^2} a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.20. Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) 4 . (D) -4.

Lời giải.

Xét $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_{a^3} a^5 - \log_{a^3} b^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{3} - \frac{1}{12}\log_a b = 2 \Leftrightarrow \log_a b = -4$.

Chọn đáp án (D) □

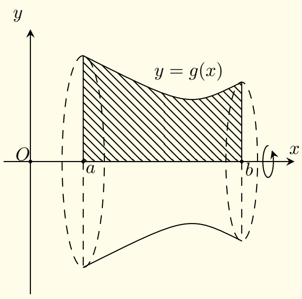
BẢNG ĐÁP ÁN

28.1. B	28.2. A	28.3. A	28.4. D	28.5. C	28.6. C	28.7. D	28.8. C
28.9. B	28.10. A	28.11. B	28.12. C	28.13. A	28.14. B	28.15. B	28.16. B
28.17. B	28.18. A	28.19. B	28.20. D				

DẠNG 29. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

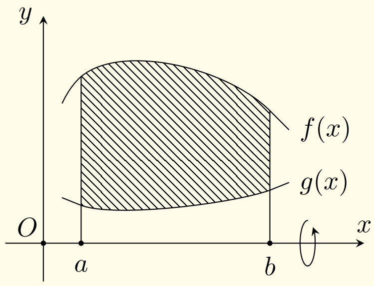
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox



$$\begin{cases} (C)\colon y = f(x) \\ (Ox)\colon y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \, \mathrm{d}x}$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 29 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 2x$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\dfrac{16}{15}$. Ⓑ $\dfrac{16\pi}{9}$. Ⓒ $\dfrac{16}{9}$. Ⓓ $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Khi đó $V=\pi\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 29.1. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. (B) $V=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$. (C) $\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$. (D) $V=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.2. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2019x+2020}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$; $x=1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $V=\int\limits_0^1(2019x+2020)\,\mathrm{d}x$. (B) $V=\pi\int\limits_0^1(2019x+2020)\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\int\limits_0^1\sqrt{2019x+2020}\,\mathrm{d}x$. (D) $V=\pi\int\limits_0^1\sqrt{2019x+2020}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{2019x+2020}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1(2019x+2020)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 29.3. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\cdot\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $\mathscr{H}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

(A) $V=\pi\int\limits_1^2(x\cdot\ln x)\,\mathrm{d}x$. (B) $V=\int\limits_1^2(x\cdot\ln x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\int\limits_1^2(x\cdot\ln x)^2\,\mathrm{d}x$. (D) $V=\pi\int\limits_1^2(x\cdot\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $(H):\begin{cases} y = x\cdot \ln x \\ y=0 \\ x=1; x=2\end{cases}$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức $V=\pi\int\limits_1^2 (x\cdot\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29.4. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x}{4}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình $\mathscr{D}$ quanh trục Ox.

(A) $\dfrac{15\pi}{8}$. (B) $\dfrac{21\pi}{16}$. (C) $\dfrac{21}{16}$. (D) $\dfrac{15}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình $\mathscr{D}$ quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_1^4\left(\frac{x}{4}\right)^2\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi x^3}{48}\right|_1^4=\frac{21\pi}{16}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.5. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$,$y=0$, $x=1$, $x=3$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V=\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$. (B) $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

(C) $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. (D) $V=\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.6. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ được giới hạn bởi các đường $f(x)=\sqrt{2x+1}, Ox, x=0, x=1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ xung quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $V=\pi\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. (B) $V=\int\limits_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\pi\int\limits_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x$. (D) $V=\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (2x+1)\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 29.7. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \cdot \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$. B. $V = \pi \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$. C. $V = \pi \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$. D. $V = \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^1 (x\mathrm{e}^x)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.8. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ bằng

A. $\pi\mathrm{e}^2$. B. $\mathrm{e}^2 - 1$. C. $\pi\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$. D. $\pi(\mathrm{e} - 1)$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \pi \cdot \mathrm{e}^x\Big|_0^2 = \pi\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29.9. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\cos x$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int\limits_0^\pi \cos^2 x\, \mathrm{d}x$. B. $V = \pi \left|\int\limits_0^\pi (-\cos x)\, \mathrm{d}x\right|$.

C. $V = \pi \int\limits_0^\pi |\cos x|\, \mathrm{d}x$. D. $V = \int\limits_0^\pi \cos^2 x\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức

$$V = \pi \int\limits_0^\pi (-\cos x)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^\pi \cos^2 x\, \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 29.10. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^3 - x^2 + 1\right)\, \mathrm{d}x$. B. $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^3 - x + 1\right)\, \mathrm{d}x$.

(C) $V = \int\limits_0^2 \left(x^3 - x + 1\right)^2 \mathrm{d}x$.
(D) $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^3 - x + 1\right)^2 \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^3 - x + 1\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29.11. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng $\mathscr{H}$ quay quanh trục Ox bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$.
(B) $2\ln 2$.
(C) $2\pi \ln 2$.
(D) $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng $\mathscr{H}$ quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29.12. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V = \pi \int\limits_0^1 (2x+1)\, \mathrm{d}x$.
(B) $V = \int\limits_0^1 (2x+1)\, \mathrm{d}x$.
(C) $V = \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\, \mathrm{d}x$.
(D) $V = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (2x+1)\, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.13. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và các đường thẳng $x = 0$; $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình $\mathscr{H}$ quay xung quanh trục Ox.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.
(B) $\sqrt{\pi}$.
(C) $\dfrac{\pi}{3}$.
(D) π.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay cần tìm là $V = \pi \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$ (đvtt).

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.14. Gọi $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$. (B) $\pi(e^2-1)$. (C) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$. (D) $\pi(e^2+1)$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi \int\limits_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.15. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = \pi$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi^2}{2}$. (B) $\frac{\pi^2}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.16. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

(A) $\frac{41\pi}{7}$. (B) $\frac{8\pi}{7}$. (C) $\frac{81\pi}{10}$. (D) $\frac{85\pi}{10}$.

Lời giải.

Ta có $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi\int\limits_0^3 \left(3x-x^2\right)^2\,dx = \pi\int\limits_0^3 \left(9x^2-6x^3+x^4\right)\,dx = \pi\left(3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.17. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ quay xung quanh trục Ox.

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\pi}{5}$. (D) $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi\int\limits_0^1 \left(x^2\right)^2\,dx = \pi\int\limits_0^1 x^4\,dx = \pi\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.18. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi cho $\mathscr{D}$ quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=(\pi-1)\pi$. (B) $V=(\pi+1)\pi$. (C) $V=\pi-1$. (D) $V=\pi+1$.

Lời giải.

Ta có

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.19. Kí hiệu $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và $y=0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng $\mathscr{H}$ khi quay quanh trục Ox.

(A) $\frac{19\pi}{15}$. (B) $\frac{17\pi}{15}$. (C) $\frac{18\pi}{15}$. (D) $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$

Thể tích của vật thể cần tính là

$$V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29.20. Cho hình phẳng $\mathscr{H}$ giới hạn bởi các đường $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi+2}{8}$. (B) $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$. (C) $\frac{\pi^2+1}{4}$. (D) $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi(\pi+2)}{8}.$$

Chọn đáp án (B) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

29.1. B	29.2. B	29.3. D	29.4. B	29.5. C	29.6. C	29.7. B	29.8. C
29.9. A	29.10. D	29.11. D	29.12. A	29.13. A	29.14. C	29.15. A	29.16. C
29.17. C	29.18. B	29.19. D	29.20. B				

DẠNG 30. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

1.1. Khái niệm

- Góc giữa 2 mặt phẳng là góc được tạo bởi hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Trong không gian 3 chiều, góc giữa 2 mặt phẳng còn được gọi là 'góc khối', là phần không gian bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng. Góc giữa 2 mặt phẳng được đo bằng góc giữa 2 đường thẳng trên mặt 2 phẳng có cùng trực giao với giao tuyến của 2 mặt phẳng.

1.2. Tính chất

- Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0 độ;
- Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0 độ.

2. Cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng

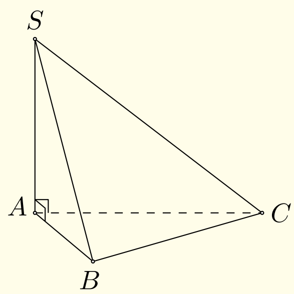
Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng, chúng ta thường áp dụng những cách sau: Gọi P là mặt phẳng 1, Q là mặt phẳng 2.

- **Trường hợp 1**: Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song hoặc trùng nhau thì góc của 2 mặt phẳng bằng $0°$;
- **Trường hợp 2**: Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ không song song hoặc trùng nhau.
    - *Cách 1*: Dựng 2 đường thẳng n và p vuông góc lần lượt với 2 mặt phẳng (P), (Q). Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) là góc giữa 2 đường thẳng n và p.
    - *Cách 2*: Để xác định góc giữa 2 mặt phẳng đầu tiên bạn cần xác định giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng (P) và (Q). Tiếp theo, bạn tìm một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng (P), (Q) và cắt 2 mặt phẳng tại các giao tuyến a, b. Khi đó, góc giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) là góc giữa a và b.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 30 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $SA = AB$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



(A) 60°. (B) 30°.

(C) 90°. (D) 45°.

Lời giải.

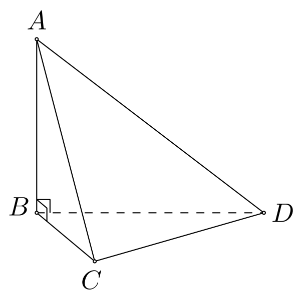
Ta có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$ nên $SB \perp BC$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SBA} = 45^\circ$ ($\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB$).

Chọn đáp án (D) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 30.1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là



(A) 90°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 120°.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp (BCD) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \perp (BCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là 90°

Chọn đáp án (A) □

Câu 30.2. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Nếu (P) và (Q) song song nhau thì α bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 0°.

Lời giải.

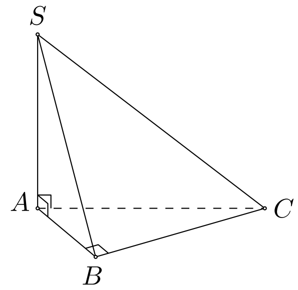
A sai vì góc của hai mặt phẳng từ 0° đến 90°.

B sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 90° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

C sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 60° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30.3. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?



(A) $\widehat{ASB}$. (B) $\widehat{SCB}$. (C) $\widehat{SBA}$. (D) $\widehat{SCA}$.

Lời giải.

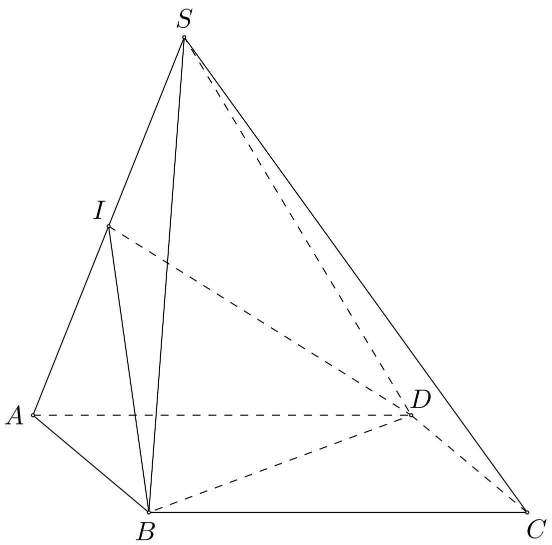
Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SB; AB}\right) = \widehat{SBA}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30.4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ và độ dài các cạnh đáy bằng a, $SA = SB = SC = SD = a$. Tính cos góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm đoạn SA. Ta có tam giác SAD và tam giác SAB đều.

Suy ra $BI \perp SA$, $DI \perp SA$.

Do đó, $\left(\widehat{(SAB), (SAD)}\right) = (\widehat{BI, DI})$.

Áp dụng định lý cosin vào tam giác BID ta được:

$$\begin{aligned} \cos\widehat{BID} &= \frac{IB^2 + ID^2 - BD^2}{2 \cdot IB \cdot ID} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}. \end{aligned}$$

Suy ra góc $\cos\overline{(SAB), (SAD)} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.5. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì α bằng

(A) 180°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 0°.

Lời giải.

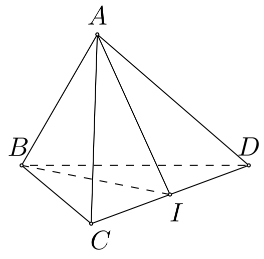
A sai vì góc của hai mặt phẳng từ 0° đến 90°.

B sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 90° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

C vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 60° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau

Chọn đáp án (D) □

Câu 30.6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi Ilà trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây sai?



A $(ACD) \perp (AIB)$.

B Góc giữa 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{(AI;BI)}$.

C $(BCD) \perp (AIB)$.

D Góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

Lời giải.

Nếu AB không vuông góc với (BCD) nên góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (ABD) không thể là góc $\widehat{CBD}$.

Xét đáp án B có:

$\left.\begin{array}{l} CD \perp AI \\ CD \perp BI \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (AIB)$;$CD \subset (BCD)$ nên $(BCD) \perp (AIB)$. B đúng.

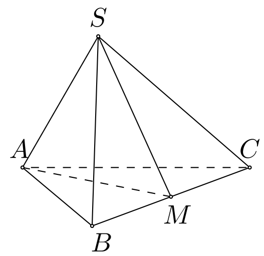
Chứng minh tương tự $(ACD) \perp (AIB)$. D đúng.

Xét đáp án A:

$\left.\begin{array}{l} CD \perp AI \\ CD \perp BI \\ CD = (ACD) \cap (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Góc giữa 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc giữa $\widehat{(AI;BI)}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



A $60°$. **B** $90°$. **C** $45°$. **D** $30°$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $AM \perp BC$ tại M.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAM) \perp BC \\ (SAM) \cap (SBC) = SM \\ (SAM) \cap (ABC) = AM \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SBC), (ABC)} = \left(\widehat{SM, AM}\right)$.

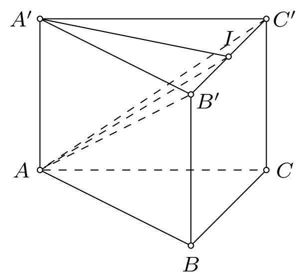
Suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc $\widehat{SMA}$.

Xét tam giác ABC ta có $BC = AB.\sqrt{2} = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45°$.

Chọn đáp án C □

Câu 30.8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.



(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) $\dfrac{3\pi}{2}$. (C) $\dfrac{\pi}{6}$. (D) $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

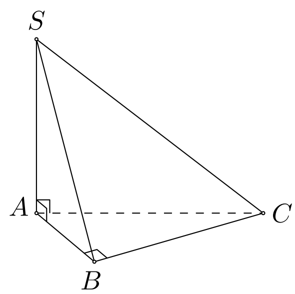
Gọi I là trung điểm của $B'C'$ ta có $\begin{cases} AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C');(A'B'C')) = \widehat{(AI;A'I)} = \widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan\widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{A'I} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{AIA'} = \widehat{((AB'C'),(ABC))} = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC)và (ABC) là



(A) $60°$. (B) $90°$. (C) $30°$. (D) $45°$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$.

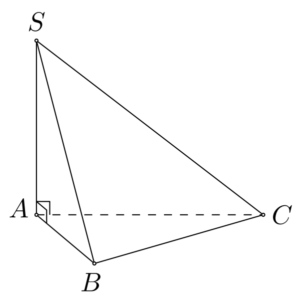
Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

$\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30.10. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).



(A) $60°$. (B) $45°$. (C) $30°$. (D) $90°$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

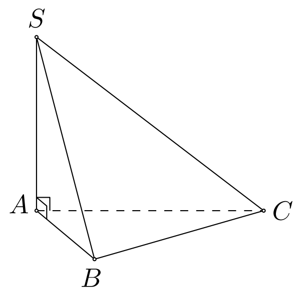
Ta có: $\begin{cases} (SAB)\cap(SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SAB),(SAC)} = \widehat{(AB,AC)}$.

Xét $\triangle ABC$ có $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$.

Vậy $\widehat{(SAB),(SAC)} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 30.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60°. Độ dài cạnh SA bằng



A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\dfrac{a}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC, khi đó $BC \perp AI$.

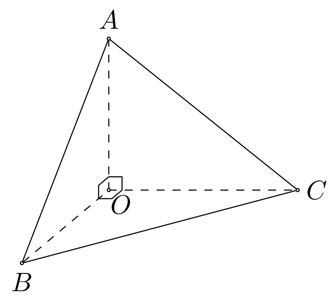
Mặt khác $BC \perp AI$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SIA}$.

Tam giác SIA vuông tại A nên $\tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = IA.\tan\widehat{SIA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.12. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).



A. 90°. B. 60°. C. 30°. D. 45°.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow \widehat{(OBC),(ABC)} = \widehat{(OI, AI)} = \widehat{OIA}$.

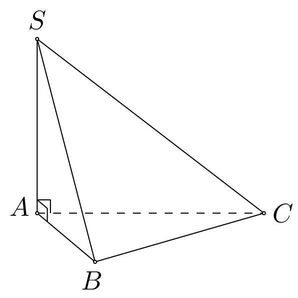
Ta có: $OI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \dfrac{OA}{OI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{(OBC),(ABC)} = 30^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 30.13. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).



Ⓐ 60°. Ⓑ 150°. Ⓒ 30°. Ⓓ 120°.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA, AB \subset (SAB) \\ AC \perp SA, AC \subset (SAC) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(SAB),(SAC)}) = (AB, AC)$.

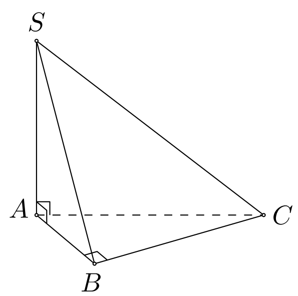
Xét tam giác ABC ta có: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$.

Vậy $(\widehat{(SAB),(SAC)}) = (AB, AC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30.14. Cho hình chóp $S.ABC$có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi Ilà trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC)và (ABC) là góc nào sau đây?



Ⓐ $\widehat{SIA}$. Ⓑ $\widehat{SBA}$. Ⓒ $\widehat{SCA}$. Ⓓ $\widehat{SCB}$.

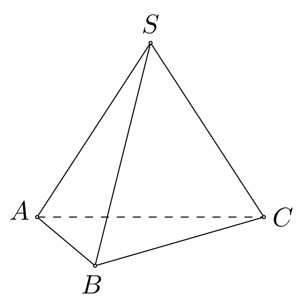
Lời giải.

$(SBC) \cap (ABC) = BC$; $BC \perp BA$; $BC \perp SA$nên $BC \perp (SAB)$

Vậy $(\widehat{(SBC);(ABC)}) = (\widehat{SB;AB}) = \widehat{SBA}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30.15. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là.



Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BCvà Olà tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Góc giữa cạnh bên SAvà mặt đáy (ABC) là 60°.

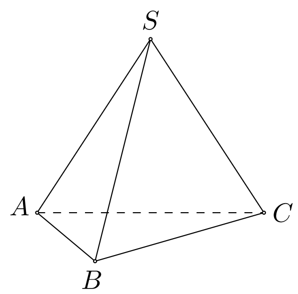
$\Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ \Rightarrow SO = OA.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC)là $\widehat{SMO}$.

Ta có $\cos\widehat{SMO} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30.16. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng



A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C $\dfrac{1}{2}$. D $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a.

Gọi H là tâm của tam giácABC. Khi đó $DH\perp(ABC)$ tại H.

Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó góc giữa mặt phẳng (DBC) và (ABC) là góc $\widehat{DIH}$

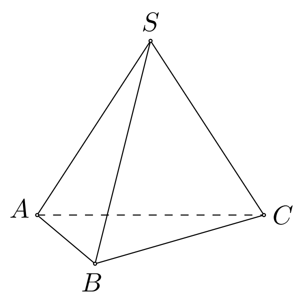
Ta có $\cos\left(\widehat{(ABC),(DBC)}\right) = \cos\widehat{DIH} = \dfrac{IH}{ID}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow IH = \dfrac{1}{3}IA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác DBC đều $\Rightarrow ID = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(\widehat{(ABC),DBC}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.17. Cho khối chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120°$. Biết cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{9}$. Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy.



A $45°$. B $60°$. C $30°$. D $90°$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC, xét tam giác AIB vuông tại I ta có:

$\tan 60° = \sqrt{3} = \dfrac{BI}{AI} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (Do góc $BAI = 60°$, AI là phân giác góc $120°$)

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AI.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Do đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3}{9} \Leftrightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Mà $\begin{cases} BC\perp AI \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAI) \Rightarrow BC\perp SI$.

Vậy góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIA}$.

Suy ra tam giác SIA vuông cân tại A nên $\widehat{SIA} = 45°$

Chọn đáp án A □

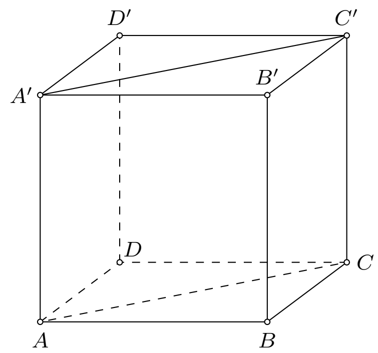
Câu 30.18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng

(A) 90°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 45°.

Lời giải.

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $(A'AC) \perp (ABCD)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng 90°.



Chọn đáp án (A) □

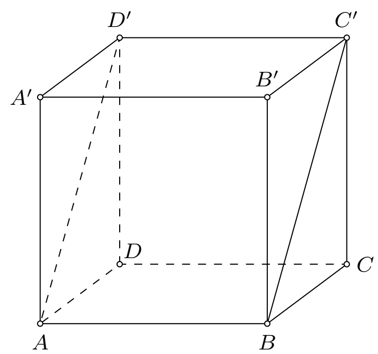
Câu 30.19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABC'D')$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.

Ta có $AB \perp (ADD'A')$, suy ra $(ABC'D') \perp (ADD'A')$.

Do đó, $\widehat{(ADD'A'),(ABC'D')} = 90^\circ$.

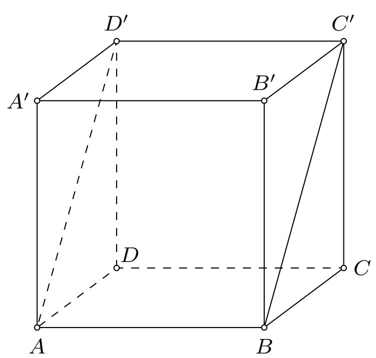


Chọn đáp án (C) □

Câu 30.20. Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ABC'D')$.

(A) 30°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 60°.

Lời giải.



Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(ABB'A') \cap (ABC'D') = AB \\ AB \perp (BCC'B') \\ (ABB'A') \cap (BCC'B') = BB' \\ (ABC'D') \cap (BCC'B') = BC'\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{(ABB'A'), (ABC'D')} = \widehat{C'BB'} = 45^\circ.$$

Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

30.1. A	30.2. D	30.3. C	30.4. B	30.5. D	30.6. D	30.7. C	30.8. C
30.9. A	30.10. A	30.11. D	30.12. C	30.13. A	30.14. B	30.15. A	30.16. D
30.17. A	30.18. A	30.19. C	30.20. C				

DẠNG 31. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

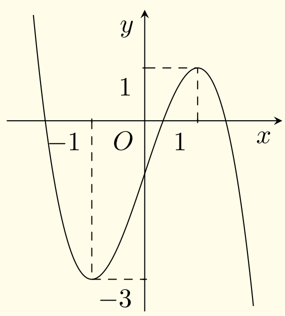
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2).

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số điểm chung của hai đồ thị (C_1) và (C_2).
- Phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 31 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-3 < m < 1$.
Kết hợp đề bài m là giá trị nguyên suy ra $m \in \{-2; -1; 0\}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 31.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 5 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}$.

Số nghiệm thực của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=\dfrac{5}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 31.2. Đồ thị hàm số $y=x^3+2022x^2-2023x$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số và trục hoành

$$x^3+2022x^2-2023x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2023. \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 31.3. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ và đường thẳng $y=x$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x=x^3-3x+3 \Leftrightarrow x^3-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

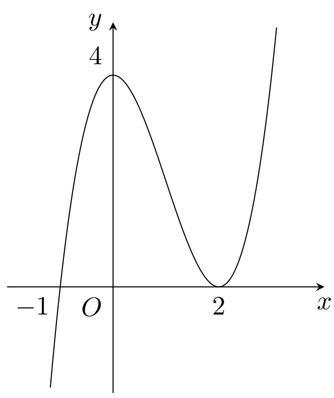
Vậy đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ và đường thẳng $y=x$ có 3 giao điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 31.4.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.



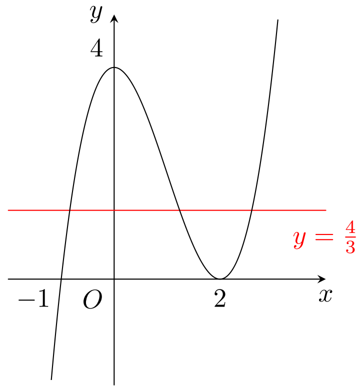
Lời giải.

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$.

Số nghiệm thực của phương trình trên là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$.

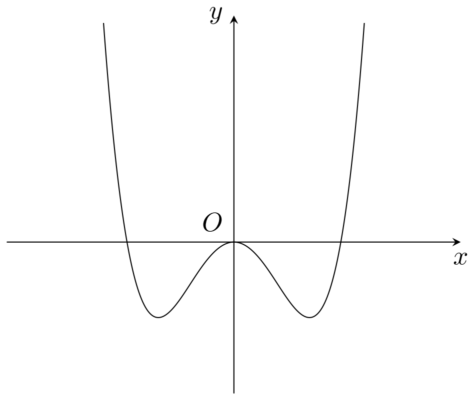
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt nhau tại 3 điểm.

Vậy phương trình $3f(x)-4=0$ có 3 nghiệm.



Chọn đáp án (A) □

Câu 31.5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=3$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=3$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=3$.

Ta có đường thẳng $y=3$ song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0;3)$.

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

Do đó phương trình $f(x)=3$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31.6. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+5}{x-1}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

(A) $x=-5$. (B) $x=5$. (C) $x=-1$. (D) $x=1$.

Lời giải.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31.7. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y=3$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{3x+1}{x-3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x-9\,(\text{vô nghiệm}) \\ x \neq 3. \end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y = 3$ không có điểm chung.

Chọn đáp án D □

Câu 31.8. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ với trục hoành là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hành tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 31.9. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ và trục hoành.

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ với trục hoành

$$3x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2 - 3x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x^2 - 3x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 3x^2 - 3x + 5 = 0. \end{array}\right.$$

Do phương trình $3x^2 - 3x + 5 = 0$ có $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -51 < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm nên đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ cắt trục hoành tại đúng một điểm.

Chọn đáp án A □

Câu 31.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi phương trình $3f(x) - 4 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$1 \parallel 2$	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 31.11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) + 5 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = -5$.

Ta thấy đường thẳng $y = -5$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Xét sự tương giao giữa đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$, ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Do đó phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.13. Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$ có bao nhiêu điểm chung?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^2 - x + 3 \quad (*)$.

Khi đó, phương trình tương đương

$$x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình $(*)$ có một nghiệm suy ra đồ thị của hai hàm số đã cho có một điểm chung.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31.14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-3)\left(x^2+x+4\right)$ với trục hoành là

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-3)\left(x^2+x+4\right)$ với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình

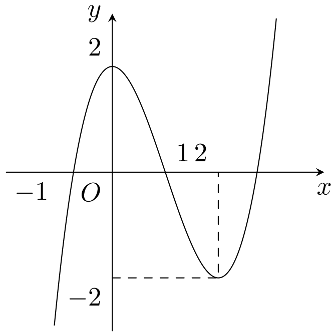
$$\begin{aligned}&(x-3)\left(x^2+x+4\right)=0\\ &\Leftrightarrow x-3=0\left(x^2+x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)\\ &\Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31.15.

Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là

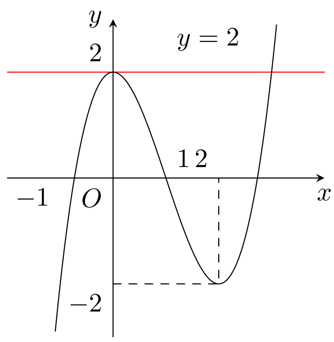
(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

Vẽ đường thẳng $y = 2$ ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm.

Do đó số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là 2.

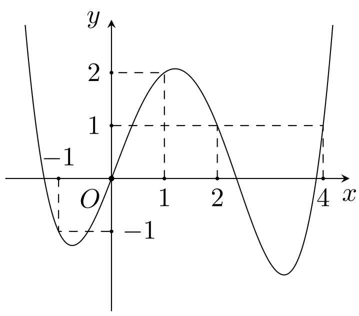


Chọn đáp án (A) □

Câu 31.16.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

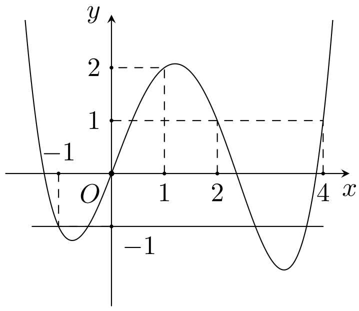


Lời giải.

Ta có $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=-1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm.



Chọn đáp án C □

Câu 31.17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm thực.

Chọn đáp án B □

Câu 31.18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $f(x)+3=m$ vô nghiệm.

(A) $m>-1$. (B) $m\geq -4$. (C) $m\leq -4$. (D) $m<-1$.

Lời giải.

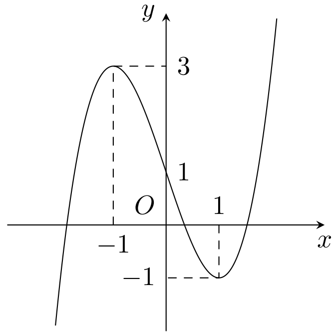
Ta có $f(x)+3=m \Leftrightarrow f(x)=m-3$.

Theo bảng biến thiên, phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m-3<-4 \Leftrightarrow m<-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 31.19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là hình bên. Phương trình $4 - 3f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

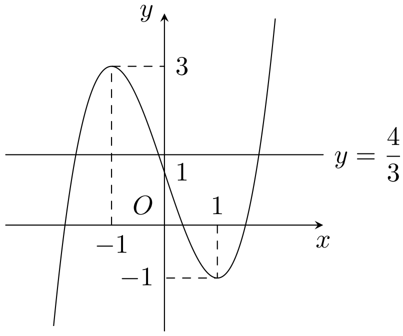


(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $4 - 3f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$.

Do đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $4 - 3f(x) = 0$ có 3 nghiệm.



Chọn đáp án (B) □

Câu 31.20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 5 = 0$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Theo bảng biến thiên đường thẳng $y = \frac{5}{2}$ cắt đồ thị tại 1 điểm nên phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

31.1. C	31.2. D	31.3. B	31.4. A	31.5. C	31.6. A	31.7. D	31.8. C
31.9. A	31.10. C	31.11. D	31.12. D	31.13. B	31.14. C	31.15. A	31.16. C
31.17. B	31.18. D	31.19. B	31.20. B				

DẠNG 32. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên $\mathscr{K}$ khi $f'(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathscr{K}$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên $\mathscr{K}$ khi $f'(x) \leq 0 \, \forall x \in \mathscr{K}$.

2. Các bước thực hiện khi xét tính đơn điệu của hàm số

- **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm (nếu có).
- **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số.
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên, kết luận miền đơn điệu của hàm số.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 32 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1; 1)$. Ⓑ $(2; +\infty)$. Ⓒ $(1; 2)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\}$. Ta có bảng biên thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\searrow$			$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 32.1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^3 \; \forall x \in \mathbb{R}$ nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-\infty; 0)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Bảng xét dấu của $f'(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

C Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$ do vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.3. Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)<0\ \forall x\in(-3;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $f(0)<f(5)$.

B $f(-3)>f(5)$.

C $f(-3)<f(5)$.

D $f(-2)=f(2)$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số nghịch biến trên đoạn $[-3;5]$ và $-3<5$ nên suy ra $f(-3)>f(5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 32.4. Hàm số $f(x)$ có $f'(x)=(x-1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2;+\infty)$.

B $(-\infty;-1)$.

C $(-2;-1)$.

D $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x+1)(5-x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $f(2)<f(1)<f(4)$.

B $f(4)<f(2)<f(1)$.

C $f(1)<f(4)<f(2)$.

D $f(1)<f(2)<f(4)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=(x^2-1)(x+1)(5-x)=0 \Leftrightarrow x=\pm1, x=5$. Xét bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(1) < f(2) < f(4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(2; +\infty)$. B $(-\infty; -1)$. C $(-1; 1)$. D $(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^3(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A $(-\infty; +\infty)$. B $(1; +\infty)$. C $(-\infty; 1)$. D $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2(x-1) > 0, \forall x > 1$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 32.8. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0; 1)$. B $(-2; 0)$. C $(1; 3)$. D $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Đồng thời $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32.9. Hàm số $y = f(x)$có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2$ $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32.10. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32.11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạp hàm $f'(x) = x^2 + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32.13. Hàm số $f(x)$liên tục trên $\mathbb{R}$và có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng về sự biến thiên của hàm số $f(x)$?

(A) $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) $f(x)$ chỉ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$ trong tập $\mathbb{R}$.

(C) $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(D) $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$ trong tập $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32.14. Cho hàm số $y = f(x)$có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-2; -1)$.   (B) $(-1; 1)$.   (C) $(0; +\infty)$.   (D) $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x+1)^2$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Chọn đáp án (C) □

Câu 32.15. Hàm số $f(x)$có đạo hàm $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm số đã cho

(A) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(C) là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

(D) đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32.16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;\ -1)$. Ⓑ $(1;\ 3)$. Ⓒ $(3;\ +\infty)$. Ⓓ $(-\infty;\ 1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32.17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x+1)^2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-1;0)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32.18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1\,; +\infty)$.
- (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,; 1)$.

Lời giải.

Do $f'(x) = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32.20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^4 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- (B) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- (C) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- (D) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-2)^4 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

32.1. C	32.2. C	32.3. B	32.4. D	32.5. D	32.6. D	32.7. B	32.8. A
32.9. B	32.10. C	32.11. B	32.12. B	32.13. A	32.14. C	32.15. A	32.16. B
32.17. A	32.18. C	32.19. C	32.20. A				

DẠNG 33. XÁC SUẤT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố A được tính bởi công thức
$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Trong đó

- $n(A)$ là số kết quả thuận lợi của biến cố A;
- $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2. Tính chất

- Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó, ta có
  a) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(\Omega)=1$.
  b) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$, với mọi biến cố A.
  c) Nếu A và B xung khắc, thì $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ *(công thức cộng xác suất)*.
- Các biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu chúng không khi nào cùng xảy ra.
- Với mọi biến cố A, ta có
$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathrm{P}(A).$$
- Với hai biến cố bất kỳ, ta có mối quan hệ sau (công thức nhân xác suất):
$$A \text{ và } B \text{ là hai biến cố độc lập} \Leftrightarrow \mathrm{P}(A\cdot B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B).$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 33 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 6 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6 và 9 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai quả từ hộp đó, xác suất để lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn bằng

(A) $\frac{9}{35}$. (B) $\frac{18}{35}$. (C) $\frac{4}{35}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn.
Khi đó, $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^2 = 105$.
Do tổng hai số của chúng là số chẵn nên ta có các trường hợp sau

- Cả hai quả cầu đều ghi số lẻ. Số cách lấy là $3 \cdot 5 = 15$.
- Cả hai quả cầu đều ghi số chẵn. Số cách lấy là $3 \cdot 4 = 12$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 15 + 12 = 27$.
Vậy xác suất xuất hiện của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{27}{105} = \dfrac{9}{35}$. □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 33.1. Cho một hộp chứa 9 viên bi được đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi rồi cộng các số trên 3 viên đó với nhau. Xác suất để số thu được là số lẻ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{11}{21}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{10}{21}$.

Lời giải.

Không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3 = 84$.
Gọi A: "Thu được 3 viên có tổng số ghi trên bi là số lẻ".
Để biến cố A xảy ra có 2 khả năng

- Khả năng 1: Cả 3 viên đều có số lẻ. Số cách lấy: C_5^3.
- Khả năng 2: Lấy được 2 viên chẵn, 1 viên lẻ. Số cách lấy: $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_5^1$.

Vậy $n(A) = \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 40 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{10}{21}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33.2. Một hộp chứa 6 bi vàng, 5 bi đỏ và 4 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 8 bi trong hộp. Xác suất để trong 8 bi lấy ra có số bi vàng và số bi đỏ khác nhau là

Ⓐ $\dfrac{344}{429}$. Ⓑ $\dfrac{526}{1001}$. Ⓒ $\dfrac{95}{429}$. Ⓓ $\dfrac{334}{429}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^8 = 6435$.
Gọi A là biến cố: "Trong 8 bi lấy ra có số bi vàng và số bi đỏ khác nhau".
Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Trong 8 bi lấy ra có số bi vàng và số bi đỏ bằng nhau".

- TH1: "2 bi vàng, 2 bi đỏ, 4 bi xanh"có $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^4 = 150$.
- TH2: "3 bi vàng, 3 bi đỏ, 2 bi xanh"có $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 1200$.

- TH3: "4 bi vàng, 4 bi đỏ"có $C_6^4 \cdot C_5^4 = 75$.

Ta có $n(\overline{A}) = 150 + 1200 + 75 = 1425$.
Suy ra $P(\overline{A}) = \dfrac{1425}{6435} = \dfrac{95}{429} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{334}{429}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33.3. Có 3 chiếc hộp. Mỗi hộp chứa 4 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất để 3 thẻ được lấy ra đều mang số chẵn.

A $\dfrac{2}{3}$. B $\dfrac{3}{32}$. C $\dfrac{1}{2}$. D $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 64$.
Gọi A là biến cố "3 thẻ mang số chẵn". Suy ra $n(A) = C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 8$.
Xác suất cho biến cố A: $P(A) = \dfrac{8}{64} = \dfrac{1}{8}$.
Chọn đáp án D □

Câu 33.4. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 30.

A $\dfrac{1}{75}$. B $\dfrac{4}{3 \cdot 10^3}$. C $\dfrac{1}{50}$. D $\dfrac{1}{108}$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 9\}$ là $\overline{abc}\,(a \neq 0)$ khi đó số phần tử của tập S là: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900 \Rightarrow$ số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{900}^1 = 900$.
Bộ 3 chữ số có tích bằng 30 là $(1; 5; 6); (2; 5; 3)$.
Từ 2 bộ 3 chữ số trên lập được $2 \cdot 3! = 12$ số tự nhiên có 3 chữ số mà tích các chữ số bằng 30.
Khi đó gọi B là biến cố "chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 30"thì $n(B) = 12$.
$\Rightarrow P(B) = \dfrac{12}{900} = \dfrac{1}{75}$.
Chọn đáp án A □

Câu 33.5. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất để tổng các số trên các viên bi là một số lẻ?

A $\dfrac{103}{231}$. B $\dfrac{215}{462}$. C $\dfrac{118}{231}$. D $\dfrac{115}{231}$.

Lời giải.

Phép thử là chọn 6 viên bi từ 11 viên bi nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{11}^6$.
Gọi biến cố A:"Tổng các số trên các viên bi là một số lẻ".

- TH1: Chọn được 5 viên bi đánh số lẻ và 1 viên bi số chẵn: có $C_6^5 C_5^1$ cách chọn.
- TH2: Chọn được 3 viên bi đánh số lẻ và 2 viên bi số chẵn: có $C_6^3 C_5^2$ cách chọn.

- TH3: Chọn được 1 viên bi đánh số lẻ và 5 viên bi số chẵn: có $C_6^1C_5^5$ cách chọn.
  $n(A) = C_6^5C_5^1 + C_6^3C_5^2 + C_6^1C_5^5$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{118}{231}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.6. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 1 thẻ mang số chia hết cho 10.

(A) $\dfrac{99}{667}$. (B) 0, 1. (C) $\dfrac{48}{105}$. (D) 0, 17.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{30}^{10}$.

Gọi biến cố A: "Lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 1 thẻ mang số chia hết cho 10".

Lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ trong 15 tấm thẻ mang số lẻ có: C_{15}^5 cách.

Lấy 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 trong 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 có: C_3^1 cách.

Lấy 4 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 10 trong 12 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 10 có: C_{12}^4.

Do đó: $n(A) = C_{15}^5C_3^1C_{12}^4 = 4459455$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4459455}{C_{30}^{10}} = \dfrac{99}{667}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33.7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn không vượt quá 2023, đồng thời nó chia hết cho 5.

(A) $\dfrac{41}{1800}$. (B) $\dfrac{99}{750}$. (C) $\dfrac{48}{1800}$. (D) $\dfrac{17}{105}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (số).

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9000$.

Gọi A là biến cố "Số được chọn không vượt quá 2023 và chia hết cho 5".

Số có bốn chữ số nhỏ nhất chia hết cho 5 là 1000, số có bốn chữ số lớn nhất không vượt quá 2023 chia hết cho 5 là 2020.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = (2020 - 1000) : 5 + 1 = 205$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{205}{9000} = \dfrac{41}{1800}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33.8. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi S là tập hợp các số gồm có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{23}{25}$. (C) $\dfrac{2}{25}$. (D) $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần lập gồm 3 chữ số khác nhau là $\overline{abc}$.

Chọn chữ số a: 5 cách.

Chọn chữ số b, c: A_5^2.

Suy ra $n(\Omega) = 5 \cdot \mathrm{A}_5^2$ cách.

Gọi A: "là số được chọn gồm ba chữ số có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu".

Vì chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu nên $c = 2a (a \neq 0)$.

Chọn $a = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow$ chọn b có 4 cách.

Chọn $a = 2 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow$ chọn b có 4 cách.

$\Rightarrow$ Số cách lập số thoả yêu cầu bài toán là $4 + 4 = 8$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 8$. Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{25}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.9. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12. Tính xác suất để trong các cách sắp xếp ngẫu nhiên 9 học sinh đó vào một dãy có 9 chiếc ghế sao cho không có hai học sinh lớp 12 nào ngồi cạnh nhau.

(A) $\dfrac{5}{72}$. (B) $\dfrac{7}{72}$. (C) $\dfrac{5}{12}$. (D) $\dfrac{1}{1728}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9!$.

Gọi A là biến cố: "xếp 9 học sinh vào một dãy sao cho không có hai học sinh lớp 12 nào ngồi cạnh nhau".

Số cách xếp 6 học sinh lớp 11 là 6!. Khi đó có 7 vách ngăn tạo ra, ta chọn 3 trong 7 vách ngăn đó để xếp 3 học sinh lớp 12 là A_7^3.

Xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6! \cdot \mathrm{A}_7^3}{9!} = \dfrac{5}{12}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.10. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

(A) $\dfrac{13}{27}$. (B) $\dfrac{14}{27}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{365}{729}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.

Số cách chọn hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương là $\mathrm{C}_{27}^2 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{27}^2 = 351$.

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Có 2 trường hợp: Chọn được 2 số lẻ trong 14 số lẻ dương đầu tiên hoặc chọn được hai số chẵn trong 13 số chẵn dương đầu tiên.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{13}^2 + \mathrm{C}_{14}^2 = 169$. Vậy xác suất của biến cố A là

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33.11. Gọi S là tập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn?

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.

Số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập E là $\mathrm{A}_5^4 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{A}_5^4 = 120$.

Gọi A là biến cố: "Chọn một số chẵn".

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 2 \cdot \mathrm{A}_4^3 = 48$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33.12. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. Xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ bằng

(A) $\dfrac{31}{32}$. (B) $\dfrac{11}{32}$. (C) $\dfrac{16}{33}$. (D) $\dfrac{21}{32}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.

Số cách lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp là $\mathrm{C}_{11}^4 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^4 = 330$.

Gọi A là biến cố: "Kết quả thu được là 1 số lẻ".

- Trường hợp 1: Chọn được 1 số lẻ và 3 số chẵn $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 60$ cách.
- Trường hợp 2: chọn được 3 số lẻ và 1 số chẵn $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 100$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 160$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{33}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33.13. Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3 bằng

(A) $\dfrac{30}{91}$. (B) $\dfrac{61}{91}$. (C) $\dfrac{31}{91}$. (D) $\dfrac{12}{17}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.

Số cách lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ là $\mathrm{C}_{14}^3 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^3 = 364$.

Gọi A là biến cố: "Tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3".

Gọi B là tập chứa các số chia hết cho 3 $\Rightarrow B = \{3; 6; 9; 12\}$.

Gọi C là tập chứa các số không chia hết cho 3 $\Rightarrow n(C) = 10$.

- Trường hợp 1: Chọn được 1 số trong B và 2 số trong $C \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 = 180$ cách.
- Trường hợp 2: Chọn được 2 số trong B và 1 số trong $C \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 60$ cách.
- Trường hợp 3: Chọn được 3 số trong $B \Rightarrow$ có $\mathrm{C}_4^3 = 4$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 244$.
Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{61}{91}$.
Chọn đáp án B □

Câu 33.14. Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập S. Tính xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn.

A $\dfrac{1}{6}$. B $\dfrac{2}{5}$. C $\dfrac{5}{6}$. D $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.
Số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau lập từ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ là

$$6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{36}^2 = 630.$$

Gọi A là biến cố: "Tích hai số được chọn là số chẵn".
Số tự nhiên chẵn có 2 chữ số khác nhau lập từ $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ là $\overline{ab}$

- Với $b = 0 \Rightarrow$ có 6 số.
- Với $b \neq 0 \Rightarrow$ có số $3 \cdot 5 = 15$ số.

Có 21 số tự nhiên là số chẵn suy ra có 15 số tự nhiên là số lẻ.
Gọi A là biến cố "tích hai số được chọn là số chẵn".

- Trường hợp 1: Chọn được 1 số lẻ và 1 số chẵn $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{21}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 = 315$ cách.
- Chọn được 2 số chẵn $\Rightarrow$ có $\mathrm{C}_{21}^2 = 210$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 525$.
Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33.15. Gọi A là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp A, xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4 bằng

Ⓐ $\dfrac{2484}{8555}$. Ⓑ $\dfrac{5}{17}$. Ⓒ $\dfrac{2518}{8555}$. Ⓓ $\dfrac{4}{17}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử.

Số tự nhiên có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ là

$$\mathrm{A}_5^3 = 60 \Rightarrow n(\Omega) = \mathrm{C}_{60}^3 = 34220.$$

Gọi B là biến cố: "Trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4".

Số tự nhiên có mặt chữ số 4 là $\overline{abc}$.

Đưa số 4 vào 3 vị trí trên có 3 cách chọn. 2 số còn lại có $\mathrm{A}_4^2 = 12$.

Số các số tự nhiên có mặt chữ số 4 là $3 \cdot 12 = 36$

Suy ra số phần tử của biến cố B là $n(B) = \mathrm{C}_{36}^1 \cdot \mathrm{C}_{24}^2 = 9936$.

Vậy xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2484}{8555}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33.16. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Rút ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để rút được số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

Ⓐ $\dfrac{3}{32}$. Ⓑ $\dfrac{2}{7}$. Ⓒ $\dfrac{3}{16}$. Ⓓ $\dfrac{11}{64}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ X là: $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ (số).

$\Rightarrow n(\Omega) = 448$.

Gọi A là biến cố "rút được số mà trong số đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước".

- TH1: Số rút được có dạng $\overline{aaa}$, có 7 số như thế nên có 7 cách rút.
- TH2: Số rút được có dạng $\overline{aab}$, với $a < b$, có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ số như thế nên có 21 cách rút.
- TH3: Số rút được có dạng $\overline{abb}$, với $a < b$, có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ số như thế nên có 21 cách rút.
- TH4: Số rút được có dạng $\overline{abc}$, với $a < b < c$, có $\mathrm{C}_7^3 = 35$ số như thế nên có 35 cách rút.

Vậy có $7 + 21 + 21 + 35 = 84$ (số) $\Rightarrow n(A) = 84$. Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{84}{448} = \dfrac{3}{16}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33.17. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên từ một hộp hai thẻ. Tính xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3.

Ⓐ $\dfrac{409}{1225}$. Ⓑ $\dfrac{681}{1225}$. Ⓒ $\dfrac{8}{25}$. Ⓓ $\dfrac{801}{1225}$.

Lời giải.

Mỗi lần lấy ra hai thẻ từ hộp có 50 cái thẻ là một tổ hợp chập 2 của 50.

Số cách lấy bằng C_{50}^2. Suy ra $n(\Omega) = \mathrm{C}_{50}^2 = 1225$.

Gọi A là biến cố: "hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3".

Trong 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50 có 16 cái thẻ đánh số chia hết cho 3, 17 cái thẻ đánh số chia cho 3 dư 1 và 17 cái thẻ đánh số chia cho 3 dư 2.

Để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3 xảy ra 4 trường hợp.

- TH1: Hai thẻ có số chia hết cho 3 có C_{16}^2.
- TH2: Hai thẻ có số chia cho 3 dư 1 có C_{17}^2.
- TH3: Hai thẻ có số chia cho 3 dư 2 có C_{17}^2.
- TH4: Có 1 thẻ có số chia cho 3 dư 1 và một thẻ có số chia cho 3 dư 2 có $\mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{17}^1$.

Vậy số cách lấy ra hai thẻ thỏa mãn là $\mathrm{C}_{16}^2 + \mathrm{C}_{17}^2 + \mathrm{C}_{17}^2 + \mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{17}^1 = 681$.

Xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3 là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{681}{1225}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33.18. Một hộp gồm 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng 1 quả cầu ghi số lẻ và tích 3 số ghi trên ba quả cầu là một số chia hết cho 8 bằng

A. $\dfrac{33}{116}$. B. $\dfrac{21}{58}$. C. $\dfrac{45}{116}$. D. $\dfrac{6}{29}$.

Lời giải.

Ta có số phần tử không gian mẫu là số cách chọn 3 quả cầu từ hộp nên $n(\Omega) = \mathrm{C}_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "lấy được 3 quả cầu có đúng 1 quả cầu ghi số lẻ và tích 3 số ghi trên ba quả cầu là một số chia hết cho 8".

Chọn 1 số lẻ từ 30 số: có 15 cách.

Đặt $A_1 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$, $A_2 = \{2; 6; 10; 14; 18; 22; 16; 30\}$ trong đó A_1 gồm những số chia hết cho 4 và A_2 là những số chẵn không chia hết cho 4.

Do quả cầu đầu tiên mang số lẻ nên để chọn 3 quả cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán thì tích 2 số trên 2 quả cầu còn lại phải là số chia hết cho 8.

Trường hợp 1: 2 số từ tập A_1 có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ cách.

Trường hợp 2: 1 số từ tập A_1 và số còn lại là số tùy ý từ A_2 có $7 \cdot 8 = 56$ cách.

Vậy $n(A) = 15(21 + 56) = 1155$ nên $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1155}{\mathrm{C}_{30}^3} = \dfrac{33}{116}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33.19. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn có chứa ít nhất một trong hai chữ số 1 hoặc 2 bằng

A $\frac{1}{3}$. **B** $\frac{1}{15}$. **C** $\frac{3}{50}$. **D** $\frac{47}{50}$.

Lời giải.

Ta có số phần tử của tập S là: $5 \cdot A_5^3 = 300$.

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 300$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn từ tập S có chứa ít nhất một trong hai chữ số 1 hoặc 2".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "Số được chọn từ tập S không có mặt cả hai chữ số 1 và 2".

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số 0; 3; 4; 5 là: $3 \cdot 3! = 18$. Do đó $n(\overline{A}) = 18$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{18}{300} = \dfrac{47}{50}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33.20. Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ được xếp chỗ ngồi ngẫu nhiên vào một dãy gồm 9 ghế. Xác suất để mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam là

A 11,9%. **B** 58,33%. **C** 60,71%. **D** 6,94%.

Lời giải.

Số cách xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh vào 9 ghế là: $n(\Omega) = 9!$.

Gọi A là biến cố: "Mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam".

