CHƯƠNG I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ hay $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pytago)

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

Phương pháp giải: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng AB, AC, BC,HA, HB, HC thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại.

1A. Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau:

1B. Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau:

2A. Cho tam giác ABC vuông tai A, đường cao AH.

a) Cho biết AB = 3cm, AC = 4cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH, AC, BC và AH.

b) Cho biết BH = 9cm, CH = 16cm. Tính độ dài đoạn thẳng AB, AC, BC, và AH.

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Cho biết AB = 3cm, BC = 5cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH,CH, AH và AC

b) Cho biết AH = 60cm, CH = 144cm. Tính độ dài đoạn thẳng AB, AC, BC, và BH.

3A. Cho tam giác ABC vuông tai A, $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Cho biết

AB:AC = 3: 4 và BC = 15cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và HC.

3B. Cho tam giác ABC vuông tại A, đương cao AH.

Cho biết $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{6}$ và BC = 122cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH.

Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông.

Phương pháp giải: Sử dụng các hệ thức về các cạnh và đường cao một cách hợp lí theo ba bước:

Bước 1: Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

Bước 2: Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

Bước 3: Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

4A. Cho tam giác CDE nhọn, đường cao CH. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của CD, CE. Chứng minh:

a) CD. CM = CE. CN

b) Tam giác CMN đồng dạng với tam giác CED.

4B. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AH là đường cao

a) Chứng minh: $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$

b) Vẽ trung tuyến AM của tam giác ABC, chứng minh:

1. $AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2$

2. $AC^2 - AB^2 = 2BC.HM$ (Với AC > AB).

5A. Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi I, K là hình chiếu của B, D trên đường chéo AC. Gọi M, N là hình chiếu của C trên các đường thẳng AB, AD. Chứng minh:

a) AK = IC

b) Tứ giác BIDK là hình bình hành.

c) AC^2 = AD. AN + AB.AM

5B. Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết khoảng cách từ O tới mỗi cạnh hình thoi là h, AC = m, BD = n. Chứng minh: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2}$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết AB = 4cm, AC = 7,5cm. Tính độ dài đoạn thẳng AH và diện tích tam giác ABC.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết AH = 6cm, BH = 4,5cm. Tính AB, AC, BC, HC.

b) Biết AB = 6cm, BH = 3cm. Tính AH và tính chu vi của các tam giác vuông trong hình.

8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC, biết AH = 12cm, BH = 9cm.

9. Cho tam giác ABC biết BC = 7,5cm, AC = 4,5cm, AB = 6cm.

a) Tính đường cao AH của tam giác ABC

b) Tính độ dài BH, CH.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết AB:AC = 3:4 và AH = 6cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH.

11. Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông là 7 và 24. Kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính diện tích hai tam giác vuông tạo thành.

12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$, AH = 15cm. Tính độ dài các đoạn thẳng HB và HC.

13. Cho ABCD là hình thang vuông tại A và D. Đường chéo BD vuông góc với BC. Biết AD = 12cm, DC = 25cm. Tính độ dài AB, BC và BD.

14. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 8cm, BC = 15cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BD

b) Vẽ AH vuông góc với BD tại H. Tính độ dài đoạn thẳng AH

c) Đừng thẳng AH cắt BC và DC lần lượt tai I, K.

Chứng minh: AH^2 = HI. HK

15. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Cho biết AB = 15cm, AD = 20cm, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau ở O. Tính :

a) Độ dài các đoạn thẳng OB và OD.

b) Độ dài đoạn thẳng AC

c) Diện tích hình thang ABCD.

16. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH, kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh:

a) $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$ b) BC. BE. CF = AH^3

17. Cho tam giác ABC cân tại A có AH và BK là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc BC tai B cắt tia CA tại D. Chứng minh:

a) BD = 2AH B) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$

CHƯƠNG I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

BÀI 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

1A. Hình 1. Sử dụng định lí Pytago và các hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu lên cạnh huyền trong tam giác vuông, tính được x = 3,6, y = 6,4.

Hình 2: Sử dụng định lí Pytago và các hệ thức liên quan giữa đường cao, cạnh huyền và cạnh góc vuông trong tam giác vuông, tính được $x = \frac{35\sqrt{74}}{74}$, $y = \sqrt{74}$.

1B. Tương tự 1A.

Hình 1. $x = \sqrt{5}, y = 2\sqrt{5}$ Hình 2: $x = \frac{25}{4}, y = \frac{5\sqrt{41}}{4}$

2A. Tương tự 1A.

a) $HB = 1{,}8cm;\ CH = 3{,}2cm;\ AH = 2{,}4cm;\ BC = 5cm$

b) $AB = 15cm;\ AC = 20cm;\ AH = 12cm;\ BC = 25cm$

2B. Tương tự 1A.

a) $HB = 1{,}8cm;\ CH = 3{,}2cm;\ AH = 2{,}4cm;\ AC = 4cm$

b) $AB = 65cm;\ AC = 156cm;\ BC = 169cm; BH = 25cm$

c) $AB = 5cm;\ BC = 13cm; BH = \frac{25}{13}cm;\ CH = \frac{144}{13}cm$

3A. Đặt AB = 3k; AC = 4k . Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ABC thu được k = 3. Từ đó tính được : BH = 5,4cm, HC = 9,6cm.

3B. Tương tự 3A. Tính được BH = 50cm, CH = 72cm.

4A. a) Áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu lên cạnh huyền trong các tam giác vuông HCD và HCE ta có CD.CM = CE.CN (= CH^2).

b) Sử dụng a) để suy ra các tỉ lệ về cạnh bằng nhau. Từ đó chứng minh được $\Delta CMN \sim \Delta CDE$ (c-g-c).

4B. a) Sử dụng định lí Pytago cho các tam giác vuông HAB và HAC để có đpcm.

b) Chứng minh tương tự câu a).

c) Sử dụng định lí Pytago cho tam giác vuông AHM.

5A. a) HS tự chứng minh.

b) HS tự chứng minh.

c) Chú ý $\Delta AKD \sim \Delta ANC(g.g)$, và $\Delta ABI \sim \Delta ACM(g.g)$

Từ đó tính được AD.AN và AB.AM.

5B. Kẻ đường cao OH của tam giác vuông OAB. Áp dụng hệ thức về đường cao trong tam giác vuông cùng chú ý rằng O là trung điểm AC và BD để suy ra điều phải chứng minh.

6. Tương tự 1A. Tính được $AH = \frac{50}{17}cm,\ S_{ABC} = 15cm^2$

7. Tương tự 1A.

a) AB = 7,5cm, AC = 10cm, BC = 12,5cm, HC = 8cm.

b) $AH = 3\sqrt{3}cm,\ P_{ABC} = 18 + 6\sqrt{3}cm,\ P_{ABH} = 9 + 3\sqrt{3}cm, P_{ACH} = 9 + 9\sqrt{3}cm.$

8. Tương tự 7A. Tính được $S_{ABC} = 150cm^2$.

9. a) AH = 3,6cm b) BH = 4,8cm, CH = 2,7cm.

10. Sử dụng hệ thức về cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông, tính được BH =4,5cm, CH = 8cm.

11. Tương tự 10. Độ dài đường cao 6,72 (đvđd).

Diện tích hai tam giác vuông tạo thành là : 6,5856 và 77,4144(đv dt)

12. Tương tự 10. Tìm được $HB = \frac{75}{7}cm,$ HC = 21cm.

13. Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông BDC cùng chú ý độ dài đường cao hạ từ B xuống CD bằng AD, ta tính được : AB = 9cm, BD =15cm, hoặc AB = 16cm, BC = 15cm, BD = 20cm.

14. a) BD = 17cm. b) $AH = \frac{120}{17}cm$ c) Tương tự 5A.

15. a) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD, tính được BD = 25cm, OB = 9cm, OD = 16cm.

b) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông DAC tính được OA = 12cm, $AC = \frac{100}{3}cm$.

c) Tính được $S = \frac{1250}{3}cm^2$.

16. a) Sử dụng hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu lên cạnh huyền và cạnh huyền trong tam giác vuông HBA và HCA.

b) Tương tự a) và áp dụng hệ thức giữa đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền trong tam giác vuông ABC.

17. a) Chứng minh AH là đường trung bình của tam giác BCD.

b) Sử dụng hệ thức giữa đường cao và các cạnh góc vuông trong tam giác vuông BCD và áp dụng câu a).

BÀI 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho góc nhọn α $(0^0 < \alpha < 90^0)$.

Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} \quad ; \quad \cot\alpha = \frac{AB}{AC}$$

2. Tính chất:

- Với góc nhọn α bất kì, ta luôn có:
  $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$

  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

  $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.
- Khi góc nhọn α tăng từ 0^0 đến 90^0 thì :
  + $\sin\alpha$ tăng và $\tan\alpha$ tăng.

  + $\cos\alpha$ giảm và $\cot\alpha$ giảm.

3. Bảng tỉ số lượng giác cử một số góc đặc biệt

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc.

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức trong phần tóm tắt lí thuyết ở trên.

1A. Cho tam giác ABC vuông tại C có BC = 1,2cm, AC = 0,9cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

1B. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 1,6cm, AC = 1,2cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

2A. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Hãy tính sinB và sinC và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư trong các trường hợp sau:

a) AB = 13cm, BH = 0,5dm.

b) BH = 3cm, CH = 4cm.

2B. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5},\ BC = a\sqrt{3},\ AC = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh tam giác ABC lf tam giác vuông.

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

3A. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 5cm, $\cot B = \frac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC.

3B. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm, $\tan B = \frac{5}{12}$. Hãy tính độ dài đường cao AH và trung tuyến BM của tam giác ABC.

Dạng 2: Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác.

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước1: Đưa các tỉ số lượng giác trong bài toán về cùng loại bằng cách sử dụng tính chất: "Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia".

Bước 2: Với hai góc nhọn α, β , ta có:

- $\sin\alpha < \sin\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
- $\cos\alpha < \cos\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- $\tan\alpha < \tan\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
- $\cot\alpha < \cot\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

4A. Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sin 20^0$ và $\sin 70^0$ b) $\cos 60^0$ và $\cos 70^0$

c) $\tan 73^0 20'$ và $\tan 45^0$ d) $\cot 20^0$ và $\cot 37^0 40'$

4B. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\sin 40^0$ và $\sin 70^0$ b) $\cos 80^0$ và $\cos 50^0$

c) $\sin 25^0$ và $\tan 25^0$ d) $\cos 35^0$ và $\cot 35^0$

5A. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

a) $\tan 42^0$, $\cot 71^0$, $\tan 38^0$, $\cot 69^0 15'$, $\tan 28^0$

b) sin32^0, cos51^0, sin39^0, cos79^013, sin38^0

5B. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn:

a) tan12^0, cot61^0, tan28^0, cot$79^015'$, tan58^0

b) cos67^0, sin56^0, cos$63^041'$, sin74^0, cos85^0.

Dạng 3: Dựng góc nhọn α biết tỉ số lượng giác của nó là $\frac{m}{n}$

Phương pháp giải: Dựng một tam giác vuông có hai cạnh là m và n, trong dó hai cạnh m, n là hai cạnh góc vuông hoặc một cạnh góc vuông và một cạnh huyền rồi vận dụng định nghĩa tỉ số lượng giác để nhận ra góc α.

6A. Dựng góc nhọn α,biết:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$

c) $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ d) $\cot\alpha = \frac{5}{6}$

6B. Dựng góc nhọn α,biết:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

c) $\tan\alpha = 2$ d) $\cot\alpha = \frac{4}{5}$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 60mm, AC = 8cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

8. Tìm $\sin\alpha$, $\cot\alpha$, $\tan\alpha$ biết $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

9. Cho tam giác ABC vuông tại A hãy tính các tỉ số lượng giác của góc Cbiết rằng cosB = 0,6.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 30^0$, BC = 10cm.

a) Tính AB, AC.

b) Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh MN = AB

c) Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết AB = 30cm, $\hat{B} = \alpha$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. Tính cạnh BC và AC.

12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính sinB, sinC, biết:

a) AB = 13, BH = 5 b) BH = 3, CH = 4.

13. Tính giá trị biểu thức:

a) A= $\cos^2 52^0.\sin 45^0+\sin^2 52^0.\cos 45^0$

b) B= $\tan 60^0.\cos^2 47^0 + \sin^2 47^0.\cot 30^0$

14. Tìm $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$. biết $\sin\alpha = \frac{1}{5}$

15. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy tính:

a) A= $\cos^2 20^0+ \cos^2 30^0+ \cos^2 40^0+ \cos^2 50^0+ \cos^2 60^0+ \cos^2 70^0$

b) B= $\sin^2 5^0 +\sin^2 25^0+ \sin^2 45^0+ \sin^2 65^0+ \sin^2 85^0$

c) C= $\tan 1^0. \tan 2^0. \tan 3^0. \tan 4^0... \tan 88^0. \tan 89^0$.

16*. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, $\hat{C} = \alpha < 45^0$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, MA = MB = MC = α. Chứng minh:

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

b) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

c) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

BÀI 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN.

1A. Sử dụng các tỉ số lượng giác, tính được :

$$\sin B = \frac{3}{5}; \cos B = \frac{4}{5}; \tan B = \frac{3}{4}; \cot B = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}; \cos A = \frac{3}{5}, \tan A = \frac{4}{3}; \cot A = \frac{3}{4}$$

1B. Tương tự 1A.

2A. a) Áp dụng các tỉ số lượng giác cho tam giác vuông ABH để tính sinB, rồi từ đó suy ra sinC.

b) Áp dụng hệ thức lượng về cạnh góc vuông và hình chiếu lên cạnh huyền trong tam giác vuông ABC để tính AB. Sau đó làm tương tự câu a).

2B. HS tự làm.
3A. Áp dụng tỉ số cotB trong tam giác vuông ABC và định lí Pytago chúng ta tính được AC = 8cm, $BC = \sqrt{89}$cm.
3B. Áp dụng tỉ số tanB trong tam giác vuông HAB và các hệ thức lượng trong tam giác vuông, chúng ta tính được $AC = \frac{30}{13}$cm, $BM = \frac{\sqrt{601}}{4}$cm.
4A. Sử dụng bước 2 trong phần phương pháp giải dạng 2, Ta có:
a) $\sin 20^0 < \sin 70^0$ b) $\cos 60^0 > \cos 70^0$

c) $\tan 73^0 20' > \tan 45^0$ d) $\cot 20^0 > \cot 37^0 4'$.

4B. a) Tương tự 4A.a b) Tương tự 4A.b
c) Chú ý các tỉ số lượng giác sin và cos có giá trị trong khoảng (0;1)
d) Tương tự c)
5A. Sử dụng 2 bước trong phần phương pháp giải dạng 2, Ta có:
$\text{Cot}71^0$ $(=\tan 19^0) < \cot 69^0 15' (=\tan 20^0 45') < \tan 28^0 < \tan 38^0 < \tan 42^0$
b) Tương tự câu a) ta có :
$\cos 79^0 13' = \sin 10^0 47' < \sin 32^0 < \sin 38^0 < \cos 51^0 = \sin 39^0$
5B. Tương tự 5A
6A. Dựng một tam giác vuông ta có:
a) Độ dài cạnh góc vuông là 3, cạnh huyền là 5, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc α.
b) Độ dài cạnh góc vuông là 4, cạnh huyền là 7,góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là góc α.
c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 3 là góc α.
d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 5 và 6, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 6 là góc α.
6B. Tương tự 6A. HS tự làm.
7. HS tự làm.
8. Gợi ý: Sử dụng công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
9. Tương tự 8.
10. a) HS tự làm.
b) Chú ý hai đường phân giác trong và ngoài tại một đỉnh vuông góc nhau.
c) Chú ý BM là phân giác góc ABC. Từ đó tính được số đo các góc của tam giác MAB và suy ra ĐPCM.
Chú ý Hai tam giác MAB và ABC đều là các tam giác nửa đều.
Từ đó tính được tỉ số đồng dạng là 1/2.
11. HS tự làm
12. a) Tương tự 3A b) Tương tự 3B
13. Chú ý $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, và hai góc phụ nhau tihf có sin , cos bằng nhau và tan, cot bằng nhau.
14. Tương tự 8.
15. Tương tự 5A và 5B.

16. Góc $2\alpha = \widehat{AMH}$

a) Ta có $\sin 2\alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{BC} = 2.\frac{AB.AC}{BC^2} = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

b) $1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} = \frac{2HC}{BC} = 2.\frac{AC^2}{BC^2} = 2\cos^2\alpha$

$$1 - \cos 2\alpha = 1 - \frac{HM}{AM} = \frac{HB}{AM} = \frac{2HB}{BC} = 2.\frac{AB^2}{BC^2} = 2\sin^2\alpha$$

BÀI 3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, AB = c. Ta có:

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a.\sin B \text{ và } a = \frac{b}{\sin b}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a.\cos B \text{ và } a = \frac{c}{\cos B}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c.\tan B \text{ và } c = \frac{b}{\tan B}$$

$$\cot B = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b.\cot B \text{ và } b = \frac{c}{\cot B}$$

•Trong một tam giác vuông:

Cạnh góc vuông = (cạnh huyền) x (sin góc đối)

= (cạnh huyền) x (cosin góc kề).

Cạnh góc vuông = (cạnh góc vuông còn lại) x (tan góc đôi)

= (cạnh góc vuông còn lại) x (cot góc kề).

•*Giải tam giác* là tính độ dài các cạnh và số đo các góc dựa vào dữ kiện cho trước của bài toán.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Phương pháp giải: Để giải tam giác vuông, ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc của một tam giác vuông và sử dụng máy tính cầm tay hoặc bảng lượng giác để tính các yếu tố còn lại.

Chú ý: Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:

- Giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn;
- Giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh.

1A. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *BC = a, AC = b, AB = c*. Giải tam giác *ABC*, biết:

a) b = 10 cm, $\widehat{C} = 30°$; b) a = 20cm , $\widehat{B} = 35°$;

c) *a = 15cm, b = 10cm;* d) b = 12cm, *c = 7cm.*

1B. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *BC = a, AC = b, AB = c*.

Giải tam giác *ABC,* biết rằng:

a) $c = 3{,}8\ cm$, $\hat{B} = 51°$; b) $a = 11cm$, $\hat{C} = 60°$.

Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp giải: Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

2A. Cho tam giác *ABC* có $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38°$ và $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi *N* là chân đường vuông góc hạ từ A xuông cạnh BC. Hãy tính:

a) Độ dài đoạn thẳng *AN;*

b) Độ dài đoạn thang *AC.*

2B. Cho tam giác *ABC,* có $BC = 6\ cm$, $\hat{B} = 60°$ và $\hat{C} = 40°$ Hãy tính:

a) Chiều cao *CH* và cạnh *AC.*

b)Diện tích tam giác *ABC.*

3A. Cho tam giác *ABC có* $\widehat{B} = 60°$, $\hat{C} = 50°$ và *AC* =3,5cm. Tính diện tích tam giác *ABC* (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

3B. Tứ giác *ABCD* có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết AC=*4cm,* $BD = 5cm$, $\widehat{AOB} = 60°$. Tính diện tích tứ giác *ABCD.*

Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế

Phương pháp giải: Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết tình huống trong thực tế.

4A. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài *7,5 m.* Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42°. Tính chiều cao của cột đèn.

4B. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là 2,1 *cm.* Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Dạng 4. Toán tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng linh hoạt một số hệ thức giữa cạnh và góc trong một tam giác vuông để giải toán.

5A. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A,* có *AC > AB* và đường cao AH. Gọi D, *E* lần lượt là hình chiếu của H trên *AB, AC.*

a) Chứng minh *AD.AB = AE.AC và* tam giác *ABC đồng dạng* với tam giác *AED.*

b) Cho biết $BH = 2$ cm, $HC = 4{,}5$ cm:

i) Tính độ dài đoạn thẳng *DE;*

ii) Tính số đo góc ABC (làm tròn đến độ);

iii) Tính diện tích tam giác ADE .

5B. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD.

a) Chứng minh tứ giác $EFCG$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $\widehat{BEG} = 90°$.

c) Cho biết $BH = 4$ cm, $\widehat{BAC} = 30°$. Tính S_{ABCD} và S_{EFCG}.

III. BÀI TẬP VỂ NHÀ

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 5{,}4$ cm, $\widehat{C} = 30°$;

b) $c = 10$ cm, $\widehat{C} = 45°$.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 15$ cm, $b = 10$ cm; b) $b = 12$ cm, $c = 7$ cm.

8. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 50°$ và $AC = 35$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

9. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°, \widehat{C} = 30°$, $AB = 4cm$ và $AD = 3cm$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao là AH, $HB = 9cm$, $HC = 16$ cm.

a) Tính AB, AC, AH.

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Tứ giác $ADHE$ là hình gì?

c) Tính chu vi và diện tích của tứ giác $ADHE$.

d) Tính chu vi và diện tích tứ giác $BDEC$.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A Biết $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

a) Giải tam giác vuông ABC (số đo góc làm tròn đến độ).

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, BD.

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BC và BD. Chứng minh hai tam giác BEF và BDC đồng dạng.

12. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 21$ cm, $\widehat{C} = 40°$. Tính độ dài đường phân giác BD của $\widehat{ABC}$, với D nằm trên cạnh AC.

13. Một cột đèn điện *AB* cao 6 *m* có bóng in trên mặt đất là *AC* dài 3,5 *m*. Hãy tính $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất.

14. Chứng minh:

a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy;

b) Diện tích của tứ giác bất kỳ bằng nửa tích của hai đường chéo nhân với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.

BÀI 3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1A. a) Sử dụng tỉ số cosC và sinC, tính được

$$a = \frac{20\sqrt{3}}{3}\text{ cm},\ c = \frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm và } \hat{B} = 60^0$$

b) Sử dụng tỉ số sinB và cosB, tính được:

$$b = 20.\sin 35^0 \approx 11,47\text{cm},\quad c = 20.\cos 35^0 \approx 16,38\text{cm}$$

c) Sử dụng định lý Pytago và tỉ số sinB, tính được:

$$c = 5\sqrt{5}\text{ cm},\ \sin B = \frac{10}{15} \Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^0,\ \hat{C} \approx 48,2^0$$

d) Tương tự c) ta có

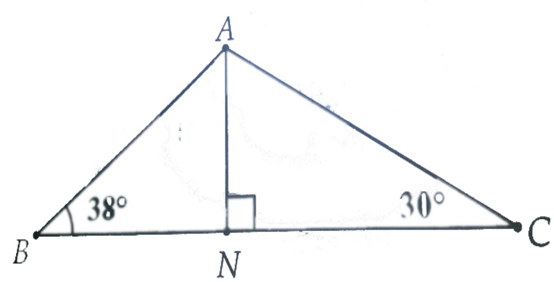
$$a = \sqrt{193}\text{ cm},\ \tan B = \frac{12}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^0,\ \hat{C} = 30.3^0$$

1B. tương tự 1A

2A. a) Cách 1. Sử dụng các tỉ số lượng giác trong tam giác vuông NAB và NAC chúng ta có BN.tanB = NC.tanC , Chú ý BN + NC = BC chúng ta tính được

$BN \approx 4,67\text{cm}; \Rightarrow AN \approx 3,65\text{cm};$

Cách 2. Gợi ý: Kẻ CH vuông góc với AB tại H.



b) Xét ΔANC vuông có: $AC = \dfrac{AN}{\sin C} \Rightarrow AC \approx 7,3\text{cm}$

2B. a) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông HCB chúng ta có

$CH = 3\sqrt{3}\text{ cm}\ ,\ \dfrac{AC}{\sin C} \approx 5,28\text{cm}$

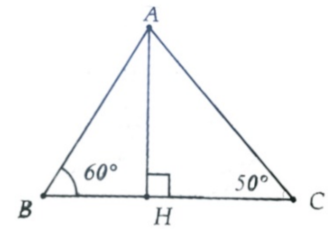
b) Tương tự, cũng áp dụng Pytago hoặc hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, tính được:

$AH, BH \Rightarrow AB = 3{,}93cm.$ Ta có $S = \frac{1}{2}3\sqrt{3}.3{,}93 \approx 10{,}21cm^2$

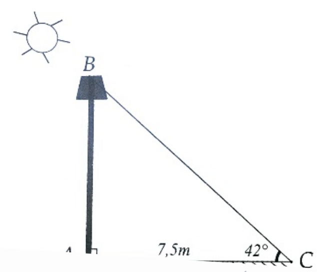
3A. Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong ΔAHC vuông tại H, chúng ta tính được $AH \approx 2{,}68cm$ và $HC \approx 2{,}25cm$

Tương tự trong tam giác vuông HAB, tính được

$BH \approx 1{,}34cm \Rightarrow BC \approx 3{,}59cm,\ \ S_{ABC} \approx 4{,}81cm^2$



3B. Gợi ý: Kẻ AH và CK vuông góc với BD

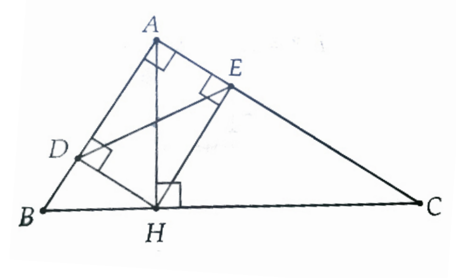


4A. a) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao của cột đèn là AB, bóng của cột đèn trên mặt đất là AC.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong ΔABC

Vuông tại A, ta tính được $AB \approx 6{,}75m$

4B. Tương tự 4A. Độ dài cầu trượt $= \frac{2{,}1}{\sin 28^0} \approx 4{,}5m$



5A. a) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong các tam giác vuông

ΔAHC và ΔAHB ta có:

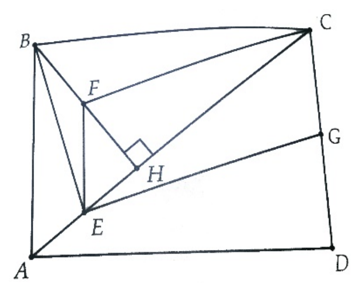
$AE.AC = AH^2 = AD.AB \Rightarrow \Delta ABC\ \omega\ \Delta AED$ (c.g.c)

b) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ΔABC tính được

AH = 3cm $\Rightarrow$ DE = 3cm

Trong ΔAHB vuông ta có:

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 56^0,\ S_{ADE} = \frac{27}{13}cm^2$$



5B. a) Chú ý EF là đường trung bình trong tam giác HAB.

b) Chứng minh F là trực tâm tam giác BEC và sử dụng a)

c) Sử dụng tỉ số sinA trong tam giác vuông HAB và tỉ số tanA trong tam giác vuông BAC để t
ính AB, CB và AC, EC

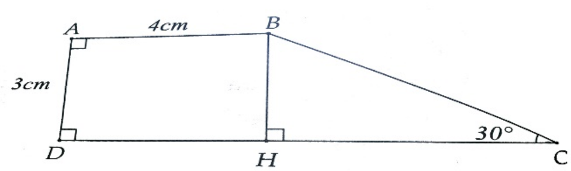
6. Tương tự 1A và 1B

7. Tương tự 1A và 1B

8. Tương tự 3A . ta có $S_{ABC} \approx 509{,}08cm^2$

9. Kẻ $BH \perp DC$ tại H.

Chú ý diện tích ABCD bằng tổng diện tích của ABHD và BHC.



10. Tương tự 5A

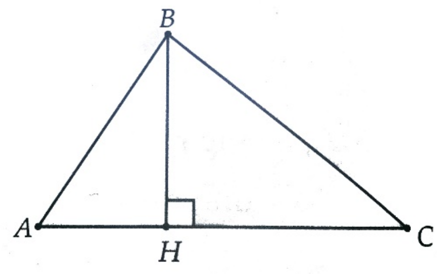
11. a) HS tự làm b) HS tự làm

c) Tương tự 5A. Ta có $\Delta BEF\ \omega\ \Delta BDC$ (c.g.c)

12. $\widehat{ABD}=25^0$. Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABD ta có:

$$BD=\frac{21}{\cos 25^0}\approx 21,19cm$$

13. Tương tự 4A.

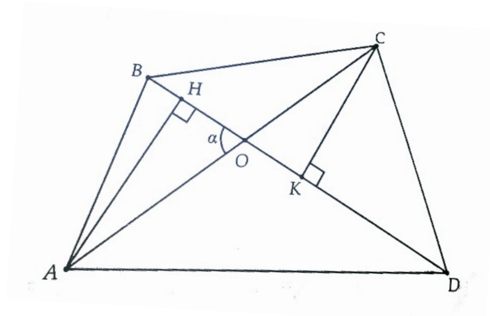


14. a) Giả sử tam giác ABC có $\widehat{A}<90^0$,

kẻ đường cáo BH. Ta có BH=AB.sin$\widehat{A}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BH=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}$$

b) Giả sử tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O



có $\widehat{AOB}=\alpha<90^0$, Kẻ $AH\perp BD$ tại H và $CK\perp BD$ tại K

ta có : AH=OA.sinα

$$\Rightarrow S_{ABD}=\frac{1}{2}BD.AH=\frac{1}{2}BD.OA.\sin\alpha$$

Tương tự:

$$S_{CBD}=\frac{1}{2}BD.CK=\frac{1}{2}BD.OC.\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{CBD}=\frac{1}{2}BD.OA.\sin\alpha+\frac{1}{2}BD.OC.\sin\alpha=\frac{1}{2}BD.AC.\sin\alpha$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 3.

II. BÀI TẬP

1A. Cho tam ABC vuông tại A, đường cao AH. Trong các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH, HB, HC, hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết:

a) $AB = 6$ *cm*, $AC = 9$ *cm*; b) $AB = 15$ *cm*, $HB = 9$ *cm*.

1B. Cho tam giác ABC có đường cao CH, $BC = 12$ *cm*, $\widehat{B} = 60°$ và $\widehat{C} = 40°$. Tính:

a) Độ dài các đoạn thẳng CH và AC;

b) Diện tích tam giác ABC.

2A. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và $AH = 12$ *cm*, $BC = 25$ *cm*.

a) Tìm độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AB và AC.

b) Vẽ trung tuyến AM. Tìm số đo của $\widehat{AMH}$.

c) Tính diện tích tam giác AHM.

2B. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH, $AB = 3cm$, $AC = 4$ *cm*.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH.

b) Tính số đo $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

c) Đường phân giác trong $\widehat{A}$ cắt cạnh BC tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng BE, CE và AE.

3A. Cho tam giác nhọn ABC *có* đường cao AH. Từ H kẻ HF vuông góc với AB (F thuộc AB) và kẻ HE vuông góc với AC (E thuộc AC).

a) Chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

b) Đường thẳng EF cắt BC tại M. Chứng minh $ME.MF = MBMC$.

3B. Hình thang $MNEF$ vuông tại M, F có EF là đáy lớn. Hai đường chéo ME và NF vuông góc với nhau tại O.

a) Cho biết MN = 9 *cm* và MF = 12 *cm*. Hãy:

i) Giải tam giác MNF;

ii) Tính độ dài các đoạn thẳng MO, FO;

iii) Kẻ NH vuông góc với EF tại H. Tính diện tích tam giác FNE. Từ đó tính diện tích tam giác FOH.

b) Chứng minh $MF^2 = MN.FE$.

4A. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn:

a) $\sin 24°$, $\cos35°$, $\sin 54°$, $\cos70°$, $\sin 78°$;

b) $\cot24°$, $\tan l6°$, $\cot57°67'$, $\cot30°$, $\tan80°$.

4B. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ *số* lượng giác sau theo thứ tự tăng dần:

a) $\sin40°$, $\cos28°$, $\sin65°$, $\cos88°$, $\cos20°$;

b) $\tan32°48'$, $\cot28°36'$, $\tan56°32'$, $\cot67°18'$.

5A. Cho $0 < x < 90°$. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x+\cos^4 x = l-2\sin^2 x\cos^2 x$;

b) $\sin^6 x+\cos^6 x = l-3\sin^2 x\cos^2 x$.

5B. Cho $0° < x < 90°$. Chứng minh:

a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}$

III. BÀI TẬP VỂ NHÀ

6. Cho tam giác *DEF* biết *DE* = 6 *cm*, *DF* = 8 *cm* và *EF* = 10 cm.

a) Chứng minh *DEF* là tam giác vuông.

b) Vẽ đường cao *DK*. Hãy tính *DK, FK.*

c) Giải tam giác vuông *EDK.*

d) Vẽ phân giác trong EM của *DEF.* Tính các độ dài các đoạn thẳng MD, *MF, ME.*

e) Tính sinE trong các tam giác vuông *DFK* và *DEF.*

f) Từ đó suy ra *ED.DF* = *DK.EF.*

7. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A.*

a) Biết $\widehat{B} = 60°$ và *BC* = 6 *cm.*

i) Tính độ dài các cạnh *AB, AC.*

ii) Trên tia đối của tia *BA* lấy điểm *D* sao cho *BD* = *BC.*

Chứng minh: $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$

b) Đường thẳng song với phân giác $\widehat{CBD}$ kẻ từ *A* cắt *CD* tại *H.*

Chứng minh: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AD^2}$

8. Cho hình vuông *ABCD* và điểm *E* tùy ý trên cạnh *BC.* Tia *Ax* vuông góc với *AE* tại *A* cắt *CD* kéo dài tại *F.* Kẻ trung tuyên *AI* của tam giác *AEF* và kéo dài cắt cạnh *CD* tại *K.*

a) Chứng minh $AE = AF$.

b) Chứng minh các tam giác AKF, CAF đồng dạng và $AF^2=KF.CF$;

c) Cho $AB = 4$ cm, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tính diện tích tam giác AEF.

d) Khi E di động trên cạnh BC, tia AE cắt CD tại J. Chứng minh biểu thức $\frac{AE.AJ}{FJ}$ có giá trị không phụ thuộc vị trí của E.

9. Cho $\widehat{ABC} = 60°$ và $\Delta\ ABC$ tam giác nhọn.

a) Tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, biêt $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

b) Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

c) Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$.

d) Cho $\cot\alpha = 3$. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

10. a) Tính giá trị biểu thức:

$A = \cos^2 20° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 70°$.

b) Rút gọn biểu thức:

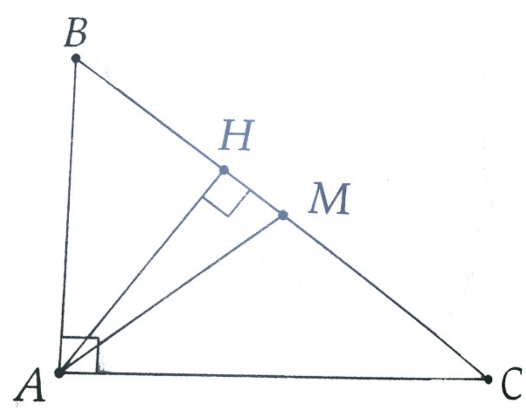
$B = \sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a.\cos^2 a$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1A. a) Tìm được

$$BC = 3\sqrt{13}\text{cm},\ \ AH = \frac{18\sqrt{13}}{13}\text{cm},\ BH=\frac{12\sqrt{13}}{13}\text{cm}$$

và $CH=\frac{27\sqrt{13}}{13}$cm



b) Tìm được BC=25cm, AC=20cm, HC=16cm và AH=12cm

1B. a) Tìm được CH=$6\sqrt{3}$ cm,

$$AC = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 80^0} \approx 10,55\text{cm}$$

b) Ta có

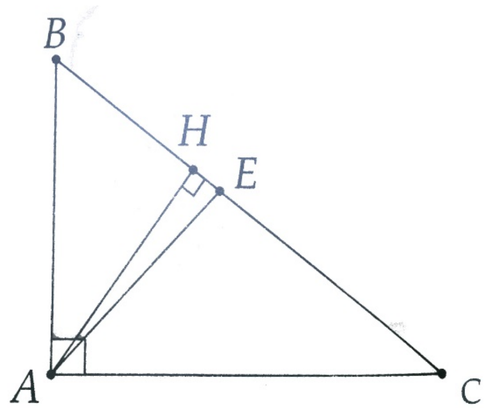
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.6\sqrt{3}.(6+1,83) \Rightarrow S_{ABC} \approx 40,69\text{cm}^2$$

2A. a) Tìm được BH=9cm, CH=16cm, AB=15cm, và AC=20cm.

b) Tìm được $\widehat{AMH} \approx 73,74^0$

c) Tìm được $S_{AHM} = 21cm^2$

2B. a) Tính được BC =5cm, $AH = \dfrac{12}{5}cm$



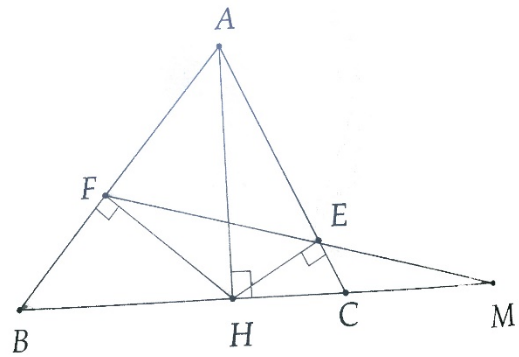
b) Tìm được $\hat{B} \approx 53,13^0, \hat{C} \approx 36,87^0$

c) Tính được

$BE = \dfrac{15}{7}cm,\ CE = \dfrac{20}{7}cm$ và

$AE = \dfrac{12\sqrt{2}}{7}cm$

3A. a) Ta có



$\Delta AEF\ \omega\ \Delta MCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

b) Ta có

$\Delta MFB\ \omega\ \Delta MCE$ (g.g)

$\Rightarrow ME.MF = MB.MC$

3B. a) i) Tính được NF=15cm

$\widehat{MFN} \approx 37^0$ và $\widehat{MNF} = 53^0$

ii) Tìm được $MO = \dfrac{36}{5}cm,\ FO = \dfrac{48}{5}cm$

iii) Tìm được $S_{FNE} = 96cm^2$

Cách 1: Ta có $\dfrac{S_{FOH}}{S_{FNE}} = \dfrac{FO}{FN}.\dfrac{FH}{FE} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow S_{\Delta FOH} = 34,56cm^2$

Cách 2: Gợi ý. Kẻ đường cao OK của $\Delta FOH \Rightarrow\ S_{\Delta FOH} = 34,56cm^2$

b) Ta có $\Delta MFN\ \omega\ \Delta FEM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MF}{FE} = \dfrac{MN}{FM} \Leftrightarrow MF^2 = MN.FE$

4A. a) Ta có $\cos 70^0 (= \sin 20^0) < \sin 24^0 < \sin 54^0 < \cos 35^0 (= \sin 55^0) < \sin 78^0$

b) Ta có $\tan 16^0 (= \cot 74^0) < 57^0 67' < \cot 30^0 < \cot 24^0 < \tan 80^0 (= \cot 10^0)$

4B. a) Ta có $\cos 88^0 < \sin 40^0 (= \cos 50^0) < \cos 28^0 < \sin 65^0 (= \cos 25^0) < \cos 20^0$

b) Ta có: $\cos 67^0 18' (= \tan 22^0 42') < \tan 32^0 48' < \tan 56^0 32' < \cot 28^0 36' (= \tan 61^0 24')$

5A. a) Ta có

$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ 5B. Ta có

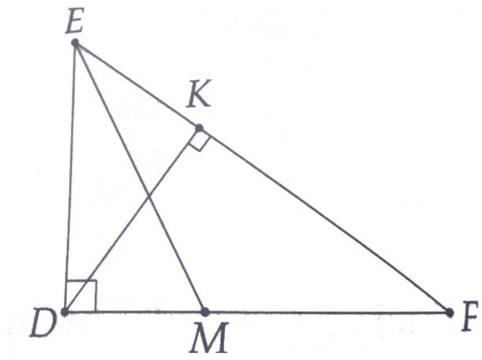
$\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (luôn đúng)

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có $VT=\dfrac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{2+2\cos x}{\sin x(1+\cos x)}=VP\Rightarrow$ ĐPCM

6. a) Ta có ΔDEF vuông vì

$DE^2+DF^2=FE^2$



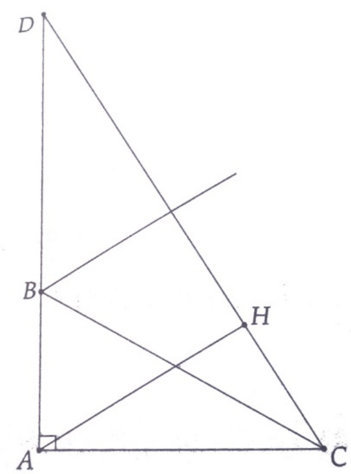
b) Tìm được

$DK=\dfrac{24}{5}$cm và $HK=\dfrac{32}{5}$cm

$\widehat{KDE}\approx 36^0 52'$ và $\widehat{KED}=35^0 8'$

d) Tìm được DM=3cm, FM=5cm và EM=$3\sqrt{5}$ cm

e) ta có



$\sin\widehat{DFK}=\dfrac{DK}{DF},\ \sin\widehat{DFE}=\dfrac{DE}{EF}$

$\Rightarrow\dfrac{DK}{DF}=\dfrac{DE}{EF}\Rightarrow DF.DE=DK.EF$

7. a) i) Tìm được AB=3cm và AC=$6\sqrt{3}$ cm

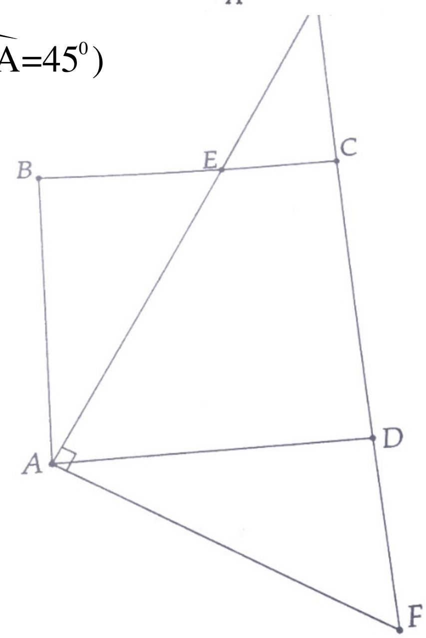
ii) Ta có $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AB}{BC}=\cos\widehat{ABC}=\cos 60^0=\cos\widehat{ACD}=\dfrac{AC}{CD}$

b) Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AD^2}$

8. a) Ta có $\Delta ABE=\Delta ADF$ (g.c.g) $\Rightarrow$ AE=AF

b) Ta có $\Delta AKF\ \omega\ \Delta CAF$ (vì $\hat{F}$ chung và $\widehat{FAK}=\widehat{FCA}=45^0$)

$\Rightarrow\dfrac{AF}{KF}=\dfrac{CF}{AF}\Rightarrow AF^2=KF.CF$



c) Tính được $S_{AEF}=\dfrac{93}{2}cm^2$

d) Ta có: AE.AJ=AF.AJ=AD.FJ

$\Rightarrow\dfrac{AE.AJ}{FJ}=AD$ không đổi.

9. a) Tìm được $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

$\cot\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{24}},\tan\alpha=\sqrt{24}$

b) Tìm được $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3},\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm được $\cos\alpha=\dfrac{1}{2},\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},\sin\alpha=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

d) Tìm được $\tan\alpha = \frac{1}{3}, \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

10. a) Tính được A=2. b) Tính được B=1.

ĐỂ KIỂM TRA CHƯƠNG I

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút

ĐỂ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cho tam giác MNP *vuông tại* M có MH *là đường cao, cạnh* $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}, \hat{P} = 60^0$ .Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $MP = \frac{\sqrt{3}}{4}$; C. $\widehat{MNP} = 60°$; D. $\widehat{MNH} = 30°$.

Câu 2. Cho tam giác *MNP* vuông tại *M,* đường cao *MH.* Biết *NH* = 5 *cm, HP* = 9 *cm.* Độ dài *MH* bằng:

A. $3\sqrt{5}$ B. 7 C. 4,5 D. 4

Câu 3. Cho $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ với α là góc nhọn, khi đó $\sin\alpha$ bằng:

A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 4. Giá trị của $P = \cos^2 20° + \cos^2 40^0 + \cos^2 50^0 + \cos^2 70°$ bằng:

A. 1 B. 2 C. 3 D.0.

Câu 5. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A,* đường cao *AH.* Hệ thức nào

A. $\cos C = \frac{AB}{AC}$ B. $\tan B = \frac{AB}{AC}$

C. $\cos C = \frac{HC}{HA}$ D. $\cos B = \frac{AC}{AB}$

Câu 6. Trong tam giác *ABC* vuông tại *A* có *AC* =3; *AB* =4. Khi đó cos *B* bằng:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

Câu 7. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A, BC = 2AC*. So sánh sin B; cos *B,* khẳng định nào sau đây đúng?

A . sin *B* < cos *B* B. sin *B* > cos *B;*

C. sin *B* ≥ cos *B;* D. sin *B* = cos *B* .

Câu 8. Một người muốn chèo thuyền từ bờ sông *A* sang bờ sông *B* theo một đường thẳng dài *50m,* nhưng do dòng nước chảy mạnh nên người đó đã bơi lệch 45° so với phương ban đầu. Hỏi người đó bơi sang bờ *B,* cách vị trí dự định bao xa?

A. 20m B. 30 *m* C. 40m D. 50m

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. (2,0 đ)

a) Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

cot 24°, tan 16°, cot 57°, cot 30°, tan 80°.

b) Tính $\cos\alpha$,$\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ biết $\sin\alpha = 1/5$.

Bài 2. (4,0 *điểm)* Cho hình thang *ABCD* biết $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{D} = 90°$ và *AB* < *DC.* Hai đường chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau tại O.

a) Cho *AB* = 9 *cm* và *AD* = 12 *cm*. Hãy:

i) Giải tam giác *ADB;*

ii) Tính độ dài các đoạn thẳng AO, *DO* và AC;

iii) Kẻ *BH* vuông góc với DC tại *H*. Tính diện tích tam giác *DOH.*

b) Chứng minh $BH^2 = AB.CD$.

Chú ý: Số đo góc làm tròn đến độ, độ dài đoạn thẳng làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Tam giác *MNP* vuông tại *M* thì sinN bằng:

A. $\frac{MP}{NP}$ B. $\frac{MP}{MN}$ C. $\frac{MN}{NP}$ D. $\frac{NP}{MN}$

Câu 2. Một cột đèn có bóng dài trên mặt đất là 7,5 *m*. Các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất 1 góc xấp xỉ bằng 42°. Chiều cao của cột đèn (làm tròn đến hàng phần mười) là:

A. *7 m;* B. 6 *m;* C. 6,7 *m;* D. 6,8 *m*.

Câu 3. Với α là góc nhọn, trong các câu sau câu nào sai?

A. $0 < \cos\alpha <$ B. $\cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha$

C. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ D. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Câu 4. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* và *AH* là đường cao.

Cho biết *AB* = 9, *BC* = 15. Khi đó độ dài *AH* bằng:

A. 6,5; B. 7,2; C. 7,5; D. 7,7

Câu 5. Cho cos*a* = 2/5 với 0° < *a* < 90°. Khi đó sin *a* bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\dfrac{4}{3}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

Câu 6. Cho sin*a* = 3/5 với 0° < *a* < 90°. Khi đó tan*a* bằng:

A. $\dfrac{4}{5}$ B. $\dfrac{3}{5}$ C. $\dfrac{4}{3}$ D. $\dfrac{3}{4}$

Câu 7. Biểu thức $\cos^4 a + \cos^2 a.\sin^2 a + \sin^2 a$ bằng :

A. $\cos^2 a$ B. $\sin^2 a$ C. 1 D. 2

Câu 8. Một chiếc thang dài 3,5 *m* đặt dựa vào tường, góc "an toàn" giữa chân thang và mặt đất để thang không đổ khi người trèo lên là 60°. Khoảng cách "an toàn" từ chân tường đến chân thang là:

A. 1 m; B.0,5 m; C. 2 *m;* D 1,75 *m.*

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. (1,5 *điểm)* Dựng góc nhọn α , biết $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính độ lớn của góc α . Bài 2. (3,0 điểm) Cho tam giác *KQP có KQ = 5 cm,KP = 12 cm và QP =* 13 *cm.* Đường cao *KH (H* thuộc QP).

a) Chứng minh tam giác *KQP* vuông.

b) Tính góc Q, góc P và độ dài *KH, PH.*

c) Lấy điểm O bất kì trên cạnh *QP* (O khác P, Q). Gọi hình chiếu cửa O trên *KQ, KP* lần lượt là *A* và *B.* Chứng minh *AB = KO* và hỏi điểm O ở vị trí nào thì *AB* ngắn nhất?

Bài 3. (0,5 *điểm)* Cho tam giác nhọn *ABC,* hai đường cao BD và CE. Chứng minh $S_{ADE} = S_{ABC}.\cos^2 A$.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Câu 1. D	Câu 5. C
Câu 2. A	Câu 6. C
Câu3. B	Câu 7. A
Câu 4. B	Câu 8. D

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. a) Ta có

$\cot 24^0 = \tan 66^0, \cot 57^0 = \tan 33^0$ và $\cot 30^0 = \tan 60^0$

$\Rightarrow \tan 16^0 < \tan 33^0 < \tan 60^0 < \tan 66^0 < \tan 80^0$

$\Rightarrow \tan 16^0 < \cot 57^0 < \cot 30^0 < \cot 24^0 < \tan 80^0$

b) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}, \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sqrt{6}$

Bài 2. a) i) Tính được DB=15cm

$\widehat{ADB} \approx 37^0$ và $\widehat{ABD} \approx 53^0$

ii) Tính được AO=7,2cm,

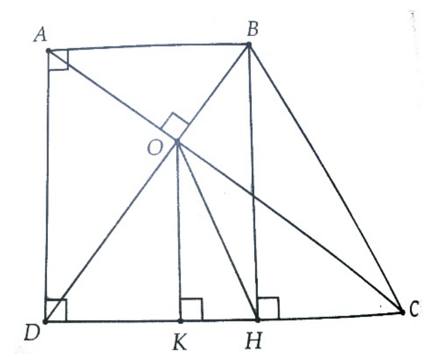
DO=9,6cm và AC=20cm.

iii) Kẻ $OK \perp DC$ tại K

DH=AB=9cm, DC=16cm

DK=5,76cm và OK=7,68cm

Từ đó $S_{DOH} = \dfrac{OK.DH}{2} = \dfrac{7,68.9}{2} = 34,56cm^2$



b) DO ΔBAD đồng dạng với ΔADC (g.g)

$\Rightarrow AD^2 = AB.CD \Rightarrow BH^2 = AB.CD$ (ĐPCM)

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Câu 1. A	Câu 5. A
Câu 2. D	Câu 6. D
Câu3. B	Câu 7. C
Câu 4. B	Câu 8. D

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

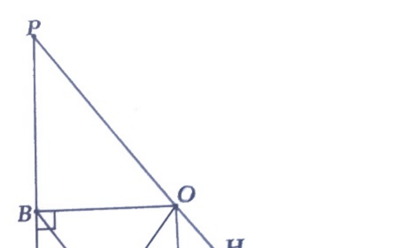
Bài 1. * Dựng góc nhọn α, biết $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

Dựng tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3, một cạnh góc vuông có độ dài bằng 2, khi đó góc kề cạnh góc vuông có độ dài bằng 2 là góc α cần dựng.

* Ta có $\cos\alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48^0 11'$

Bài 2. a) Ta có:

$PK^2 + QK^2 = 169 = PQ^2 \Rightarrow \Delta KQP$



Vuông tại K

b) Ta có:

$$\sin\widehat{PQK}=\frac{PK}{PQ}=\frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \widehat{PQK}\approx 67^0 22'$$

$$\Rightarrow \widehat{KPQ}=90^0-67^0 22'=22^0 38'$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

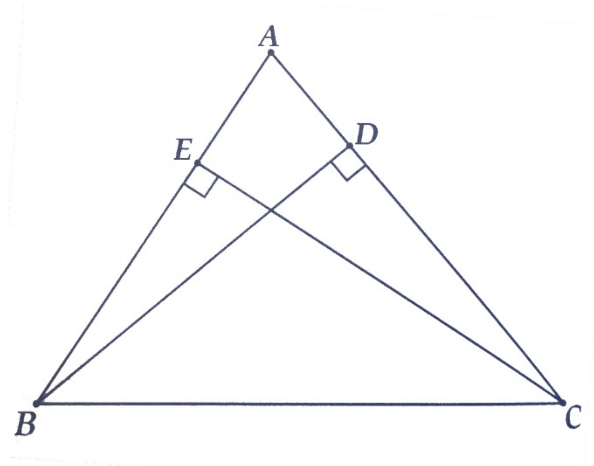
KH.PQ=KP.KQ $\Rightarrow KH=\frac{60}{13}cm$

$$PK^2=PH.PQ\Rightarrow PH=\frac{PK^2}{PQ}=\frac{144}{13}cm$$

c) Tứ giác AKBO có $\widehat{AKB}=\widehat{KAO}=\widehat{KBO}=90^0$ $\Rightarrow$ AKBO Là hình chữ nhật $\Rightarrow AB=KO$

$$\Rightarrow AB=OK\le KH\Rightarrow AB_{min}=KH\Leftrightarrow AB=KO=KH\Leftrightarrow O\equiv H$$

Bài 3. Ta có



$$ABD\sim \Delta ACE\ (g\text{-}g)\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AC}\right)^2$$

Mà trong

$$\Delta ACE\ \text{ có }\ \frac{AE}{AC}=\cos A$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$$

$$\Rightarrow S_{ADE}=S_{ABC}.\cos^2 A$$

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG TRÒN
BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.
TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tròn

Tập hợp các điểm cách điểm *O* cố định một khoảng bằng *R* không đổi (R > 0) là đường tròn tâm *O* có bán kính *R.*

Ký hiệu: (O) hoặc (O; *R).*

2. Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (O; *R*)

Vị trí tương đối	**ức**
m trên đường tròn (O)	)M = K
m trọng đường tròn (O)	OM<R
m ngoài đường tròn (O)	*1>R*

3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)

- Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực của tam giác đó,

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đôi xứng**.**

- Tâm đối xứng là tâm đường tròn;
- Trục đối xứng là bất kì đường kính nào của đường tròn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên một đường tròn

Phương pháp giải: Ta có các cách sau:

Cách 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều một điểm nào đó.

Cách 2. Dùng định lí: "Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông".

1A. Chứng minh các định lý sau:

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền của tam giác đó.

b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

1B. Cho tam giác *ABC* có các đường cao *BD, CE.* Chứng minh bốn điểm *B, E, D, C* cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

2A. Cho tam giác *ABC* có đường cao *AD* và trực tâm *H.* Gọi *I, K* lần lượt là trung điểm của *HA, HB.* Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, AC.* Chứng minh:

a) Bôn điểm *E, F, I, K* cùng thuộc một đường tròn;

b) Điểm *D* cũng thuộc đường tròn đi qua bôn điểm *E, F, I, K.*

2B. Cho tứ giác *ABCD* có hai đường chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau. Gọi M, *N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD, DA.* Chứng minh *M, N, P, Q* cùng nằm trên một đường tròn.

3A. Cho hình thoi *ABCD.* Đường trung trực của cạnh *AB* cắt *BD* tại E và cắt *AC* tại *F.* Chứng minh *E, F* lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABC* và *ABD.*

3B. Cho hình thoi *ABCD* có cạnh *AB cố* định. Gọi *O* là trung điểm của *AB, P* là giao điểm của *CO* và *BD.* Chứng minh *P* chạy trên một đường tròn khi C, *D* thay đổi.

Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Phương pháp giải. Muốn xác định vị trí của điểm *M* đối với đường tròn (O; *R)* ta so sánh khoảng cách *OM* với bán kính *R* theo bảng sau:

Vị trí tương đối	Hệ thức
m trên đường tròn (O)	OM = R
m trong đường tròn (Ọ)	OM<R
m ngoài đường tròn (O)	*OM>R*

4A. Cho tam giác đều *ABC* cạnh bằng *a,* các đường cao là *BM* và *CN.* Gọi *O* là trung điểm cạnh *BC.*

a) Chứng minh *B, c, M, N* cùng thuộc đường tròn tâm O.

b) Gọi G là giao điểm của *BM* và CN. Chứng minh diêm G nằm trong, điểm *A* nằm ngoài đối vói đường tròn đường kính *BC.*

4B. Cho đường tròn (O), đường kính *AD* = *2R.* Vẽ cung tròn tâm *D* bán kính *R,* cung này cắt (O) ở *B* và C.

a) Tứ giác *OBDC* là hình gì? Vì sao?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}$, $\widehat{CBO}$, $\widehat{OBA}$.

c) Chứng minh tam giác *ABC* là tam giác đều.

Dạng 3. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác và số đo các góc liên quan

Phương pháp giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông,

Cách 2. Dùng định lý Pytago trong tam giác vuông.

Cách 3. Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

5A. Cho tam giác *ABC* vuông *ở A* có $AB = 5$ *cm*, $AC = 12$ *cm*. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

5B. Cho tam giác đều *ABC* cạnh bằng 2 *cm*. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

6A. Cho hình chữ nhật *ABCD* có $AB = 9$ *cm*, $BC = 12$ *cm*. Chứng minh bốn điểm *A, B, C, D* cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

6B. Cho góc $\widehat{BAC} = 60°$ và điểm *B* nằm trên tia *Ax* sao cho $AB = 3$ *cm*.

a) Dựng đường tròn (O) đi qua *A* và *B* sao cho tâm *O* nằm trên tia *Ay*.

b) Tính bán kính đường tròn (O).

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, đường cao $AH = 2$ *cm*, $BC = 8$ *cm*. Đường vuông góc với *AC* tại c cắt đường thẳng *AH ở D*.

a) Chứng minh các điểm B, c cùng thuộc đường tròn đường kính *AD*.

b) Tính độ dài đoạn thẳng *AD*.

8. Cho tam giác nhọn *ABC*. Vẽ đường tròn (O) có đường kính *BC*, cắt các cạnh *AB, AC* theo thứ tự *D, E*.

a) Chứng minh $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.

b) Gọi *K* là giao điểm của *BE* và CD. Chứng minh $AK \perp BC$.

9. Cho đường tròn (O) đường kính *AB*. Điểm C di động trên đường tròn, *H* là hình chiếu của C trên *AB*. Trên *OC* lấy *M* sao cho $OM = OH$.

a) Hỏi điểm *M* chạy trên đường nào?

b) Trên tia *BC* lấy điểm *D* sao cho $CD = CB$. Hỏi điểm *D* chạy trên đường nào?

10. Cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, BC*. Gọi *E* là giao điểm *CM* và *DN*.

a) Tính số đo góc *CEN*.

b) Chứng minh *A, D, E, M* cùng thuộc một đường tròn.

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua ba điểm *B, D, E*.

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.

TÍCH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1A. a) Giả sử ΔABC vuông tại A. Gọi O là trung điểm của BC

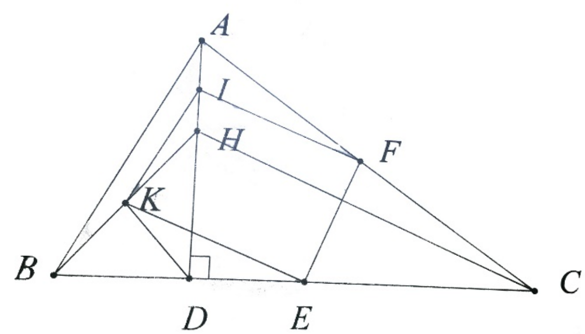
$\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn đi qua A,B,C

b) Ta có $OA = OB = OC \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

1B. Đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC với BC là đường kính. Gọi O là trung điểm của BC.

Chứng minh B,C,D,E nằm trên $\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

2A. a) Chứng minh IFEK là hình bình hành có tâm O. Chứng minh $IK \perp KE \Rightarrow IFEK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ I,F,E,K cùng thuộc (O;OI)



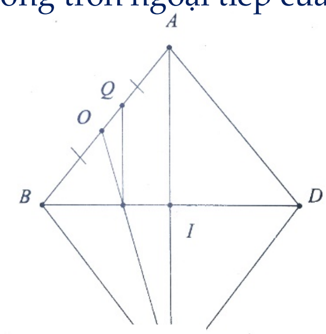
b) Ta có $\widehat{IDE} = 90^0$ $\Rightarrow$ tam giác IDE vuông tại D.

Chứng minh rằng $KD \perp DF \Rightarrow \Delta KDF$ vuông

2B. Ta có MNPQ là hình chữ nhật tâm O $\Rightarrow$ M,N,P,Q cùng thuộc (O;OM)

3A. Tính chất: Trong hình thoi, đường chéo này là trung trực của hai cạnh AB và AC. Nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Tương tự, F là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABD

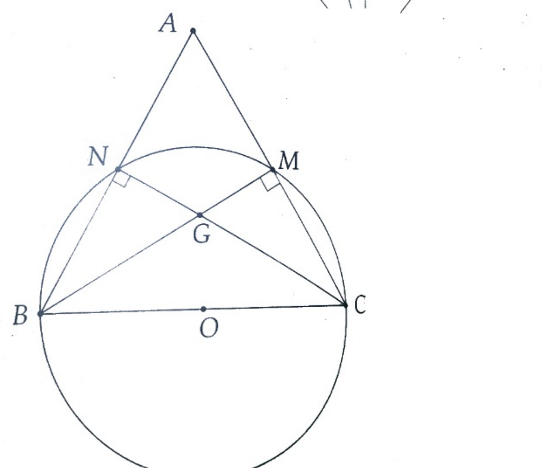
3B. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi. Chứng minh P là trọng tâm của ΔABC



Kẻ $PQ \parallel AI \Rightarrow BQ = \frac{2}{3}AB \Rightarrow Q$

Cố định $\Rightarrow$ P thuộc đường tròn đường kính QB

4A. a) Ta có



$\widehat{BNC} = 90^0 \Rightarrow N \in \left(O;\frac{BC}{2}\right)$

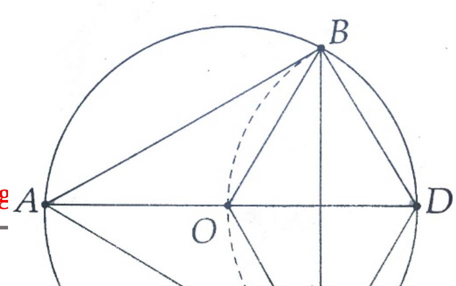
$\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow M \in \left(O;\frac{BC}{2}\right)$

$\Rightarrow B,C,M,N$

Cùng thuộc đường tròn tâm $\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

b) ΔABC đều có G là trực tâm đồng thời là trọng tâm .

ΔAOB vuông tại O có $R = ON = \frac{a}{2}$



Ta có $OA=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}>R$

$\Rightarrow$ A nằm ngoài (O)

Ta có $OG=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{6}<R$

$\Rightarrow$ G nằm ngoài (O)

4B. a) HS Tự chứng minh

b) Tính được $\widehat{CBO}=\widehat{CBD}=\widehat{ABO}=30^0$

Chứng minh ΔABC cân tại A có $\widehat{ABC}=60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều

5A. Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông ABC, ta có BC=13cm $\Rightarrow$ R=6,5cm

5B. Gọi O là giao 3 đường trung trực của ΔABC. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi H là giao điểm của AO và BC. Ta có : $AH=\sqrt{3}$ cm;

$OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm$

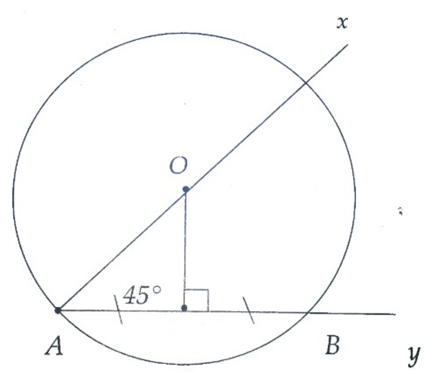
6A. Gọi O là giao điểm của AC và BD, Ta có:

OA=OB=OC=OD $\Rightarrow$ A,B,C,D cùng thuộc (O;R=7,5cm)

6B. a) Dựng đường thẳng d là trung trực của AB, d cắt tia Ay tại O suy ra (O;OA) là đường tròn cần dựng .

HS tự chứng minh

b) Tính được $OA=\frac{3\sqrt{2}}{3}cm$



7. a) Ta có $\widehat{ACD}=90^0 \Rightarrow$ C thuộc Đường tròn đường kính AD.

Chứng minh $\widehat{ABD}=90^0 \Rightarrow$ B thuộc đường tròn đường kính AD $\Rightarrow$ B,C cùng thuộc đường tròn đường kính AD

b) Tính được AD=10cm

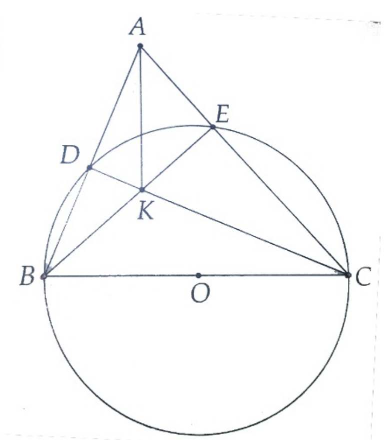
8. a) Có O là trung điểm của BC.

Mà $D\in\left(O;\frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow$ OB=OD=OC

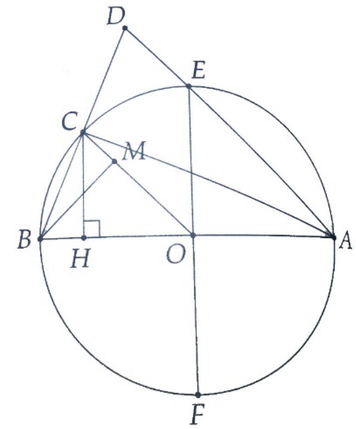
$\Rightarrow \Delta BDC$ vuông tại $D \Rightarrow CD\perp AB$

Tương tự $BE\perp AC$

b) Xét ΔABC có K là trực tâm $\Rightarrow AK\perp BC$



9. a) Gọi EF là đường kính $\left(O;\frac{AB}{2}\right)$ sao cho $EF \perp AB$



Xét trường hợp C chạy trên nửa đường tròn $\widehat{EBF}$

Chứng minh

$\Delta OMB = \Delta OHC$ (c.g.c)

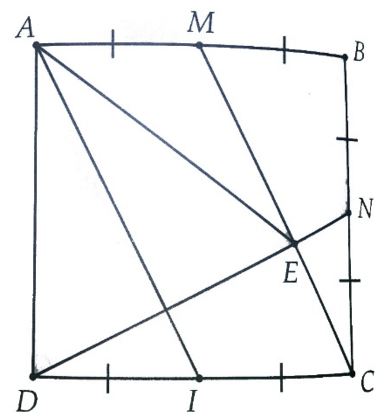
$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OHC} = 90^0$

Vậy M chạy trên đường tròn đường kính OB

Chứng minh tương tự khi C chạy trên nửa đường tròn $\widehat{EAF}$, ta được M chạy trên đường tròn đường kính OA.

b) Chứng minh ΔADB cân tại A

$\Rightarrow$ AD=AB nên D chạy trên (A;AB)



10. a) Chứng minh $\Delta CMB = \Delta DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN}$

Từ đó chứng minh được $\widehat{CEN} = 90^0$

b) Ta có A,D,E,M cùng thuộc được tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm của CD, chứng minh AI song song với MC

$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

$\Rightarrow$ B,E,D cùng thuộc (A;AB)

BÀI 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc vói dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau đây:

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ây.
2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc vói dây ây.
3. Dùng định lý Py tago, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

1A. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M.

Biết $AB = 18$ *cm*, $CD = 14$ *cm*, $MC =4$ cm. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD.

1B. Cho đường tròn tâm O bán kính 3 *cm* và hai dây AB và AC.

Cho biết $AB = 5$ *cm*, $AC = 2cm$, hãy tính khoảng cách từ O đến mỗi dây.

2A. Cho đường tròn (O;R) có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2$ *cm*, $IB = 4$ *cm*. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

2B. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết $CD = 16$ *cm* và MH = 4cm.

3A. Cho đường tròn tâm O, đường kính *AB;* dây *CD* cắt *AB* tại *M.*

Biết $MC = 4$ *cm*, $MD = 12$ *cm* và $\widehat{BMD} = 30°$. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ *O* đến *CD;*

b) Bán kính của (O).

3B. Cho đường tròn (O; 5 *cm*). Dây *AB* và *CD* song song, có độ dài lần lượt là 8 *cm* và 6 *cm*. Tính khoảng cách giữa hai dây.

Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau đây:

- Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

- Dùng phương pháp chứng minh hai tam giác bằng nhau.
- Dùng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, quan hệ cạnh huyền và cạnh góc vuông...

4A. Cho nửa đường tròn (O), đường kính *AB* và một dây cung *CD.* Kẻ *AE* và *BF* vuông góc với *CD* lần lượt tại E và *F.* Chứng minh:

a) $CE = DF$; b) E và F đều ở ngoài (O).

4B. Cho đường tròn (O), đường kính *AB.* Kẻ hai dây *AC* và *BD* song song.

Chứng minh $AC = BD$.

5A. Cho tam giác *ABC* nhọn và có các đường cao *BD, CE.* Chứng minh:

a) Các điểm *B, D, C, E* cùng thuộc một đường tròn;

b) $BC > DE$.

5B. Cho đường tròn (O) có dây cung *AB* và *CD* với $AB > CD$. Giao điểm *K* của các đường thẳng *AB* và *CD* nằm ngoài (O). Vẽ đường tròn (O; OK), đường tròn này cắt *KA* và *KC* lần lượt tại M và *N.* Chứng minh $KM < KN$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11$ *cm*. Điểm *M* thuộc bán kính *AO* và cách *O*

khoảng 7 *cm*. Qua *M* kẻ dây CD có độ dài 18 *cm*. Tính độ dài các đoạn thẳng *MC* và *MD*.

7. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 13$ *cm*, dây CD có độ dài 12 *cm* vuông góc với *AB* tại *H*.

   a) Tính độ dài các đoạn thẳng *HA, HB*.

   b) Gọi *M, N* lần lượt là hình chiếu của *H* trên *AC, BC*. Tính diện tích tứ giác *CMHN*.

8. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24$ *cm*, $AC = 20$ *cm*, góc $\widehat{BAC} < 90°$ và *O* nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi M là trung điểm của *AC*. Khoảng cách từ *M* đến *AB* bằng 8 *cm*.

   a) Chứng minh tam giác *ABC* cân.

   b) Tính bán kính của (O).

9. Cho tam giác *ABC* có trực tâm *H* và nội tiếp đường tròn (O) đường kính *AD*.

   a) Chứng minh *BHCD* là hình bình hành.

   b) Kẻ đường kính *OI* vuông góc *BC* tại *I*. Chứng minh *Ị, H, D* thẳng hàng.

   c) Chứng minh $AH = 2OI$.

10. Cho đường tròn (O) có *AB* là đường kính. Vẽ hai dây *AD* và *BC* song song nhau. Chứng minh:

    a) $AC = BD$; b) *CD* là đường kính của (O).

11. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và dây *CD*. Độ dài dây *CD* không đổi. Chứng minh trung điểm *I* của *CD* thuộc một đường tròn cố định.

12. Cho tam giác *ABC* ($AB < AC$) có hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại trực tâm *H*. Lấy *I* là trung điểm của *BC*.

    a) Gọi *K* là điểm đối xứng của *H* qua *I*. Chứng minh tứ giác *BHCK* là hình bình hành.

    b) Xác định tâm *O* của đường tròn qua các điểm *A, B, K, C*.

    c) Chứng minh *OI* và *AH* song song.

    d) Chứng minh $BE.BA + CD.CA = BC^2$.

13. Cho tam giác *ABC* nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Điểm M di động thuộc cung *BC* không chứa *A*. Gọi *D, E* lần lượt là các điểm đối xứng với *M* qua *AB, AC*. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng *DE* lớn nhất.

14. Cho điểm *A* nằm trên đường tròn (O) có *CB* là đường kính và $AB < AC$. Vẽ dây *AD* vuông góc với *BC* tại *H*. Chứng minh:

a) Tam giác *ABC* vuông tại *A*

b) H là trung điểm *AD, AC = CD* và *BC* là tia phân giác góc *ABD;*

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

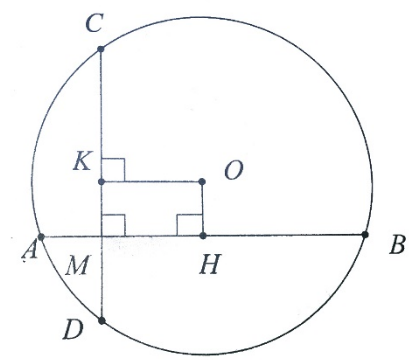
BÀI 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

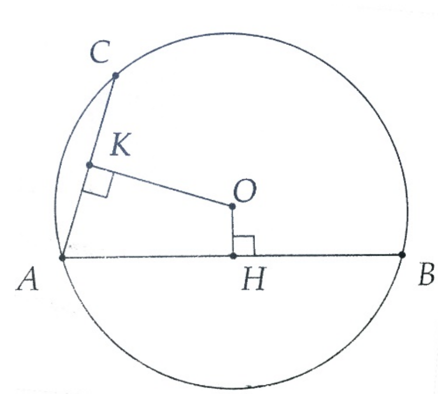
1A. a) gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O trên AB và CD

Tính được OH = MK = 3cm

OD= OB = $3\sqrt{10}$ cm

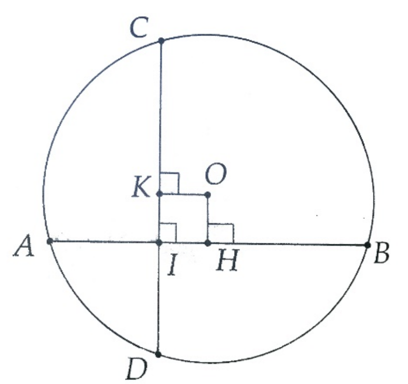
Từ đó tính được OK = $\sqrt{41}$ cm





1B. Gọi OH,OK Lần lượt là khoảng cách từ O đến AB,AC.

Tính được $OH = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$cm và OH = $2\sqrt{2}$ cm



2A. a) Gọi OH,OK là khoảng cách từ O đến mỗi dây.

Ta có: OH = OK = 1cm

b) Tính được R = $\sqrt{10}$ cm

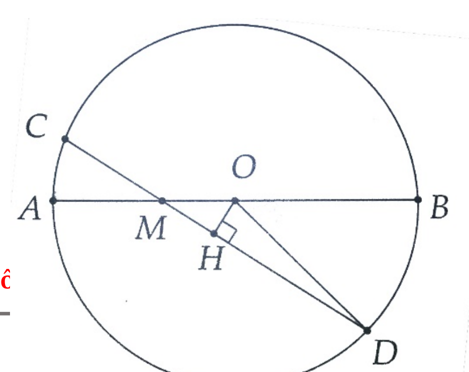
2B. Đặt OH = xcm

Ta có OM = x - 4 cm

Áp dụng định lý Pytago ta tìm được x= 10cm

3A. a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến CD $\Rightarrow$ MH = 4cm

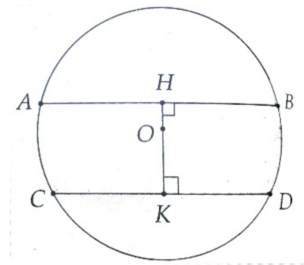
Tính được $OH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$cm



b) Tính được $OD = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}cm$

3B . Gọi HK là đường thẳng qua O và vuông góc với AB và CD, $H \in AB, K \in CD$ Ta có OK=3cm, OK=4cm

$\Rightarrow$ HK=7cm hoặc HK=1cm



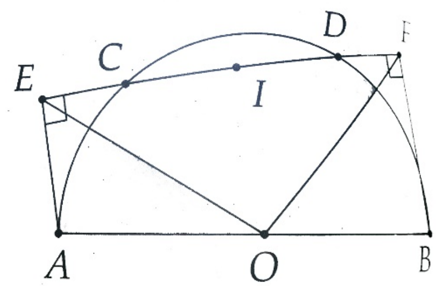
4A. a) Gọi I là Trung điểm CD

$\Rightarrow$ IC=ID

Xét hình thang AEFB , I là trung điểm EF $\Rightarrow$ IE=IF

Từ đó suy ra CE=DF

b) Ta có $\widehat{EAB}$ và $\widehat{FBA}$ bù nhau nên có một góc tù và một góc nhọn



Giả sử $\widehat{EAB} > 90^0 \Rightarrow \Delta EAO$ có OE > AO =R$\Rightarrow$ E ở ngoài đường tròn mà OE=OF nên F cũng ở ngoài đường tròn

4B. Đường thẳng qua O và vuông góc với AC và BD lần lượt tại H và K ($H \in AC, K \in BD$)

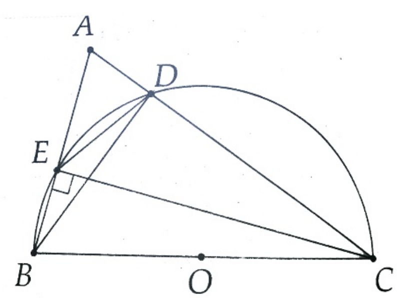
Ta có $\Delta AOH = \Delta BOK (g.c.g) \Rightarrow AK = BK \Rightarrow AC = BD$

5A. a) B,C,D,E cùng thuộc đường tròn đường kính BC

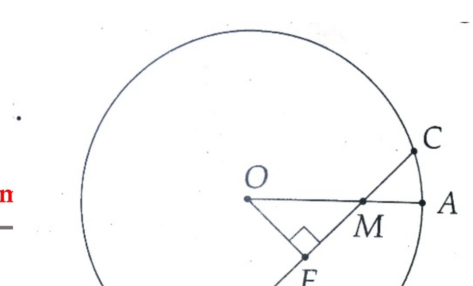
b) BC là đường kính, ED dây không qua tâm

$\Rightarrow$ ĐPCM

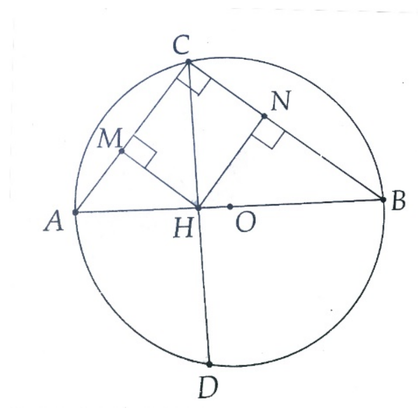
5B. Tương tự 5A



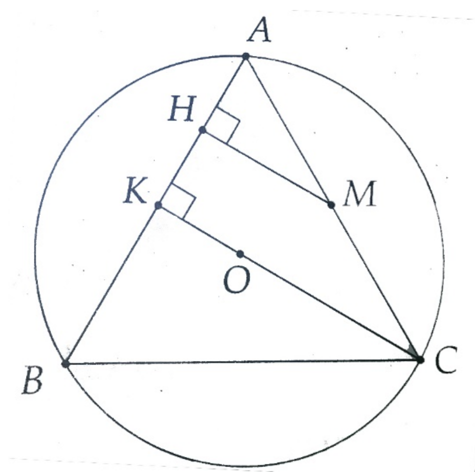
6 . Kẻ $OE \perp CD, E \in CD$ Ta có



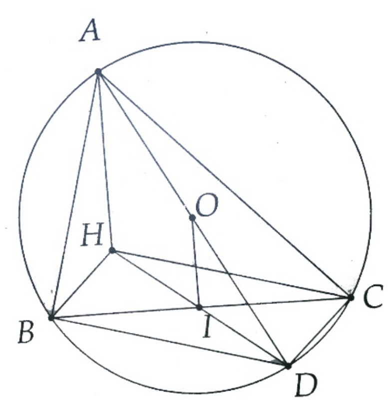
CO=11cm, CE= 9cm, $\Rightarrow$ OE=2$\sqrt{10}$ cm
OM=7cm $\Rightarrow$ ME=3cm
$\Rightarrow$ MC=6cm, MD=12cm; hoặc MD= 6cm, MC= 12cm



7. a) Tính được HA=4cm; HB=9cm
b) Tính được HA=4cm; HB=9cm
c) Tính được $HM = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$cm và $HN = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}$cm
Từ đó tính được $S_{CMHN} = \dfrac{216}{13}cm^2$



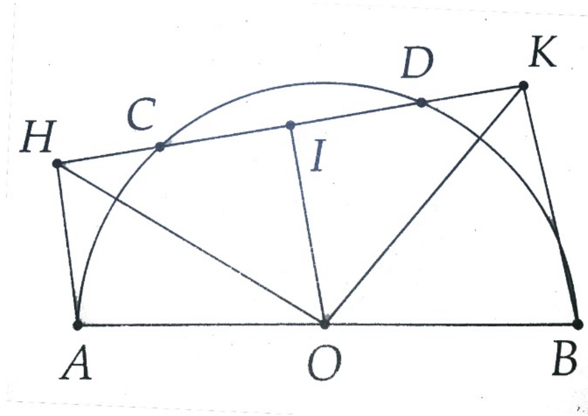
8. a) Vẽ $MH \perp AB$ tại H; $CH \perp AB$ tại K
$\Rightarrow$ MH là đường trung bình của
$\Delta CAK \Rightarrow AM = 10cm$
$AH = 6cm \Rightarrow AK = 12cm \Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}AB$
Từ đó chứng minh được ΔABC cân tại C
b) Ta có $CK = 2MH = 16cm$ và đặt $OC = x \Rightarrow OK = 16 - x$.
Từ đó tính được $CO = 12{,}5cm$



9. a) Ta có $BD \parallel CH$ vì cùng vuông
Góc với AB; $BH \parallel CD$ vì cùng vuông
Góc với AC
b) Ta có I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ I là trung điểm HD
c) Ta có OI là đường trung bình $\Delta AHD \Rightarrow AH = 2OI$
10. Học sinh tự CM

11. Ta có I thuộc đường tròn tâm O bán kính

$$R=\sqrt{OA^2-\frac{CD^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4OA^2-CD^2}$$

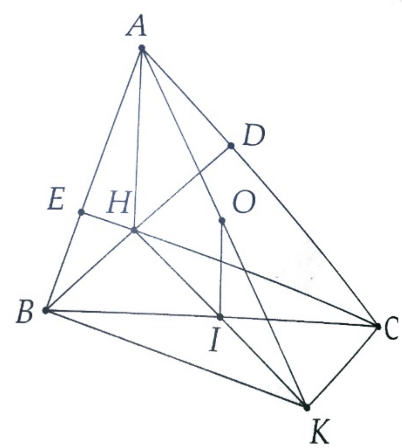


12. a) BHCK có I là trung điểm hai đường chéo

b) Ta có $\Delta ABK, \Delta ACK$ vuông tại B và C nên A,B,K,C nằm trên đường tròn đường kính AK.

c) Ta có OI là đường trung bình của $\Delta AHK \Rightarrow OI \parallel AH$

d) Gọi AH cắt BC tại M. Ta có BE.BA = BM.BC và CA.CD = CM.BC $\Rightarrow$ ĐPCM

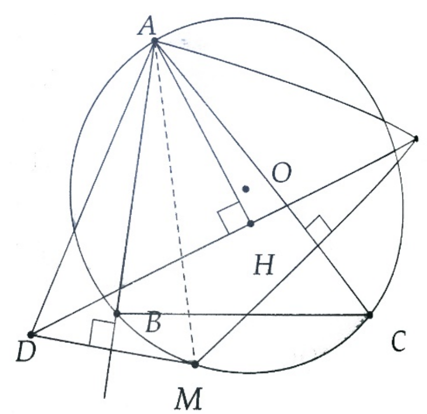


13. Kẻ

$AH \perp DE$ tại H

Từ $\widehat{DAE}=2\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{DAH}=\widehat{BAC}$



Từ DE=2DH; AD=AM=AE

Suy ra DH=AD.sin$\widehat{DAH}$

Từ đó $DE_{max} \Leftrightarrow AM=2R$

14. a) Vì OA=OB=OC

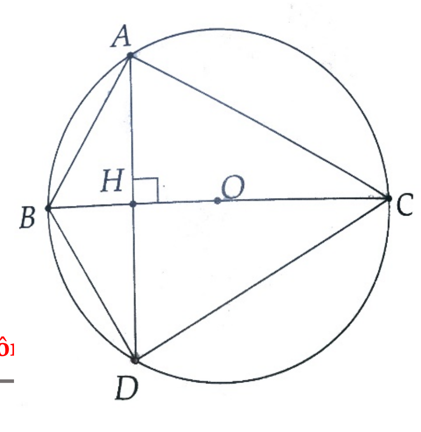
$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

b) HS tự chứng minh

c) Chứng minh

$\widehat{ABC}=\widehat{CBD}$

Mà$\widehat{CDH}=\widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{CDH}$



BÀI 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và một đường thẳng bất kì. Gọi *d* là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

tương đối của đường thẳng và đường	iểm chung	ức giữa d và R
ıg thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d<R$
ıg thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
ıg thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d>R$

2. Định lý

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Cho biết *d, R*, xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại

Phương pháp giải: So sánh *d* và *R* dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

1.Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, *d* là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

R	d	tương đối của đường thẳng và dường tròn
5 *cm*	3 *cm*	....
6 *cm*	......	xúc nhau
4 *cm*	7 *cm*	....