Xếp thứ tự 6 học sinh nam có 6! cách.

Xếp thứ tự 3 học sinh nữ vào giữa các học sinh nam có A_5^3 cách $\Rightarrow n(A) = 6! \cdot A_5^3$.

Xác suất biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6!A_5^3}{9!} = \dfrac{5}{42} = 11{,}9\%$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

33.1. D	33.2. D	33.3. D	33.4. A	33.5. C	33.6. A	33.7. A	33.8. C
33.9. C	33.10. A	33.11. B	33.12. C	33.13. B	33.14. C	33.15. A	33.16. C
33.17. B	33.18. A	33.19. D	33.20. A				

DẠNG 34. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Sử dụng kiến thức $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ với $a, b > 0, a \neq 1$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 34 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$ bằng

(A) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$. (B) -2. (C) -3. (D) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Đặt $\ln x = t$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. .$$

Ta có $x_1 x_2 = \mathrm{e}^{t_1}\mathrm{e}^{t_2} = \mathrm{e}^{t_1 t_2} = \mathrm{e}^{-3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

Chọn đáp án (A) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 34.1. Khi đặt $3^x = t$ thì phương trình $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$ trở thành

(A) $3t^2 - t - 10 = 0$. (B) $2t^2 - t - 1 = 0$. (C) $9t^2 - 3t - 10 = 0$. (D) $t^2 - t - 10 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 3 \cdot 3^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^x - 3^x - 10 = 0.$$

Đặt $3^x = t$ thì phương trình $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$ trở thành $3t^2 - t - 10 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34.2. Xét bất phương trình $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 - 16t + 32 < 0$. (B) $t^2 - 6t + 32 < 0$. (C) $t^2 - 75t + 32 < 0$. (D) $t^2 - 3t + 32 < 0$.

Lời giải.

$5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^2 \cdot 5^x + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 32 < 0$.

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34.3. Phương trình $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng

Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(3;6)$. Ⓒ $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Ⓓ $(2;4)$.

Lời giải.

$$4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2^x = 1 \\ &2^x = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 1 \in \left(\frac{1}{2};2\right) \end{aligned}\right..$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34.4. Phương trình $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng

Ⓐ $(3;6)$. Ⓑ $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Ⓒ $(2;4)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Lời giải.

$$4^x - 3.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2^x = 1 \\ &2^x = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 1 \in \left(\frac{1}{2};2\right) \end{aligned}\right..$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34.5. Xét bất phương trình $5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $t^2 - 6t + 32 < 0$. Ⓑ $t^2 - 75t + 32 < 0$. Ⓒ $t^2 - 3t + 32 < 0$. Ⓓ $t^2 - 16t + 32 < 0$.

Lời giải.

$5^{2x} - 3\cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3\cdot 5^2\cdot 5^x + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75\cdot 5^x + 32 < 0$.

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34.6. Tập nghiệm S của bất phương trình $9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3 \le 0$.

Ⓐ $S = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$. Ⓑ $S = \{-1;1\}$.

Ⓒ $S = (-1;1)$. Ⓓ $S = [-1;1]$.

Lời giải.

Ta có $9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow 3\cdot(3^x)^2 - 10\cdot 3^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.7. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $2^{2x+1} - 5\cdot 2^x + 2 = 0$.

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $2\cdot(2^x)^2 - 5\cdot(2^x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2^x = 2 \\ &2^x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x = -1. \end{aligned}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34.8. Khi đặt $3^x = t$ thì phương trình $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$ trở thành

Ⓐ $t^2 - t - 10 = 0$. Ⓑ $2t^2 - t - 1 = 0$. Ⓒ $3t^2 - t - 10 = 0$. Ⓓ $9t^2 - 3t - 10 = 0$.

Lời giải.

Ta có $9^{x+1}-3^{x+1}-30=0 \Leftrightarrow 9\cdot(3^x)^2-3\cdot 3^x-30=0$.

Do đó khi đặt $t=3^x$ ta có phương trình $\Leftrightarrow 9t^2-3t-30=0 \Leftrightarrow 3t^2-t-10=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 34.9. Bất phương trình $9^x-4\cdot 3^x+3\leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Ta có $9^x-4\cdot 3^x+3\leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2-4\cdot 3^x+3\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq 3^x\leq 3 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$.

Với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{0;1\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34.10. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x-6\cdot 2^x+8<0$ là

A. $(0;2)$. B. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $(1;2)$. D. $(2;4)$.

Lời giải.

Ta có $4^x-6\cdot 2^x+8<0 \Leftrightarrow 2<2^x<4 \Leftrightarrow 1<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 34.11. Tổng các nghiệm của phương trình $3^x-8\cdot 3^{\frac{x}{2}}+15=0$ bằng

A. $2(1+\log_3 5)$. B. $4\log_5 3$. C. $3\log_3 5$. D. $2+\log_3 5$.

Lời giải.

Phương trình $3^x-8\cdot 3^{\frac{x}{2}}+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{\frac{x}{2}}=5\\ 3^{\frac{x}{2}}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\log_3 5\\ \dfrac{x}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\log_3 5\\ x=2.\end{array}\right.$

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là $2(1+\log_3 5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 34.12. Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4\cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017;2017]$.

A. 1285. B. 4035. C. 1284. D. 4034.

Lời giải.

Ta có $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2}x=4.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=4\cdot 3^{\sin^2 x}$.

Đặt $\sin^2 x=t$ với $t\in[0;1]$, ta có phương trình

$$2^t+\frac{3}{3^t}=4\cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t+3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^t=4.$$

Vì hàm số $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $t\in[0;1]$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=0$.

Do đó $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017; 2017]$ nên ta có $-2017 \leq k\pi \leq\ 2017 \Leftrightarrow \dfrac{-2017}{\pi} \leq k \leq \dfrac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34.13. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$ là

(A) $[-\infty; \log_2 5)$. (B) $[-1; \log_2 5]$. (C) $[\log_2 5; +\infty)$. (D) $[0; \log_2 5]$.

Lời giải.

Ta có $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[0; \log_2 5]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.14. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\mathrm{e}^{6x} - 3\mathrm{e}^{3x} + 2 = 0$.

(A) $S = \left\{1; \dfrac{\ln 2}{3}\right\}$. (B) $S = \{0; \ln 2\}$. (C) $S = \{1; \ln 2\}$. (D) $S = \left\{0; \dfrac{\ln 2}{3}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{e}^{6x} - 3\mathrm{e}^{3x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^{3x} = 1 \\ \mathrm{e}^{3x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 0 \\ 3x = \ln 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\ln 2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{0; \dfrac{\ln 2}{3}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.15. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x^2 + 3 < 0$ là

(A) $(-\infty; 3) \cup (27; +\infty)$. (B) $(3; 27)$.

(C) $(0; 3) \cup (27; +\infty)$. (D) $[3; 27]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Khi đó $\log_3^2 x - 2\log_3 x^2 + 3 < 0 \Leftrightarrow {\log^2}_3 x - 4\log_3 x + 3 < 0$

Đặt $t = \log_3 x$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < \log_3 x < 3 \Leftrightarrow 3 < x < 27.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $S = (3; 27)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34.16. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(10 \cdot \left(\sqrt{2019}\right)^x - 2019^x\right) = 4$ bằng

(A) $\log_{2019} 10$. (B) $2\log_{2019} 10$. (C) $\log_{2019} 16$. (D) $2\log_{2019} 16$.

Lời giải.

Giải phương trình $\log_2\left(10 \cdot \left(\sqrt{2019}\right)^x - 2019^x\right) = 4$

Đặt $t = \left(\sqrt{2019}\right)^x > 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$10t-t^2=2^4 \Leftrightarrow (t-2)(t-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2019^{\frac{x}{2}}=2 \\ 2019^{\frac{x}{2}}=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\log_{2019}2 \\ x=2\log_{2019}8. \end{array}\right.$$

Tổng hai nghiệm là $2\log_{2019}2+2\log_{2019}8=2\log_{2019}16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.17. Phương trình $\log_2^2 x-8\sqrt{\log_2(8x)}-12=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

(A) 1.   (B) 3.   (C) 2.   (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{8}$.

Phương trình tương đương với $\log_2^2 x-8\sqrt{3+\log_2 x}-12=0$

Đặt $\sqrt{3+\log_2 x}=t; t\geq 0$ ta có phương trình trở thành

$$\left(t^2-3\right)^2-8t-12=0 \Leftrightarrow t^4-6t^2-8t-3=0 \Leftrightarrow (t+1)^3\cdot(t-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3. \end{array}\right.$$

So với điều kiện suy ra $t=3 \Rightarrow \log_2 x=6 \Leftrightarrow x=64$.

Vậy phương trình có duy nhất 1 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34.18. Cho $x>1$ và thỏa mãn $\log_3(\log_{27}x)=\log_{27}(\log_3 x)$. Khi đó giá trị $\log_3 x$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$.   (B) 3.   (C) $3\sqrt{3}$.   (D) 27.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\log_3(\log_{3^3}x)=\log_{3^3}(\log_3 x) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right)=\frac{1}{3}\log_3(\log_3 x)$$

Đặt $\log_3 x=t>0$ (vì $x>1$).

Phương trình trở thành

$$\log_3\left(\frac{1}{3}t\right)=\log_3\sqrt[3]{t} \Leftrightarrow \frac{1}{3}t=\sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t^3=27t \Leftrightarrow t^3-27t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3\sqrt{3} \\ t=-3\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vì $t>0$ nên ta chọn $t=3\sqrt{3}$. Vậy $\log_3 x=3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34.19. Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Tính x_1x_2.

(A) $x_1x_2 = \dfrac{1}{2}$. (B) $x_1x_2 = -3$. (C) $x_1x_2 = 4$. (D) $x_1x_2 = \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Với mọi $x > 0$ ta có $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2(1 + \log_2 x) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -1\\ \log_2 x = 3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}\\ x = 2^3 = 8.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 8$.

Do đó $x_1x_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34.20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_2^2(x-1) - 4\log_2(x-1) + 3 \geq 0$

(A) $S = [3; 9]$. (B) $S = (1; 3] \cup [9; +\infty)$.

(C) $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; 3] \cup [9; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2^2(x-1) - 4\log_2(x-1) + 3 \geq 0$ điều kiện $x > 1$.

Đặt $t = \log_2(x-1)$, bất phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t \geq 3\\ t \leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-1) \geq 3\\ \log_2(x-1) \leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1 \geq 8\\ x-1 \leq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 9\\ x \leq 3.\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 3] \cup [9; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

34.1. A	34.2. C	34.3. C	34.4. B	34.5. B	34.6. D	34.7. B	34.8. C
34.9. B	34.10. C	34.11. A	34.12. A	34.13. D	34.14. D	34.15. B	34.16. D
34.17. A	34.18. C	34.19. C	34.20. B				

DẠNG 35. PHÉP ĐẾM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương pháp chung của bài toán tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức là

- Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.
- Thay vào điều kiện đề bài, ta được một phương trình biểu diễn theo hai biến x và y.

  Chú ý các công thức

  - $\overline{z} = x - yi$.
  - $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
  - $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.
- Tùy thuộc vào phương trình thu được, ta kết luận tập hợp điểm chạy trên "đối tượng hình" tương ứng.

  Một số dạng thường gặp

  - Dạng $Ax + By + C = 0$: tập hợp điểm là đường thẳng.
  - Dạng $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$: tập hợp điểm là đường tròn có tâm $I(x_0; y_0)$ và bán kính R.
  - Dạng $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$: tập hợp điểm là hình tròn có tâm $I(x_0; y_0)$ và bán kính R.
  - Dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, (a^2 + b^2 - c > 0)$: tập hợp điểm là đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
  - Dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: tập hợp điểm là đường elip.
  - Dạng $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: tập hợp điểm là đường hyperbol.
  - Dạng $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$: tập hợp điểm là đường parabol.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 35 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2i| = 1$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

(A) $(0; 2)$. (B) $(-2; 0)$. (C) $(0; -2)$. (D) $(2; 0)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z + 2i| = 1 \Leftrightarrow |x + (y + 2)i| \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(0; -2)$, bán kính $R = 1$.

Chọn đáp án C $\square$

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 35.1. Cho số phức z thoả $|z - 1 + i| = 4$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(1; -1)$ và bán kính bằng $R = 4$.

B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(-1; 1)$ và bán kính $R = 2$.

C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường parabol.

D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng .

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 1 + i| = 4 \Leftrightarrow |x - 1 + (y + 1)i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 35.2. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả $|iz - 1 + 2i| = 4$ là một đường tròn . Tìm toạ độ tâm I của đường tròn đó.

A. $I(1; 2)$. B. $I(-1; -2)$. C. $I(-2; -1)$. D. $I(2; 1)$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} |iz - 1 + 2i| = 4 &\Leftrightarrow |i(x + yi) - 1 + 2i| = 4. \\ &\Leftrightarrow |-y - 1 + (x + 2)i| = 4 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(-2; -1)$ và bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 35.3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả $|z + 4 - 4i| \leq 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(4; -4)$ và bán kính $R = 4$.

B. Hình tròn tâm $I(-4; 4)$ và bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(4; -4)$ và bán kính $R = 4$.

D. Đường tròn tâm $I(-4; 4)$ và bán kính $R = 2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z + 4 - 4i| \leq 2 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm $I(-4; 4)$ và bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.4. Gọi (H) là hình gồm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thoả $|z+3|^2 + |z-3|^2 = 50$. Tính diện tích hình (H).

(A) $S = 8\pi$. (B) $S = 16\pi$. (C) $S = 15\pi$. (D) $S = 20\pi$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z+3|^2 + |z-3|^2 = 50 &\Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 50. \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 18 = 50. \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn M là đường tròn tâm O và bán kính $R = 4$.

Do đó diện tích hình (H) là $S = \pi \cdot R^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.5. Biết tập hợp điểm biểu biễn số phức z thoả $|z - 2i| - |2z + 1| = 0$ là một đường tròn. Tính chu vi C của đường tròn đó.

(A) $C = \dfrac{2\sqrt{17}\pi}{3}$. (B) $C = \dfrac{\sqrt{17}\pi}{3}$. (C) $C = \dfrac{17\pi}{9}$. (D) $C = \dfrac{4\sqrt{17}\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2i| - |2z + 1| = 0 &\Leftrightarrow |x + (y-2)i| = |2x + 1 + 2yi| \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (2x+1)^2 + (2y)^2. \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 3 = 0. \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

Suy ra chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \cdot R = \dfrac{2\sqrt{17}\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.6. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 4 + 2i| = 2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

Ⓐ $I(-3;-1), R=2$. Ⓑ $I(3;1), R=\sqrt{2}$.
Ⓒ $I(3;1), R=2$. Ⓓ $I(-3;-1), R=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Chia hai vế của đẳng thức $|(1-i)z-4+2i|=2$ cho $|1-i|$ ta được $|z-(3+i)|=\sqrt{2}$.

Gọi $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-(3+i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=2$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35.7. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả $|\overline{z}+2-i|=4$ là một đường tròn có tâm I và bán kính R. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $I(-2;-1), R=4$. Ⓑ $I(2;-1), R=4$. Ⓒ $I(2;-1), R=2$. Ⓓ $I(-2;-1), R=2$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|\overline{z}+2-i|=4 \Leftrightarrow |x+2-(y+1)i|=4 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(-2;-1)$ và bán kính $R=4$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 35.8. Cho số phức z thoả mãn $(z+1)(\overline{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

Ⓐ $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ $R=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Ⓒ $R=\sqrt{5}$. Ⓓ $R=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $(z+1)(\overline{z}-2i)=((x+1)+yi)(x-(y+2)i)=x^2+x+y^2+2y-(2x+y+2)i$.

Theo đề bài ta có $x^2+x+y^2+2y=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 35.9. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z-i|=|2-3i-z|$ là một đường thẳng. Tính khoảng cách d từ gốc toạ độ O đến đường thẳng đó.

Ⓐ $\mathrm{d}=3$. Ⓑ $\mathrm{d}=\sqrt{3}$. Ⓒ $\mathrm{d}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\mathrm{d}=\dfrac{5}{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi \ (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & |z-i| = |2-3i-z| \\ \Leftrightarrow\ & |x+yi-i| = |2-3i-x-yi| \\ \Leftrightarrow\ & |x+(y-1)i| = |(2-x)+(-3-y)i| \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(y-1)^2 = (2-x)^2+(-3-y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x-2y-3=0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng Δ có phương trình $x-2y-3=0$.

Suy ra khoảng cách từ O đến Δ là d $= \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.10. Gọi (H) là hình gồm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả $1 \le |z-1| \le 2$. Tính diện tích hình (H).

A $S_{(H)} = 2\pi$. **B** $S_{(H)} = 5\pi$. **C** $S_{(H)} = 3\pi$. **D** $S_{(H)} = \pi$.

Lời giải.

Giả sử $z = x+yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $1 \le |z-1| \le 2 \Leftrightarrow 1 \le (x-1)^2+y^2 \le 4$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức z nằm trong hình vành khuyên giới hạn bởi 2 hình tròn đồng tâm $I(1;0)$ có bán kính lần lượt là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$.

Từ đó suy ra diện tích hình (H) là $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 3\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.11. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2| = 8$ là

A Một đoạn thẳng. **B** Một đường hyperbol.

C Một đường elip. **D** Một đường parabol.

Lời giải.

Đặt $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z+2|+|z-2| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 8$.

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ suy ra $MF_1 + MF_2 = 8$.

Suy ra điểm M nằm trên elip (E) có $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, ta có $F_1F_2 = 2c \Leftrightarrow 4 = 2c \Leftrightarrow c = 2$.

Ta có $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$. Vậy tập hợp các điểm M là elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

Chọn đáp án C □

.

Câu 35.12. Cho số phức z thoả $(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A Đường thẳng có phương trình $2x-y+1=0$.

B Đường tròn có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = 4$.

(C) Đường thẳng có phương trình $x + 2y - 2 = 0$.

(D) Đường tròn có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$(z - i)(2 + i) = (x + yi - i)(2 + i) = (2x - y + 1) + (x + 2y - 2)i$.

Để $(z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo thì $2x - y + 1 = 0$ hay tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x - y + 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.13. Biết tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{z}{z-1}\right| = 3$ là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn đó.

(A) $I\left(\dfrac{9}{8}; 0\right)$. (B) $I\left(\dfrac{9}{4}; 0\right)$. (C) $I\left(-\dfrac{9}{8}; 0\right)$. (D) $I\left(-\dfrac{9}{4}; 0\right)$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{z}{z-1}\right| = 3 \\
\Leftrightarrow\ & |z| = 3|z - 1| \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + 9y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^2 + 8y^2 - 18x + 9 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{9}{8}; 0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.14. Cho số phức z thoả $|z| = 2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức w thoả mãn $w = 3 + i - (3 - 4i)z$ là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

(A) 10. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $5\sqrt{2}$. (D) $5\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $w = 3 + i - (3 - 4i)z \Leftrightarrow w - 3 - i = (-3 + 4i)z$.

Suy ra $|w - 3 - i| = |(-3 + 4i)z| = 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 100$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có tâm $I(3; 1)$ và bán kính $R = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.15. Cho số phức z thoả $|z| = \sqrt{5}$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức w thoả mãn $w = (1 + 2i)z + i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 2\sqrt{5}$. (B) $r = \sqrt{5}$. (C) $r = 10$. (D) $r = 5$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $w = (1 + 2i)z + i \Leftrightarrow w - i = (1 + 2i)z$.

Suy ra $|w - i| = |(1 + 2i)z| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có tâm $I(0; 1)$ và bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 35.16. Xét các số phức z thoả mãn $|z - 2i + 1| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (12 - 5i)z + 3i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A $I(-1; 2)$. B $I(-2; 32)$. C $I(2; -32)$. D $I(1; -5)$.

Lời giải.

Ta có $w = (12 - 5i)z + 3i \Rightarrow z = \dfrac{w - 3i}{12 - 5i}$.

$|z - 2i + 1| = 4 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w - 3i}{12 - 5i} - 2i + 1\right| = 4 \Leftrightarrow |w + 2 - 32i| = 4\,|12 - 5i| = 52 \quad (1)$.

Gọi $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$(1) \Rightarrow |x + 2 + (y - 32)i| = 52 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 32)^2 = 52^2$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(-2; 32)$.

Chọn đáp án B □

Câu 35.17. Cho số phức z thoả $|z| = 3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \overline{z} + i$ là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm của đường tròn đó.

A $I(0; 1)$. B $I(0; -1)$. C $I(1; 0)$. D $I(-1; 0)$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$|z| = 3 \Rightarrow |\overline{z}| = 3 \Leftrightarrow |w - i| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có tâm $I(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 35.18. Cho hai số phức z, w thoả $|z| = 10$ và $\overline{z} = (3 + 4i)\overline{w}$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là

A Đường tròn tâm $I(2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

B Đường tròn tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 2$.

C Đường tròn tâm $I(0; 2)$ và bán kính $R = 2$.

D Đường tròn tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $\overline{z} = (3 + 4i)\overline{w} \Leftrightarrow |\overline{z}| = |(3 + 4i)\overline{w}| = 5|\overline{w}| \Leftrightarrow |z| = 5|w| \Leftrightarrow |w| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 35.19. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1| = |\overline{z} - i|$. Quỹ tích các điểm biểu diễn của số phức $w = (3-4i)\,z + i$ là

(A) Một đường thẳng. (B) Một đường tròn.
(C) Một đường parabol. (D) Một đường elip.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Ta có

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ và $|\overline{z} - i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$.

Theo giả thiết thì $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow y = -x$.

Xét số phức $w = (3-4i)\,(x+yi) + i = (3x+4y) + (3y-4x+1)\,i = -x + (-7x+1)i$.

Gọi $M'(x';y')$ là điểm biểu diễn số phức w.

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -7x+1 \end{cases} \Leftrightarrow y' = 7x' + 1 \Leftrightarrow 7x' - y' + 1 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng có phương trình $7x - y + 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35.20. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $\sqrt{34}$. (B) 26. (C) 34. (D) $\sqrt{26}$.

Lời giải.

$$w = \frac{4+iz}{1+z} \Leftrightarrow (1+z)w = 4 + iz \Leftrightarrow z(w-i) = 4 - w$$
$$\Leftrightarrow \ |z|\cdot|w-i| = |4-w| \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot|w-i| = |4-w|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ khi đó thay vào $(*)$ ta có:

$$\sqrt{2}\cdot|x+yi-i| = |4-x-yi| \Leftrightarrow 2[x^2 + (y-1)^2] = (x-4)^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (A) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

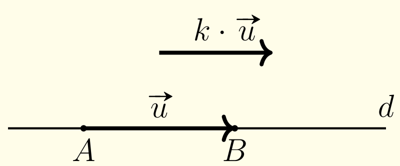
35.1. A	35.2. C	35.3. B	35.4. B	35.5. A	35.6. B	35.7. A	35.8. A
35.9. C	35.10. C	35.11. C	35.12. A	35.13. A	35.14. A	35.15. D	35.16. B
35.17. A	35.18. B	35.19. A	35.20. A				

DẠNG 36. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

- Cho đường thẳng Δ, véc-tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.



- Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k \cdot \vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ.
- Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một véc-tơ chỉ phương.

2. Viết phương trình đường thẳng

- Biết đường thẳng d đi qua điểm $M_0(a_1; a_2; a_3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$, khi đó phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$
- Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng d viết dưới dạng chính tắc như sau

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 36 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; -1)$ và $N(5; 5; 1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua $M(1; -1; -1)$ và nhận $\overrightarrow{MN} = 2(2; 3; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 36.1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (4;-6;2) = 2(2;-3;1)$.

Do đó đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;1)$.

Vậy phương trình tham số của Δ đi qua $M(2;0;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;1)$ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$, $B(2;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. B $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

C $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. D $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;1)$.

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;1;2)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (1;-2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình của AB là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36.3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $M(2;-1;1)$ và $N(0;1;3)$ là

A $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MN} = (-2;2;2)$. $\Rightarrow \vec{u} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1;-1;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng MN.

Do đó phương trình đường thẳng MN là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t, \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - t \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36.4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$ và mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là

(A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P): $x + 3y - 2z = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;3;-2)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n} = (1;3;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36.5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;3;1)$ đường thẳng đi qua $A(1;2;-3)$ và song song với OB có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OB} = (-2;3;1)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm.

Phương trình đường thẳng qua $A(1;2;-3)$ và song song với OB là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36.6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (1;-4;-5)$ là

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$. (B) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+5}{3}$.

Ⓒ $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$.	Ⓓ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{-5}$.

Lời giải.

Vì d có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (1; -4; -5)$, suy ra d cũng có một véc-tơ chỉ phương khác nữa là $\overrightarrow{b} = (-1; 4; 5)$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{b} = (-1; 4; 5)$ là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36.7. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = 5 + 7t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng d.

Ⓐ $d\colon 2(x-3) - 4(y-1) + 7(z-5) = 0$.	Ⓑ $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-7}{5}$.

Ⓒ $d\colon 3(x-2) + y + 4 + 5(z-7) = 0$.	Ⓓ $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-5}{7}$.

Lời giải.

Từ phương trình tham số của đường thẳng d ta có d đi qua điểm $A(3; 1; 5)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (2; -4; 7)$. Do đó d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-5}{7}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 36.8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng chứa trục Oy có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$.	Ⓑ $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.	Ⓒ $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.	Ⓓ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải.

Trục Oy qua $O(0; 0; 0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 36.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d?

Ⓐ $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$.	Ⓑ $x - 2 = y = z + 3$.

Ⓒ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$. Do đó phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36.10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z+2023=0$.

Ⓐ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{u}=(2;2;1)$.
Do đó phương phương trình chính tắc đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 36.11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Hỏi phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

Ⓐ $\begin{cases}x=-2+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=2t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=-2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-2-t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases}$.

Lời giải.

$(\Delta)\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.
Suy ra (Δ) đi qua điểm $A(-2;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Vậy phương trình tham số $(\Delta)\colon \begin{cases}x=-2+t\\y=1-t\\z=2t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36.12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-3}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua M và song song với d có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases}x=1-4t\\y=5t\\z=-1+2t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1+4t\\y=-5t\\z=-1+2t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-1-4t\\y=5t\\z=-1-2t\end{cases}$.

Lời giải.

$d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-3}{2}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(4;-5;2)$.
Đường thẳng Δ song song với d nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(4;-5;2)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -5t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 36.13. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ là

A $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$.

C $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.

D $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2;3;1)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;2)$ và $N(4;3;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 2t. \\ z = 2 - 4t \end{cases}$.

B $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

C $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 11 - 2t \end{cases}$.

D $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = -4 - t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2;2;-4)$ nên chọn $\vec{u} = (1;1;-2)$ là véc-tơ chỉ phương của MN.

Đường thẳng MN có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;-2)$ và đi qua điểm $M(2;1;2)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = -4 - t \\ z = 12 + 2t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 36.15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

B $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t. \\ z = 2 + t \end{cases}$.

D $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Vì Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$ nên Δ cũng nhận véc-tơ $\dfrac{1}{2}\vec{a} = (2;-3;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Do đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36.16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - y + 6z - 18 = 0$. Đường thẳng d đi qua $A(2;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là

(A) $d\colon \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-6}$.
(B) $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{6}$.
(C) $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$.
(D) $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x - y + 6z - 18 = 0$ có $\vec{n} = (3;-1;6)$ là véc-tơ pháp tuyến.

Ta có d vuông góc với mặt phẳng (P) nên d có $\vec{u}_d = (3;-1;6)$ là véc-tơ chỉ phương d đi qua $A(2;1;0)$ và có $\vec{u}_d = (3;-1;6)$ là véc-tơ chỉ phương nên d có phương trình là $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36.17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y - 2z - 3 = 0$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z+7}{-2}$.
(B) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+7}{-2}$.
(C) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-7}{-2}$.
(D) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-7}{-7}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y - 2z - 3 = 0$ nên có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;-2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+7}{-2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36.18. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 3z + 4 = 0$ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t. \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) Suy ra $\vec{u}_d = \vec{n}_P = (1;-2;3)$.

Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 36.19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α)?

Ⓐ $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \\ z=-5 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=-3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=2 \\ z=3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \\ z=-5t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm qua $M(-1;2;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}_\alpha=(2;0;-3)=-(2;0;3)$.

Ta có phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=2 \\ z=3t. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36.20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$. Ⓑ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-6}{3}$.

Ⓒ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$. Ⓓ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+6}{3}$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ là $\vec{n}=(2;-3;6)$.

Đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;6)$ nên có phương trình là $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN

36.1. A	36.2. A	36.3. D	36.4. B	36.5. B	36.6. C	36.7. D	36.8. B
36.9. C	36.10. B	36.11. C	36.12. C	36.13. D	36.14. D	36.15. A	36.16. B
36.17. B	36.18. C	36.19. C	36.20. A				

DẠNG 37. ĐIỂM ĐỐI XỨNG, HÌNH CHIẾU CỦA 1 ĐIỂM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ

a) **Hình chiếu**: "**Thiếu cái nào, cho cái đó bằng 0**". Nghĩa là hình chiếu của $M(a;b;c)$ lên:

- Ox là $M_1(a;0;0)$.
- Oy là $M_2(0;b;0)$.
- Oz là $M_3(0;0;c)$.
- (Oxy) là $M_4(a;b;0)$.
- (Oxz) là $M_5(a;0;c)$.
- (Oyz) là $M_6(0;b;c)$.

b) **Đối xứng**: "**Thiếu cái nào, đổi dấu cái đó**". Nghĩa là điểm đối xứng của $N(a;b;c)$ qua:

- Ox là $N_1(a;-b;-c)$.
- Oy là $N_2(-a;b;-c)$.
- Oz là $N_3(-a;-b;c)$.
- (Oxy) là $N_4(a;b;-c)$.
- (Oxz) là $N_5(a;-b;c)$.
- (Oyz) là $N_6(-a;b;c)$.

c) **Khoảng cách**: Để tìm khoảng cách từ điểm M đến trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), ta tìm **hình chiếu** H của điểm M lên trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), từ đó suy ra **khoảng cách cần tìm là** $d = MH$.

2. Điểm thuộc, không thuộc mặt phẳng

a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng: $\boxed{(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0}$
(với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$; (α) có VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$)

b) Điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in (P)$: $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

c) Điểm $M(x_0;y_0;z_0) \notin (P)$: $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 37 (Đề minh họa BGD năm 2022 - 2023).

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

Ⓐ $(1;-2;3)$. Ⓑ $(1;2;-3)$. Ⓒ $(-1;-2;-3)$. Ⓓ $(-1;2;3)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên (Oxz), suy ra $H(1;0;3)$.

Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) thì AA' nhận H làm trung điểm.
Vậy $A'(1;-2;3)$.
Chọn đáp án A □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 37.1. Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$. B. $N(0;-1;1)$. C. $P(0;-1;0)$. D. $Q(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của A trên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 37.2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(1;2;-4)$ lên (Oxy).

A. $H(1;2;-4)$. B. $H(0;2;-4)$. C. $H(1;0;-4)$. D. $H(1;2;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của M trên (Oxy) là điểm $H(1;2;0)$.
Chọn đáp án D □

Câu 37.3. Hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên (Oxz) là $A'(x;y;z)$. Khi đó $x-y-z$ bằng

A. -4. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên (Oxz) là $A'(3;0;1)$. Vậy $x-y-z=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 37.4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(4;5;6)$ lên trục Ox.

A. $H(0;5;6)$. B. $H(4;0;0)$. C. $H(0;0;6)$. D. $H(4;5;0)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(4;5;6)$ lên trục Ox, $H(4;0;0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 37.5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(1;-1;2)$ lên trục Oy.

A. $H(0;-1;0)$. B. $H(1;0;0)$. C. $H(0;0;2)$. D. $H(0;1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu của $M(1;-1;2)$ lên trục Oy là điểm $H(0;-1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.6. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;2;3)$ qua gốc tọa độ O.

(A) $M'(-1;2;3)$. (B) $M'(-1;-2;3)$. (C) $M'(-1;-2;-3)$. (D) $M'(1;2;-3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua O là điểm $M'(-1;-2;-3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.7. Tìm M' là điểm đối xứng của $M(1;-2;0)$ qua điểm $A(2;1;-1)$.

(A) $M'(1;3;-1)$. (B) $M'(3;-3;1)$. (C) $M'(0;-5;1)$. (D) $M'(3;4;-2)$.

Lời giải.

M' là điểm đối xứng của M qua điểm $A \Leftrightarrow A$ là trung điểm MM'.

Khi đó, tọa độ M' thỏa hệ $\begin{cases} x_{M'} = 2x_A - x_M \\ y_{M'} = 2y_A - y_M \\ z_{M'} = 2z_A - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2\cdot 2 - 1 = 3 \\ y_{M'} = 2\cdot 1 + 2 = 4 \\ z_{M'} = 2\cdot(-1) - 0 = -2. \end{cases}$

Vậy $M'(3;4;-2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37.8. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(3;2;1)$ qua trục Ox.

(A) $M'(3;-2;-1)$. (B) $M'(-3;2;1)$. (C) $M'(-3;-2;-1)$. (D) $M'(3;-2;1)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng của $M(3;2;1)$ qua trục Ox là điểm $M'(3;-2;-1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.9. Trong không gian $Oxyz$, điểm N đối xứng với điểm $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là

(A) $N(-3;1;-2)$. (B) $N(3;1;-2)$. (C) $N(-3;-1;-2)$. (D) $N(3;-1;-2)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng với điểm $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là $N(-3;-1;-2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.10. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(2;3;4)$ qua trục Oz.

(A) $M'(2;-3;-4)$. (B) $M'(-2;3;4)$. (C) $M'(-2;-3;4)$. (D) $M'(2;-3;4)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng của $M(2;3;4)$ qua trục Oz là điểm $M'(-2;-3;4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.11. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;2;5)$ qua (Oxy).

(A) $M'(-1;-2;5)$. (B) $M'(1;2;0)$. (C) $M'(1;-2;5)$. (D) $M'(1;2;-5)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;5)$ qua (Oxy) là điểm $M'(1;2;-5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.12. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

(A) $B(2;7;-5)$. (B) $B(-2;-7;5)$. (C) $B(-2;7;-5)$. (D) $B(2;-7;-5)$.

Lời giải.

Điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm $B(-2;-7;5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37.13. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;-2;3)$ qua (Oyz).

(A) $M'(-1;-2;3)$. (B) $M'(1;2;-3)$. (C) $M'(-1;2;-3)$. (D) $M'(0;-2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đối xứng của $M(1;-2;3)$ qua (Oyz) là điểm $M'(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.14. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;-2;-3)$ đến (Oxz).

(A) $\mathrm{d}=1$. (B) $\mathrm{d}=2$. (C) $\mathrm{d}=3$. (D) $\mathrm{d}=4$.

Lời giải.

Hình chiếu của M lên (Oxz) là $M'(1;0;-3)$.

Khi đó khoảng cách từ điểm M đến trục hoành Ox là độ dài đoạn thẳng

$$MM'=\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2+(-3+3)^2}=2.$$

Vậy $\mathrm{d}=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37.15. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính khoảng cách từ điểm $M(-3;2;4)$ đến trục Oy.

(A) $d=2$. (B) $d=3$. (C) $d=4$. (D) $d=5$.

Lời giải.

Hình chiếu của M lên trục Oy là $M'(0;2;0)$.

Khi đó khoảng cách từ điểm M đến trục Ox là độ dài đoạn thẳng

$$MM'=\sqrt{(0+3)^2+(2-2)^2+(0-4)^2}=5.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37.16. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z=5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

(A) $Q(2;-1;5)$. (B) $P(0;0;-5)$. (C) $N(-5;0;0)$. (D) $M(1;1;6)$.

Lời giải.

Thế tọa độ của $M(1;1;6)$ vào phương trình của (P) ta được: $1-2\cdot 1+6=5$.

Vậy điểm $M(1;1;6)\in(P)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37.17. Tìm m để điểm $M(m;1;6)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$.

Ⓐ $m=1$. Ⓑ $m=-1$. Ⓒ $m=3$. Ⓓ $m=2$.

Lời giải.

Điểm $M(m;1;5)\in(P)\Leftrightarrow m-2\cdot 1+6-5=0\Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

Ⓐ $N(2;2;2)$. Ⓑ $Q(3;3;0)$. Ⓒ $P(1;2;3)$. Ⓓ $M(1;-1;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của $M(1;-1;1)$ vào phương trình mặt phẳng (α) ta được

$$1-1+1-6=-5\neq 0\Rightarrow M\notin(\alpha).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37.19. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm $M(1;-2;1)$?

Ⓐ $(P_1): x+y+z=0$. Ⓑ $(P_2): x+y+z-1=0$.

Ⓒ $(P_3): x-2y+z=0$. Ⓓ $(P_4): x+2y+z-1=0$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(1;-2;1)$ vào từng phương trình mặt phẳng để kiểm tra.

Ta thấy $1+(-2)+1=0$ nên $M\in(P_1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37.20. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?

Ⓐ $Q(3;-1;3)$. Ⓑ $N(3;-1;2)$. Ⓒ $M(2;2;0)$. Ⓓ $P(0;0;-2)$.

Lời giải.

Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) có cao độ bằng 0.

Vậy $M\in(Oxy)$.

Chọn đáp án (C) □

D BẢNG ĐÁP ÁN

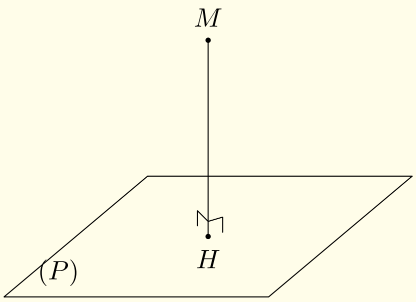
37.1. B	37.2. D	37.3. B	37.4. B	37.5. A	37.6. C	37.7. D	37.8. A
37.9. C	37.10. C	37.11. C	37.12. B	37.13. A	37.14. B	37.15. D	37.16. D
37.17. A	37.18. D	37.19. A	37.20. C				

DẠNG 38. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp chung

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

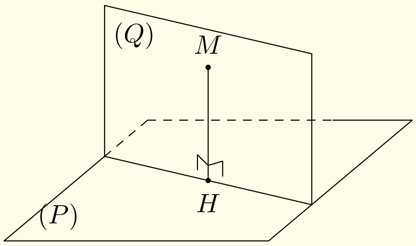


Phương pháp giải chung: Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:

- **Cách 1:**

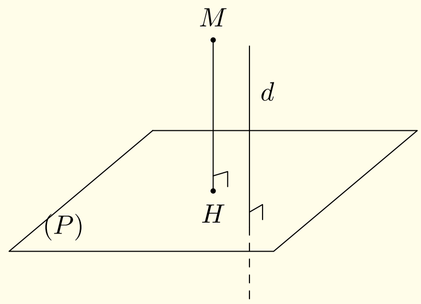
  + Bước 1: Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).
  + Bước 2: Xác định giao tuyến: $\Delta = (P) \cap (Q)$.
  + Bước 3: Trong (Q), dựng $MH \perp \Delta, (H \in \Delta)$.

  Vì $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \Delta = (P) \cap (Q) \\ (Q) \supset MH \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow MH \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MH$



- **Cách 2** Nếu đã biết trước một đường thẳng $d \perp (P)$ thì ta sẽ dựng $Mx//d$, khi đó: $H = Mx \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

$$\Rightarrow d(M,(P)) = MH$$



- **Cách 3**

  Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho $\triangle ABC$ nằm trên (P), nếu $MA = MB = MC$ thì hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) chính là tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó: $MO \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MO$.

2. Khoảng cách dựng trực tiếp

- **Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên**

  Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt bên (SAB).
  + Kẻ $HI \perp AB, (I \in AB)$.
  + Kẻ $HK \perp SI, (K \in SI)$
  Khi đó:
  $$d(H,(SAB)) = HK = \frac{\text{SH.HI}}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$$
  .

- **Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng(chứa đường cao)**

  Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách tù điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).

  + Kẻ $AK \perp HB$
  + $\begin{cases} AK \perp HB \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHB) \Rightarrow d(A,(SHB)) = AK$

- **Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau**

  Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$ (đáy có thể là bốn đỉnh hoạc ba đỉnh). Khi đó nếu như O là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các đỉnh nằm trên mặt đáy thì SO là trục đường tròn ngoại tiêp của đa giác đáy hay nói cách khác: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SO$.
  Chú ý:
  Nếu đáy là:
  + Tam giác đều, O là trọng tâm.
  + Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.
  + Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

3. Khoảng cách dựng gián tiếp

Giả sử ta muốn dựng trục tiếp khoảng cách tù điểm (P) tới mặt phẳng (P) mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm B ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới khi đó ta sẽ thục hiện tính khoảng cách gián tiếp như sau:

- **Cách 1(Đổi điểm) Tính thông qua tỉ số khoảng cách.**

  TH1: Khi $AB \| (P)$ thì:
  $$\mathrm{d}(A,(P)) = \mathrm{d}(B,(P))$$
  TH2: Khi $AB \cap (P) = \{I\}$ thì:
  $$\frac{\mathrm{d}(A,(P))}{\mathrm{d}(B,(P))} = \frac{AI}{BI}$$

- **Cách 2 (Đổi đỉnh): Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:**

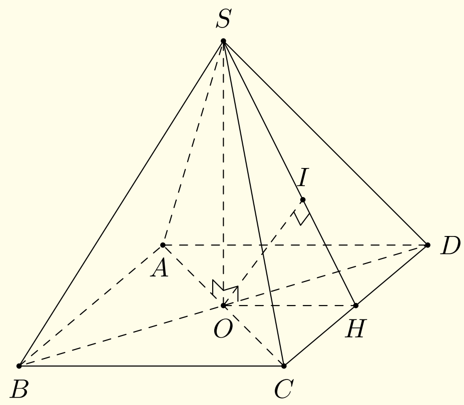
  Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp có thể qui về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính khoảng cách này dưa vào công thức:
  $$h = \frac{3V}{S}$$
  V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.
  $$h = \frac{V}{S}$$
  V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiêu cao của hình lăng trụ.

  Phương pháp này áp dụng đươc trong trường hợp sau: Giả sử có thể qui bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường là không tính được trục tiếp bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như định lí Pitago, công thức lượng giác,.. Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy, chiều cao của nó sẽ được xác định bởi công thức đơn giản trên.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 38 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. (B) $\sqrt{2}a$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD, H$ là trung điểm CD. Trong (SOH), kẻ $OI \perp SH$.

Có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OI$.

Mà $OI \perp SH$ nên $OI \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OI$.

Vì O là trung điểm BD nên

$$\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OI = \frac{2SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$$

Có $AD = AC \sin 45^\circ = a\sqrt{2}, OH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Chọn đáp án (C) □

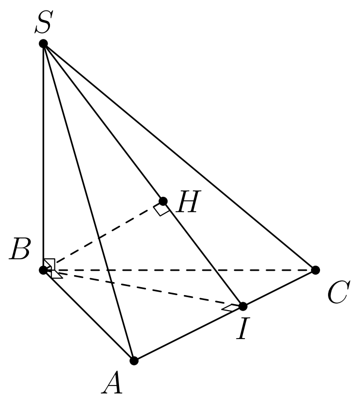
C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 38.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

(A) $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. (B) $\dfrac{4a}{5}$. (C) $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$.

Lời giải.

Trong tam giác ABC kẻ $BI \perp AC$ và trong tam giác SBI kẻ $BH \perp SI$.



Ta có $\begin{cases} AC \perp BI \\ AC \perp SB \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBI) \Rightarrow (SAC) \perp (SBI)$.

Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (SBI) \\ (SAC) \cap (SBI) = SI \\ BH \perp SI \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}\,(B,(SAC)) = BH$.

Ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BI^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{61}{144a^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = BH = \dfrac{12a\sqrt{61}}{61}$.

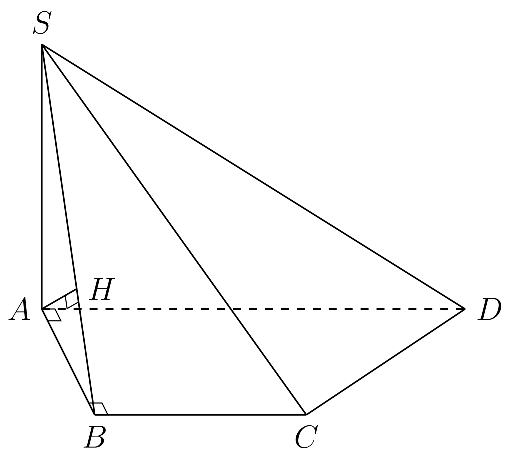
Chọn đáp án A □

Câu 38.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$. Biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC). Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD).

A $d = \dfrac{3a\sqrt{50}}{80}$. B $d = \dfrac{3a\sqrt{30}}{40}$. C $d = \dfrac{3a\sqrt{10}}{20}$. D $d = \dfrac{3a\sqrt{15}}{60}$.

Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ với AD trùng với Ox, AB trùng với Oy, AS trùng với Oz. Không mất tính tổng quát ta có thể cho $a = 1$, khi đó ta có $A(0;0;0), B(0;1;0), D(2;0;0), S(0;0;\sqrt{3}), C(1;1;0)$.



Vì $(SBC) \perp (SAB)$ nên $H \in SB$. Phương trình đường

$SB : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow H(0; 1+t; -\sqrt{3}t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow H\left(0; \dfrac{3}{4}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) đi qua D và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}\right] = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2)$: $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 2z - 2\sqrt{3} = 0$.

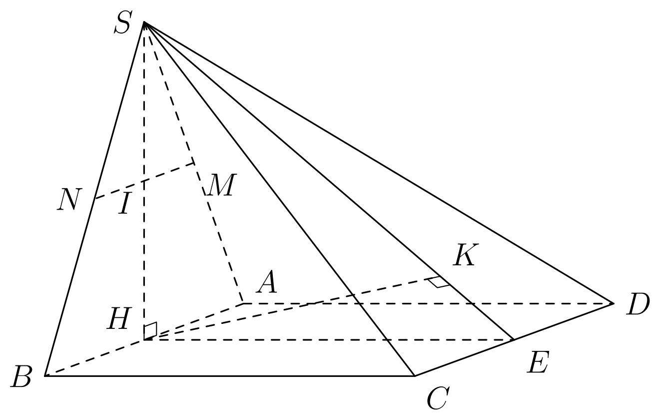
Vậy $d_{(H,(SCD))} = \dfrac{\left|0 + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{2\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+3+4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{30}}{40}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38.3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy và tam giác SAB đều. Gọi M là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{3}}{14}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H, E, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD, SB, SH. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SH \perp (ABCD)$.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB và I là trung điểm của SH nên M, I, N thẳng hàng và $MN \parallel (SCD) \Rightarrow d(M,(SCD)) = d(I,(SCD)) = \dfrac{1}{2}d(H,(SCD))$.

Gọi K là đường cao kẻ từ H xuống $SE \Rightarrow HK = d(H,(SCD))$.

Xét tam giác SHE có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HE = a$

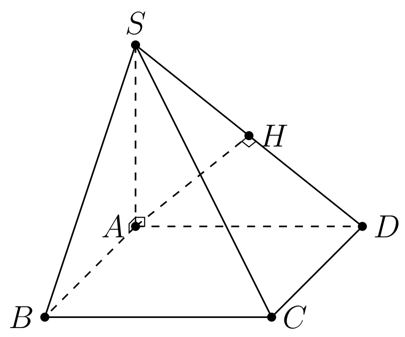
$\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow d(M,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 38.4. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

Ⓐ $a\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $2a\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Do $AB \parallel CD \Rightarrow \mathrm{d}(B;(SCD)) = \mathrm{d}(A;(SCD))$.

Dựng $AH \perp SD$, do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Lại có $AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\mathrm{d}(B;(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

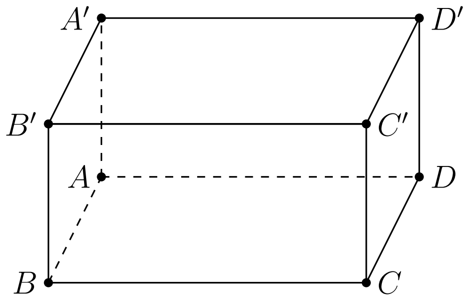
Câu 38.5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 10. Tính khoảng cách giữa haimặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.

Ⓐ 10. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ 100. Ⓓ 5.

Lời giải.

Theo tính chất của hình lập phương thì $AB \perp (ADD'A')$ và $AB \perp (BCC'B')$.

Hay khoảng cách giữa haimặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ bằng $AB = 10$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 38.6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

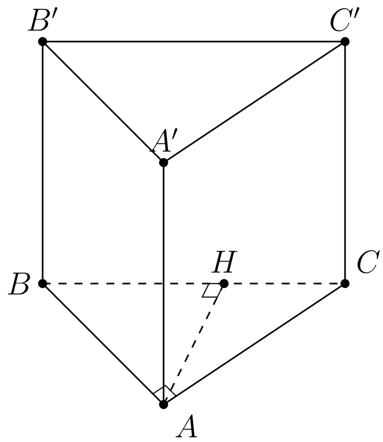
(A) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.　(B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.　(C) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.　(D) $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ AH vuông góc BC tại H, khi đó $\mathrm{d}\left(AA', (BB'C'C)\right) = \mathrm{d}\left(A, (BB'C'C)\right) = AH$.

Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$ nên $AC = a$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 38.7. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

(A) $\mathrm{d} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$.　(B) $\mathrm{d} = \dfrac{60}{\sqrt{769}}$.　(C) $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{769}}{60}$.　(D) $\mathrm{d} = \dfrac{\sqrt{34}}{12}$.

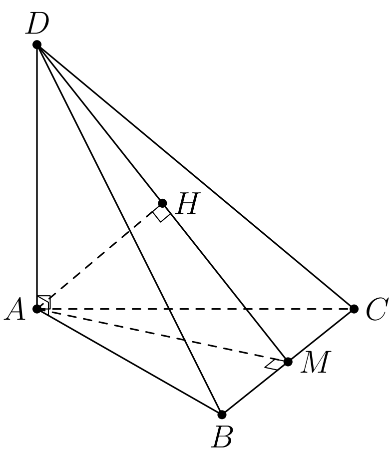
Lời giải.

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. Kẻ $AM \perp BC, M \in BC$ và $AH \perp DM$, $H \in DM$ khi đó ta có $AH \perp (BCD)$ nên $\mathrm{d} = AH$.

Ta có

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{72}$.

Từ đó suy ra $\mathrm{d} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$.

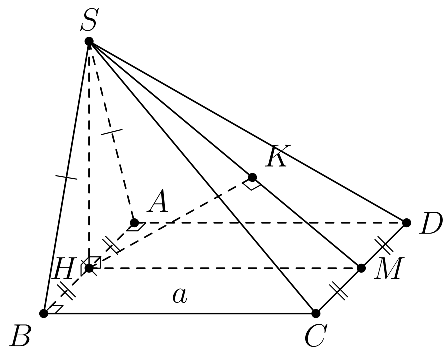


Chọn đáp án A □

Câu 38.8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. B $h = a$. C $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Ta có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Vì $AH \,/\!/\, CD$, $CD \subset (SCD)$ nên $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD))$.

Kẻ $HK \perp SM$ tại K.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp HM \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHM)$.

Lại có $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD)$ tại K.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD)) = HK$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$, $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $HK = \dfrac{SH \cdot HM}{SM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt ABC và SBC là tam giác đều, hai mặt còn lại là tam giác vuông. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) biết $BC = a\sqrt{2}$.

A $d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. B $d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C $d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. D $d\left(A;(SBC)\right) = a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $CS = CA$ nên $\triangle SCA$ là tam giác vuông tại C; tương tự $\triangle SBA$ là tam giác vuông tại B.

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A lên SM.

Khi đó H là hình chiếu của A lên (SBC). Thật vậy:

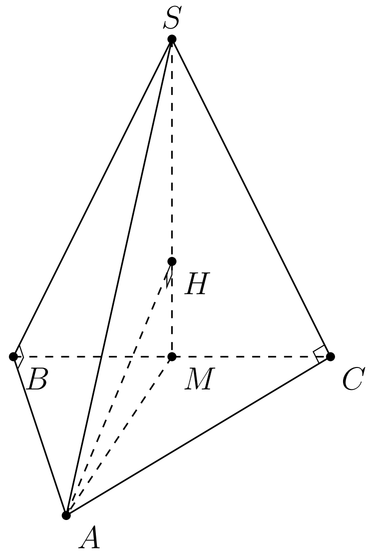
Vì $BC \perp SM$, $BC \perp AM$ nên $BC \perp (SAM)$.

Do đó, $BC \perp AH$. Suy ra $AH \perp (SBC)$.

Ta có $SM = AM = BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$; $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = 2a$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{\triangle SMA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

Hơn nữa, $S_{\triangle SMA} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot SM$. Từ đó ta tính được $SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 38.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AD = 2a$, $AB = BC = SA = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A $h = \dfrac{a}{3}$. B $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. C $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. D $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

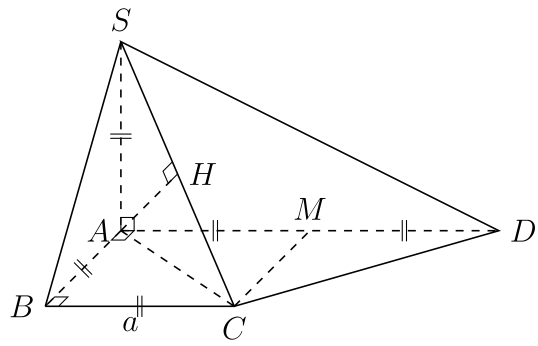
Vì M là trung điểm AD nên $\dfrac{\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right)}{\mathrm{d}\left(M,(SCD)\right)} = 2$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right)$.

Dựng $AH \perp SC$ (1)

Ta có $\begin{cases} AC \perp CD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AH$.



Xét tam giác vuông SAC vuông tại A

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

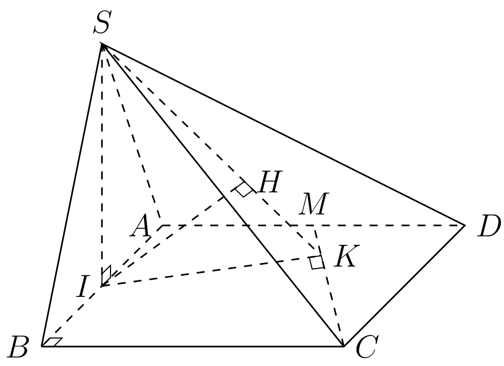
Vậy $\mathrm{d}\left(M,(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC).

A $\dfrac{3\sqrt{2}a}{8}$. B $\dfrac{\sqrt{30}a}{10}$. C $\dfrac{\sqrt{30}a}{8}$. D $\dfrac{3\sqrt{7}a}{14}$.

Lời giải.



Kẻ $IK \perp CM$ tại K, kẻ $IH \perp SK$ tại H.

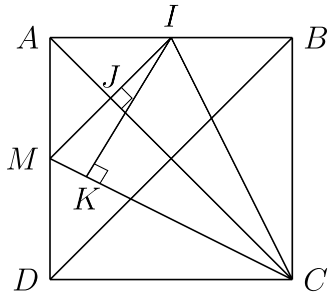
Mà $CM \perp SI$ $(gt) \Rightarrow CM \perp (SIK) \Rightarrow CM \perp IH$.

Suy ra $IH \perp (SCM)$.

Do đó $\mathrm{d}(I, (SMC)) = IH$.

Ta có $IM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, IC = \sqrt{BC^2 + IB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi J là trung điểm IM.



Tam giác MIC cân tại C nên $CJ \perp IM$.

Ta có $CJ = \sqrt{IC^2 - JM^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Diện tích tam giác IMC bằng $S_{IMC} = \dfrac{1}{2} IM \times CJ = \dfrac{3}{8}a^2$.

Mặt khác $S_{IMC} = \dfrac{1}{2} IK \times CM \Rightarrow IK = \dfrac{2S}{MC} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$.

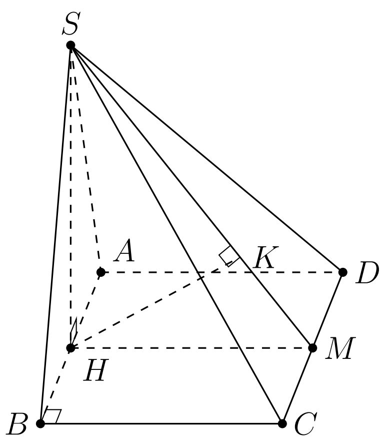
Vậy $IH = \dfrac{SI \times IK}{\sqrt{SI^2 + IK^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38.12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

(A) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{7}$. (B) $\dfrac{3a}{7}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Vì $\triangle SAB$ đều và vuông góc với đáy nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có $CD \perp (SHM)$.

Trong (SHM), gọi K là hình chiếu của H trên SM, ta có $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD)$.

Xét tam giác vuông SHM có $HM = a$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} = d(A, (SCD))$.

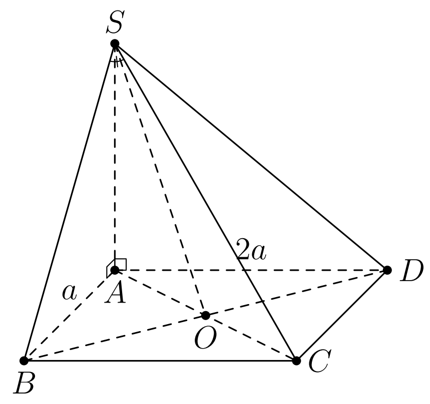
Chọn đáp án (C) □

Câu 38.13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $AB = a, AD = 2a$, góc giữa SC và (SAB) là $30°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD).

(A) $\dfrac{2a}{\sqrt{15}}$. (B) $\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$. (D) $\dfrac{22a}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$ hay hình chiếu của C lên (SAB) là điểm B nên $\widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{BSC} = 30°$. Suy ra $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = 2a\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{11}$.



Ta có $AB \parallel CD$ hay $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Tương tự như trên ta chứng minh được $CD \perp (SAD)$. Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AH \perp SD$. Khi đó $AH \perp (SCD)$ hay $d(A,(SCD)) = AH = d(B,(SCD))$.

Ta có AH là đường cao trong tam giác vuông SAD nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{11a^2} + \dfrac{1}{4a^2}$ suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$.

Vậy khoảng cách từ điểm B đến (SCD) là $\dfrac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 1$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh đáy AB sao cho $AH = 2HB$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC).

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $(SHC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là HC. Trong mp $(ABCD)$, kẻ $BI \perp HC, I \in HC$.

Suy ra $BI \perp (SHC)$. Suy ra $d(B,(SHC)) = BI$.

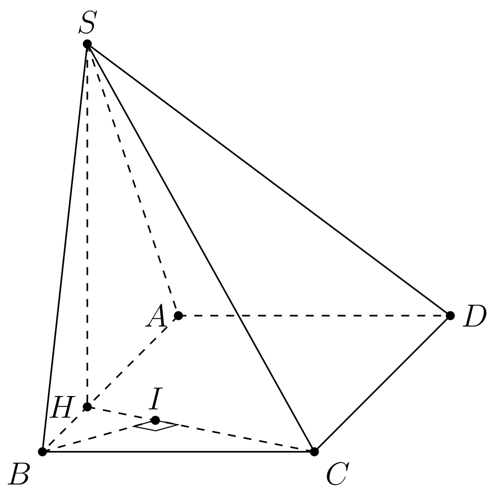
Mặt khác ta có: $\dfrac{d(A,(SHC))}{d(B,(SHC))} = \dfrac{AH}{BH} = 2$

$\Rightarrow d(A,(SHC)) = 2d(B,(SHC)) = 2BI$.

Ta có: $BH = \dfrac{1}{3}AB = 1$.

$\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BH^2} + \dfrac{1}{BC^2} = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow BI = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(A,(SHC)) = \sqrt{2}$.



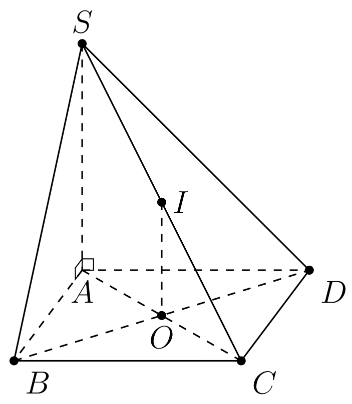
Chọn đáp án (C) □

Câu 38.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn nào?

(A) IO. (B) IA. (C) IC. (D) IB.

Lời giải.

Ta có $IO \parallel SA$ và $SA \perp (ABCD)$, suy ra $IO \perp (ABCD)$, do đó khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Chọn đáp án (A) □

Câu 38.16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AN)$.

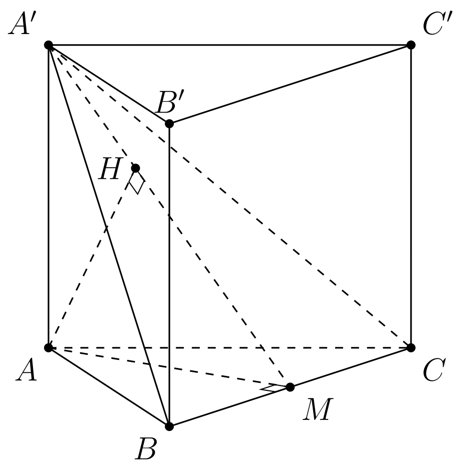
Với H là hình chiếu của A lên $A'N$

$\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Ta có $\triangle ABC$ đều nên $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle A'AB$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}}$

$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 38.17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{a}{4}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

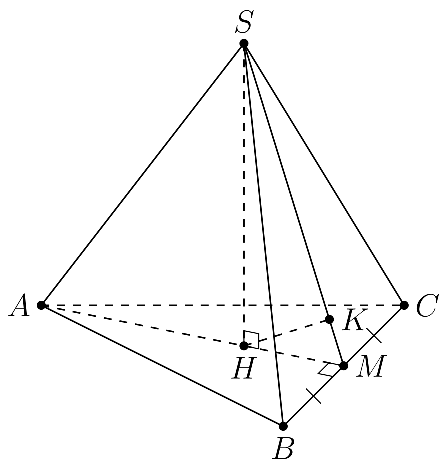
Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. Gọi $M = AH \cap BC$ suy ra M là trung điểm cạnh BC. Do đó, góc $\widehat{SMH} = 60^\circ$.

Kẻ $HK \perp SM$ với $K \in SM$. Khi đó $HK \perp (SBC)$.

Ta có $\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{AM}{HM} \cdot \mathrm{d}(H;(SBC)) = 3HK$.

Lại có

$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{12}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{4}$. Do đó $\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{3a}{4}$.



.

Chọn đáp án A □

Câu 38.18. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính khoảng cách d từ A tới (IBC).

A $d = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. B $d = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$. C $d = \dfrac{5a}{3\sqrt{2}}$. D $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A nên $A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (AA'B)$ nên tam giác $\triangle A'BC$ vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = 2a$

$\Rightarrow$ diện tích tam giác $A'BC$ là $S_{A'BC} = a^2\sqrt{5}$.

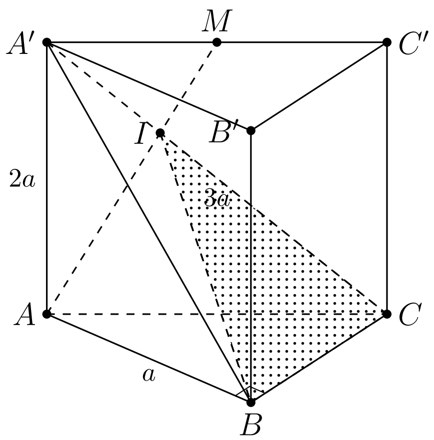
Mặt khác, vì $I \in A'C \Rightarrow (IBC) \equiv (A'BC)$ nên

$d\,(A,(IBC)) = d\,(A,(A'BC))$.

Hình chóp $A.A'BC$ có $AA' \perp (ABC)$

$\Rightarrow V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{2a^3}{3}$.

Vậy $d = d\,(A,(IBC)) = \dfrac{3V_{A.A'BC}}{S_{A'BC}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

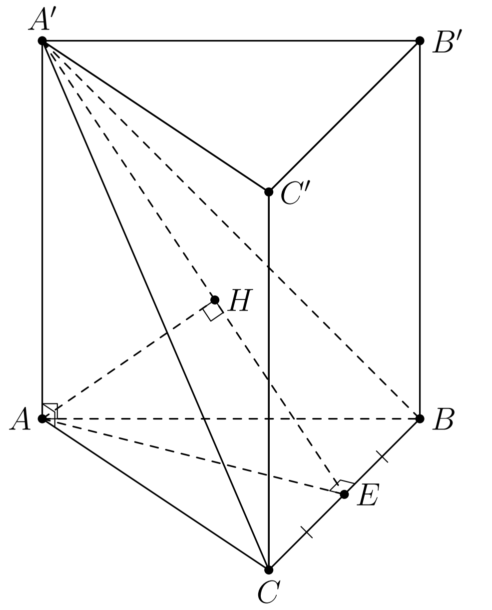


Chọn đáp án D □

Câu 38.19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. B $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. C $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. D $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh $A'E$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH \quad (1).$

Mặt khác, $AH \perp A'E \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (A'BC)$,

khi đó $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = AH$.

Xét $\triangle AA'E$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AE^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{d} = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38.20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$. Đáy BCD là tam giác cân tại B và $\widehat{CBD} = 2\alpha$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD) theo a và α.

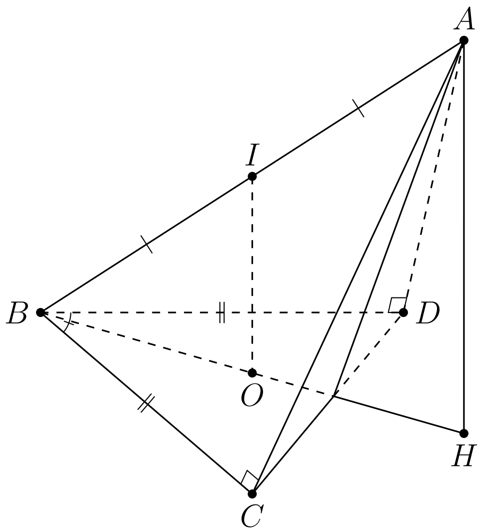
Ⓐ $\dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 2}$.

Ⓑ $\dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

Ⓒ $\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

Ⓓ $\dfrac{2a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

Lời giải.



Vì $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ nên $ABCD$ nội tiếp mặt cầu đường kính AB.

Gọi I là trung điểm AB, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Suy ra, $OI \perp (BCD)$.

Gọi H là điểm thuộc đường thẳng BO sao cho O là trung điểm của BH. Khi đó $AH \parallel IO$ nên $AH \perp (BCD)$ và $AH = 2OI$. Vậy $d(A, (BCD)) = AH$.

Trong tam giác BCD ta có

$$\frac{CD}{\sin \widehat{CBD}} = 2OD \Leftrightarrow OD = \frac{a}{2\sin 2\alpha}.$$

Ta có $ID = \dfrac{AB}{2} = a$.

Do đó $d(A, (BCD)) = AH = 2OI = 2\sqrt{ID^2 - OD^2} = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4\sin^2 2\alpha}} = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

38.1. A	38.2. B	38.3. A	38.4. B	38.5. A	38.6. B	38.7. A	38.8. A
38.9. A	38.10. B	38.11. A	38.12. C	38.13. C	38.14. C	38.15. A	38.16. C
38.17. A	38.18. D	38.19. C	38.20. B				

DẠNG 39. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức logarit

Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0, c > 0$, ta luôn có

- $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$, $m \neq 0$.
- $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a b \log_b c = \log_a c \quad (b \neq 1)$

2. Tính chất

Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D và tồn tại $u, v \in D$, thì khi đó phương trình

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 39 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \dfrac{x^2-16}{343} < \log_7 \dfrac{x^2-16}{27}$?

Ⓐ 193.   Ⓑ 92.   Ⓒ 186.   Ⓓ 184.

Lời giải.

Tập xác định: $D = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \log_3 \frac{x^2-16}{343} < \log_7 \frac{x^2-16}{27} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3 7 \left[\log_7 \left(x^2-16\right) - 3\right] < \log_7 \left(x^2-16\right) - 3\log_7 3 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\log_3 7 - 1\right) \log_7 \left(x^2-16\right) < 3\log_3 7 - 3\log_7 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_7 \left(x^2-16\right) < \frac{3\left(3\log_3 7 - \log_7 3\right)}{\log_3 7 - 1} \\
\Leftrightarrow\ & \log_7 \left(x^2-16\right) < 3\left(1+\log_7 3\right) \\
\Leftrightarrow\ & \log_7 \left(x^2-16\right) < \log_7 21^3 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 16 < 21^3 \\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{9277} < x < \sqrt{9277}
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-96; -95; \ldots; -5; 5; \ldots; 95; 96\}$.

Vậy có 184 số nguyên x thoả mãn.

Chọn đáp án Ⓓ □

Ⓒ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 39.1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $2(x + \ln(x+1)) + x^2 + 1 = y + e^y$ và $0 \le x \le 2020$?

Ⓐ 0.   Ⓑ 7.   Ⓒ 1.   Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có

$$2(x + \ln(x+1)) + x^2 + 1 = y + e^y \Leftrightarrow 2\ln(x+1) + e^{2\ln(x+1)} = y + e^y. \tag{1.1}$$

Xét hàm số $f(t) = t + e^t$, ta có $f'(t) = 1 + e^t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$$\begin{aligned}
(1.1) \ \Leftrightarrow\ & f(2\ln(x+1)) = f(y) \\
\Leftrightarrow\ & 2\ln(x+1) = y.
\end{aligned}$$

Mặt khác, $0 \le x \le 2022$ nên $1 \le x + 1 \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le y \le 2\ln 2021$ suy ra $y \in \{0; 1; 2; \ldots; 14; 15\}$.

Ta có $y = 2\ln(x+1) \Leftrightarrow x = e^{\frac{y}{2}} - 1$, với $y \in \{0; 1; 2; \ldots; 14; 15\}$ thì chỉ có $y = 0$ để $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy chỉ có duy nhất một cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 39.2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $\log_3 \dfrac{x-2}{x^2-4x+5} - x^2 + 7x - 10 = 0$. Tính $|x_1 - x_2|$.

A 3. B 5. C $\sqrt{3}$. D $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_3 \frac{3(x-2)}{x^2-4x+5} - x^2 + 7x - 11 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(3x-6) - \log_3(x^2-4x+5) + (3x-6) - (x^2-4x+5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(3x-6) + (3x-6) = \log_3(x^2-4x+5) + (x^2-4x+5). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_3(3x-6) + (3x-6) = \log_3(x^2-4x+5) + (x^2-4x+5) \\ \Leftrightarrow\ & f(3x-6) = f(x^2-4x+5) \\ \Leftrightarrow\ & 3x-6 = x^2-4x+5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 7x + 11 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39.3. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}\left(a + \sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A $a + b = 14$. B $a + b = 13$. C $a + b = 16$. D $a + b = 11$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_7\left(\frac{(2x-1)^2}{2x}\right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x \\ \Leftrightarrow\ & \log_7(2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 7} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_7(2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x \\ \Leftrightarrow\ & f\left((2x-1)^2\right) = f(2x) \\ \Leftrightarrow\ & (2x-1)^2 = 2x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} x &= \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x &= \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, suy ra $x_1 + 2x_2 = \dfrac{9-4\sqrt{5}}{4}$ (loại)
- Trường hợp 2: $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, suy ra $x_1 + 2x_2 = \dfrac{9+4\sqrt{5}}{4}$ (nhận)

Vậy $a = 9, b = 5$, suy ra $a + b = 14$.

Chọn đáp án A □

Câu 39.4. Phương trình $\ln \dfrac{x^2+3x+4}{-x+2} + x^2 + 4x + 2$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng.

A -2. B 2. C 4. D -4.

Lời giải.

Điều kiện: $x < 2$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \ln(x^2+3x+4) - \ln(-x+2) + x^2 + 3x + 4 - (-x+2) \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(x^2+3x+4\right) + (x^2+3x+4) = \ln(-x+2) + (-x+2) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \ln t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \ln\left(x^2+3x+4\right) + (x^2+3x+4) = \ln(-x+2) + (-x+2) \\ \Leftrightarrow\ & f\left(x^2+3x+4\right) = f(-x+2) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+3x+4 = -x+2 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} x &= -2+\sqrt{2} \\ x &= -2-\sqrt{2} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy ta có $x_1 + x_2 = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 39.5. Biết $x_1, x_2, (x_1 > x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\dfrac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2x=3x$ và $4x_1+2x_2=a+\sqrt{b}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=14$. (B) $a+b=12$. (C) $a+b=7$. (D) $a+b=9$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_3(x^2-2x+1)-\log_3(x)+x^2-2x+1=x \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(x-1)^2+(x-1)^2=\log_3(x)+x \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_3(x-1)^2+(x-1)^2=\log_3(x)+x \\ \Leftrightarrow\ & f\left((x-1)^2\right)=f(-x+2) \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2=x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $4x_1+2x_2=9+\sqrt{5}$. Khi đó $a=9, b=5$, suy ra $a+b=14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39.6. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

(A) $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. (B) $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. (C) $S=2$. (D) $S=-2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -2<x<-\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2(t-1)>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow\ f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$. Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39.7. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+2x+3}+x^2-x-2\leq 0$ là.

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+2x+3}>0\\ 2x^2+2x+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 3x^2+x+1>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\log_3(3x^2+x+1)-\log_3(2x^2+2x+3)+x^2-x-2\leq 0\\ \Leftrightarrow\ &\log_3(3x^2+x+1)+3x^2+x+1\leq\log_3(2x^2+2x+3)+2x^2+2x+3\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned}&\log_3(3x^2+x+1)+3x^2+x+1\leq\log_3(2x^2+2x+3)+2x^2+2x+3\\ \Leftrightarrow\ &f\left(3x^2+x+1\right)\leq f(2x^2+2x+3)\\ \Leftrightarrow\ &3x^2+x+1\leq 2x^2+2x+3\\ \Leftrightarrow\ &-1\leq x\leq 2\end{aligned}$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ suy ra $x\in\{-1;0;1;2\}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 39.8. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

A 5. B 3. C 6. D 4.

Lời giải.

Đặt $a=2x^2-15x+100, b=x^2+10x-50$ ta có bất phương trình

$$2^a - 2^b + a - b < 0 \Leftrightarrow 2^a + a < 2^b + b$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $(-\infty; +\infty)$, ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in (-\infty; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & 2^a + a < 2^b + b \\ \Leftrightarrow\ & f(a) \leq f(b) \\ \Leftrightarrow\ & a \leq b \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \\ \Leftrightarrow\ & 10 \leq x \leq 15 \end{aligned}$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{11; 12; 13; 14\}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.
Chọn đáp án D □

Câu 39.9. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}.$$

(A) $S = 2$. (B) $S = -1$. (C) $S = 1 - \sqrt{2}$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x+3>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > -1$.
Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+3} + x + 3 = \log_2(x+1) - 2(x+1) + (x+1)^2$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} - 2 + 2t > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_2\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+3} + x + 3 = \log_2(x+1) - 2(x+1) + (x+1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\sqrt{x+3}\right) = f(x+1) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x+3} = x+1 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $x = 1$. Vậy $S = 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 39.10. Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2018\pi)$.

(A) 2017 nghiệm. (B) 1009 nghiệm. (C) 2018 nghiệm. (D) 1008 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 \cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2 \cos x \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 \cos^2 x - \log_3(1 - \cos^2 x) = \log_2(\cos x) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \log_3 \frac{2^{2t}}{1 - 2^{2t}} = t \\ \Leftrightarrow\ & 4^t = 3^t - 12^t \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$ trên $(-\infty; +\infty)$, ta có $f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \ln\frac{4}{3} + 4^t \ln 4 > 0, \forall t \in (-\infty; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
Mặt khác, $f(-1) = 1$ nên $t = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình, do đó

$$\begin{aligned} & \log_2 \cos x = -1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Do $x \in (0; 2018\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{6} < k < \frac{6053}{6} \\ \frac{1}{6} < k < \frac{6055}{6} \end{array}\right.$. Vậy trong khoảng $(0; 2018\pi)$ có $1009.2 = 2018$ nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39.11. Phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có nghiệm các nghiệm x_1, x_2. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.

(A) -31. (B) 1. (C) -1. (D) 31.

Lời giải.

Điều kiện: $\frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -1 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x^2 + 3x + 2) - \log_2(3x^2 - 5x + 8) = \frac{1}{2}\left[(3x^2 - 5x + 9) - (x^2 - 3x + 2)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(x^2+3x+2)+\frac{1}{2}(x^2+3x+2)=\log_2(3x^2-5x+8)+\frac{1}{2}(3x^2-5x+8)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+\frac{1}{2}t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+\frac{1}{2}>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned}
&\log_2(x^2+3x+2)+\frac{1}{2}(x^2+3x+2)=\log_2(3x^2-5x+8)+\frac{1}{2}(3x^2-5x+8)\\
\Leftrightarrow\ & f\left(x^2+3x+2\right)=f\left(3x^2-5x+8\right)\\
\Leftrightarrow\ & x^2+3x+2=3x^2-5x+8\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=(x_1+x_2)^2-5x_1x_2=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 39.12. Biết rằng phương trình $\log_2\left(1+x^{1009}\right)=2018\log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khẳng định nào sau đây là đúng.

(A) $1<x_0<3^{\frac{1}{1008}}$. (B) $3^{\frac{1}{1007}}<x_0<1$. (C) $3^{\frac{1}{1008}}<x_0<3^{\frac{1}{1006}}$. (D) $x_0>3^{\frac{2}{1009}}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $\log_2\left(1+x^{1009}\right)=2018\log_3 x=t,(t>0)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}1+x^{1009}=2^t\\ x^{2018}=3^t\end{cases}\\
\Rightarrow\ & \left(2^t-1\right)^2=3^t\\
\Leftrightarrow\ & 2^t-1=\left(\sqrt{3}\right)^t\\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{3})^t+1=2^t\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t=1
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\ln\frac{1}{2}<0, \forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f(2)=1$ nên $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình, do đó

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(1+x^{1009}\right)=2018\log_3 x=2\\
\Leftrightarrow\ & x^{1009}=3\\
\Leftrightarrow\ & x_0=3^{\frac{1}{1008}}
\end{aligned}$$

Mà $0 < \dfrac{1}{1009} < \dfrac{1}{1008}$ nên $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$.
Chọn đáp án A □

Câu 39.13. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A $a+b=13$. B $a+b=16$. C $a+b=11$. D $a+b=14$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_7\left(\frac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x \\ \Leftrightarrow\ & \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \\ \Leftrightarrow\ & f\left((2x-1)^2\right)=f(2x) \\ \Leftrightarrow\ & (2x-1)^2=2x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} x&=\frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x&=\frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, suy ra $x_1+2x_2=\dfrac{9-4\sqrt{5}}{4}$ (loại)
- Trường hợp 2: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, suy ra $x_1+2x_2=\dfrac{9+4\sqrt{5}}{4}$ (nhận)

Chọn đáp án D □

Câu 39.14. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\leq 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$.

A 6. B 2020. C 5. D 1010.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1)+2(x-1)=2y+2^{2y}$.
Đặt $t=\log_2 2(x-1)\Rightarrow 2(x-1)=2^t$.
Ta có

$$2^t+t=2^{2y}+2y \tag{1.2}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}(1.2) \;&\Leftrightarrow\; f(t) = f(2t)\\ &\Leftrightarrow\; t = 2y\\ &\Leftrightarrow\; \log_2 2(x-1) = 2y\\ &\Leftrightarrow\; 2(x-1) = 2^{2y}\\ &\Leftrightarrow\; x = 2^{2y-1} + 1\end{aligned}$$

Mà $x \leq 2020 \Rightarrow 2^{2y-1} + 1 \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq \dfrac{1}{2}(1 + \log_2 2019)$.
Vì $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 5 cặp số nguyên dương $(x; y)$.
Chọn đáp án C □

Câu 39.15. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 = 20y$.

A -19. B -21. C -100. D 0.

Lời giải.

Điều kiện: $2e^x + y > 0$.
Ta có

$$2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y) \Leftrightarrow e^{2x} + 2x = \ln\left(2e^x + y\right) + 2e^x + y \tag{1.3}$$

Đặt $e^{2x} = u \Rightarrow 2x = \ln u$, phương trình (1.3) viết lại thành

$$\ln u + u = \ln\left(2e^x + y\right) + 2e^x + y \tag{1.4}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned}(1.4) \;&\Leftrightarrow\; u = 2e^x + y\\ &\Leftrightarrow\; e^{2x} = 2e^x + y\\ &\Leftrightarrow\; y = e^{2x} - 2e^x\\ &\Rightarrow\; y + 1 = \left(e^x - 1\right)^2\\ &\Rightarrow\; y \geq -1\end{aligned}$$

Khi đó $P = x^2 + y^2 + 20y = x^2 + (y+1)^2 + 18y - 1 \geq 0 + 0 - 18 - 1 = -19$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = -1$.
Chọn đáp án A □

Câu 39.16. Cho phương trình $\log_2 \dfrac{4x+2019}{x^2-2x+3} = x^2-6x-2016$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là.

(A) 5.　(B) 6.　(C) 4.　(D) 2.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{4x+2019}{x^2-2x+3} > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{2019}{4}$.
Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{4x+2019}{x^2-2x+3} = (x^2-2x+3)-(4x+2019) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(4x+2019) - \log_2(x^2-2x+3) = (x^2-2x+3)-(4x+2019) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(4x+2019) + (4x+2019) = \log_2(x^2-2x+3) + (x^2-2x+3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned} & \log_2(4x+2019) + (4x+2019) = \log_2(x^2-2x+3) + (x^2-2x+3) \\ \Leftrightarrow\ & f(4x+2019) = f\left(x^2-2x+3\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4x+2019 = x^2-2x+3 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 48 \\ x = -42 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x_1 + x_2 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39.17. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log \frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} + (x+1)^3 = x^2+6x+7.$$

(A) -2.　(B) 0.　(C) $-2-\sqrt{3}$.　(D) $-2+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{6} < x < -1 \\ -1+\sqrt{6} < x \end{array}\right.$.
Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log(x^3+3x^2-3x-5) - \log(x^2+1) = x^2+6x+7-(x+1)^3 \\ \Leftrightarrow\ & \log(x^3+3x^2-3x-5) + (x^3+3x^2-3x-5) = \log(x^2+1) + x^2+1 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 10} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\log(x^3+3x^2-3x-5) + (x^3+3x^2-3x-5) = \log(x^2+1) + x^2+1$$

$$\Leftrightarrow\ f\left(x^3+3x^2-3x-5\right)=f\left(x^2+1\right)$$
$$\Leftrightarrow\ x^3+3x^2-3x-5=x^2+1$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng 0.

Chọn đáp án B ☐

Câu 39.18. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

A $S=2$. B $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. C $S=-2$. D $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}-2<x<-\dfrac{1}{2}\\x>0\end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2(t-1)>0,\forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$
$$\Leftrightarrow\ f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$. Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 39.19. Cho phương trình $\log(x-3)+2\sqrt{x-3}+6x-16=2\log(x-4)+2(x-3)^3$ có một nghiệm có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, trong đó a,b là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng.

(A) 14. (B) 5. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Điều kiện: $x>4$.

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log(x-3)+(x-3)\sqrt{x-3}+3\sqrt{x-3}+3(x-3)+1=\log(x-4)+(x-4+1)^3\\ \Leftrightarrow\ &\log\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x-3}+1\right)^3=\log(x-4)+(x-4+1)^3\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t^3$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+3t^2>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\begin{aligned}&\log\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x-3}+1\right)^3=\log(x-4)+(x-4+1)^3\\ \Leftrightarrow\ &f\left(\sqrt{x-3}\right)=f(x-4)\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{x-3}=x-4\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}x&=\frac{9+\sqrt{5}}{4}\\ x&=\frac{9-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$, suy ra $a=9, b=5$. Vậy $a+b=14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39.20. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

(A) $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. (B) $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. (C) $S=2$. (D) $S=-2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{aligned}&-2<x<-\frac{1}{2}\\ &x>0\end{aligned}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2(t-1)>0, \forall t\in(0;+\infty)$.
Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó

$$\log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2+\frac{1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} = 2+\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

39.1. C	39.2. D	39.3. A	39.4. D	39.5. A	39.6. A	39.7. B	39.8. D
39.9. D	39.10. C	39.11. B	39.12. A	39.13. D	39.14. C	39.15. A	39.16. B
39.17. B	39.18. B	39.19. A	39.20. A				

DẠNG 40. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$ thì

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (*)$$

Tên gọi

- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ đọc là "Tích phân từ a đến b của $f(x)\,\mathrm{d}x$".
- a và b gọi là hai cận của tích phân, trong đó a là cận dưới và b là cận trên.
- $(*)$ gọi là công thức **Newton-Leibnitz**.

2. Tính chất

a) $\int\limits_a^b [m\cdot f(x) \pm n\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = m\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm n\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b (x)\,\mathrm{d}x, \forall c \in [a;b].$

c) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x; \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

d) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$

3. Phương pháp đổi biến số

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \phi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ sao cho $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ và $a \le \phi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

hay $$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 40 (Đề minh họa 2023 - BGD&ĐT).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) $\dfrac{3}{4}$. (C) 6. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $u=2x \Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$ hay $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u(0)=0$, $x=2$ thì $u(2)=4$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(4)-F(0))+(G(4)-G(0))\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(4)+G(4))-(F(0)+G(0))\right]=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 40.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-25)+G(-25)=6$ và $F(-33)+G(-33)=9$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-5}^{-4} f(8x+7)\mathrm{d}x$.

(A) 15. (B) $-\dfrac{3}{16}$. (C) -3. (D) $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Đặt $u=8x+7 \Rightarrow \mathrm{d}u=8\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\mathrm{d}u$.

Khi $x=-5$ thì $u(-5)=-33$, $x=-4$ thì $u(-4)=-25$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-5}^{-4} f(8x+7)\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int\limits_{-33}^{-25} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\int\limits_{-33}^{-25} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left[\int\limits_{-33}^{-25} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-33}^{-25} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[(F(-25)-F(-33))+(G(-25)-G(-33))\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[(F(-25)+G(-25))-(F(-33)+G(-33))\right]=-\frac{3}{16}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(22)+G(22)=-1$ và $F(-33)+G(-33)=0$. Tính $\int\limits_{-6}^{5} f(5x-3)\mathrm{d}x$.

(A) 11. (B) -11. (C) $\dfrac{1}{10}$. (D) $-\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Đặt $u=5x-3 \Rightarrow \mathrm{d}u=5\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}u$.
Khi $x=-6$ thì $u(-6)=-33$. Khi $x=5$ thì $u(5)=22$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-6}^{5} f(5x-3)\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int\limits_{-33}^{22} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\int\limits_{-33}^{22} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\left[\int\limits_{-33}^{22} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-33}^{22} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &=\frac{1}{10}\left[(F(22)-F(-33))+(G(22)-G(-33))\right]\\ &=\frac{1}{10}\left[(F(22)+G(22))-(F(-33)+G(-33))\right]=-\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40.3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(52)+G(52)=0$ và $F(-46)+G(-46)=-8$. Tính $\int\limits_{-7}^{7} f(7x+3)\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{4}{7}$. (B) 8. (C) $\dfrac{1}{14}$. (D) $-\dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Đặt $u=7x+3 \Rightarrow \mathrm{d}u=7\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{7}\mathrm{d}u$.
Khi $x=-7$ thì $u(-7)=-46$. Khi $x=7$ thì $u(7)=52$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-7}^{7} f(7x+3)\mathrm{d}x &= \frac{1}{7}\int\limits_{-46}^{52} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{7}\int\limits_{-46}^{52} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{14}\left[\int\limits_{-46}^{52} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-46}^{52} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &=\frac{1}{14}\left[(F(52)-F(-46))+(G(52)-G(-46))\right]\\ &=\frac{1}{14}\left[(F(52)+G(52))-(F(-46)+G(-46))\right]=\frac{4}{7}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40.4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(132)+G(132)=3$ và $F(-28)+G(-28)=8$. Tính $\int\limits_{-3}^{17} f(8x-4)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) -5. (C) $\dfrac{5}{16}$. (D) $-\dfrac{5}{16}$.

Lời giải.

Đặt $u=8x-4 \Rightarrow \mathrm{d}u=8\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\mathrm{d}u$.

Khi $x=-3$ thì $u(-3)=-28$. Khi $x=17$ thì $u(17)=132$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-3}^{17} f(8x-4)\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int\limits_{-28}^{132} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int\limits_{-28}^{132} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left[\int\limits_{-28}^{132} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-28}^{132} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[(F(132)-F(-28))+(G(132)-G(-28))\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[(F(132)+G(132))-(F(-28)+G(-28))\right] = -\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40.5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(147)+G(147)=2$ và $F(28)+G(28)=-3$. Tính $\int\limits_{4}^{21} f(7x)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) $\dfrac{5}{14}$. (C) -5. (D) $-\dfrac{5}{14}$.

Lời giải.

Đặt $u=7x \Rightarrow \mathrm{d}u=7\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\mathrm{d}u$.

Khi $x=4$ thì $u(4)=28$. Khi $x=21$ thì $u(21)=147$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{4}^{21} f(7x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{7}\int\limits_{28}^{147} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{7}\int\limits_{28}^{147} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\left[\int\limits_{28}^{147} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{28}^{147} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{14}\left[(F(147)-F(28))+(G(147)-G(28))\right]\\ &= \frac{1}{14}\left[(F(147)+G(147))-(F(28)+G(28))\right] = \frac{5}{14}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(90)+G(90)=4$ và $F(27)+G(27)=9$. Tính $\int\limits_{3}^{12} f(7x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) $\dfrac{5}{14}$. (C) -5. (D) $-\dfrac{5}{14}$.

Lời giải.

Đặt $u=7x+6 \Rightarrow \mathrm{d}u=7\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\mathrm{d}u$.

Khi $x=3$ thì $u(3)=27$. Khi $x=12$ thì $u(12)=90$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{3}^{12} f(7x+6)\mathrm{d}x &= \frac{1}{7}\int\limits_{27}^{90} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{7}\int\limits_{27}^{90} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\left[\int\limits_{27}^{90} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{27}^{90} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{14}\left[(F(90)-F(27))+(G(90)-G(27))\right]\\ &= \frac{1}{14}\left[(F(90)+G(90))-(F(27)+G(27))\right] = -\frac{5}{14}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40.7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(20) + G(20) = -4$ và $F(8) + G(8) = 8$. Tính $\int\limits_1^7 f(2x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -4.

Lời giải.

Đặt $u = 2x + 6 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$.
Khi $x = 1$ thì $u(1) = 8$. Khi $x = 7$ thì $u(7) = 20$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_1^7 f(2x+6)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_8^{20} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_8^{20} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int\limits_8^{20} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_8^{20} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(20)-F(8)) + (G(20)-G(8))\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(20)+G(20)) - (F(8)+G(8))\right] = -3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40.8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(30) + G(30) = 5$ và $F(2) + G(2) = -3$. Tính $\int\limits_{-2}^{12} f(2x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 2. (B) 8. (C) -2. (D) -8.

Lời giải.

Đặt $u = 2x + 6 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$.
Khi $x = -2$ thì $u(-2) = 2$. Khi $x = 12$ thì $u(12) = 30$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-2}^{12} f(2x+6)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_2^{30} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_2^{30} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int\limits_2^{30} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^{30} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(30)-F(2)) + (G(30)-G(2))\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(30)+G(30)) - (F(2)+G(2))\right] = 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40.9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(50) + G(50) = -2$ và $F(-58) + G(-58) = -7$. Tính $\int\limits_{-6}^{6} f(9x-4)\mathrm{d}x$.

(A) $-\frac{5}{9}$. (B) $-\frac{5}{18}$. (C) $\frac{5}{18}$. (D) $\frac{5}{9}$.

Lời giải.

Đặt $u = 9x - 4 \Rightarrow \mathrm{d}u = 9\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\mathrm{d}u$.

Khi $x=-6$ thì $u(-6)=-58$. Khi $x=6$ thì $u(6)=50$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-6}^{6} f(9x-4)\mathrm{d}x &= \frac{1}{9}\int\limits_{-58}^{50} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\int\limits_{-58}^{50} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left[\int\limits_{-58}^{50} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-58}^{50} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{18}\left[(F(50)-F(-58))+(G(50)-G(-58))\right]\\ &= \frac{1}{18}\left[(F(50)+G(50))-(F(-58)+G(-58))\right] = \frac{5}{18}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 40.10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(32)+G(32)=-8$ và $F(-44)+G(-44)=-3$. Tính $\int\limits_{-9}^{10} f(4x-8)\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{5}{4}$. (B) $-\frac{5}{8}$. (C) $\frac{5}{8}$. (D) $-\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Đặt $u=4x-8 \Rightarrow \mathrm{d}u = 4\mathrm{d}x$, hay $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}u$.
Khi $x=-9$ thì $u(-9)=-44$. Khi $x=10$ thì $u(10)=32$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{-9}^{10} f(4x-8)\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int\limits_{-44}^{32} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int\limits_{-44}^{32} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[\int\limits_{-44}^{32} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-44}^{32} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[(F(32)-F(-44))+(G(32)-G(-44))\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[(F(32)+G(32))-(F(-44)+G(-44))\right] = -\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 40.11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{3} f(|3-2x|)\,\mathrm{d}x$.

(A) 16. (B) 3. (C) 15. (D) 8.

Lời giải.

Vì $\int\limits_{3}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Đặt $t = 3 - 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\,\mathrm{d}x$. Khi $x = -2 \Rightarrow t = 7$, $x = 3 \Rightarrow t = -3$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_7^{-3} -\frac{1}{2} f(|t|)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-3}^{7} f(|t|)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-3}^{3} f(|t|)\,\mathrm{d}t + \int_3^7 f(|t|)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^7 f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}(2\cdot 6 + 4) = 8.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 40.12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f\left(\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $I = \int_0^1 \left[2f(1-x) - 3x^2 + 5\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 6. B 4. C 5. D 3.

Lời giải.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f\left(\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x = 1 \quad (*)$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\cos x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Từ $(*)$ suy ra $-\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)dx$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[2f(1-x) - 3x^2 + 5\right]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(-3x^2 + 5\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x + 4 = 2\cdot 1 + 4 = 6.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 40.13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=25$ và $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{1073}{15}$. Ⓑ $\frac{458}{15}$. Ⓒ $\frac{838}{15}$. Ⓓ $\frac{1016}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}\geq 0$, $\forall x\in[2;3]$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;3]$.

Suy ra $f(x)\geq f(2)=25\Rightarrow f(x)>0$, $\forall x\in[2;3]$.

Do đó, ta có $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x$, $\forall x\in[2;3]$ (1).

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức (1) ta có $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x=\int 4x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{f(x)}\Rightarrow t^2=f(x)\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\int \frac{2t}{t}\,\mathrm{d}t=2x^2+C\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=2x^2+C.\\ \Rightarrow\ & 2\sqrt{f(2)}=2\cdot 2^2+C\Rightarrow 2\cdot\sqrt{25}=8+C\Rightarrow C=2.\\ \Rightarrow\ & \sqrt{f(x)}=x^2+1\Rightarrow f(x)=\left(x^2+1\right)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 \left(x^2+1\right)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{838}{15}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 40.14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=1$. Ⓑ $I=8$. Ⓒ $I=-12$. Ⓓ $I=-8$.

Lời giải.

Gọi $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=a$.

Theo giả thiết ta có

- $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$

$$\Leftrightarrow a\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow \int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{a}\Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{10}{a}\Rightarrow a=\frac{20}{3}.$$

- $2f(1)-f(0)=2\Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{20}{3}+b\right)-b=2\Leftrightarrow b=-\dfrac{34}{3}$.

Do đó, $f(x) = \dfrac{20}{3}x - \dfrac{34}{3}$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\dfrac{20}{3}x - \dfrac{34}{3}\right)\mathrm{d}x = -8$.

Chọn đáp án D □

Câu 40.15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x\sin x$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2}{2018}$. B. $\dfrac{2}{1009}$. C. $\dfrac{4}{2019}$. D. $\dfrac{2}{2019}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(-x) + 2018f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x + 2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,\mathrm{d}x \quad (1).$$

Xét $P = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

$$P = 2x\cdot(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

Từ (1) suy ra $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{2019}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40.16. Biết $\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi}{2}$. B. 0. C. π. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;\, b]$ mà $f(a + b - x) = f(x)$ thì

$$\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Thật vậy, đặt $u = a + b - x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$.
Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x &= (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b (a+b-x)\,f(a+b-x)\,\mathrm{d}x\\ &= (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{u(a)}^{u(b)} uf(u)\,\mathrm{d}u\\ &= (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40.17. Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x \in \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int\limits_4^7 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z}, b > 0)$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

A 250. B 251. C 133. D 221.

Lời giải.

Xét nguyên hàm $J = \int \dfrac{x+7}{\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sqrt{2x-3} \Rightarrow u^2 = 2x - 3 \Rightarrow u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Suy ra $x = \dfrac{u^2+3}{2}$.

Do đó

$$\begin{aligned}J &= \int\left(\frac{u^2+3}{2}+7\right)\mathrm{d}u = \int\left(\frac{u^2}{2}+\frac{17}{2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{u^3}{6}+\frac{17}{2}u + C = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^3}{6}+\frac{17}{2}\sqrt{2x-3}+C.\end{aligned}$$

Ta có $f(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}+\dfrac{17}{2}+C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{-26}{3}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_4^7 \left[\frac{\left(\sqrt{x-3}\right)^3}{6}+\frac{17}{2}\sqrt{x-3}+\frac{-26}{3}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_4^7 \left[\frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{17}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}}+\frac{-26}{3}\right]\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{15}(x-3)^{\frac{5}{2}}+\frac{17}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{26}{3}x\right]\Bigg|_4^7\\ &= \frac{-66}{5}-\frac{-434}{15}=\frac{236}{15}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=236; b=15 \Rightarrow a+b=251$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 20. (B) 13. (C) 7. (D) 12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(2x)\right)\\ &= \frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(f(2)-0\right)-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}(2x)\\ &= 8-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(u)\,\mathrm{d}(u)\ \text{ với } u=2x.\\ &= 8-1=7.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40.19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Tích phân $\int\limits_0^1 x^3f'\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

(A) 1. (B) -1. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 f'\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 t f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}\left[f(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[t f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f(1) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]. \end{aligned}$$

Lại có $\int_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}(x-1)$

$$\xrightarrow{u=x-1} \int_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$$

Suy ra $\int_0^1 x^3 f'\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40.20. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 1$ và $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $\forall x > 0$. Khi đó $I = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $I = -\frac{3}{2}$. Ⓑ $I = \frac{3}{2}$. Ⓒ $I = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1$. Ⓓ $I = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Do $f(1) = 1$ nên $1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x + 1)\,\mathrm{d}(\ln x + 1) = \frac{(\ln x + 1)^2}{2}\Bigg|_1^{\mathrm{e}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

40.1. B	40.2. D	40.3. A	40.4. C	40.5. B	40.6. D	40.7. C	40.8. A
40.9. C	40.10. B	40.11. D	40.12. A	40.13. C	40.14. D	40.15. C	40.16. A
40.17. B	40.18. C	40.19. D	40.20. B				

DẠNG 41. CỰC TRỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cực trị

- Số cực trị của hàm số là số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$.
- Do đó, để tìm số điều kiện để hàm số có n cực trị thì ta đi tìm điều kiện của m để phương trình $f'(x) = 0$ có n nghiệm bội lẻ.
- Ta thường phân li m của phương trình về dạng $m = g(x)$ và dùng công cụ khảo sát hàm số tìm điều kiện m thỏa mãn bài toán.
- Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ là
$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right) x + d - \frac{bc}{9a}$$
hoặc
$$g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$$
hoặc
$$g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}$$
- Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị, thì tọa độ ba điểm cực trị là:
$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 41 (Đề minh họa BGD 2022-2023).
Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$?

(A) 13. (B) 10. (C) 12. (D) 11.

Lời giải.

Ta có
$$y' = 3x^2 - 6x - m$$
Hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai

nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3; 3)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m = 0$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3; 3)$.

$$\Leftrightarrow m = 3x^2 - 6x$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3; 3)$.

Xét hàm số

$$f(x) = 3x^2 - 6x.$$

Ta có

$$f'(x) = 6x - 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	$\searrow$	-3	$\nearrow$	9

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < m < 9$.

Vậy $m \in \{-2; -1; 0; \ldots; 8\}$.

Chọn đáp án D □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 41.1. Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-5)x^2 + 5$ có 3 điểm cực trị.

A. 4. B. 10. C. 15. D. 24.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4x^3 + 2(m-5)x$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 + m - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2x^2 + m - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = -m + 5 \quad (1). \end{array}\right.$$

Hàm số $y = x^4 + (m-5)x^2 + 5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 5 > 0 \\ 2 \cdot 0^2 + m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m < 5.$$

$$\Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy tổng các giá trị nguyên dương của tham số m bằng 10.

Chọn đáp án B □

Câu 41.2. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

A 0. B -55. C -45. D 45.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 3x^2 + 2x + m$$

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt Điều này tương đương với phương trình $3x^2 + 2x + m = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt; (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{\text{CĐ}}$, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có

$$\begin{cases} x_{\text{CĐ}} + x_{\text{CT}} = -\dfrac{2}{3} < 0 \quad (2) \\ x_{\text{CĐ}} \cdot x_{\text{CT}} = \dfrac{m}{3} \quad (3) \end{cases},$$

trong đó

$$x_{\text{CĐ}} < x_{\text{CT}}$$

vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có:

$$x_{\text{CT}} > 0,$$

kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow x_{\text{CĐ}} \cdot x_{\text{CT}} = \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Mà $m < \dfrac{1}{3}, m \in (-10; 10), m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; \ldots; -1\}$.
Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn YCBT là: -45.
Chọn đáp án C □

Câu 41.3. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m+1)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B cách đều đường thẳng $\Delta\colon x - 1 = 0$?

A 1. B 0. C 2. D 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1 = 0 \quad (1)$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt.
Khi đó:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (5m^2 - 3m - 1)^2 - (2m+1) > 0 \quad (*)$$

Với điều kiện $(*)$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(5m^2 - 3m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 1. \end{cases} \quad (**)$$

Giả sử tọa độ hai điểm cực trị

$$A\left(x_1; \frac{x_1^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_1^2 + (2m+1)x_1 + 1\right)$$

$$B\left(x_2; \frac{x_2^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_2^2 + (2m+1)x_2 + 1\right).$$

Theo giả thiết, hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta\colon x - 1 = 0$ nên ta có

$$\mathrm{d}(A, \Delta) = \mathrm{d}(B, \Delta) \Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2.$$

Kết hợp với hệ $(**)$ suy ra

$$2(5m^2 - 3m - 1) = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} m &= 1 \\ m &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}\right.$$

Kiểm tra với điều kiện $(*)$ thấy $m = -\dfrac{2}{5}$ thỏa mãn.
Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 41.4. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

(A) 4. (B) -3. (C) -2. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = m - 1 \\ x = -2; y = 3 + m \end{array}\right. \Rightarrow A(0; m - 1), B(-2; m + 3).$$

Tam giác $\triangle OAB$ vuông tại 0 khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -3.$$

Kiểm tra lại $m = 1 \Rightarrow A(0; 0) \equiv O$ nên loại $m = 1$.

Vậy chỉ có $m = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41.5. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn $(C)\colon (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$. Tính tổng $m_1 + m_2$.

(A) $m_1 + m_2 = -6$. (B) $m_1 + m_2 = 10$. (C) $m_1 + m_2 = 6$. (D) $m_1 + m_2 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = -3x^2 - 6x$$

và

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) y' + 2x + 4,$$

suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0, (\Delta).$$

Đường tròn

$$(C)\colon (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$$

có tâm $I(m; m + 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}\left(I, (\Delta)\right) = R \Leftrightarrow \frac{|2m - m - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m + 3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -8. \end{array}\right.$$

Vậy $m_1 + m_2 = -6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41.6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

(A) $m < -1$.
(B) $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$.
(C) $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
(D) $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Khi đó

$$A(0;-2m-1), B\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right), C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$$

và

$$H\left(0;-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right) (H \text{ là trung điểm } BC).$$

Do tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{A} = 120°$.