2A. Trên mặt phăng tọa độ *Oxy,* cho điểm A(3; 4). Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (A; 3) và các trục tọa độ.

2B. Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy,* cho điểm B(2; 4). Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (B; 3) và các trục tọa độ.

3A. Cho *a, b* là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng 2*cm.* Lấy điểm O trên *a* và vẽ đường tròn (O; 2 cm).

Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b.

3B. Cho *a, b* là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng 3*cm.* Lấy điểm O trên ***b*** và vẽ đường tròn (O; 4 cm).

Chứng minh đường tròn này cắt a ở hai điểm phân biệt.

Dạng 2. Xác định vị trí tâm đường tròn có bán kính cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước

Phương pháp giải: Xác định xem tâm đường tròn cách đường thẳng cho trước một khoảng là bao nhiêu rồi sử dụng tính chất điểm cách đều một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước.

4A. Cho đường thẳng *xy*.Tâm của các đường tròn có bán kính bằng 1*cm* và tiếp xúc với đường thẳng *xy* nằm trên đường nào?

4B. Cho hai đường thẳng *a* và *b* song song với nhau, cách nhau 1 một khoảng là *h*. Một đường tròn (O) tiếp xúc với *a* và *b*. Hỏi tâm *O* di động trên đường nào?

Dạng 3. Bài liên quan đến tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Pytago.

5A. Cho đường tròn tâm O bán kính 6*cm* và một điểm *A* cách *O* là 10 *cm*. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn trong đó B là tiếp điểm.Tính độ dài đoạn *AB*.

5B. Cho đường tròn (O; R) và dây $AB = \frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyên song song với *AB*, cắt các tia *OA*, *OB* lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

6A. Cho đường tròn (O; 2 *cm)* và một điểm *A* chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên *xy* lấy một điêm *M* sao cho *AM* = $2\sqrt{3}$ *cm*. Hỏi điểm *M* di động trên đường nào khi *A* chạy trên (O)?

6B. Cho đường tròn (O; 2 *cm)* và điểm *A* ngoài (O). Từ *A* kẻ cát tuyến với (O), cắt (O) tại *B* và C. Cho biết *AB* = *BC* và kẻ đường kính COD, tính độ dài đoạn thẳng *AD*.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho đường thẳng *xy* đi qua điểm *A* nằm trong đường tròn (O; *R)*. Chứng minh đường thẳng *xy* và đường tròn (O; *R)* cắt nhau.
8. Cho đường tròn (O; 5 *cm)* và điểm *A* sao cho *OA* = 5 *cm*. Đường thẳng *xy* đi qua điểm *A*. Chứng minh đường thẳng *xy* và đường tròn (O; 5 *cm)* có ít nhất một điểm chung.
9. Cho điểm *A* cách đường thẳng *xy* là 12 *cm*.

a) Chứng minh *(A;* 13*cm)* cắt đường thẳng *xy* tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi hai giao điểm của *(A; 13 cm)* với *xy* là *B*, C. Tính độ dài đoạn thẳng *BC.*

10.Cho nửa đường tròn (O) đường kính *AB.* Lấy C là điểm thuộc (O) và gọi *d* là tiếp tuyến qua c với (O). Kẻ *AE* và *BF* cùng vuông góc với *d; CH* vuông góc với *AB.*

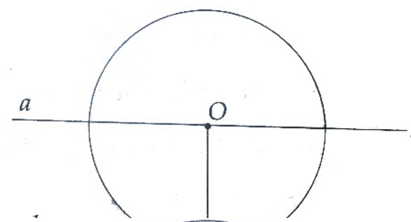
a) Chứng minh $CE = CF$ và $CH^2 = AE.BF$.

b) Khi C di chuyển trên một nửa đường tròn, tìm vị trí của điểm C để *EF* có độ dài lớn nhất.

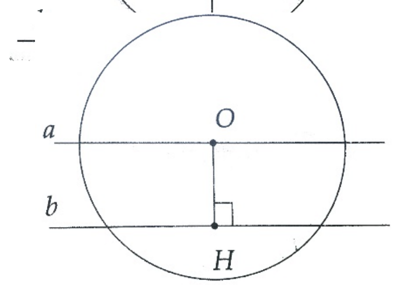
. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1.

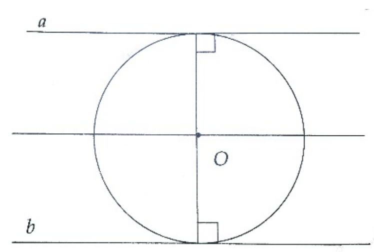
		tương đối của đường thẳng và đường tròn
		hau
		xúc nhau
		g giao nhau



2A. (A;3) Không giao với Ox và tiếp xúc với Oy
2B. (B) Cắt Oy tại hai điểm phân biệt và
(B) không cắt Ox
3A. O thuộc a và $a \parallel b$ nên O cách b một khoảng 2cm
$\Rightarrow$(O;2cm) tiếp xúc với b
3B. Kẻ $OH \perp a$ tại H
Ta có OH=3cm < R nên a cắt (O) tại hai điểm phân biệt



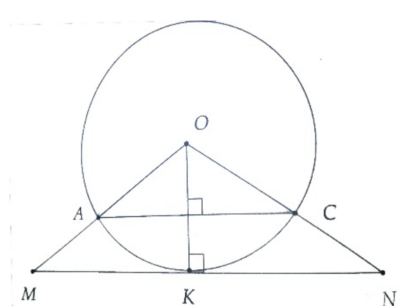
4A. Tâm đường tròn nằm trên hai đường thẳng a,b song song với đường thảng xy và cách xy một khoảng 1cm
4B. O nằm trên đường thẳng song song với a,b một khoảng $\frac{h}{2}$



5A. ΔABC vuông tại B, từ đó suy ra AB= 8cm

5B . Tiếp tuyến MN, tiếp điểm K. Vì $AB \parallel MN$

Nên $OH \perp AB$. Tính được $OH = \frac{3}{5}R$. Từ đó tính được



$KN = \frac{4}{3}R \Rightarrow S_{OMN} = \frac{4}{3}R^2$

6A. Tính được OM = 4 $\Rightarrow$ M di chuyển trên (O;4cm)

6B. Chứng minh được OB là đường trung bình của tam giác CDA, suy ra AD = 4cm

7. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH \le OA$. Mặt khác A nằm trong đường tròn (O;R) nên $OA \le R$

8. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH \le OA$. Mặt khác A nằm trong đường tròn (O;R) nên OA=R $\Rightarrow$ đpcm

9. a) Kẻ OH vuông góc với xy thì OH =12cm <R do đó (O) cắt xy tại hai điểm B,C

b) Tìm được BC = 2. HC = 10cm

10. a) Chứng minh được OC là đường trung bình của hình thang AEFB nên C là trung điểm của EF. Chứng minh được AE=AH, BH=BF nên

CH^2 = HA.HB=AE.BF

b) Ta có

$BE \cap (O) = \{H\} \Rightarrow FE = AH \le AB$

$\Rightarrow FE_{max} = AB \Rightarrow$ C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

BÀI 4. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 2. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại tiếp điểm C, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh C nằm trên (O) và OC vuông góc với a tại C.

Cách 2. Kẻ OH vuông góc a tại H và chứng minh $OH = OC = R$.

Cách 3. Vẽ tiếp tuyến a' của (O) và chứng minh $a \equiv a'$.

1A. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ *cm*, $AC = 8$ *cm*, $BC = 10$ *crn*. Vẽ đường tròn (B; BA). Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

1B. Cho đường thẳng d và A là điểm nằm trên d; B là điểm nằm ngoài d. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với d tại A.

2A. Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K;

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

2B. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD va CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyên của (O).

Dạng 2. Tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyên và sử dụng các công thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài các đoạn thẳng.

3A. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của (O) bằng 15 *cm* và dây $AB = 24$ *cm*.

Tính độ dài đoạn thẳng OC.

3B. Cho đường tròn (O; R) đường kính *AB*. Vẽ dây *AC* sao cho $\widehat{CAB} = 30°$. Trên tia đối của tia *BA* lấy điểm *M* sao cho *BM* = *R*. Chứng minh:

a) *MC* là tiếp tuyến của (O);

b) $MC = R\sqrt{3}$.

4A. Cho đường tròn tâm *O* có bán kính *OA* = *R*, dây *BC* vuông góc với *OA* tại trung điểm *M* của *OA*.

a) Tứ giác *OCAB* là hình gì? Vì sao?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại *B*, cắt đường thẳng *OA* tại E.

Tính độ dài *BE* theo *R*.

4B. Cho tam giác *ABC* vuông ở *A*, *AH* là đường cao, *AB* = 8 *cm*,*BC* = 16 *cm*. Gọi *D* là điểm đôi xứng với *B* qua *H*. Vẽ đường tròn đường kính *CD* cắt *AC* ở *E*.

a) Chứng minh *HE* là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng *HE*.

III. BÀI TẬP VỂ NHÀ

5. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành *ABCD*. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng *AD* tại *N*. Chứng minh:
   a) Đường thẳng *AD* là tiếp tuyến của (O);
   b) Ba đường thẳng *AC*, *BD* và *ON* đồng quy.
6. Cho đường tròn (O) và đường thẳng *d* không cắt (O). Hãy dựng tiếp tuyến của (O) sao cho tiếp tuyến đó song song với *d*.
7. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và *M* là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại *M* cắt tiếp tuyến tại *A* và *B* của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng *AM* cắt OC tại E, đường thẳng *BM* cắt *OD* tại F.
   a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90°$.
   b) Tứ giác *MEOF* là hình gì?
   c) Chứng minh *AB* là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
8. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A có AH* là đường cao. Gọi *BD*, *CE* là các tiếp tuyến của đường tròn *(A; AH)* với *D*, *E* là các tiếp diêm. Chứng minh:
   a) Ba điểm *D*, *A*, *E* thẳng hàng;
   b) *DE* tiếp xúc với đường tròn đường kính *BC*.

9. Cho điểm *M* nằm trên nửa đường tròn tâm *o* đường kính *AB*. Qua *M* vẽ tiếp tuyến *xy* và gọi *C, D* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A, B* trên *xy*. Xác định vị trí của điểm *M* trên (O) sao diện tích tứ giác *ABCD* đạt giá trị lớn nhất.

10. Cho đường tròn (O; 6 *cm)* và điểm *A* nằm trên (O). Qua *A* kẻ tiếp tuyến *Ax* với đường tròn và lấy điểm *B* trên tia *Ax* sao cho AB = 8 *cm.*

a) Tính độ dài đoạn thẳng *OB.*

b) Qua *A* kẻ đường vuông góc với *OB,* cắt (O) tại C. Chứng minh BC là tiếp tuyến của (O).

11.Cho đường tròn (O) đường kính *AB* = 10 *cm* và *Bx* là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30°$ và *E* là giao điểm của các tia *AC, Bx.*

a) Tính độ dài các đoạn thẳng *AC, CE vả BC.*

b) Tính độ dài đoạn thẳng *BE.*

12. Cho đường tròn (O) đường kính *AB.* Lấy điểm *M* thuộc *(O) sao* cho *MA < MB.* Vẽ dây *MN* vuông góc với *AB* tại *H.* Đường thẳng *AN* cắt *BM* tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với *AB* tại *K* và cắt *BN* tại *D.*

a) Chứng minh *A, M,* C, *K* cùng thuộc đường tròn.

b) Chứng minh *BK* là tia phân giác của góc *MBN.*

c) Chứng minh Δ *KMC* cân và KM là tiếp tuyến của (O).

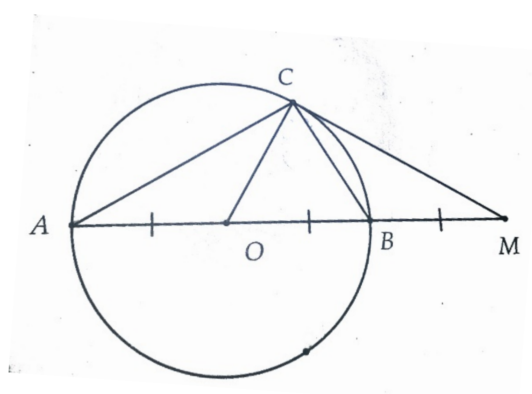
d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác *MNKC* trở thành hình thoi.

BÀI 4. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1A. Ta có

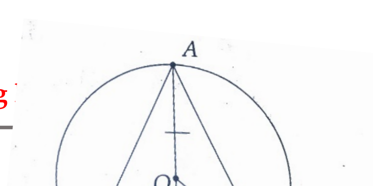
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow BA \perp AC$



1B. Trung trực AB cắt đường thẳng vuông góc với d ở A tại O. Đường tròn (O;OA) là đường tròn cần dựng.

2A. a) Chứng minh được $\widehat{BKA} = 90^0$



b) Gọi O là trung điểm AI.

Ta có:

+ $OK = OA \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$

+ $\widehat{OAK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

+ $HB = HK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HKB}$

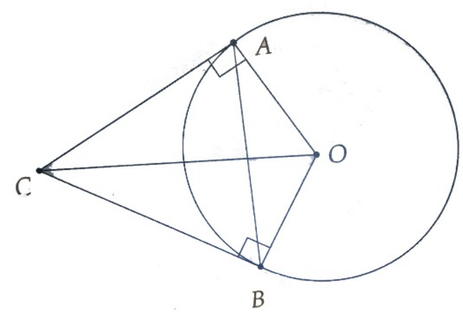
+ $\Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{HKB} \Rightarrow \widehat{HKO} = 90^0$

2B. a) Gọi O là trung điểm của AH thì

$OE = OA = OH = OD$

b) Tương tự 2A

3A. a)



$\Delta OAC = \Delta OBC (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAB} = 90^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM

b) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

OBC tính được OC=25cm

3B. a) Vì OCB là tam giác đều nên BC=BO=BM=R

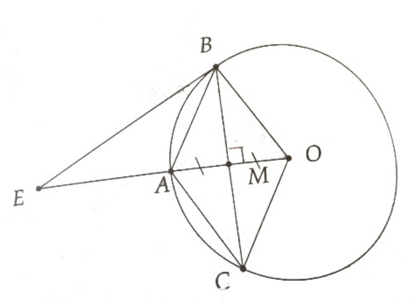
$\Rightarrow \widehat{OCM} = 90^0 \Rightarrow$ MC là tiếp tuyến (O;R)

b) Ta có

$OM^2 = OC^2 + MC^2$

$\Rightarrow MC^2 = 3R^2$

4A. a) OA vuông góc với BC tại M



$\Rightarrow$ M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ OCAB là hình thoi

b) Tính được BE=R$\sqrt{3}$

4B. a) Gọi O là trung điểm CD.

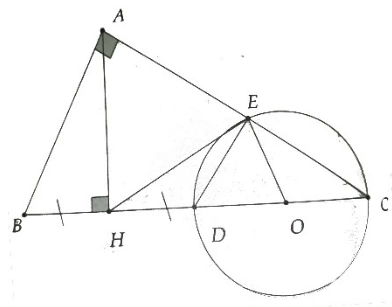
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD và tam giác ODE đều

$\Rightarrow DE = DH = DO = \dfrac{BC}{4}$

$\Rightarrow \widehat{HEO} = 90^0$

$\Rightarrow$ HE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

b) HE = $4\sqrt{3}$



5. a) Tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O)

$\Rightarrow OA \perp BC$

$\Rightarrow OA \perp AD$ (vì $AD \parallel BC$)

$\Rightarrow$ AD là tiếp tuyến của (O)

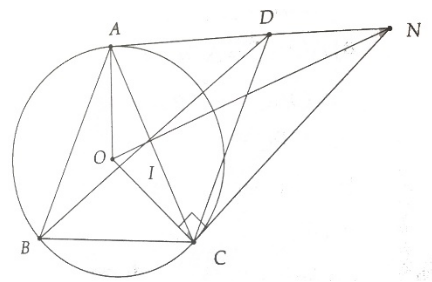
b) Chứng minh được ON là tia phân giác

của $\widehat{AOD}$ mà ΔOAC cân tại O nên ON cũng

là đường trung tuyến $\Rightarrow$ ON cắt AC tại trung

điểm I của AC $\Rightarrow$ ON,AC,BD cùng đi qua trung

điểm I của AC.



6. Từ O hạ OH vuông góc với d. OH cắt (O)

tại A và B. Qua A và B kẻ các đường vuông

góc với OA và OB ta được hai (hoặc một nếu d là tiếp tuyến của (O)) tiếp tuyến song song với d.

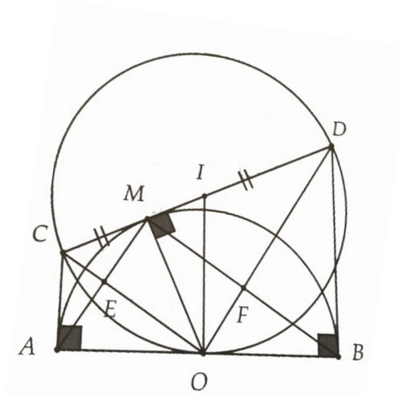
7. a) Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^0$ hay $\widehat{EMF} = 90^0$ tiếp tuyến CM,CA

$\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$ Tương tự $\Rightarrow \widehat{OFM} = 90^0$

Chứng minh được $\Delta CAO = \Delta CMO \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{MOC} \Rightarrow OC$

là tia phân giác của $\widehat{AMO}$

Tương tự OD là tia phân giác của $\widehat{BOM}$ suy ra



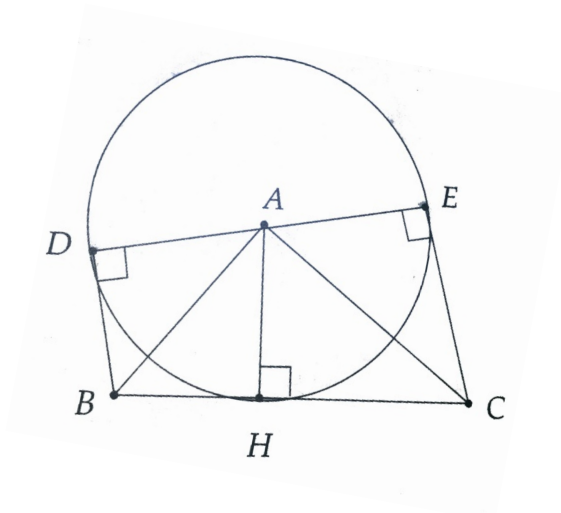
$OC \perp OD \Leftrightarrow \widehat{COD} = 90^0$

b) Do ΔAOM cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao

$\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$ chứng minh tương tự $\widehat{OFM} = 90^0$.

Vậy MEOF là hình chữ nhật

c) Gọi I là trung điểm CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và IO=IC=ID. Có ABDC là hình thang vuông tại A và B nên $IO \parallel AC \parallel BD$ và IO vuông góc với AB. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.



8. a) Vì BH, BD là tiếp tuyến của (A;AH)

$\Rightarrow \widehat{HAD} = 2\widehat{HAB}$

Vì CH,CE là tiếp tuyến của (A;AH)

$\Rightarrow \widehat{HAE} = 2\widehat{HAC}$

$\Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{HAB} + \widehat{HAC}) = 180^0$

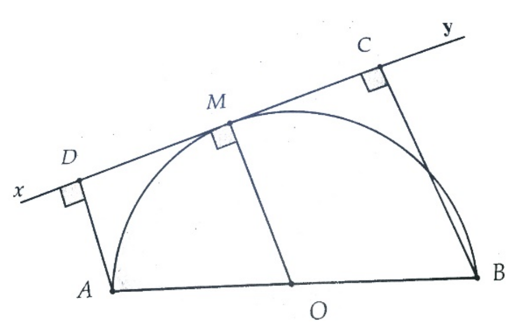
$\Rightarrow$ D,A,E thẳng hàng

b) Tương tự 7c

9. Ta có ABCD là hình thang vuông tại C và D

Mà O Là trung điểm AB và OM vuông góc với CD(tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ AD+BC=2OM=2R. Chú ý rằng CD$\leq$ AB (hình chiếu đường xiên)

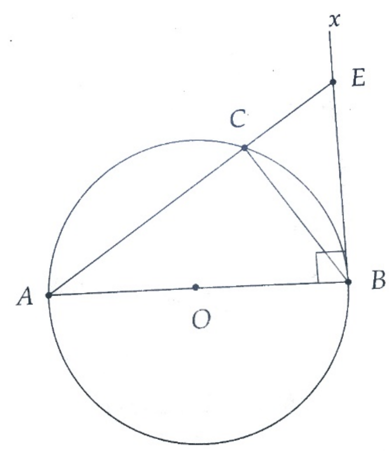


$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).CD$$

$$= R.CD \le R.AB = 2R^2$$

Do đó S_{ABCD} lớn nhất khi CD=AB hay M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB

10. Hình vẽ tượng tự 3A.



a) Tính được OB=10cm

b) Ta có $\Delta OBC = \Delta OBA (c.g.c) \Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

11. a) Tính được BC=5cm

$$AC = 5\sqrt{3}cm,\ CE = \frac{5\sqrt{3}}{3}cm$$

b) Tính được $BE = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm$

12. a) $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 90^0 \Rightarrow C, K, A, M$ thuộc đường tròn đường kính AC

b) ΔMBN cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác .

c) ΔBCD có $BK \perp CD$ và $CN \perp BN$ nên A là trực tâm của ΔBCD

$\Rightarrow$ D,A,M thẳng hàng

Ta có ΔDMC vuông tại M có MK là trung tuyến nên ΔKMC cân tại

$K \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KMC}$

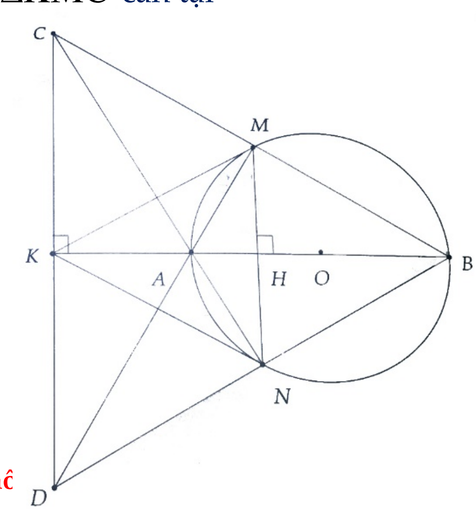
lại có $\widehat{KBC} = \widehat{OMB}$ nên

$\widehat{KMC} + \widehat{OMB} = \widehat{KCB} + \widehat{KBC} = 90^0$

Vậy $\widehat{KMO} = 90^0$ mà OM là bán kính

nên KM là tiếp tuyến của (O)

d) MNKC là hình thoi



$\Leftrightarrow MN = CK$ và CM=CK

$\Leftrightarrow \Delta KCM$ đều

$\Leftrightarrow \widehat{KBC} = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

BÀI 5. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nêu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn. 1

- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các I đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp 1 xúc vói phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với mỗi một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc *A* là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại *B* và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc *A* và đường phân giác ngoài tại *B* (hoặc C).

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải: Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

1A. Hai tiếp tuyến tại *B* và C của đường tròn (O) cắt nhau ở *A.*

a) Chứng minh *AO* là trung trực của đoạn thẳng *BC.*

b) Vẽ đường kính *CD* của (O). Chứng minh *BD* và *OA* song song.

1B. Hai tiếp tuyến tại *A* và *B* của đường tròn (O) cắt nhau tại *M.* Đường thẳng vuông góc với *OA* tại *O* cắt *MB* tại C. Chứng minh CM = CO.

2A. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính *AB.* Vẽ các tiếp tuyến *Ax, By* với nửa đường tròn cùng phía đối với *AB.* Từ điểm *M* trên nửa đường tròn *(M* khác *A, B)* vẽ tiếp tuyên với nửa đường tròn, cắt *Ax* và *By* lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh ΔCOD và ΔAMB đồng dạng.

b) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

2B. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O).

Dạng 2. Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc

Phương pháp giải: Sử dụng các kiên thức sau:

- Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
- Khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp.
- Hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

3A. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoai (O), vẽ hai tiếp tuyến ME và MF (E,F là tiếp điểm) sao cho góc $\widehat{EMO} = 30°$. Biết chu vi ΔMEF là 30 *cm*.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

3B. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm) sao cho góc $\widehat{AMB} = 60°$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 *cm*, tính độ dài dây AB.

4A. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Chứng minh $\widehat{BAC} = 60°$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

4B. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9$ *cm*, $AC = 12$ *cm*. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính độ dài IG.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I và vuông góc với IA cắt OB tại K. Đường thẳng qua O, vuông góc với OA cắt IB ở C.

   a) Chứng minh KC và OI vuông góc nhau.

   b) Biết $OA = OB = 9$ cm, $OI = 15$ cm, tính IA và IK.

6. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm. Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với (O), tiếp

tuyến này cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự *ở* D và E. Chứng minh chu vi tam giác ADE bằng $2AB$.

7. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ các tiếp tuyên AB, AC với (O) trong đó B,C là các tiếp điểm.

   a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

   b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm$ *và* $OH = 1$ *cm*, tính:

   i) Chu vi và diện tích tam giác ABC;

   ii) Diện tích tứ giác $ABOC$.

8. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK.

   a) Chứng minh bốn điểm B, I,C, K cùng thuộc một đường tròn.

   b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O; OK).

   c) Tính bán kính của (O) biết $AB = AC = 20$ *cm*, $BC = 24$ *cm*.

BÀI 5. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

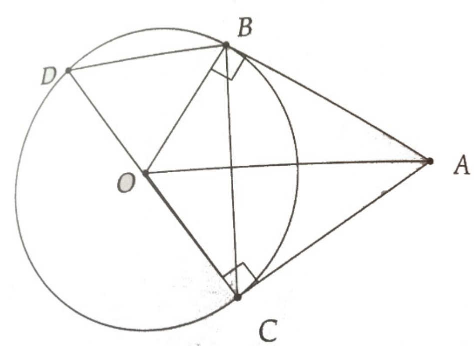
1A. a) Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow$ A thuộc trung trực của BC.

$OB = OC \Rightarrow$ O thuộc trung trực của BC.

b) Sử dụng a) và chú ý CD là đường kính (O)

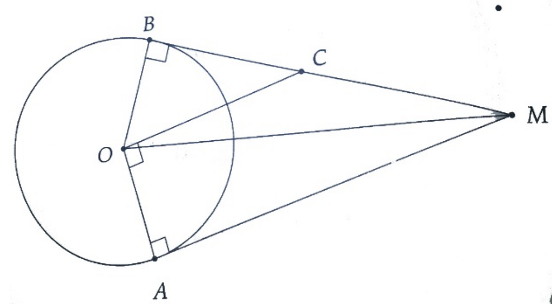
nên $\widehat{CBD} = 90^0$



1B. Sử dụng tính chất giao hai tiếp tuyến và

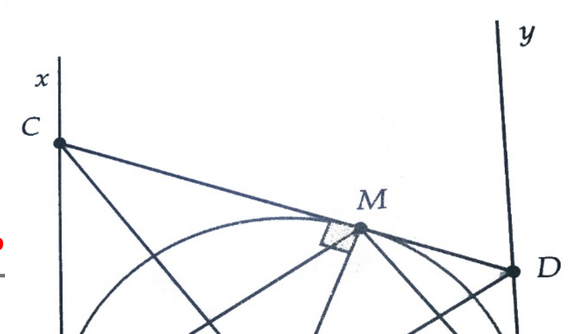
$OC \parallel AM \Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{COM}$

$\Rightarrow \Delta OCM$ cân tại O



2A. a) HS tự chứng minh

b)



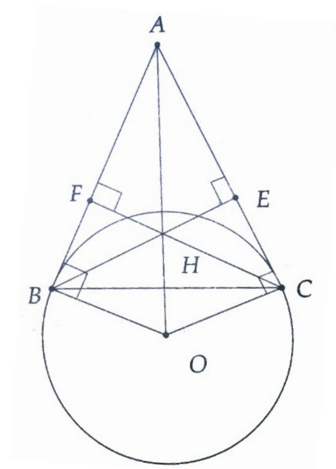
$\Delta COM \sim \Delta ODM$

$\Rightarrow MC.MD = OM^2$

c) $AC = R\sqrt{3}$

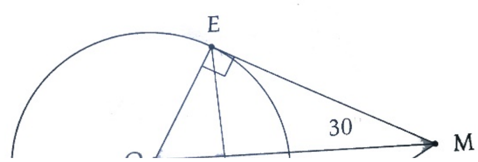
$BD.AC = MC.MD = R^2$

$\Rightarrow BD = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$



2B. a) HS tự chứng minh
b) Chỉ ra rằng A,H,O cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với BC;
c) Để $H \in (O)$ thì

OH=OC $\Rightarrow \widehat{COA} = 60^0$



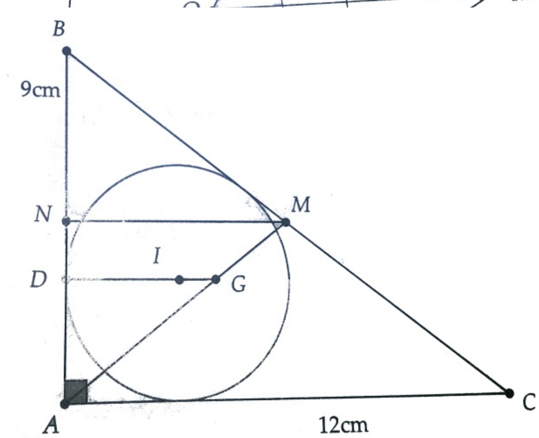
3A. a) Chứng minh

$\widehat{EMF} = 60^0 \Rightarrow \Delta MEF$ đều

$\Rightarrow$ EF=10cm

b) Tìm được $S_{MEF} = 25\sqrt{3}cm$

3B. Tìm được AB=6cm



4A. Ta có

$\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0$

$\Rightarrow AO = 2OB = 2R$

Vì AO=2R =2OB

$\Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

4B. Gọi M là trung điểm của BC

Ta tính được $AG = \dfrac{2}{3}AM = 10cm$

Gọi N là trung điểm của AB $\Rightarrow MN \parallel AC,\ MN \perp AB$

D,I,G thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \frac{AG}{AM}=\frac{AD}{AN}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{AD}{2AN}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$$

Ta có $AD=r_{\text{nội tiếp}}=\dfrac{AB+AC-BC}{2}\Leftrightarrow \dfrac{AB}{3}=\dfrac{AB+AC-BC}{2}$

$$\Leftrightarrow AB+3AC=3BC=3\sqrt{AB^2+AC^2}$$

$$\Leftrightarrow 3AC=4AB\ (\text{ĐPCM})$$

Áp dụng kết quả trên ta có

$$AD=\frac{AB+AC-BC}{2}=3cm$$

$$\Rightarrow ID=DA=3cm\Rightarrow IG=DG-ID=1cm$$

5. a) Chứng minh C là trực tâm của tam giác OIK. Từ đó suy ra $KC\perp OI$ tại H.

b) IA=12cm

Chứng minh ΔKOI cân tại K

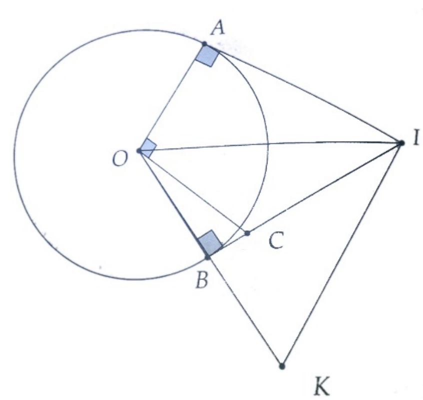
Đặt $KO=KI=x$ (x>0)

Có

$$IK^2=IB^2+BK^2$$

Hay $x^2=12^2+(x-9)^2$

$$\Rightarrow x=12{,}5\Rightarrow IK=12{,}5cm$$



6. Chú ý MD = BD và ME = CE

7. a) Tương tự 1A

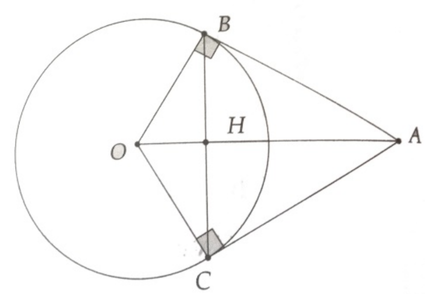
b) i) Áp dụng định lý Pytago

tính được $BH=\sqrt{3}cm$

Áp dụng hệ thức lược về cạnh

Góc vuông và đường cao trong tam giác

Vuông, tính được:



$$AB=AC=2\sqrt{3}\ cm\Rightarrow P_{ABC}=6\sqrt{3}\ cm,\ S_{ABC}=3\sqrt{3}\ cm^2$$

ii) Ta có $S_{ABOC}=S_{ABC}+S_{BOC}\Rightarrow S_{ABOC}=4\sqrt{3}\ cm^2$

Cách khác : Áp dụng hệ thức lượng về cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông, ta có

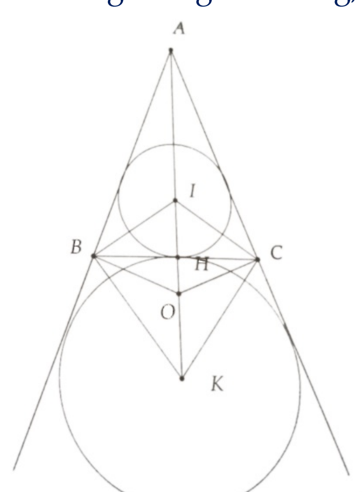
$$AB=AC=2\sqrt{3}\ cm\Rightarrow P_{ABC}=6\sqrt{3}\ cm,\ S_{ABC}=3\sqrt{3}\ cm^2$$

ii) Ta có $S_{ABOC}=S_{ABC}+S_{BOC}\Rightarrow S_{ABOC}=4\sqrt{3}\ cm^2$

8. a) Sử dụng tính chất phân giác trong, phân giác ngoài của một góc

$$\Rightarrow \widehat{IBK}=\widehat{ICK}=90^0$$

b) Sử dụng a) và chú ý $\widehat{ACI}=\widehat{ICB}=\widehat{IKC}=\widehat{OCK}$



c) AK cắt BC tại H. Ta có : HC=12cm, AH=16cm

ΔACH đồng dạng $\Delta COH \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{HC}{CO} \Rightarrow CO=15cm$

BÀI 6. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần Tóm tắt lý thuyết của Bài 5.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1A. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tiếp tuyến Ax, By. Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By tại D và C. Chứng minh:

a) $AD + BC = CD$;

b) $\widehat{COD} = 90°$

c) $AC.BD = OA^2$;

d) AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

1B. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tiếp tuyến Ax, By. M là điểm trên (O) sao cho tiếp tuyên tại M cắt Ax, By tại D và C. Đường thẳng AD cắt BC tại N.

a) Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn. Chỉ ra bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh OC và BM song song.

c) Tìm vị trí điểm M sao cho S_{ACDB} nhỏ nhất.

d) Chứng minh MN và AB vuông góc nhau.

2A. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A; AH). Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm.

a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh $BD.CE = \dfrac{DE^2}{4}$

c) Gọi M là trung điểm CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H. Chứng minh CN và AM song song.

2B. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác.

a) Chứng minh bốn điểm B, C, I, K cùng thuộc đường tròn (O; IO) vói O là trung điểm của đoạn thẳng IK.

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của (O).

c) Biết $AB = AC = 20$ cm và $BC = 24$ cm tính bán kính của (O).