Ta có

$$\begin{aligned} BH &= AH\tan 60° \\ \Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4}\cdot\sqrt{3} &= \sqrt{-\frac{m+1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{3(m+1)^4}{16} &= -\frac{m+1}{2} \\ \Leftrightarrow 3(m+1)^3 &= -8 \\ \Leftrightarrow m &= -1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{(nhận)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41.7. Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0;-3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị của m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $S \in \left(0;\dfrac{5}{2}\right)$.
(B) $S \in \left(\dfrac{9}{2};6\right)$.
(C) $S \in \left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.
(D) $S \in (2;4)$.

Lời giải.

Ta có

$$y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$$

có 3 điểm cực trị A, B, C

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2-m)$$

có 3 nghiệm phân biệt suy ra $m > 0$.

Không làm mất tính tổng quát giả sử

$$A(0;m^4-2m^2); B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right); C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right);$$

Gọi $I = AD \cap BC$ $(A, D \in Oy)$

I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; m^4 - 3m^2)$.

I là trung điểm của $AD \Rightarrow I\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

Đồng nhất ta có

$$\frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2} = m^4 - 3m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với đk ta có

$$m = 1, m = \sqrt{3} \Rightarrow S = 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy $S \in (2; 4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41.8. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

(A) $m = 4$.

(B) $m = \dfrac{17}{2}$.

(C) $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{17}{2}$.

(D) $m = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4x^3 + 4(m-4)x;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4 - m. \end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$$A(0; m+5), B\left(\sqrt{4-m}; m + 5 - (m-4)^2\right), C\left(-\sqrt{4-m}; m + 5 - (m-4)^2\right).$$

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên

$$3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{17}{2}. \end{array}\right.$$

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41.9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của (C_m) nhỏ hơn 4?

(A) 3.

(B) Vô số.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 3m$;

$y' = 4x^3 - 4mx$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0. \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị khi $m > 0$, khi đó khoảng cách hai điểm cực tiểu của (C_m) là $2\sqrt{m}$.

Theo giả thiết, ta có

$$2\sqrt{m} < 4 \Leftrightarrow m < 4.$$

Vậy các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $m \in \{3; 2; 1; 0; -1; \cdots\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41.10. Biết đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = mx^4 + nx^2 - 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị của biểu thức $2m + 3n$ bằng

A 11. B 10. C 8. D 9.

Lời giải.

Ta có

Đồ thị hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 + 2(C_1)$$

có ba điểm cực trị là

$$A(0; 2), B(1; 1), C(-1; 1).$$

Đồ thị hàm số

$$y = mx^4 + nx^2 - 1(C_2)$$

có 1 điểm cực trị là $D(0; -1)$ không trùng với ba điểm cực trị của (C_1), kết hợp đề bài ta suy ra (C_2) có ba điểm cực trị hay $m \cdot n < 0$.

(C_2) có thêm hai điểm cực trị nữa là

$$E\left(\sqrt{-\frac{n}{2m}}; -\frac{n^2}{4m} - 1\right), F\left(-\sqrt{-\frac{n}{2m}}; -\frac{n^2}{4m} - 1\right).$$

Từ giả thiết ta suy ra $E \equiv B$ hay

$$\begin{cases} \sqrt{-\dfrac{n}{2m}} = 1 \\ -\dfrac{n^2}{4m} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 4. \end{cases}$$

Do đó $2m + 3n = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 41.11. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

A $m = -1$. B $m = 2$. C $m = 0$. D $m = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó gọi

$$A(0; 1-m), B\left(\sqrt{m}; -m^2 + 1 - m\right), C\left(-\sqrt{m}; -m^2 + 1 - m\right)$$

là các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có

$$\overrightarrow{OA} = (0; 1-m), \overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{m}; 0\right), \overrightarrow{OB} = \left(\sqrt{m}; -m^2 + 1 - m\right) \text{ và } \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m}; -m^2\right).$$

Gốc O là trực tâm của tam giác ABC thì

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{m} \cdot 0 + (1-m) \cdot 0 = 0 \\ -\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} - m^2(-m^2 + 1 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -m + m^4 - m^2 + m^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m(m^3 + m^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 41.12. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120°.

A $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. B $m < -1$.

C $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. D $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x(2x^2 + m + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = -m - 1. \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Khi đó

$$A(0; -2m-1), B\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right), C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right),$$

là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy

$$AB = AC = \sqrt{-\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}$$

nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{A} = 120^\circ$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có

$$H\left(0; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right)$$

$$BH = AH \tan 60^\circ \Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(m+1)^4}{16} = -\frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 3(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 41.13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là ba đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

(A) $m = 3$.	(B) $m = -1$.	(C) $m = 1$.	(D) $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m. \end{array}\right.$$

Vậy với điều kiện $m \neq 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là

$$A(-m; -m^4 + 2m), B(0; 2m), C(m; -m^4 + 2m).$$

Để O, A, B, C là ba đỉnh của một hình thoi thì

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow -m^4 + 2m = m^4 \Leftrightarrow 2m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 (l) \\ m = 1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 41.14. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

(A) $m = \sqrt[3]{3}$. (B) $m = \sqrt{3}$. (C) $m = 3\sqrt{3}$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx.$$

Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

Vì thế hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Gọi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0;2), B\left(-\sqrt{m}; 2 - m^2\right), C\left(\sqrt{m}; 2 - m^2\right).$$

Ba điểm cực trị này lập thành tam giác cân đỉnh A.

Gọi H là trung điểm cạnh BC ta có $H(0; 2 - m^2)$.

Ta có

$$BC = \sqrt{\left(\sqrt{m} + \sqrt{m}\right)^2} = 2\sqrt{m}, AH = \sqrt{(2 - 2 + m^2)} = |m|.$$

Vậy diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2}|m| \cdot 2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41.15. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

(A) $m = 5$. (B) $m = 3$. (C) $m = 2$. (D) $m = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x[x^2 - (m-1)].$$

Xét

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 - (m-1). \end{array}\right.$$

Để hàm số có ba cực trị thì pt $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m > 1$.

Tọa độ ba điểm cực trị là

$$A(0; m^4 - 3m^2 + 2017), B\left(\sqrt{m-1}; m^4 - 4m^2 + 2016\right), C\left(-\sqrt{m-1}; m^4 - 4m^2 + 2016\right).$$

Gọi trung điểm của BC, có $H(0; m^4 - 4m^2 + 2016)$

$$AH = (m-1)^2, BC = 2\sqrt{m-1}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 32 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}(m-1)^2 = 32 \Leftrightarrow m = 5.$$

Chọn đáp án A □

Câu 41.16. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C), m là tham số. (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung khi

A $m = 5 \pm 5\sqrt{5}$.
B $m = 0$ hoặc $m = 2$.
C $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
D $m = 3 \pm 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - (m+1)).$$

Đồ thị (C) có ba điểm cực trị thì

$$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+1}. \end{array}\right.$$

Gọi

$$A(0; m), B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$$

và

$$C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$$

là ba điểm cực trị của đồ thị (C) với A là điểm cực trị thuộc trục tung.

Theo giả thiết

$$OA = BC \Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41.17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A $m = 1$.
B $m = 1; m = 0$.
C $m = 0$.
D $m = -1; m = 0$.

Lời giải.

Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là

$$ab < 0 \Leftrightarrow m > -1 \text{ loại }.$$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$$b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Cách 2: Ta có

$$y' = 4x(x^2 - m - 1).$$

Xét

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1. \end{array}\right.$$

Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m > -1$ $(*)$.

Tọa độ ba điểm cực trị là

$$A(0; m^2), B\left(\sqrt{m+1}; -2m-1\right), C\left(-\sqrt{m+1}; -2m-1\right).$$

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$$AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 0 \quad \text{thỏa mãn}(*).$$

Chọn đáp án C □

Câu 41.18. Gọi (C) là đường parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$, tìm m để (C) đi qua điểm $A(2; 24)$.

A $m = 6$. B $m = 4$. C $m = 3$. D $m = -4$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = x^3 - 2mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2m} \end{array}\right. \text{ với } m > 0.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = m^2; x = \pm\sqrt{2m} \Rightarrow y = 0.$$

Giả sử (C): $y = ax^2 + bx + c$.

Theo giả thiết (C) đi qua 4 điểm

$$M(0; m^2), N\left(\sqrt{2m}; 0\right), P\left(-\sqrt{2m}; 0\right) \text{ và } A(2; 24)$$

nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = m^2 \\ 0 = 2ma + \sqrt{2}mb + c \\ 0 = 2ma - \sqrt{2}mb + c \\ 24 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m^2 \\ 2ma + \sqrt{2}mb + m^2 = 0 \\ 2ma - \sqrt{2}mb + m^2 = 0 \\ 4a + 2b + m^2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4(L) \\ m = 6(N). \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 41.19. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A 2. B 0. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta có

$$y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx.$$

Khi

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}. \end{array}\right.$$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là

$$A(0; 3m - 2), B\left(\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2\right) \text{ và } C\left(-\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2\right).$$

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra

$$-m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1. \end{array}\right.$$

Vì $m > 0$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 41.20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1. Tổng các phần tử của S là

A -2. B 0. C 1. D -1.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

TH 1: $m \leq 0$ ta có: $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m+1$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 thì:

$$m+1=-1 \Leftrightarrow m=-2(TM).$$

TH 2: $m>0$ ta có: $y'=0$ có ba nghiệm

$$x=0, x=-\sqrt{m}, x=\sqrt{m}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$m+1$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Với

$$y_{CT}=f\left(-\sqrt{m}\right)=f\left(\sqrt{m}\right)=-m^2+m+1.$$

Để hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 thì

$$-m^2+m+1=-1 \Leftrightarrow -m^2+m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \quad \text{(loại)} \\ m=2 \quad \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị của tham số thỏa mãn điều kiện đề bài là $S=-2+2=0$.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

41.1. B	41.2. C	41.3. A	41.4. B	41.5. A	41.6. D	41.7. D	41.8. D
41.9. B	41.10. C	41.11. D	41.12. C	41.13. C	41.14. D	41.15. A	41.16. C
41.17. C	41.18. A	41.19. A	41.20. B				

DẠNG 42. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Môđun của số phức

Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z.

Kí hiệu $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tính chất:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |\overrightarrow{OM}|$.
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$.
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.
- $|kz| = |k|. \cdot |z|, k \in \mathbb{R}$.
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Một số bất đẳng thức:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2$ $(k \geq 0)$.
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2$ $(k \leq 0)$.
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2$ $(k \leq 0)$.
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2$ $(k \geq 0)$.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 42 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 - 3 - 4i| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

(A) 28. (B) $18 + 4\sqrt{6}$. (C) 14. (D) $11 + 4\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2|z| = |z^2 - 3 - 4i| \geq ||z| - |3 + 4i|| \\ \Leftrightarrow\ & 2|z| \geq ||z|^2 - 5| \Leftrightarrow 2|z| \geq |z|^2 - 5 \geq -2|z| \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} |z|^2 - 2|z| - 5 \leq 0 \\ |z|^2 + 2|z| - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \leq 1 + \sqrt{6} \\ |z| \geq -1 + \sqrt{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} M = 1 + \sqrt{6} \\ m = -1 + \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow M^2 + m^2 = 14. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 42.1. Xét tập hợp S các số phức $x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|3z - \overline{z}| = |(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q = |z - \overline{z}|(2 - x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0 i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị của $T = M \cdot x_0 \cdot y_0^2$.

(A) $T = -\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. (B) $T = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. (C) $T = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. (D) $T = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $|2x + 4yi| = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 4y^2 = 4 - x^2. \end{cases}$

$Q = |z - \overline{z}|(2 - x)$

$$\Rightarrow Q^2 = (2-x)^2|4yi|^2 = (2-x)^2(4-x^2) = \frac{1}{3}(2-x)^3(6+3x) \overset{AM-GM}{\leq} \frac{1}{3}\left(\frac{6-3x+6+3x}{4}\right)^4 = 27$$

$\Rightarrow M = \dfrac{9}{\sqrt{3}}$ đạt được khi $\begin{cases} 2 - x_0 = 6 + 3x_0 \\ 4y_0^2 = 4 - x_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ {y_0}^2 = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Suy ra $T = \dfrac{9}{\sqrt{3}} \cdot (-1) \cdot \dfrac{3}{4} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.2. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 + 2i| = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z^2 + (2+2i)z - 1 + 2i|$. Giá trị của biểu thức $T = M^2 + m^2$ bằng

(A) 103. (B) 101. (C) 104. (D) 102.

Lời giải.

Đặt $A = |z^2 + (2+2i)z - 1 + 2i| = |(z+i)(z+2+i)|$.

Đặt $w = z + i$, $w = a + bi$, điểm $M(a; b)$ biểu diễn w.

Theo đề bài $|z + 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow |w + 1 + i| = 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2 - 2a - 2b$.

Ta có

$$\begin{aligned}A &= |w|\cdot|w+2| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(a+2)^2+b^2} = \sqrt{(2-2a-2b)(6+2a-2b)}\\ A &= 2\sqrt{(1-(a+b))(3+(a-b))} = 2\sqrt{3-2a-4b-a^2+b^2} = 2\sqrt{(b-2)^2-(a+1)^2}\\ A &= 2\sqrt{(b-2)^2+(b+1)^2-4} = 2\sqrt{2b^2-2b+1} = 2\sqrt{f(b)}.\end{aligned}$$

Với $f(b) = 2b^2-2b+1$, mà $-3 \le b \le 1$ do $(b+1)^2 \le 4$.
Ta có $f'(b) = 4b-2$, $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2} \in [-3;1]$.
$f(-3) = 25$, $f(1) = 1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $M = 2\sqrt{25} = 10$; $m = 2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$ do đó $T = M^2+m^2 = 102$.
Chọn đáp án D □

Câu 42.3. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)|z|z-(1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1-z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1+3z_2|$.

A) $M = 25$. B) $M = 5$. C) $M = \sqrt{19}$. D) $M = 19$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $|(2|z|-1)+(|z|+2)i|\cdot|z| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2\right]\cdot|z|^2 = 10$.
$\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$ (vì $|z| \ge 0$).
Gọi $z_1 = x_1+y_1i$ và $z_2 = x_2+y_2i$. Ta có $|z_1| = |z_2| = 1$ nên $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2 = 1$.
Mặt khác, $|z_1-z_2| = 1$ nên $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = 1$. Suy ra $x_1x_2+y_1y_2 = \dfrac{1}{2}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}M &= |2z_1+3z_2| = \sqrt{(2x_1+3x_2)^2+(2y_1+3y_2)^2}\\ &= \sqrt{4(x_1^2+y_1^2)+9(x_2^2+y_2^2)+12(x_1x_2+y_1y_2)}\\ &= \sqrt{4\cdot1+9\cdot1+12\cdot\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{19}.\end{aligned}$$

Vậy $M = \sqrt{19}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42.4. Biết rằng z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực. Số phức z là

A) $2i$. B) $z = \dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}i$. C) $z = 1+\dfrac{1}{2}i$. D) $z = \dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

Lời giải.

Gọi $z = x+iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $(z-1)(\overline{z}+2i) = x(x-1)+y(y-2)+(2x+y-2)i$.
Từ giả thiết suy ra $2x+y-2 = 0$ hay $2x+y = 2$.
Ta có $4 = (2x+y)^2 \le 5(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Tức là $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Do đó $\min |z| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ khi $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} \Leftrightarrow x = 2y$.

Suy ra $x = \dfrac{4}{5}; y = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.5. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Đặt $w = z + 2 - 3i$ tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. (B) $\dfrac{11}{\sqrt{10}}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$

Vì: $w = z + 2 - 3i \Leftrightarrow z = w - 2 + 3i$

Do đó: $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i| \Leftrightarrow |w - 3 + i| = |w - 4 + 4i|$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = (x-4)^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow$ `$x - 3y - 11 = 0$.

Tập hợp số phức w là đường thẳng $x - 3y - 11 = 0$.

Vậy $|w|$ nhỏ nhất khi tọa độ của w là hình chiếu của $O(0;0)$ trên đường thẳng $x - 3y - 11 = 0$.

Do đó $w = \dfrac{11}{10} - \dfrac{33}{10}i$ nên $|w| = \dfrac{11}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.6. Nếu z là số phức thỏa $|\overline{z}| = |z + 2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - i| + |z - 4|$ là

(A) 5. (B) $\sqrt{3}$. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với x, $y \in \mathbb{R}$ theo giả thiết $|\overline{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow y = -1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): y = -1$.

Gọi $A(0;1)$, $B(4;0)$ suy ra $|z - i| + |z - 4| = P$ là tổng khoảng cách từ điểm $M(x;-1)$ đến hai điểm A, B.

Thấy ngay $A(0;1)$ và $B(4;0)$ nằm cùng phía với (d). Lấy điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng (d) ta được điểm $A'(0;-3)$.

Do đó khoảng cách ngắn nhất là $A'B = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.7. Cho số phức z và số phức $u = (z - i)(\overline{z} + i) + 2z - 3i$ thỏa mãn $|u + 1| - |\overline{u} - i| = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z - 2 + 3i|$ bằng

(A) $3 + \sqrt{17}$. (B) $\sqrt{34} - 1$. (C) $1 + \sqrt{34}$. (D) $2 + \sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi $u = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Suy ra hệ thức $|u + 1| - |\overline{u} - i| = 0 \Leftrightarrow |x + yi + 1| = |x - yi - i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x=y \Rightarrow$ số phức u có phần thực bằng phần ảo.
Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u &= (z-i)(\overline{z}+i)+2z-3i\\ &= |z|^2+i(z-\overline{z})+1+2z-3i\\ &= a^2+b^2+i(2bi)+1+2(a+bi)-3i\\ &= \left(a^2+b^2+2a-2b+1\right)+(2b-3)\,i.\end{aligned}$$

Suy ra: $(a^2+b^2+2a-2b+1)=(2b-3)\Leftrightarrow (a+1)^2+(b-2)^2=1$
Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=1$.
Biểu thức $T=|z-(2-3i)|=MA$, với điểm M biểu diễn số phức z và nằm trên đường tròn (C); điểm $A(2;-3)$.
Suy ra $T=MA\le MI+IA=R+IA=1+\sqrt{34}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42.8. Nếu z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z-i|+|z-4|$ là

A. 4. B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. 5.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ biểu diễn điểm $M(x;y)$.
$|\overline{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow y=-1$.
$|z-i|+|z-4|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA+MB$ nhỏ nhất, với $A(0;1)$, $B(4;0)$.
Gọi B' đối xứng với B qua đường thẳng $y=-1$ suy ra $B'(4;-2)$.
Do đó, $MA+MB=MA+MB'\ge AB'=5$.
Chọn đáp án D □

Câu 42.9. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$ và biểu thức $|iz+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z.

A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{5}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&|z-2-4i|=|z-2i|\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}=\sqrt{a^2+(b-2)^2}\\ \Leftrightarrow\ &a=4-b.\end{aligned}$$

Nên

$$|iz+2-i| = \sqrt{(2-b)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(2-b)^2+(3-b)^2}$$

$$= \sqrt{2b^2 - 10b + 13} = \sqrt{2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz + 2 - i|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b = \frac{5}{2}$; $a = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.10. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4 - 3i)\,z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

A. $4\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $6\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $w = (4 - 3i)\,z + 1 - 2i \Rightarrow z = \dfrac{w - 1 + 2i}{4 - 3i}$.

Mặt khác $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\dfrac{w - 1 + 2i}{4 - 3i}\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - 1 + 2i| = 5\sqrt{5}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I\,(1; -2)$ và bán kính $5\sqrt{5}$.

Do đó $\min |w| = R - OI = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.11. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là:

A. 17. B. 0. C. 2. D. 7.

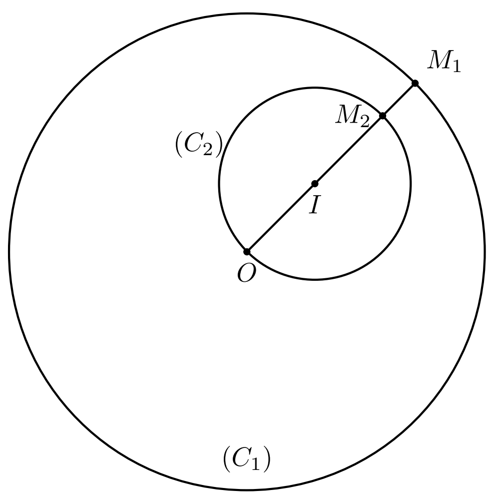
Lời giải.

Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$, trong đó x_1, y_1, x_2, $y_2 \in \mathbb{R}$; đồng thời $M_1\,(x_1; y_1)$ và $M_2\,(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 144 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 4)^2 = 25 \end{cases}$.

Do đó M_1 thuộc đường tròn (C_1) có tâm $O\,(0; 0)$ và bán kính $R_1 = 12$, M_2 thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I\,(3; 4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} O \in (C_2) \\ OI = 5 < 7 = R_1 - R_2 \end{cases}$ nên (C_2) chứa trong (C_1).



Khi đó $|z_1 - z_2| = M_1M_2$. Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow (M_1M_2)_{\min} \Leftrightarrow M_1M_2 = R_1 - 2R_2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 42.12. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{7}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1 i$ $(a_1, b_1 \in \mathbb{R})$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_2, b_2 \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 + b_1^2 = 25$.

Do đó, tập hợp các điểm A biểu diễn cho số phức z_1 là đường tròn (C): $(x+5)^2 + y^2 = 25$ có tâm là điểm $I(-5; 0)$ và bán kính $R = 5$.

$$\begin{aligned} & |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \\ \Leftrightarrow\ & (a_2+1)^2 + (b_2-3)^2 = (a_2-3)^2 + (b_2-6)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 8a_2 + 6b_2 - 35 = 0. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp các điểm B biểu diễn cho số phức z_2 là đường thẳng Δ: $8x + 6y - 35 = 0$.

Khi đó, ta có $|z_1 - z_2| = AB$.

Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} = AB_{\min} = \mathrm{d}(I, \Delta) - R = \dfrac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 = \dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42.13. Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z + 2 - i|$ bằng

(A) $2 + \sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $-2 + \sqrt{2}$. (D) $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi \in \mathbb{C}$ với a, $b \in \mathbb{R}$.

Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn hình học là $M(a; b)$.

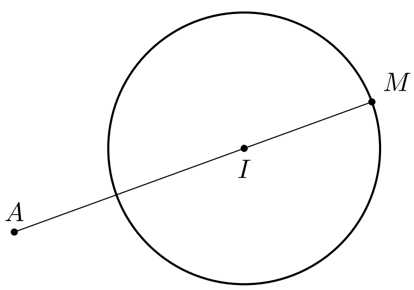
Theo đề bài

$|z + 1 - 2i| = 2 \Leftrightarrow |a + bi + 1 - 2i| = 2 \Leftrightarrow |(a+1) + (b-2)i| = 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-2)^2 = 4$.

Vậy điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $|z + 2 - i| = |(a+2) + (b-1)i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} = AM$ với $A(-2; 1)$ nằm ngoài đường tròn (C).

Ta có $\overrightarrow{AI} = (-1; -1) \Rightarrow AI = \sqrt{2}$



Để AM đạt max khi AM đi qua tâm I, suy ra $AM_{max} = AI + R = 2 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.14. Cho z là số phức có phần thực lớn hơn 1 và thoả mãn $|z+1+i| = |2z+\overline{z}-5-3i|$, đồng thời $|z-2-2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phần thực của số phức z nói trên bằng

A. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$. B. $\dfrac{8+\sqrt{7}}{4}$. C. $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$. D. $\dfrac{8+\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi, (x > 1)$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& |z+1+i| = |2z+\overline{z}-5-3i| \\
\Leftrightarrow\ & |x+yi+1+i| = |2(x+yi)+x-yi-5-3i| \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 + (y+1)^2 = (3x-5)^2 + (y-3)^2 \\
\Leftrightarrow\ & y = (x-2)^2 .
\end{aligned}$$

Khi đó $|z-2-2i|^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 = t + (t-2)^2 = t^2 - 3t + 4$ với $t = (x-2)^2 \geq 0$

$g(t) = t^2 - 3t + 4 = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4}, \forall t$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4+\sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{4-\sqrt{6}}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Kết luận phần thực của số phức cần tìm là $x = \dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42.15. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & |z-2i| = |z+3-i| \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} \\
\Leftrightarrow\ & y = -3x - 3.
\end{aligned}$$

Lại có

$$|z+3-2i| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(x+3)^2+(3x+5)^2}\\
&= \sqrt{10x^2+36x+34}\\
&= \sqrt{\left(\sqrt{10}x+\frac{18}{\sqrt{10}}\right)^2+\frac{16}{10}}\\
&\geq \frac{2\sqrt{10}}{5}.
\end{aligned}$$

Vậy GTNN của $|z+3-2i|$ bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42.16. Cho số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A $\frac{1}{2}$. B $\frac{5}{7}$. C $\frac{3}{2}$. D 1.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ suy ra $|z|^2=a^2+b^2$.

Ta có $z+i=a+(b+1)i\Rightarrow |z+i|^2=a^2+(b+1)^2=|z|^2+2b+1$.

$z-i=a+(b-1)i\Rightarrow |z-i|^2=a^2+(b-1)^2=|z|^2-2b+1$.

Theo giả thiết và bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có

$$\begin{aligned}
10=4|z+i|+3|z-i| &\leq \sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{|z+i|^2+|z-i|^2}\\
&= 5\sqrt{2|z|^2+2}\\
&\Rightarrow z^2\geq 1.
\end{aligned}$$

Suy ra $\min|z|=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 42.17. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1=a+(a^2-2a+2)i$ (với a là số thực thay đổi) và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2-2-i|=|\overline{z_2}-6-i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN.

A $2\sqrt{5}$. B $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. C 1. D 5.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$. Từ điều kiện $z_1=a+(a^2-2a+2)i$ suy ra M thuộc parabol $(P)\colon y=x^2-2x+2$.

Gọi $N(x;y)$. Từ điều kiện $|z_2-2-i|=|\overline{z_2}-6-i|$ suy ra N thuộc đường thẳng $d\colon 2x-y-8=0$.

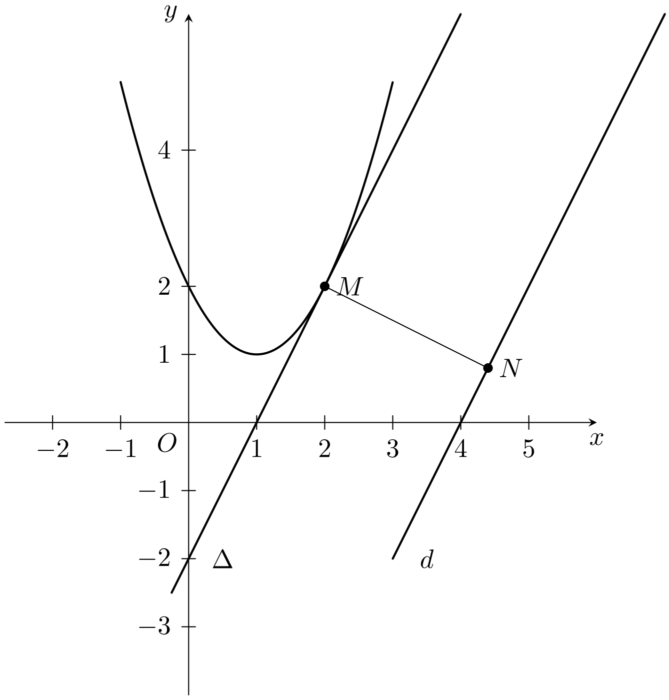
Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) mà song song với $d\colon 2x-y-8=0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm mà tại đó tiếp tuyến $\Delta\parallel d$.

Ta có $y'=2x-2$.

Do $\Delta\parallel d$ nên $y'(x_0)=2\Leftrightarrow 2x_0-2=2\Leftrightarrow x_0=2$ suy ra $y_0=2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $y=y'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0\Leftrightarrow y=2(x-2)+2\Leftrightarrow y=2x-2$.



Khi đó: $\min MN = d(\Delta, d) = d(A, d)$ với $A \in \Delta$. Chọn $A(1;0)$ ta có:
$\min MN = \dfrac{|2\cdot 1 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 42.18. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z - 3 - 4i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1^2| - |z_2^2|$ bằng

A $-\sqrt{85}$. B -10. C $-6 - 2\sqrt{5}$. D -5.

Lời giải.

Gọi M, N là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_1, z_2.
Theo giả thiết z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z - 3 - 4i| = 2$. Suy ra M, N thuộc đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 2$.
Mặt khác $|z_1 - z_2| = 1$ nên $MN = 1$.
Ta có

$$\begin{aligned}
P &= \left|z_1^2\right| - \left|z_2^2\right| = OM^2 - ON^2 = \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{ON}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\
&= 2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IM} - 2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IN} \\
&= 2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{NM} \\
&= 2OI\cdot NM\cdot\cos\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{NM}\right) \\
&\geq -2OI\cdot NM = -10.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{NM}$ ngược hướng hay $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}$ cùng hướng.
Vậy $P_{\min} = -10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42.19. Xét các số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $4\left(z-\overline{z}\right)-15i=i(z+\overline{z}-1)^2$. Tính $F=-a+4b$ khi $\left|z-\dfrac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $F=7$. (B) $F=6$. (C) $F=5$. (D) $F=4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&4\left(z-\overline{z}\right)-15i=i\left(z+\overline{z}-1\right)^2\\ \Leftrightarrow\ &4\left(a+bi-a+bi\right)-15i=i(a+bi+a-bi-1)^2\\ \Leftrightarrow\ &8b-15=\left(2a-1\right)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $b\geq\dfrac{15}{8}$. Khi đó

$$\left|z-\frac{1}{2}+3i\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2a-1\right)^2+\left(2b+6\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8b-15+4b^2+24b+36}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+32b+21}.$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=4x^2+32x+21$ với $x\geq\dfrac{15}{8}$.

Có $f'\left(x\right)=8x+32>0,\forall x\geq\dfrac{15}{8}$.

Suy ra $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{15}{8};+\infty\right)$ nên $f\left(x\right)\geq f\left(\dfrac{15}{8}\right)=\dfrac{4353}{16}$.

Do đó $\left|z-\dfrac{1}{2}+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4353}{16}}$ khi $b=\dfrac{15}{8};a=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $F=-a+4b=7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42.20. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2\left|1-z\right|$ bằng

(A) $6\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $-1\leq x\leq 1$.

Khi đó $P=|1+z|+2\left|1-z\right|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P\leq\sqrt{(1^2+2^2)\left[(2x+2)+(2-2x)\right]}$ hay $P\leq 2\sqrt{5}$, với mọi $-1\leq x\leq 1$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2}=\sqrt{2-2x}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$, $y=\pm\dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42.21. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3\left|1-z\right|$.

(A) $P=6\sqrt{5}$. (B) $P=3\sqrt{15}$. (C) $P=2\sqrt{5}$. (D) $P=2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$P = |1+z| + 3|1-z| \leq \sqrt{(1^2+3^2)\left(|1+z|^2+|1-z|^2\right)} = \sqrt{10\left(1+|z|^2\right)} = \sqrt{10(1+1)} = 2\sqrt{5}$.

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42.22. Xét các số phức z thoả mãn $|z| = 1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z^4 + z + \frac{1}{2}\right|^2$ bằng

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. (C) $\frac{1}{8}$. (D) $\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$. Từ $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$.

Ta có

$$\begin{aligned}
\left|z^4+z+\frac{1}{2}\right|^2 &= \left|z^2+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}\right|^2 = \left|z^2+\overline{z}+\frac{1}{2}\overline{z}^2\right|^2 \\
&= \left|\left(x^2-y^2+2xyi\right)+(x-yi)+\frac{1}{2}\left(x^2-y^2-2xyi\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)+x+y(x-1)i\right|^2 \\
&= \left(3x^2+x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(1-x^2\right)(x-1)^2 \\
&= 8x^4+8x^3-8x^2-5x+\frac{13}{4}.
\end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 8x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 5x + \frac{13}{4}$ với $x \in [-1; 1]$.

$$f'(x) = 32x^3 + 24x^2 - 16x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{-1+\sqrt{11}}{4} \text{ (thỏa mãn)}. \\ x = \frac{-1-\sqrt{11}}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$f(-1) = \frac{1}{4}; f(1) = \frac{25}{4}; f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{125}{32}; f\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z^4 + z + \frac{1}{2}\right|^2$ bằng $\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42.23. Xét số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|2z + 2 - 3i| = 1$. Khi biểu thức $2|z+2| + |z-3|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $a - b$ bằng

(A) 3. (B) 2. (C) -3. (D) -2.

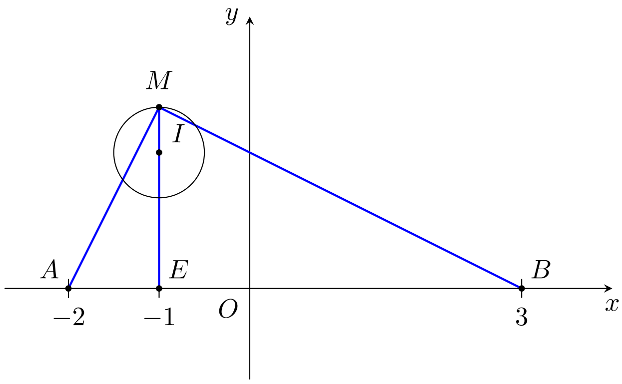
Lời giải.

$|2z+2-3i| = 1 \Leftrightarrow \left|z+1-\frac{3}{2}i\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow M(a;b) \in (C)$ có tâm $I\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Gọi $A(-2; 0), B(3; 0)$ và E là hình chiếu của I lên đường thẳng A.

Suy ra $E(-1;0) \Rightarrow \overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{EA} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} P = 2|z+2| + |z-3| = 2MA + MB &\le \sqrt{2\left(4MA^2 + MB^2\right)} \\ &= \sqrt{2\left[4\left(\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EM}\right)^2\right]} \\ &= \sqrt{2\left[4EA^2 + EB^2 - 2\overrightarrow{EM}\left(4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}\right) + 5EM^2\right]} \\ &= \sqrt{2\left[4EA^2 + EB^2 + 5EM^2\right]} \end{aligned}$$



EM đạt GTLN khi M là giao điểm của tia EI và đường tròn $(C) \Rightarrow M(-1;2)$.

Nhận thấy với $M(-1;2)$ thì $2MA = MB$.

Vậy P đạt GTLN khi $z = -1 + 2i \Rightarrow a - b = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 42.24. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + i| = 1, |z_2 - 7| = |\overline{z_2} - 7 + 2i|$. Biết $\dfrac{z_1 - z_2}{1+i}$ là một số thực. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z_1 - z_2|$.

A. $T_{\max} = 3\sqrt{2}$. B. $T_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $T_{\max} = \sqrt{2}$. D. $T_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1),\ \ z_2 = a' + b'i\ (a', b' \in \mathbb{R},\ \ i^2 = -1)$.

Ta có

$$\begin{aligned} & |z_1 - 2 + i| = 1 \\ \Leftrightarrow\ & |a - 2 + (b+1)i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} \\ \Leftrightarrow\ & (a-2)^2 + (b+1)^2 = 1 \\ \Rightarrow\ & (b+1)^2 le 1 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \le b \le 0. \end{aligned}$$

Và

$$|z_2 - 7| = |\overline{z_2} - 7 + 2i|$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ |a'-7+b'i|=|a'-7+(2-b')i|\\&\Leftrightarrow\ \sqrt{(a'-7)^2+b'^2}=\sqrt{(a'-7)^2+(2-b')^2}\\&\Leftrightarrow\ b'^2=(2-b')^2\Leftrightarrow b'=1.\end{aligned}$$

$\dfrac{z_1-z_2}{1+i}=\dfrac{[a-a'+(b-b')i](1-i)}{2}=\dfrac{[(a-a'+b-b')+(b-b'+a'-a)i]}{2}$.

$\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực nên $b-b'+a'-a=0\Leftrightarrow b-b'=a-a'$.

$T=|z_1-z_2|=\sqrt{(b-b')^2+(a-a')^2}=\sqrt{2(b-b')^2}=\sqrt{2(b-1)^2}=\sqrt{2}(1-b)\le 3\sqrt{2}$ (do $-2\le b\le 0$).

Dấu "=" xảy ra khi $b=-2\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a'=5.\end{cases}$

Vậy $T_{\max}=3\sqrt{2}$ khi $z_1=2-2i,\ z_2=5+i$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.25. Với ai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ là

A. $5+3\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $4\sqrt{6}$. D. $34+3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1=a+bi,z_2=c+di,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z_1+z_2=8+6i$ nên $a+bi+c+di=8+6i\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=8\\b+d=6.\end{cases}$

Do đó $(a+c)^2+(b+d)^2=100\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=100-2ac-2bd$ (1).

Vì $|z_1-z_2|=2$ nên ta có

$|a+bi-c-di|=2\Leftrightarrow(a-c)^2+(b-d)^2=4\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=4+2ac+2bd$ (2).

Cộng và ta được: $2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=104$.

Áp dụng bất đẳng thức $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2$ ta có:

$P^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2\le 2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=104$.

Do đó $P\le 2\sqrt{26}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $2\sqrt{26}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.26. Cho hai số phức z và w thay đổi nhưng thỏa mãn điều kiện $|z|=|w|^2-|w-1-i|^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|z^2\left(2w-\overline{w}\right)-1\right|$.

A. $\dfrac{9\sqrt{10}-20}{20}$. B. $\sqrt{2}-1$. C. $\dfrac{3\sqrt{10}-5}{5}$. D. $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{4}$.

Lời giải.

Ta có tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $O\left(0;0\right)$, bán kính $R=1$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường thẳng có phương trình $2x+2y=3$.

$T=\left|z^2\left(2w-\overline{w}\right)-1\right|\ge\left|\left|z^2\right|\left|2w-\overline{w}\right|-1\right|=\left|\left|2w-\overline{w}\right|-1\right|=\left|\sqrt{x^2+9y^2}-1\right|$.

Ta có $9=(2a+2b)^2 \leq \left(4+\dfrac{4}{9}\right)(a^2+9b^2) \Rightarrow \sqrt{a^2+9b^2} \geq \dfrac{9\sqrt{10}}{20}$.

$\Rightarrow T \geq \dfrac{9\sqrt{10}-20}{20}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.27. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+iz+2| = |z^2+z-i+1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-2+i|$ là

A $\sqrt{2}$. B 2. C $\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$. D $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \left|z^2+iz+2\right| = \left|z^2+z-i+1\right| \\
\Leftrightarrow\ & \left|z^2+iz-2i^2\right| = \left|z^2+z-i-i^2\right| \\
\Leftrightarrow\ & \left|(z-i)(z+2i)\right| = \left|(z-i)(z+i+1)\right| \\
\Leftrightarrow\ & |z-i|\cdot|z+2i| = |z-i|\cdot|z+i+1| \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} |z-i|=0 \quad (1) \\ |z+2i| = |z+i+1| \quad (2). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải phương trình (1): Ta có $z=i \Rightarrow |z-2+i| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$ $(*)$.

Giải phương trình (2): Đặt $z=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$|z+2i| = |z+i+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=x-1$.

Khi đó $|z-2+i| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+x^2} = \sqrt{2(x-1)^2+2} \geq \sqrt{2}$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $\min|z-2+i| = \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ hay $z=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.28. Cho số phức z thỏa mãn $3|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M\cdot m$ bằng

A 26. B 20. C 28. D 24.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $(x;y\in\mathbb{R})$, $P(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $3|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}| \leq 12 \Leftrightarrow 3|2x|+2|2yi| \leq 12 \Leftrightarrow 3|x|+2|y| \leq 6$ (1).

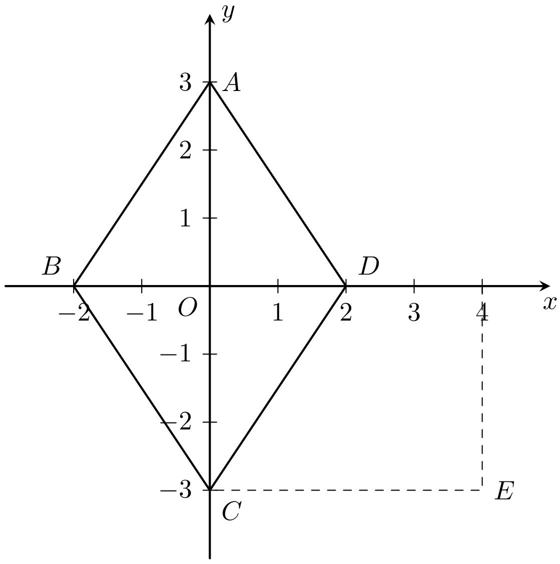
Khi $x\geq 0$; $y\geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x+2y \leq 6$.

Khi $x\leq 0$; $y\leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x-2y \leq 6$.

Khi $x\leq 0$; $y\geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x+2y \leq 6$.

Khi $x\geq 0$; $y\leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x-2y \leq 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.



$|z-4+3i| = EP$ với $E\,(4;-3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 4-3i$.

Từ hình vẽ ta có $m = \min EP = d\,(E, CD)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x-2y-6=0$, suy ra $m = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

$\max EP = \max\{EA, EB, EC, ED\}$.

Lại có $EA = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$, $EB = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$, $EC = 4$, $ED = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Do đó $M = EA = \sqrt{52}$. Vậy $M \cdot m = 24$.

Chọn đáp án D □

D BẢNG ĐÁP ÁN

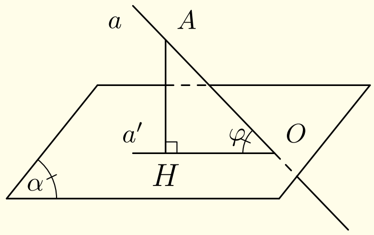
42.1. A	42.2. D	42.3. C	42.4. B	42.5. B	42.6. A	42.7. C	42.8. D
42.9. A	42.10. A	42.11. C	42.12. D	42.13. A	42.14. C	42.15. D	42.16. D
42.17. B	42.18. B	42.19. A	42.20. B	42.21. C	42.22. C	42.23. C	42.24. A
42.25. B	42.26. A	42.27. A	42.28. D				

DẠNG 43. PHÉP ĐẾM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

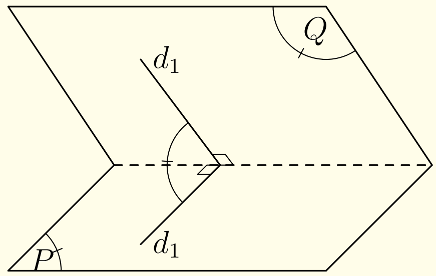
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Muốn xác định góc của đường thẳng a và (P) ta tìm hình chiếu vuông góc a' của a trên (P). Khi đó $\left(\widehat{a,(P)}\right) = \left(\widehat{a,a'}\right)$.



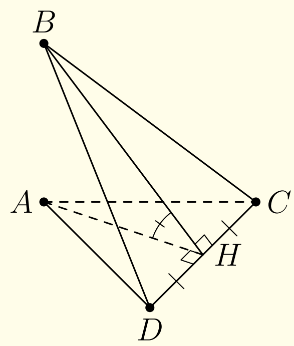
2. Góc giữa hai mặt phẳng

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

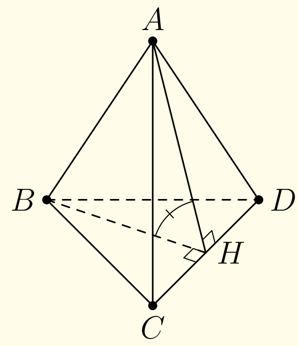


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

a) **Trường hợp** 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



b) **Trường hợp** 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD. Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



c) **Trương hợp** 3: Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp(Q)\right)}{d(A,a)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

d) **Trường hợp** 4: Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$.

e) **Trường hợp** 5: Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d'.

f) **Trường hợp** 6: Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

(a) Bước 1: Xác định giao tuyến d.

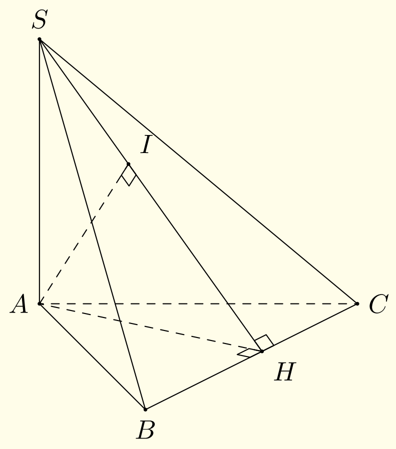
(b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp d$.

(c) Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

3. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

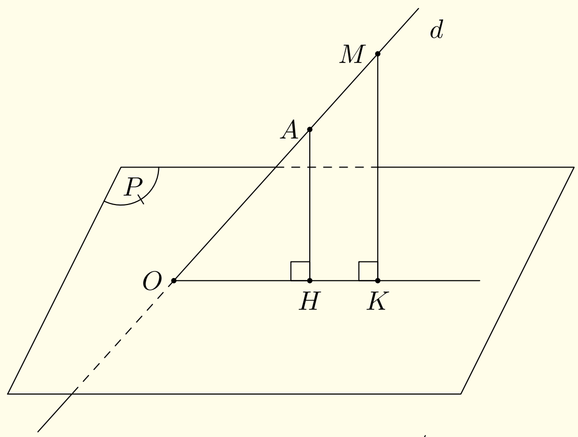
Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

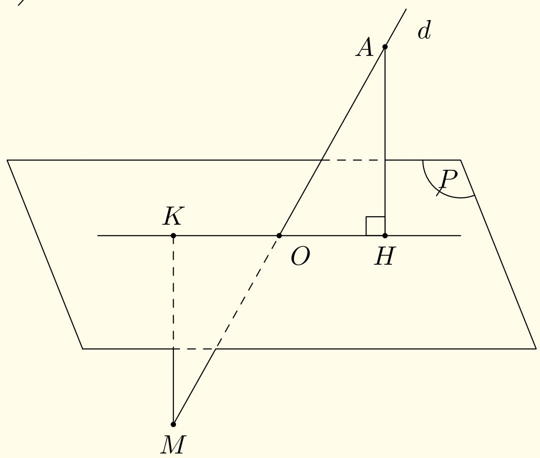


- **Bước 1.** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2.** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3.** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.
- **Bước 4.** $AI = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}}$

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của Bài toán 2.

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng
Thường sử dụng công thức sau:





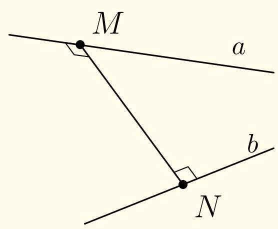
Công thức tính tỉ lệ khoảng cách $\dfrac{\mathrm{d}\left(M, \mathrm{mp}(P)\right)}{\mathrm{d}\left(A, \mathrm{mp}(P)\right)} = \dfrac{MO}{AO}$.
Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Kinh nghiệm thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Kí hiệu: $\mathrm{d}\,(a,b) = MN$ khi $\begin{cases} MN \perp a \text{ tại } M \\ MN \perp b \text{ tại } N. \end{cases}$



5. Thể tích khối chóp-khối lăng trụ

a) Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

b) Công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = S \cdot h$, trong đó S là diện tích đáy, h là chiều cao.

c) Tính diện tích đáy S ta cần nhớ các công thức tính diện tích của tam giác và tứ giác thường gặp.

d) Tính chiều cao h ta phải xác định được hình chiếu của đỉnh hình chóp (hay lăng trụ) trên mặt phẳng đáy.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 43 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$. (C) $\sqrt{2}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp A'B$, $H \in A'B$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH.$

Ta có $BC \perp AH$, $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

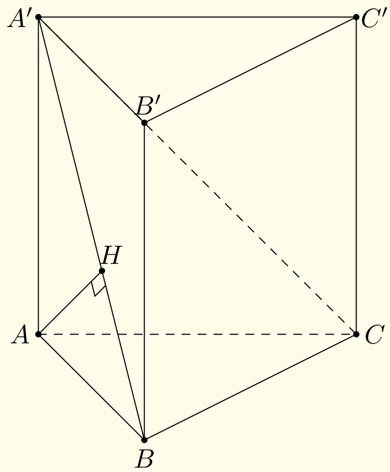
Do đó $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A, ta có

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{9}{6a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B □

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 43.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$ góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$.

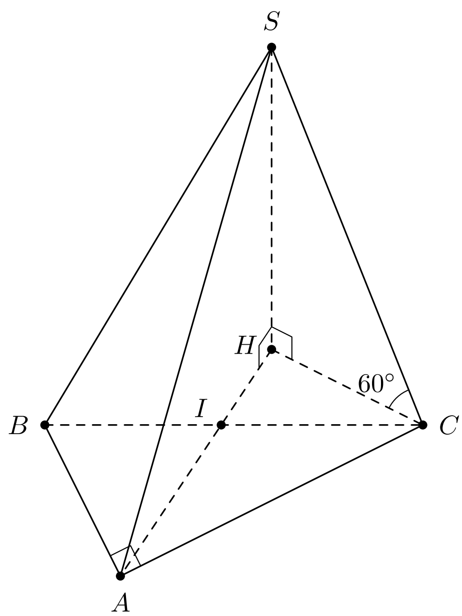
$BC = 2a$, $IA = a$, $IH = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác HIC vuông tại I ta có

$HC^2 = HI^2 + IC^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} \Leftrightarrow SH = HC \cdot \tan\widehat{SCH} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

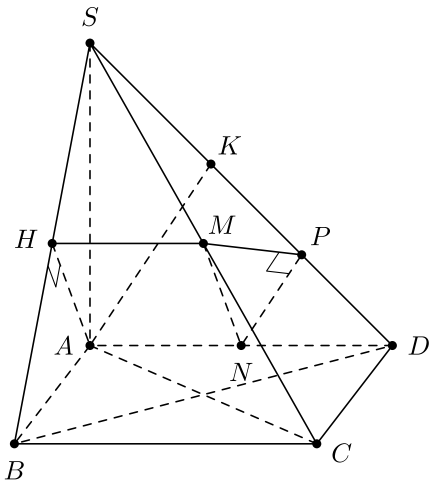


Chọn đáp án C □

Câu 43.2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $AB5CD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng ϕ, với $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.   (B) $a^3\sqrt{2}$.   (C) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.   (D) $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm SB, vì $\triangle SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH \perp SB$ (1).

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (3).

Gọi K là hình chiếu của A lên SD, chứng minh tương tự ta có $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\left(\widehat{(SBC),(SDC)}\right) = \left(\widehat{AH, AK}\right) = \varphi$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm SC, AD, dễ dàng chứng minh được $AHMN$ là hình bình hành, suy ra $MN \parallel AH$.// Kẻ $NP \parallel AK, (P \in SD)$, vì $NP \parallel AK \Rightarrow NP \perp (SCD) \Rightarrow NP \perp MP$.

Ta có $\left(\widehat{AH, AK}\right) = \left(\widehat{MN, NP}\right) = \widehat{MNP} = \varphi$ (vì $\triangle MNP$ vuông tại P).

Đặt $AD = x$, dễ thấy $AK = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow NP = \dfrac{ax}{2\sqrt{a^2+x^2}}$.

Xét $\triangle MNP$ vuông tại P, ta có $\cos\widehat{MNP} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{NP}{MN} = \dfrac{\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

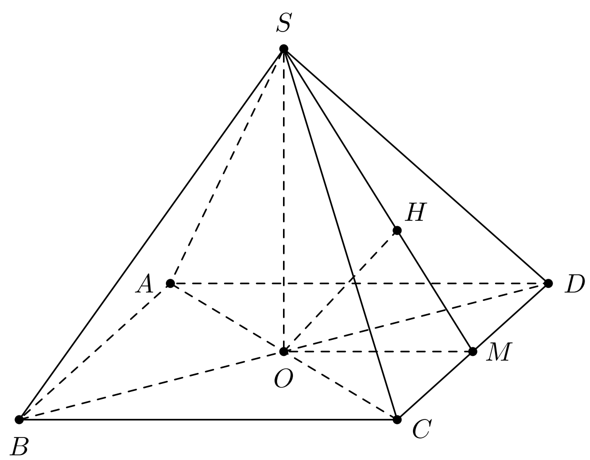
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a^2\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43.3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD. Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng cách từ O đến mặt bên là $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

(A) $16a^3\sqrt{3}$.   (B) $8a^3\sqrt{3}$.   (C) $48a^3\sqrt{3}$.   (D) $24a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Vì mặt bên là tam giác đều nên $BC \perp SM$. Mặt khác $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOM) \Rightarrow (SOM) \perp (SBC)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên SM ta có $OH \perp (SBC)$, do đó $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH$.

Đặt $AB = x$, ta có $SA = x$, $SM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$; $OM = \dfrac{x}{2}$;

$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \dfrac{x^2}{2}$.

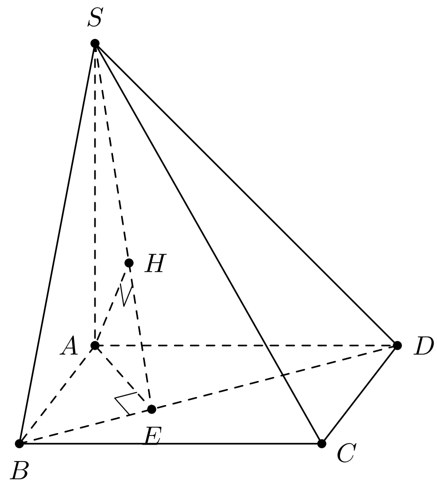
Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \dfrac{x\sqrt{6}}{6}$.

Theo giả thiết $d(O;(SBC)) = OH = 2a$ nên $a = \dfrac{x\sqrt{6}}{12} \Rightarrow x = 2a\sqrt{6}$.
Từ đó suy ra $SO = 2a\sqrt{3}$; $S_{ABCD} = 24a^2$.
Thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 24a^2 = 16\sqrt{3}a^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 43.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A $\dfrac{2a^3}{3}$.   B $\dfrac{a^3}{3}$.   C $\dfrac{2a^3}{9}$.   D $2a^3$.

Lời giải.



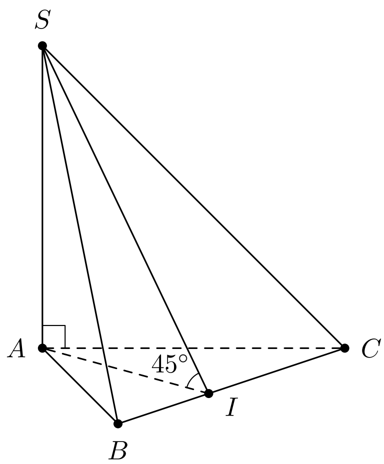
Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD, (E \in BD)$.
Kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH$.
$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.
Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có
$AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Xét tam giác SAE vuông tại A ta có
$AS = \dfrac{AH.AE}{\sqrt{AE^2 - AH^2}} = \dfrac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{4a^2}{9}}} = a$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43.5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, $BC = 3a$, $AB = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A $V_{S.ABC} = \dfrac{4a^3}{9}$.   B $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.   C $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.   D $V_{S.ABC} = \dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên BC suy ra $AI \perp BC$.
Mà $BC \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$).
Suy ra $BC \perp (SAI)$, suy ra $BC \perp SI$.
Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AI \perp BC, SI \perp BC \\ AI \subset (ABC), SI \subset (SBC) \end{cases}$
$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SI, AI)\, \widehat{SIA} = 45°$.
Xét tam giác ABC có
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (3a)^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$.

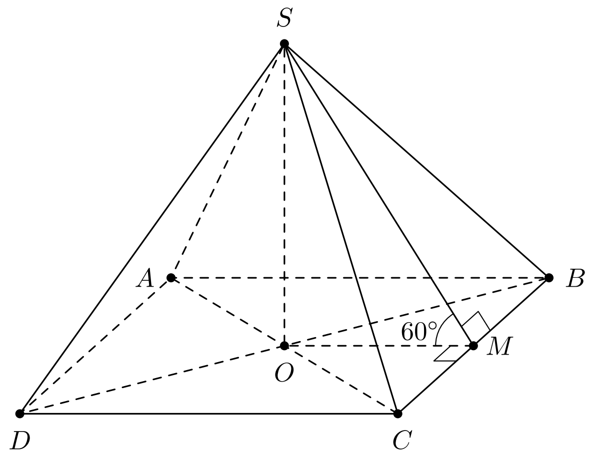
Xét tam giác ABC có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{8a^2} = \dfrac{9}{8a^2} \Rightarrow AI = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.
Xét tam giác SAI vuông tại A, có $\widehat{SIA} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.
Suy ra $AI = SA = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a = \dfrac{4}{9}a^3$. (đvtt)
Chọn đáp án A □

Câu 43.6. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp đó.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi M là trung điểm BC. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO} = 60^\circ$.
Xét $\triangle SOM$ có $OM = \dfrac{a}{2}$, $\widehat{SMO} = 60^\circ$ thì
$SO = OM \cdot \tan\widehat{SMO} = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).



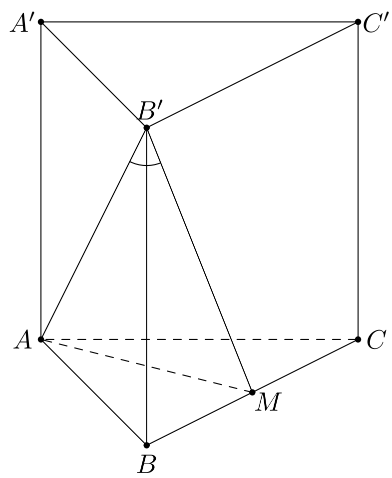
Chọn đáp án C □

Câu 43.7. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $2\sqrt{6}a^3$. (B) $6a^3$. (C) $2a^3$. (D) $\sqrt{6}a^3$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$
$\Rightarrow B'M$ là hình chiếu của AB' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.
Do đó góc giữa AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng góc giữa AB' và $B'M$ và bằng $\widehat{AB'M} = 30^\circ$.
Tam giác $AB'M$ vuông tại M nên $AB' = \dfrac{AM}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}a$.
Tam giác $AA'B$ vuông tại A nên
$AA' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là
$V = AA' \cdot S_{ABC} = 2\sqrt{2}a \cdot a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}a^3$.

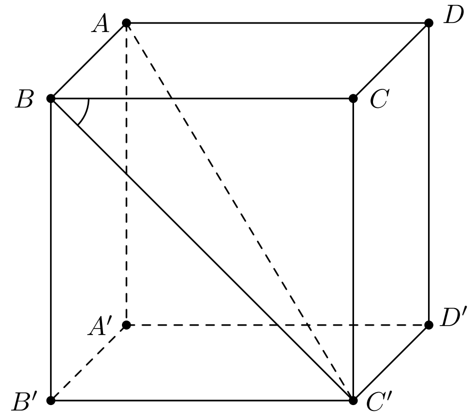


Chọn đáp án A □

Câu 43.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 3a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $3\sqrt{3}a^3$. (C) $\dfrac{9\sqrt{3}a^3}{2}$. (D) $9\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}(ABC')\cap(ABCD)=AB\\(ADD'A')\perp AB\\(BCC'B')\cap(ABCD)=BC\\(BCC'B')\cap(ABC')=BC'\end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABC'),(ABCD)}\right) = \widehat{C'BC} = 60°$.

Tam giác $C'BC$ vuông tại C nên

$CC' = BC\cdot\tan\widehat{C'BC} = 3a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V = CC'\cdot S_{ABC} = 3\sqrt{3}a\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot 3a = \dfrac{9\sqrt{3}a^3}{2}$.

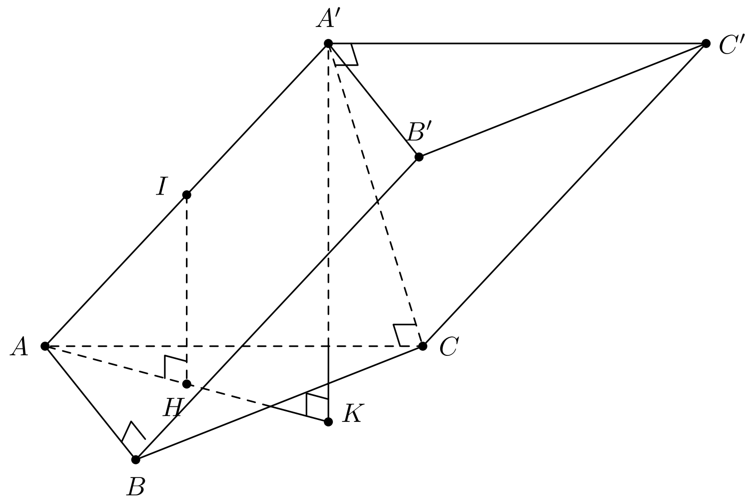
Chọn đáp án (C) □

Câu 43.9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $\widehat{A'BA} = \widehat{CA'C'} = 90°$. Biết khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, góc giữa AA' và $(A'B'C')$ bằng $60°$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

(A) $30\sqrt{3}a^3$. (B) $10\sqrt{3}a^3$. (C) $5\sqrt{3}a^3$. (D) $15\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A'BA} = \widehat{A'CA} = 90°$. Điểm I trung điểm AA' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$. Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là điểm đối xứng của A qua H. Suy ra AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Mặt khác $\begin{cases}IH\perp(ABC)\\IH \parallel A'K\end{cases} \Rightarrow A'K\perp(ABC)$.

Mà $IH = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow A'K = 5\sqrt{3}a$.

Và $\left(\widehat{AA',(A'B'C')}\right) = \left(\widehat{AA',(ABC)}\right) \Rightarrow \widehat{A'AK} = 60°$.

Xét tam giác $A'AK$ có $AK = \dfrac{AK'}{\tan \widehat{A'AK}} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 5a$.
Xét tam giác ABC. Áp dụng định lý sin ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R = 5a \Rightarrow \begin{cases} \sin B = \dfrac{4}{5} \\ \sin C = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

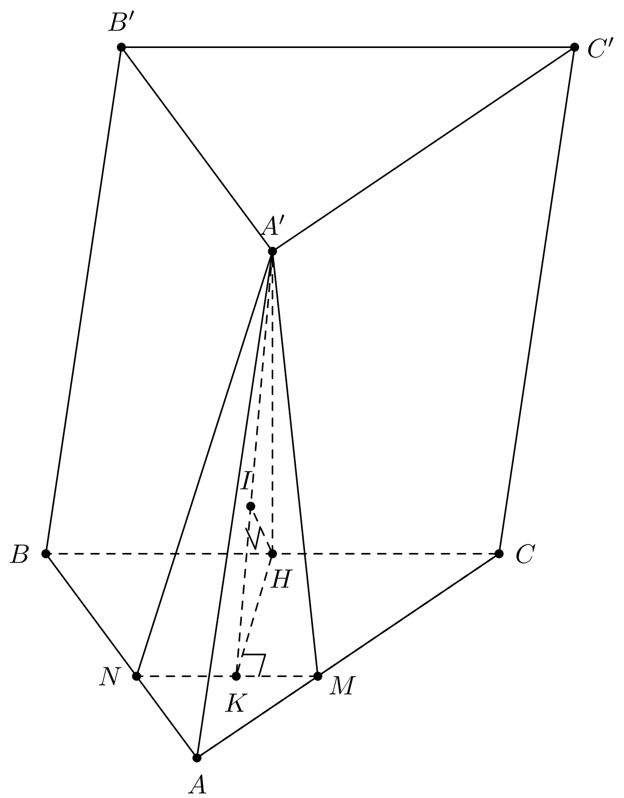
$\Rightarrow sinB = \cos C = \dfrac{4}{5}$ (vì $\cos C = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$ không tồn tại tam giác ABC).
Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A.
Thể tích lăng trụ $V = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a \cdot 5\sqrt{3}a = 30\sqrt{3}a^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 43.10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2AM$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B a^3. C $\dfrac{3a^3}{2}$. D $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.
$\mathrm{d}\left(A'M; BC\right) = \mathrm{d}\left(BC; (A'MN)\right)$
$= \mathrm{d}\left(H; (A'MN)\right) = HI \Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.
Kẻ $AT \parallel HK$, $AT \cap MN = P$
$\Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$.
Tam giác ABC vuông tại A
$\Rightarrow \dfrac{1}{AT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2}$
$\Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
Tam giác $A'HK$ vuông tại H
$\Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}$
$\Rightarrow A'H = a$.
Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = A'H \cdot S_{ABC} = a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 43.11. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết thể tích của khối lăng trụ là $2a^3\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

Ⓐ $\frac{4a}{3}$. Ⓑ $\frac{8a}{3}$. Ⓒ $\frac{3a}{2}$. Ⓓ $3a$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABC$, M là trung điểm BC.

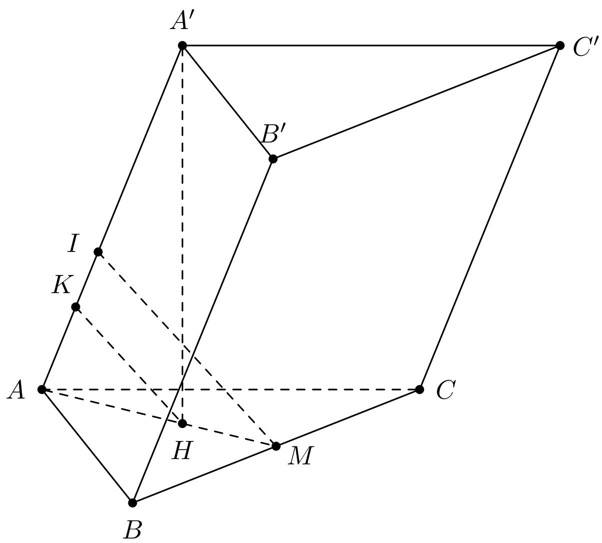
Kẻ $MI \perp AA'$ tại I.

Kẻ $HK \perp AA'$ tại K.

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$ mà $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp MI$.

Suy ra MI là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.



$S_{ABC} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = 2a$

$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HK = a$

$\mathrm{d}(AA', BC) = MI = \frac{3}{2}HK = \frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60°$, cạnh đáy bằng a, thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của hình thoi (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Ⓐ $\frac{a}{4}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Ⓒ $\frac{a}{3}$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = AB \cdot AD \sin A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

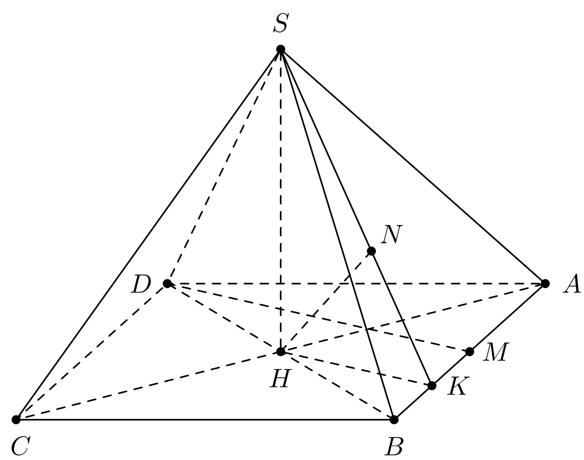
Độ dài đường cao $SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm AB, K là trung điểm của BM.

Ta có $DM \perp AB \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK \parallel DM$ và $HK = \frac{DM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AB \perp (SHK)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SHK)$, $(SAB) \cap (SHK) = SK$.



Vẽ $HN \perp SK$ tại $N \Rightarrow HN \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SAB)) = HN$.

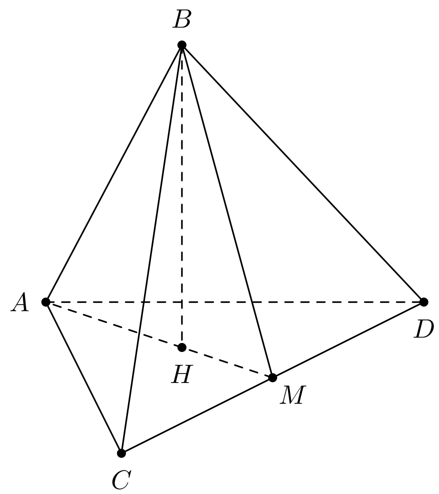
$HN = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $\mathrm{d}(C, (SAB)) = 2\mathrm{d}(H, (SAB)) = 2HN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43.13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{27}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng

(A) 90°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của CD.

Xét tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B nên $\begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM)$.

$((ACD),(BCD)) = \widehat{AMB}$.

Kẻ BH vuông góc với AM tại $H \Rightarrow BH \perp AM$.

Mà $CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp BH \Rightarrow BH \perp (ACD)$.

Suy ra $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} BH \cdot S_{ACD}$ với $BH = d(B,(ACD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{ACD} = \dfrac{3V}{BH} = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{3}$.

Đặt $CD = 2x$.

Suy ra $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \Rightarrow S_{ACD} = \dfrac{1}{2} AM \cdot CD = x\sqrt{2a^2 - x^2} = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{3}$.

$\Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác BMH vuông tại H có $\sin\widehat{BMH} = \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\widehat{AMB}$

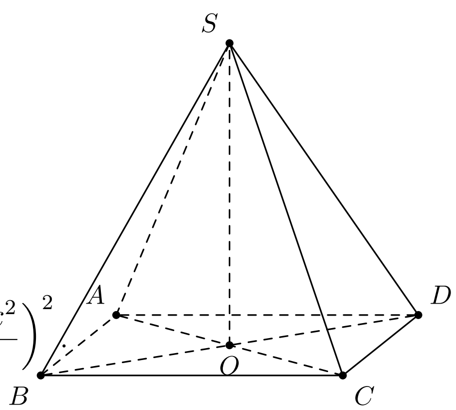
$\Rightarrow \widehat{AMB} = 45^\circ \Rightarrow ((ACD),(BCD)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43.14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chu vi tam giác SAC bằng 8. Trong trường hợp thể tích của khối chóp lớn nhất, hãy tính côsin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, đặt $SO = x$ và $OC = y$.

Chu vi tam giác SAC bằng là $C = 2SA + AC = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2y = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (4 - y)^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{16 - x^2}{8}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \left(y\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot xy^2 = \frac{2}{3} \cdot xy^2 = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \left(\frac{16 - x^2}{8}\right)^2$$

Ta có $V' = \dfrac{1}{96}(x - 4)(x + 4)(5x^2 - 16)$.

$V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy $V_{\max}$ khi $x = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ và $y = \dfrac{8}{5}$.

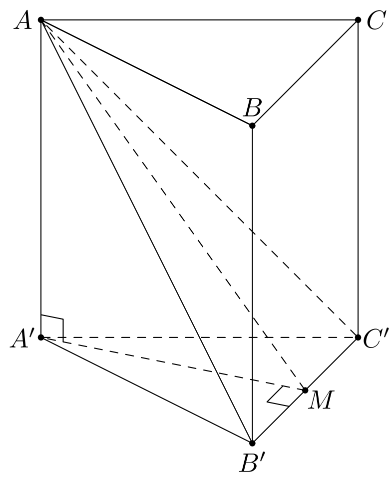
Khi đó $\cos\left(SA; (ABCD)\right) = \cos\widehat{SAO} = \dfrac{OA}{OS} = \dfrac{\frac{8}{5}}{\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43.15. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Mặt phẳng $(aB'C')$ tạo với mặt đáy góc $30°$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = a^3\sqrt{3}$. B $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'M \perp B'C'$.

$\begin{cases} B'C' \perp AA' \\ B'C' \perp A'M \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M)$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AMA'} = 30°$.

Tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng $2a$

$\Rightarrow A'M = A'B' \cdot \sin 60° = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$AA' = A'M \cdot \tan 30^0 = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = a$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^0 = \sqrt{3}a^2$.

Thể tích khối lằng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

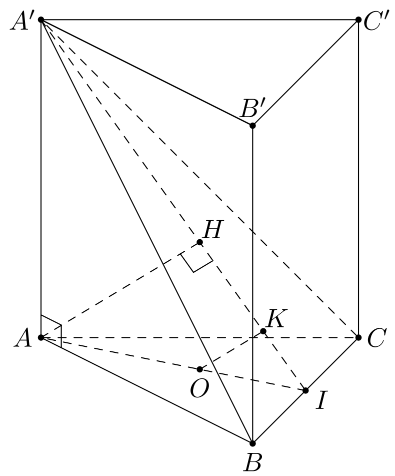
$V = AA' \cdot S_{ABC} = a \cdot a^2\sqrt{3} = \sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 43.16. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. B $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. C $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. D $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Diện tích đáy là $B = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h = \mathrm{d}\left((ABC); (A'B'C')\right) = AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có

$AH \perp (A'BC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A; (A'BC)\right) = AH$.

$\dfrac{\mathrm{d}\left(O; (A'BC)\right)}{\mathrm{d}\left(A; (A'BC)\right)} = \dfrac{IO}{IA} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(O; (A'BC)\right) = \dfrac{\mathrm{d}\left(A; (A'BC)\right)}{3} = \dfrac{AH}{3} = \dfrac{a}{6} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có

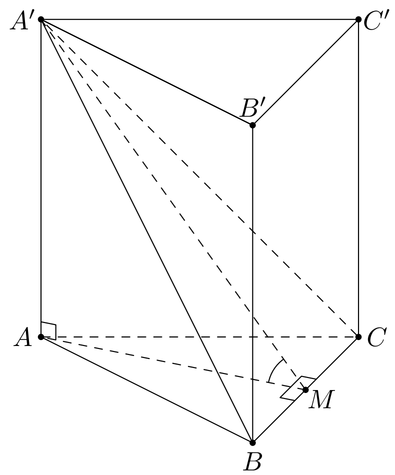
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43.17. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 3a$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A $\dfrac{9a^3\sqrt{39}}{26}$. B $\dfrac{3a^3\sqrt{39}}{26}$. C $\dfrac{6a^3\sqrt{39}}{13}$. D $\dfrac{18a^3\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải.



Do $(A'B'C') \mathbin{/\!\!/} (ABC)$ nên góc giữa $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

Dựng $AM \perp BC$. Mà $AA' \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (A'BC) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Vậy góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa đường thẳng $A'M$ và đường thẳng AM.

Suy ra $\widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông ABC ta có

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13}$.

Mặt khác $AM \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AM = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{6a^2}{a\sqrt{13}} = \dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ vuông tại A ta có

$$\tan \widehat{A'MA} = \frac{AA'}{AM} \Leftrightarrow AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{6a\sqrt{39}}{13} \cdot \sqrt{3} = \frac{6a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

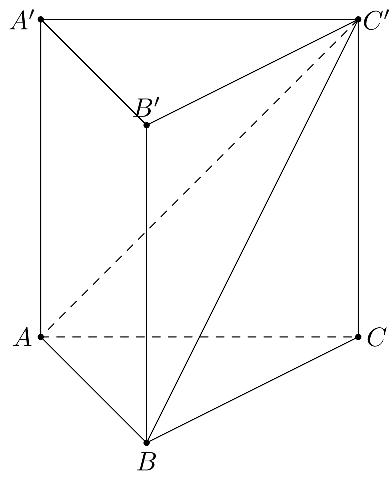
$$V = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{6a\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3a = \frac{18a^3\sqrt{39}}{13} \text{ (đvtt)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43.18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60°$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Ⓐ $a^3\sqrt{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$ tại A,

mà $BC' \cap (AA'C'C) = C'$ nên

$\left(\widehat{BC', (AA'C'C)}\right) = (\widehat{BC', AC'}) = \widehat{AC'B} = 30°$.

Ta có $AB = AC \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$; $AC' = \cot 30° \cdot AB = 3a$.

Suy ra $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

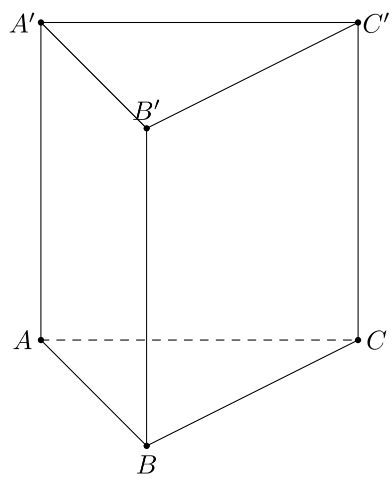
Thể tích lăng trụ là $V = 2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 43.19. Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 4, diện tích ba mặt bên lần lượt là 9, 18 và 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Ⓐ $\sqrt{11951}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{11951}}{2}$. Ⓒ $\sqrt[4]{11951}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt[4]{11951}}{2}$.

Lời giải.



Đặt $AA' = x$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Ta có $\begin{cases} xc = 18 \\ xb = 9 \\ xa = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = \dfrac{10}{9}b. \end{cases}$

Ta lại có $S_{ABC} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4$,

với $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{37}{18}b$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{37}{18}b\left(\dfrac{37}{18}b - \dfrac{10}{9}b\right)\left(\dfrac{37}{18}b - b\right)\left(\dfrac{37}{18}b - 2b\right)} = 4$.

Suy ra $x = \dfrac{\sqrt{11951}}{8}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{11951}}{2}$.

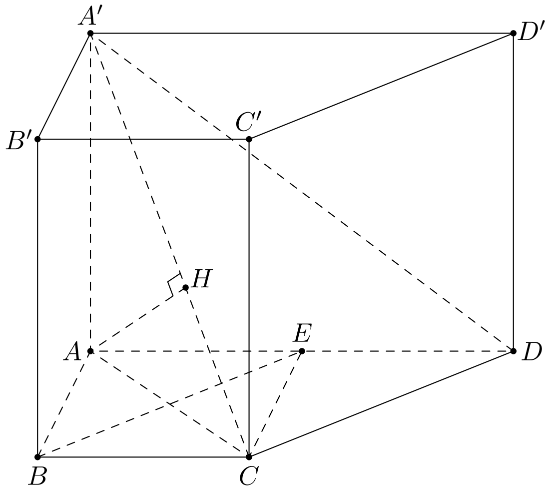
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 43.20. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, gọi E là trung điểm AD. Cho $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Hãy tính theo a thể tích khối lăng trụ

$ABCD.A'B'C'D'$ biết khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và $A'D$ là $\dfrac{3\sqrt{22}}{22}a$.

Ⓐ $9a^3$. Ⓑ $\dfrac{9\sqrt{22}}{11}a^3$. Ⓒ $\dfrac{9}{2}a^3$. Ⓓ $\dfrac{9\sqrt{22}}{22}a^3$.

Lời giải.



Từ giả thiết, ta có tứ giác $ABCE$ là hình vuông.

Hạ $AH \perp A'C$; $H \in A'C$.

Ta có $CD \perp AC$, $CD \perp AA' \Rightarrow CD \perp (AA'C)$

$\Rightarrow CD \perp AH$, mà $AH \perp A'C \Rightarrow AH \perp (A'CD)$.

Mặt khác $BE \parallel CD$, $CD \in (A'CD)$,

E là trung điểm AD nên

$\mathrm{d}(BE; A'D) = \mathrm{d}(E; (A'CD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A; (A'CD)) = \dfrac{1}{2}AH$.

Từ giả thiết ta có

$\dfrac{1}{2}AH = \dfrac{3\sqrt{22}}{22}a \Leftrightarrow AH = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}a \Leftrightarrow \dfrac{AA' \cdot AC}{\sqrt{AA'^2 + AC^2}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}a \Leftrightarrow \dfrac{AA' \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{AA'^2 + 2a^2}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}a \Leftrightarrow AA'^2 = 9a^2 \Leftrightarrow AA' = 3a$.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \dfrac{1}{2}(2a + a) \cdot a = \dfrac{3a^2}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \dfrac{3a^2}{2} \cdot 3a = \dfrac{9}{2}a^3$.

Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

43.1. C	43.2. A	43.3. A	43.4. A	43.5. A	43.6. C	43.7. A	43.8. C
43.9. A	43.10. A	43.11. C	43.12. B	43.13. B	43.14. A	43.15. A	43.16. C
43.17. D	43.18. A	43.19. B	43.20. C				

DẠNG 44. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ứng dụng tích phân tính diện tích

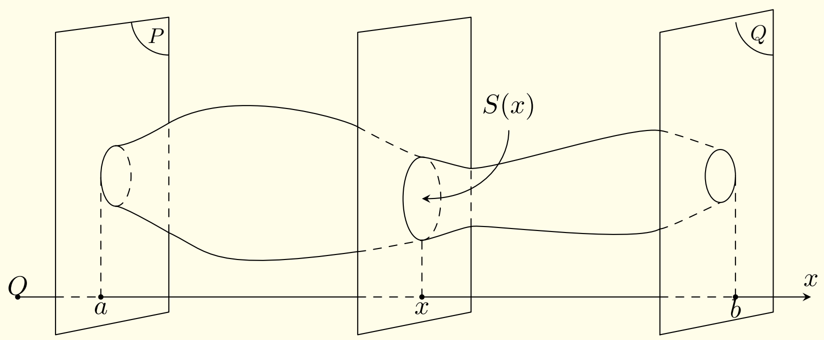
a) Một số hình thức đề cho và hướng xử lý trong trắc nghiệm

- Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng (H) : $\{y = f(x), y = g(x), x = a, x = b\ (a < b)\} \xrightarrow{\text{casio}} \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$ = kết quả, so sánh với bốn đáp án.
- Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H) : \{y = f(x), y = g(x)\}$. Giải $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1, \ldots, x_i$ với x_1 nhỏ nhất, x_i lớn nhất $\xrightarrow{\text{casio}} \int\limits_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$
- Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.
- Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạng $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ ta nên vẽ hình.

2. Ứng dụng tính thể tích khối tròn xoay

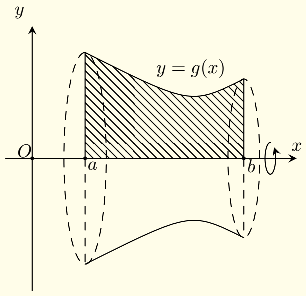
a) Thể tích vật thể(mặt cắt)

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \leq x \leq b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $S = \int\limits_a^b S(x)\, \mathrm{d}x$.



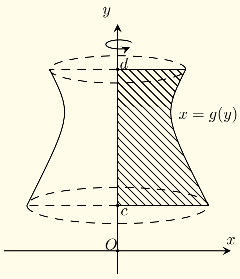
b) Thể tích khối tròn xoay

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



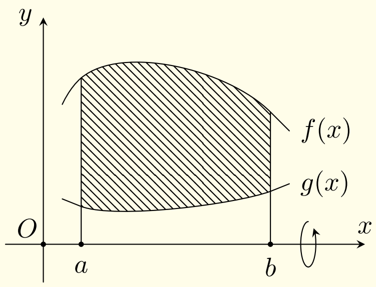
$$\begin{cases} (C)\colon y = f(x) \\ (Ox)\colon y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C)\colon x = g(y) \\ (Oy)\colon x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi \int\limits_c^d [g(y)]^2 \, dy}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \, dx}$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 44 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2 \Rightarrow (xf(x))'=4x^3+4x+2 \Rightarrow xf(x)=\int \left(4x^3+4x+2\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow xf(x)=x^4+2x^2+2x+C, C\in\mathbb{R}.$$

Thay $x=0$ được $C=0$.

Do đó $xf(x)=x^4+2x^2+2x$ hay $f(x)=x^3+2x+2$ và $f'(x)=3x^2+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$

$$x^3+2x+2=3x^2+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là

$$S=\int_0^2 \left|f(x)-f'(x)\right|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án C □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 44.1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(\sin x-x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-1}$. Tính tích phân $S=\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f(\sin x-x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-1} \Rightarrow (\cos x-1)f(\sin x-x)=\cos 2x$.

Lấy tích phân từ 0 tới π, ta được $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos x-1)f(\sin x-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos 2x\,\mathrm{d}x=0$.

Đặt $t=\sin x-x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\pi \Rightarrow t=-\pi$ và $\mathrm{d}t=(\cos x-1)\,\mathrm{d}x$.

Do đó $\displaystyle\int_0^{-\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{-\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 44.2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$;

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A 0. **B** 1. **C** $\dfrac{\pi}{2}$. **D** $-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}(\sin x) = f(x)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + \sin x\right]^2\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x. \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x) + \sin x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f(x) = \cos x + C$.

Do $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0 \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 44.3. Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn các điều kiện $f(1) = 2$, $f(x) \neq 0$, $\forall x > 0$ và $\left(x^2+1\right)^2 f'(x) = [f(x)]^2\left(x^2 - 1\right)$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A $\dfrac{2}{5}$. **B** $-\dfrac{2}{5}$. **C** $-\dfrac{5}{2}$. **D** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(x^2+1\right)^2 f'(x) = [f(x)]^2\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, \forall x \in [1;2] (*)$.

Lấy tích phân 2 vế của $(*)$ trên $[1;2]$ ta được

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2 = \int\limits_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \int\limits_1^2 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\Bigg|_1^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2)=\frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 44.4. Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f"(x)=4x^3+2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A $\frac{5}{2}$. B $\frac{9}{2}$. C $\frac{16}{15}$. D $\frac{8}{15}$.

Lời giải.

Ta có $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f"(x)=4x^3+2x \Leftrightarrow \Big[f(x)\cdot f'(x)\Big]'=4x^3+2x$.

Suy ra $f(x)\cdot f'(x)=\int(4x^3+2x)\,\mathrm{d}x=x^4+x^2+C$.

Với $f(0)=0\Rightarrow C=0$. Nên ta có $f(x)\cdot f'(x)=x^4+x^2$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x^4+x^2)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\frac{8}{15}\Rightarrow f^2(1)=\frac{16}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$ và thoả mãn $f(0)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

A $I=\frac{15}{4}$. B $I=\frac{15}{2}$. C $I=\frac{17}{2}$. D $\frac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)f^2(x)+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f'(x)f^2(x)-2\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x=0,$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow\sqrt{f'(x)}.f(x)=1\Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x)=1.$

$\Rightarrow \int f'(x)\cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x.$

$\Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3}=x+C.$

Mà $f(0)=2\Rightarrow C=\frac{8}{3}$.

Vậy $I=\int\limits_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(3x+8)\mathrm{d}x=\frac{19}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44.6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thoả mãn $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$ và $[f(x)]^4\cdot[f'(x)]^2\cdot(x^2+1)=1+[f(x)]^3$. Biết $f(0)=2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$. (B) $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. (C) $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$. (D) $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & [f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot \left(x^2+1\right) = 1 + [f(x)]^3 \\ \Rightarrow\ & [f(x)]^2 \cdot [f'(x)] \cdot \sqrt{(x^2+1)} = \sqrt{1+[f(x)]^3} \\ \Rightarrow\ & [f(x)]^2 \cdot [f'(x)] \cdot \sqrt{(x^2+1)} = \sqrt{1+[f(x)]^3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}} = \frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 cả hai vế ta được

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 \frac{3[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x. \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{1+[f(x)]^3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{1+[f(1)]^3} - \sqrt{1+[f(0)]^3} = \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt{2}). \\ \Leftrightarrow\ & f(1) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\ln(1+\sqrt{2})+3\right)^2 - 1} \approx 2{,}605. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 44.7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thoả mãn $f(x) = \mathrm{e}^x + \int\limits_0^1 \dfrac{f(t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1+\ln 2023) = a + b \cdot \mathrm{e}$, với a, $b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a+b$ có giá trị là

(A) 2023. (B) 2025. (C) 2024. (D) 2026.

Lời giải.

Đặt $T = \int\limits_0^1 \dfrac{f(t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$. Ta có $f(x) = \mathrm{e}^x + T$.

Khi đó $T = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^t + T}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (1 + \mathrm{e}^{-t}T)\,\mathrm{d}t = \left(t - T\mathrm{e}^{-t}\right)\Big|_0^1 = (1 - T\mathrm{e}^{-1}) - (0 - T)$.

Suy ra $T = \mathrm{e}$ và $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}$.

Vậy $f(1+\ln 2023) = e^{1+\ln 2023} + e = 2024e$. Do đó $a = 0; b = 2024 \Rightarrow a+b = 2024$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44.8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thoả mãn $f\left(x^2+1\right) + \dfrac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $\int\limits_1^{17} f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 - 2\ln b + c$ với a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Giá trị $a + b + 2c$ bằng

(A) 7. (B) $\dfrac{29}{2}$. (C) 5. (D) $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{2x+1}{2x}\cdot\ln(x+1)$.

$\Leftrightarrow 2xf\left(x^2+1\right)+\dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=(2x+1)\cdot\ln(x+1)$. (1)

Lấy tích phân cận từ 0 đến 4 hai vế của (1) ta được

$\displaystyle\int_0^4 2xf\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x+\int_0^4\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^4(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Leftrightarrow\int_0^4 f\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}(x^2+1)+\int_0^4 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x})=\int_0^4(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Leftrightarrow\int_1^{17} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^4(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$ (2)

Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned}&\int_0^1 2xf\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow&\int_0^1 f\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}(x^2+1)+\int_0^1 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x})=\int_0^1(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow&\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x.\quad(3)\end{aligned}$$

Lấy $(2)-(3)$ ta được

$\displaystyle\int_1^{17} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^4(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x-\int_0^1(2x+1)\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=20\ln 5-2\ln 2-\frac{15}{2}.$

$\Rightarrow a+b+2c=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 44.9. Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, thoả mãn $f(9)=9$ và $\left[f(x)+xf'(x)\right]^2=4f(x),\forall x\in(0;+\infty)$. Nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là

A. $4x+24\sqrt{x}-9\ln x+C$.

B. $2x+12\sqrt{x}-9\ln|x|+C$.

C. $x+12\sqrt{x}+9\ln|x|+C$.

D. $4+\dfrac{12}{\sqrt{x}}+\dfrac{9}{x}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\left[f(x)+xf'(x)\right]^2=4f(x)\\ \Rightarrow\ &\frac{\left[f(x)+xf'(x)\right]^2}{4f(x)}=1\Rightarrow\frac{\left[f(x)+xf'(x)\right]^2}{4xf(x)}=\frac{1}{x}\\ \Rightarrow\ &\frac{f(x)+xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{x'f(x)+xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\\ \Rightarrow\ &\frac{\left[xf(x)\right]'}{2\sqrt{xf(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow\left(\sqrt{xf(x)}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{xf(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C_1.$$

Mà $f(9) = 9 \Rightarrow \sqrt{9f(9)} = 2\sqrt{9} + C_1 \Rightarrow C_1 = 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{(2\sqrt{x}+3)^2}{x}$.

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2\sqrt{x}+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x = 4x + 24\sqrt{x} - 9\ln x + C_2$.

Chọn đáp án A □

Câu 44.10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ và $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f'(x)$ bằng

A $f'(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$. B $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. D $f'(x) = \dfrac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = -2x \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -\displaystyle\int 2x\,\mathrm{d}x = -x^2 + C$.

Mà $f(1) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{f(1)} = -1^2 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

Vậy $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

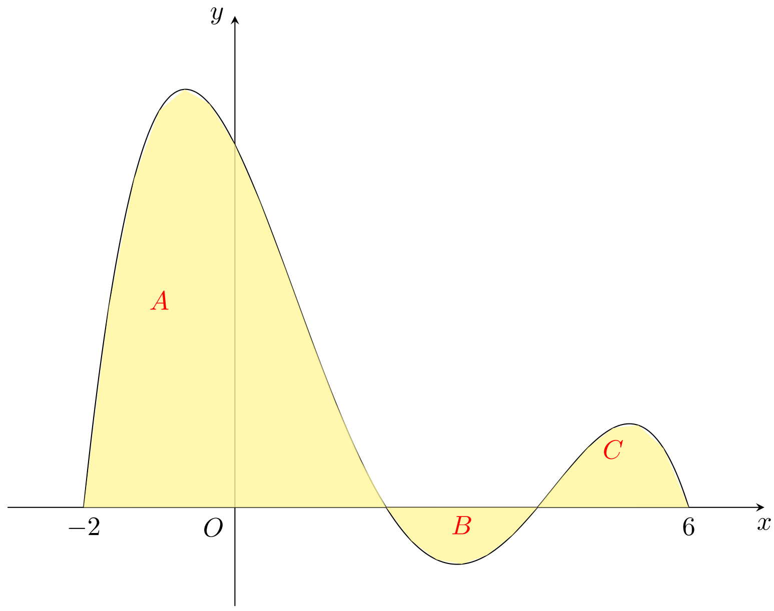
Chọn đáp án C □

Câu 44.11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 6]$ như hình vẽ . Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32; 2; 3. Tính $\displaystyle\int_{-2}^{2} [f(2x+2)+1]\,\mathrm{d}x$

A $\dfrac{45}{2}$. B 41.

C 37. D $\dfrac{41}{2}$.



Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{2} [f(2x+2)+1]\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(2x+2)\,\mathrm{d}x + 4$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(2x+2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x+2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{2}$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -2$; $x = 2 \Rightarrow t = 6$.

Suy ra $I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{6} f(t)\,\mathrm{d}t$.

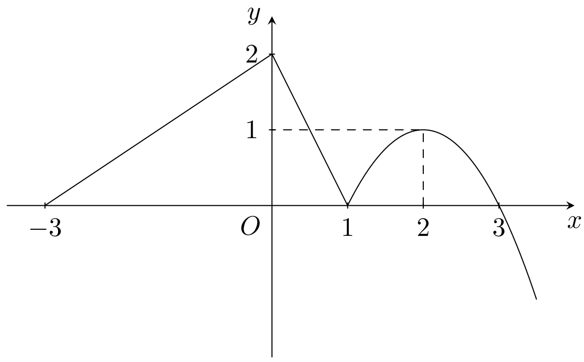
$\Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-2}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_2}^{6} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{2}(S_A - S_B + S_C) = \dfrac{1}{2}(32 - 2 + 3) = \dfrac{33}{2}$, với x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành $(-2 < x_1 < x_2 < 6)$.

Vậy $\displaystyle\int_{-2}^{2} [f(2x+2)+1]\,\mathrm{d}x = I_1 + 4 = \dfrac{33}{2} + 4 = \dfrac{41}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44.12.

Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 3]$ như hình vẽ (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A $-\dfrac{16}{3}$. B $-\dfrac{8}{3}$. C $\dfrac{16}{3}$. D $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có đường cong Parabol có đỉnh $(2; 1)$ và đi qua hai điểm $(1; 0), (3; 0)$ nên có phương trình $y = f'(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Suy ra $\displaystyle\int_{1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \left(-x^2 + 4x - 3\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f(3) - f(1) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow f(1) = -\dfrac{4}{3}$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $(-3; 0)$, $(0; 2)$ nên có phương trình $y = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Suy ra với điểm có hoành độ $x = -1$ thuộc $d \Rightarrow$ tung độ $y = \dfrac{4}{3}$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(-1) = \left(\dfrac{4}{3} + 2\right).\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \dfrac{8}{3} \Rightarrow f(-1) = f(1) - \dfrac{8}{3} = -4$.

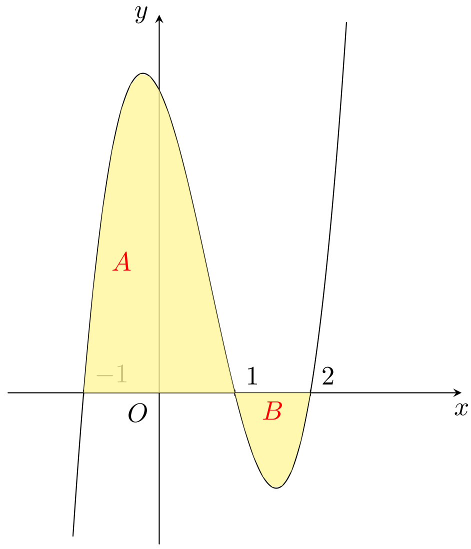
Vậy $f(-1) + f(1) = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44.13.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A) và (B) lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x} f(3\ln x + 2)\, \mathrm{d}x$ bằng

(A) 4. (B) -4. (C) 6. (D) -6.



Lời giải.

Hình phẳng (A) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ và có phần đồ thị nằm phía trên trục hoành nên ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 15$.

Hình phẳng (B) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ và có phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành nên ta có $\int\limits_{1}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x = -3$.

Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x} f(3\ln x + 2)\, \mathrm{d}x$.

Đặt $t = 3\ln x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{3}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận

Với $x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -1$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

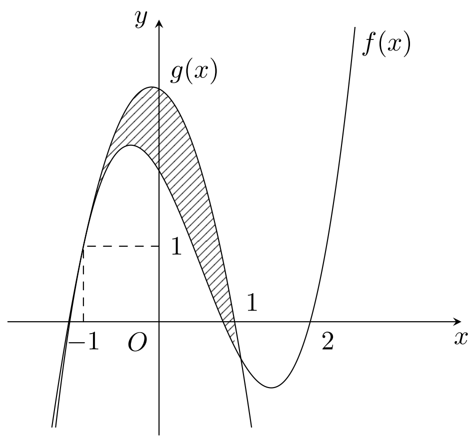
Do đó $I = \int\limits_{-1}^{2} f(t) \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(t)\, \mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{2} f(t)\, \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}(15 - 3) = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44.14.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 2$ và parabol $g(x) = mx^2 + nx + p$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng -1. Diện tích phần hình phẳng phần được gạch chéo nằm trong khoảng

(A) $(1{,}588; 1{,}592)$. (B) $(1{,}551; 1{,}574)$.
(C) $(1{,}542; 1{,}551)$. (D) $(1{,}574; 1{,}588)$.



Lời giải.

Cho đồ thị hàm số bậc ba đi qua hai điểm $(-1\,;\,1)$, $(2\,;\,0)$ có $\begin{cases} -a+2=1 \\ 8a+4b+2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Suy ra $f(x)=x^3-\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+2$.

Cho parabol đi qua hai điểm $(-1\,;\,1)$, $(1\,;\,0)$ ta có $\begin{cases} m-n+p=1 \\ m+n+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-\dfrac{1}{2} \\ m+p=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Lại có $f'(-1)=g'(-1) \Leftrightarrow \left[3(-1)^2-\dfrac{10}{3}(-1)-\dfrac{5}{3}\right]=[2m(-1)+n] \Leftrightarrow \dfrac{14}{3}=-2m+n$.

Từ đó suy ra $m=-\dfrac{31}{12}$, $n=-\dfrac{1}{2}$, $p=\dfrac{37}{12} \Rightarrow g(x)=-\dfrac{31}{12}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{37}{12}$.

Ta dễ dàng tìm được giao điểm thứ hai của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$x^3-\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+2=-\dfrac{31}{12}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{37}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{13}{12}. \end{array}\right.$

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính là

$$\int\limits_{-1}^{\frac{13}{12}}\left|\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2\right)-\left(-\frac{31}{12}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{37}{12}\right)\right|\mathrm{d}x \approx 1,57.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44.15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$ ta được

(A) $f(2)<f(0)<f(-2)$.

(B) $f(0)<f(-2)<f(2)$. .

(C) $f(-2)<f(2)<f(0)$.

(D) $f(-2)<f(0)<f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=(x-1)(x^2-3)(x^4-1)=x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3$.

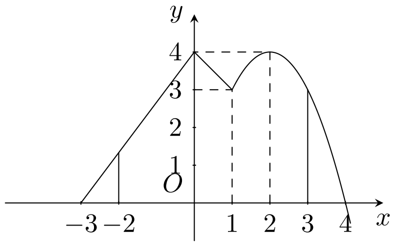
- $I_1=\displaystyle\int\limits_{-2}^{0}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{-464}{105}<0$
  $\Rightarrow f(0)-f(-2)<0 \Rightarrow f(0)<f(-2)$.
- $I_2=\displaystyle\int\limits_{0}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{-44}{105}<0 \Rightarrow f(2)-f(0)<0$
  $\Rightarrow f(2)<f(0)$.

Vậy $f(2)<f(0)<f(-2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44.16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$.



Ⓐ $S = \dfrac{43}{2}$. Ⓑ $S = \dfrac{95}{6}$. Ⓒ $S = \dfrac{97}{6}$. Ⓓ $S = \dfrac{53}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ_1, Δ_2, parabol (P), $x = -2$, $x = 3$.

Với $\Delta_1$qua $E(-3;0)$, $D(0;4)$nên có pt $y = \dfrac{4}{3}x + 4$; Δ_2 qua $D(0;4)$, $C(1;3)$ nên có phương trình $y = -x + 4$; $(P): y = ax^2 + bx + c$ qua $C(1;3)$ và có đỉnh $A(2;4)$ nên

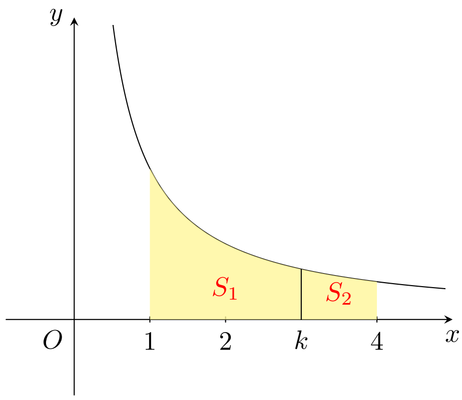
$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x.$$

Vậy $S = \int\limits_{-2}^{3} |f(x)|\,dx = \int\limits_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{0} \left(\dfrac{4}{3}x + 4\right) dx + \int\limits_{0}^{1} (-x + 4)\,dx + \int\limits_{1}^{3} \left(-x^2 + 4x\right) dx = \dfrac{97}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.17.

Cho hình cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k\,(1 < k < 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên, biết $S_1 = 3S_2$. Giá trị của k là?



Ⓐ $\sqrt{8}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\sqrt{7}$. Ⓓ $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S_1 + S_2 = \int\limits_{1}^{4} \dfrac{2}{x}\,dx = 2\ln x\Big|_1^4 = 4\ln 2 \\ S_1 = 3S_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 3\ln 2 \\ S_2 = \ln 2. \end{cases}$

Ta có $\ln 2 = S_2 \Leftrightarrow \ln 2 = \int\limits_{k}^{4} \dfrac{2}{x}\,dx \Leftrightarrow \ln 2 = 2\ln x\Big|_k^4 \Leftrightarrow \ln 2 = 4\ln 2 - 2\ln k$.

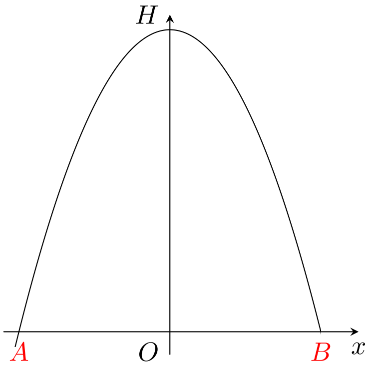
$\Leftrightarrow 2\ln k = 3\ln 2 \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \sqrt{8}\ (1 < k < 4)$.

Vậy $k = \sqrt{8}$.

Chọn đáp án A □

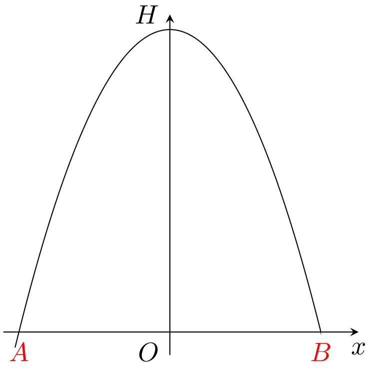
Câu 44.18.

Bạn An cần mua một chiếc gương có đường viền là đường Parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng khoảng cách đoạn $AB = 60\,\text{cm}$, $OH = 30\,\text{cm}$. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là



(A) $900\,(\text{cm}^2)$. (B) $1000\,(\text{cm}^2)$.
(C) $1400\,(\text{cm}^2)$. (D) $1200\,(\text{cm}^2)$.

Lời giải.



- Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
- Ta có $O\,(0;0)$; $A\,(-30;0)$; $B\,(30;0)$;$H\,(0;30)$.
- Phương trình Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
- Parabol đi qua các điểm A, B, H nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (-30)^2 a - 30b + c = 0 \\ 30^2 a + 30b + c = 0 \\ c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{30} \\ b = 0 \\ c = 30. \end{cases}$$
$\Rightarrow$Phương trình Parabol là $y = -\dfrac{1}{30}x^2 + 30$.