3A. Cho đường tròn (O; R). Từ điểm A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm NP, kẻ tiếp tuyến

MB, kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$. Gọi *H* là giao điểm của *AC* và *BD*, *I* là giao điểm của *OM* và *AB*. Chứng minh:

a) Bốn điểm *A, M, B, O* cùng thuộc một đường tròn;

b) Năm điểm *O, K, A, M, B* cùng thuộc một đường tròn;

c) $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$

d) *OAHB* là hình thoi;

e) O, *H, M* thẳng hàng.

3B. Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *AB*. Kẻ tiếp tuyến *Ax*, lấy *P* trên *Ax* *(AP > R)*. Từ *P* kẻ tiếp tuyến *PM* với (O).

a) Chứng minh bôn điểm *A, P, M*, O cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh *BM //OP;*

c) Đường thẳng vuông góc với *AB* tại O cắt tia *BM* tại N. Chứng minh tứ giác *OBNP* là hình bình hành;

d)Giả sử *AN* cắt *OP* tại *K; PM* cắt *ON* tại *I*; *PN* cắt OM tại *J*. Chứng minh *I, J, K* thẳng hàng.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Cho đường tròn tâm O đường kính *AB*. Gọi *d* và *d'* là các tiếp tuyến tại *A* và *B*. Lấy C bất kì thuộc *d*, đường thẳng vuông góc với OC tại *O* cắt *d'* tại *D*. *AD* cắt *BC* tại *N*.

a) Chứng minh *CD* là tiếp tuyến của (O) tại tiếp điểm *M*.

b) Tìm vị trí C trên *d* sao cho *(AC + BD)* đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Biết *AB* = 4a, tính giá trị của *AC.BD* và $\dfrac{1}{OC^2}+\dfrac{1}{OD^2}$ theo *a*.

d) Chứng minh *MN* vuông góc với *AB* và *N* là trung điểm của *MH* với *H* là giao điểm của *MN* và *AB*.

5. Cho đường tròn (O) và điểm *A* ngoài (O). Qua *A* kẻ các tiếp tuyên *AB, AC* với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm. Lấy *M* là điểm thuộc cung nhỏ *BC*. Tiếp tuyến qua *M* với (O) cắt *AB, AC* lần lượt tại *D* và *E*. Chứng minh:

a) Chu vi tam giác *ADE* bằng *2AB;*

b) $\widehat{DOE}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$.

6. Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (I). Các cạnh *AB, BC, CA* tiếp xúc đường tròn (I) lần lượt tại *D, E, F*. Đặt *BC = a*, *CA = b*, *AB = c*.

a) Chứng minh $AD = \frac{b+c-a}{2}$

b) Gọi *r* là bán kính của (I). Chứng minh $S_{ABC} = p.r$, trong đó *p* là nửa chu vi tam giác *ABC*.

c) Gọi *M* là giao điểm của đoạn thẳng *AI* với (I). Tính độ dài đoạn thẳng *BM* theo *a, b, c.*

BÀI 6. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

1A. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến

Ta có

a) AC = CM; BD = DM

$\Rightarrow$ AC+BD=CD

b)

$$\widehat{COA} = \widehat{COM},\ \widehat{DOM} = \widehat{DOB}$$

$$\Rightarrow \widehat{COD} = 90^0$$

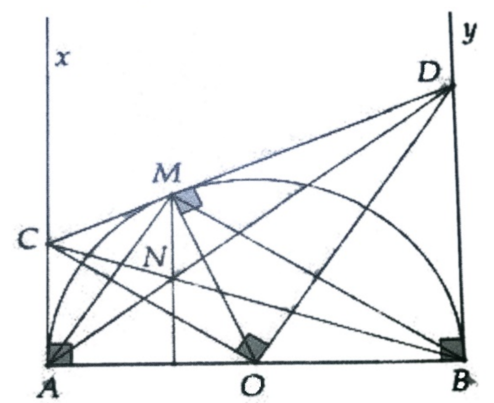
c) AC.BD=MC.MD=$MO^2 = R^2$

d) Gọi I là trung điểm của CD. Sử dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông và đường trung bình trong hình thang để suy ra đpcm.

1B. a) từ CA, CM là tiếp tuyến của (O) chứng

Minh được A,C,M,O $\in$ đường tròn bán kính

$$\frac{OC}{2}$$



b) Chứng minh OC,BM cùng vuông góc

với AM . từ đó suy ra $OC \parallel BM$

c) $S_{ACDB} = \frac{(AC+BD)AB}{2} = \frac{AD.AB}{2}$

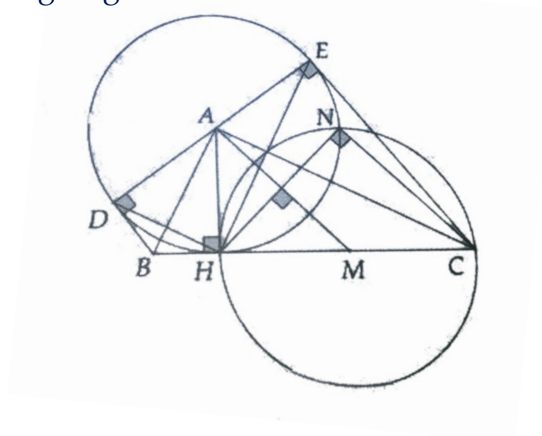
$\Rightarrow S_{ACDB}$ nhỏ nhất khi CD có độ dài nhỏ nhất

Hay M nằm chính giữa cung AB

d) Từ tính chất hai giao tuyến $\Rightarrow$ AC=CM và BM=MD, kết hợp với $AC \parallel BD$

ta chứng minh được $\frac{CN}{NB} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp AB$

2A. a) Chú ý: Ab là phân giác góc $\widehat{DAM}$; AC là phân giác góc $\widehat{EAM}$ từ đó $\widehat{DAE} = 180^0$



b) Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến

và hệ thức về đường cao và hình chiếu

cạnh góc vuông lên cạnh huyền trong tam giác

vuông

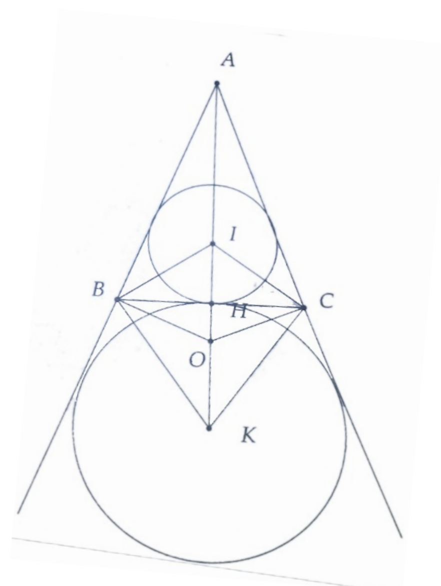
BAC $\Rightarrow BD.CE = BH.CH = CH^2 = \frac{DE^2}{4}$

c) ΔHNC nội tiếp đường tròn (M) đường kính

$HC \Rightarrow HN \perp NC$

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M)

Do đó $AM \perp HN \Rightarrow AM \parallel NC$



2B. a) Sử dụng tính chất phân giác trong và phân

giác ngoài tại 1 điểm ta có

$\widehat{IBK} = \widehat{ICK} = 90^0$

$\Rightarrow B, C, I, K \in$ đường tròn tâm O đường kính IK

b) Chứng minh $\widehat{ICA} = \widehat{OCK}$

từ đó chứng minh được $\widehat{OCA} = 90^0$

Vậy AC là tiếp tuyến của (O)

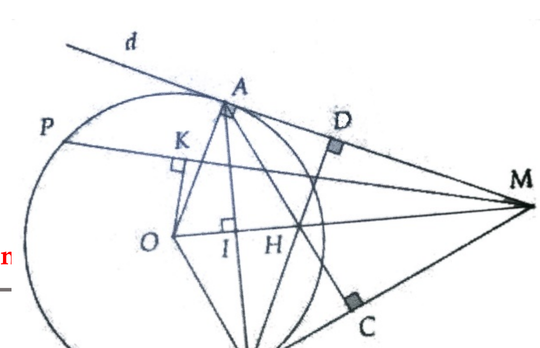
c) Áp dụng Pytago vào tam giác vuông

HAC $\Rightarrow$ AH=16cm. Sử dụng hệ thức lượng

trong tam giác vuông COA $\Rightarrow$ OH=9cm,OC=15cm

3A. a) Tương tự 1B

b) Chú ý $\widehat{OKM} = 90^0$ và kết hợp ý a)



$\Rightarrow A, M, B, O, K \in$ đường tròn đường kính OM

c) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

OAM (hoặc có thể chứng minh tam giác đồng

Dạng)

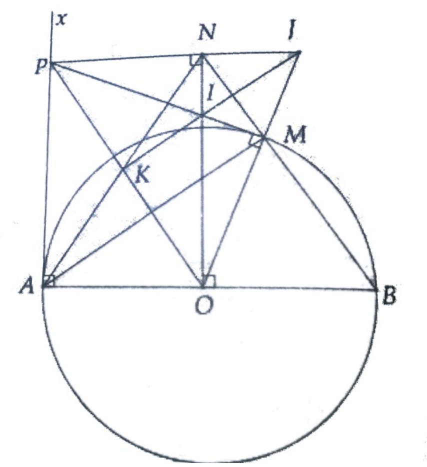
d) Chứng minh OAHB là hình bình hành và

chú ý A,B thuộc (O;R)

suy ra OAHB là hình thoi

e) Chứng minh $OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow$ O,H,M thẳng hàng

3B. a) Tương tự 3A



$\Rightarrow A, P, M, O \in$ đ tròn đường kính PO

b) Ta có $OP \perp AM, BM \perp AM \Rightarrow BM \parallel OP$

c) chứng minh $\Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow$ OP=BN

lại có BN||OP do đó OPNB là hình bình hành

d) Ta có $ON \perp PI, PM \perp JO$ mà

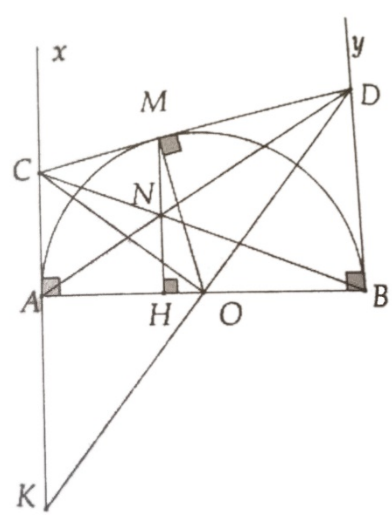
$PM \cap ON = I \Rightarrow I$ trực tâm ΔPOJ $\Rightarrow JI \perp PO(1)$

Chứng minh PAON hình chữ nhật $\Rightarrow$K trung điểm PO

Lại có $\widehat{APO} = \widehat{OPI} = \widehat{IOP} \Rightarrow \Delta IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp PO(2)$

Từ (1),(2) $\Rightarrow$J,I,K thẳng hàng

4A. Kẻ



$OM \perp CD$

Gọi K $=OD \cap d$; $\Delta COK = \Delta COD$

$\Rightarrow OK = OD \Rightarrow OM = OA = R \Rightarrow CD$

Là tiếp tuyến

b) AC+BD=CM+DM=CD$\geq$ AB

Do đó min (AC+BD)=AB

$\Leftrightarrow CD \parallel AB \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow$ AC=AO

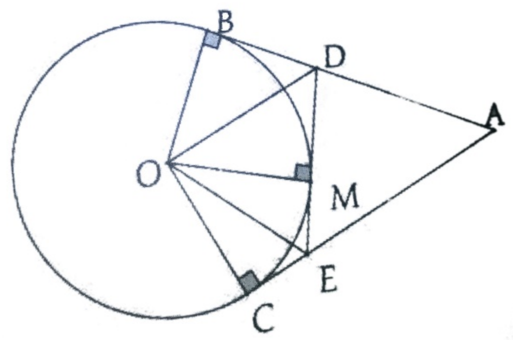
c) AC.BD=MC.MD=$OM^2 = 4a^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{4a^2}$$

d) Tương tự bài 1Bd

$\Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp AB$ hay $MH \perp AB$; Từ $AC \parallel BD$, $MN \parallel BD, NH \parallel BD$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{NH}{BD} \Rightarrow MN = NH$$



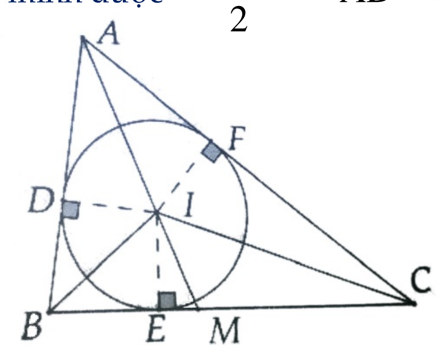
5. a) P_{ADE} =AD+DE=EA=AD+DM+ME+AE=2AB

b)

$$\widehat{DOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM};\ \widehat{MOE} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2DOE$$

6. a) Áp dụng tính chất 2 tiếp tuyến tại A,B,C ta chứng minh được $\frac{b+c-a}{2} = AD$



b) $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$

Mà ID = IE = IF = r $\Rightarrow S_{ABC}$ = pr

c) Vì AM là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{BA}{AC}$

Áp dụng tính chất tỉ lệ thức thu được $BM = \frac{ac}{c+b}$

BÀI 7. **VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN**

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của đường nối tâm

- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.

Chú ý:

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

2. Liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm *d* và các bán kính *R* và r

Vị trí tương đối của hai đường tròn (O;R) và (O';r) với *R>r*	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R, r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R-r<d<R+r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	1	
- Tiếp xúc ngoài		$d = R + r$,
- Tiếp xúc trong		$d = R-r$
Hai đường tròn không giao nhau	0	
- Ở ngoài nhau		$d> R + r$
- (O) đựng (O')		$d<R-r$
- (O) và (O') đồng tâm		$d = 0$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán liên quan đến hai đường tròn tiếp xúc nhau

Phương pháp giải: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn tiếp xúc nhau

1A. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài *BC* với $B \in$ (O), C$\in$ (O'). Tiếp tuyến chung trong tại *A* cắt tiếp tuyến chung ngoài *BC ở I.* ,

a) Vẽ đường kính *BOD* và CO'E. Chứng minh các bộ ba điểm *B,A, E* và C, *A, D* thẳng hàng.

b) Chứng minh ΔBAC và ΔDAE có diện tích bằng nhau.

c) Gọi *K* là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với *BC.*

1B. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài với nhau tại *A.* Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với B$\in$(O), C$\in$(O'). Đường vuông góc với OO' kẻ từ *A* cắt BC ở M.

a) Tính *MA* theo *R* và *r.*

b) Tính diện tích tứ giác BCO'O theo *R* và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và *r*.

d) Gọi *I* là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (*I*; *IM*).

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến hai đường tròn cắt nhau

Phương pháp: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn cắt nhau.

2A. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A* và B, trong đó *OA* là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tính độ dài dây cung AB biết OA = 20 *cm* và O'A = 15 *cm*.

2B. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và *B*. Một cát tuyến qua A cắt (O) ở M, cắt (O') ở N mà A ở giữa *M* và N. Từ A vẽ đường kính *AOC* và AO'D.

a) Tứ giác *CMND* là hình gì?

b) Gọi *E* là trung điểm OO'. Với MA = NA, chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (E; EA).

3A. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A* và *B*. Gọi M là trung điểm của *OO'*. Đường thẳng qua *A* cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở *C* và *D*.

a) Khi $CD \perp MA$, chứng minh *AC* = *AD*.

b) Khi *CD* đi qua *A* và không vuông góc với *MA*.

i) Vẽ đường kính *AE* của (O), *AE* cắt (O') ở *H*. Vẽ đường kính *AF* của (O'), *AF* cắt (O) ở *G*. Chứng minh *AB*, *EG*, *FH* đồng quy.

ii) Tìm vị trí của *CD* để đoạn *CD có* độ dài lớn nhất?

3B. Cho góc vuông *xOy*. Lấy các điểm *I* và *K* lần lượt trên các tia *Ox* và *Oy*. Đường tròn (I; *OK)* cắt tia *Ox* tại *M (I* nằm giữa *O* và *M)*, đường tròn (K; *OI)* cắt tia *Oy* tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác *OMCN* là hình vuông.

c) Gọi *A, B* là các giao điểm của (I) và (K) trong đó *B* ở miền trong góc *xOy*. Chứng minh ba điểm *A, B, C* thẳng hàng.

d) Giả sử *I* và *K* thứ tự di động trên các tia *Ox* và *Oy sao* cho OI + OK = *a* không đổi. Chứng minh đường thẳng *AB* luôn đi qua một điểm *cố* định.

Dạng 3. Các bài toán liên quan đến hai đường tròn không cắt nhau

Phương pháp: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn không cắt nhau.

4A. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Biết *BC* là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng 12 *cm*. Dây *CD* là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và

$\widehat{BCD} = 30°$. Hãy tính bán kính của đường tròn nhỏ.

4B. Cho hai đường tròn đồng tâm *O*, có bán kính lần lượt là *R* và *r*. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại *A và B*. Gọi *BC* là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $(AC^2 + AM^2 + AN^2)$ theo *R* và *r*.

5A. Cho hai đường tròn *(O; R)* và (O'; *r) ở* ngoài nhau. Gọi *MN* là tiếp tuyến chung ngoài, *EF* là tiếp tuyến chung trong (M và *E* thuộc (O), *N và F* thuộc (O')). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO' = 10$ *cm*, $MN = 8cm$ *và* $EF = 6$ *cm;*

b) $OO' = 13$ *cm*, $MN = 12$ *cm* và $EF = 5$ *cm.*

5B. Cho hai đường tròn (O; 6 *cm)* và (O'; 2 *cm)* nằm ngoài nhau. Gọi *AB* là tiếp tuyến chung ngoài, *CD* là tiếp tuyến chung trong *CD* của hai đường tròn *(A* và C thuộc (O); *B* và *D* thuộc (O')). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm *OO'*.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Cho hai đường tròn (O; *R) và (O'; R')* tiếp xúc ngoài tại *A*. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở *B* và C. Tiếp tuyến chung trong cắt *BC ở I*. Gọi E, *F* thứ tự là giao điểm của *IO* với *AB* và của *IO'* với *AC.*

a) Chứng minh *A, E, I, F* cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm *K* của đường tròn này.

b) Chứng minh $IE.IO + IF.IO' = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.

c) Gọi *P* là trung điểm của *OA*. Chứng minh *PE* tiếp xúc với (K).

d) Cho *OO'* cố định và có độ dài *2a.* Tìm điều kiện của *R* và *R'* để diện tích tam giác *ABC* lớn nhất.

7. Cho đường tròn (O; *R) và* một điểm *A* trên (O). Trên đoạn *OA* lấy

điểm *B* sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$.

a) Chứng minh đường tròn đường kính *AB* tiếp xúc với (O).

b) Đường tròn (O; *R')* với $R \neq R'$ cắt đường tròn đường kính *AB* tại C. Tia *AC* cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E với *D* nằm giữa C và *E*. Chứng minh $AC = CD = DE$.

8. Cho đường tròn (O) đường kính *AB* và C là điểm nằm giữa *A* và *O.* Vẽ đường tròn (I)

có đường kính *CB*.

a) Xét vị trí tương đối của (O) và (I).

b) Kẻ dây *DE* của (O) vuông góc với *AC* tại trung điểm *H* của *AC*. Tứ giác *ADCE* là hình gì?

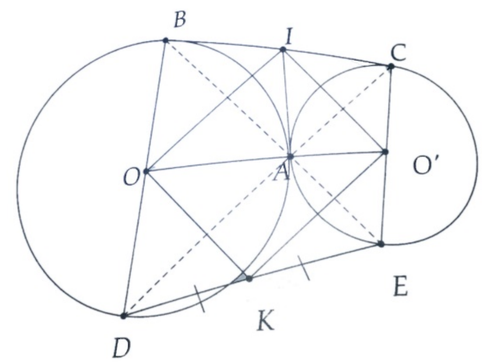
c) Gọi *K* là giao điểm của đoạn thẳng *DB* và (I). Chứng minh ba điểm *E*, *C*, *K* thẳng hàng.

d) Chứng minh *HK* là tiếp tuyến của (1).

9. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài *AB* và *CD* (*Ạ* và C thuộc (O), *B* và *D* thuộc (O')). Tiếp tuyến chung trong *MN* cắt *AB* và CD theo thứ tự là E và F (M thuộc *(O)*, *N* thuộc *(O')*). Chứng minh:

a)AB = EF; *b) EM = FN.*

BÀI 7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN



1A. a) Chứng minh được

$\widehat{BAC} = 90^0$ kết hợp

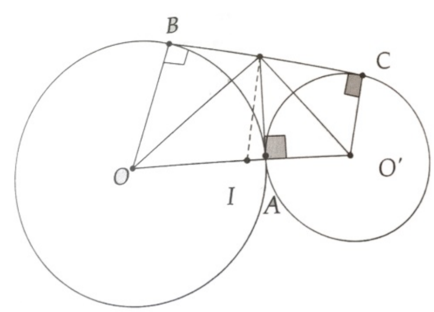
$\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0 \Rightarrow$ dpcm

b) Chứng minh $\Delta BAD \sim \Delta EAC \Rightarrow$

AD.AE=AB.AC(đpcm)

c) Chứng minh tứ giác OIO'K là hình chữ nhật

Đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ,có đường kính là IK mà $IK \perp BC$ tại I



1B. a) Tương tự 1A

$\Rightarrow \widehat{O'MO} = 90^0$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính được MA = $\sqrt{Rr}$

b) Chứng minh $S_{BCOO'} = (R + r)\sqrt{Rr}$

c) Chứng minh được

$$\Delta BAC \sim \Delta OMO' \Rightarrow \frac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2$$

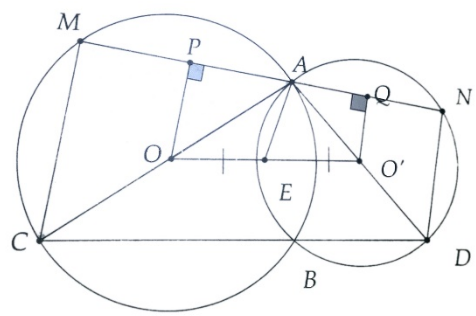
$$\Rightarrow S_{BAC} = \frac{S_{OMO'}.BC^2}{OO'^2} = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$$

d) Tứ giác OBCO′ là hình thang vuông tại B vầ C có IM là đường trung bình

$$\Rightarrow IM \perp BC = \{M\}$$

2A. Gọi I là trung điểm AB. Chú ý $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{O'A^2}$

Ta tính được AB=24cm

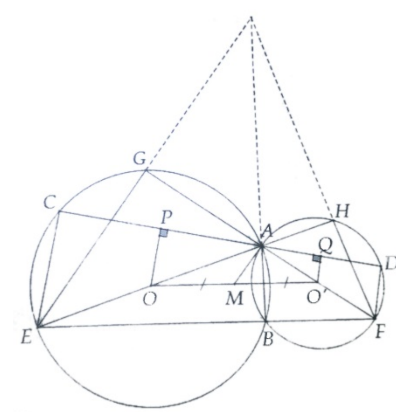


2B.a) Chú ý $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^0$

b) Vẽ $OP \perp MA$ và $O'Q \perp NA$

Chú ý hình thang vuông OPQO′ có EA là đường trung bình

3A. Vẽ $OP \perp CA ; O'Q \perp AD$ suy ra tứ giác OPQO′ là hình thang vuông tại P, Q



a) Kẻ $OP;O'Q \perp CD$ do $CD \perp MA$

và M là trung điểm của OO′ ⇒ AP=AQ

⇒AC=AD

b) i) Chú ý ΔEAF có AB, EG,FI là ba đường cao

ii) Sử dụng CD= 2PQ để lập luận, ta có kết luận: CD lớn nhất khi $CD \parallel OO'$

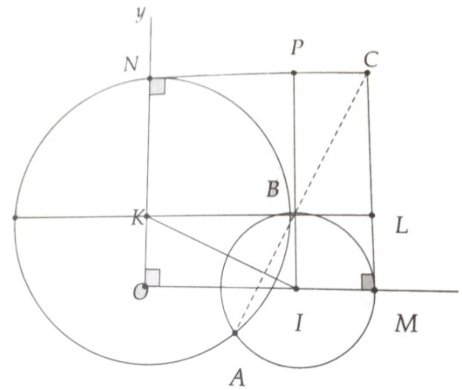
3B. a) Chỉ ra $|OI - OK| < IK < OI + OK \Rightarrow$ (1) và (k) luôn cắt nhau

b) Do OI=NK, OK=IM ⇒OM=ON

Mặ khác OMCN là hình chữ nhật $\Rightarrow$OMCN là hình vuông

c) Gọi $\{L\} = KB \cap MC,\ \{P\} = IB \cap NC \Rightarrow OKBI$ là

Hình chữ nhật và BNMI là hình vuông



$\Rightarrow \Delta BLC = \Delta KOI$

$\Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$

mà $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^0$

có $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^0$

d) Có OMCN là hình vuông cạnh a cố định

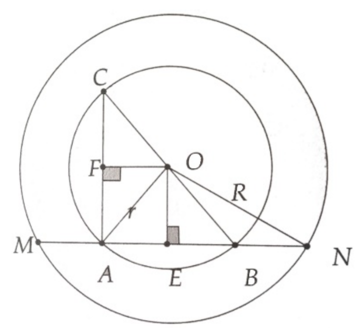
$\Rightarrow$C cố định và AB luôn đi qua điểm C

4A. Ta có OD= OC. sin$\widehat{BCD}$

$\Rightarrow$bán kính của đường tròn nhỏ là 3 cm

4B. Kẻ $OE \perp AB; OF \perp AC$

Đặt AC=a, AM=b, AN=c.



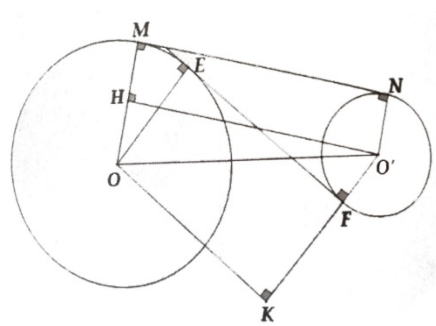
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$$

Ta chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(R^2 + r^2)$$

5A. a)



Kẻ $O'H \perp OM$; $OK \perp O'F$

có OH=R-r; O'K =R+r

Mà $OH^2 = OO'^2 - MN^2 = 36$

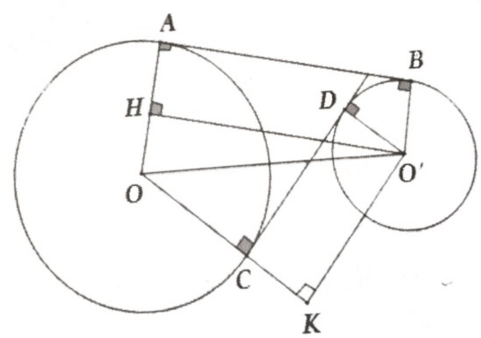
$O'K^2 = OO'^2 - EF^2 = 64$

$\Rightarrow OH = 6$ và O'K=8

$\Rightarrow$ R=7cm và r=1cm

b) $R=\frac{17}{2}cm$ và $r=\frac{7}{2}cm$

5B .



Kẻ $O'H \perp OA; O'K \perp OC$

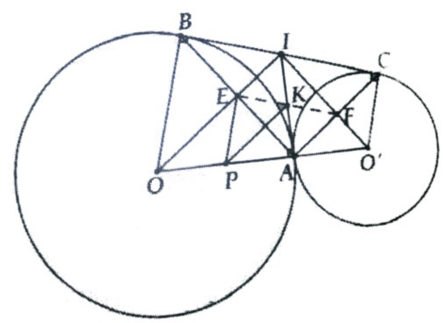
Tính được OH=4,OK=8

Đặt CD=x $\Rightarrow$ AB=2x

$OO'^2 = 64 + x^2$ và

$OO'^2 = 16 + 4x^2$

$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$



6. a) Chứng minh tứ giác AEIF là hình chữ nhật và K là trung điểm AI

b) Có $IE.IO = IB^2 = \frac{BC^2}{4}$ và $IF.IO' = IC^2 = \frac{BC^2}{4}$

$\Rightarrow 2(IE.IO + IF.IO') = AB^2 + AC^2$

c) PK Là đường trung bình của ΔOAI và là trung trực của EA

Ta có

$\Delta PEK = \Delta PAK$ nên $\widehat{PEK} = \widehat{PAK}$

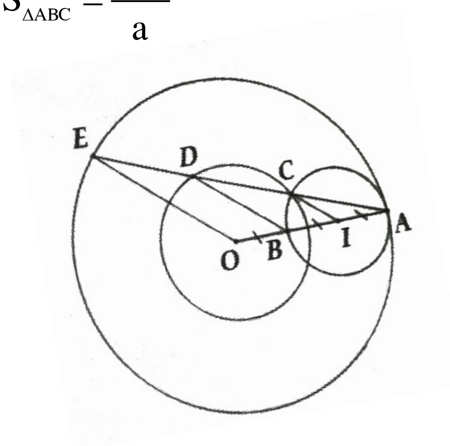
Vậy $\widehat{PEK} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

d)

$$\Delta ABC \sim \Delta IOO' \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta IOO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta IOO'}.BC^2}{OO'^2}$$

$$\text{Mà } BC=2AI';OO'=2a;S_{\Delta OIO'} = \frac{1}{2}.2a.IA = a.IA \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{IA^2}{a}$$

$$IA^2 = R.R' \le \left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow IA$$



Lớn nhất bằng a khi R=R′

7. a) Gọi I là trung điểm của AB, ta có: OI=OA-IA

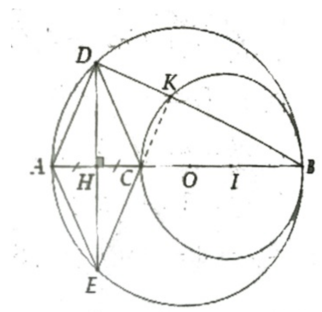
b) Ta chứng minh được

$IC \parallel BD \parallel OE$

Mà $OB=BI=IA \Rightarrow AC=CD=DE$

8. a) (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) Tứ giác ADCE là hình thoi



c) Có

$CK \perp AB, AD \perp DB$

$\Rightarrow CK \parallel AD$ mà $CE \parallel AD$

$\Rightarrow$ B,K,D thẳng hàng

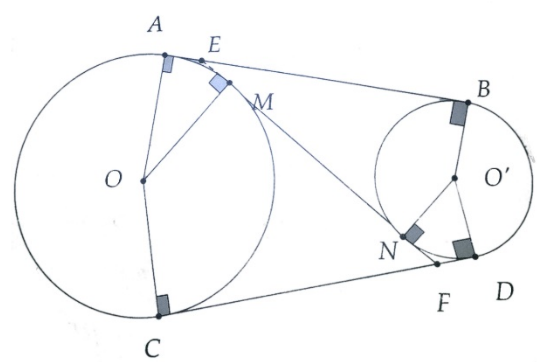
d)

$$\widehat{HKD} = \widehat{HDK};\widehat{IKB} = \widehat{IBK}$$

$$\Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^0$$

$$\Rightarrow \widehat{IKH} = 90^0$$

9. a) Ta có AB = AE + BE = EM + EN



Và CD = FD + FC = NF + NE

$\Rightarrow$ AB + CD = 2EF $\Rightarrow$ AB = EF

b) Ta có EM = AB – EB = EF – EN = NF

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đên Bài 7.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1A. Cho đường tròn (O, *R)* đường kính *AB* và dây *AC* không qua tâm *O.* Gọi *H* là trung điểm của *AC.*

a) Tính số đo góc $\widehat{ACB}$ và chứng minh *OH//BC.*

b) Tiếp tuyên tại C của (O) cắt *OH ở M.* Chứng minh đường thẳng *AM* là tiếp tuyến của (O) tại *A.*

c) Vẽ *CK* vuông góc *AB* tại *K.* Gọi *I* là trung điểm của *CK* và đặt $\widehat{CAB} = a$.
Chứng minh $IK = R\sin\alpha.\cos\alpha$.

d) Chứng minh ba điểm M, *I, B* thẳng hàng.

1B. Cho nửa đường tròn (O) đường kính *AB,* đường thẳng *d* là tiếp tuyến vói (O) tại *A.* Trên *d* lây điểm *M,* đường thẳng *MB* cắt (O) tại C. Tiếp tuyến tại C cắt *d* tại *I.*

a) Chứng minh O, *A, I, C* cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh *I* là trung điểm của *AM.*

c) Chứng minh: $MB.MC = OM^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

d) Khi *M* di động trên *d,* trọng tâm G của tam giác *AOC* thuộc đường cố định nào?

2A. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A,* đường cao *AH.* Vẽ đường tròn (O) đường kính *BH* và đường tròn tâm *O'* đường kính *CH,* hai đường tròn này cắt *AB, AC* thứ tự tại *E* và *F.*

a) Tứ giác *AEHF* là hình gì?

b) Chứng minh *EF* là tiếp tuyến chung của (O) và *(O').*

c) Chứng minh đường tròn đường kính *OO'* tiếp xúc với *EF.*

d) Cho đường tròn tâm *I* bán kính *r* tiếp xúc với *EF,* (O) và (O'). Tính *r* theo *BH* và CH?

2B. Cho đường tròn (O) đường kính *CD* = 2R, *M* là điểm thuộc (O) sao cho MC < *MD.* Gọi *K* là trung điểm của *CM,* tia *OK* cắt tiếp tuyến *Cx* tại *A.*

a) Chứng minh *OA //MD.* Từ đó suy ra *MA* là tiếp tuyêh của (O).

b) Gọi *B* là giao điểm của *AM* và tiếp tuyến *Dy* của (O), *H* là giao điểm của *OB* và *MD.*

Khi M thay đổi, chứng minh $(KO.KA + HO.HB)$ không phụ thuộc vị trí của M.

c) Giả sử $CM = R$, đường thẳng AB cắt CD tại S. Kẻ $CE \perp AB$ tại E. Chứng minh $AE.SM = AM.SE$.

d) Khi M thay đổi, chứng minh giao điểm của AD và CB luôn thuộc một đường cố định.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

3. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn $(O; R)$. Trên tia đối của tia CO lấy điểm S, SA cắt đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến tại M với đường tròn (O) cắt CD tại E, BM cắt CO tại F.

a) Chứng minh: $EM.AM = MF.OA$.

b) Chứng minh: $ES = EM = EF$.

c) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng SB và (O). Chứng minh A, I, F thẳng hàng.

d) Cho $EM = R$, tính $FA.SM$ theo R.

e) Kẻ $MH \perp AB$. Xác định vị trí điểm M để tam giác MHO có diện tích đạt giá trị lớn nhất.

4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc (O) sao cho $CA < CB$. Với H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, gọi D, M, N theo thứ tự là giao của đường tròn I đường kính CH với (O), AC và BC.

a) Tứ giác $CMHN$ là hình gì?

b) Chứng minh $OC \perp MN$.

c) Với $E = AB \cap CD$, chứng minh các điểm E, I, M và N thẳng hàng.

d) Chứng minh $ED.EC = EA.EB$.

5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến d và d' với (O). Một đường thẳng qua O cắt d ở M và cắt d' ở P. Từ O vẽ một tia vuông góc với MP và cắt d' ở N.

a) Chứng minh $OM = OP$ *và* tam giác NMP cân.

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên MN. Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của (O).

c) Chứng minh $AM.\ BN = R^2$.

d) Tìm vị trí của M để tứ giác $AMNB$ có diện tích đạt giá trị nhỏ nhất.

6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và C là điểm trên (O). Kẻ BI là phân giác góc ABC với $I \in (O)$ và gọi E là giao điểm của AI và BC.

a) Tam giác ABE là tam giác gì? Vì sao?

b) Gọi *K* là giao điểm của *AC* và *BI*. Chứng minh $EK \perp AB$.

c) Gọi *F* là điểm đối xứng với *K* qua *I*. Chứng minh *AF* là tiếp tuyến của (O) và tứ giác *AFEK* là hình thoi.

d) Khi điểm C di chuyển trên (O) thì *E* di chuyển trên đường nào?

7. Cho đường tròn (O; *R)* và *B* nằm trên (O). Từ điểm *A* bất kì nằm trên tiếp tuyến *d* tại *B* với (O), kẻ $BH \perp AO$ tại *H*.

a) Khi *A* di chuyển trên *d*, chứng minh tích *OH.OA có* giá trị không đổi.

b) Gọi C là điểm đối xứng của *B* qua *H*. Chứng minh *AC* là tiếp tuyến của (O).

c) Tia đối của tia *OA* cắt (O) tại *M*. *Chứng* minh *M* cách đều ba đường thẳng BC, *AB*, *AC*.

d) Với điểm *I* di chuyển trên *BC*, qua *A vẽ* đường thẳng vuông góc với *OI* tại *D*. Tìm vị trí của *I* trên *BC* để (3OI + OD) đạt giá trị nhỏ nhất.

8.

8. Cho tam giác *ABC* có độ dài ba cạnh *AB* = c, *AC* = *b*, *BA* = *a* và *p* là nửa chu vi của tam giác. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác lần lượt tiếp xúc với *BC*, *AC* và *AB* tại *D*, *E* và F.

a) Chứng minh (I) có bán kính $r = (p - a)\tan\frac{\widehat{BAC}}{2}$

b) Với $\widehat{BAC} = \alpha$, tìm số đo của góc EDF theo α.

c) Gọi *H*, *K* lần lượt là hình chiếu của *B*,*C* trên *EF*. Chứng minh:

$\Delta BHF \sim \Delta CKE$.

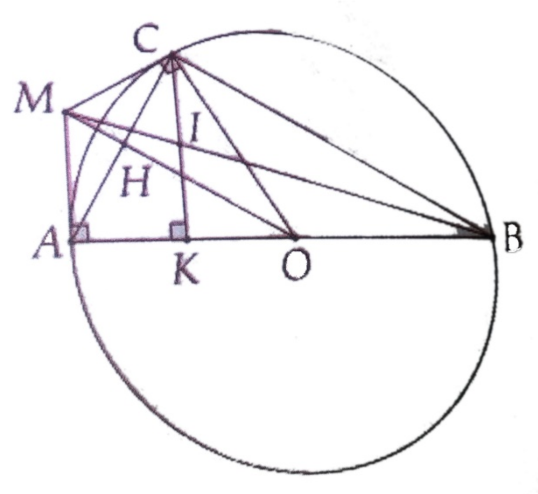
d) Kẻ *DP* vuông góc với *EF* tại *P*. Chứng minh $\Delta FPB \sim \Delta CEP$.

và *PD* là tia phân giác của góc *BPC*.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1A. a) HS tự làm

b) HS tự làm



c)

$$IK = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{2}AC.\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}AC\sin\alpha = R\cos\alpha\sin\alpha$$

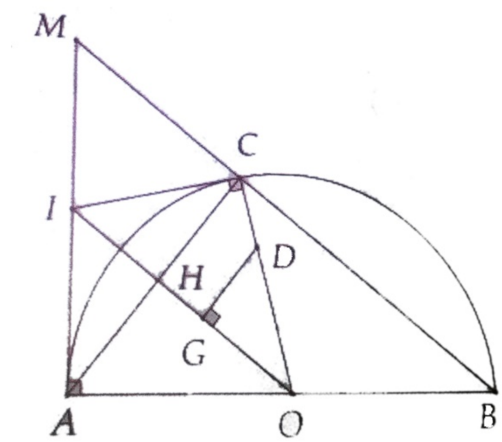
d) Giả sử BI cắt AM tại N

Vì

$IK \parallel AM \Rightarrow MO = OP$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$$

$$= \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OB^2} \Rightarrow M \equiv N$$



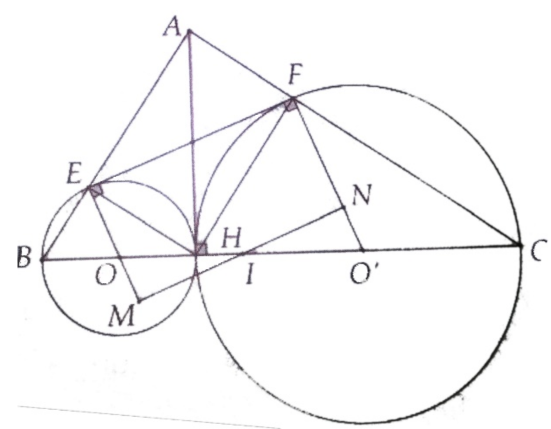
1B. a) HS tự chứng minh

b) Ta có $\widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{ICM}$

nếu IM=IA=IC

c) Sử dụng hệ thức lượng cho Δ AMB ta

dùng Pytago cho tam giác AMB



d) Kẻ $GD \parallel AC$ $(D \in OC) \Rightarrow$ D cố định

lại có $OI \perp AC \Rightarrow OG \perp DG$

$\Rightarrow G$ thuộc đường tr òn đường kính

OD cố định

2A. a) HS tự làm

b) HS tự làm

c) Chú ý hình thang vuông OEFO′ và xét đường trung bình

của hình thang này

d) Từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt OE tại M , cắt O′F tại N

Đặt BH=2R; CH= 2R′

ΔIOM vuông tại M có:

$IM^2 = IO^2 - OM^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$

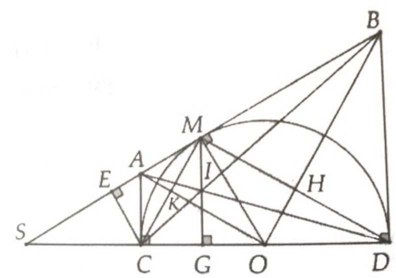
Tương tự , ΔION có $IN^2 = 4R'r$

Suy ra IM+IN=EF=AH

Vậy

$2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{R'r} = 2\sqrt{RR'}$

$\Rightarrow \sqrt{r}(\sqrt{R} + \sqrt{R'}) = \sqrt{RR'} \Rightarrow r = \dfrac{RR'}{(\sqrt{R} + \sqrt{R'})^2}$



2B. a) HS tự chứng minh

b) Chứng minh KA .KO + HB.HO = $KH^2 = MO^2 = R^2$

Không đổi

c) Với giả thiết này thì Δ CMO đều và

$\widehat{COM} = 60^0$

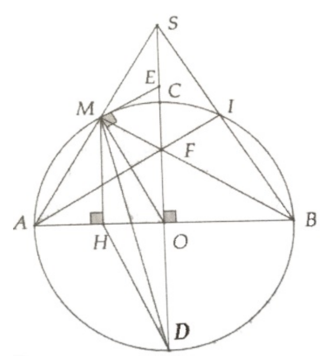
$\Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{MCA} = 30^0$

Dùng tính chất phân giác trong và ngoài của $\widehat{MCE}$ được đpcm

d) Gọi giao điểm của CB và AD là I. Do $AC \parallel BD$

Gọi giao điểm của MI với CD là G , chứng minh tương tự trên ta được IM=IG. Vậy I là trung điểm của MG $\Rightarrow$ I thuộc đường nối các trung điểm của đoạn vuông góc từ M xuống CD.