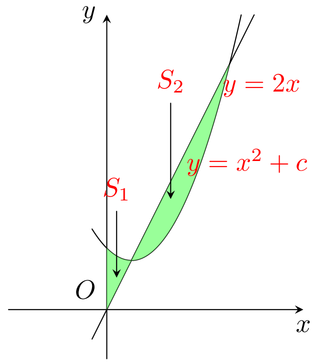
Vậy diện tích chiếc gương là $S = \displaystyle\int\limits_{-30}^{30} \left(-\dfrac{1}{30}x^2 + 30\right)\,\mathrm{d}x = 1200\ (\text{cm}^2)$.

Trắc nghiệm nhanh: Diện tích Parabol có đáy $R = \dfrac{AB}{2} = 30$ và đường cao $h = OH = 30$ là $S = \dfrac{4}{3}Rh = \dfrac{4}{3}\cdot 30 \cdot 30 = 1200\ (\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án (D) □

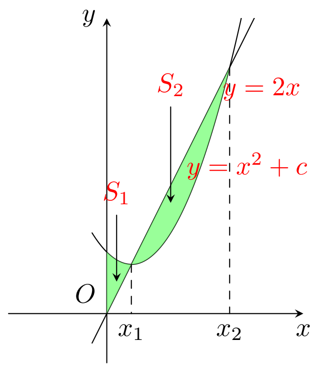
Câu 44.19.

Cho đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2 + c$ (c là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ. Khi $S_1 = S_2$ thì c gần với số nào nhất sau đây?



A 2. B 0. C 1. D 3.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol

$x^2 + c = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + c = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' = 1 - c > 0 \Leftrightarrow c < 1$.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (1) \\ x_1.x_2 = c. & (2) \end{cases}$

Do $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} \left(x^2 + c - 2x\right)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(x^2 + c - 2x\right)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} \left(x^2 - 2x + c\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(x^2 - 2x + c\right)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_2} \left(x^2 - 2x + c\right)\,\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + cx\right)\Bigg|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_2^3}{3} - x_2^2 + cx_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_2^2}{3} - x_2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{x_2^2}{3} + x_2. \quad (3)$

Thay (1) và (3) vào (2) ta được

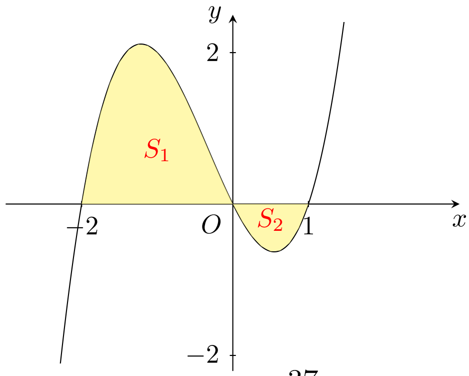
$(2 - x_2) \cdot x_2 = -\dfrac{x_2^2}{3} + x_2 \Leftrightarrow 2x_2 - x_2^2 = -\dfrac{x_2^2}{3} + x_2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x_2^2 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Thay $x_2 = \dfrac{3}{2}$ vào (3) $\Rightarrow c = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.20.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích $S_1 = \dfrac{8}{3}$ và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích $S_2 = \dfrac{5}{12}$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.



Ⓐ $I = \dfrac{27}{4}$. Ⓑ $I = \dfrac{5}{3}$. Ⓒ $I = \dfrac{3}{4}$. Ⓓ $I = \dfrac{37}{36}$.

Lời giải.

Với $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 3x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$.

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = -1 \Rightarrow t = -2. \end{cases}$

Ta được $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left(\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Trên đoạn $[-2\,;0]$: $f(x) \geq 0$ nên $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}$.

Trên đoạn $[0;1]$: $f(x) \leq 0$ nên $\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{5}{12}$.

Vậy $I = \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{12}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

44.1. A	44.2. B	44.3. D	44.4. C	44.5. D	44.6. B	44.7. C	44.8. A
44.9. A	44.10. C	44.11. D	44.12. A	44.13. A	44.14. C	44.15. A	44.16. C
44.17. A	44.18. D	44.19. C	44.20. C				

DẠNG 45. PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ PHỨC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách giải

- Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$, với $z \in \mathbb{C}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.
  Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.
  - Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.
  - Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

2. Đặc biệt

- Khi Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Khi Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

3. Nhận xét

- Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc 2 đều có 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt).
- Định lý Vi-et: Phương tình bậc hai $az^2 + bz + c$, với $z \in \mathbb{C}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ có 2 nghiệm phức z_1 và z_2 thì:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 45. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2$?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 2m + 2$

- **Trường hợp 1**: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$.
  Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\dfrac{c}{a}} = \sqrt{m^2}$.
  Suy ra $2\sqrt{m^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\,(\text{nhận}) \\ m = -1\,(\text{loại}). \end{array}\right.$
- **Trường hợp 2**: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$.
  Vì $a \cdot c = m^2 \geq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 \cdot z_2 \geq 0$ hoặc $z_1 \cdot z_2 \leq 0$.
  Suy ra
  $$|z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = 2 \Leftrightarrow |2m + 2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\,(\text{loại}) \\ m = 0\,(\text{nhận}). \end{array}\right.$$
  Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

□

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 45.1. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Đặt $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$. Khi đó

(A) $w = -2^{51}i$. (B) $w = 2^{51}i$. (C) $w = 2^{51}$. (D) $w = -2^{51}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \pm i$.

$(1 + z_1)^{100} = (1 - 2 + i)^{100} = \left[(-1 + i)^2\right]^{50} = (-2i)^{50} = 2^{50} \cdot (-1)^{25} = -2^{50}$.

$(1 + z_2)^{100} = (1 - 2 - i)^{100} = (1 + i)^{100} = (2i)^{50} = -2^{50}$.

$w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100} = -2^{50} - 2^{50} = -2^{51}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45.2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Giá trị của $P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}|$ là

(A) $P = 2$. (B) $P = 3$. (C) $P = 2\sqrt{3}$. (D) $P = 4038$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ có hai nghiệm phức là $\begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right) \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right). \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}. \end{cases}$

Áp dụng công thức Moive ta được

$z_1^{2019} = \cos\left(2019 \cdot \dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2019 \cdot \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos(1346\pi) + i\sin(1346\pi) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$z_2^{2019} = \cos\left(2019 \cdot \dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(2019 \cdot \dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos(2692\pi) + i\sin(2692\pi) = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$

Vậy $P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = |1+1| = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.3. Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

- Trường hợp 1: Hai nghiệm là hai số phức z_1 và z_2 có phần ảo khác không.
  Để phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm phức có phần ảo khác không khi

$$\begin{aligned}\Delta = (a-3)^2 - 4\left(a^2 + a\right) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -3a^2 - 10a + 9 < 0\\ &\Leftrightarrow \quad a \in \left(-\infty; \dfrac{-2\sqrt{13}-5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{13}-5}{3}; +\infty\right).\end{aligned}$$

  Giả sử $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2}$; $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.
  Ta có

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \quad &\Leftrightarrow \quad |a-3| = \sqrt{|-3a^2 - 10a + 9|}\\ &\Leftrightarrow \quad (a-3)^2 = \left|-3a^2 - 10a + 9\right|\\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = -9\\ a = \pm 1\\ a = 0. \end{array}\right.\end{aligned}$$

  So với điều kiện ta nhận được $a = -9$; $a = 1$.

- Trường hợp 2: Hai nghiệm là hai số thực z_1 và z_2 .
  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow S^2 = S^2 - 4P \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\\ a = -1. \end{array}\right.$
  Thử lại thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45.4. Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $M = z^{2019} + z^{2018} + \dfrac{1}{z^{2019}} + \dfrac{1}{z^{2018}} + 5$ bằng

(A) 5. (B) 2. (C) 7. (D) -1.

Lời giải.

Nhận xét $z = -1$ không là nghiệm phương trình nên

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 - z + 1\right)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1.$$

Do đó

$$M = \left(z^3\right)^{673} + z^2 \cdot \left(z^3\right)^{672} + \frac{1}{\left(z^3\right)^{673}} + \frac{z}{z^3\left(z^3\right)^{672}} + 5 = -1 + z^2 - 1 - z + 5 = z^2 - z + 1 + 2 = 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 45.5. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $(z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ bằng

A $2^{1009}i$. B 0. C 2^{2018}. D $-2^{1010}i$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i = z_1 \\ z = 2 - i = z_2. \end{array}\right.$

Suy ra

$$\begin{aligned} (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018} = (1 + i)^{2018} + (1 - i)^{2018} &= \left(1 + 2i + i^2\right)^{1009} + \left(1 - 2i + i^2\right)^{1009} \\ &= (2i)^{1009} + (-2i)^{1009} \\ &= (2i)^{1009} - (2i)^{1009} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 45.6. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$, trong đó z_2 là nghiệm phức có phần ảo dương. Môđun của số phức $w = z_1 - 2z_2$ bằng

A $\sqrt{5}$. B 3. C 2. D $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2 - i \\ z = -2 + i. \end{array}\right.$

Do z_2 là nghiệm phức có phần ảo dương nên ta có $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -2 + i$.

Suy ra $w = z_1 - 2z_2 = -2 - i - 2(-2 + i) = 2 - 3i$.

Vậy $|w| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.7. Gọi S là tổng tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S.

A -3. B 7. C 6. D 10.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(z - 1)^2 = m$.

- Với $m \geq 0$, phương trình có các nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{m}$.

Khi đó $|1 \pm \sqrt{m}| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\sqrt{m}=2 \\ 1+\sqrt{m}=-2 \\ 1-\sqrt{m}=2 \\ 1-\sqrt{m}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=9. \end{array}\right.$

- Với $m < 0$, phương trình có nghiệm $z = 1 \pm i\sqrt{-m}$.

Khi đó $\left|1 \pm i\sqrt{-m}\right| = 2 \Leftrightarrow 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3$.

Từ đó suy ra $S = 9 + 1 + (-3) = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.8. Cho m là số thực, biết phương trình $z^2 - mz + 13 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2; trong đó có một nghiệm có phần ảo là 2. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

A 26. B $2\sqrt{13}$. C 13. D $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a + 2i$. Theo giả thiết ta có z_1 là nghiệm của phương trình $z^2 - mz + 13 = 0$

$$\begin{aligned}
(a+2i)^2 - m(a+2i) + 13 = 0 &\Leftrightarrow \left(a^2 - ma + 9\right) + (4a - 2m)\, i = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - ma + 9 = 0 \\ 4a - 2m = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 9 = 0 \\ m = 2a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ m = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3 \\ m = -6 \end{cases} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nên có hai cặp số z_1, z_2 thỏa mãn là $\begin{cases} z_1 = 3 + 2i \\ z_2 = 3 - 2i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = -3 + 2i \\ z_2 = -3 - 2i. \end{cases}$

Đối với mỗi cặp số z_1, z_2 trên đều có $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 26$.

Chọn đáp án A □

Câu 45.9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\dfrac{|z|^4}{z^2} + \overline{z} = 4$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

A 2. B 4. C 8. D 1.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{|z|^4}{z^2}+\overline{z}=-4 \Leftrightarrow \left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2+\overline{z}=-4 \Leftrightarrow \left(\frac{z.\overline{z}}{z}\right)^2+\overline{z}=4 \Leftrightarrow \overline{z}^2+\overline{z}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overline{z}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\\ \overline{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i.\end{array}\right.$

Vậy $|z_1+z_2|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i+-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\right|=|-1|=1.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45.10. Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2z+3=0$. Tính $|w|$ biết $w=z^{2018}-z^{2017}+z^{2016}+3z^{2015}+3z^2-z+9$.

(A) $9\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $5\sqrt{3}$. (D) $2018\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1-\sqrt{2}\cdot i\\ z=1+\sqrt{2}\cdot i.\end{array}\right.$

Theo giả thiết

$$w=z^{2018}-z^{2017}+z^{2016}+3z^{2015}+3z^2-z+9=z^{2015}\cdot\left(z^3-z^2+z+3\right)+3z^2-z+9.$$

- Với $z_1=1-\sqrt{2}i \Rightarrow w_1=5-5\sqrt{2}i \Rightarrow |w_1|=5\sqrt{3}$.
- Với $z_2=1+\sqrt{2}i \Rightarrow w_2=5=5\sqrt{2}i \Rightarrow |w_2|=5\sqrt{3}$.

Vậy $|w|=5\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45.11. Cho hai số phức không thuần thực z_1 và z_2 thoả mãn phương trình $z^2-2az+3=0$, với a là số thực. Giá trị của biểu thức $T=|z_1|+|z_2|$ bằng

(A) 6. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{5}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hai số phức không thuần thực z_1 và z_2 thoả mãn phương trình $z^2-2az+3=0$, chứng tỏ $\Delta'=a^2-3<0$.

Các nghiệm của phương trình là $z_1=a+\sqrt{3-a^2}\cdot i$, $z_2=a-\sqrt{3-a^2}\cdot i$

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{a^2+3-a^2}=\sqrt{3}$.

Vậy $T=|z_1|+|z_2|=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45.12. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4+z^2+1=0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$.

(A) 4. (B) 8. (C) 6. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z^4+z^2+1=0 \Leftrightarrow \left(z^2+1\right)^2-z^2=0 &\Leftrightarrow \left(z^2+z+1\right)\cdot\left(z^2-z+1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z+1=0 \\ z^2-z+1=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}i^2 \\ \left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}i^2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_{1,2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ z_{3,4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$.

Vậy $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.13. Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm là $2-3i$. Khi đó $3a+b$ bằng

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Vì $2-3i$ là nghiệm của phương trình $z^2-az+b=0$ nên ta có

$$(2-3i)^2+a\left(2-3i\right)+b=0 \Leftrightarrow -5-12i+2a-3ai+b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=5 \\ -3a=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=13 \\ a=-4. \end{cases}$$

Vậy $3a+b=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45.14. Bốn nghiệm của phương trình $z^4-1=0$ được biểu diễn bởi bốn điểm A, B, C, D trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Tính diện tích tứ giác tạo thành từ bốn điểm trên.

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $z^4-1=0 \Leftrightarrow \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1 \\ z_2=-1 \\ z_3=i \\ z_4=-i. \end{array}\right.$

Giả sử A, B, C, D lần lượt là bốn điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3, z_4, khi đó ta có

$$A\left(1;0\right), B\left(-1;0\right), C\left(0;1\right), D\left(0;-1\right).$$

Tứ giác $ACBD$ là hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Vậy $S_{ACBD} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.15. Cho phương trình $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 = 0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1, z_2, z_3, z_4. Tính giá trị của biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$.

A $T = 0$. B $T = 2i$. C $T = 1$. D $T = -2i$.

Lời giải.

Đặt $f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 \Rightarrow f(z) = 0$.

Ta có $z^2 + 4 = z^2 - 4i^2 = (z + 2i)(z - 2i)$

Suy ra

$$T = [(z_1 + 2i)(z_2 + 2i)(z_3 + 2i)(z_4 + 2i)]\cdot[(z_1 - 2i)(z_2 - 2i)(z_3 - 2i)(z_4 - 2i)] = [f(-2i) \cdot f(2i)]^4 = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45.16. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w + 3i$; $z_2 = w + 9i$; $z_3 = 2w - 4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

A $P = 136$. B $P = 84$. C $P = 36$. D $P = 208$.

Lời giải.

Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 = -a \Rightarrow 4w + 4 + 12i = -a &\Leftrightarrow (4x + 4 + a) + (12 + 4y)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4 + a = 0 \\ 12 + 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4 = -a \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó $w = x - 3i \Rightarrow z_1 = x$; $z_2 = x + 6i$; $z_3 = 2x - 4 - 6i$.

Vì phương trình bậc ba $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có một nghiệm thực nên hai nghiệm phức còn lại phải là hai số phức liên hợp, suy ra $x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 4$.

Như vậy $z_1 = 4$; $z_2 = 4 + 6i$; $z_3 = 4 - 6i$.

Do đó

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -a \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = -b \\ z_1z_2z_3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = -a \\ 84 = b \\ 208 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 84 \\ c = -208. \end{cases}$$

Vậy $P = |a + b + c| = |-12 + 84 + (-208)| = 136$.

Chọn đáp án A □

Câu 45.17. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của z là

(A) 5. (B) 4. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $z^4 = |z| \Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|\left(|z|^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z| = 0\\ |z| = 1.\end{array}\right.$

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z = -1\\ z = 1\\ z = i\\ z = -i.\end{array}\right.$

Suy ra S có 5 phần tử.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.18. Gọi S là tập hợp các số thực m để phương trình $z^2 + 3z + m^2 - 2m = 0$ có một nghiệm phức z_0 với $|z_0| = 2$. Tổng tất cả các phần tử trong S là

(A) 4. (B) 6. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

- **Trường hợp 1:** z_0 là số thực. Ta có
$$|z_0| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_0 = 2\\ z_0 = -2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m^2 - 2m + 10 = 0\\ m^2 - 2m - 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}.$$
- **Trường hợp 2:** z_0 không phải là số thực $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4(m^2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m > \dfrac{9}{4}$ (1)
Vì phương trình $z^2 + 3z + m^2 - 2m = 0\,(*)$ có các hệ số thực và z_0 là nghiệm của $(*)$ nên $\bar{z}_0$ cũng là nghiệm của $(*)$.
Theo Viet ta có
$$z_0 \cdot \bar{z}_0 = m^2 - 2m \Leftrightarrow 4 = |z_0|^2 = m^2 - 2m \Leftrightarrow m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{5}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.19. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $|w - z_1| = |w - z_2|$ là đường thẳng có phương trình

(A) $x + y = 0$. (B) $y = 0$. (C) $x - y = 0$. (D) $x = 0$.

Lời giải.

Ta có: $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 - i \\ z = 1 + i. \end{array}\right.$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

Gọi $w = x + yi$. Ta có

$$\begin{aligned} |w - z_1| = |w - z_2| &\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)\,i| = |(x-1) + (y-1)\,i| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\ &\Leftrightarrow 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w thỏa yêu cầu bài toán là đường thẳng $y = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.20. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w - 15i + 9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$.

A. $S = -32$. B. $S = 1608$. C. $S = 1144$. D. $S = -64$.

Lời giải.

Từ đề bài suy ra $\begin{cases} (w+3)^2 + b\,(w+3) + c = 0 \\ (2w - 15i + 9)^2 + b\,(2w - 15i + 9) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2w - 15i + 9)\,(w+3) = c \\ 2w - 15i + 9 + w + 3 = -b. \end{cases}$

Giả sử $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó $w + 3 = x + 3 + yi$, $2w - 15i + 9 = 2x + 9 + (2y - 15)\,i$.

Theo đề ta có $\begin{cases} (2w - 15i + 9)\,(w+3) = c \\ 2w - 15i + 9 + w + 3 = -b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 9 + (2y-15)\,i)\,(x + 3 + yi) = c \\ (2x + 9 + (2y - 15)\,i) + (x + 3 + yi) = -b. \end{cases}$

Vì $b, c \in \mathbb{R}$ nên $\begin{cases} (x+3)\,(2y - 15) + y\,(2x+9) = 0 \\ 2y - 15 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 5. \end{cases}$

Suy ra $w = -6 + 5i$, do đó $\begin{cases} (2w - 15i + 9)\,(w+3) = c \\ 2w - 15i + 9 + w + 3 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 34 \\ b = -6. \end{cases}$

Suy ra $S = b^2 - 2c = -32$.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

45.1. D	45.2. A	45.3. C	45.4. B	45.5. B	45.6. D	45.7. B	45.8. A
45.9. D	45.10. C	45.11. B	45.12. A	45.13. D	45.14. B	45.15. C	45.16. A
45.17. A	45.18. A	45.19. B	45.20. A				

DẠNG 46. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG VÀ KHOẢNG CÁCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là

$$\mathrm{d}(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + c^2}}.$$

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5; -1; 3)$ đến (P) bằng

(A) 5. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Chọn $B(2; 1; 1) \in (d) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 0; -1)$.

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (2; 2; -3)$.

Vì (P) đi qua A và chứa d nên $\vec{n}_{(P)} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d\right] = (2; 4; 4) \Rightarrow$ chọn lại $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; 2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$\begin{aligned} & 1(x-0) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0. \\ \Leftrightarrow\ & x + 2y + 2z - 6 = 0. \end{aligned}$$

Khi đó $\mathrm{d}(M, (P)) = \dfrac{|5 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$.

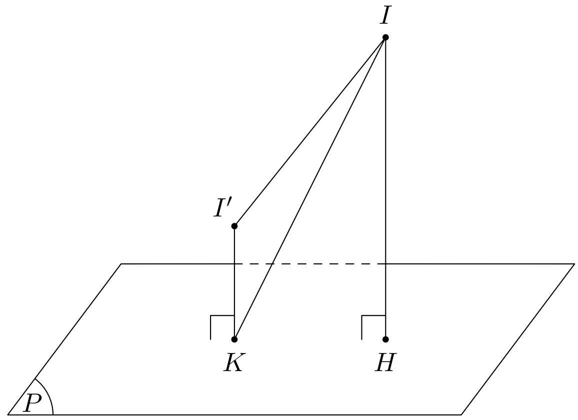
Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 46.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và $(S')\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng

(A) $\dfrac{17}{7}$. (B) $\dfrac{19}{2}$. (C) $\dfrac{8}{9}$. (D) $\dfrac{14}{3}$.

Lời giải.



- Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=5$.
- Mặt cầu (S') có tâm $I'(1;2;3)$ và bán kính $R'=1$.
- Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của I và I' lên mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π.
  $\Rightarrow$ Bán kính đường tròn giao tuyến $r=3 \Rightarrow \mathrm{d}(I,(P))=IH=\sqrt{R^2-r^2}=4$.
- Mặt phẳng (P) tiếp xúc $(S') \Leftrightarrow \mathrm{d}\left(I',(P)\right)=I'K=R'=1$.
- Có $I'=3$. Ta thấy $II'+I'K=3+1=4=IH$.
- Mà $II'+I'K \geq IK \geq IH$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} H \equiv K \\ I' \in IH \end{cases} \Rightarrow II' \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{II'}=(1;2;2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
  $\Rightarrow$ Phương trình (P) có dạng $x+2y+2z+m=0$.
  Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}(I,(P))=4 \\ \mathrm{d}\left(I',(P)\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2+m|}{3}=4 \\ \dfrac{|11+m|}{3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-14 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-14 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-14.$
  Vậy phương trình $(P)\colon x+2y+2z-14=0 \Rightarrow \mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{14}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$ có tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Tìm khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α).

(A) $\dfrac{9}{\sqrt{15}}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{314}}$. (C) $\dfrac{15}{\sqrt{23}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{915}}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(a+4b;-a+b-c;-b+c)$.

Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Vì $I\in(\alpha)$ nên ta có

$$\begin{aligned}&A(a+4b)+B(-a+b-c)+C(-b+c)+D=0\\ \Leftrightarrow\ &(A-B)a+(4A+B-C)b+(-B+C)c=-D.\quad(1)\end{aligned}$$

Theo bài ra ta có $4a+b-2c=4$. (2)

Đồng nhất (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}A-B=4\\4A+B-C=1\\-B+C=-2\\D=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\B=-\dfrac{17}{4}\\C=-\dfrac{25}{4}\\D=-4.\end{cases}$$

Suy ra (α) có phương trình $x+17y+25z+16=0$.

Vậy khảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến (α) bằng

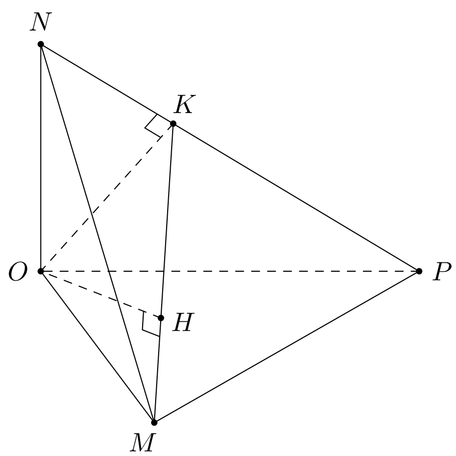
$$\mathrm{d}(D,(\alpha))=\frac{|1+17\cdot 2+25\cdot(-2)+16|}{\sqrt{1^2+17^2+25^2}}=\frac{1}{\sqrt{915}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 46.3. Cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(4;0;0)$, $N(0;0;3)$ sao cho mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng Oyz một góc bằng 60°. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (α).

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (B) 2. (C) 1. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Giả sử mặt phẳng (α) cắt trục Oy tại P (P không trùng với O).

Khi đó ta có $O.MNP$ là tam diện vuông tại O.

Kẻ $OK \perp NP \Rightarrow MK \perp NP$.

Ta có $\widehat{OKM}$ là góc nhọn trong tam giác vuông OMK nên góc $\widehat{OKM}$ là góc giữa (α) và mặt phẳng (Oyz).

Khi đó $\widehat{OMH} = 30°$.

Kẻ $OH \perp MK \Rightarrow OH \perp (MNP) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (\alpha)) = OH$.

Mà trong tam giác vuông OMH ta có $OH = OM \cdot \sin 30° = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 46.4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $AM = 4$. Tính $a + b + c$.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\dfrac{8}{3}$. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(A, (P)) = \dfrac{|2 + 4 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = 4 = AM \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

$\Rightarrow M \in (P)$ và $\overrightarrow{AM} = (a - 1; b + 2; c - 3)$ cùng phương với véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; -2; 1)$.

$\Rightarrow$ Tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2a - 2b + c + 3 = 0 \\ \dfrac{a - 1}{2} = \dfrac{b + 2}{-2} = \dfrac{c - 3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46.5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Mặt phẳng $(P)\colon x + Ay + Bz + C = 0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tổng $A + B + C$ bằng

(A) -3. (B) 3. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $\mathrm{d}(M, (P)) \le \mathrm{d}(M, Oz)$.

Suy ra $\mathrm{d}(M, (P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\mathrm{d}(M, Oz) = MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Dễ có $H(0; 0; 3)$. Vậy (P) đi qua $H(0; 0; 3)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH} = (-1; -2; 0)$.

$(P)\colon -x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow A = 2;\ B = C = 0 \Rightarrow A + B + C = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng

Ⓐ $\dfrac{32}{\sqrt{91}}$.　Ⓑ $\dfrac{18}{\sqrt{91}}$.　Ⓒ $\dfrac{16}{\sqrt{91}}$.　Ⓓ $\dfrac{24}{\sqrt{91}}$.

Lời giải.

Vì (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt ở A, B, C nên ta gọi tọa độ các điểm là $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, $c > 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì $M(2;3;5) \in (P) \Rightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{b} + \dfrac{5}{c} = 1$.

Vì độ dài các đoạn OA, OB, OC lập thành cấp số nhân với công bội bằng 3 $\Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b = 9a. \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{3}{3a} + \frac{5}{9a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{32}{9} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{32}{3} \\ c = 32. \end{cases}$$

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{\frac{32}{9}} + \dfrac{y}{\frac{32}{3}} + \dfrac{z}{32} = 1 \Leftrightarrow 9x + 3y + z - 32 = 0$.

Do đó $\mathrm{d}(O,(P)) = \dfrac{|-32|}{\sqrt{9^2+3^2+1^2}} = \dfrac{32}{\sqrt{91}}$.

Bình luận:

Bài này có thể dùng cách khác như sau:

Khoảng cách từ O đến (ABC): $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{(3a)^2} + \dfrac{1}{(9a)^2} \Rightarrow h = \dfrac{9a}{\sqrt{91}}$.

Mà $a = \dfrac{32}{9}$ (theo trên). Từ đó tìm được $h = \dfrac{32}{\sqrt{91}}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 46.7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho mặt phẳng (P): $2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(2;0;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với (P), cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\dfrac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

Ⓐ 8.　Ⓑ 16.　Ⓒ $\dfrac{8}{3}$.　Ⓓ $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Giả sử $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$, với b, $c > 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì $(\alpha) \perp (P)$ nên $\dfrac{2}{b} - \dfrac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = 2 \cdot \dfrac{1}{b}$.

Mặt khác $\mathrm{d}(O,(\alpha)) = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c}\right)^2}} = \dfrac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{b^2} = \frac{5}{16}$$
$$\Leftrightarrow b^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow c = 2.$$

Vậy $V_{OABC} = \dfrac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và có độ dài các cạnh $BC = 4$ và thể tích khối lăng trụ bằng 8. Biết phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon x + y - z - 2 = 0$. Hãy viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ biết nó cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A $x + y - z - 2 + 2\sqrt{3} = 0$.
B $2x + 2y - z - 4 - \sqrt{3} = 0$.
C $x + y - z - 2 - 2\sqrt{3} = 0$.
D $x + y - z - 4 + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $BC = 4 \Rightarrow AB = AC = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4$.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \mathrm{d}\left((ABC),(A'B'C')\right) \Rightarrow \mathrm{d}\left((ABC),(A'B'C')\right) = \dfrac{V_{ABC \cdot B'C}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Mặt phẳng $(A'B'C') \mathbin{/\!/} (ABC) \Rightarrow (A'B'C') : x + y - z + m = 0$ vì $(A'B'C') \mathbin{/\!/} (ABC)$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương nên ta có điều kiện $\begin{cases} m \neq -2 \\ m < 0. \end{cases}$

Lấy một điểm M bất kì nằm trên mặt phẳng đáy (ABC), suy ra $M(0; 0; -2)$.

Vậy $\mathrm{d}\left((ABC),(A'B'C')\right) = \mathrm{d}\left(M,(A'B'C')\right) = \dfrac{|2+m|}{\sqrt{1+1+1}} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 + 2\sqrt{3} \text{ (loại)} \\ m = -2 - 2\sqrt{3}. \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

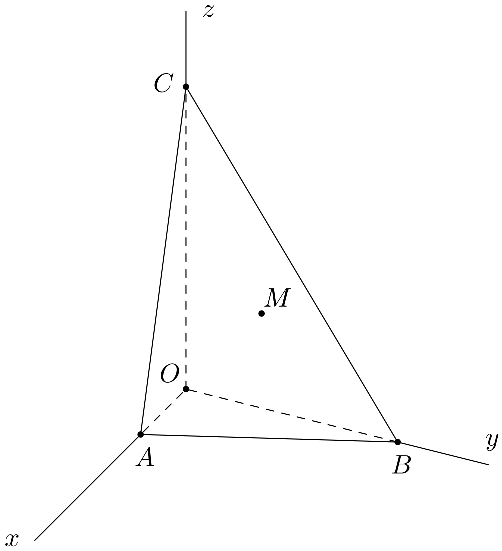
Vậy $(A'B'C') : x + y - z - 2 - 2\sqrt{3} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α).

A $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.
B $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.
C $9\sqrt{21}$.
D $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$.

Lời giải.



Đặt $OA = a$ $(a > 0)$. Khi đó $OB = 2a, OC = 4a$.

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (α) có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{4a} = 1.$$

Do $M(1;2;1) \in (\alpha)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{2a} + \frac{1}{4a} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{4a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn $a > 0$).

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là $4x + 2y + z - 9 = 0$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(\alpha)) = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 9|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46.10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 45$ và $M(1;4;5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng luôn đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C. Khoảng cách lớn nhất từ M đến mặt phẳng (ABC) là

A $\sqrt{5}$. B 4. C $\sqrt{6}$. D 3.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;6)$, bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Tứ diện $OABC$ vuông đỉnh O và nội tiếp mặt cầu (S) nên gọi O', A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O, A, B, C qua tâm I.

Suy ra $OBA'C.AC'O'B'$ là hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu (S) và đường chéo OO' của hình hộp cắt mặt chéo tam giác ABC tại trọng tâm H của tam giác ABC và $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OO'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow H(0;2;4)$.

Mặt phẳng (ABC) thay đổi, luôn đi qua $H(0;2;4)$ nên $\mathrm{d}(M,(ABC)) \leq MH = \sqrt{6}$.

$\mathrm{d}(M,(ABC)) = \sqrt{6}$ khi mặt phẳng (ABC) vuông góc với MH.

Chọn đáp án C □

Câu 46.11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC)

lớn nhất là

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 3. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do a, b, $c > 0$ nên phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do đó $\mathrm{d}(O,(ABC))=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Theo BĐT Côsi ta có $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\geq 9 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geq 9$.

Do đó $\mathrm{d}(O,(ABC))\leq \dfrac{1}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

***Chú ý:** Đề bài không cần a, b, c là các số thực dương mà có thể tùy ý thì Lời giải tương tự.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46.12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;2)$, trong đó a, b là các số hữu tỷ dương và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-2y+1=0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{33}}$. Giá trị $a\cdot b$ bằng

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Vì $A\in Ox$, $B\in Oy$, $C\in Oz$, $a>0$, $b>0$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{2}=1$.

$$\mathrm{d}(O,(ABC))=\frac{2}{\sqrt{33}}\Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{33}}\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=8.$$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (P) lần lượt là $\vec{n}_1=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{2}\right)$ và $\vec{n}_2=(2;-2;0)$.

Vì $(ABC)\perp(P)\Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow \dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{b}=0$. (2)

Từ (1), (2) và điều kiện $a>0, b>0 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Vậy $a\cdot b=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46.13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z+1=0$ và ba điểm $A(2;5;-3)$, $B(-2;1;1)$, $C(2;0;1)$. Tìm điểm $D(a;b;c)$, $(b>0)$ là điểm nằm trên (P) sao cho có vô số mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm C, D và thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (Q). Tính $T=abc$.

(A) -16. (B) 0. (C) 16. (D) 12.

Lời giải.

- Trường hợp 1: A, B cùng phía với (Q).
  Gọi $M(x; y; z)$ thỏa $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM}$.
  Suy ra $\begin{cases} x-2 = 3(x+2) \\ y-5 = 3(y-1) \\ z+3 = 3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-4; -1; 3)$.
  Đường thẳng MC qua $C(2; 0; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{MC} = (6; 1; -2)$.
  Phương trình MC: $\begin{cases} x = 2+6t \\ y = t \\ z = 1-2t. \end{cases}$
  Gọi $D(2+6t; t; 1-2t) \in MC$.
  $D \in (P) \Rightarrow 3(2+6t) + 4t + 5(1-2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow D(-4; -1; 3)$ (loại).

- Trường hợp 2: A, B khác phía với (Q).
  Gọi $M(x; y; z)$ thỏa $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{BM}$.
  Suy ra $\begin{cases} x-2 = -3(x+2) \\ y-5 = -3(y-1) \\ z+3 = -3(z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 2; 0)$.
  Đường thẳng MC qua $C(2; 0; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{MC} = (3; -2; 1)$.
  Phương trình MC: $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \\ z = 1+t. \end{cases}$
  Gọi $D(2+3t; -2t; 1+t) \in MC$.
  $D \in (P) \Rightarrow 3(2+3t) + 4(-2t) + 5(1+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow D(-4; 4; -1)$ (thỏa).

Suy ra $\begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow abc = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.14. Cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(4; 0; 0)$ và $N(0; 0; 3)$ sao cho mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 60°. Tính khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến mặt phẳng (α).

(A) 1. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (D) 2.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt Oy tại $P(0; b; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Mặt phẳng (Oyz) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 60° nên ta có

$$|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{9b^2 + 144 + 16b^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $11b^2 = 144 \Rightarrow b = \pm\dfrac{12}{\sqrt{11}}$.

Phương trình mặt phẳng (α)

$$3\sqrt{11}x + 11y + 4\sqrt{11}z - 12\sqrt{11} = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{11}x + 11y - 4\sqrt{11}z + 12\sqrt{11} = 0.$$

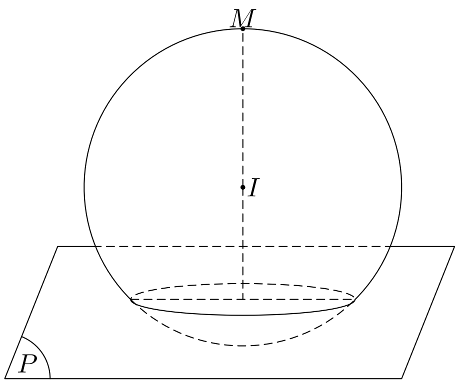
Khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến mặt phẳng (α) là d $= \dfrac{12\sqrt{11}}{\sqrt{99 + 121 + 176}} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.15. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó

A $a + b + c = 7$. **B** $a + b + c = 5$. **C** $a + b + c = 6$. **D** $a + b + c = 8$.

Lời giải.



Mặt (S) cầu có tâm $I(1; 2; 3)$, $R = 3$.

$\mathrm{d}(I, (P)) = \dfrac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{3} < R$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn.

Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

Khi đó M thuộc đường thẳng Δ vuông đi qua M và vuông góc với $(P) \Rightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Thay vào mặt cầu (S) ta được $(2t)^2 + (-2t)^2 + (t)^2 = 9 \Rightarrow 9t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$.

Với $t = 1 \Rightarrow M(3; 0; 4) \Rightarrow \mathrm{d}(M, (P)) = \dfrac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{3}$.

Với $t=-1 \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow \mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|2\cdot(-1)-2\cdot 4+2+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$.

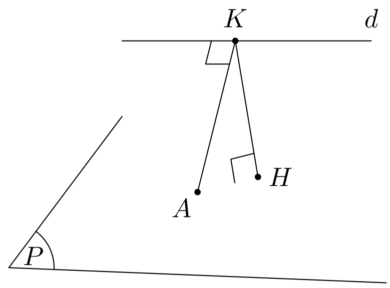
Vậy $M(3;0;4) \Rightarrow a+b+c=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 46.16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. B. $\dfrac{76\sqrt{790}}{790}$. C. $\dfrac{533}{\sqrt{2765}}$. D. $\dfrac{97\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d và H là hình chiếu vuông góc của K lên mặt phẳng (P).

Vì $K\in d$ nên ta đặt $K(1+2t;t;1+3t) \Rightarrow \overrightarrow{AK}=(2t-9;t-2;3t)$.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

Vì $AK\perp d \Rightarrow \overrightarrow{AK}\cdot\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2\cdot(2t-9)+1\cdot(t-2)+3\cdot 3t=0 \Leftrightarrow 14t-20=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{10}{7}$.

Vậy $\overrightarrow{AK}=\left(-\dfrac{43}{7};-\dfrac{4}{7};\dfrac{30}{7}\right)$.

Khoảng cách giữa d và (P) là độ dài đoạn thẳng HK mà $HK\le AK$ nên khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất bằng AK khi H trùng A.

Khi đó $AK\perp(P)$ nên (P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AK}=\left(-\dfrac{43}{7};-\dfrac{4}{7};\dfrac{30}{7}\right)$, ta chọn véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(43;4;-30)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $43(x-10)+4(y-2)-30(z-1)=0 \Leftrightarrow 43x+4y-30z-408=0$.

Vậy ta có $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{533}{\sqrt{2765}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.17. Tìm m để khoảng cách từ điểm $A\left(\dfrac{1}{2};1;4\right)$ đến đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=1-2m+mt\\ y=-2+2m+(1-m)t\\ z=1+t\end{cases}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{1}{3}$. B. $m=16$. C. $m=\dfrac{2}{3}$. D. $m=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Với $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0; 3)$ là điểm cố định mà đường thẳng d luôn đi qua.

Gọi H là hình chiếu của A trên d.

Ta có $\mathrm{d}(A, d) = AH \leq AB \Rightarrow \mathrm{d}(A, d)$ đạt GTLN bằng AB khi $AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$. (1)

Trong đó $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{1}{2}; -1; -1\right)$, $\vec{u}_d = (m; 1 - m; 1)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d,

Do đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot m - 1 \cdot (1 - m) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 5$. D. $P = 4$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là $(\alpha)\colon 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 3) \cdot (2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α), suy ra A, C nằm về hai phía so với (α).

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$. Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AC\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Do đó $M(1; 1; 3)$, $a + b + c = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 3x + 4y - 4z + 5 = 0$, cắt mặt phẳng (P) tại B. Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB.

A. $MB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. B. $MB = \sqrt{5}$. C. $MB = \sqrt{41}$. D. $MB = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t. \end{cases}$

Điểm B là giao của đường thẳng đó và (P) nên $B(1+3t; 2+4t; -3-4t)$ thỏa

$$2(1+3t) + 2(2+4t) + 3 + 4t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{41}.$$

Tam giác ABM vuông tại M nên $BM^2 = AB^2 - AM^2$ và AB cố định nên BM lớn nhất khi AM bé nhất, suy ra M là hình chiếu vuông của A lên (P).

$\Rightarrow \min AM = \mathrm{d}(A, (P)) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6.$

Lúc đó $\max BM = \sqrt{AB^2 - d^2(A, (P))} = \sqrt{41 - 36} = \sqrt{5}.$

Chọn đáp án B □

Câu 46.20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Xét đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases}$ với m là tham số thực. Giả sử (P) và (P') là hai mặt phẳng chứa d, tiếp xúc với (S) lần lượt tại T và T'. Khi m thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng TT'

A $\dfrac{4\sqrt{13}}{5}$.
B $2\sqrt{2}$.
C 2.
D $\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 2$. Mặt phẳng (ITT') cắt d tại điểm M. Gọi H là giao điểm của TT' và MI.

Vì $\triangle TIH \backsim \triangle MTT$ nên ta có

$$\frac{TH}{TM} = \frac{TI}{MI} \Rightarrow TH = \frac{TM \cdot TI}{MI} = \frac{R\sqrt{MI^2 - R^2}}{MI} = R\sqrt{1 - \frac{R^2}{M^2}}.$$

Do $TT' = 2TH$ nên $TT'_{\min} \Leftrightarrow TH_{\min} \Leftrightarrow MM_{\min}$.

Nhận xét rằng với $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases}$ ta có $x + y + z = 1 + t - mt + (m-1)t = 1$ nên khi m thay đổi ta luôn có $(d) \subset (P)\colon x + y + z - 1 = 0$ cố định. Vì thế

$$MI_{\min} = \mathrm{d}(I, (P)) = \frac{|1 + 2 + 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta có $TT'_{\min} = 2TH_{\min} = 2R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{MI^2_{\min}}} = 2.2\sqrt{1 - \dfrac{2^2}{\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \dfrac{4\sqrt{13}}{5}.$

Ta kiểm tra điều kiện đủ của bài toán, tức là chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của I lên

(P) thuộc vào đường thẳng d.

Gọi d' là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) ta có $d': \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t. \end{cases}$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) ta có $M = d' \cap (P)$ suy ra

$$(1+t)+(2+t)+(3+t)-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{3} \Rightarrow M\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{-2}{3} = 1+t \\ \dfrac{1}{3} = -mt \\ \dfrac{4}{3} = (m-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-5}{3} \\ m = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Vậy với $m = \dfrac{1}{5}$ thì độ dài của TT' nhỏ nhất.

Chọn đáp án B □

D BẢNG ĐÁP ÁN

46.1. D	46.2. D	46.3. B	46.4. A	46.5. C	46.6. A	46.7. C	46.8. C
46.9. B	46.10. C	46.11. B	46.12. A	46.13. C	46.14. D	46.15. A	46.16. C
46.17. D	46.18. C	46.19. B	46.20. B				

DẠNG 47. PHÉP ĐẾM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

CÂU 47 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

Lời giải.

Điều kiện $x>0$

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\log_3\left(\frac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\frac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(1+\frac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x},(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0\quad(1).$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{(t^2+24t)\ln 2}>0,\forall t>0.$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0.$

Từ đó suy ra: $(1)\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2\le 16.$

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$.

Ta có: $(x-4)^2\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 8$, mà $x>0$ nên $0<x\le 8$.

Với $x=1,x=7\Rightarrow y=\{\pm2;\pm1;0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x=2,x=6\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=3,x=5\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=4,x=6\Rightarrow y=\{\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. □

B BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 47.1. Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $f\left(2^{a^2-ab+b}-\dfrac{1}{4}\right)+f\left(\left(a^2-ab+b+2\right)2^{b-2-ab}\right)=0$.

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Lời giải.

Ta có hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 2\cdot\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(-x)=\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=-\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$;

suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& f\left(2^{a^2-ab+b}-\frac{1}{4}\right)+f\left(\left(a^2-ab+b+2\right)2^{b-2-ab}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & f\left(2^{a^2-ab+b}-\frac{1}{4}\right)=-f\left(\left(a^2-ab+b+2\right)2^{b-2-ab}\right)\\
\Leftrightarrow\ & f\left(2^{a^2-ab+b}-\frac{1}{4}\right)=f\left(\left(-a^2+ab-b-2\right)2^{b-2-ab}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 2^{a^2-ab+b}-\frac{1}{4}=\left(-a^2+ab-b-2\right)2^{b-2-ab}\\
\Leftrightarrow\ & 2^{a^2+2}+a^2+2=2^{ab-b}+ab-b. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t)=2^t+t,t\in\mathbb{R}$; có $g'(t)=2^t\cdot\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow g\left(a^2+2\right)=g(ab-b)\Leftrightarrow a^2+2=ab-b\Leftrightarrow b(a-1)=a^2+2(2)$.

Nhận xét $a=1$ không thỏa (2). Với $a\neq 1$ ta có $b=\dfrac{a^2+2}{a-1}=a+1+\dfrac{3}{a-1}$.

Vì a,b nguyên nên $\left[\begin{array}{l}a-1=-3\\a-1=-1\\a-1=1\\a-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2\Rightarrow b=-2\\a=0\Rightarrow b=-2\\a=2\Rightarrow b=6\\a=4\Rightarrow b=6.\end{array}\right.$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(a;b)$ là $(-2;-2);(0;-2);(2;6);(4;6)$.

Chọn đáp án A □

Câu 47.2. Có bao nhiêu bộ hai số nguyên $(x;y)$ thỏa $1\leq x^2+x\leq 2020$ và

$$\log x+\log(x+1)+x^2+x=y+10^y$$

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\log x + \log(x+1) + x^2 + x = y + 10^y\\&\Leftrightarrow \log[x(x+1)] + x^2 + x = y + 10^y \Leftrightarrow \log(x^2+x) + x^2 + x = \log(10^y) + 10^y\end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = \log t + t$ với $t > 0$.

$f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 10} + 1 > 0$, $\forall t > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow x^2 + x = 10^y$.

Vì $1 \leq x^2 + x \leq 2020$ nên $1 \leq 10^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log 2020 \approx 3,305$.

Mà y chỉ nhận giá trị nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$\begin{aligned}&+) y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (\text{loại}).\\&+) y = 1 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} (\text{loại}).\\&+) y = 2 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{401}}{2} (\text{loại}).\\&+) y = 3 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{4001}}{2} (\text{loại}).\end{aligned}$$

Vậy không có bộ hai số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 47.3. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị biểu thức $a + 2b$ bằng

A 22. B 6. C $\dfrac{11}{2}$. D $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Với $a > 0, b > 0$ ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 10ab + 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Suy ra $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{10a+3b+1}(10ab + 1)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Mặt khác, ta lại có với $a > 0, b > 0$ thì $\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) > 0, \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) > 0$.

Do đó:

$$\begin{aligned}\log_{10a+3b+1}\left(25a^2 + b^2 + 1\right) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) &\geq \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)\\&\geq 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) \cdot \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)} =\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = 5a \\ \log_{10a+3b+1}(10ab+1) = \log_{10ab+1}(10a+3b+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 10a + 3b + 1 = 10ab + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{11}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47.4. Hỏi có bao nhiêu số nguyên y sao cho mỗi giá trị của y có không quá 2021 số nguyên x thỏa mãn $\log_2(x + y^2 + 1) - 3^{y^2+y-3x} < 0$?

A 109. B 108. C 110. D 111.

Lời giải.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - 3^{-3t+2y^2+y+3}$ trên $(0; +\infty)$.
$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 2} + 3 \cdot 3^{-3t+2y^2+y+3} \cdot \ln 3 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$
$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Do có không quá 2021 số nguyên x nên có không quá 2021 số nguyên của t
$\Rightarrow t$ nguyên thuộc $[1; 2021]$ thì $f(t) < 0$ và $f(2022) > 0$
$\Leftrightarrow \log_2 2022 - 3^{2y^2+y-6060} \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 6060 - \log_3(\log_2 2022) \leq 0$.
Do y nguyên nên $y \in \{-55; -54; \ldots; 54\}$.
Vậy có 110 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 47.5. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2x - y = \mathrm{e}^x(2 - \mathrm{e}^x) + \ln(2\mathrm{e}^x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 20y$.

A 0. B -21. C -100. D -19.

Lời giải.

Điều kiện $2\mathrm{e}^x + y > 0$ (*).
Ta có

$$\begin{aligned} & 2x - y = \mathrm{e}^x(2 - \mathrm{e}^x) + \ln(2\mathrm{e}^x + y) \\ & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} + 2x = \ln(2\mathrm{e}^x + y) + 2\mathrm{e}^x + y \end{aligned} \tag{1}$$

Đặt $\mathrm{e}^{2x} = u \Rightarrow 2x = \ln u$, phương trình (1) viết lại thành:

$$\ln u + u = \ln(2\mathrm{e}^x + y) + 2\mathrm{e}^x + y \tag{2}$$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t, t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0, \forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Do đó (2) $\Leftrightarrow u=2\mathrm{e}^x+y$, ta thu được phương trình:

$$\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^x+y \Leftrightarrow y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x \Rightarrow y+1=(\mathrm{e}^x-1)^2\geq 0 \Rightarrow y\geq -1$$

Khi đó $P=x^2+y^2+20y=x^2+(y+1)^2+18y-1\geq 0+0-18-1=-19$.
Đẳng thức xảy ra khi $x=0; y=-1$ thỏa điều kiện (*).
Chọn đáp án D □

Câu 47.6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$. Tập giá trị của biểu thức $P=x^3+y^3$ có chứa bao nhiêu giá trị nguyên?

A 9. B Vô số. C 4. D 5.

Lời giải.

+Điều kiện $x+y>0$; $x^2+y^2\neq 0$.
Ta đặt: $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)=t$.
Ta có $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases}$ (1).
Vì $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow (3^t)^2\leq 2\cdot 4^t \Rightarrow t\leq \log_{\frac{9}{4}}^{2}\approx 0,85$.
+ Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\Rightarrow xy=\dfrac{9^t-4^t}{2}$.
+ Khi đó, $P=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=27^t-3\cdot 3^t\cdot\dfrac{9^t-4^t}{2}=-\dfrac{1}{2}\cdot 27^t+\dfrac{3}{2}\cdot 12^t=f(t)$.
+ Xét $f(t)=-\dfrac{1}{2}\cdot 27^t+\dfrac{3}{2}\cdot 12^t$ với $t\leq\log_{\frac{9}{4}}^{2}$, có $f'(t)=-\dfrac{1}{2}\cdot 27^t\cdot\ln 27+\dfrac{3}{2}\cdot 12^t\cdot\ln 12$,
$f'(t)=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 27^t\cdot\ln 27=\dfrac{3}{2}\cdot 12^t\cdot\ln 12\Leftrightarrow \left(\dfrac{27}{12}\right)^t=3\cdot\dfrac{\ln 12}{\ln 27}\Leftrightarrow t=\log_{\frac{27}{12}}\left(3\cdot\dfrac{\ln 12}{\ln 27}\right)\approx 1,006(L)$.

t	$-\infty$		$\log_{\frac{9}{4}}2$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\log_{\frac{9}{4}}2\approx 4{,}18$

+ Gọi T là tập giá trị của P.
Từ BBT ta có $\begin{cases} T=(0;4] \\ P\in\mathbb{Z} \end{cases}\Rightarrow \{1;2;3;4\}\in T$ nên suy ra tập giá trị của P có chứa 4 giá trị nguyên.
Chọn đáp án C □

Câu 47.7. Có bao nhiêu số hữu tỉ a thuộc đoạn $[-1;1]$ sao cho tồn tại số thực b thỏa mãn

$$\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)=\frac{2^a}{4^a+1}+\frac{4^a}{2^a+1}+\frac{1}{2^a+4^a}-\frac{1}{2}.$$

(A) 3. (B) 1. (C) Vô số. (D) 0.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{8^x+1}{2^x\left(1+2^x\right)}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x-2^x+1}{2^x}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{2^x}-\frac{3}{2}=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{4\cdot 2^x}+\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{4\cdot 2^x}\geq 1$. (1)

Lại có

$$\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}-2\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt{2^x}-\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\geq 0 \qquad (2)$$

Từ $(1);(2)$ suy ra

$$\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x}{2^x+1}+\frac{1}{2^x+4^x}-\frac{1}{2}\geq 1$$
$$\Rightarrow \log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)\geq 1\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+2b\geq 2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+1\leq 0\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2\leq 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1. \end{cases}$. Suy ra $a=0\in[-1;1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47.8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $1<a<b<100$ để phương trình $a^{b^x}=b^{a^x}$ có nghiệm nhỏ hơn 1?

(A) 4750. (B) 4656. (C) 2. (D) 4751.

Lời giải.

Do $1<a<b$ ta có:

$$a^{b^x}=b^{a^x}\Leftrightarrow \ln(a^{b^x})=\ln(b^{a^x})$$
$$\Leftrightarrow b^x\cdot\ln a=a^x\cdot\ln b\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{\ln a}{\ln b}$$
$$\Leftrightarrow x=\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)$$

Ta có $a<b\Rightarrow \frac{a}{b}<1$.

Do $x<1\Rightarrow \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)<1\Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b}>\frac{a}{b}\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln t}{t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$. (Với $t>1$.).

$f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{1-\ln t}{t^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln t=0\Leftrightarrow t=e$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		e		4		100		$+\infty$
y'				$+$		$+$	0	$-$		$-$			
y			0	$\nearrow$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\searrow$	$\frac{\ln 100}{100}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Trường hợp 1:

$$1 < a < e \Leftrightarrow a = 2$$

khi đó

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow b > 4$$

Do $4 < b < 100$ nên ta có 95 cặp số dạng $(2; b)$ thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$a > e \text{ khi đó hàm số nghịch biến trên } (e; 100).$$

Suy ra $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$ với $\forall e < a < b < 100$.

Trên khoảng $(e; 100)$ có 97 số nguyên, do đó ta có $C_{97}^2 = 4656$ cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn.

Vậy, ta có $95 + 4656 = 4751$ cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 47.9. Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **B** $S = 2$. **C** $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **D** $S = -2$.

Lời giải.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0. \end{array}\right.$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2} \\ & \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 = \log_2\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$, $t > 0$.

Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 2(t-1) = \frac{2\ln 2\cdot t^2 - 2\ln 2\cdot t + 1}{t\cdot \ln 2}, t > 0$$

Vì $2\ln 2\cdot t^2 - 2\ln 2\cdot t + 1$ có $\begin{cases} a = 2\ln 2 > 0 \\ \Delta' = \ln^2 2 - 2\ln 2 < 0 \end{cases}$ suy ra $2\ln 2\cdot t^2 - 2\ln 2\cdot t + 1 > 0$.

Do đó $f'(t) > 0; \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$. Vậy $S = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47.10. Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A 1. B 4. C 2019. D 2018.

Lời giải.

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y} \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y} \end{aligned} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x + 1 = 2^{3y} \Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x + 1 \le 2021$ suy ra $0 \le \log_8(x+1) \le \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$..

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0)$, $(7; 1)$, $(63; 2)$, $(511; 3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 47.11. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

(A) 2. (B) $2017 \cdot 2020$. (C) 2017. (D) 4034.

Lời giải.

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1 \leq y \leq 2020; 4 \leq x \leq 2020; x, y \in \mathbb{Z}$.(1)

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(xy + 2x + 4y + 8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\\
&\Leftrightarrow (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right) + (x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) \leq 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Xét $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right) = \log_2\left(2 + \dfrac{7}{x-3}\right) > 0, \forall x \in [4; 2020]$ (2).

+ Với $y = 1$ thay vào (*) ta được:

$$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right) - (x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) \leq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x \in [4; 2020]$$

do (1) và (2)). Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $y = 2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4; 2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $3 \leq y \leq 2020 \Rightarrow y - 2 > 0$.

Xét $g(y) = \log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) = \log_3\left(\dfrac{y+y}{y+2}\right) > \log_3\left(\dfrac{y+2}{y+2}\right) = 0, \forall y \geq 3$ (3).

Suy ra (*) vô nghiệm (Do (2) và (3)).

Vậy có 4034 bộ $(x; y)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47.12. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log x + \log y$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x}$ là

(A) 6. (B) $\dfrac{32}{5}$. (C) $\dfrac{31}{5}$. (D) $\dfrac{29}{5}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\log(x + 2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow x + 2y = xy \Rightarrow xy \geq 2\sqrt{2xy}\\
&\Rightarrow (xy)^2 - 8xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq 8
\end{aligned}$$

Lại có:

$$P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x} \geq \frac{(x+2y)^2}{x+2y+2} = \frac{(xy)^2}{xy+2} = xy - 2 + \frac{4}{xy+2}$$

(Đặt $t = xy (t \geq 8)$).

$$= \frac{1}{25}(t+2) + \frac{4}{t+2} + \frac{24}{25}(t+2) - 4 \geq 2\sqrt{\frac{4}{25}} + \frac{24}{25}\cdot(8+2) - 4 = \frac{32}{5}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{32}{5}$, dấu bằng xảy ra khi: $x = 4; y = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 47.13. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $3 + \ln\left(\frac{x+y+1}{3xy}\right) = 9xy - 3x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = xy$.

A $m = \frac{1}{3}$. B $m = 1$. C $m = \frac{1}{2}$. D $m = 0$.

Lời giải.

Ta có

$3 + \ln\frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$

$\Leftrightarrow 3 + \ln(x+y+1) - \ln(3xy) = 9xy - 3x - 3y \Leftrightarrow \ln(x+y+1) + 3(x+y+1) = \ln(3xy) + 3\cdot(3xy)$

Xét hàm số: $f(t) = \ln t + 3t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 3 + \frac{1}{t} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}&\ln(x+y+1) + 3(x+y+1) = \ln(3xy) + 3\cdot(3xy) \Leftrightarrow f(x+y+1) = f(3xy)\\ &\Leftrightarrow x+y+1 = 3xy \Leftrightarrow 3xy - 1 = x+y\end{aligned}$$

Mà $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Nên

$$\begin{aligned}&3xy - 1 \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 3xy - 2\sqrt{xy} - 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{xy} - 1)\cdot(3\sqrt{xy} + 1) \geq 0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq 1 \Leftrightarrow xy \geq 1 \Leftrightarrow P \geq 1\end{aligned}$$

Suy ra $P_{\min} = 1$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (vì $x, y > 0$).

Chọn đáp án B □

Câu 47.14. Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. B $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C $S = 2$. D $S = -2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ \dfrac{2x+1}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ -2<x<-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Khi đó phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + \left(x+2-2\sqrt{x+2}+1\right) = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$, với $t\in(0;+\infty)$.

Có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-2=\dfrac{t^2\ln 4-t\ln 4+1}{t\ln 2}$.

Xét tam thức bậc hai $t^2\ln 4-t\ln 4+1$.

Ta có $\Delta=(\ln 4)^2-4\ln 4<0$ nên $t^2\ln 4-t\ln 4+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(t)>0, \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\frac{2x+1}{x}$$
$$\Leftrightarrow x+2=\frac{4x^2+4x+1}{x^2} \Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm là $S=-1+\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47.15. Cho phương trình $\log(x-3)+2x\sqrt{x-3}+6x-16=2\log(x-4)+2(x-3)^3$ có một nghiệm có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, trong đó a,b là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A 10. **B** 14. **C** 5. **D** 9.

Lời giải.

Điều kiện $x>4$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(x-3)+x\sqrt{x-3}+3x-8=\log(x-4)+(x-3)^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(x-3)+(x-3)\sqrt{x-3}+3\sqrt{x-3}+3(x-3)+1=\log(x-4)+(x-4+1)^3$$
$$\Leftrightarrow \log\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x-3}+1\right)^3=\log(x-4)+(x-4+1)^3 \Leftrightarrow f(\sqrt{x-3})=f(x-4) \qquad (*)$$

Với hàm số $f(t)=\log t+t^3; t>0$,có đạo hàm: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+3t^2; \forall t>0$.
Suy ra hàm số đơn điệu tăng. Từ (*) suy ra:

$$f(\sqrt{x-3})=f(x-4)\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=x-4\Leftrightarrow \begin{cases} x>4\\ x-3=(x-4)^2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>4\\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{5}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$ suy ra: $\begin{cases} a=9\\ b=5\end{cases}\Rightarrow (a+b)=14.$

Chọn đáp án B □

Câu 47.16. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x>0$.
Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$.

A 4.	B 3.	C 1.	D 2.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\geq 4$.
Lại có

$$14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$$

Đặt $t=\sqrt{y+1}\geq 0$. Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t+14$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=-3t^2+3$. Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow -3t^2+3=0\Leftrightarrow t=1$ vì $t\in(0;+\infty)$.
Từ đó ta có

$$\max_{(0;+\infty)} f(t)=f(1)=16$$

Vậy $14-(y-2)\sqrt{y+1}\leq 16\Rightarrow \log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\leq 4$. Khi đó

$$2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=0\cdot\end{cases}\Rightarrow P=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 47.17. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$?

A 2018 nghiệm.	B 1008 nghiệm.	C 2017 nghiệm.	D 1009 nghiệm.

Lời giải.

Đk: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & 2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x) \\ & \Leftrightarrow \log_3 cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x) \\ & \Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3\left(1 - \cos^2 x\right) = \log_2(\cos x) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$.

Phương trình trở thành

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2^{2t}}{1 - 2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t$$

hay $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$.

Hàm số $f(t) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(-1) = 1$ nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$.

$$\begin{aligned} & \log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ & x \in (0; 2018\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{6053}{6} \\ \dfrac{1}{6} < k < \dfrac{6055}{6} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy trong khoảng $(0; 2018\pi)$ có $1009 \cdot 2 = 2018$ nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 47.18. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{x+4y}{x+y}\right) = 2x - 4y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3}$.

(A) $\dfrac{16}{9}$. (B) $\dfrac{25}{9}$. (C) 4. (D) $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \log_2\left(\frac{x+4y}{x+y}\right) = 2x - 4y + 1 \\ & \Leftrightarrow \log_2(x+4y) - \log_2(2x+2y) = 2(x - 2y) \\ & \Leftrightarrow \log_2(x+4y) - \log_2(2x+2y) = -2(x+4y) + 2(2x+2y) \\ & \Leftrightarrow \log_2(x+4y) + 2(x+4y) = \log_2(2x+2y) + 2(2x+2y) \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = \log_2 t + 2t$ với $t > 0$.
Có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 2 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Do đó

$$(1) \Leftrightarrow x + 4y = 2x + 2y \Leftrightarrow x = 2y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

Khi đó ta có:

$$P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3} = \frac{16x^4 - 4x^4 + 48x^2}{27x^3}$$
$$= \frac{4x^2 + 16}{9x} = \frac{4}{9}x + \frac{16}{9x} \geq \frac{16}{9}$$

Theo bất đẳng thức Côsi dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{4}{9}x = \frac{16}{9x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, y = 1(\text{ do } x > 0).$$

□

Câu 47.19. Phương trình $\left(\dfrac{1}{2020}x + 9\right)\log_3\left((x^2+1)\left(\dfrac{1}{2020}x + 9\right)\right) = 9 - (x^2 - 1)\left(\dfrac{1}{2020}x + 9\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{2020}x + 9\right)\log_3\left((x^2+1)\left(\frac{1}{2020}x + 9\right)\right) = 9 - (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2020}x + 9\right) \quad (1)$$

.

ĐKXĐ:

$$\frac{1}{2020}x + 9 > 0 \Leftrightarrow x > -18180$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\dfrac{1}{2020}x + 9$ ta được.

$$\log_3\left((x^2+1)\left(\frac{1}{2020}x + 9\right)\right) = \frac{9}{\frac{1}{2020}x + 9} - (x^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1) + \log_3\left(\frac{1}{2020}x + 9\right) = \frac{9}{\frac{1}{2020}x + 9} - (x^2+1) + 2$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1) + \log_3\left(\frac{1}{2020}x + 9\right) = \frac{9}{\frac{1}{2020}x + 9} - (x^2+1) + \log_3 9$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1) + (x^2+1) = \log_3\left(\frac{9}{\frac{1}{2020}x + 9}\right) + \frac{9}{\frac{1}{2020}x + 9} \quad (2)$$

Đặt $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$,
$f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 3}+1>0,\forall t>0$.
Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó, (2)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)=f\left(\dfrac{9}{\dfrac{1}{2020}x+9}\right)\Leftrightarrow x^2+1=\dfrac{9}{\dfrac{1}{2020}x+9}\\&\Leftrightarrow \dfrac{1}{2020}x^3+9x^2+\dfrac{1}{2020}x=0\Leftrightarrow x^3+18180x^2+x=0\Leftrightarrow x\left(x^2+18180x+1\right)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0(TM)\\&x=-9090+\sqrt{9090^2-1}(TM)\\&x=-9090-\sqrt{9090^2-1}(TM).\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 47.20. Cho a là hằng số dương khác1thoả mãn $a^{2\cos 2x}\ge 4\cos^2 x-1;\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

A $(2;3)$. B $(0;2)$. C $(3;5)$. D $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=2\cos 2x$ thì điều kiện trở thành $a^t-t-1\ge 0;\forall t\in[-2;2]$.
Xét hàm số $f(t)=a^t-t-1$ trên $[-2;2]$, đây là hàm số liên tục, có đạo hàm trên $[-2;2]$. $\min_{[-2;2]} f=0=f(0)$ nên suy ra $f'(0)=0\Leftrightarrow a^0\cdot\ln a-1=0\Leftrightarrow a=\mathrm{e}$.
Thử lại với $a=\mathrm{e}$, thay vào điều kiện ta được $f(t)=\mathrm{e}^t-t-1\ge 0;\forall t\in[-2;2]$.

$$f'(t)=\mathrm{e}^t-1f'(t)=0\Leftrightarrow t=0.$$

Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\mathrm{e}^{-2}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^2-3

Vậy $a=\mathrm{e}$ thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

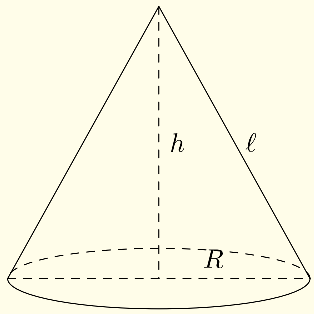
47.1. A	47.2. B	47.3. C	47.4. C	47.5. D	47.6. C	47.7. B	47.8. D
47.9. C	47.10. B	47.11. D	47.12. B	47.13. B	47.14. A	47.15. B	47.16. D
47.17. A	47.19. A	47.20. A					

DẠNG 48. HÌNH NÓN - HÌNH TRỤ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hình nón có đường cao h, bán kính đáy R và đường sinh ℓ.

- Mối liên hệ $\ell^2 = h^2 + R^2$.
- Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$.
- Diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.



B BÀI TẬP MẪU

CÂU 48 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\dfrac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

Ⓐ $8\sqrt{2}$.   Ⓑ $\dfrac{24}{5}$.   Ⓒ $4\sqrt{2}$.   Ⓓ $\dfrac{5}{24}$.

Lời giải.

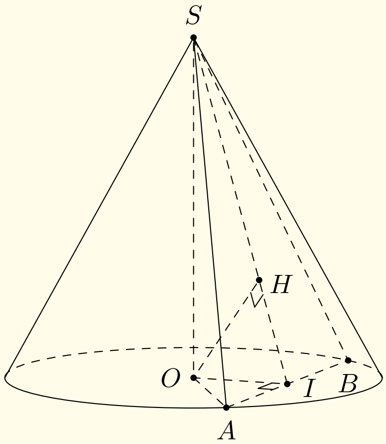
Gọi O là tâm của đường tròn đáy và R là bán kính của đường tròn đáy $(R > 0)$.

Thể tích khối nón bằng $\dfrac{800\pi}{3}$ nên

$$\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \pi R^2 = \frac{800\pi}{3} \Leftrightarrow R = 10.$$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I, suy ra I là trung điểm của AB và

$$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$



Kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI).$$

Từ đó suy ra $AB \perp OH$ (do $OH \subset (SOI)$). Ta lại có

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng OH.

Xét tam giác SOI vuông tại O và $SO = OI = 8$ nên tam giác SOI vuông cân tại O, suy ra

$$SI = 8\sqrt{2}; \quad OH = \frac{SI}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 48.1. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 6 và độ dài đường sinh $\ell = 2\sqrt{34}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{24}{5}$. C. $\frac{12}{25}$. D. $\frac{24}{25}$.

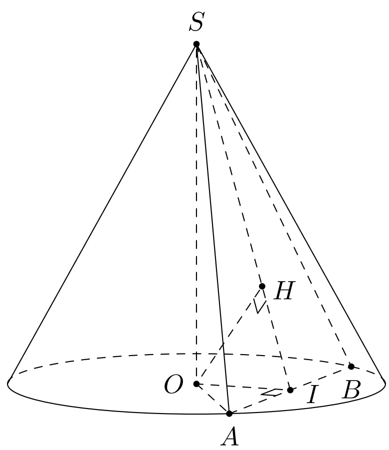
Lời giải.

Gọi O là tâm của đường tròn đáy và R là bán kính của đường tròn đáy $(R > 0)$.

Ta có $R = \sqrt{\ell^2 - h^2} = \sqrt{136 - 36} = 10$.

Kẻ $OI \perp AB$ tại I, suy ra I là trung điểm của AB và

$$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$



Kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI).$$

Từ đó suy ra $AB \perp OH$ (do $OH \subset (SOI)$). Ta lại có

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng OH.

Xét tam giác SOI vuông tại O, đường cao OH ta có

$$OH = \sqrt{\frac{OS^2 \cdot OI^2}{OS^2 + OI^2}} = \sqrt{\frac{6^2 \cdot 8^2}{6^2 + 8^2}} = \frac{24}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{24}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.2. Cho khối nón có đỉnh S, thiết diện qua trục của khối nón là tam giác đều cạnh 6. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$. B. $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$. C. $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. D. $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

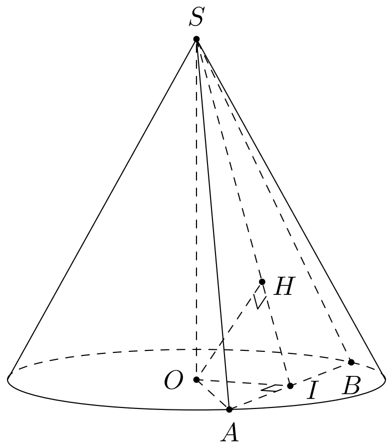
Gọi R là bán kính của đường tròn đáy $(R > 0)$.

Thiết diện qua trục của khối nón là tam giác đều cạnh 6 nên $R = 3$ và $SO = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Kẻ $OI \perp AB$ tại I, suy ra I là trung điểm của AB.

Kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI).$$



Từ đó suy ra $AB \perp OH$ (do $OH \subset (SOI)$). Ta lại có

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $OH = \sqrt{3}$.
Xét tam giác SOI vuông tại O, đường cao OH ta có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27} \Rightarrow OI^2 = \frac{27}{8}.$$

Trong tam giác OAI ta có $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{3^2 - \dfrac{27}{8}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

Vậy độ dài đoạn thẳng AB là $2 \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{4} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.3. Một hình nón có đỉnh S, bán kính đáy là $R = 2a\sqrt{3}$ và góc ở đỉnh $120°$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S, hợp với đáy góc $45°$ cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Diện tích tam giác SAB là

A. $2a^2$. B. $4a^2$. C. $6a^2$. D. $8a^2$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Suy ra, $OI \perp AB$. Khi đó, góc giữa (P) và mặt đáy của hình nón là $\widehat{SIO} = 45^\circ$. Do đó, $\triangle SIO$ vuông cân tại O.

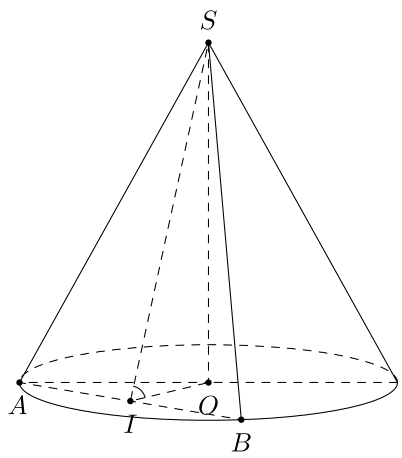
Trong $\triangle SOA$ ta có $SO = OA \cot 60^\circ = 2a$.

Trong $\triangle SOI$ ta có $OI = SO = 2a$ và $SI = 2a\sqrt{2}$.

Trong $\triangle OIA$ ta có $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}$.

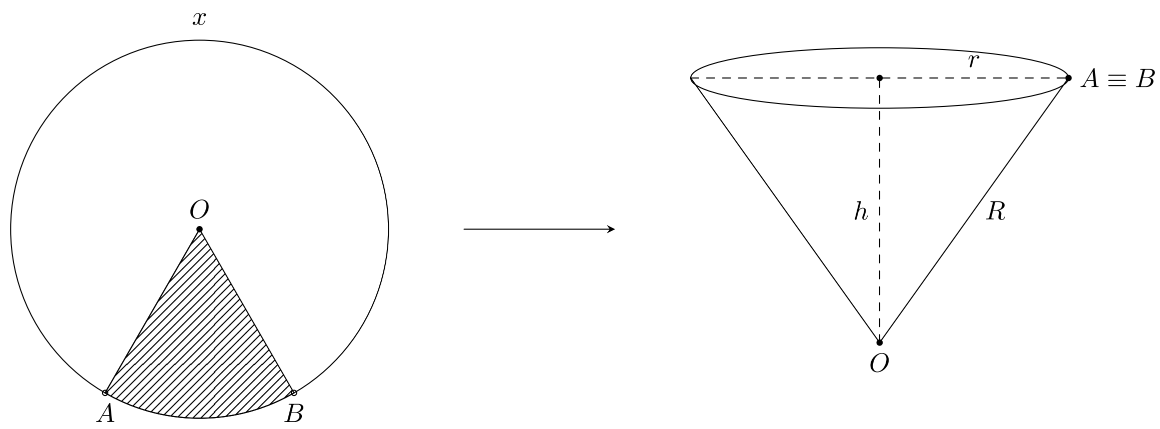
Diện tích tam giác SAB là

$$S = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot 4a\sqrt{2} = 8a^2.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 48.4. Từ một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R, người ta làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón.



Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x. Thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất khi

(A) $x = \dfrac{\pi R\sqrt{6}}{3}$. (B) $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. (C) $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$. (D) $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón và h là chiều cao của hình nón $(r,\, h > 0)$.

Ta có $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$. Do đó, $h = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích khối nón là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{2}{3}\pi \cdot \sqrt{\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^3 \text{ (Bất đẳng thức Cauchy).}$$

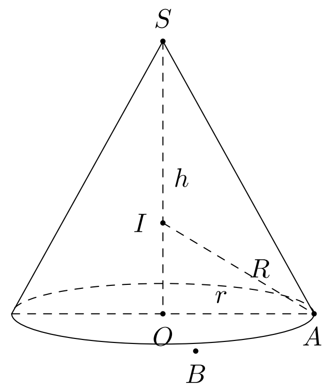
Vậy thể tích khối nón lớn nhất là $\dfrac{2}{9\sqrt{3}}\pi \cdot R^3$ khi $R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} = \dfrac{x^2}{8\pi^2} \Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{8\pi^2} = R^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48.5. Cho mặt cầu tâm I bán kính R. Mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón có đỉnh S nằm trên mặt cầu, đáy là đường tròn (C) và chiều cao h $(h > R)$. Thể tích khối nón có giá trị lớn nhất khi

A $h = \sqrt{2}R$. B $h = \sqrt{3}R$. C $h = \dfrac{4}{3}R$. D $h = \dfrac{3}{2}R$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đáy của hình nón $(r > 0)$.

Ta có $IO = h - R \Rightarrow r^2 = R^2 - IO^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot (2Rh - h^2) \cdot h \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot (2R - h) \cdot h^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (2R-h) \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \\ &\leq \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2R}{3}\right)^3 \text{ (Bất đẳng thức Cauchy).} \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối nón lớn nhất là $\dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $\dfrac{h}{2} = 2R - h \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}h = 2R \Leftrightarrow h = \dfrac{4}{3}R$.

Chọn đáp án C □

Câu 48.6. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27 cm^3, với chiều cao h và bán kính đáy r. Giá trị r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

A $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$. B $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$. C $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$. D $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$.

Lời giải.

Ta có thể tích cốc hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 27 \Rightarrow h = \dfrac{81}{\pi \cdot r^2}$, $r > 0$.

Khi đó $l = \sqrt{\left(\dfrac{81}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + r^2}$. Suy ra

$$S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\left(\frac{81}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + r^2} = \pi\sqrt{r^2\left(\frac{3^8}{\pi^2 \cdot r^4} + r^2\right)} = \pi\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4} = \pi\sqrt{f(r)}.$$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất $\Leftrightarrow$ diện tích xung quanh phải nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(r)$ nhỏ nhất.

Ta có: $f(r) = \dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4 = \dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} + \dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} + r^4 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{(3^8)^2}{4\pi^4}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3^8}{2\pi^2 \cdot r^2} = r^4 \Leftrightarrow r^6 = \dfrac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

Vậy để lượng giấy tiêu thụ ít nhất thì $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

Chú ý: Ta có thể khảo sát hàm $f(r) = \dfrac{3^8}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4, r > 0$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} = r_0$$

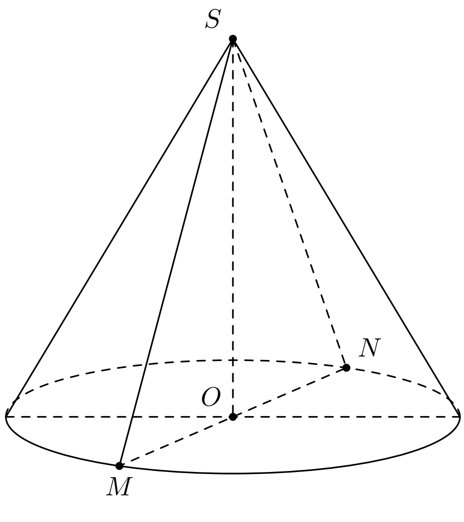
r	$-\infty$		r_0		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(r_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48.7. Cho hình nón đỉnh S có đường cao $h = a$, đường sinh $l = 2a$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh S và cắt đường tròn đáy tại hai điểm M, N. Diện tích tam giác SMN lớn nhất bằng

(A) $a^2\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a^2$. (D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm đáy của hình nón; I là trung điểm của MN. Ta có $SM = l = 2a$.

Khi đó $OI \perp MN \Rightarrow SI \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2} SI \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{SM^2 - \dfrac{MN^2}{4}} \cdot MN = \sqrt{\left(SM^2 - \dfrac{MN^2}{4}\right) \cdot \dfrac{MN^2}{4}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\left(SM^2 - \frac{MN^2}{4}\right) \cdot \frac{MN^2}{4}} \leq \frac{SM^2 - \frac{MN^2}{4} + \frac{MN^2}{4}}{2} = \frac{SM^2}{2} = 2a^2$$

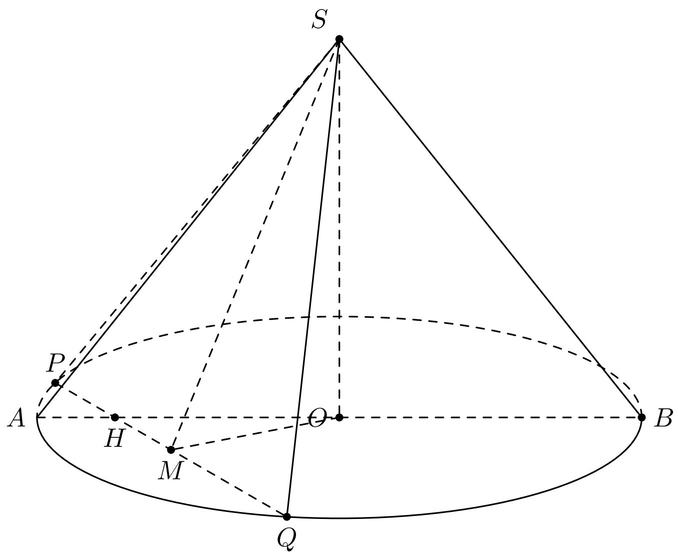
$S_{\triangle SMN}$ lớn nhất bằng $2a^2$ khi $MN = \sqrt{2}SM = 2\sqrt{2}a$.

Chọn đáp án C □

Câu 48.8. Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, tâm của đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. AB là một đường kính cố định của đáy, H là trung điểm của OA. Mặt phẳng luôn chứa SH cắt khối nón theo một thiết diện có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

A $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$. B $S_{\max} = 3\sqrt{7}a^2$. C $S_{\max} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}a^2$. D $S_{\max} = 8a^2$.

Lời giải.



Ta có: $SO = OA \cdot \cot 60° = 2a$ Giả sử mặt phẳng chứa SH cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SPQ và M là trung điểm của PQ.

Đặt $OM = x$, với $0 \leq x \leq OH = a\sqrt{3}$.

Ta có $S_{SPQ} = SM \cdot MP = \sqrt{SO^2 + OM^2} \cdot \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}\sqrt{12a^2 - x^2}$.

Xét $f(t) = (4 + t)(12 - t)$, $t \in [0; 3]$ (ta đặt $t = \left(\frac{x}{a}\right)^2$), ta được giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng $f(3) = 63$.

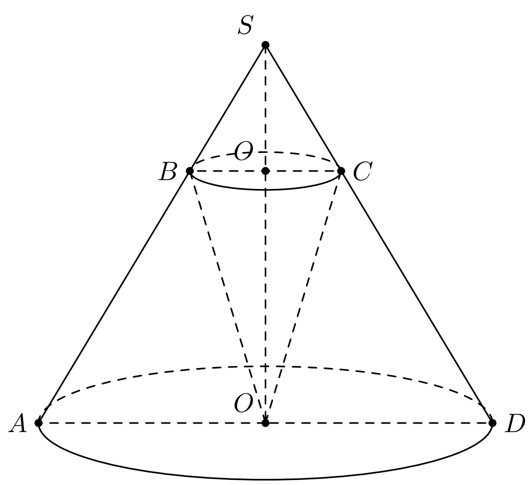
Vậy $\max S_{SPQ} = 3\sqrt{7}a^2$ khi $x = OH = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.9. Cho hình nón (N) có đường cao $SO = h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM = x$, $0 < x < h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A $\dfrac{h}{2}$. B $\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$. C $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$. D $\dfrac{h}{3}$.

Lời giải.



Lời giải.

Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\triangle SBM \sim \triangle SAO$ nên $\dfrac{BM}{AO} = \dfrac{SM}{SO} \Leftrightarrow BM = \dfrac{AO \cdot SM}{SO} = \dfrac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là

$$V = \frac{1}{3}\pi BM^2.OM = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R(h-x)}{h}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 \cdot x.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2 \cdot x$, $(0 < x < h)$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2}{h}$	$\searrow$	

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh đáy là lớn nhất khi $x = \dfrac{h}{3}$.

Chọn đáp án D □

□

Câu 48.10. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích bằng 27 cm^3. Tìm tỉ số $\dfrac{h}{r}$ của chiều cao h và bán kính đáy r của hình nón để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

A $\dfrac{h}{r} = 2$.

B $\dfrac{h}{r} = \dfrac{1}{2}$.

C $\dfrac{h}{r} = \sqrt{2}$.

D $\dfrac{h}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$.

Suy ra độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3V}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\dfrac{81}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi diện tích xung quanh của hình nón đạt giá trị nhỏ nhất.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi r\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2} = \pi\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4} = \pi\sqrt{\frac{3^8}{2\pi^2 r^2} + \frac{3^8}{2\pi^2 r^2} + r^4} \geq \pi\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}\cdot\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}\cdot r^4}}$$

suy ra $S_{xq} \geq \pi\sqrt[6]{\frac{3^{19}}{4\pi^4}}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của S_{xq} là $\pi\sqrt[6]{\dfrac{3^{19}}{4\pi^4}}$ khi $\dfrac{3^8}{2\pi^2 r^2} = r^4$ hay $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

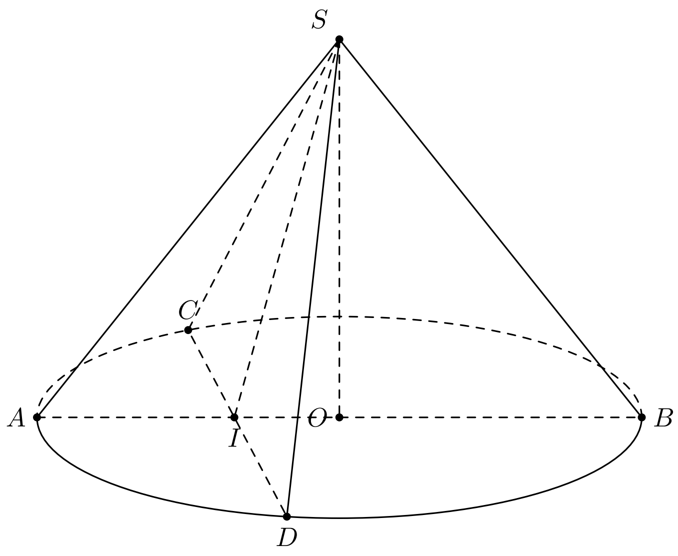
Vậy $\dfrac{h}{r} = \dfrac{3V}{\pi r^3} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48.11. Một hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác đó bằng bao nhiêu?

(A) $S_{\max} = 16a^2$. (B) $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$. (C) $S_{\max} = 4a^2$. (D) $S_{\max} = 8a^2$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi thiết diện của hình chóp là $\triangle SCD, I$ là trung điểm của CD.

Ta có $SO = \dfrac{OB}{\tan 60°} = 2a$.

Đặt $OI = x$ suy ra $IC = \sqrt{OC^2 - OI^2} = \sqrt{12a^2 - x^2}$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}$.

$S_{\triangle SCD} = \dfrac{1}{2}CD \cdot SI = SI \cdot IC = \sqrt{(4a^2 + x^2)(12a^2 - x^2)} \Rightarrow (S_{\triangle SCD})^2 = -x^4 + 8a^2x^2 + 48a^4$.

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 8a^2x^2 + 48a^4$ với $0 < x < 2\sqrt{3}a$.

$f'(x) = -4x^3 + 16a^2x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2a. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-2a$		0		$2a$		$2\sqrt{3}a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$64a^4$	$\searrow$	$48a^4$	$\nearrow$	$64a^4$	$\searrow$	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $(S_{\max})^2 = 64a^4 \Rightarrow S_{\max} = 8a^2$.

Cách 2: Gọi thiết diện của hình chóp là $\triangle SCD$.

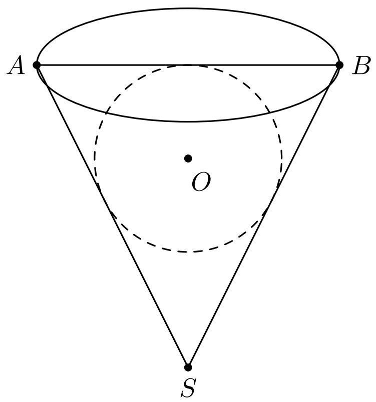
Vì $\triangle SOB$ vuông tại O, có $OB = r = 2a\sqrt{3}, \widehat{OSB} = 60^\circ$ nên $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60^\circ} = 4a$.

Khi đó, $S_{\triangle SCD} = \dfrac{1}{2}SC \cdot SD \cdot \sin\widehat{CSD} \leq \dfrac{1}{2}SC \cdot SD = 8a^2$(vì $\sin\widehat{CSD} \leq 1$).

Vậy diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là $8a^2$ khi $\widehat{CSD} = 90^\circ$.

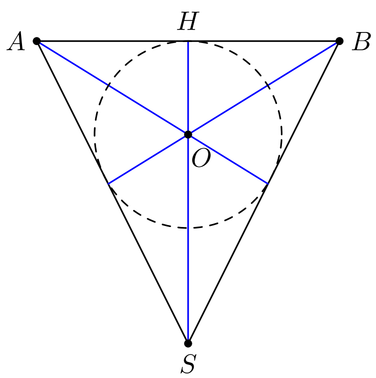
Chọn đáp án D □

Câu 48.12. Bạn An có một cốc giấy hình nón với đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?



(A) $\dfrac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. (B) $\dfrac{64}{\sqrt{39}}$ cm. (C) $\dfrac{10\sqrt{39}}{13}$ cm. (D) $\dfrac{32}{\sqrt{39}}$ cm.

Lời giải.



Để đường kính viên kẹo là lớn nhất thì viên kẹo phải tiếp xúc với mặt phẳng miệng cốc và mặt bên của cốc. Khi đó mặt phẳng đi qua đường cao của cốc sẽ cắt cốc và viên kẹo theo một hình như hình vẽ.

Bán kính mặt cầu bằng bán kính đường tròn tâm O nội tiếp $\triangle SAB$ với $SA = SB = 8$, $AB = 10$.

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{39}$.

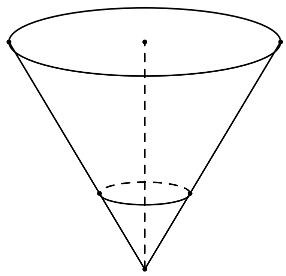
$\Rightarrow r = OH = \dfrac{S_{SAB}}{p} = \dfrac{SH \cdot AB}{SA + SB + AB} = \dfrac{5\sqrt{39}}{13}$ (p là nửa chu vi tam giác SAB).

Vậy đường kính mặt cầu là $d = 2r = \dfrac{10\sqrt{39}}{13}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48.13.

Một chiếc ly hình nón chứa đầy rượu có chiều cao 9 cm. Người ta uống đi một phần rượu sao cho chiều cao phần rượu còn lại bằng một phần ba chiều cao ban đầu. Số phần rượu đã được uống là



(A) $\dfrac{8}{9}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{26}{27}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi $h = 9$ cm là chiều cao của ly, R là bán kính miệng ly.

Thể tích ly hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot 9 = 3\pi R^2$.

Ký hiệu $h_1 = \dfrac{1}{3}h = 3$ cm là chiều cao và r là bán kính đường tròn tạo bởi mép rượu còn lại trong ly.

Thể tích phần rượu còn lại: $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 3 = \pi r^2$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\pi r^2}{3\pi R^2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$.

Mặt khác $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h_1}{h} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow V_1 = \dfrac{V}{27}$.

Thể tích phần rượu đã uống: $V_2 = V - V_1 = \dfrac{26}{27}V$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48.14. Cho hình nón (N) có đường cao $h = a\sqrt{3}$, bán kính đáy $r = 2a$. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng (P) qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 45°. Diện tích thiết diện tạo thành là

(A) $S = a^2\sqrt{3}$. (B) $S = a^2\sqrt{6}$. (C) $S = 2a^2$. (D) $S = 2a^2\sqrt{6}$.

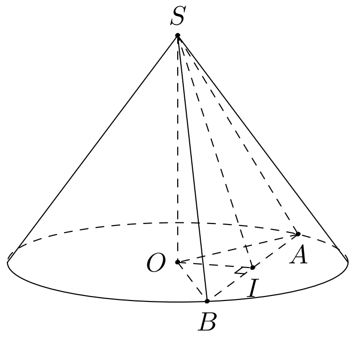
Lời giải.

Gọi hình nón (N) có đỉnh là S và đáy là đường tròn tâm O.

Khi đó $SO = h = a\sqrt{3}$ và $OA = r = 2a$.

Giả sử mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S và cắt đường tròn đáy theo dây cung AB, khi đó thiết diện tạo thành là $\triangle SAB$ cân tại S.

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $OI \perp AB$ mà $SO \perp AB$ $\Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp SI$.



Do đó góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIO} = 45°$.

Ta có $OI = SO = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = a\sqrt{6}$.

Lại có $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = a \Rightarrow AB = 2AI = 2a$.

Vậy diện tích thiết diện tạo thành là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}SI \cdot AB = \dfrac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot 2a = a^2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.15. Cho khối nón đỉnh S có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{a}{2}$. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn đi qua S và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Giá trị lớn nhất của tam giác SAB là

(A) $\dfrac{5a^2}{8}$. (B) $\dfrac{a^2}{2}$. (C) $\dfrac{3a^2}{8}$. (D) $\dfrac{2a^2}{3}$.

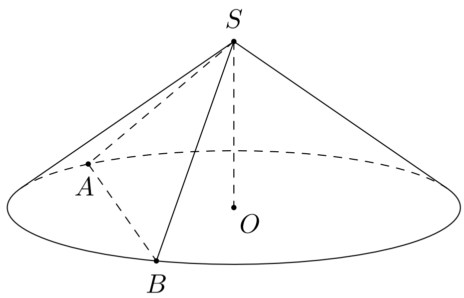
Lời giải.

Do bán kính r lớn hơn chiều cao h của hình nón nên góc ở đỉnh của hình nón lớn hơn $90°$.

Gọi O là tâm của đường tròn đáy, ta có $SO = h = \dfrac{a}{2}$.

Bán kính đáy $r = a$ nên đường sinh

$$\ell = SA = SB = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Diện tích $\triangle SAB$ là $S = \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin\widehat{ASB}$.

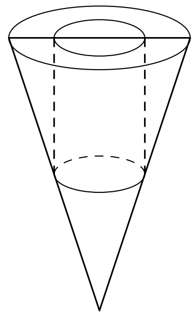
Diện tích S lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{ASB}$ lớn nhất, hay $\widehat{ASB} = 90°$.

Khi đó $S = \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot SB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5a^2}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48.16.

Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}$ (dm^2). Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của nón (như hình bên) đồng thời khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước (giả sử khối trụ thả vào đặc và chìm hết trong nước).



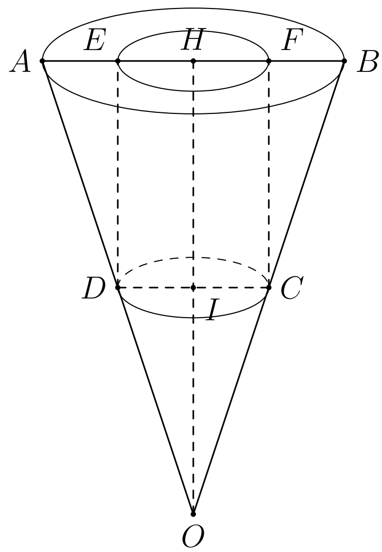
A. $S_{xq} = 4\pi\ \text{dm}^2$.
B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}\ \text{dm}^2$.
C. $S_{xq} = \dfrac{4\pi}{2}\ \text{dm}^2$.
D. $S_{xq} = \dfrac{9\pi\sqrt{10}}{2}\ \text{dm}^2$.

Lời giải.

Theo đề ta có $AH = R$, $OH = 3R$, $HI = 2R$.

Theo định lý Ta-let, ta có

$$\frac{ID}{AH} = \frac{OI}{OH} = \frac{OH - IH}{OH} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$$



Do đó khối trụ có bán kính đáy là $ID = \dfrac{R}{3}$. Thể tích khối trụ là

$$V = \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot 2R = \frac{16\pi}{9} \Leftrightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2.$$

Suy ra $OH = 6$, $OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = 2\sqrt{10}$ và diện tích xung quanh bình nước là $S_{xq} = \pi R l = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\pi\sqrt{10}\ \text{dm}^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.17. Cho khối nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB sao cho tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$, góc tạo bởi trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30°. Thể tích của khối nón đã cho bằng

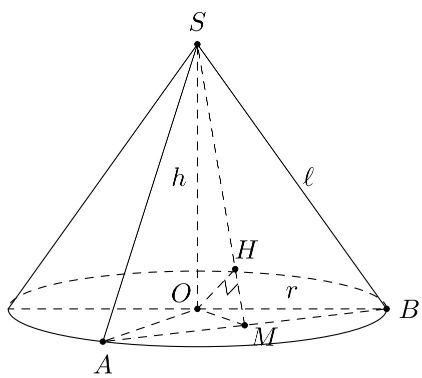
A. $\dfrac{5a^3\sqrt{2}\pi}{3}$.
B. $\dfrac{a^3\sqrt{15}\pi}{6}$.
C. $\dfrac{a^3\sqrt{15}\pi}{3}$.
D. $\dfrac{5a^3\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm AB thì $AB \perp OM$ và $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOM)$.

Kẻ $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAB)$ nên SM là hình chiếu của SO trên (SAB). Do đó góc giữa đường thẳng SO và (SAB) là góc giữa hai đường thẳng SO và SM bằng góc $\widehat{OSM} = 30^\circ$.



Ta có $SM = \dfrac{1}{2}AB = 2a$. Xét tam giác SOM vuông tại O có

$$SO = SM \cdot \cos 30^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SOB có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = a\sqrt{5}$.

Thể tích khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}\pi}{3}$.

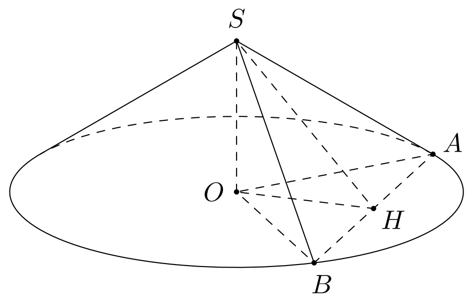
Chọn đáp án D □

Câu 48.18. Cắt hình nón $(\aleph)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30°, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $(\aleph)$ bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$.   B. $8\sqrt{7}\pi a^2$.   C. $8\sqrt{13}\pi a^2$.   D. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.

Giả sử hình nón $(\aleph)$ có đỉnh S, đường tròn đáy có tâm O, thiết diện nói trên là tam giác đều SAB. Gọi H là trung điểm đoạn AB. Khi đó $AB \perp (SHO)$ nên



$$\widehat{SHO} = ((SAB), (OAB)) = 30^\circ.$$

Do đó

$$SO = SH \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}SA}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}a,$$
$$OH = SH \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}SA}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a,$$
$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{OH^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{13}a.$$

Vậy diện tích xung quay của hình nón $(\aleph)$ là

$$S_{\text{xq}} = \pi OA \cdot SA = 4\sqrt{13}\pi a^2.$$

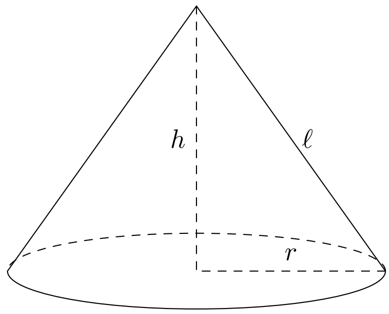
Chọn đáp án D □

Câu 48.19. Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ quấn và hàn ba miếng tôn để được ba cái phễu. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó là bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.   B. $V = \dfrac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

C. $V = \dfrac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít .   D. $V = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ lít.

Lời giải.



Đổi 60 cm $= 6$ dm. Đường sinh của hình nón tạo thành là $l = 6$ dm.
Chu vi đường tròn ban đầu là $C = 2\pi R = 16\pi$.
Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.
Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là

$$2\pi \cdot r = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi\text{dm} \Rightarrow r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\text{dm}.$$

Đường cao của khối nón tạo thành là

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}.$$

Thể tích của mỗi cái phễu là

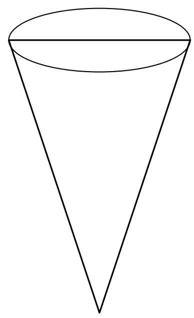
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\text{dm}^3 = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\ (\text{lít}).$$

Chọn đáp án A □

Câu 48.20. Bạn Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ. Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.

A $\frac{\pi}{4}$.   B $\frac{\pi}{3}$.   C $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.   D $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ, độ dài cung AB lớn bằng Rx, bán kính hình nón $r = \frac{Rx}{2\pi}$.
Đường cao của hình nón $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.
Thể tích khối nón (phễu) là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2x^2}{4\pi^2} \cdot \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{x^4\left(4\pi^2 - x^2\right)}.$$

Theo Cauchy ta có $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (4\pi^2 - x^2) \leq \frac{\left(4\pi^2\right)^3}{27} \Rightarrow V \leq \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.
Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x^2}{2} = 4\pi^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.
Vậy thể tích phễu lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.
Chọn đáp án C □

D BẢNG ĐÁP ÁN

48.1. B	48.2. B	48.3. D	48.4. D	48.5. C	48.6. A	48.7. C	48.8. B
48.9. D	48.10. C	48.11. D	48.12. C	48.13. C	48.14. B	48.15. A	48.16. B
48.17. D	48.18. D	48.19. A	48.20. C				

DẠNG 49. TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG, MẶT CẦU, CỰC TRỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q)\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

- (P) cắt $(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\equiv(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\parallel(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d=IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó :

Nếu $d>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Nếu $d=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) và H là tiếp điểm.	Nếu $d<R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính là $r'=\sqrt{R^2-IH^2}$.

3. Vị trí tương đối

a. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x_0+a_1t=0\\ y_0+a_2t=0\\ z_0+a_3t=0\end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x'_0+a'_1t'=0\\ y'_0+a'_2t'=0\\ z'_0+a'_3t'=0.\end{cases}$

PP 1 : Xét hệ phương trình với hai ẩn là t và t' tức xét $\begin{cases} x_0+a_1t=x'_0+a'_1t'\\ y_0+a_2t=y'_0+a'_2t'\\ z_0+a_3t=z'_0+a'_3t'.\end{cases}$

* Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì d và d' cắt nhau.
* Nếu hệ có vô số nghiệm thì $d\equiv d'$.
* Nếu hệ vô nghiệm thì $d\parallel d'$ hoặc d, d' chéo nhau.
  - $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$ cùng phương thì $d\parallel d'$.
  - $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$ không cùng phương thì d, d' chéo nhau.

PP 2 : Xét điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d$, $M'(x'_0;y'_0;z'_0)\in d'$ và $\vec{u}_d$, $\vec{u}_{d'}$.

* $d\parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}_d=\mathrm{k}\vec{u}_{d'}\\ M\notin d'.\end{cases}$

$*\ d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d = \mathrm{k}\vec{u}_{d'} \\ M \in d'. \end{cases}$

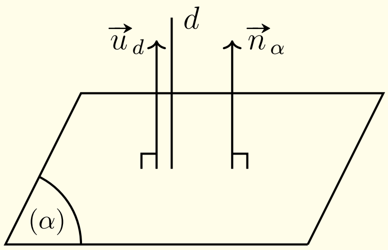
$*\ d$ cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \text{ không cùng phương với } \vec{u}_{d'} \\ [\vec{u}_d,\ \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}.$

$*\ d$ chéo $d' \Leftrightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0.$

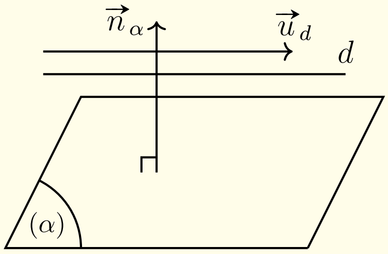
b. **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$ $(*)$



Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

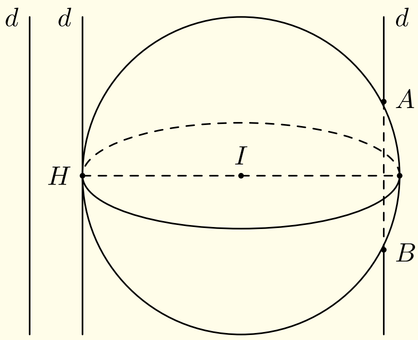


- Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α).
- Nếu $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Nếu $(*)$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$.

c. **Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)**

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $\mathrm{d}(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R.

- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) > R$ thì Δ không cắt (S).
- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) tại điểm H.
- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm A, B.