3. a) Chứng minh $\Delta MEF \sim \Delta MOA$



b) $\Delta MEF \sim \Delta MAO$ mà AO=OM $\Rightarrow$ ME=EF

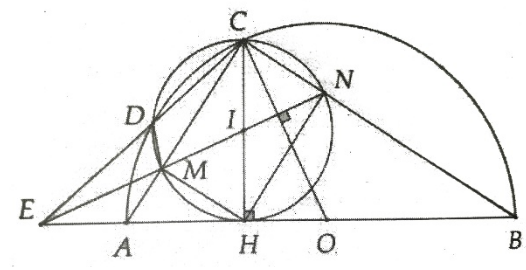
c) chứng minh F là trực tâm của Δ SAB, AI là đường cao, chứng minh A,I,F thẳng hàng.

d) FA.SM=$2R^2$

e) $S_{MHO} = \dfrac{1}{2}OH.MH \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}MO^2 = \dfrac{1}{4}R^2$

$\Rightarrow$ M ở chính giữa cung AC

4. a) Tứ giác CMHN là hình chữ nhật



b) Ta có $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$

$\widehat{CBA} = \widehat{ACH}; \widehat{ACH} = \widehat{CMN}$

$\Rightarrow \widehat{OCA} + \widehat{CMN} = 90^0$

Vậy $OC \perp MN$

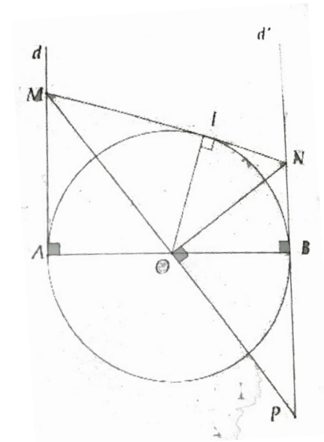
c) Ta có Δ IOC có E là trực tâm suy ra IN

đi qua M và E (đpcm)

d) Ta có $\widehat{EMA} = \widehat{CMN}, \widehat{CMN} = \widehat{CBA} \Rightarrow \Delta EMA \sim \Delta ENB$
$\Rightarrow EA.EB = EM.EN$

Tương tự $\Delta EMH \sim \Delta EHN \Rightarrow EM.EN = EH^2$ ngoài ra , Δ EHC vuông tại H có HD là đường cao

$\Rightarrow EH^2 = ED.EC$. Từ đó ta có đpcm



5. a) $\Delta MAO = \Delta PBO \Rightarrow MO = OP \Rightarrow \Delta MNP$ cân

Vì đường cao NO đồng thời là đường trung tuyến

b) $\dfrac{1}{OI^2} - \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$
$= \dfrac{1}{OP^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OB^2} \Rightarrow OI = R$

$\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của (O)

c) AM.BN=MI.IN=$OI^2 = R^2$

d)

$$S_{AMNB} = \frac{MN.AB}{2} \Rightarrow S_{AMNB} \min$$

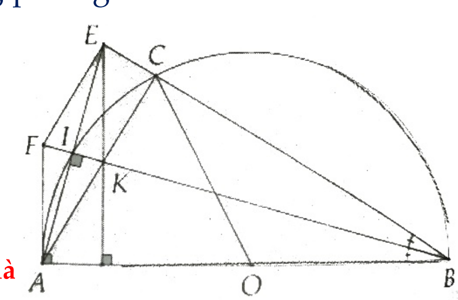
$$\Leftrightarrow MN_{min} \Leftrightarrow AM = R$$

6. a) Δ ABE cân vì BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác

b) Chứng minh K là trực tâm

$\Delta ABE \Rightarrow EK \perp AB$

c) Chứng minh

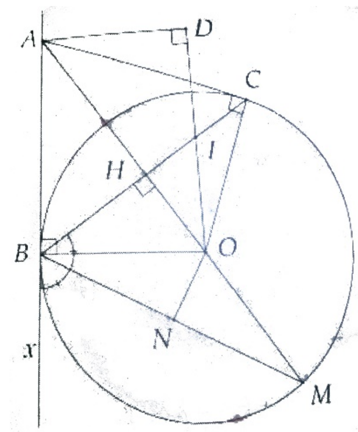


$\widehat{AFB}+\widehat{ABF}=\widehat{KBC}+\widehat{BKC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{FAB}=90^0$

$\Rightarrow$ FA là tiếp tuyến (O)

d) C di chuyển trên (O) thì E di chuyển trên (B;BA)



7. a) OH.OA=$OB^2=R^2$ không đổi

b) Chứng minh Δ ABO=Δ ACO

c) Vẽ $ON\perp BM\Rightarrow \widehat{BON}=\widehat{MON}$

có $\widehat{BON}=\widehat{MBx};\ \widehat{MON}=\widehat{HBM}$

$\Rightarrow \widehat{MBx}=\widehat{HBM}$

$\Rightarrow$ MB là phân giác của $\widehat{CBx}$ nên M cách đều hai cạnh

BA và BC mà AM là phân giác $\widehat{BAC}\Rightarrow$ đpcm

d) Ta có

$\Delta ODA\sim\Delta OHI\Rightarrow OI.OD=OH.OA=R^2$

Từ đó $3OI+OD\ge 2\sqrt{3OI.OD}=2R\sqrt{3}$

$\Rightarrow (3OI+OD)_{min}=2R\sqrt{3}\Leftrightarrow OI=\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

8. a) Ta đã chứng minh được

$AE=\dfrac{b+c-a}{2}$

$\Rightarrow AE=\dfrac{a+b+c-2a}{2}=p-a$

ΔAIE có $IE=EA\tan\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

$=(p-a)\tan\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

b) Chú ý

$BI \perp FD$ và $CI \perp DE$. Ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\widehat{IBC} + \widehat{ICD}) = 180^0 - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{BAC}) = 90^0 + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Mà $\widehat{EDF} = 180^0 - \widehat{BIC} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$

c) BH,AI,CK cùng vuông góc với EF nên chúng song song $\Rightarrow \widehat{HBA} = \widehat{IAB}$

(2 góc so le trong)

và $\widehat{KCA} = \widehat{IAC}$ mà $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$ nên $\widehat{HBA} = \widehat{KCA}$;

Vậy $\Delta BHF \sim \Delta CKE$

d)

Do $BH \parallel DP \parallel CK$ nên $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{HP}{PK}$ mà DB=DF và CD=CE

$$\Rightarrow \frac{HP}{PK} = \frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CK} \Rightarrow \Delta BPH \sim \Delta CPK \Rightarrow \widehat{BPH} = \widehat{CPE}$$

Lại có $\widehat{BFP} = \widehat{CEF} \Rightarrow \Delta BPF \sim \Delta CEP(g.g)$

mà $\widehat{BPD} = \widehat{CPD} \Rightarrow PD$ là phân giác của $\widehat{BPC}$

ĐỂ KIẾM TRA CHƯƠNG II

Thời gian làm bài của mỗi đề là 45 phút

ĐỂ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của:

A. Ba đường trung trực của tam giác.

B. Ba đường cao của tam giác.

C. Ba đường phân giác trong của tam giác.

D. Ba đường trung tuyến của tam giác.

Câu 2. Cho hai đường tròn (O; 13 cm), (O′; 5 cm) và $OO' = 8$ cm. Vị trí tương đối của hai đường tròn đó là:

A. Tiếp xúc trong. B. Tiếp xúc ngoài,

C. Đồng tâm. D. Ngoài nhau.

Câu 3. Cho đường tròn (O; 5 cm) có dây CD không đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên CD. Biết $OH = 3\ cm$, khi đó độ dài dây CD bằng:

A. 4 *cm*. B. 5 *cm*. C. 6 *cm*. D. 8 *cm*.

Câu 4. Cho MNP là tam giác đều cạnh dài 9 cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP bằng:

A. $\sqrt{5}$ *cm*. B. $2\sqrt{3}$ *cm*. C. $3\sqrt{3}$ *cm*. D. $4\sqrt{3}$ *cm*.

Câu 5. Đường tròn là hình:

A. Không có trục đối xứng.

B. Có một trục đối xứng.

C. Có hai trục đối xứng.

D. Có vô số trục đối xứng.

Câu 6. Cho đường tròn (O; 2 *cm*) và điểm A năm ngoài (O) sao cho $OA = 4\ cm$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) trong đó B, C là các tiếp điểm. Khi đó, chu vi tam giác ABC bằng:

A. $5\sqrt{3}$ *cm*. B. $6\sqrt{3}$ *cm*. C. $4\sqrt{3}$ *cm*. D. $2\sqrt{3}$ *cm*.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7 ĐIỂM)

Bài 1. (3,0 *điểm)* Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao $AH = 2cm$, cạnh $BC = 8\ cm$. Đường vuông góc vói AC tại c cắt đường thẳng AH *ở* D.

a) Chứng minh các điểm B, C cùng thuộc đường tròn đường kính AD.

b) Tính độ dài đoạn thẳng *AD.*

Bài 2. (4,0 *diêm)* Cho đường tròn (O; *R)* và đường thẳng *d* không có điểm chung sao cho khoảng cách từ O đến *d* không quá 2R. Qua diêm *M* trên *d*, vẽ các tiếp tuyến *MA, MB* tới (O) với *A, B* là các tiếp điểm. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của O trên *d.* Vẽ Dây *AB* cắt *OH ở K* và cắt *OM* tại *I.* Tia *OM* cắt (O) tại E.

a) Chứng minh $OM \perp AB$ và $OI.OM = R^2$.

b) Chứng minh $OK.OH = OI.OM$.

c) Tìm vị trí của *M* trên *d* để *OAEB* là hình thoi.

d) Khi *M* di chuyên trên *d*, chứng minh đường thẳng *AB* luôn đi qua một điểm cố định.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cho đường tròn (O; 25 *cm).* Khi đó độ dài dây lớn nhất của đường tròn bằng:

A. *20 cm.* B. *25 cm.* C. *50 cm.* D. 625 *cm.*

Câu 2. Cho hai đường tròn (O; 4 *cm), (O'*; 5 *cm)* và *OO'= 6cm.* Vị trí tương đối của (O) và *(O')* là:

A. Cắt nhau. B. Đựng nhau, C. Tiếp xúc nhau. D. Ngoài nhau.

Câu 3. Cho đường tròn (O; 5 *cm)*, dây *AB có độ* dài là 6cm. Khoảng cách từ tâm đường tròn đến dây *AB* là:

A. 3 *cm.* B. 4 *cm.* C. $\frac{5}{3}$ *cm* D. $\frac{5}{6}$ *cm*

Câu 4. Cho hình vuông *MNPQ* có cạnh bằng 4 *cm.* Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó bằng:

A. *2cm.* B. $4\sqrt{2}$ *cm.* C. $2\sqrt{3}$ *cm.* D. $2\sqrt{2}$ *cm.*

Câu 5. Cho đường tròn (O; 10 *cm)*, điểm *I* cách *O* một khoảng 6 *cm.* Qua *I* kẻ dây cung *EF* vuông góc với *OI.* Khi đó độ dài dây *EF* là:

A. 16 *cm.* B. 12 *cm.* C. 10 *cm.* D. 8 *cm.*

Câu 6. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, có *AB = 18cm, AC = 24cm.* Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng:

A. 30 *cm.* B. 20 *cm.* C. 15 *cm.* D. 10 *cm.*

PHẦN II. TỰ LUẬN (7 ĐIỂM)

Bài 1. (3,0 *điểm)* Cho tam giác *ABC* có các đường cao *BD* và *CE với* $D \in AC$ và $E \in AB$.

a) Chứng minh bốn điểm B, C, *D, E* cùng thuộc một đường tròn.

b) So sánh độ dài đoạn thẳng BC với các đoạn thẳng CE và BD.

Bài 2. (4,0 *điểm)* Cho nửa đường tròn tâm O đường kính *AB*. Điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác *A* và B). Qua C vẽ tiếp tuyến *d* với nửa đường tròn. Gọi E, *F* là hình chiếu của *A, B* xuống *d* và *H* là chân đường vuông góc hạ từ C xuống *AB.*

a) Chứng minh *AC* là phân giác của góc EAH .

b) Chứng minh *AC* và *HF* song song.

c) Chứng minh *(AE + BF)* không đổi khi C di động trên nửa đường tròn tâm O.

d) Tìm vị trí của C trên nửa đường tròn tâm *O* để tích *AE.BF* đạt giá tri lớn nhất.

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 90 phút.

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $P = 7 + \sqrt{2} - \sqrt{51 + 14\sqrt{2}}$

b) $Q = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{6}{\sqrt{3}+3}$

Bài 2: Cho các biểu thức:

$$A = \frac{6}{x + 2\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 4$$

a) Tính giá trị của A khi x=1/4 và rút gọn B.

b) Đặt $M = \dfrac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của x để $M > 1$.

c) Tìm các giá trị của x nguyên để M nguyên.

Bài 3. (1,5 *điểm)* Cho hàm số bậc nhất y = (m-4)x+m+l (*m* là tham số) có đồ thị là đường thẳng *d*. Tìm *m* để *d:*

a) Đi qua điểm *A(1; -1*). Vẽ *d* với *m* vừa tìm được.

b) Song song với đường thẳng d': y = l-2x

Bài 4. (3,5 *điểm)* Cho đường tròn *(O; 3 cm)* và *A* là một điểm cố định thuộc đường tròn. Đường thẳng *d* tiếp xúc với đường tròn tại *A*.Trên *d* lấy điểm *M* (với *M* khác *A).* Kẻ dây cung *AB* vuông góc với *OM* tại *H.*

a) Tính độ dài *OM* và *AB* khi *OH*=2 *cm.*

b) Chứng minh tam giác *MBA* cân *và MB* là tiếp tuyến của *(O).*

ĐỀ SỐ 2

Bài 1 (1,0 điểm).

a) Thực hiện phép tính $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin^2 19° + \cos^2 19° + \tan 19° - \cot 71°$

Bài 2 (2 điểm).

a) Cho biểu thức $A=\frac{3}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

b) Tính $P = A:\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Từ đó tìm x để $P < 0$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{x+12}{\sqrt{x}-1}.\frac{1}{P}$

Bài 3 (2,5 điểm).

Cho hai hàm số y = 2x+l và y = x - l có đồ thị lần lượt là đường thẳng d_1 và d_2.

a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ *Oxy.*

b) Tìm tọa độ giao điểm C của d_1 và d_2 bằng đồ thị và bằng phép toán

- c) Gọi *A* và *B* lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoàng. Tính diện tích của tam giác *ABC.*

Bài 4 (3,5 *điểm).*

Cho đường tròn (O; R). Từ điểm *A* nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến *AB, AC* với đường tròn *(B,C* là các tiếp điểm). Gọi *H* là trung điểm của *BC.*

a) Chứng minh ba điểm *A, H, O* thẳng hàng và các điểm *A, B, C, O* cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính *BD* của (O). Vẽ *CK* vuông góc với *BD.* Chứng minh *AC.CD = CK.AO.*

c) Tia *AO* cắt đường tròn (O) tại *M* (M nằm giữa *A* và O). Chứng minh *M* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC.*

d) Gọi I là giao điểm của AD và CK. Chứng minh rằng I là trung điểm của CK.

Bài 5 (0,5 *điểm).*

Cho các số thực x, y không âm và thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 \leq 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x(29x+3y)} + \sqrt{y(29y + 3x)}.$$

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. A	Câu 4. C
Câu 2. A	Câu 5. C
Câu 3. A	Câu 6. C

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) Chứng minh được $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ Các tam giác vuông ABD,ACD có chung cạnh huyền AD

$\Rightarrow$ B,C cùng thuộc đường tròn đường kính AD

b) Ta có HC= 4cm

Tính được AC=2$\sqrt{5}$ cm

Xét tam giác ACD vuông tại C có đường cao HC; AC^2 = AH.AD

Từ đó tính được AD=10cm

Bài 2. a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau chứng minh được OM là đường trung trực của AB, tức OM vuông góc AB. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM chứng minh được : OI. OM=$OA^2 = R^2$

b) Chứng minh được

$\Delta OKI \sim \Delta OMH$ (g.g)

$\Rightarrow$ OK.OH=OI.OM

c) Để OAEB là hình thoi thì OA=EB. Khi đó, tam giác OAK đều, tức là $\widehat{AOM} = 60^0$. Sử dụng tỉ số lượng giác của góc $\widehat{AOM}$, tính được OM=2OA=2R

, tức là M cách O một khoảng 2R

d) Kết hợp ý a) và b) $\Rightarrow OK.OH = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$

Mà độ dài OH không đổi nên độ dài OK không đổi

Do đó, điểm K là điểm cố định mà AB luôn đi qua khi M thay đổi.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. C	Câu 4. D
Câu 2. A	Câu 5. A
Câu 3. B	Câu 6. C

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) Hai tam giác BEC và BDC vuông cùng có cạnh BC là huyền, vì vậy E,D cùng thuộc đường tròn đường kính BC, tức là điểm B,D,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

b) Xét tam giác BEC vuông tại E có BC là cạnh huyền . do đó BC>CE. Chứng minh tương tự , suy ra BC>BD

Bài 2. a) Ta có

$\widehat{ECA} + \widehat{OCA} = 90^0$ và

$\widehat{ACH} + \widehat{OAC} = 90^0$

mà $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

(do tam giác AOC cân tại O)

Suy ra $\widehat{ECA} = \widehat{ACH}$

Khi đó $\widehat{EAC} = \widehat{HAC}$ (cùng lần lượt phụ với $\widehat{ECA}$ và $\widehat{ACH}$) . ta có đpcm

b) Chứng minh tương tự suy ra BC là phân giác của $\widehat{FBH}$

Từ đó, chứng minh được BC vuông góc HF (1)

Tam giác ABC có trung tuyến OC=$\frac{1}{2}$ AB. Suy ra tam giác ABC vuông tại C , tức là BC vuông góc với AC (2)

Từ (1),(2) suy ra đpcm

c) Ta có : AE+BF =2OC=2R không đổi

d) Ta có $AE.BF \le \frac{(AE+BF)^2}{4} = R^2$

suy ra AE.BF lớn nhất $= R^2 \Leftrightarrow$ AE=BF=R

Điều này xẩy ra khi C là điểm chính giữa cung AB

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I

ĐỀ SỐ 1

Bài 1. a) Ta có $P = 7+\sqrt{2}-\sqrt{51+14\sqrt{2}} = 7+\sqrt{2}-(7+\sqrt{2}) = 0$

b) Ta có $Q = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}+\sqrt{3}+2+\frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 4+\sqrt{3}$

Bài 2. Tìm được $A = \frac{24}{5}$ và $B = \frac{-6}{x-4}$ với x>0, $x \ne 4$ ta tìm được 0<x<1

c) Ta có $M = -1+\frac{2}{\sqrt{x}} \in Z \Rightarrow \sqrt{x} \in$ Ư(2) từ đó tìm được x=1

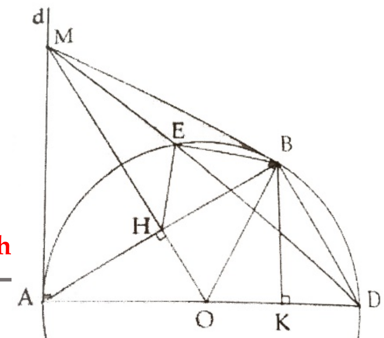
Bài 3. Vì d đi qua A nên thay tọa độ của A vào phương trình của d ta tìm được m=1

HS tự vẽ d trong trường hợp m=1

b) Để $(d) \| (d') \Rightarrow \begin{cases} m-4=-2 \\ m+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m \ne 0 \end{cases} \Rightarrow m=2$

Bài 4. a) Tính được AH=$\sqrt{5}$. Từ đó suy ra AB= $2\sqrt{5}$

và OM=4,5cm



b) Với Δ MAB cân tại MH là trung tuyến vừa là

đường cao;

ta có Δ MAO $= \Delta$ MBO

$\Rightarrow MB \perp OB$ $\Rightarrow$ MB là tiếp tuyến của (O)

c) Dễ thấy $MA^2 = MH.MO$ (Theo hệ thức

lượng trong tam giác vuông)

Chứng minh được

$$\Delta MBE \sim \Delta MBD$$
$$\Rightarrow MB^2 = ME.MD = MA^2$$
$$\Rightarrow MH.MO = ME.MD$$
$$\Rightarrow \Delta EHM \sim \Delta ODM(c.g.c)$$
$$\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{ODM}$$

d) Kẻ

$BK \perp AD$

ta có $S_{HOA} = \dfrac{1}{2}S_{ABD} = \dfrac{1}{4}BK.AD$

Vì $BK \le 3 \Rightarrow S_{HOA}$ lớn nhất khi B là điểm chính giữa cung AD khi đó

AM=OA =3

Bài 5. ĐK;

$x, y \ge -2$

ta có $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) + \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} = 0$$

Từ đó tìm được y=x

Thay y=x vào T ta được T=x^2 +2x+10

Từ đó tìm được $T_{min} = 9 \Leftrightarrow x = y = -1$

ĐỀ SỐ 2

Bài 1. a) Ta có $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

b) $B=\sin^2 19^0+\cos^2 19^0+\tan 19^0-\tan 19^0=1$

Bài 2. a) Tìm được $A=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$; với $x\ge 0, x\ne 1$ Từ A=$\frac{1}{2}\Rightarrow x=9$

b) Tìm được $P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$. Từ P<0 và điều kiện $x\ge 0, x\ne 1$ ta tìm được $0\le x<1$

c) $M=\frac{x+12}{\sqrt{x}-1}.\frac{1}{P}=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+2}+4\ge 4$

Vậy $M_{min}=4\Leftrightarrow x=4$

Bài 3. a) HS Tự làm

b) Tìm được C(-2;-3) là tọa độ giao điểm của d_1 và d_2

c) Kẻ

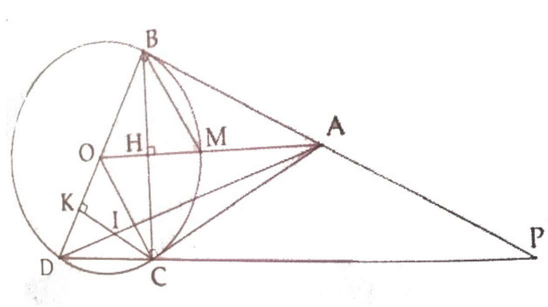
$CH\perp AB\ (CH\perp Ox)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}CH.AB=\frac{9}{4}(dvdt)$

Bài 4. a) A,H,O thẳng hàng vì AH,AO cùng vuông góc với BC

HS tự chứng minh A,B,C,O cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

b) Ta có



$\widehat{KDC}=\widehat{AOD}$

(cùng phụ $\widehat{OBC}$)

$\Rightarrow \Delta KDC\sim\Delta COA$ (g.g)

$\Rightarrow$ AC.CD=CK.AO

c) Ta có

$\widehat{MBA}=90^0-\widehat{OBM}$ và $\widehat{MBC}=90^0-\widehat{OMB}$

Mà $\widehat{OBM}=\widehat{OMB}$ (ΔOBM cân) $\Rightarrow\widehat{MBA}=\widehat{MBC}\Rightarrow$ MB là phân giác $\widehat{ABC}$. Mặt khác AM là phân giác $\widehat{BAC}$

Từ đó suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

d) Kẻ $CD \cap AC = P$. Chứng minh Δ ACP cân tại A

$\Rightarrow CA = AB = AP \Rightarrow A$ là trung điểm CK

Bài 5. Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có;

$$\frac{1}{\sqrt{32}}\sqrt{32x(29x+3y)} \le \frac{1}{4\sqrt{2}}(\frac{32x+29x+3y}{2}) = \frac{1}{8\sqrt{2}}(61x+3y)$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{32}}\sqrt{32y(29y+3x)} \le \frac{1}{8\sqrt{2}}(61y+3)$$

$$\Rightarrow P \le 4\sqrt{2}(x+y) \le 4\sqrt{2}\left(\frac{x^2+1}{2}+\frac{y^2+1}{2}\right) = 8\sqrt{2}$$

Vậy $P_{min} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = 1$

CHƯƠNG III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

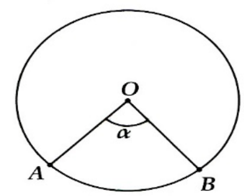
BÀI 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc ở tâm

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm. Ví dụ $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm (Hình 1).

- Nếu $0^0 < a < 180^0$ thì cung nằm bên trong góc được gọi là cung nhỏ, cung nằm bên ngoài góc được gọi là cung lớn.



Hình 1

- Nếu $a = 180^0$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.

- Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn. Góc bẹt chắn nửa đường tròn.

- Kí hiệu cung AB là $\overset{\frown}{AB}$.

2. Số đo cung

- Số đo của cung $\overset{\frown}{AB}$ được kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$.

- Số đô của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

Ví dụ: $\widehat{AOB}$ = sđ $\overset{\frown}{AB}$ (góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{AB}$) (Hình 1).

- Số đo của cung lớn bắng hiệu giữa 360^0 và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0. Cung cả đường tròn có số đo 360^0.

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

4. Định lí

Nếu C làm một điểm nằm trên cung AB thì

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AB} = \text{sđ } \overset{\frown}{AC} + \text{sđ } \overset{\frown}{CB}$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Phương pháp giải: Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0. Cung cả đường tròn có số đo 360^0.

- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

- Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

1A. Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $\widehat{AMB} = 40^0$.

a) Tính $\widehat{AMO}$ và $\widehat{AOM}$.

b) Tính số đo cung $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ và $\overset{\frown}{AB}$ lớn.

1B. Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (O), cho hai điểm C và D sao cho cung $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành ba cung bằng nhau ($\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F.

a) Hãy so sánh các đoạn thẳng AE và FB.

b) Chứng minh các đường thẳng AB và CD song song.

2A. Cho đường tròn (O; R), lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho OM = 2R. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ.

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

2B. Cho (O; *5cm)* và điểm M sao cho $OM = 10\ cm$. Vẽ hai tiếp tuyến *MA* và MB *(A, B* là các tiếp điểm). Tính góc ở tâm do hai tia *OA* và *OB* tạo ra.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

3. Cho đường tròn (O) đường kính *AB,* vẽ góc ở tâm $AOC = 50°$ với c nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với *AB* và dây *DE* song song với *AB.*

a) Tính số đo cung nhỏ *BE.*

b) Tính số đo cung *CBE.* Từ đó suy ra ba điểm *C, O, E* thẳng hàng.

4. Cho đường tròn (O; *R*). Gọi *H* là trung điểm của bán kính *OB.* Dây CD vuông góc với *OB* tại *H.* Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{CD}$.

5. Cho tam giác *ABC* cân tại *A.* Vẽ đường tròn tâm o, đường kính *BC.* Đường tròn (O) cắt *AB* và *AC* lần lượt tại M và *N.*

a) Chứng minh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN}$ có số đo bằng nhau.

b) Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40°$.

6. Cho đường tròn (O; *R*). Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{AB}$.

7. Cho (O; *R)* và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ *OK* vuông góc với *MN* tại *K.* Hãy tính:

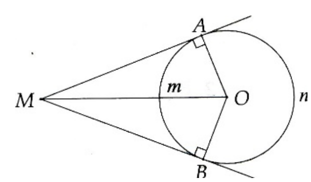
a) Độ dài *OK* theo *R.*

b) Số đó các góc $\widehat{MOK}$ và $\widehat{MON}$.

c) Số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

CHƯƠNG III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

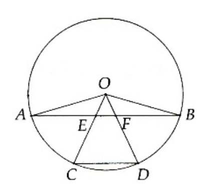
BÀI 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG



1A. a) Chứng minh được OM là tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$. Từ đó ta tìm được $\widehat{AMO} = 20^0$, $\widehat{AOM} = 70^0$

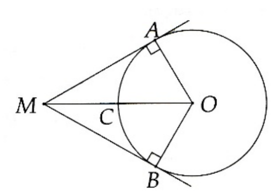
b) sđ $\overset{\frown}{AmB} = \widehat{AOB} = 140^0$

$\Rightarrow$sđ $\overset{\frown}{AnB} = 220^0$



1B. a) Chứng minh được $\Delta OEA = \Delta OFB \Rightarrow AE = FB$

b) Chứng minh được $\widehat{OEF} = \widehat{OCD} \Rightarrow AB // CD$

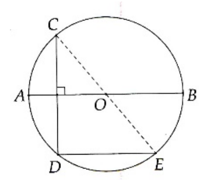


2A. a) Sử dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ΔAMO ta tính được $\widehat{AOM} = 60^0$

b) Tính được $\widehat{AOB} = 120^0$, sđ $\overset{\frown}{ABC} = 120^0$.

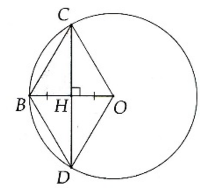
c) Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

2B. Tương tự 2A



Chứng minh được $\widehat{AOB} = 120^0$

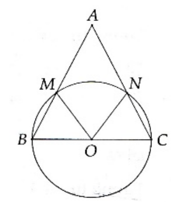
3. a) Tính được sđ $\overset{\frown}{BC} = 50^0$.



b) Chứng minh được sđ $\overset{\frown}{CBE} = 180^0$

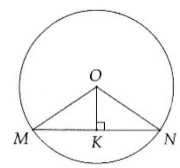
$\Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (ĐPCM)

* Cách khác: sử dụng $\overset{\frown}{CDE} = 90^0$ $\Rightarrow$ ĐPCM.



4. Chứng minh được ΔBOC và ΔBOD là tam giác đều nên suy ra được sđ $\overset{\frown}{CD}$ nhỏ = 120^0 và sđ $\overset{\frown}{CD}$ lớn = 240^0.

5. a)Chứng minh được $\Delta BOM = \Delta CON$ (c.g.c), từ đó suy ra $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$



b) Tính được $\widehat{MON} = 100^0$

6. Tính được sđ $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ = $\widehat{AOB} = 90^0$.

Suy ra đ $\overset{\frown}{AB}$ lớn = 270^0.

7. a) Tính được $OK = \dfrac{R}{2}$

b) Tính được $\widehat{MOK} = 60^0$, $\widehat{MON} = 120^0$

c) HS tự làm.

BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

3. Bổ sung

a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Phương pháp giải: Để giải các bài toán liên quan đến cung và dây, cần nắm chắc định nghĩa góc ở tâm và kết hợp với sự liên hệ giữa cung và dây.

1A. Chứng minh hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau.

1B. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Chứng minh $AC = BE$.

2A. Giả sử AB là một dây cung của đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy các điểm C và D sao cho $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. Chứng minh AB và CD song song.

2B. Giả sử ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D. Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Chứng minh:

a) BC song song với DE;

b) Tứ giác $BCED$ là hình thang cân.

3A. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$ và $BC < BD$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:

a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF;

b) Số đo các cung $\overset{\frown}{AE}$ và $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O').

3B. Cho đường tròn tâm o đường kính AB. Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho sđ $\overset{\frown}{BM} < 90°$. Vẽ dây MD song song với AB. Dây DN cắt AB tại £. Từ R vẽ một đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng DM tại C. Chứng minh:

a) $AB \perp DN$;

b) BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây AC và BD song song với nhau. So sánh hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{BD}$.

5. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$. Chứng minh:

a) $AM = CN$;

b) $MN = CA = CB$.

6. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Hãy so sánh các cung nhỏ AB, AC và BC biết $\widehat{A} = 50°$.

7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng nửa đường tròn lấy hai điểm C, D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

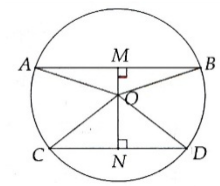
a) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{CF}$ và $\overset{\frown}{DB}$ bằng nhau;

b) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BF}$ và $\overset{\frown}{DE}$ bằng nhau;

c) $DE = BF$.

BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

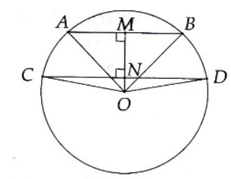
1A. Trường hợp 1: Tâm O ở giữa của hai dây.



Kẻ OM $\perp$ AB suy ra OM $\perp$ CD tại N.

Ta chứng minh được $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (1)

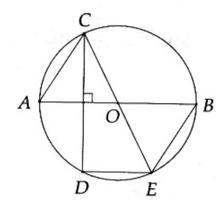
Tương tự $\widehat{CON} = \widehat{DON}$ (2)



Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

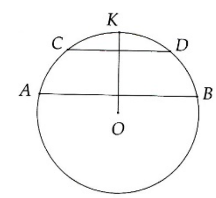
Trường hợp 2: Tâm O nằm ngoài khoảng hai dây. Kẻ OM $\perp$ AB suy ra OM $\perp$ CD tại N.

Tương tự $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$



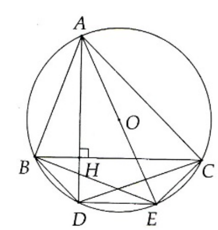
1B. Ta chứng minh $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE}$, mà CD $\perp$ AB nên . Từ đó suy ra .

* Cách khác:Chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{BOE}$ $\Rightarrow$ ĐPCM.



2A. Ta lấy K là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$

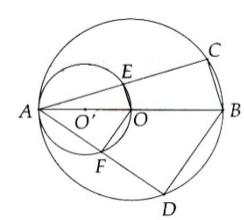
Ta chứng minh được $\overset{\frown}{CK} = \overset{\frown}{KD}$. Từ đó ta có OK $\perp$ CD, OK $\perp$ AB $\Rightarrow$ CD//AB.



2B. a) HS tự chứng minh.

b) Ta chứng minh được $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$ từ đó suy ra BE = CD và tứ giác BDEC là hình thang cân.

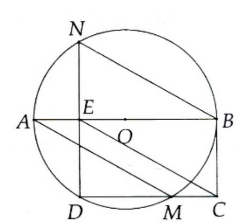
3A. a) Ta chứng minh E là trung điểm của AC nên $OE = \frac{1}{2}BC.$



Tương tự ta có $OF = \frac{1}{2}DB$.

Mà BC < BD ta suy ra OE < OF

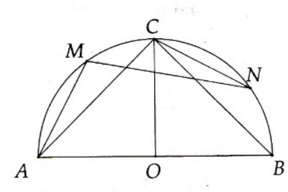
b) Chứng minh được $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$



Từ đó ta có

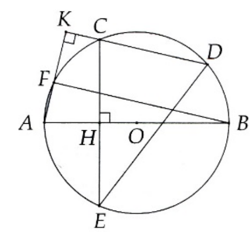
$AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AE}$ sđ $\overset{\frown}{AF}$



3B. a) HS tự chứng minh

b) Ta chứng minh được tứ giác BCEN là hình bình hành $\Rightarrow$ BC = EN.



Do BCDE là hình bình hành

$\Rightarrow$ BC = ED; DE = EN

$\Rightarrow$ BA $\perp$EN $\Rightarrow$ BA $\perp$ BC

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến

4. Ta chứng minh được $\Delta ABC = \Delta BDA$ từ đó suy ra $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

5. a) HS tự chứng minh.

b) Chứng minh được $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$ $\Rightarrow$ ĐPCM.

6. Gợi ý: Đưa về so sánh góc ở tâm để kết luận.

7. a) HS tự chứng minh.

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của $CE \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$

c) Sử dụng mối liên hệ cung và dây.

BÀI 3. GÓC NỘI TIẾP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là *góc nội tiếp.*

Lưu ý: Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là *cung bị chắn.*

2. Định lý

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả

Trong một đường tròn:

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai góc bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau, tam giác đồng dạng

Phương pháp giải: Dùng Hệ quả trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau.

1A. Cho đường tròn (O) và điểm *I* không nằm trên (O). Qua điểm *I* kẻ hai dây cung *AB* và CD (A nằm giữa *I* và B, C nằm giữa I và D).

a) So sánh các cặp góc $\widehat{ACI}$ và $\widehat{ABD}$; $\widehat{CAI}$ và $\widehat{CDB}$.

b) Chứng minh các tam giác *IAC* và *IDB* đồng dạng.

c) Chứng minh *IA.IB = IC.ID.*

1B. Cho nửa đường tròn (O) đường kính *AB.* Lấy M là điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn (M khác *A* và *B*). Kẻ *MH* vuông góc với *AB* ($H \in AB$). Trên cùng nửa mặt phang bờ *AB* chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính *AH* và tâm O_2, đường kính *BH*. Đoạn *MA* và *MB* cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q. Chứng minh:

a) $MH = PQ$;

b) Các tam giác MPQ và MBA đồng dạng;

c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

2A. Cho đường tròn (O) có các dây cung *AB, BC, CA.* Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ *AB.* Vẽ dây *MN* song song với *BC* và gọi *s* là giao điểm của *MN* và *AC.* Chứng minh SM = SC và *SN* = SA.

2B. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, đường cao *AH* và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính *AM.*

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi *N* là giao điểm *AH* với (O). Tứ giác *BCMN* là hình gì? Vì sao?

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng

3A. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, *MB* vuông góc với nhau. Gọi *I, K* lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và *MB.*

a) Chứng minh ba điểm A, O, *B* thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm của *AK* và *BI.* Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAS.

3B. Cho (O), đường kính *AB,* điểm D thuộc đường tròn. Gọi *E* là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác *ABE* là tam giác gì?

b) Gọi *K* là giao điểm của *EB* với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

4A. Cho đường tròn (O), đường kính *AB* và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. *SA* và *SB* lần lượt cắt đường tròn tại *M, N.* Gọi *P* là giao điểm của *BM* và *AN.* Chứng minh $SP \perp AB$.

4B. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại *H.* Vẽ đường kính *AF.*

a) Tứ giác *BFCH* là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của *BC.* Chứng minh rằng ba điểm *H, M, F* thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho đường tròn (O) và hai dây song song *AB, CD.* Trên cung nhỏ *AB* lấy điểm *M* tùy ý. Chứng minh $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$..

6. Cho đường tròn (O) và hai dây cung *AB, AC* bằng nhau. Qua *A* vẽ một cát tuyến cắt dây *BC ở D* và cắt (O) ở *E.* Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

7. Cho tam giác *ABC* có đường cao *AH* và nội tiếp đường tròn (O), đường kính *AD.* Chứng minh: $AB.AC = AH.AD$.

8. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O; *R),* đường cao *AH,* biết $AB = 8cm$, $AC = 15\ cm$, $AH = 5cm$. Tính bán kính của đường tròn (O).

9. Cho tam giác *ABC (AB < AC)* nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính $MN \perp BC$ (điểm *M* thuộc cung *BC* không chứa *A).* Chứng minh các tia *AM, AN* lần lượt là các tia phân giác các góc trong và các góc ngoài tại đỉnh *A* của tam giác *ABC.*

10. Cho nửa (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn và cùng phía với nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB và chứa nửa đường tròn. *CA* cắt nửa đường tròn ở *M, CB* cắt nửa đường tròn ở *N.* Gọi *H* là giao điểm của *AN* và *BM.*

a) Chứng minh $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của *CH.* Chứng minh *MI* là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

11. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A* và *B.* Vẽ các đường kính *AC* và *AD* của hai đường tròn. Chứng minh ba điểm *C, B, D* thẳng hàng.

12. Cho đường tròn tâm O đường kính *AB* và một điểm C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ đường tròn (7) tiếp xúc với (O) tại C và tiếp xúc với đường kính *AB* tại D.

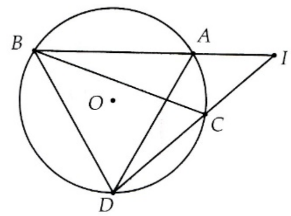
a) Nêu cách vẽ đường tròn *(I)* nói trên.

b) Đường tròn *(I)* cắt cắt *CA, CB* lần lượt tại các điểm thứ hai là *M, N.* Chứng minh *M, I, N* thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng CD đi qua điểm chính giữa nửa đường tròn *(O)* không chứa C.

BÀI 3. GÓC NỘI TIẾP

1A. a) HS tự chứng minh.

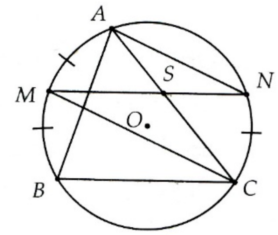


b) $\Delta IAC \sim \Delta IDB$ (g.g)

c) Sử dụng kết quả câu b).

1B. a) MPHQ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ MH = PQ

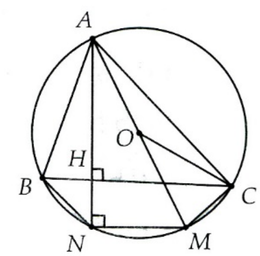
b) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông chứng minh được $MP.MA = MQ.MB \Rightarrow MPQ \sim \Delta MBA$



c) $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của (O_2).

Tương tự PQ cũng là tiếp tuyến.

2A. Do sđ $\overset{\frown}{MB} =$ sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{NC}$



$\Rightarrow \widehat{NAS} = \widehat{ANS}$

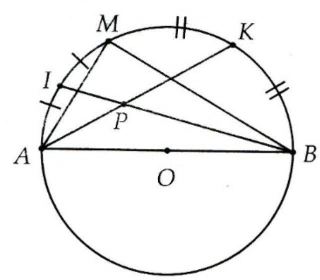
$\Rightarrow SA = SN \Rightarrow SM = SC$

2B. a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp)

b) ta có $\Delta ABH \sim \Delta AMC\,(g.g)$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}, \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$



c) $\widehat{ANM} = 90^0$

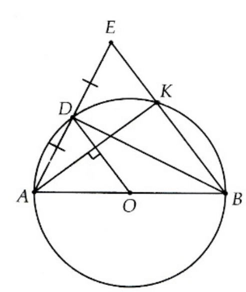
$\Rightarrow MNBC$ là hình thang

$\Rightarrow BC // MN \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BN}$ = sđ $\overset{\frown}{CM}$

$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BCM}$ nên BCMN là hình thang cân.

3A. a) Chú ý:

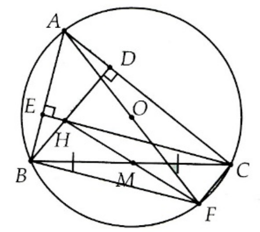
$M, A, B \in (O)$ và $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow$ ĐPCM.



b) Gợi ý: Chứng minh AK và BI lần lượt là phân giác trong góc A, B của tam giác MAB.

3B. a) Chứng minh được ΔBAE cân tại B.

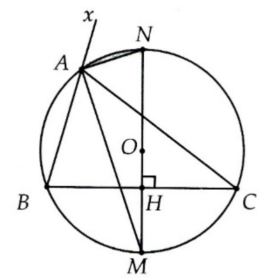
b) Chứng minh được DO//BE (tính chất đường trung bình)



Mà $AK \perp BE \quad (\widehat{AKB} = 90^0) \Rightarrow AK \perp DO$

4A. Gợi ý: Chứng minh P là trực tâm tam giác SAB.

4B. a) Chứng minh được BFCH là hình bình hành.

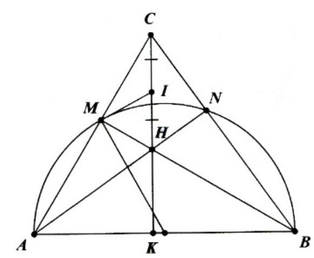


b) Sử dụng kết quả câu a), suy ra HF đi qua M.

c) Chú ý: OM là đường trung bình của $\Delta AHF \Rightarrow$ ĐPCM.

5. Do AB//CD $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ $\Rightarrow$ ĐPCM.

6. Chứng minh được: ΔABD đồng dạng ΔAEB (g-g) $\Rightarrow$ ĐPCM.

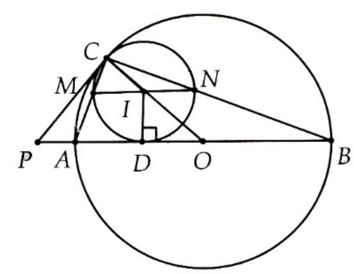


7.Gợi ý: Xét các tam giác đồng dạng để chứng minh

8. Gợi ý: Sử dụng kết quả Bài 7.

$\Rightarrow$ AO = 12cm.

9. Chứng minh được $\widehat{BM} = \widehat{MC} \Rightarrow AM$ là phân giác trong.



Mặt khác: $\widehat{MAN} = 90^0$

$\Rightarrow$ AN là phân giác ngoài.

10. a) HS tự chứng minh

b) Gọi $CH \cap AB = K$

Chứng minh được ΔMIC cân tại I.

$\Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{IMC}$

Tương tự $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$

Chứng minh được $\widehat{IMO} = 90^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

11. $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^0$

$\Rightarrow$ C, B, D thẳng hàng.

12. a) Vẽ tiếp tuyến tại C cắt đường AB ở P. Phân giác $\widehat{CPB}$ cắt OC ở I. Vẽ đường tròn tâm I bán kính IC, đó là đường tròn cần tìm.

b) Do $\widehat{ACB} = 90^0$ nên $\widehat{MCN} = 90^0$

$\Rightarrow$ MN là đường kính của (I) $\Rightarrow$ ĐPCM.

c) Chứng minh được MN//AB nên ID $\perp$ MN $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{ND}$ hay CD là tia phân giác $\widehat{ACB} \Rightarrow$ ĐPCM.

BÀI 4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho đường tròn tâm (O) có *Ax* là tia tiếp tuyến tại tiếp điểm *A*

và dây cung *AB.* Khi đó, góc $\widehat{BAx}$ là góc tạo bởi *tia tiêp tuyên và dây cung.*

2. Định lí

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyên và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

4. Bổ đề

Nếu góc $\widehat{BAx}$ với đỉnh *A* nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung *AB có* số đo bằng nửa số đo của cung *AB* nằm bên trong góc đó thì cạnh *Ax* là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh các góc bằng nhau, các đẳng thức hoặc các tam giác đổng dạng

Phương pháp giải: Sử dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyên và dây cung hoặc hệ quả góc nội tiếp.

1A. Cho điểm *A* nằm ngoài đường tròn (O). Qua *A* kẻ hai tiếp tuyến *AB* và *AC* với (O) (B, c là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến *AMN* với (O) (M nằm giữa *A* và *N).*

a) Chứng minh $AB^2 = AM.\ AN$.

b) Gọi $H = AO \in BC$. Chứng minh $AH.AO = AM.AN$.

c) Đoạn thẳng *AO* cắt đường tròn (O) tại *I.* Chứng minh *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC.*

1B. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

a) Chứng minh $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b) Tính IA, IC bắt rằng AB = 20cm, AC = 28cm, BC = 24cm.

2A. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P.

a) Chứng minh các tam giác PAC và PBA đồng dạng.

b) Chứng minh $PA^2 = PB.PC$.

c) Tia phân giác trong của góc A cắt BC và (O) lần lượt tại D và M. Chứng minh $MB^2 = MA.MD$.

2B. Cho hình bình hành ABCD, $\widehat{A} \leq 90^0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, một tia là tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp giải: Sử dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung hoặc hệ quả của hai góc nội tiếp.

3A. Cho các đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc trong với nhau tại A (R > R′). Vẽ đường kính AB của (O), AB cắt (O′) tại điểm thứ hai C. Từ B vẽ tiếp tuyến BP với đường tròn (O′), BP cắt (O) tại Q. Đường thẳng AP cắt (O) tại điểm thứ hai R. Chứng minh:

a) AP là phân giác của $\widehat{BAQ}$;

c) CP và BR song song với nhau.

3B. Cho đường tròn (O; R) với A là điểm cố định trên đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O) và lấy M là điểm bất kì thuộc tia Ax. Vẽ tiếp tuyế thứ hai MB với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm MA, K là giao điểm của BI với (O).

a) Chứng minh các tam giác *IKA* và *IAB* đồng dạng. Từ đó suy ra tam giác *IKM* đồng dạng với tam giác *IMB.*

b) Giả sử *MK* cắt (O) tại c. Chứng minh *BC* song song *MA.*

4A. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O) và *AB* < *AC*. Đường tròn (7) đi qua *B* và *C*, tiếp xúc với *AB* tại *B* cắt đường thẳng *AC* tại D. Chứng minh *OA* và *BD* vuông góc với nhau.

4B. Cho hai đường tròn (O) và (7) cắt nhau ở C và D, trong đó tiếp tuyến chung *MN* song song với cát tuyến *EDF, M* và E thuộc (O), *N* và *F* thuộc (7), D nằm giữa *E* và *F*. Gọi *K, H* theo thứ tự là giao điểm của *NC, MC* với *EF*. Gọi G là giao điểm của *EM, FN*. Chứng minh:

a) Các tam giác *GMN* và *DMN* bằng nhau.

b) GD là đường trung trực của *KH.*

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) và *At* là tia tiếp tuyến với (O). Đường thẳng song song với *At* cắt *AB* và v4C lần lượt tại M và *N.* Chứng minh *AB.AM* = *AC.AN.*

6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A* và *B.* Qua *A* vẽ tiếp tuyêh *Ax* với (O) nó cắt (O') tại *E.* Qua *A* vẽ tiếp tuyến *Ay* với (O') nó cắt (O) tại D. Chứng minh $AB^2 = BD.BE$.

7. Cho hình thang *ABCD (AB//CD*) có $BD^2 = AB.CD$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABD* tiếp xúc với *BC.*

8. Cho hình vuông *ABCD* có cạnh dài 2*cm.* Tính bán kính của đường tròn đi qua *A* và *B* biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4*cm.*

9. Cho nửa đường tròn (O) đường kính *AB* và một điểm C trên nửa đường tròn. Gọi D là một điểm trên đường kính *AB*; qua D kẻ đường vuông góc với *AB* cắt *BC* tại *F,* cắt *AC* tại *E.* Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại C cắt *EF* tại 7. Chứng minh:

a) *I* là trung điểm của CE;

b) Đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECE.

10. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm O. Phân giác góc *BAC* cắt (O) ở M. Tiếp tuyến kẻ từ M với đường tròn cắt các tia *AB* và *AC* lần lượt ở *D* và *E.* Chứng minh *BC* và DE song song.

11. Cho tam giác *ABC.* Vẽ đường tròn (O) đi qua *A* và tiếp xúc với *BC* tại *B.* Kẻ dây *BD* song song với *AC.* Gọi *I* là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh = *IBC* = *ICA.*

12. Cho hai đường tròn tâm O và O′ tiếp xúc ngoài tại *A.* Qua *A* kẻ một cát tuyến cắt (O) ở *B* và cắt (O') ở C. Kẻ các đường kính *BOD* và *CO′E* của hai đường tròn trên.

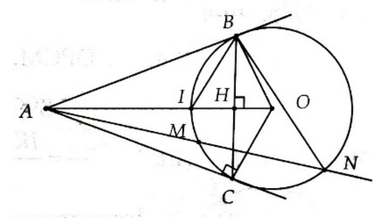
a) Chứng minh *BD* song song CE.

b) Chứng minh ba điểm *D, A, E* thẳng hàng.

c) Nêu (O) bằng (O') thì tứ giác *BDCE* là hình gì? Tại sao?

13. Cho đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh *Ox* và Oy của *xOy* tại *A* và *B.* Từ *A* kẻ tia song song với *OB* cắt (O') tại C. Đoạn oc cắt (O') tại E. Hai đường thẳng *AE* và *OB* cắt nhau tại *K.* Chứng minh *K* là trung điểm của *OB.*

BÀI 4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG



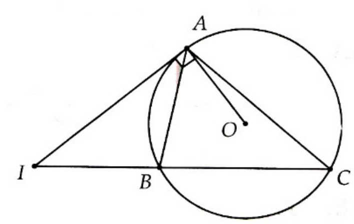
1A. a) $\widehat{ABM}=\widehat{ANB}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM}$.

Chứng minh được: $\Delta ABM \sim \Delta ANB$ (g.g)

$\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Chứng minh AO $\perp$ BC áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO và sử dụng kết quả câu b) $\Rightarrow$ $AB^2 = AH.AO$

c) Chứng minh được $\widehat{ABI}=\widehat{CBI}\,(\overset{\frown}{BI}=\overset{\frown}{CI})\Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABC}$. Mà AO là tia phân giác $\widehat{BAC}\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

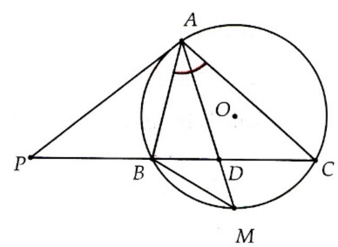


1B. Chứng minh được: $\Delta BAI \sim \Delta ACI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{IB}{IA}\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{IB^2}{IA^2}$$

Mặt khác: $IA^2 = IB.IC$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

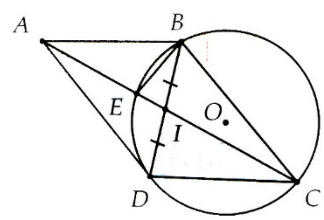


b) Do $\Delta BAI \sim \Delta ACI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{CI}=\frac{BI}{AI}\Rightarrow \frac{AB}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC}=\frac{IC-24}{IA}=\frac{5}{7}\Rightarrow IA=35cm$$

IC = 49cm



2A. a) HS tự chứng minh.

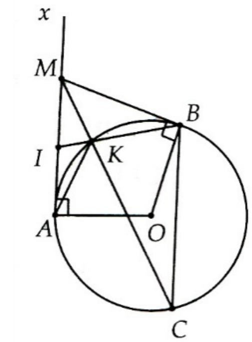
b) Tương tự 1A.

c) Chứng minh được: $\widehat{BAM}=\widehat{MBC}$

Từ đó chứng minh được:

$$\Delta MAB \sim \Delta MBD \Rightarrow MB^2 = MA.MD$$

2B. Gọi $BD \cap AC = I$



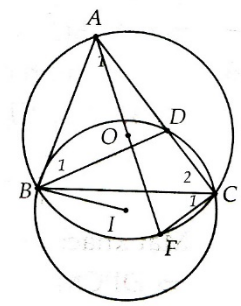
Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{ACD} = \widehat{EBD} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset\frown{ED}$

Áp dụng bổ đề $\Rightarrow$ ĐPCM.

3A. a) Sử dụng AQ//O'P

$\Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{O'AP} \Rightarrow$ ĐPCM.

b) CP//BR (cùng vuông góc AR)



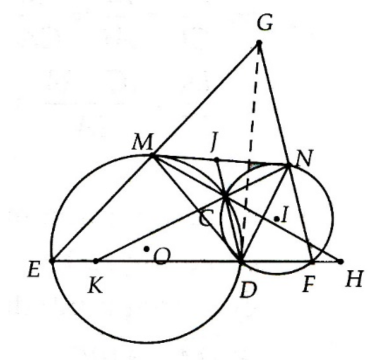
3B. a) $\Delta IAK \sim \Delta IBA \Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IK}{IA}$

Mà $IA = IM \Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IK}{IM}$

$\Rightarrow \Delta IKM \sim \Delta IMB$

b) Chứng minh được:

$\widehat{IMK} = \widehat{KCB} \Rightarrow BC//MA$ (ĐPCM)



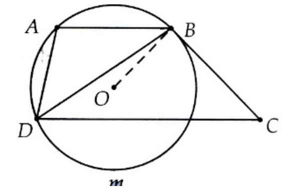
4A. Kẻ đường kính AF

Chứng minh $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^0 \Rightarrow AO \perp BD$

4B. Ta có:

$\widehat{DMN} = \widehat{E} = \widehat{GMN}, \widehat{DNM} = \widehat{NFD} = \widehat{GNM}$

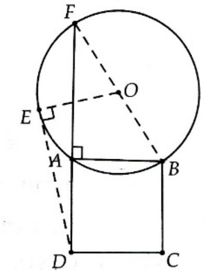
$\Rightarrow \Delta GMN = \Delta DMN$



b) Chứng minh được MN là đường trung trực của GD

$\Rightarrow GD \perp EF$ (1)

Gọi J là giao điểm của DC và MN.

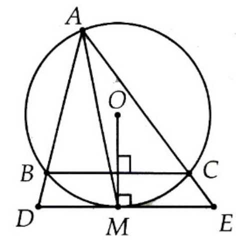


Ta có $\dfrac{JM}{DH} = \dfrac{JN}{DK}\left(\dfrac{CJ}{CD}\right)$

Mặt khác: $JM = JN$ (cùng bằng $\sqrt{JC.JD}$

$\Rightarrow$ DH = DK (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM.

5. Chứng minh được $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (g.g)



$\Rightarrow$ ĐPCM.

6. HS tự chứng minh.

7. Chứng minh được: $\Delta DBC \sim \Delta BAD \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{BAD}$

$\Rightarrow$ sđ $\widehat{DBC} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\widehat{BmD}$

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của (o)

8. Kẻ đường kính BF thì F, A, D thẳng hàng. Gọi DE là tiếp tuyến kẻ từ D. Khi đó ta có: $DE^2 = DA.DF \Rightarrow AF =$ 6cm. Từ đó tính được $OB = \sqrt{10cm}$

9. HS tự chứng minh.

10. $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{MC} \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow BC//DE$

11. HS tự chứng minh

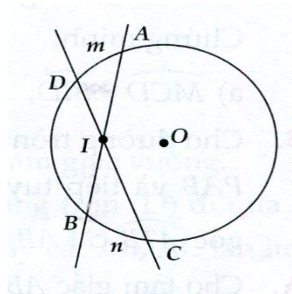
12. HS tự chứng minh

13. HS tự chứng minh

BÀI 5. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN.
GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

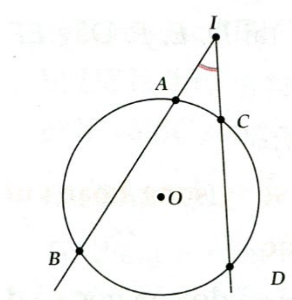
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Ví dụ 1. Trong Hình 1, góc $\widehat{BIC}$ nằm bên đường tròn (O) được gọi là *góc có đỉnh ở hên trong đường tròn.*

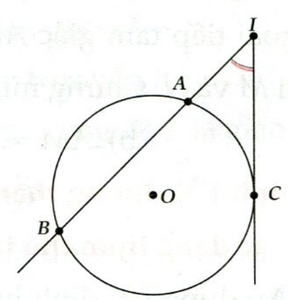


Hình 1

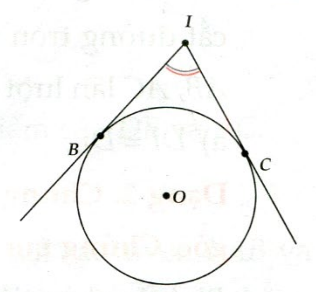
Ví dụ 2. Trong các Hình 2, 3, 4 các góc ở đỉnh *I* có đặc điểm chung là: đỉnh nằm bên ngoài đường tròn, các cạnh đều có điếm chung với đường tròn. Mỗi góc đó được gọi là *góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.*



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Định lí 1. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Định lí 2. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai góc hoặc hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Sử dụng hai định lý về số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

1A. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MC tại c và cát tuyên MAB (A nằm giữa M và B) và $A,B,C \in (O)$. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB không chứa C, CD cắt AB tại I. Chứng minh:

a) $\widehat{MCD} = \widehat{BID}$; b) $MI = MC$.

1B. Cho đường tròn (O) và một điểm p nằm ngoài (O). Kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT với $A,B,T \in (O)$. Đường phân giác của góc ATB cắt AB tại D. Chứng minh $PT = PD$.

2A. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I và cắt (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh:

a) Các tam giác AMN, EAI và DAI là những tam giác cân;

b) Tứ giác $AMIN$ là hình thoi.

2B. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (/). Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, E, F. Dây EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh: a) $DI = DB$;

b) $AM = AN$;

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc. Chứng minh các đẳng thức cho trước

Phương pháp giải: Áp dụng hai định lý về số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn để có được các góc bằng nhau, cạnh bằng nhau. Từ đó, ta suy điều cần chứng minh.

3A. Từ điểm P *ở* ngoài (O), vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn và cát tuyến PBC với $P, B,C \in (O)$.

a) Biết $PC = 25cm$; $PB = 49cm$. Đường kính (O) là 50cm. Tính PO.

b) Đường phân giác trong của góc A cắt PB *ở* I và cắt (O) *ở* D. Chứng minh DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAIB.

3B. Cho (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CF đi qua E. Tiếp tuyên của đường tròn tại F cắt CD tại M, vẽ dây *Aỉ* cắt CD tại N. Chứng minh:

a) Tia CF là tia phân giác của góc BCD;

b) MF và AC song song;

c) MN, OD, OM là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

4A. Cho tam giác *ABC* phân giác *AD.* Vẽ đường tròn (O) đi qua *A, D* và tiếp xúc với *BC* tại D. Đường tròn này cắt *AB, AC* lần lượt tại E và F. Chứng minh:

a) EF song song *BC;* b) $AD^2 = AE.AC$;

c) $AE.AC = AB.AF$.

4B. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm O. Các tia phân giác của các góc *A và B* cắt nhau ở 7 và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E. Chứng minh:

a) Tam giác *BDI* là tam giác cân;

b) *DE* là đường trung trực của *IC;*

c) *IF* và *BC* song song, trong đó F là giao điểm của *DE* và *AC.*

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Từ điểm *P* nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến *PAB* và *PCD* (*A* nằm giữa *P* và *B, C* nằm giữa *P* và D), các đường thẳng *AD* và *BC* cắt nhau tại *Q.*

a) Cho biết $\widehat{P} = 60°$ và $\widehat{AQC} = 80°$. Tính góc $\widehat{BCD}$.

b) Chứng minh $PA.PB = PC.PD$.

6. Từ một điểm *A* bên ngoài (O), vẽ tiếp tuyến *AB* và cát tuyến *ACD.* Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt *BC* và *BD* lần lượt tại M và *N.* Vẽ dây *BF* vuông góc với *MN,* cắt *MN* tại *H,* cắt CD tại E. Chứng minh:

a) Tam giác *BMN* cân; b) $FD^2 = FE.FB$.

7. Cho tam giác đều *MNP* nội tiếp đường tròn tâm *(O).* Điểm D di chuyển trên $\overset{\frown}{MP}$. Gọi E là giao điểm của *MP* và *ND,* gọi *F* là giao điểm của *MD* và *NP.* Chứng minh $\widehat{MFN} = \widehat{MND}$.

8. Trên đường tròn (O) lấy ba điểm *A, B* và C.Gọi *M, N* và *P* theo thứ tự là điểm chính giữa cua các cung *AB, BC* và *AC. BP* cắt *AN* tại *I, NM* cắt *AB* tại E. Gọi D là giao điểm của *AN* và *BC.* Chứng minh:

a) Tam giác *BNI* cân; b) $AE.BN = EB.AN$;

c) *EI* song song *BC;* d) $\dfrac{AN}{BN} = \dfrac{AB}{BD}$.

9. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến *MA* và cát tuyến *MCB với A,B,C* $\in$ (O). Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt *BC* tại D, cắt (O) tại *N.* Chứng minh:

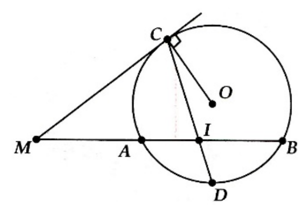
a) *MA = MD;*

b) Cho cát tuyến *MCB* quay quanh M và luôn cắt đường tròn. Chứng minh *MB.MC* không đổi.

c) $NB^2 = NA.ND$.

10. Tam giác *MNP* nội tiếp đường tròn tâm *(O)*, các điểm *I, K, H* là điểm chính giữa của các cung *MN, NP, PM*. Gọi J là giao điểm của *IK* và *MN*, *G* là giao điểm của *HK* và *MP*. Chứng minh JG song song với *NP*.

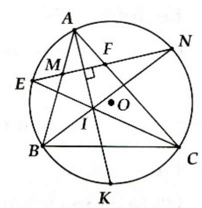
BÀI 5. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN.
GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN



1A. a) $\widehat{MCD} = \widehat{BID} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{CD}$

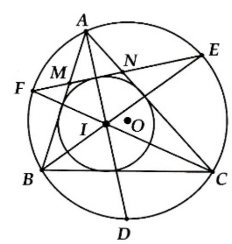
b) Sử dụng kết quả câu a).

1B. Tương tự 1A. HS tự làm.



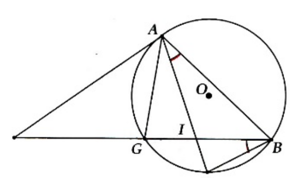
2A. a) $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{ED}$

Suy ra ΔAMN cân tại A. Kéo dài AI cắt đường tròn (o) tại K. Chứng minh tương tự, ta có ΔAIE và ΔDIA lần lượt cân tại E và D.



b) Xét ΔAMN cân tại A có AI là phân giác. Suy ra AI ⊥ MN tại F và MF = FN. Tương tự với ΔEAI cân tại E, ta có: AF = IF. Vậy tứ giác AMIN là hình hình hành. Mà AI ⊥ MN ⇒ ĐPCM.

2B. Tương tự 2A. HS tự làm.

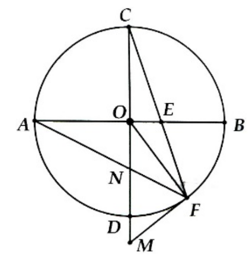


3A. a) Chứng minh được $PA^2 = PC.PB$ và $PA^2 = PO^2 = OA^2$ ⇒ tính được PO.

b) Chứng minh được $\widehat{DBC} = \widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CAB}$ ⇒ ĐPCM.

3B. a) Học sinh tự chứng minh.

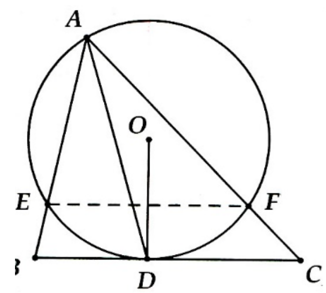
b) Chứng minh $\widehat{AFM} = \widehat{CAF} (= \widehat{ACF}) \Rightarrow MF // AC$.



c) Chứng minh: $\widehat{MFN} = \widehat{MNF} \Rightarrow \Delta MNF$ cân tại $M \Rightarrow MN = MF$

Mặt khác: OD = OF = R.

Ta có MF là tiếp tuyến nên ΔOFM vuông ⇒ ĐPCM.

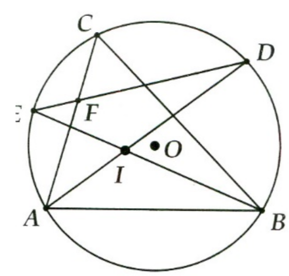


4A. a) HS tự chứng minh.

b) $\Delta ADE \sim \Delta ACD$ (g-g)

$\Rightarrow$ AD² = AE.AC

c) Tương tự: $\Delta ADF \sim \Delta ABD \Rightarrow$ AD² = AB.AF ⇒ ĐPCM.



4B. a) $\widehat{BID} = \frac{1}{2}$sđ $\widehat{DE} = \widehat{DBE} \Rightarrow \Delta BID$ cân ở D.

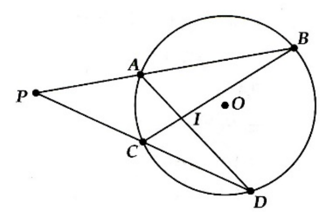
b) Chứng minh tương tự: ΔIEC cân tại E, ΔDIC cân tại D.

⇒ EI = EC và DI = DC

⇒ DE là trung trực của CI.

c) F ∈ DE nên FI = FC

$\Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{FCI} = \widehat{ICB} \Rightarrow IF // BC$

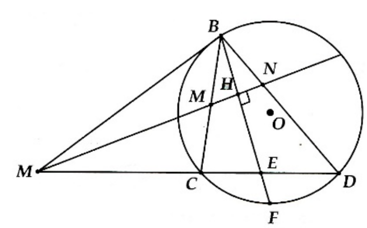


5. a) Ta có: $\widehat{BPD} = \frac{1}{2}$(sđ $\widehat{BD}$ - sđ $\widehat{AC}$), $\widehat{AQC} = \frac{1}{2}$(sđ $\widehat{BD}$ + sđ $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{BPD} + \widehat{AQC}$ = sđ $\widehat{BD}$ = 140^0

$\Rightarrow \widehat{BCD} = 70^0$

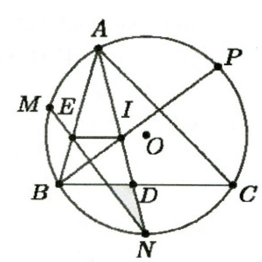
b) HS tự chứng minh



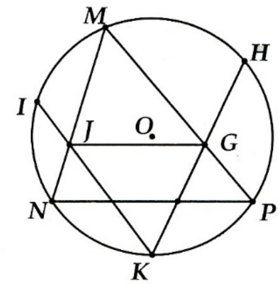
6. a) HS tự chứng minh ΔBMN cân ở B.

b) $\Delta EDF \sim \Delta DBF (g.g)$

$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{EF}{DF}$



$\Leftrightarrow DF^2 = EF.BF$



7. HS tự chứng minh

8. a) Chứng minh tương tự 4B ý a).

b) M chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow \widehat{NE}$ là phân giác $\widehat{BNA}$

$\Rightarrow \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{EB}{EA}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow$ BN.AE = NA.BE

c) Chứng tinh tương tự 4B

d) Chứng minh $\Delta ABN \sim \Delta DBN \Rightarrow$ ĐPCM/

9. HS tự chứng minh

10. KG là đường phân giác của $\widehat{MKP} \Rightarrow \dfrac{MG}{GP} = \dfrac{MK}{KP}$ (1)

KJ là đường phân giác của $\widehat{MKN} \Rightarrow \dfrac{MJ}{JN} = \dfrac{MK}{KN}$ (2)

Chứng minh được: KN = KP (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \dfrac{MG}{GP} = \dfrac{MJ}{JN} \Rightarrow$ ĐPCM

BÀI 6. CUNG CHỨA GÓC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng *AB* và góc a ($0° < a < 180°$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = a$ là hai cung chứa góc a dựng trên đoạn *AB.*

Chú ý:

- Hai cung chứa góc a nói trên là hai cung tròn *đối xứng nhau* qua *AB.* Hai điểm *A, B* được coi là thuộc quỹ tích.

- Quỹ tích các điểm *M* nhìn đoạn thẳng *AB* cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính *AB.*

2. Cách vẽ cung chứa góc a

- Vẽ đường trung trực *d* của đoạn thăng *AB;*

- Vẽ tia *Ax* tạo với *AB* một góc *a;*

- Vẽ đường thẳng *Ay* vuông góc với *Ax.* Gọi o là giao điểm của *Ay* với *d.*

- Vẽ cung $\overset{\frown}{AmB}$, tâm O, bán kính *OA* sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ *AB* không chứa tia *Ax.* Cung $\overset{\frown}{AmB}$ được vẽ như trên là *một cung chứa góc a.*

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình *H* nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình *H.*

Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình *H* đều có tính chất *T.*

Từ đó đi đến kết luận quỹ tích các điểm *M* có tính chất *T* là hình *H.*

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Phương pháp giải: Thực hiện theo ba bước sau:

Bước 1. Tìm đoạn cô định trong hình vẽ;

Bước 2. Nối điểm phải tìm với hai đầu đoạn thẳng cố định đó, xác định góc a không đổi;

Bước 3. Khẳng định quỹ tích điểm phải tìm là cung chứa góc a dựng trên đoạn cố định.

1A. Cho tam giác *ABC* có *BC cố* định và góc *A* bằng 50°. Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Tìm quỹ tích điểm D.

1B. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A,* có cạnh *BC cố* định. Gọi *I* là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm *1* khi điểm *A* thay đổi.

Dạng 2. Chứng minh nhiều điểm thuộc đường tròn

Phương pháp giải: Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc nửa mặt phang bờ là *AB* và cùng nhìn đoạn cố định *AB* dưới một góc không đổi.

2A. Cho nửa đường tròn đường kính *AB.* Gọi M là điểm chính giữa của cung *AB.* Trên cung *AM* lấy điểm *N.* Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm D sao cho *MD* = *MB,* trên tia đối của tia *NB* lấy điểm *E* sao cho *NA* = *NE,* trên tia đối của tia *MB* lấy điểm csao cho MC = *MA.* Chứng minh 5 điểm *A, B, C, D, E* cùng thuộc một đường tròn.

2B. Cho *I, O* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác *ABC* với $\widehat{A}$ = 60°. Gọi *H* là trực tâm của *ΔABC.* Chứng minh các điểm B, C, O, *H, I* cùng thuộc một đường tròn.

Dạng 3. Dạng cung chứa góc

Phương pháp giải: Thực hiện theo bốn bước sau:

Bước 1. Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB;

Bước 2. Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α;

Bước 3. Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.

Bước 4. Vẽ cung $\overset{\frown}{AmB}$, tâm Om bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax. Cung $\overset{\frown}{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α.

3A. Dựng một cung chứa góc 55^0 trên đoạn thẳng AB = 3cm.

3B. Dựng tam giác ABC, biết BC = 3cm, AB = 3,5cm và $\widehat{A}$ = 50^0.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CE = CF. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC.

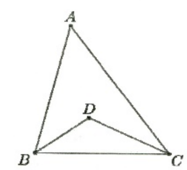
5. Cho tam giác ABCD vuông tại A, phân giác BF. Từ điểm I nằm giữa B và F vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường trong ngoại tiếp tam giác BIN cắt AI tại D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn;

b) Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra BE vuông góc với CE.

6. Dựng cung chứa góc 45^0 trên đoạn thẳng AB = 5cm.

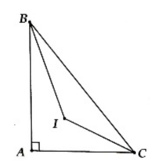
BÀI 6. CUNG CHỨA GÓC



1A. Ta có $\widehat{A} = 50^0 \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 130^0$

$\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 65^0 \Rightarrow \widehat{BDC} = 115^0$

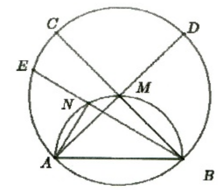
$\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm D là hai cung chứa góc 115^0 dựng trên đoạn BC.



1B. Tương tự 1A.

Tính được $\widehat{BIC} = 135^0$

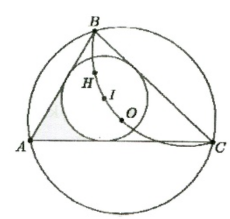
$\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm I là hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn BC.



2A. Các tam giác $\Delta ANE, \Delta AMC$ và ΔBMD vuông cân

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 45^0$

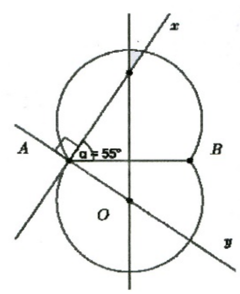
Mà AB cố định nên các điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.



2B. Chứng minh được $\widehat{BIC} = 120^0$.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^0$ và $\Rightarrow \widehat{BHC} = 180^0 - 60^0 = 120^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)

$\Rightarrow$ H, I, O cùng nhìn BC dưới góc 120^0 nên B, C, O, I, H cùng thuộc một đường tròn.



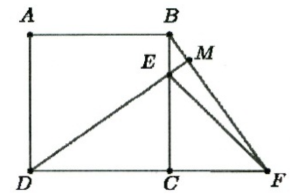
3A. *Bước 1.* Vẽ đoạn thẳng AB = 3cm, dựng trung trực d của AB;

Bước 2: Vẽ tia Ax tạo với AB góc 55^0;

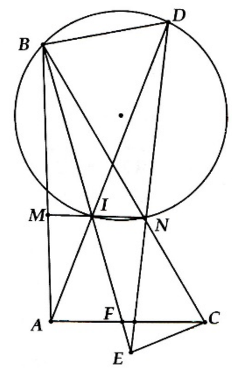
Bước 3: Vẽ $Ay \perp Ax$ cắt d ở O;

Bước 4: Vẽ cung $\overset{\frown}{AmB}$ tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.

$\overset{\frown}{AmB}$ là cung cần vẽ.



3B. HS tự thực hiện. Bài toán có 2 nghiệm hình



4. Chứng minh được:

$\widehat{CBF} + \widehat{BEM} = \widehat{MDF} + \widehat{DEC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính BD. Mà E $\in$ BC nên quỹ tích của điểm M là là cung $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD.

5. a) Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$.

b) Chứng minh được: $\widehat{ACB} = \widehat{BNM}$ (đồng vị)

$\Rightarrow$ C, D, E nhìn AB dưới góc bằng nhau nên A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ BC là đường kính $\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$

6. Tương tự 3A.

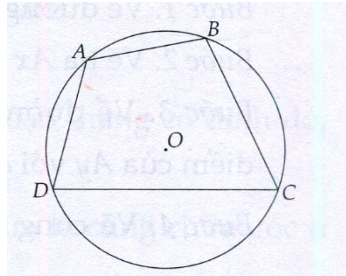
BÀI 7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.

- Trong Hình 1, tứ giác ABCD nội tiếp (O) và (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD.



Hình 1

2. Định lí

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°.

- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°.

- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

-Tứ giác có hai đinh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

Chú ý: Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Phương pháp giải: Để chứng minh tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đôi bằng 180°.

Cách 2. Chứng minh tứ giác có hai đinh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

Cách 3. Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đinh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

Cách 4. Tìm được một điểm cách đều 4 đỉnh của tứ giác.

1A. Cho tam giác *ABC* nhọn, đường cao *BM* và *CN* cắt nhau tại H. Chứng minh các tứ giác *AMHN* và *BNMC* là những tứ giác nội tiêp.

1B. Cho điểm *A* nằm ngoài đường tròn (O), qua *A* kẻ hai tiếp tuyến *AB* và *AC* với đường tròn (*B, c* là tiếp điểm). Chứng minh tứ giác *ABOC* là tứ giác nội tiếp.

2A. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp (O), *M* là điểm chính giữa của cung *AB.* Nối *M* với *D, M* với C cắt *AB* lần lượt ở *E* và *P*. Chứng minh *PEDC* là tứ giác nội tiếp.