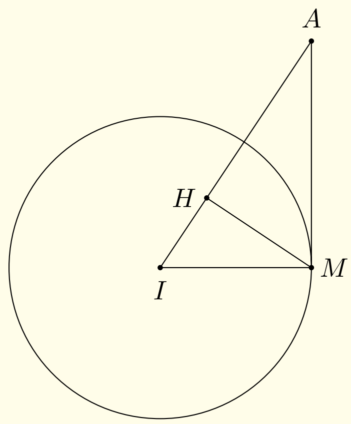


B BÀI TẬP MẪU

CÂU 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z-4)^2=9$. Từ điểm $A(4;0;1)$ nằm ngoài mặt cầu, kẻ một tiếp tuyến bất kỳ đến (S) với tiếp điểm M. Tập hợp M là đường tròn có bán kính bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;4)$ và $R=3$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AI.

Khi đó tập hợp M là đường tròn có bán kính bằng độ dài đoạn HM.

Ta có

$AI=3\sqrt{2}$. $AM=\sqrt{AI^2-MI^2}=3$. $MH=\dfrac{MA.MI}{AI}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập hợp M là đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 49.1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;6;0)$ và M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$. Tập hợp các điểm M trên mặt cầu (S) thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$ có bao nhiêu phần tử?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Cách 1.

- Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O\,(0;0;0)$, bán kính $R=1$.
- Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-y;-z)$, $\overrightarrow{IB}=(5-x;6-y;-z)$.
- $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3\,(1-x)+5-x=0\\3\,(-y)+6-y=0\\3\,(-z)-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+8=0\\-4y+6=0\\-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{3}{2}\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow I\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$.

  Suy ra $IA=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $IB=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$.

- Do đó

$$\begin{aligned}3MA^2+MB^2=48 &\Leftrightarrow 3MA^2+MB^2=48\\ &\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=48\\ &\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=48\\ &\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2=48\\ &\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ta thấy $OI=\frac{5}{2}$ nên điểm I nằm ngoài mặt cầu (S).
Ta có $OI=R+MI=OM+MI$, suy ra có một điểm M thuộc đoạn OI thỏa mãn đề bài (điểm M là giao điểm của đoạn thẳng OI và mặt cầu (S)).

Cách 2.
Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$.
Ta có

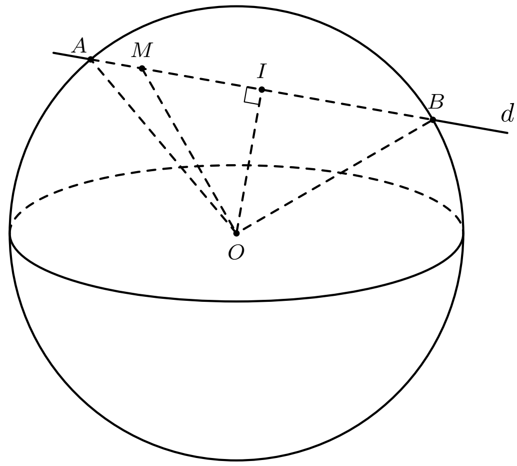
$$\begin{aligned}3MA^2+MB^2=48 &\Leftrightarrow 3\left[(x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2\right]+\left[(x_0-5)^2+(y_0-6)^2+z_0^2\right]=48\\ &\Leftrightarrow 4x_0^2+4y_0^2+4z_0^2-16x_0-12y_0+16=0\\ &\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0-3y_0+4=0.\end{aligned}$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'\left(2;\frac{3}{2};0\right)$, bán kính $R'=\frac{3}{2}$.
Mặt khác M thuộc mặt cầu (S) tâm $O\,(0;0;0)$, bán kính $R=1$.
Ta thấy $OI'=\frac{5}{2}=R+R'\Rightarrow$ mặt cầu (S) và (S') tiếp xúc ngoài nhau tại M.
Vậy có duy nhất một điểm M thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án D □

Câu 49.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P, Q, R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}=\frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{17}$. C. $\sqrt{7}$. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).
Dễ thấy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OP^2} + \dfrac{1}{OQ^2} + \dfrac{1}{OR^2}$ suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{8}$ hay $OH = 2\sqrt{2}$.
Khi đó suy ra mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.
Ta có $OM = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} + 0} = 1 < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).
Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại O nên $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}OI \cdot AB$.
Đặt $OI = x$, vì $OI \leq OM$ nên $0 < x \leq 1$ và $AB = 2\sqrt{8 - x^2}$.
Ta có $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}x \cdot 2\sqrt{8 - x^2} = x\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{8x^2 - x^4}$.
Xét hàm số $f(x) = 8x^2 - x^4$ với $0 < x \leq 1$.
Có $f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x\left(4 - x^2\right) > 0$ với mọi $x \in (0; 1] \Rightarrow (x) \leq f(1) = 7$.
Suy ra diện tích của tam giác OAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.
Chọn đáp án C □

Câu 49.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta \colon \begin{cases} x = 9 + 3a + at \\ y = 4 + 3b + bt \\ z = 4 + 6a - 6b + 2(a - b)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
Gọi (S) là mặt cầu tâm O, có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với Δ. Khi đó (S) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(1; 0; 0)$.
B. $N\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.
C. $P\left(0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
D. $K\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x = 9 + 3a + at \\ y = 4 + 3b + bt \\ z = 4 + 6a - 6b + 2(a - b)t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + a(3 + t) \\ y = 4 + b(3 + t) \\ z = 4 + (2a - 2b).(3 + t) \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Đặt $s = 3 + t$, $s \in \mathbb{R}$. Khi đó $\Delta : \begin{cases} x = 9 + as \\ y = 4 + bs \\ z = 4 + (2a - 2b)\, s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

Nhận xét Δ luôn đi qua $A\,(9; 4; 4)$ điểm cố định và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; 2a - 2b)$.

Gọi $\vec{n} = (m; n; l) \perp \vec{u}$, $\forall a\,,\, b\,(m^2 + n^2 + l^2 > 0)$.

Ta có

$$\begin{aligned} ma + nb + 2la - 2lb = 0 &\Leftrightarrow (m + 2l)\, a + (n - 2l)\, b = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2l = 0 \\ n - 2l = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2l \\ n = 2l \end{cases} \\ &\Rightarrow \vec{n} = (-2l; 2l; l) = l\,(2; -2; -1)\,. \end{aligned}$$

Do đó Δ luôn nằm trong mặt phẳng (P) đi qua $A\,(9; 4; 4)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (2; -2; -1)$.

Phương trình mp (P): $2x - 2y - z - 6 = 0$.

Gọi K là hình chiếu của O trên Δ.

Gọi H là hình chiếu của O trên (P).

Ta có $OH \leq OK \leq OA$.

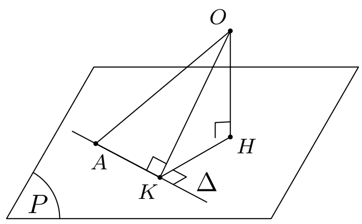
$OK_{\min} = OH = \mathrm{d}\,(O, (P)) = \dfrac{|-6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 2$.

$OK_{\min}$ khi $K \equiv H \Rightarrow \Delta \equiv AH$.

Suy ra, mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc Δ có bán kính nhỏ nhất là 2.

Phương trình mặt cầu tâm O bán kính bằng 2 là $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vậy (S) luôn đi qua điểm $K\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$.



Chọn đáp án D □

Câu 49.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính đường tròn đó bằng

(A) $R = 4$. (B) $R = \dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. (C) $R = 6$. (D) $\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; -4) = -4(1; 1; 1)$.

Phương trình đường thẳng (AB) qua $A(1; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$ dạng

$(AB)\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Gọi $M = AB \cap (P) \Rightarrow M(1 + t; 1 + t; 1 + t)$.

Vì $M \in (P)$ nên $(1 + t) + (1 + t) - (1 + t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Do đó $M(3; 3; 3) \Rightarrow MA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ và $MB = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$.

Gọi I là tâm mặt cầu (S), theo tính chất của mặt cầu ta có

$$\begin{aligned} & MA \cdot MB = MI^2 - R^2_{(S)} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = MI^2 - IC^2 = MC^2 \\ \Leftrightarrow\ & MC^2 = 36 \\ \Leftrightarrow\ & MC = 6. \end{aligned}$$

Vậy C luôn thuộc đường tròn tâm M bán kính 6.

Chọn đáp án C □

Câu 49.5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A 36. B 216. C 108. D 72.

Lời giải.

Đặt $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

Xét $V = V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36 \cdot V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

Với $R = IA = 3\sqrt{3}$.

Vậy $V_{\max} = 36$.

Chọn đáp án A □

Câu 49.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(0; 21; -19)$ và mặt cầu $(S)\colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$. $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A $a + b + c = \dfrac{14}{5}$. B $a + b + c = 0$. C $a + b + c = \dfrac{12}{5}$. D $a + b + c = 12$.

Lời giải.

$(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ có tâm $I(1;1;1)$.

Gọi $G(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn

$$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(0-x)+2(3-x)+(0-x)=0\\3(1-y)+2(0-y)+(21-y)=0\\3(1-z)+2(-1-z)+(-19-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}\Rightarrow G(1;4;-3).$$

Ta có

$$\begin{aligned}T&=3MA^2+2MB^2+MC^2\\&=3MG^2+6\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+3GA^2+2MG^2+4\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+2GB^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2\\&=6MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+3GA^2+2GB^2+GC^2\\&=6MG^2+3GA^2+2GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

$T_{\min}\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu (S), sao cho M và G cùng phía với I.

Phương trình đường thẳng IG: $\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t.\end{cases}$

$M=IG\cap(S)$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{5}\\t=\dfrac{-1}{5}.\end{array}\right.$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}M_1\left(1;\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right)\\M_2\left(1;\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{5}\right).\end{array}\right.$

Vì $M_1G<M_2G$ nên điểm $M\equiv M_1\left(1;\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{14}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49.7. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(9;0;0)$, $B(0;6;6)$, $C(0;0;-16)$ và điểm M chạy trên mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị lớn nhất của $S=\left|\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|-3MC\right|$.

A 45. B 36. C 30. D 39.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(9-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IB}=(-a;6-b;6-c)$.

$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\begin{cases}9-a=2a\\-b=-12+2b\\-c=-12+2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\\c=4\end{cases}$. Suy ra $I(3;4;4)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right| = \left|3\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}\right)\right| = 3MI$.

Suy ra $S = |3MI - 3MC| = 3\,|MI - MC|$.

Cao độ của hai điểm I, C trái dấu nên hai điểm I, C nằm về hai phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi I' là điểm đối xứng của I qua mặt phẳng (Oxy). Suy ra $I'(3;4;-4)$.

Với mọi điểm $M \in (Oxy)$ ta luôncó $S = 3\,|MI - MC| = 3\,|MI' - MC| \leq 3I'C$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I', C, M thẳng hàng.

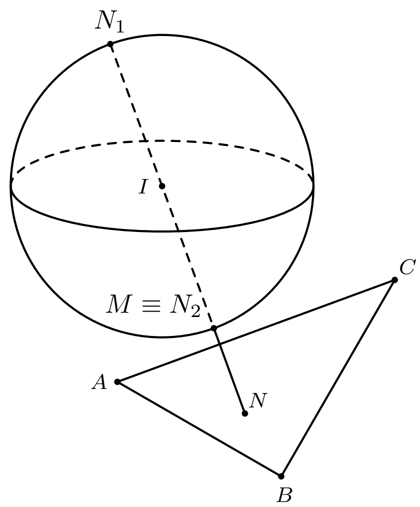
Suy ra $\max S = 3I'C = 3\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2+(-16+4)^2} = 39$.

Chọn đáp án D □

Câu 49.8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A 9. B 6. C 2. D 4.

Lời giải.



Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right| \\ &= \left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right| \\ &= MN.\end{aligned}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra $\overrightarrow{NI} = (4;4;-2) = (2;2;-1)$.

Phương trình $NI = \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = -1-t. \end{cases}$

hay phương trình NI vào phương trình (S) ta được

$$(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1. \end{array}\right.$$

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2)$, $N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$.

Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra $a+b=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-my+z+6m+3=0$ và $(\beta)\colon mx+y-mz+3m-8=0$(với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (Oxy). Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy). Tính giá trị biểu thức $P=10a^2-b^2+3c^2$.

A $P=9$. B $P=41$. C $P=73$. D $P=56$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha): x-my+z+6m+3=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(1;-m;1)$, và mặt phẳng (β): $mx+y-mz+3m-8=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(m;1;-m)$.

Ta có $M\left(-3m+\dfrac{4}{m}-3;0;-3m-\dfrac{4}{m}\right)\in\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$.

Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{n}_1;\vec{n}_2]=(m^2-1;2m;m^2+1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy).

Khi đó (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=(2m;1-m^2;0)$(với $\vec{k}=(0;0;1)$).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx+(1-m^2)\,y+6m^2+6m-8=0$.

Vì $I(a;b;c)\in(Oxy)$ nên $I(a;b;0)$.

Theo giả thiết ta suy ra (P) là tiếp diện của mặt cầu (S)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I;(P))=R &\Leftrightarrow \frac{|2ma+(1-m^2)\,b+6m^2+6m-8|}{\sqrt{4m^2+(1-m^2)^2}}=R>0 \\ &\Leftrightarrow \frac{|2m(a+3)+(6-b)\,m^2+b-8|}{m^2+1}=R>0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m(a+3)+(6-b)\,m^2+b-8=R\left(m^2+1\right) \\ 2m(a+3)+(6-b)\,m^2+b-8=-R\left(m^2+1\right) \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(a+3)=0\\6-b=R\\b-8=R\\R>0\end{cases}\\\begin{cases}2(a+3)=0\\6-b=-R\\b-8=-R\\R>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-3\\6-b=b-8\\R=6-b>0\end{cases}\\\begin{cases}a=-3=0\\6-b=b-8\\-R=6-b<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=7.\end{cases}$$

Vậy $I(-3;7;0)$, do đó $P=10a^2-b^2+3c^2=41$.

Chọn đáp án B □

Câu 49.10. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

(A) $\vec{u}=(1;0;2)$. (B) $\vec{u}=(1;7;-1)$. (C) $\vec{u}=(3;4;-4)$. (D) $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt qua M và vuông góc với đường thẳng d.

$\vec{n}_P=\vec{u}_d=(2;2;-1)$.

Do đó, (P): $2(x+2)+2(y+2)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$.

Gọi d' là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P): $\vec{n}_{d'}=\vec{n}_P=(2;2;-1)$.

Suy ra d': $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t.\end{cases}$

Gọi B là giao điểm của d' và (P), ta có

$$2(1+2t)+2(2+2t)+3+t+9=0 \Rightarrow 9t=-18 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow B(-3;-2;-1).$$

Kẻ $AH \perp \Delta \Rightarrow AH \geq AB$ nên khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất bằng AB.

Vậy đường thẳng Δ đi qua 2 điểm M; B và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{MB} = (1;0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 49.11. Trong không gian $Oxyz$, cho biết có hai mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$, tiếp xúc đồng thời với hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $(\beta)\colon 2x - 3y - 6z - 2 = 0$. Gọi R_1, R_2 $(R_1 > R_2)$ là bán kính của hai mặt cầu đó. Tỉ số $\dfrac{R_1}{R_2}$ bằng

A. $\sqrt{2}$. B. 3. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I \in d$ tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (α), (β).

Vì $I \in d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1} \Rightarrow I(2t; t+1; -2-t)$.

Vì (S) tiếp xúc với cả (α) và (β) nên

$$\begin{aligned}
& R = \mathrm{d}(I;(\alpha)) = \mathrm{d}(I;(\beta)) \\
\Leftrightarrow\quad & R = \frac{|2t + 2(t+1) - 2(-t-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2\cdot 2t - 3\cdot(t+1) - 6\cdot(-t-2) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2}} \\
\Leftrightarrow\quad & R = \frac{|6t+7|}{3} = |t+1| \\
\Leftrightarrow\quad & \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{4}{3} \\ t = -\dfrac{10}{9}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = -\dfrac{10}{9} \Rightarrow R = \dfrac{1}{9}$, với $t = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow R = \dfrac{1}{3}$. Do đó $R_1 = \dfrac{1}{3}$, $R_2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{R_1}{R_2} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 49.12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon -x + 2y - 2z + 6 = 0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $t = a + b + c$.

A. 6. B. -2. C. 12. D. -6.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108$.

Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

Vậy MN nhỏ nhất khi M, N thuộc đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó $(d)\colon \begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t. \end{cases}$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t \\ -x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t \\ 6 + t + 12 + 4t + 12 + 4t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ t = -4. \end{cases}$$

$\Rightarrow N(-2; -2; 2)$.

Do đó $t = -2 - 2 + 2 = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 49.13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng 5 và ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+3MB^2+2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $x_0+2y_0-z_0$ bằng

Ⓐ $\dfrac{46}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{9}$. Ⓒ $\dfrac{2}{9}$. Ⓓ $\dfrac{6}{9}$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{13}{6}\right)$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} Q &= MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 3IB^2 + 2IC^2. \end{aligned}$$

Do $IA^2 + 3IB^2 + 2IC^2$ không đổi nên Q nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Mà M thuộc mặt phẳng (P) nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

$MI \perp (P)$ nên phương trình MI là $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + t \\ y = \dfrac{5}{6} + t \\ z = \dfrac{13}{6} + t \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{6} + t; \dfrac{5}{6} + t; \dfrac{13}{6} + t\right)$.

$M \in (P) \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} + t + \dfrac{5}{6} + t + \dfrac{13}{6} - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{18} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{10}{9}; \dfrac{22}{9}\right)$.

Suy ra $x_0 + 2y_0 - z_0 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{20}{9} - \dfrac{22}{9} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 0; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Ozx). Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0; 4; 0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $3\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

Lời giải.

Vì đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Ozx) thì Δ song song với trục Oy và nằm trong mặt phẳng (Oyz).
Dễ thấy OA là đường vuông góc chung của Δ và Ox.
Xét mặt phẳng (α) đi qua $I\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ và là mặt phẳng trung trực của OA.
Khi đó $\Delta \parallel (\alpha)$, $Ox \parallel (\alpha)$ và mọi điểm nằm trên (α) có khoảng cách đến Δ và Ox là bằng nhau.
Vậy tập hợp điểm C là các điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox là mặt phẳng (α).
Mặt phẳng (α) đi qua $I\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$ nên có phương trình: $z-\dfrac{1}{2}=0$.
Đoạn BC nhỏ nhất khi C là hình chiếu vuông góc của B lên (α).
Do đó khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0;4;0)$ tới điểm C chính là khoảng cách từ $B(0;4;0)$ đến mặt phẳng (α): $z-\dfrac{1}{2}=0$ suy ra $\min(BC)=d(B;(\alpha))=\dfrac{\left|0-\dfrac{1}{2}\right|}{1}=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án A $\square$

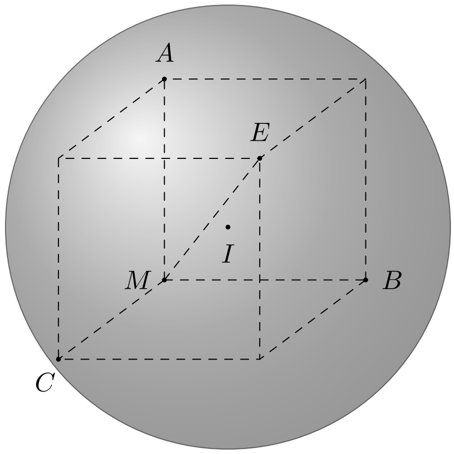
Câu 49.15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;0;4)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$. Qua điểm M vẽ 3 tia Mu, Mv, Mw đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu (S) lần lượt tại các điểm A, B, C. Gọi E là đỉnh đối diện với đỉnh M của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là MA, MB, MC. Biết điểm E luôn thuộc một mặt cầu cố định khi 3 tia Mu, Mv, Mw thay đổi thỏa mãn đề bài, tính bán kính mặt cầu đó.

A. $\sqrt{13}$. B. $4\sqrt{2}$. C. $\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $A, B, C \in (S)$, E là đỉnh đối diện với đỉnh M của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là MA, MB, MC.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), ta có



$$\begin{cases} \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ IA = IB = IC = R = 3 \\ IM = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} IE^2 &= \left(\overrightarrow{IE}\right)^2 = \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{ME}\right)^2 \\ &= \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2 \\ &= IM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \\ &= IM^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + 2\overrightarrow{IM} \cdot \left(3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= IA^2 + IB^2 + IC^2 - 2IM^2 = 11. \end{aligned}$$

Vậy điểm E luôn thuộc mặt cầu tâm I bán kính $\sqrt{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.16. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(2;4;0), D(0;0;6)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng cắt (S) theo một đường tròn có diện tích 14π và cách đều năm điểm O, A, B, C, D (O là gốc tọa độ)?

A. 5. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R = \sqrt{14}$.

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Vì (P) cách đều nằm điểm A, B, C, D, O nên (P) không đi qua O.

Giả sử $(P)\colon ax + by + cz + 2 = 0$, (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là mặt phẳng cần tìm.

Gọi r là bán kính của đường tròn trong giao tuyến của (S) và (P).

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là 14π nên $r = \sqrt{14} = R$.

Do đó tâm $I(1;2;3)$ của mặt cầu (S) nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó ta có $a + 2b + 3c + 2 = 0$.

Do (P) cách đều năm điểm O, A, B, C, D nên

$$\begin{aligned} &\frac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4b+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2a+4b+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|6c+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \Leftrightarrow\ & |a+1| = |2b+1| = |a+2b+1| = |3c+1| = 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với $a+2b+3c+2=0$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}|a+1|=1\\|2b+1|=1\\|3c+1|=1\\a+2b+3c+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2,b=c=0\\a=c=0,b=-1\\a=b=0,c=-\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$$

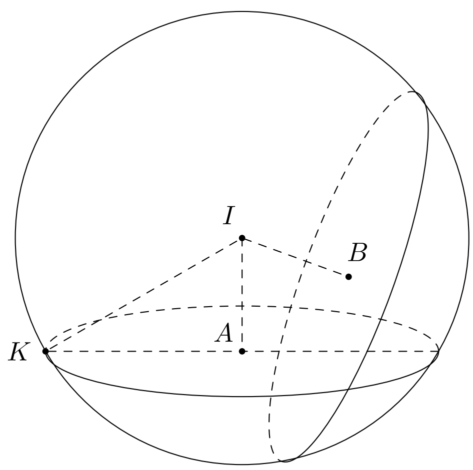
Vậy có 3 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 49.17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+1=0$, $(Q)\colon 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(a;0;0)\in Ox$ có tâm R. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P), (Q) là các đường tròn có tâm A, B.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=IA=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{6}}=\sqrt{R^2-4}\Rightarrow\dfrac{(a+1)^2}{6}=R^2-4$.

$\mathrm{d}(I,(Q))=IB=\dfrac{|2a-1|}{\sqrt{6}}=\sqrt{R^2-r^2}\Rightarrow\dfrac{(2a-1)^2}{6}=R^2-r^2$.

Suy ra $r^2-4=\dfrac{(a+1)^2}{6}-\dfrac{(2a-1)^2}{6}\Rightarrow a^2-2a-8+2r^2=0$ (*)

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi (*) có đúng một nghiệm a.

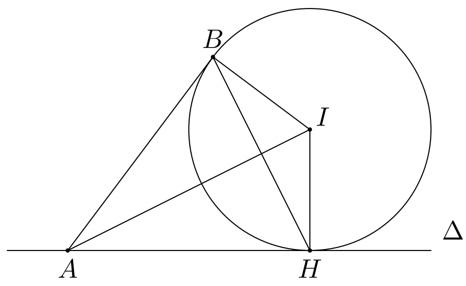
Khi đó $\Delta'=0\Leftrightarrow 1+8-2r^2=0\Rightarrow r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=16$, điểm A nằm trên đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$ và nằm ngoài mặt cầu (S). Từ A kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S). Gọi (P_m) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng d cố định. Phương trình đường thẳng d là

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng Δ. Ta có $H(1+t;1+t;2)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Do $IH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t+1+t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Suy ra $H(0;0;2)$ và $IH = 4$ nên đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H hay $H \in (P_m)$.

Chọn d là đường thẳng đi qua H, vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và điểm I. Hiển nhiên d cố định.

Khi đó $d \perp IA$, mà $\overrightarrow{IA}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_m) nên $d \parallel (P_m)$ hoặc $d \subset (P_m)$.

Kết hợp với $H \in d$ và $H \in (P_m)$ nên $d \subset (P_m)$.

Ta có $\vec{u}_d = \left[\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{IH}\right] = (4;-4;0) = 4(1;-1;0)$ nên phương trình tham số của đường thẳng d là

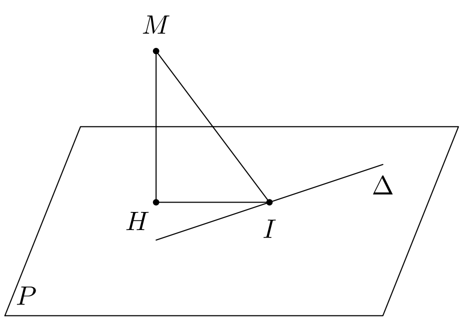
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 49.19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(2;5;3)$. Mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất có phương trình là

(A) $x - 4y + z - 3 = 0$.
(B) $x + 4y - z + 1 = 0$.
(C) $x - 4y - z + 1 = 0$.
(D) $x + 4y + z - 3 = 0$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P), I là hình chiếu vuông góc của M lên Δ.

Ta có $\triangle MHI$ vuông tại H nên $MH \le MI$, do đó MH đạt giá trị lớn nhất khi $H \equiv I$, khi đó mặt phẳng (P) chứa Δ và vuông góc với MI.

Ta có $I \in \Delta \Rightarrow I(1+2t;t;2+2t)$, suy ra $\overrightarrow{MI} = (-1+2t; t-5; -1+2t)$.

Có $MI \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + t - 5 + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $I(3;1;4)$.

Mặt phẳng (P) đi qua I và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MI} = (1;-4;1)$ có phương trình là

$$x - 3 - 4(y-1) + z - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 49.20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ và $A(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết B thuộc mặt cầu (S), có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

(A) $x-y-z=0$. (B) $x-y-2z=0$. (C) $x-y+z=0$. (D) $x-y+2z=0$.

Lời giải.

Giả sử $B(a;b;c)$. Do $B\in(S)$ nên $a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c=0$.

Tam giác OAB đều nên $\begin{cases}OA=OB\\OB=AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=8\\a^2+b^2+c^2=(a-2)^2+(b-2)^2+c^2.\end{cases}$

Do đó ta có hệ $\begin{cases}a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c=0\\a^2+b^2+c^2=8\\a^2+b^2+c^2=(a-2)^2+(b-2)^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=4\\a+b=2\\a^2+b^2+c^2=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow(a;b;c)=(2;0;2)$ hoặc $(a;b;c)=(0;2;2)$.

Theo giả thiết ta nhận $(a;b;c)=(2;0;2)$. Ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-4;-4)$.

Mặt phẳng (OAB) đi qua điểm O và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(1;-1;-1)$ nên có phương trình $x-y-z=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49.21. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$, đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $d_2\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(A) $\left[\begin{array}{l}x-y+2z+9=0\\x-y+2z-3=0\end{array}\right.$. (B) $x+y+2z+9=0$.

(C) $\left[\begin{array}{l}x+y+2z+9=0\\x+y+2z-3=0\end{array}\right.$. (D) $x-y+2z-3=0$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $r=\sqrt{6}$.

Đường thẳng d_1 qua điểm $A(2;1;1)$, nhận véc-tơ $\vec{a}=(3;-1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Đường thẳng d_2 qua điểm $B(0;-2;2)$, nhận véc-tơ $\vec{b}=(1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên (P) nhận véc-tơ $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;2;4)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra (P) có phương trình tổng quát dạng $x+y+2z+m=0$.

(P) tiếp xúc với mặt cầu$(S)\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(P))=r\Leftrightarrow\dfrac{|1+0-4+m|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|m-3|=6\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} m-3=6 \\ m-3=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9 \\ m=-3. \end{array}\right.$$

Với $m=9$ ta có mặt phẳng $(P_1)\colon x+y+2z+9=0$.

Với $m=-3$ ta có mặt phẳng $(P_2)\colon x+y+2z-3=0$.

***)Thử lại.** Thay lần lượt tọa độ của $A(2;1;1)$, $B(0;-2;2)$ vào các phương trình của (P_1) và (P_2) ta thấy cả A và B đều không thuộc hai mặt phẳng này. Do đó, hai đường thẳng d_1 và d_2 thỏa mãn điều kiện song song với (P_1), (P_2).

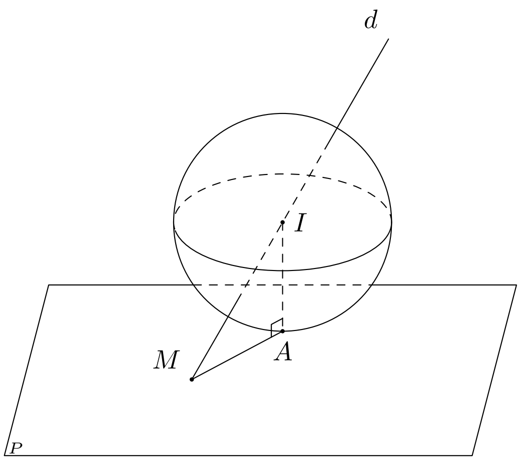
Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn đề bài, phương trình của chúng lần lượt là $x+y+2z+9=0$, $x+y+2z-3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 49.22. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ $(a<0)$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A sao cho diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$. Giá trị của $2a+b-c$ bằng

A -3. B 2. C 3. D -3.

Lời giải.



Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-t. \end{cases}$

Ta có $M=d\cap(P)$. Suy ra $M(1+2t;1+t;-t)$.

Và $M\in(P)\Rightarrow 1+2t+2+2t-t-6=0\Leftrightarrow 3t-3=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $M(3;2;-1)$. Gọi $I(1+2m;1+m;-m)\in d$.

Cách 1:

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$.

Gọi ϕ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\sin\phi = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \phi = 30^\circ$.
Khi đó $MA = MI\cdot\cos 30^\circ$.
Diện tích tam giác IAM là $S_{IAM} = \dfrac{1}{2}MI\cdot MA\cdot\sin 30^\circ = \dfrac{MI^2\cdot\sqrt{3}}{8}$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} S_{\Delta AMI} = 3\sqrt{3} &\Leftrightarrow MI^2 = 24\\ &\Leftrightarrow (1+2m-3)^2 + (1+m-2)^2 + (-m-(-1))^2 = 24\\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=2\\ m-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\\ m=-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $m=3 \Rightarrow I(7;4;-3)$ (loại).

Với $m=-1 \Rightarrow I(-1;0;1)$ (nhận).

Vậy $2a+b-c = 2\cdot(-1)+0-1 = -3$.

Cách 2:

Ta có A là hình chiếu vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P).

Ta có $A = AI\cap(P) \Rightarrow A(1+2m+s; 1+m+2s; -m+s) \in AI$.

Và $A\in(P) \Rightarrow 1+2m+s+2+2m+4s-m+s-6 = 0 \Leftrightarrow s = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}m$.

Suy ra $A\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}m; 2; \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}m\right)$.
Ta có

$$AI = \mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|3m-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3|m-1|}{\sqrt{6}}; AM = \sqrt{\left(\frac{3}{2}m-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}m\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}|m-1|.$$

Tam giác AMI vuông tại A suy ra

$$\begin{aligned} S_{\Delta AMI} = \frac{1}{2}AI\cdot AM &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3|m-1|}{\sqrt{6}}\cdot\frac{3\sqrt{2}|m-1|}{2} = 3\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=2\\ m-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\\ m=-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $m=3 \Rightarrow I(7;4;-3)$ (loại).

Với $m=-1 \Rightarrow I(-1;0;1)$ (nhận).

Vậy $2a+b-c = 2\cdot(-1)+0-1 = -3$.

Chọn đáp án D □

D BẢNG ĐÁP ÁN

49.1. D	49.2. C	49.3. D	49.4. C	49.5. A	49.6. A	49.7. D	49.8. C
49.9. B	49.10. A	49.11. B	49.12. B	49.13. C	49.14. A	49.15. C	49.16. B
49.17. C	49.18. C	49.19. A	49.20. A	49.21. C	49.22. D		

DẠNG 50. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LIÊN KẾT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa

Giả sử $\mathcal{K}$ là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{K}$. Ta nói

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***đồng biến*** (tăng) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***nghịch biến*** (giảm) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathcal{K}$ gọi chung là ***đơn điệu*** trên $\mathcal{K}$.

2. Tính chất

a) Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathcal{K}$ thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathcal{K}$.
Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

b) Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathcal{K}$ thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathcal{K}$.
Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x)$, $g(x)$ không là các hàm số dương trên $\mathcal{K}$.

c) Cho hàm số $u = u(x)$ xác định với mọi $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f(u(x))$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:

i) Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó , hàm số $f(u(x))$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f(u)$ đồng biến trên $(c; d)$.

ii) Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f(u(x))$ nghịch biến $(a; b)$ khi và chỉ khi $f(u)$ nghịch biến $(c; d)$.

3. Định lí 1

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f không đổi trên $\mathcal{K}$.

!

Khoảng $\mathcal{K}$ trong định lí trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn, nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Ta thường biểu diễn qua bảng biến thiên như sau:

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

4. Định lí 2

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên $\mathcal{K}$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên tập K khi và chỉ khi $f^2(x)$ đồng biến trên K $\Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) \geq 0$ với $\forall x \in$ K.

B BÀI TẬP MẪU

CÂU 50 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

A 12. **B** 11. **C** 6. **D** 5.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a + 2$.

Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$, ta xét các trường hợp sau:

- TH1. $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \max\limits_{(0;1)}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ -3 \leq a \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-2;3].$

  Suy ra $a \in \{-2;-1;0;1;2;3\} \to 6$ giá trị.

- TH2. $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \min\limits_{(0;1)}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -5 \\ \left[\begin{array}{l} a \geq 3 \\ a \leq -3 \end{array}\right. \end{cases}$

  $\Leftrightarrow a \leq -5.$

  Suy ra $a \in \{-9;-8;-7;-6;-5\} \to 5$ giá trị.

Vậy có 11 giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Chọn đáp án B □

C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 50.1. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá tri nguyên dương của tham số m dể hàm số $g(x) = f\left(3|x-m| + m^2\right)$ đồng biến trên $(5;+\infty)$?

A 3. B Vô số. C 5. D 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x$. Với $\forall x \neq m$ ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3\frac{(x-m)}{|x-m|} f'\left(3|x-m| + m^2\right) \\ &= 3\frac{(x-m)}{|x-m|}\left[4\left(3|x-m| + m^2\right)^3 + 4\left(3|x-m| + m^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Ta thấy $g'(x)$ không xác định khi $x = m$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(3|x-m| + m^2\right)$ đồng biến trên $(m; +\infty)$.

Để hàm số $g(x) = f\left(3|x-m| + m^2\right)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$ ta cần có $m \leq 5$, mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 50.2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 5. B 6. C 3. D 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

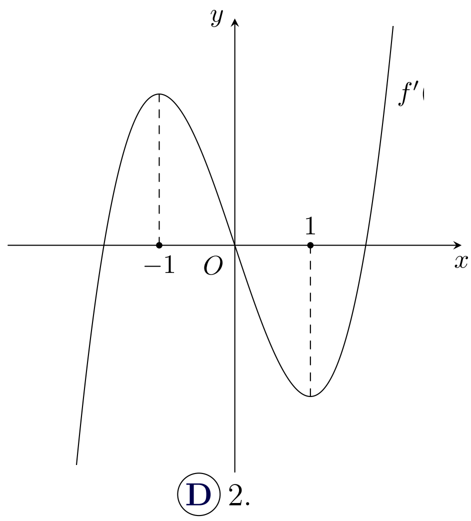
Do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 50.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?



A 3. B Vô số. C 5. D 2.

Lời giải.

Ta có $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| = |4f(\sin x) - 2\sin^2 x + 1 - a|$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x > 0, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên khi x tăng trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì t tăng trên $(0; 1)$.

Do đó hàm số $y = |4f(\sin x) - 2\sin^2 x + 1 - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = |4f(t) - 2t^2 + 1 - a|$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

Xét $g(t) = 4f(t) - 2t^2 + 1 - a$ có $g(1) = 4f(1) - 2 + 1 - a = 3 - a$.

$g'(t) = 4f'(t) - 4t < 0, \forall t \in (0; 1)$.

Do đó $g(t)$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Từ đây suy ra: $y = |4f(t) - 2t^2 + 1 - a|$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi $g(t) \geq 0, \forall t \in [0; 1]$ hay $g(1) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 3$. Vì a nguyên dương nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.4. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = f(|x - 2|)$ đồng biến trên $(-2; 0)$.

A. 2020. B. 2021. C. 2012. D. 2013.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(|x - 2|)$ đồng biến trên $(-2; 0) \Rightarrow f(|x|)$ đồng biến trên $(-4; -2)$.

Do đó $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2; 4)$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (2; 4) \Leftrightarrow m \leq -x^2 + 2x, \forall x \in (2; 4) \Leftrightarrow m \leq -8$.

Do $m \in [-2020; 2020]$ nên có 2013 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án C □

Câu 50.5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ nghịch biến trên $(0; 1)$?

A. 10. B. 8. C. 9. D. 7.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Xét hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có

$$g'(x) = f'(|x + m|) \cdot \frac{x + m}{|x + m|} = \frac{x + m}{|x + m|} \cdot 3|x + m| \cdot (|x + m| - 2) = 3(x + m) \cdot (|x + m| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m - 2 \\ x = -m + 2. \end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định khi $x = -m$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$-m+2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\left[\begin{array}{l}(0;1)\subset(-\infty;-m-2)\\(0;1)\subset(-m;-m+2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le -m-2\\-m\le 0<1\le -m+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -3\\0\le m\le 1.\end{array}\right.$$

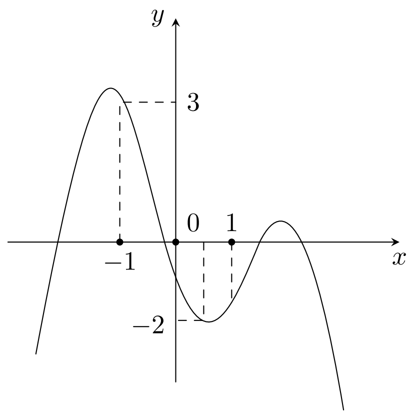
Mà $m\in[-10;10]$ nên có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 50.6.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm được cho như hình vẽ bên dưới và có $f(1)=1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $y=|2f(2-x)-x^2+2mx+12|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$. Số phần tử của tập S tương ứng bằng

(A) 4033. (B) 4028. (C) 4027. (D) 4029.



Lời giải.

Đặt $y=|g(x)|=|2f(2-x)-x^2+2mx+12|\Rightarrow g'(x)=2[-f'(2-x)-x+m]$. Để hàm số $y=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì xảy ra 2 trường hợp sau

TH 1. Hàm số $y=g(x)$ phải đồng biến trên khoảng $(1;3)$ và $g(1)\ge 0$. Suy ra

$$g(x)\ge 0,\forall x\in(1;3)$$
$$\Rightarrow |g(x)|=g(x)\ge 0,\forall x\in(1;3)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}g'(x)=2(-f'(2-x)-x+m)\ge 0,\forall x\in(1;3)\\g(1)=2f(1)+2m+11\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge f'(2-x)+x,\forall x\in(1;3)\\2m+13\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge f'(u)-u+2,\forall u=2-x,u\in(-1;1)\\m\ge -\dfrac{13}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge \max\limits_{[-1;1]}(f'(u)-u+2)=f'(-1)-(-1)+2=6\\m\ge -\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 6.$$

Chú ý rằng trên $[-1;1]$ thì $\begin{cases}f'(u)\le f(-1)=3\\-u\le-(-1)=1.\end{cases}$

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}(f'(u)-u+2)=f'(-1)-(-1)+2=6.$

TH 2. Hàm số $y = g(x)$ phải nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và $g(1) \leq 0$.

Suy ra $g(x) \leq 0, \forall x \in (1;3) \Rightarrow y = |g(x)| = -g(x)$ đồng biến trên $(1;3)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) = 2(-f'(2-x) - x + m) \leq 0, \forall x \in (1;3) \\ g(1) = 2f(1) + 2m + 11 \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f'(2-x) + x, \forall x \in (1;3) \\ 2m + 13 \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f'(u) - u + 2, \forall u = 2 - x, u \in (-1;1) \\ m \leq -\dfrac{13}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min\limits_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \\ m \leq -\dfrac{13}{2}. \end{cases}$$

Mà trên $\min\limits_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \geq -2 - (+1) + 2 = -1. \Rightarrow m \leq -\dfrac{13}{2}$.

Chú ý rằng trên $[-1;1]$ thì $\begin{cases} f'(u) \geq -2 \\ -u \geq -1. \end{cases}$

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \geq -2 - (1) + 2 = -1$.

Kết hợp với điều kiện $m \in [-2020; 2020] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6 \leq m \leq 2020 \\ -2020 \leq m \leq -7. \end{array}\right.$

Suy ra có 4029 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 50.7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Phương trình $|f(8x^4 - 8x^2 + 1)| = \dfrac{1}{2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A 8. **B** 12. **C** 6. **D** 10.

Lời giải.

Xét hàm số $t = t(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Ta có $t' = 32x^3 - 16x; t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\left|f\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right)\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = \dfrac{1}{2} \\ f\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ (*)

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} 8x^4 - 8x^2 + 1 = a & (a > 1) & (1) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = b & (b < -1) & (2) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = c & (-1 < c < 1) & (3) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = d & (d > 1, d \neq a) & (4). \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên của hàm số $t = t(x)$, ta thấy (1) có hai nghiệm phận biệt; (2) vô nghiệm; (3) có bốn nghiệm phân biệt; (4) có hai nghiệm phân biệt (các nghiệm này không trùng nhau).

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 50.8. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \left|x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20\right|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$?

A 7. B 9. C 4. D 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20$.

$$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3$$

Ta thấy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và hàm số không dương trên miền $(-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ -4m - 26 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 8x^2 + \dfrac{3}{x} \leq 2m \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ m \geq -\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 5x^3 + 8x^2 + \dfrac{3}{x}$ trên $(-\infty; -2)$

$$g'(x) = 15x^2 + 16x - \frac{3}{x^2} = (2x+4)^2 + 11x^2 - 16 - \frac{3}{x^2}$$

Ta có $(2x+4)^2 > 0, 11x^2 > 44, 16 + \dfrac{3}{x^2} < 16 + \dfrac{3}{4}, \forall x \in (-\infty; -2)$.

Suy ra $g'(x) > 0 + 44 - 16 - \dfrac{3}{4} > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty; -2)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 2
y'	$+$
y	$\nearrow$ $-\dfrac{19}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $5x^3 + 8x^2 + \dfrac{3}{x} \leq 2m \quad \forall x \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow -\dfrac{19}{2} \leq 2m \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{19}{4}$.

Kết hợp với $m \geq -\dfrac{13}{2}$ ta có $m \geq -\dfrac{19}{4}$. Do đó có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 50.9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m+1)x - 2|$ đồng biến trên $(1; 3)$?

A 4032. B 4034. C 2022. D 4030.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (2m+1)x - 2$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2m + 1.$$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; 3)$ khi và chỉ khi xảy ra 2 trường hợp sau

TH 1. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; 3)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

TH 2. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(1; 3)$ và $f(1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -27 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -14$$

Kết hợp 2 trường hợp ta có $m \leq -14$ hoặc $m \geq 0$.

Mà $m \in (-2022; 2022)$ nên có 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 50.10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = |-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A -2. B 2. C -1. D 0.

Lời giải.

Đặt $g(x) = -x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1$ và $g'(x) = -4x^3+3mx^2+4m^2x = -x\left(4x^2 - 3mx - 4m^2\right)$.

Hàm số $y = f(x) = |-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} g(1) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

TH 1. $\begin{cases} g(1) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 - 3mx - 4m^2) = +\infty$.

TH 2. $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \leq 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Ta có $4x^2 - 3mx - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m \\ x = \dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m \end{array}\right.$

- Với $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 0$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$
$\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{8}{3-\sqrt{73}} \Rightarrow \dfrac{8}{3-\sqrt{73}} \leq m \leq 0, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$.

- Với $0 < m \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$
$\Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{8}{3+\sqrt{73}} \Rightarrow 0 < m \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \varnothing$.

Kết luận: $S = \{-1; 0\}$ nên tổng phần tử của S là -1.

Chọn đáp án C □

Câu 50.11. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(A) 8. (B) 15. (C) 4. (D) 30.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x\left(x^2 - x - 2\right)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1
y'	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$	$m-5$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $|f(x)|$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0$ hay $m \geq 5$.

Vì m nguyên và $m \in (-20; 20)$ suy ra $m \in \{5; 6; \ldots; 17; 18; 19\}$.

Vậy có tất cả 15 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50.12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 519. (B) 21. (C) 20. (D) 18.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$.

Để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì có hai trường hợp sau

TH 1. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - mx^2 + 12x + 2m\right) = +\infty$.

TH 2. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \forall x > 1 \\ 13 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{x}, \forall x > 1 \\ m \geq -13. \end{cases}$$

Xét $g(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{6}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - \dfrac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$. Bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \leq 6$.
Kết hợp $(*)$ suy ra $-13 \leq m \leq 6$. Vì m nguyên nên $m \in \{-13; -12; -11; \ldots; 5; 6\}$.

Vậy có 20 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án C □

Câu 50.13. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^2 + 4mx + m + 2017|$. Gọi S là tập chưa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$. Số phần tử của tập S bằng

A 275. B 276. C 0. D 277.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4mx + m + 2017 \Rightarrow y = f(x) = |g(x)|$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4m.$$

Dạng bài toán này luôn chỉ xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; 3) \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; 3) \\ g(-2) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 4m \geq 0, \forall x \in (-2; 3) \\ 2065 - 7m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 4m \leq 0, \forall x \in (-2; 3) \\ 2065 - 7m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq -x^3 + 3x^2, \forall x \in (-2; 3) \\ 295 \geq m \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq -x^3 + 3x^2, \forall x \in (-2; 3) \\ 295 \leq m \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m \geq \max\limits_{[-2;3]}\left(-x^3+3x^2\right)=20 \\ m \leq 295 \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq \min\limits_{[-2;3]}\left(-x^3+3x^2\right)=0 \\ m \geq 295 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 20 \leq m \leq 295.$$

Suy ra có 276 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 50.14. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=|2x^3-2mx+3|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A 11. B 7. C 12. D 8.

Lời giải.

Xét hàm số: $f(x)=2x^3-2mx+3$ có: $f'(x)=6x^2-2m; \Delta'=12m$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|=|2x^3-2mx+3|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

TH 1. $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$; $m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Ta có 10 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán. (1)

TH 2. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\, (x_1 < x_2)$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{2m}{6}+1 \geq 0 \\ 5-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \dfrac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{1;2\}$. Ta có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán. . (2)

Từ (1) và (2) suy ra: có tất cả có 12 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 50.15. Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-\left(m^2+3m\right)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A 16. B 9. C 3. D 2.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-\left(m^2+3m\right)x+\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow g'(x)=-x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right).$$

Để $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ ta xét hai trường hợp sau

TH 1. $g(x)$ nghịch biến và không âm trên khoảng $(1;2)$. Tức là

$$\begin{cases} g'(x)\le 0, \forall x\in(1;2)\\ g(2)\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right)\le 0, \forall x\in(1;2)\\ -\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot(2m+3)\cdot 2^2-\left(m^2+3m\right)\cdot 2+\frac{2}{3}\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge m+3, \forall x\in(1;2)\\ x\le m, \forall x\in(1;2)\end{array}\right.\\ -2m^2-2m+4\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\le -2\\ m\ge 2\end{array}\right.\\ -2\le m\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m=-2.\end{array}\right.$$

TH 2. $g(x)$ đồng biến và không dương trên khoảng $(1;2)$. Tức là

$$\begin{cases} g'(x)\ge 0, \forall x\in(1;2)\\ g(2)\le 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+(2m+3)x-\left(m^2+3m\right)\ge 0, \forall x\in(1;2)\\ -\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot(2m+3)\cdot 2^2-\left(m^2+3m\right)\cdot 2+\frac{2}{3}\le 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le x\le m+3, \forall x\in(1;2)\\ -2m^2-2m+4\le 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le m\le 1\\ \left[\begin{array}{l} m\ge 1\\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50.16. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số thực m để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) 2019. (B) 2016. (C) 4039. (D) 4037.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3\left[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)\right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+4. \end{array}\right. \quad (m < m+4)$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0; 0)$.

TH 1. Nếu $m > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		m		$m+4$		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m) \Leftrightarrow m \geq 2$.

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 2$.

TH 2. Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$ thì ta có bảng biến thiên sau (với x_1, x_2, 0 là ba nghiệm của phương trình $f(x) = 0$)

x	$-\infty$		x_1		m		0		$m+4$		x_2		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

$$\Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m+4) \Leftrightarrow m + 4 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $-2 \leq m \leq 0$.

TH 3. Nếu $m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$ thì ta có bảng biến thiên sau (với x_1, x_2, 0 là ba nghiệm của phương trình $f(x) = 0$)

x	$-\infty$		m		$m+4$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	$f(m+4)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ với mọi $m \leq -4$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ -2 \leq m \leq 0 \\ m \leq -4. \end{array}\right.$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4037 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 50.17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[0; 5]$ để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

A 35. B 4. C 6. D 5.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$

TH 1. Nếu $m = 0$, khi đó $f(x) = x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - 6x^2|$

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	32	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - 6x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

TH 2. Nếu $m > 0$, khi đó ta có $f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+2)x + m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m + 4. \end{array}\right.$$

- Với $0 < m < 3$, bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		m		$m+4$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	$f(m+4)$	↗	$+\infty$

  Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(m; 3)$ và $f(m) > 0$ suy ra hàm số $y = |f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

- Với $m \geq 3$, bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		m		$m+4$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	$f(m+4)$	↗	$+\infty$

  Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
  Vì $m \in [0; 5] \Rightarrow m \in \{3, 4, 5\}$.

Vậy $m \in \{0, 3, 4, 5\}$ nên có 4 giá trị của m.
Chọn đáp án B □

Câu 50.18. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2023; 2023]$ để hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 5 + m|$ đồng biến trên $(5; +\infty)$.

(A) 2023. (B) 2047. (C) 2004. (D) 20.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 + m$. Để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trong $(5; +\infty)$ ta có hai trường hợp

- Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0; \forall x \in (5; +\infty) \\ f(5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x \geq 0, \forall x \in (5; +\infty) \text{ (đúng)} \\ -20 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 20.$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) \leq 0; \forall x \in (5; +\infty) \\ f(5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x \leq 0, \forall x \in (5; +\infty) \text{ (sai)} \\ -20 + m \leq 0. \end{cases}$

Suy ra $m \geq 20$ là giá trị cần tìm. Theo giả thiết ta suy ra $m \in \{20; 21; \ldots; 2023\}$.

Vậy có 2004 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50.19. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 11. (B) 12. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y = |f(x)|$ với $f(x) = 4x^3 - mx + 1$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - m$.

Do m nguyên dương nên $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt, hay hàm số $y = f(x)$ luôn có 2 điểm cực trị dương.

Yêu cầu của bài toàn tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi x thuộc khoảng $(1; +\infty)$.

Suy ra $\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m \geq 0 \\ 12 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$

Suy ra có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50.20. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - mx|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $y = |f(x)|$ với $f(x) = x^3 - 3x^2 - mx$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - m$ với $P = -\dfrac{m}{3}$.

Do m nguyên dương nên $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$, hay hàm số $y = f(x)$ luôn có 2 điểm cực trị trái dấu và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu của bài toàn tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi x thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Suy ra $\begin{cases} f(2) \geq 0 \\ f'(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 12 - 2m \geq 0 \\ 12 - 12 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$

Vì m nguyên dương nên không có giá trị m nào thảo bài toán.

Chọn đáp án A □

D BẢNG ĐÁP ÁN

50.1. C	50.2. A	50.3. A	50.4. C	50.5. A	50.6. D	50.7. A	50.8. C
50.9. D	50.10. C	50.11. B	50.12. C	50.13. B	50.14. C	50.15. C	50.16. D
50.17. B	50.18. C	50.19. D	50.20. A				