2B. Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp đường tròn *(O). M* là điểm thuộc đường tròn. Vẽ *MH* vuông góc với *BC* tại *H,* vẽ *MI* vuông góc với *AC.* Chứng minh *MIHC* là tứ giác nội tiếp.

Dạng 2. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song hoặc đồng quy, các tam giác đồng dạng...

Phương pháp: Sử dụng tính chât của tứ giác nội tiếp.

3A. Cho đường tròn (O) đường kính *AB*. Gọi *H* là điểm nằm giữa O và *B*. Kẻ dây CD vuông góc với *AB* tại *H*. Trên cung nhỏ *AC* lấy điểm *E*, kẻ $CK \perp AE$ tại *K*. Đường thẳng *DE* cắt *CK* tại *F*. Chứng minh:

a) Tứ giác *AtiCK* là tứ giác nội tiếp;

b) A*Hì.AB* = AD^2;

c) Tam giác *ACE* là tam giác cân.

3B. Cho nửa (O) đường kính *AB.* Lấy M ∊ *OA* (*M* không trùng o và *A).* Qua *M* vẽ đường thẳng *d* vuông góc với *AB.* Trên *d* lấy *N* sao cho *ON* > *R.* Nôi *NB* cắt (O) tại cKẻ tiếp tuyến *NE* với (O) (£ là tiếp điểm, E và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d). Chứng minh:

a) Bốn điểm *O, E, M, N* cùng thuộc một đường tròn;

b) $NE^2 = NC.NB$;

c) $\widehat{NEH} = \widehat{NME}$ (H là giao điểm của *AC* và *d*);

d) *NF* là tiếp tuyến (O) với *F* là giao điểm của *HE* và (O).

4A. Cho đường tròn (O) đường kính *AB,* gọi I là trung điểm của *OA,* dây CD vuông góc với *AB* tại *I.* Lấy *K* tùy ý trên cung *BC* nhỏ, *AK* cắt CD tại *H.*

a) Chứng minh tứ giác *BIHK* là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh *AHAK* có giá trị không phụ thuộc vị ưí điểm *K.*

c) Kẻ $DN \perp CB$, $DM \perp AC$. Chứng minh các đường thẳng *MN, AB, CD* đồng quy.

4B. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn (M, N là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O; R) tại B và C (AB < AC). Gọi 7 là trung điểm BC.

a) Chứng minh năm điểm A, M, N, O, I thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AM^2 = AB.AC$.

c) Đường thẳng qua B, song song với AM cắt MN tại E. Chúng minh IE song song MC.

d) Chứng minh khi d thay đổi quanh quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm trên một đường tròn cô' định.

III. BÀI TẬP VỂ NHÀ

5. Cho điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) vói đường kính AB sao cho cung $\overset{\frown}{AC}$ lớn hơn cung $\overset{\frown}{BC}$ $(C \neq B)$. Đường thăng vuông góc với AB tại O cắt dây AC tại D. Chứng minh tứ giác $BCDO$ nội tiếp.

6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H *bât* kì (H không trùng O, B). Trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại c và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $MCID$ và $MCHB$ là tứ giác nội tiếp.

7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Kẻ đường kính AC của (O) cắt đường tròn (O’) tại F. Kẻ đường kính AE của (O') cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh:

a) Tứ giác $GFEC$ nội tiếp; b) GC, FE và AB đồng quy.

8. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng xy song song với BC cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chúng minh tứ giác $EFCB$ nội tiếp.

9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB tại E, Kẻ HF vuông góc với AC tại F. Chứng minh tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm M thuộc cạnh AC. *Vẽ* đường tròn tâm O đường kính MC cắt BC tại E. Nối BM cắt đường tròn (O) tại N, AN cắt đường tròn (O) tại D. Lấy I đối xứng với M qua A, K đối xứng với M qua E.

a) Chứng minh $BANC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CA là phân giác của $\widehat{BCD}$.

c) Chứng minh $ABED$ là hình thang.

d) Tìm vị trí M để đường tròn ngoại tiếp tam giác *BIK* có bán kính nhỏ nhất.

11. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn. Đường tròn (O; *R*) có đường kính *BC* cắt AB, AC lần lượt tại *F* và E; *BE* cắt *CF* tại H.

a) Chứng minh tứ giác *AFHE* nội tiếp. Từ đó, xác định tâm *I* của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

b) Tia *AH* cắt *BC* tại D. Chứng minh $HE.HB = 2HD.HI$

c) Chứng minh bôn điểm *D, E, I, F* cùng nằm trên một đường tròn.

12. Cho đường tròn (O; *R*) và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyên *MA, MB* tới đường tròn *(A* thuộc cung lớn CD). Gọi *I* là trung điểm CD. Nối *BI* cắt đường tròn tại *E* (E khác *B).* Nối *OM* cắt *AB* tại *H.*

a) Chứng minh *AE* song song CD.

b) Tìm vị trí của *M* để $MA \perp MB$.

c) Chứng minh *HB* là phân giác của *CHD.*

13. Cho đường tròn tâm Obán kính *R*, hai điểm cvà D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính *BA;* trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *S.* Nối *S* với cắt (O) tại *M, MD* cắt *AB* tại *K, MB* cắt *AC* tại *H.* Chứng minh:

a) $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$. Từ đó suy ra tứ giác *AMHK* nội tiếp;

b) *HK* song song CD.

Cho hình vuông *ABCD. E* di động trên đoạn CD (Ekhác c,D). Tia *AE* cắt đường thẳng *BC* tại *F,* tia *Ax* vuông góc với *AE* tại *A* cắt đường thẳng DC tại *K.* Chứng minh:

a) $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$;

b) Tam giác *KAF* vuông cân;

c) Đường thẳng *BD* đi qua trung điểm *I* của *KF;*

d) Tứ giác *IMCF* nội tiếp với M là giao điểm của *BD* và *AE.*

15. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp (O), *M* là điểm thuộc cung nhỏ *AC.* Vẽ *MH* vuông góc với *BC* tại *H, MI* vuông góc *AC* tại *I.*

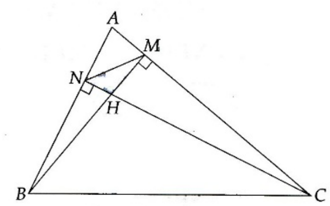
a) Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

b) Đường thẳng *HI* cắt đường thẳng *AB* tại *K.* Chứng minh *MK* vuông góc với *BK.*

c) Chứng minh tam giác *MIH* đồng dạng vói tam giác *MAB.*

d) Gọi E là trung điểm của *IH* và F là trung điểm *AB.* Chứng minh tứ giác *KMEF* nội tiếp từ đó suy ra ME vuông góc với EF.

BÀI 7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP



1A. Xét tứ giác AMHN có:

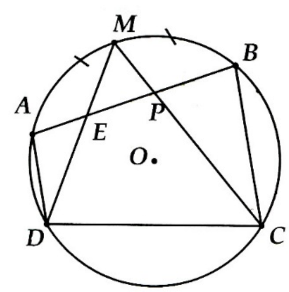
$\widehat{AMH}+\widehat{ANH}=90^0+90^0+180^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

Xét tứ giác BNMC có:

$\widehat{BNC}=\widehat{BMC}=90^0\Rightarrow$ ĐPCM.

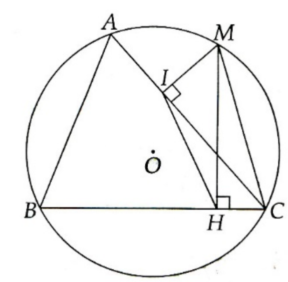
1B. HS tự chứng minh



2A. Ta có: $\widehat{AED}=\dfrac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{MB}$)

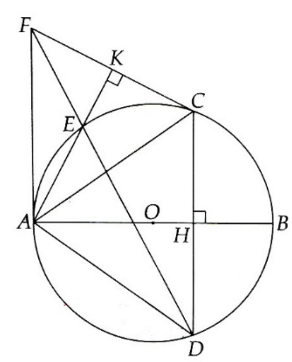
$=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DM}=\widehat{MCD}.\Rightarrow\widehat{DEP}+\widehat{PCD}=180^0$

$\Rightarrow$ PEDC nội tiếp.



2B. Ta có: $\widehat{MIC}=\widehat{CHM}=90^0$

$\Rightarrow$ MIHC nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông)



3A. a) Học sinh tự chứng minh

b) ΔADB vuông tại D, có đường cao DH $\Rightarrow$ AD^2 = AH.AB

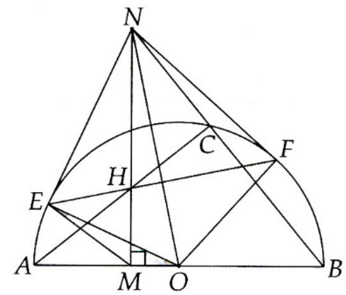
c) $\widehat{EAC}=\widehat{EDC}=\dfrac{1}{2}$sđ EC, $\widehat{EAC}=\widehat{KHC}$

(Tứ giác AKCH nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{EDC}=\widehat{KHC}\Rightarrow$ DF//HK (H là trung điểm DC nên K là trung điểm FC)

$\Rightarrow$ ĐPCM.

3B. a) Học sinh tự chứng minh



b) $\widehat{NEC} = \widehat{CBE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CE}$

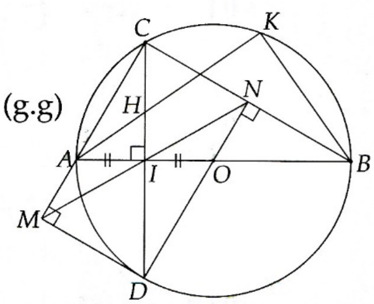
$\Rightarrow \Delta$NEC ~ ΔNBE (g.g) $\Rightarrow$ ĐPCM.

c) ΔNCH ~ ΔNMB (g.g)

$\Rightarrow$ NC.NB = NH.NM = NE^2

ΔNEH ~ ΔNME (c.g.c)

(g.g)



$\Rightarrow$ $\widehat{NEH} = \widehat{EMN}$

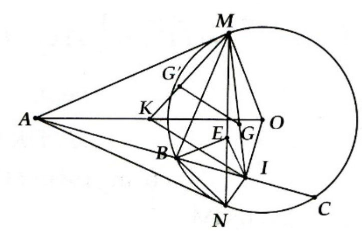
d) $\widehat{EMN} = \widehat{EON}$ (Tứ giác NEMO nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{NEH} = \widehat{NOE} \Rightarrow$ EH $\perp$ NO

$\Rightarrow \Delta$OEF cân tại O có ON là phân giác $\Rightarrow$ $\widehat{EON} = \widehat{NOF}$

$\Rightarrow \Delta$NEO = ΔNFO vậy $\widehat{NFO} = \widehat{NEO} = 90^0 \Rightarrow$ ĐPCM.

4A. a) $\widehat{HIB} = \widehat{HKB} = 180^0$



$\Rightarrow$ Tứ giác BIHK nội tiếp

b) Chứng minh được: ΔAHI ~ ΔABK (g.g)

$\Rightarrow$ AH.AK = AI.AB = R^2 (không đổi)

c) Chứng minh được MCND là hình chữ nhật từ đó $\Rightarrow$ ĐPCM.

4B. a) Chú ý: $\widehat{AMO} = \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^0$

b) $\widehat{AMB} = \widehat{MCB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MB}$

$\Rightarrow \Delta$AMB ~ ΔACM (g.g)

$\Rightarrow$ ĐPCM.

c) AMIN nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{AMN} = \widehat{AIN}$

BE//AM $\Rightarrow$ $\widehat{AMN} = \widehat{BEN}$

$\Rightarrow \widehat{BEN} = \widehat{AIN} \Rightarrow$ Tứ giác BEIN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BNM}$

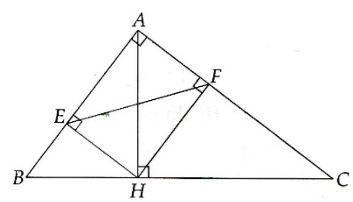
Chứng minh được: $\widehat{BIE} = \widehat{BCM} \Rightarrow$ IE//CM.

d) G là trọng tâm ΔMBC $\Rightarrow$ G $\in$ MI.

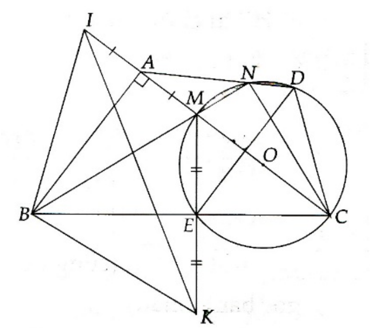
Gọi K là trung điểm AO $\Rightarrow$ MK = IK = $\frac{1}{2}$AO.

Từ G kẻ GG'//IK (G' $\in$ MK)

$\Rightarrow \frac{GG'}{IK} = \frac{MG}{MI} = \frac{MG'}{MK} = \frac{2}{3}IK = \frac{1}{3}AO$ không đổi (1)



$MG' = \frac{2}{3}MK \Rightarrow G'$ cố định (2). Từ (1) và (2) có G thuộc ($G'; \frac{1}{3}AO$).



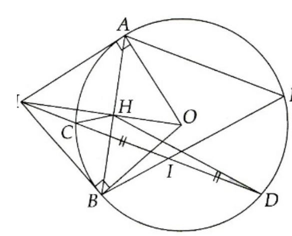
5. Học sinh tự chứng minh.

6. Học sinh tự chứng minh.

7. Học sinh tự chứng minh.

8. *Gợi ý:* Chứng minh BEFC là hình thang cân

9. *Gợi ý:* $\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (tính chất hình chữ nhật và $\widehat{AHE} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ $\widehat{BHE}$)



10. a) Học sinh tự chứng minh.

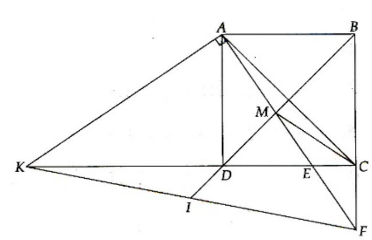
b) Học sinh tự chứng minh.

c) Học sinh tự chứng minh.

d) Chú ý:

$\widehat{BIA} = \widehat{BMA}, \widehat{BMC} = \widehat{BKC}$

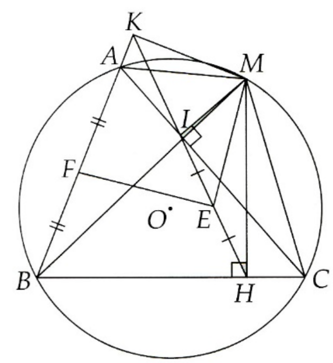
$\Rightarrow$ Tứ giác BICK nội tiếp đường tròn (T), mà (T) cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔBIK. Trong (T), dây BC không đổi mà đường kính của (T) ≥ BC nên đường kính nhỏ nhất bằng BC.



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow I \equiv A \Rightarrow M \equiv A$

11. HS tự làm.

12. a) HS tự chứng minh.



b) $OM = R\sqrt{2}$

c) MC. MD = MA² = MH.MO

$\Rightarrow$ MC. MD = MH.MO

$\Rightarrow$ ΔMHC ~ ΔMDO (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

Chứng minh được: $\widehat{MHC} = \widehat{OHD}$

$\Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ hai góc bằng nhau)

13. HS tự chứng minh.

14. a) HS tự chứng minh.

b) HS tự chứng minh.

c) Tứ giác ACFK nội tiếp (i) với I là trung điểm của KF
$\Rightarrow$ BD là trung trực AC phải đi qua I.

d) HS tự chứng minh.

15. HS tự chứng minh.

b) HS tự chứng minh.

c) HS tự chứng minh.

d) $\Delta MIH \sim \Delta MAB$

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MB} = \dfrac{IH}{AB} = \dfrac{2EH}{2FB} = \dfrac{EH}{FB}$

$\Rightarrow \Delta MHE \sim \Delta MBF$

$\Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{MEK}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow$ KMEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEF} = 90^0$.

BÀI 8. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)

Độ dài (C) của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \text{ hoặc } C = \pi d \text{ (với } d = 2R).$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung $n°$ được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn

Phương pháp giải: Áp dụng công thức đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

1A. Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trông trong bảng sau (đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bán kính R của đường tròn	9		3			
Đường kính d của đường tròn		16		6		
Độ dài c của đường tròn					30	25,12

1B. Lấy giá trị gần đúng của n là 3,14, hãy điền vào ô trông trong bảng sau (đơn vị độ dài: *cm,* làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bán kính R của đường tròn		10			8
Đường kính d của đường tròn			5		
Độ dài c của đường tròn	9,42			6,28	

2A. a) Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 3*dm.*

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 600*mm*.

2B. a) Tính độ dài cung 40° của một đường tròn có bán kính 5*dm*.

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 400*mm*.

3A. Lấy giá trị gần đúng của *n* là 3,14, hãy điền vào ô trông trong bảng sau (đơn vị độ dài: *cm,* làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính *R* của đường tròn	12		22	5,2	
Số đo $n°$ của cung tròn	90°	60°		31°	28°
Độ dài / của cung tròn		40,6	30,8		8,2

3B. Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài: *cm,* làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính *R* của đường tròn	14		20	4,2	
Số đo $n°$ của cung tròn	90°	50°		35°	20°
Độ dài *l* của cung tròn		40,6	30,8		4,2

Dạng 2. Một sô bài toán tổng hợp

Phương pháp giải: Áp dụng công thức trên và các kiên thức đã có.

4A. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có *AB* = *5cm, B* = 60°. Đường tròn tâm 7, đường kính *AB* cắt *BC ở D.*

a) Chứng minh *AD* vuông góc với *BC.*

b) Chứng minh đường tròn tâm *K* đường kính *AC* đi qua D.

c) Tính độ dài cung nhỏ *BD.*

4B. Cho nửa đường tròn (O; *R*) đường kính *AB.* Vẽ dây CD = *R* (thuộc cung *AD).* Nối *AC* và *BD* cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tam giác *MCD* đồng dạng với tam giác *MBA.* Tìm tỉ số đồng dạng.

b) Cho $\widehat{ABC} = 30°$, tính độ dài cung nhỏ *AC.*

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho $\pi = 3,14$. Hãy điền vào các bảng sau:

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5			
	6		
		94,2	
			28,26

6. Cho đường trong (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây BC ⊥ OA. Biết độ dài đường tròn (O) 4π cm. Tính:

a) Bán kính đường tròn (O);

b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

7. Cho tam giác ABC có AB = AC = 3cm và $\widehat{A} = 120^0$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

8. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

9. Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ đường kính AD cắt BC tại H. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AC. Hạ BK ⊥ AM tại K. đường thẳng BK cắt CM tại E.

a) Chứng mnh bốn điểm A, B, H, J thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác MBE cân tại M.

c) Tịa BE cắt đường tròn (O; R) tại N (N khác B). Tính độ dài cung nhỏ MN theo R. Giả sử $\widehat{A} = 40^0$.

10. Cho đường tròn (O; R) với dây cung BC cố định. Điểm A thuộc cung lớn BC. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O)tại D. Các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại C và D cắt nhau tại E. Tịa CD cắt AB tại K, đường thẳng AD cắt CE tại I.

a) Chứng minh BC song song DE.

b) Chứng minh AKIC là tứ giác nội tiếp.

c) Cho BC = $R\sqrt{3}$. Tính theo R độ dài cung nhỏ BC của đường tròn (O; R).

BÀI 8. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

1A.

Bán kính R của đường tròn	9	8	3	4,78	4
Đường kính d của đường tròn	18	16	6	9,56	8
Độ dài C của đường tròn	56,52	50,24	18,84	30	25,12

1B.

Bán kính R của đường tròn	1,5	10	2,5	1	8
Đường kính d của đường tròn	3	20	5	2	16
Độ dài C của đường tròn	9,42	62,8	15,7	6,28	50,24

2A. a) $l = \pi\ dm$; b) $C = 600\pi\ mm$;

2B. a) $l = \dfrac{10\pi}{9} dm$; b) $C = 400\pi\ mm$;

3A.

Bán kính R của đường tròn	12	38,8	22	5,2	16,8
Số đo n^0 của cung tròn	90^0	60^0	$80,3^0$	31^0	28^0
Độ dài l của cung tròn	18,8	40,6	30,8	2,8	8,2

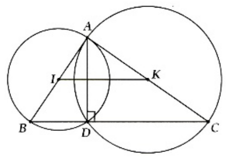
3B.

Bán kính R của đường tròn	14	46,5	20	4,2	12
Số đo n^0 của cung tròn	90^0	50^0	$88,3^0$	35^0	20^0
Độ dài l của cung tròn	22	40,6	30,8	2,6	4,2

4A. a) $\widehat{ADB}$ là góc nội tiếp trên đường kính AB $\Rightarrow AD \perp BD$.

b) Do $\widehat{ADC} = 90^0$ nên D$\in$ đường tròn $(k; \dfrac{AC}{2})$

c) ΔIBD cân tại I có $\widehat{B} = 60^0$



$\Rightarrow \Delta IBD$ đều $\Rightarrow \widehat{BID} = 60^0 \Rightarrow l_{\overset{\frown}{BD}} = \dfrac{\pi.\frac{5}{2}.60}{180} = \dfrac{5}{6}\pi cm$

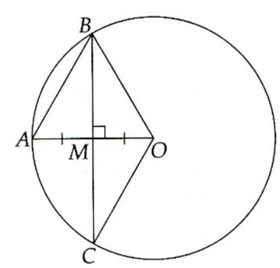
4B. a) Khi M ở ngoài hay M nằm trong đường tròn thì ΔMCD và ΔMBA đều có 2 góc bằng nhau ⇒ ĐPCM.

Tỷ số đồng dạng là: $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{2}$

b) $\widehat{ABC} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0 \Rightarrow l_{\overset{\frown}{AC}} = \dfrac{\pi R}{3}$

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5	10	31,4	78,5
3	6	18,84	28,26
15	30	94,2	706,5
3	6	18,84	28,26

6. a) $2\pi R = 4\pi \Rightarrow R = 2cm$



b) $\widehat{AOB} = 60^0$ (ΔOAB đều)

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$

$l_{\overset{\frown}{BC}}$ nhỏ = $\dfrac{\pi.R.120}{180} = \dfrac{4}{3}\pi cm$

và $l_{\overset{\frown}{BC}}$ lớn = $\dfrac{8}{3}\pi cm$

7. $\widehat{A} = 120^0 \Rightarrow \widehat{OAC} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta OAC$ đều $\Rightarrow R = AC = 30cm$

$\Rightarrow C = 2\pi R = 6\pi cm$

8. Đặt AB = a; BC = b; CD = c; AD = d.

$\frac{C_{(AB)}}{2} = \frac{2\pi.\frac{a}{2}}{2} = \frac{\pi.a}{2}$. Tương tự $\frac{C_{(CD)}}{2} = \frac{\pi.c}{2}$

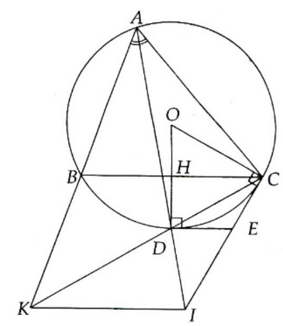
Vậy $\frac{C_{(AB)}}{2} + \frac{C_{(CD)}}{2} = \frac{\pi}{2}(a+c)$

Có $\frac{C_{(BC)}}{2} + \frac{C_{(CD)}}{2} = \frac{\pi}{2}(b+d)$

Tứ giác ABCD ngoại tiếp, kết hợp tính chất tiếp $\Rightarrow$ a + c = b + d $\Rightarrow$ ĐPCM.

9. HS tự làm

10. a) AD là phân giác $\widehat{BAC}$



$\Rightarrow$ D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow OD \perp BC$

Mà DE là tiếp tuyến $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $\widehat{ECD}\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD} = \widehat{DAC} = \widehat{BAD} \Rightarrow$ ĐPCM.

c) $HC = \frac{P\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{HOC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$

$\Rightarrow l_{\overset{\frown}{BC}} = \frac{\pi.R.120^0}{180} = \frac{2}{3}\pi R$

BÀI 9. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kinh R được tính theo công thức:

$$S = \pi R^2$$

2. Công thức diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính E, cung n^0 được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}.$$

(l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích hình tròn, hình quạt tròn và các loại lương có liên quan

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức trên và các kiến thức đã có.

1A. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất):

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
	12cm		45^0	
2cm				12,5cm^2
		40cm^2		10cm^2

1B. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
	14cm		60^0	
4cm				15cm^2

		$60cm^2$		$16cm^2$

2A. Cho hình vuông có cạng là 4cm nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O).

2B. Cho hình vuông có cạnh là 5cm nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O).

3A. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; 3cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OC và cung nhỏ AC khi $\widehat{ABC} = 40^0$.

3B. Cho tam giác ABC nội tếp đường tròn (O; 6cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OC và cung nhỏ AC khi $\widehat{ABC} = 60^0$.

Dạng 2. Bài toán tổng hợp

Phương pháp giải: Sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học để tính góc ở tâm, bán kính đường tròn. Từ đó tính được diện tích hình tròn và diện tích hình quạt tròn.

4A. Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB.

4B. Cho đường tròn (O) đường kính *AB*. Lấy M thuộc đoạn *AB*. vẽ dây CD vuông góc với *AB* tại *M*. Giả sử $AM = 2cm$ và CD = $4\sqrt{3}\,cm$. Tính:

a) Độ dài đường tròn (O) và diện tích đường tròn (O);

b) Độ dài cung $\overset{\frown}{CAD}$ và diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho đường tròn (O; *R*), đường kính *AB* cố định. Gọi *M* là trung điểm đoạn *OB*. Dây CD vuông góc với *AB* tại M. Điểm E chuyên động trên cung lớn CD (*E* khác *A*). Nôi *AE* cắt CD tại *K*. Nối *BE* cắt CD tại H.

a) Chứng minh bôn điểm *B*, M, *E*, *K* thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh *AE.AK* không đổi.

c) Tính theo *R* diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi *OB*, *OC* và cung nhỏ *BC*.

6. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây CD = R (C thuộc cung AD). Nối AC và BD cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng khi CD thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì độ lớn góc $\widehat{AMB}$ không đổi.

b) Cho $\widehat{ABC} = 30^0$, tính độ dài cung nhỏ AC và diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.

BÀI 9. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

1A.

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
1,9cm	12cm	11,3cm^2	45^0	1,4cm^2
2cm	12,6cm	12,6cm^2	$351,1^0$	12,5cm^2
3,6cm	22,4cm	40,7cm^2	90^0	10,2cm^2

1B.

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
2,2cm	14cm	15,2cm^2	$^{60}0$	2,6cm^2
4cm	25,1cm	50,3cm^2	$107,4^0$	15cm^2
4,4cm	27,6cm	60cm^2	$94,8^0$	16cm^2

2A. $R = 2\sqrt{2}cm, C(O) = 4\pi\sqrt{2}cm, S(O) = 8\pi cm^2$

2B. Tương tự **2A.**

3A. $S = 3\pi cm^2$

3B. Giải tương tự **3A**

4A. a) $l = \dfrac{2\pi R}{3}$;   b) $S = \sqrt{3}R^2 - \dfrac{\pi R^2}{3} = (\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3})R^2$

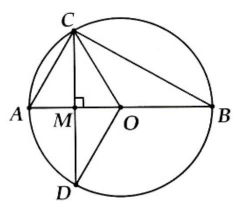
4B. a) $AC = 4cm \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}cm$

$\Rightarrow R = 4cm \Rightarrow C = 8\pi cm, S = 16\pi cm^2$

b) ΔAOC đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{COD} = 120^0 \Rightarrow l_{\overset{\frown}{CAD}} \frac{\pi.4.120}{180} = \frac{8}{3}\pi cm$.

$\Rightarrow S = \dfrac{\frac{8}{3}\pi.4}{2} = \frac{16}{3}\pi cm^2$



5. a) Chú ý: $\widehat{KMB} = 90^0$ và $\widehat{KEB} = 90^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $\Delta ABE \sim \Delta AKM (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AB}{AK}$

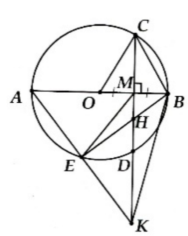
$\Rightarrow AE.AK = AB.AM = 3R^2$ không đổi.

c) ΔOBC đều.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 60^0 \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{6}$

6. a) Chứng minh được ΔCOD đều $\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^0$

b) $\widehat{ABC} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0 \Rightarrow l_{\overset{\frown}{AC}} = \frac{\pi R}{3}$



ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 9 của chương này.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB. M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

a) Chứng minh CBKH là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

d) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; cho P là điểm nằm trên d ao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nưanr mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

1B. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O (AB < AC). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M, AM cắt (O) tại điểm thứ hai D. Gọi E là trung diểm củ đoạn AD, EC cắt (O) tại điẻm thứ hai F. Chứng minh:

a) Tứ giác OEBM là tứ giác nội tiếp;

b) MB^2 = MA.MB;

c) $\widehat{BFC} = \widehat{MOC}$;

d) BF song song AM.

2A. Cho đường tròn (O) điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME < MF).Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

a) Chứng minh MA. MB = ME.MF.

b) Gọi *H* là hình chiêu vuông góc của điểm c lên đuòng thẳng *MO.* Chứng minh tứ giác *AHOB* nội tiếp.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ *OM* có chứa điểm *A,* vẽ nửa đường tròn đường kính *MF;* nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở *K.* Gọi *S* là giao điểm của hai đường thẳng CO và *KF.* Chứng minh các đường thẳng *MS* và *KC* vuông góc nhau.

d) Gọi *p* và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *EFS* và *ABS và T* là trung điểm của *KS.* Chứng minh ba điểm *P, Q, T* thẳng hàng.

2B. Cho tam giác *ABC* có hai đường cao *BE, CF* cắt nhau tại *H.* Gọi *E'* là điểm đối xứng *H* qua *AC, F'* là điểm đối xứng *H* qua *AB.* Chứng minh:

a) Tứ giác *BCE'F'* nội tiếp đường tròn (O);

b) Năm điểm *A, F', B, C, E'* cùng thuộc một đường tròn;

c) *AO* và *EF* vuông góc nhau;

d) Khi *A* chạy trên (*O*) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* không đổi.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

3. Cho nửa đường tròn (O; *R*) đường kính *BC.* Lấy điểm *A* trên tia đối của tia *CB.* Kẻ tiếp tuyến *AF* của nửa đường tròn (O) (vói *F* là tiếp điểm), tia *AF* cắt tiếp tuyến *Bx* của nửa đường tròn tại D. 4 *R*

Cho biết *AF* = $\frac{4R}{3}$.

a) Chứng minh tứ giác *OBDF* nội tiếp. Xác định tâm *I* của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

b) Tính côsin góc $\widehat{DAB}$.

c) Kẻ OM $\perp BC$ $(M \in AD)$. Chứng minh $\frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$.

d) Tính diện tích phần hình tứ giác OBDM ở bên ngoài nửa đường tròn (O) theo R.

4. Cho tam giác *ABC* nhọn, có *H* là trực tâm, nội tiếp đường tròn tâm o đường kính *AM* = 2*R.*

a) Chứng minh tứ giác *BHCM* là hình bình hành.

b) Gọi *N* là điểm đối xứng của M qua *AB.* Chứng minh tứ giác *AHBN* nội tiếp được trong một đường tròn.

c) Gọi E là điểm đối xứng của M qua *AC.* Chứng minh ba điểm *N, H, E* thẳng hàng.

d) Giả sử $AB = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AHBN.*

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 45°$, các góc B và C đều nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tai D và E. Gọi H là giao điểm của CD và BE.

a) Chứng minh $AE = BE$.

b) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

c) Chứng minh OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

d) Cho $BC = 2a$. Tính diện tích viên phân cung $\overset{\frown}{DE}$ của đường tròn (O) theo a.

6. Cho đường tròn (O) và một dây BC cố định không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy một điểm A bất kì. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN tới (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt các đường AO và BC lần lượt ở H và K. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: $AH.AO = AB.AC = AM^2$.

b) Chứng minh tứ giác BHOC nội tiếp.

c) Vẽ dây MP song song với BC. Chứng minh N, I, P thẳng hàng.

d) Khi A di động trên tia đôi của tia BC, chứng minh trọng tâm tam giác MBC chạy trên một đường tròn cố định.

7. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyên MNP ($MN < MP$) đến (O). Gọi K là trung điểm của NP.

a) Chứng minh các điểm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MBOA$ đi qua K.

b) Chứng minh tia KM là phân giác của góc $\widehat{AKB}$..

c) Gọi Q là giao điểm thứ hai của BK với (O). Chứng minh AQ song song NP.

d) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh:

$$MA^2 = MH.MO = MN.MP.$$

e) Chứng minh bốn điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

g) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh:

$AB^2 = 4.HE.HF$. (F là giao điểm của AB và NP).

h) Chứng minh $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ $OK.OE$ không đổi.

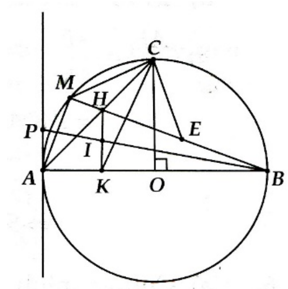
i) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O). Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

k) Chứng minh KE và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $AE.BE = AE.BE$.

l) Chứng minh khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

m) Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

ÔN TẬP CHƯƠNG III



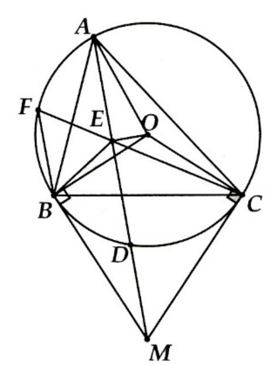
1A. a) Chứng minh được $\widehat{HCB} = \widehat{HKB} = 90^0$

b) $\widehat{ACK} = \widehat{HBK}$ (CBKH nội tiếp)

Lại có: $\widehat{ACM} = \widehat{HBK} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AM}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

c) Chứng minh được:



ΔMCA = ΔECB (c.g.c) ⇒ MC = CE

Ta có: $\widehat{CMB} = \widehat{CAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CB} = 45^0$

⇒ ΔMCE vuông cân tại C.

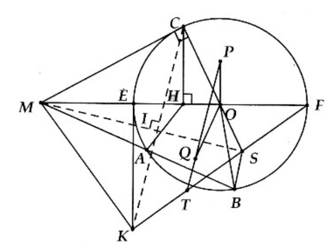
d) Gọi $PB \cap HK = I$ PB

Chứng minh được ΔHKB đồng dạng với ΔAMB (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HK}{KB} = \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{R} \Rightarrow HK = \frac{AP.BK}{R}$$

Mặt khác: $\Delta BIK \sim \Delta BPA$ (g.g)

(ĐPCM)



1B. a) $\widehat{OBM} = \widehat{OEM} = 90^0$

⇒ Tứ giác OEBM nội tiếp.

b) Chứng minh được: $\Delta ABM \sim \Delta BDM$ (g.g)

$\Rightarrow MB^2 = MA.MD$

c) ΔOBC cân tại O có OM vừa là trung trực vừa là phân giác

$\Rightarrow \widehat{MOC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC}$

Mà $\widehat{BFC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{BFC}$

d) $\widehat{OEM} = \widehat{OCM} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác EOCM nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MOC} = \widehat{BFC}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow FB // AM$

2A. a) HS tự chứng minh

b) MH.MO = MA.MB (=MC^2)

$\Rightarrow \Delta MAH \sim \Delta MOB(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$

$\widehat{MBO} + \widehat{AHO} = \widehat{MHA} + \widehat{AHO} = 180^0 \Rightarrow AHOB$ nội tiếp.

c) MK^2 = ME.MF = MC^2 $\Rightarrow$ MK = MC

$\Delta MKS = \Delta MCS(ch - cgv) \Rightarrow SK = SC$

$\Rightarrow$ MS là đường trung trực của KC

$\Rightarrow$ MS $\perp$ KC tại trung của CK

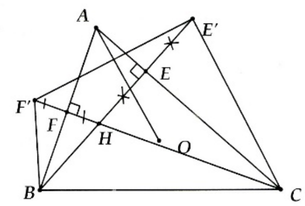
d) Gọi $MS \cap KC = I$

$MI.MS = ME.MF(= MC^2) \Rightarrow EISF$ nội tiếp đường tròn tâm P $\Rightarrow$ PI = PS. (1)

MI.MS = MA.MB(=MC^2) $\Rightarrow$ EISF nội tiếp đường tròn tâm P $\Rightarrow$ PI = PS. (1)

MI.MS = MA.MB (=MC^2) $\Rightarrow$ AISB nội tiếp đường tròn tâm Q $\Rightarrow$ QI = QS. (2)

Mà IT = TS = TK (do ΔIKS vuông tại I). (3)



Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ P, T, Q thuộc đường trung trực của IS $\Rightarrow$ P, T, Q thẳng hàng.

2B. a) ΔCHE' cân tại C $\Rightarrow \widehat{CE'H} = \widehat{CHE'}$

ΔBHF' cân tại B $\Rightarrow \widehat{BF'H} = \widehat{BHF'}$

Mà $\Rightarrow \widehat{CHE'} = \widehat{BHF'}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{CE'H} = \widehat{BF'H}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCE'F' nội tiếp đường tròn tâm (O)

b) Có $\widehat{BFC'} = \widehat{BE'C} = \widehat{CHE'} = \widehat{CAB}$

Vậy A, F', E' cùng chắn BC dưới góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ 5 điểm B, F', A, E', C cùng thuộc một đường tròn tâm (O).

c) AF' = AE' (=AH) $\Rightarrow$ AO là trung trực của EF $\Rightarrow$ AO $\perp$ E'F'. ΔHE'F' có EF là đường trung bình $\Rightarrow$ EF//E'F'.

$\Rightarrow$ AO $\perp$ FE.

d) $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow AFHE$ nội tieps đường tròn đường kính AH. Trong (O): Kẻ đường kính AD, lấy I trung điểm BC.

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH, BC$ cố định $\Rightarrow$ OI không đổi.

$\Rightarrow$ Độ dài AH không đổi

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi.

3. a) Chứng minh được DBOF nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của DO.

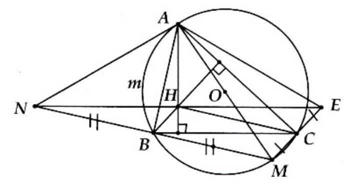
b) $OA = \sqrt{OF^2 + AF^2} = \frac{5R}{3} \Rightarrow \cos\widehat{DAB} = \frac{AF}{AO} = \frac{4}{5}$

c) $\Delta AMO \sim \Delta ADB(g.g) \Rightarrow \frac{DM}{AM} = \frac{OB}{OA}$

mà $\widehat{MOD} = \widehat{ODB} = \widehat{ODM} \Rightarrow DM = OM$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DM} = \dfrac{DB}{OM} = \dfrac{AD}{AM}$. Xét vế trái $\dfrac{BD}{DM} - \dfrac{DM}{AM} = \dfrac{AD - DM}{AM} = 1$

d) $DB = AB.\tan\widehat{DAB} = \dfrac{8R}{3}.\dfrac{3}{4} = 2R \Rightarrow OM = AO.\tan\widehat{DAB} = \dfrac{5R}{4}$



$\Rightarrow S_{OMDB} = \dfrac{13R^2}{8}$

$S_{OMDB\ ngoai} = S_{OMDB} - \dfrac{1}{4}S_{(O,R)} = \dfrac{R^2}{8}(13 - 2\pi)$

4. a) BH ⊥ AC và CM ⊥ AC ⇒ BH//CM

Tương tự ⇒ CH//BM

⇒ BHCM là hình bình hành

b) Chứng minh BNHC là hình bình hành

⇒ NH//BC

⇒ AH ⊥ NH ⇒ AHM = 90^0

Mà $\widehat{ABN} = 90$ ⇒ Tứ giác AHBN nội tiếp

c) Tương tự ý b, ta có: BHEC là hình bình hành. Vậy NH và HE//BC ⇒ N, H, E thẳng hàng.

d) $\widehat{ABN} = 90^0 \Rightarrow AN$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHBN.

$AN = AM = 2R \Rightarrow S_{\widehat{AnB}}, AB = R\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AmB} = 120^0$

$S_{AOB} = \dfrac{1}{2}S_{ABM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

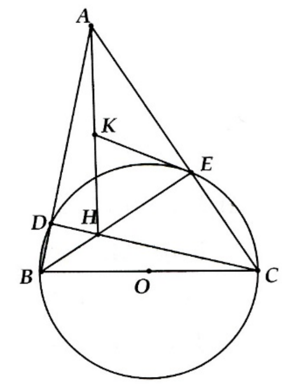
$S_{\widehat{AmB}} = S_{\text{atat}AOB} - S_{AOB} = \dfrac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$

$\Rightarrow S_{can\ tim} = 2S_{\widehat{AmB}} = \dfrac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$

5. a) HS tự chứng minh

b) HS tự chứng minh

c) ΔAEH vuông nên ta có: $KE = KA = \frac{1}{2}AH$.



$\Rightarrow$ ΔAKE cân tại K

$\Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA}$

ΔEOC cân ở $O \Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OEC}$

H là trực tâm $\Rightarrow$ AH $\perp$ BC

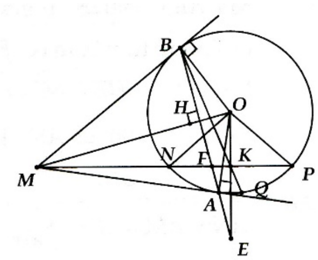
Có $\widehat{AEK} + \widehat{OEC} = \widehat{HAC} + \widehat{ACO} = 90^0$

(K tâm ngoại tiếp) $\Rightarrow$ OE $\perp$ KE

d) HS tự làm

6. a, b, c HS tự làm

d) Gợi ý: G' $\in$OI mà $\frac{IG'}{IO} = \frac{1}{3} \Rightarrow G'$ thuộc $(G'; \frac{1}{3}R)$



7. a) HS tự chứng minh

b) HS tự chứng minh

c) HS tự chứng minh

d) HS tự chứng minh

e) HS tự chứng minh

g) $\Delta OHE \sim \Delta FHM \Rightarrow \frac{OH}{HF} = \frac{HE}{HM}$

$\Rightarrow$ OH.HM = HE.HF

ΔMAO vuông tại A, AH $\perp$ MO

$\Rightarrow OH.HM = AH^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB^2 = 4HE.HF$

h) $\widehat{MHE} = \widehat{MKE} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác KEMK nội tiếp.

$\Rightarrow$ OK.OE=OH.OM = $OB^2 = R^2$.

i) Do $\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IA} \Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{ABI} \Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABM}$

Mà IM là phân giác $\widehat{AMB} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp

ΔABM.

k) Xét đường tròn đi qua 5 điểm M, B, O, K, A có MA = MA

$\Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MA} \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{MKA}$

$\Rightarrow$ KM là phân giác trong góc $\widehat{BKA}$, mà KE $\perp$ KM

$\Rightarrow$ KE là phân giác ngoài $\Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AF}{BF}$

$\Rightarrow$ AE.BF = AF.BE

1) HS tham khảo 4B, bài 7. Tứ giác nội tiếp

Kết luận: G thuộc đường tròn J' bán kính $\dfrac{2}{3}$JO với trung điểm OM và J' thỏa mãn $\dfrac{AJ'}{AJ} = \dfrac{2}{3}$

m) Học sinh tự giải.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút.

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào câu trả lời đúng trong các câu sau:

Câu 1. Biết tứ giác MNOP nội tiếp trong một đường tròn và góc $\widehat{PMN} = 120^0$, hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{O} = 60^0$; B. $\widehat{N} = 60^0$; C. $\widehat{P} = 60^0$; D. $\widehat{P} = 90^0$.

Câu 2. Công thức tính độ dài đường tròn tâm O, bán kính R là:

A. πR^2; B. $2\pi R$; C. $2\pi R^2$; D. $\frac{\pi R}{2}$.

Câu 3. Diện tích vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (O; 4cm) và (O; 3cm) là:

A. $25cm^2$; B. $7cm^2$; C. $7\pi cm^2$; D. $25\pi cm^2$.

Câu 4. Trong một đường tròn, góc ở tâm chắn cung 150^0 có số đo là:

A. 75^0; B. 60^0; C. 90^0; D. 150^0.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (2,0 *điểm)* Cho đường tròn (7; 2*cm).* Vẽ bán kính *IA* và *IB* sao cho $\widehat{AIB}$ = 120°. Hãy tính:

a) Độ dài cung nhỏ *AB.*

b) Diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi cung nhỏ *AB* và hai bán kính *IA, IB.*

Bài 2. (4,0 *điểm)* Cho đường tròn (O; *R)* và điểm *S ở* ngoài (O). Qua S kẻ các tiếp tuyến *SA, SB* với (O) trong đó *A, B* là các tiếp điểm. Gọi *M* là trung điểm của *SA, BM* cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C.

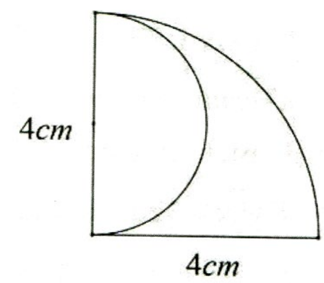
a) Chứng minh tứ giác OASB nội tiếp.

b) Chứng minh $MA^2 = MB.MC$.

c) Gọi N đối xứng với C qua M. Chứng minh $\widehat{CSA} = \widehat{MBS}$.

d) Chứng minh NO là tia phân giác của $\widehat{ANB}$.

Bài 3. (2,0 điểm) So sánh phần diện tích gạch sọc và phần diệc tích để trắng trong hình bên.



ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào câu trả lời đúng trong các câu sau:

Câu 1. Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn và góc $\widehat{C} = 75^0$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\widehat{A} = 105^0$; B. $\widehat{B} = 75^0$; C. $\widehat{C} = 90^0$; D. $\widehat{D} = 75^0$.

Câu 2. Trên đường tròn tâm O bán kính R, lấy hai điểm A, B sao cho số đo cung lớn AB bằng 270^0. Độ dài dây AB là:

A. R; B. $R\sqrt{3}$; C. $2R\sqrt{3}$; D. $R\sqrt{2}$.

Câu 3. Diện tích vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (O; 10cm) và (O; 6cm) là:

A. $50\pi cm^2$; B. $64\pi cm^2$;

C. $60\pi cm^2$; D. $16\pi cm^2$.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R). Từ A ngoài (O), kẻ tiếp tuyến AB, và tia OA cắt (O) tại C. Biết số đo cung BC bằng 67^0, tính số đo của $\widehat{OAB}$:

A. 23^0; B. 67^0; C. 100^0; D. 46^0.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (3,5 điểm) Một dây AB chai đường tròn (O; R) thành hai cung mà cung này gấp ba lần cung kia. Tính:

a) Số đo cung lớn và độ dài cung đó;

b) Các góc của tam giác OAB;

c) Khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

Bài 2. (4,5 điểm) Cho đường tròn O bán kính R và hai điểm A, B nằm trên đường tròn (AB không là đường kính). Các tiếp tuyến tại A, B của đường tròn cắt nhau tại M. Kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (C nằm giữa M và D).

a) Chứng minh các tam giác MBC và MDB đồng dạng.

b) Chứng minh tứ giác MAOB là nội tiếp.

c) Khi AB = $R\sqrt{3}$, tính bán kinh đường tròn ngoại tiếp tứ giác MAOB theo R.

d) Kẻ dây AE của (O) song song với MD. Nối BE cắt MD tại I. Chứng minh I là trung điểm của CD.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

ĐỀ SỐ 1

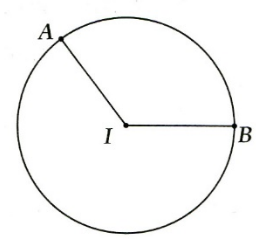
PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. A　　　　Câu 2.B

Câu 3. C　　　　Câu 4. D

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1.a) $\widehat{AIB} = 120^0$ là góc tâm của (O; R) nên sđ $\overset{\frown}{AB} = 120^0$



Áp dụng công thức tính độ dài cung tròn $l = \frac{\pi Rn}{180}$

với R = 2cm; $n^0 = 120^0$

Độ dài cung nhỏ AB là: $l = \frac{\pi.2.120}{180} = \frac{4\pi}{3} cm$

b) Diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi cung nhỏ AB và hai bán kính IA, IB là phần tô màu xám.

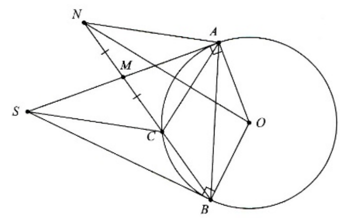
Áp dụng công thức: $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ với R = 2cm; $n^0 = 120^0$

Tính được $S = \frac{4\pi}{3} cm^2$

Bài 2. a) $\widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Tứ giác OASB nội tiếp

b) $\widehat{MAC} = \widehat{CBA} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CA}$



$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MBA \ (g-g)$

Từ đó suy ra $MA^2 = MB.MC$

c) Có $MA^2 = MB.MC$, mà MA = MS $\Rightarrow \frac{SM}{MC} = \frac{MC}{MS}$

Chứng minh được $\Delta MSB \sim \Delta MCS$

$\Rightarrow \widehat{MBS} = \widehat{CSM} \ \ hay \ \widehat{MBS} = \widehat{CSA}$

d) Chứng minh $\widehat{NAS} = \widehat{MBS}$ (Vì cùng = $\widehat{CSA}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác NAOB là từ giác nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{ANO} = \widehat{ONB}$

$\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 3. - Diện tích phần trắng là: 2π (cm^2)

- Diện tích phần gạch sọc là: $4\pi - 2\pi = 2\pi$ (cm^2)

Hai phần có diện tích bằng nhau.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. A	Câu 2.D
Câu 3. B	Câu 4.A

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) $\overset{\frown}{AnB} -$ cung lớn; $\overset{\frown}{AmB} -$ cung nhỏ.

Vì sđ $\overset{\frown}{AnB}$ + sđ $\overset{\frown}{AnB}$ = 360^0; mà sđ $\overset{\frown}{AnB}$ = 3sđ $\overset{\frown}{AnB}$;

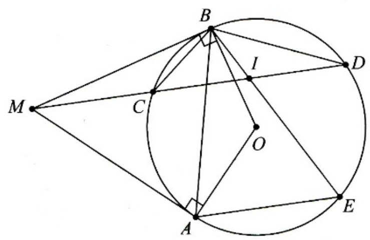
nên sđ $\overset{\frown}{AnB} = 270^0$ và độ dài cung $\overset{\frown}{AnB}$ là $l = \frac{3\pi R}{2}$

b) Vì ΔOAB vuông cân $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$ và $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 45^0$

c) Vì $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}(OH \perp AB; H \in AB)$

Bài 2. a) Vì $\widehat{MBC} = \widehat{MDB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CB}$ nên chứng minh được

$\Delta MBC \sim \Delta MDB(g-g)$



b) Vì $\widehat{MBO} + \widehat{MAO} = 180^0$ nên tứ giác MAOB nội tiếp.

c) Đường tròn đường kính OM là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MAOB \Rightarrow r = \dfrac{MO}{2}$

Gọi H là giao điểm của AB với OM

$\Rightarrow OH \perp AB; AH = BH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Giải tam giác vuông OAM, đường cao AH ta được OM = 2R $\Rightarrow$ r= R

d) Ta có $\widehat{MIB} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{DE} + sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2}$ và $\widehat{MAB} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AC} + sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2}$

Vì AE song song $CD \Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{DE} = sđ\,\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{MAB}$

Do tứ giác MAIB nội tiếp hay 5 điểm A, B, O, I, M nằm trên cùng 1 đường tròn kính MO.

Từ đó ta có được $\widehat{MIO} = 90^0 \Rightarrow OI \perp CD$ hay I là trung điểm của CD.

CHƯƠNG IV. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

BÀI 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH
VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hình trụ có bán kính đấy R và chiều cao h. Khi đó:

1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$.

2. Diện tích đáy: S = πR^2.

3. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

4. Thể tích: V = $\pi R^2 h$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính bán kính đấy, chiều cao, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ

Phương pháp giải: Vận dụng các công thức trên để tính bán kính đáy, chiều cao, diện tích đấy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

1A. Điền các kết quả tương ứng của hình trụ vào ô trống:

Bán kính đấy (*cm*)	**Chiều cao (*cm*)**	**Chu vi đáy (*cm*)**	**Diện tích đáy (*cm*²)**	**Diện tích xung quanh (*cm*²)**	**Diện tích toàn phần (*cm*²)**	**Thể tích (*cm*³)**
1	2					
5	4					
	10	8π				
8				400π		

1B. Điền các kết quả tương ứng của hình trụ vào ô trống:

Bán kính đấy (*cm*)	**Chiều cao (*cm*)**	**Chu vi đáy (*cm*)**	**Diện tích đáy**	**Diện tích xung quanh**	**Diện tích toàn phần (*cm*²)**	**Thể tích (*cm*³)**

			(cm^2)	**(cm^2)**		
2	3					
2						100π
	8	3π				
	8			400π		

2A. Một hình trụ có độ dài đường cao gấp đôi đường kính đáy. Biết thể tích của hình trụ là $128\pi cm^3$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

2B. Một hình trụ có bán kính đáy là 3cm. Biết diện tích toàn phần của hình trụ gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

Dạng 2. Bài tập tổng hợp.

Phương pháp giải: Vận dụng một cách linh hoạt kiến thức về hình học phẳng đã được học kết hợp các công thức và lí thuyết về hình trụ kết hợp giải bài tập.

3A. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D.

a) Chứng minh:

i) AC + BD = CD; ii) $\widehat{COD} = 90^0$;

iii) AC.BD = $\frac{AB^2}{4}$.

b) Gọi E là giao điểm của OC và AM, F là giao điểm của MB và OD. Cho biết OC = 2R, hãy tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ tạo thành khi cho tứ giác EMFO quay quanh EO.

3B. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O; R) đường kính BC. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Đường tròn tâm K đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật và AB.AD = AE.AC.

b) Cho biết BC = 25cm và AH = 12cm. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của hình tạo thành bởi khi cho tứ giác ADHE quay quanh AD.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Điện các kết quả tương ứng của hình trụ vào ô trống:

Bán kính đấy (*cm*)	**Chiều cao (*cm*)**	**Chu vi đáy (*cm*)**	**Diện tích đáy (*cm*²)**	**Diện tích xung quanh (*cm*²)**	**Diện tích toàn phần (*cm*²)**	**Thể tích (*cm*³)**
5	12					
	3			60π		
	17	20π				
				20π	28π	

5. Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm OA, dây Cd vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

a) CHứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.

b) Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K.

c) Kẻ DM $\perp$ CB, DN $\perp$ AC. Chứng minh MN, AB, CD đồng quy.

d) Cho BC = 25cm. Hãy tính diện tích xung quanh hình trụ tạp thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD.

CHƯƠNG IV. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

BÀI 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

1A. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Bán kính đáy (cm)	**Chiều cao (cm)**	**Chu vi đáy (cm)**	**Diện tích đáy (cm²)**	**Diện tích xung quanh (cm²)**	**Diện tích toàn phần (cm²)**	**Thể tích (cm³)**
1	2	2π	π	4π	6π	2π
5	4	10π	25π	40π	90π	100π
4	10	8π	16π	80π	112π	160π

8	25	16π	64π	400π	528π	1600π

1B. Tương tự **1A**

Bán kính đáy (cm)	**Chiều cao (cm)**	**Chu vi đáy (cm)**	**Diện tích đáy (cm²)**	**Diện tích xung quanh (cm²)**	**Diện tích toàn phần (cm²)**	**Thể tích (cm³)**
2	3	4π	4π	12π	12π	20π
2	25	4π	4π	100π	100π	108π
1,5	8	3π	$2,25\pi$	24π	18π	$28,5\pi$
40	5	80π	1600π	400π	8000π	3600π

2A. Vì h = 2R nên V = $\pi R^2h = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$

Mặt khác: V = $128\pi \Rightarrow R = 4$cm

$\Rightarrow h = 8$cm, $S_{xq} = 2\pi Rh = 64\pi$ cm^2

2B. Tương tự **2A.**

Diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh nên:

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2.2\pi R^2 \Rightarrow 2\pi Rh = 2\pi R^2 \Rightarrow R = h.$$

Vậy chiều cao của hình trụ là 3cm.

3A. a) i) Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau có CA = CM và DM = DB nên AC + BD = CM + DM = CD;

ii) $\widehat{COD} = \widehat{COM} + \widehat{MOD} = \frac{1}{2}(\widehat{AOM} + \widehat{MOB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 90^0$

iii) $\Delta COA \sim \Delta ODB (g.g) \Rightarrow AC.BD = OA.OB = \frac{AB^2}{4}$

b) với OC = 2R, OM = r, chứng minh được $\widehat{MCO} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{MOC} = 60^0$. Từ đó tính được EM = OM sin 60^0 = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$OE = OM\cos 60^0 = \frac{R}{2}; S_{xq} = 2\pi.ME.OE = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)

Và $V = \pi.ME^2.OE = \frac{3\pi R^3}{8}$ (đvtt)

3B. Tương tự **3A.**

a) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = \widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác ADHE là hình chữ nhật.

Lại có AB.AD = AH^2 = AE.AC nên AB.AD = AE.AC

b) HB = 9cm, HC = 16cm (Lưu ý: AB < AC nên HB < HC)

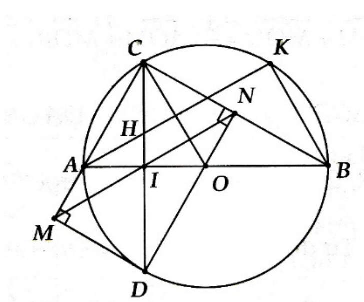
$HD = \frac{36}{5}cm,\ HE = \frac{48}{5}cm,\ S_{xq} = \frac{3456}{25}\pi cm^2,\ \ V = \frac{62208}{125}\pi cm^3$

4A. Tương tự 1A

Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
5	12	10π	25π	120π	170π	300π
10	3	20π	100π	60π	260π	300π
10	17	20π	100π	340π	540π	1700π
2	5	4π	4π	20π	28π	20π

5. Tương tự **3A**

a) Tứ giác BIHK nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)



b) Chứng minh AH.AK = AI.AB = $\frac{1}{2}$R.2R = $R^2 \Rightarrow$ ĐPCM.

c) MCND là hình chữ nhật $\Rightarrow$ MN, AB, CD đồng quy tại I là trung điểm của CD.

d) Tam giác OCA đều $\Rightarrow \widehat{ABC}=30^0, \widehat{MCD}=60^0$

Tính được $CD=2CI=2.\frac{25}{2}=25cm,\ CM=\frac{25}{2}cm$

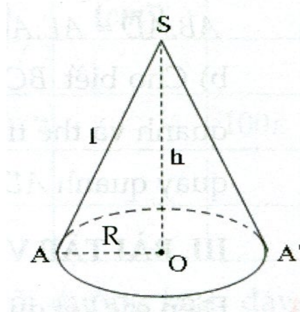
$MD=\frac{25\sqrt{3}}{2}cm,\ S_{xq}=2\pi CM.MD=\frac{625\sqrt{3}}{2}\pi cm^3$

BÀI 2. DIỆN TÍCH XUANH QUANH
VÀ THỂ TỊCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Diện tích, thể tích hình nón

Cho hình nón có bán kính đáy R, đường sinh *l*, chiều cao h. Khi đó:

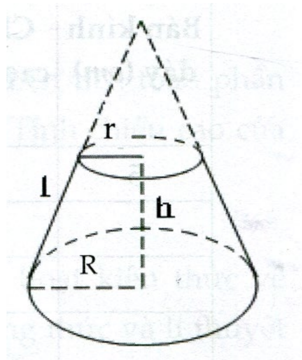


Hình 1

a) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$.

b) Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$.

c) Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$



2. Diện tích, thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có các bán kính đáy R và r, chiều chao h, đường sinh *l*.

a) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R+r)l$.

b) Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

c) Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích, thể tích và các đại lượng liên quan của hình nón và hình nón cụt

Phương pháp giải: Sử dụng công thức về diện tích, thể tích hình nón và hình nón cụt.

1A. Cho hình nón có bán kính đáy r, đường kính đáy d, chiều cao h, đường sinh *l*, thể tích V, diện tích xung quanh S_{xq}, diện tích toàn pphần S_{tp}. Điền các kết quả vào ô trống trong bảng sau:

Bán kính *r*	5		
Đường kính *d*			10

Chiều cao *h*		10	
Đường sinh *l*	10		
Thể tích *V*		1000π	
Diện tích xung quanh S_{xq}			65π
Diện tích toàn phần S_{tp}			

1B. Cho hình nón có bán kính đáy r, đường kính đáy d, chiều cao h, đường sinh l, thể tích V, diện tích xung quanh S_{xq}, diện tích toàn phần S_{tp}. Điền các kết quả vào ô trống trong bảng sau:

Bán kính *r*			5
Đường kính *d*		20	
Chiều cao *h*	100		
Đường sinh *l*			13
Thể tích *V*	300π		
Diện tích xung quanh S_{xq}		150π	
Diện tích toàn phần S_{tp}			

2A. Một dụng cụ hình nón có đường dài 15cm và và diện tích xung quanh là $135\pi cm^2$.

a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

2B. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 10cm và 5cm, chiều cao là 20cm.

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

Dạng 2. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng các cong thức trên và các kiến thức đã học để tính các đại lượng chưa biết rồi từ đó tính diện tích, thể tích hình nón, hình nón cụt.

3A. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng, OA = a, OB = b (a, b cùng đơn vị là cm). Qua A và B vẽ theo thứ tự các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau và cắt Ax ở C, By ở D.

a) Chứng minh các tam giác AOC và BDO đồng dạng. Từ đó suy ra tích AC.BD không đổi.

b) Với $\widehat{COA} = 60^0$, hãy:

i) Tính diện tích hình thang ABCD;

ii) Tính tỉ số thể tích các hình do các tam giác AOC và BOD tạo thành khi cho hình vẽ quay xung quanh AB.

3B. Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và B, biết cạnh AB = BC = 3cm, AD = 7cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt tạo thành khi quay hình thang quanh cạnh AB.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Một hình quạt tròn có bán kính 20*cm* và góc ở tâm là 144°. Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đo nùa góc ở đỉnh của hình nón đó.

5. Một hình nón có bán kính đáy bằng *5cm* và diện tích xung quanh là $65\pi cm^2$ Tính thể tích của hình nón đó.

6. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14cm và 9*cm*, chiều cao là 23*cm*.

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

7. Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15cm, người ta tiện thành một hình nón có thê tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là $640\pi cm^3$

a) Tính thể tích khúc gỗ hình trụ.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

BÀI 2. DỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

1A. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Bán kính r	5	$10\sqrt{3}$	5

Đường kính d	10	$20\sqrt{3}$	10
Chiều cao h	$5\sqrt{3}$	10	12
Đường sinh l	10	20	13
Thể tích V	$\frac{125\sqrt{3}\pi}{3}$	1000π	100π
Diện tích xung quanh S_{xq}	50π	$200\sqrt{3}\pi$	65π
Diện tích toàn phần S_{tp}	75π	$(300 + 200\sqrt{3})\pi$	90π

1B. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Bán kính r	3	10	5
Đường kính d	6	20	10
Chiều cao h	100	$5\sqrt{5}$	12
Đường sinh l	$\sqrt{1009}$	15	13
Thể tích V	300π	$\frac{500\sqrt{5}\pi}{3}$	100π
Diện tích xung quanh S_{xq}	$9\pi\sqrt{5}$	150π	65π
Diện tích toàn phần S_{tp}	$(9\sqrt{5} + 9)\pi$	250π	90π

2A. a) h = 12cm d) $S_{tp} = 216\pi$ cm^2, $V = 324\pi$ cm^3.

2B. $S_{xq} = \left(75\sqrt{17} + 125\right)\pi,\ V = \frac{3500}{3}\pi cm^3$

3A. a) $\widehat{AOC} = \widehat{ODB}$ (cùng phụ $\widehat{BOD}$)

$\Rightarrow$ ΔAOC ~ ΔBDO (g.g)

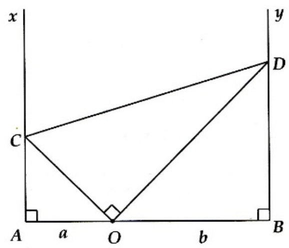
$\Rightarrow \frac{AC}{BO} = \frac{AO}{BD}$

$\Rightarrow$ AC.BD = a.b (không đổi)

b) Ta có $\widehat{COA} = \widehat{ODB} = 60^0,\ \widehat{ACO} = \widehat{DOB} = 30^0, AC = a\sqrt{3}, BD = \frac{b\sqrt{3}}{3}$

i) $S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}(a+b)(3a+b)}{6}$

ii) 9



3B. Tính được $S_{xq}=50\pi, V=79\pi$

4. Tính được sin α = 0,4 ⇒ α = $23^{0}35'$

5. Tính được V = $100cm^3$

6. a) V = 9706π cm^3 ≈ 9,71

b) $S=\pi(81+23\sqrt{554})\approx 622,36cm^2$

7. a) $V=960\pi cm^3$; b) $S_{xq}=136cm^2$

BÀI 3. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CẦU

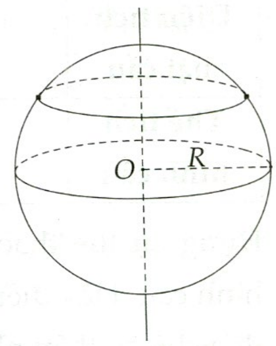
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hình cầu

- Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán knhs R một vòng quanh đường kính AB cố điịnh ta thu được một hình cầu.

- Nửa đường tròn trong phép quay nói trê tạo thành một mặt cầu.

- Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu đó.



Hình 1

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.

- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn, trong đó:

+ Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là đường tròn lớn).

3. Diện tích, thể tích

Cho hình cầu bán kính R.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức $S = 4\pi R^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ để tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan.

1A. Điền vào các ô trông trong bảng sau:

Bán kính	0,4 mm	6dm	0,2 m	100 km	6hm	50 dam

hình cầu						
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

1B. Dụng cụ thể thao các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trông ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ sô' thập phân thứ hai):

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7mm				6,1 cm
Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích			1697 π cm²		
Thể tích				36 nem³	

2A. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm²) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm³). Tính bán kính của hình cầu đó.

2B. Một hình cầu có diện tích bề mặt là 1007 π m². Tính thể tích hình cầu đó.

Dạng 2. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng các công thức trên và các kiến thức đã học để tính các đại lượng chưa biết rồi từ đó tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.

3A. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa đường tròn tại A và B. Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a) Chứng minh MON và APB là hai tam giác vuông đồng dạng.

b) Chứng minh AM.BN = R².

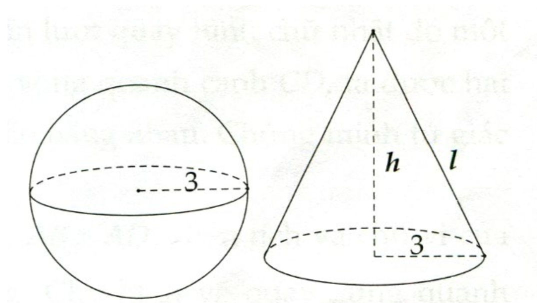
c) Tính tỉ số $\dfrac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \dfrac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quan AB sinh ra.

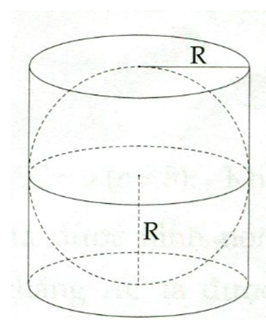
3B. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Một hình cầu có bán kính 3cm. Một hình nón cũng có bán kính đáy bằng 3cm và có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu. Tính chiều cao của hình nón.



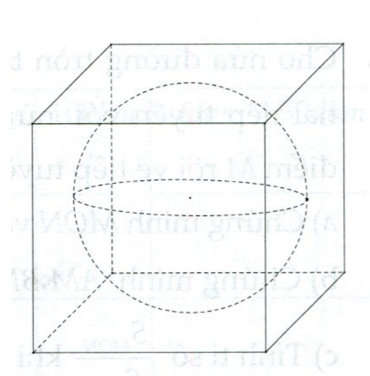
5. Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa:



a) Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ;

b) Thể tích hình cầu và thể tích hình trụ.

6. Cho một hình câu và một hình lập phương ngoại tiếp nó. Tính tỉ số phần trăm giữa:



a) Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình lập phương;

b) Thể tích hình cầu và thể tích của hình lập phương.

7. a) Tìm diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu, biết bán kính của hình cầu là 4cm.

b) Thể tích của một hình cầu là 512π cm². Tính diện tích mặt cầu đó.

BÀI 3. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CẦU

1A. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,4mm	6dm	0,2m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu	$\frac{16}{25}\pi$ mm^2	144π dm^2	$\frac{4}{25}\pi$ m^2	40000π km^2	144π hm^2	10000π dam^2
Thể tích hình cầu	$\frac{32\pi}{375}$ mm^3	288π dm^3	$\frac{4}{375}\pi$ m^3	$\frac{4000000}{3}\pi$ km^3	288π hm^2	$\frac{500000}{3}\pi$ dam^3

1B. Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Loại bóng	**Quả bóng gôn**	**Quả khúc côn cầu**	**Quả ten-nít**	**Quả bóng bản**	**Quả bia**
Đường kính	42,7mm	7,32cm	13cm	6cm	61cm
Độ dài đường tròn lớn	134,08 mm	23cm	13π	6π cm	61π mm
Diện tích	5728,03 mm^2	168,33 cm^2	169π cm^2	36π cm^2	3721π cm^2
Thể tích	40764,51 mm^3	205,36 cm^3	$\frac{2197}{6}\pi$ cm^3	36π cm^3	$\frac{226981}{6}\pi$ mm^3

2A. Tính được R = 3cm

2B. Tính được $V = \frac{500}{3}\pi m^3$

3A. a), b) HS tự chứng minh.

c) $AM = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \frac{25}{16}$ d) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

3B. Tính được $S = 2\pi a^2$

4.Đường tuy gắn không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

4B. Tính được $h = 6\sqrt{2}cm$

5. a) Tính được $\dfrac{S}{S_{xq}} = 1$ b) Tính được $\dfrac{V_{hc}}{V_{ht}} = \dfrac{2}{3}$

6. a) Tính được $\dfrac{S}{S_{xq}} = 78,5\%$ b) Tính được $\dfrac{V_{hc}}{V_{hlp}} = 52,4\%$

7. a) Tính được $S = 64\pi cm^2$ và $V = \dfrac{256\pi}{3}cm^3$

b) Tính được $S = 211,32\pi cm^2$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần Tóm tắt lý thuyết đã có ở Bài 1, Bài 2 và Bài 3 của chương này.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho một hình nón có bán kính đường tròn đáy là r (cm), chiều cao 2r (cm) và một hình cầu có bán kính r (cm). Hãy tính:

a) Diện tích mặt cầu, biết diện tích toàn phần của hình nón là 21,06 cra^2;

b) Thể tích của hình nón, biết thể tích của hình cầu là 15,8cm^3.

1B. Một hình nón có chiều cao h. Hai đường sinh vuông góc với nhau mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ lệ là 1:2. Tính thể tích hình nón.

2A. Cho hình chữ nhật ABCD. Lần lượt quay hình chữ nhật đó một vòng quanh cạnh BC và một vòng quanh cạnh CD, ta được hai hình trụ có diện tích toàn phần bằng nhau. Chứng minh tứ giác ABCD là hình vuông.

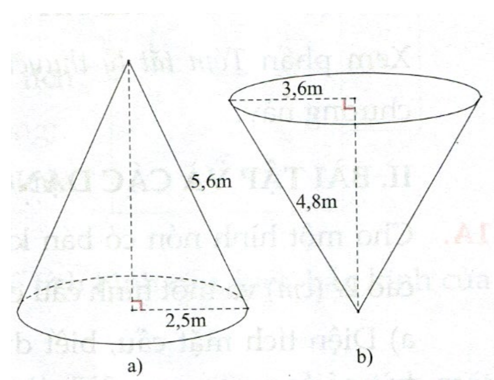
2B. Một hình chữ nhật ABCD có AB > AD, diện tích và chu vi của nó theo thứ tự là 2a^2 và 6a. Cho hình vẽ quay xung quanh cạnh AB ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

3. Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = c, AC = b ($c \neq b$). Khi quay tam giác ấy quanh đường thẳng AB ta được hình nón (N_1), khi quay tam giác ấy quanh đường thẳng AC ta được hình nón (N_2).

a) Diện tích xung quanh hai hình nón (N,) và (N_2) có bằng nhau không? Tại sao?

b) Thể tích hai hình nón (N_1) và (N_2) có bằng nhau không? Tại sao?

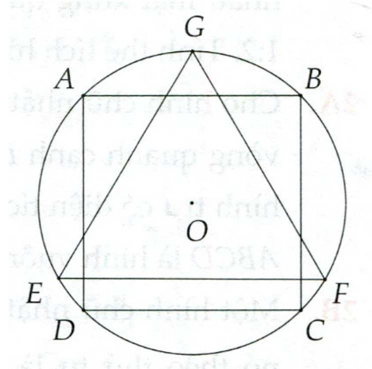


4. Hãy tính diện tích toàn phần của các hình tuông ứng theo các kích thuớc đã cho trên các hình vẽ bên.

5. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và GEF là tam giác đều nội tiếp đường tròn đó, EF là dây song song với AB. Cho hình đó quay xung quanh trục GO. Chứng minh:

a) Bình phương thể tích của hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng tích của thể tích hình cầu sinh ra bởi hình tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra;

b) Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích diện tích hình cầu và diện tích toàn phần của hình nón.



6. Cho tam giác ABC vuông tại A có B = 30° và BC = 4 cm.

a) Quay tam giác đó một vòng quanh cạnh AB. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của hình tạo thành.

b) Tính diện tích toàn phần của hình tạo thành.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1A. a) Tính được r = 1,44cm $\Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 26{,}03cm^2$

b) Ta có $V_c = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 15{,}8cm^3 \Rightarrow R = 1{,}56cm$

$\Rightarrow V_{hn} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \approx 2{,}53\pi cm^3$

1B. Tính được $V = \dfrac{2}{3}\pi h^3$

2A. Khi quay hình chữ nhật quanh cạnh BC:

$S_{tp\ tru} = 2\pi AB.AD + 2\pi AB^2 = S_1$

Khi quay cạnh CD: $S_{tp\ tru} = 2\pi AD.AB + 2\pi BC^2 = S_2$

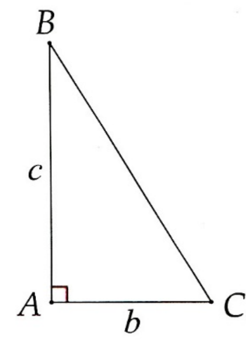
Mặt khác: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow 2\pi AD.AB + 2\pi AB^2 = 2\pi AD.AB + 2\pi BC^2$

$\Leftrightarrow$ AB = BC $\Rightarrow$ ABCD là hình vuông.

2B. Ta có $S_{tp} = 2\pi .BC.AB + 2\pi BC^2 = 2\pi .2.a.a + 2\pi a^2 = 6\pi a^2$

Ta có: $V = \pi BC^2.AB = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$

3. a) $S_{xqN_1} = \pi AC.BC = \pi.b.\sqrt{b^2+c^2} = S_1;$



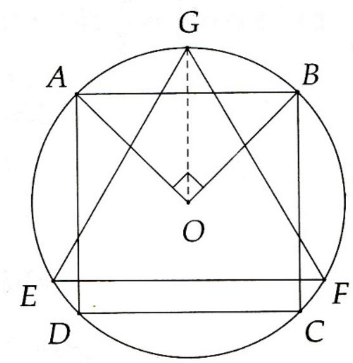
$S_{xqN_2} = \pi AB.BC = \pi.c.\sqrt{b^2+c^2} = S_2;$

$\Rightarrow S_1 \neq S_2$

b) $V_{N_1} = \dfrac{1}{3}.\pi.AC^2.AB = \dfrac{1}{3}\pi b^2 c$;

$V_{N_2} = \dfrac{1}{3}.\pi.AB^2.AC = \dfrac{1}{3}\pi c^2 b \Rightarrow V_{N_1} \neq V_{N_2}$

4. a) $S_{tp} = 20,25\pi m^2$ b) $S_{tp} = 30,24\pi m^2$

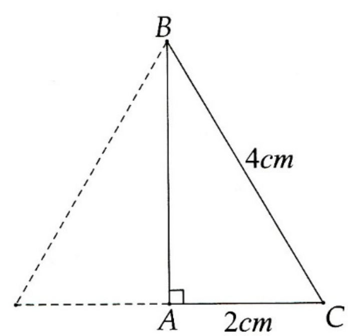


5. a) $V_{htABCD} = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2.BC = \pi\dfrac{AB^3}{4} = \pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}.R^3$ (1)

$V_{hc} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ (2)

$V_{hn} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2.GH = \dfrac{1}{8\sqrt{3}}\pi EF^3$. Tính được $GO = \sqrt{3}R$

$\Rightarrow V_{hn} = \dfrac{1}{8\sqrt{3}}\pi 3\sqrt{3}R^3 = \dfrac{3}{8}\pi R^3$. (3)



Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $S_{tpht} = 3\pi R^2 (4),\ S_{hc} = 4\pi R^2$ (5)

$S_{tphn} = \dfrac{3}{4}\pi EF^2 = \dfrac{3}{4}\pi 3R^2 = \dfrac{9}{4}\pi R^2$ (6)

Từ (4); (5) và (6) $\Rightarrow$ ĐPCM.

6. a) Dễ dàng tính được

$AC = 2cm,\ AB = 2\sqrt{3}cm$ và $S_{hn} = \pi AC.BC = 8\pi$

$\Rightarrow V_{hn} = \dfrac{1}{3}\pi AC^2.AB = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

b) Tính được $S_{tp} = 12\pi cm^2$

ĐỀ KỂM TRA CHƯƠNG IV

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Một hình trụ có bán kính đáy là 7cm, diện tích xung quanh bằng $352cm^2$. Khi đó chiều cao của hình trụ gần bằng là:

A. 3,2cm; B. 4,6cm; C. 1,8cm; D. 8cm.

Câu 2. Một hình nón có bán kính đáy là 5cm, chiều cao bằng 12cm. Khi đó diện tích xung quanh bằng:

A. $60\pi cm^2$; B. $300\pi cm^2$; C. $3\pi cm^2$; D. $8\pi cm^2$.

Câu 4. Hình trụ có chiều cao h = 8cm và bán kính mặt đáy là 3cm thì diện tích xung quanh là:

A. $16\pi cm^2$; B. $24\pi cm^2$; C. $32\pi cm^2$; D. $48\pi cm^2$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (3,5 điểm) Một chiếc xô hihf nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 20cm và 5cm, chiều cao là 20cm.

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

Bài 2. (4,5 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, Ax và By là hai tiêp tuyến với nửa đường tròn tại A và B. Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP với đường tròn tâm O (tiếp điểm P khác điểm A) cắt By tại N.

a) Chứng minh các tam giác MON và APB đồng dạng.

b) Chứng minh $AM.BN = R^2$.

c) Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi AM = $\frac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn đường kính AB quay một vòng quanh AB sinh ra.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ chái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Thể tích của một hình trụ bằng $375\pi cm^3$, chiều cao của hình trụ là 15cm. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

A. $150\pi cm^2$. B. $300\pi cm^2$. C. $75\pi cm^2$. D. $32\pi cm^2$.

Câu 2. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 6cm cố định. Quay nửa hình tròn đó quanh AB thì được một hình cầu có thể tích bằng:

A. $288\pi cm^2$. B. $9\pi cm^2$. C. $27\pi cm^2$. D. $36\pi cm^2$.

Câu 3. Một hình chữ nhật có chiều dài bằng 3cm, chiều rộng bằng 2cm. Quay hình chữ nhật này một vòng quanh chiều dài của nó được một hình trụ. Khi đó diện tích xung quanh bằng:

A. $6\pi cm^2$; B. $8\pi cm^2$; C. $12\pi cm^2$; D. $18\pi cm^2$.

Câu 4. Diện tích toàn phần của hình nón có bán knhs đường tròn đáy 2,5 cm, đường sinh 5,6 cm bằng:

A. $20\pi cm^2$. B. $20,25\pi cm^2$. C. $20,5\pi cm^2$. D. $20,75\pi cm^2$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK căý CD tại H.

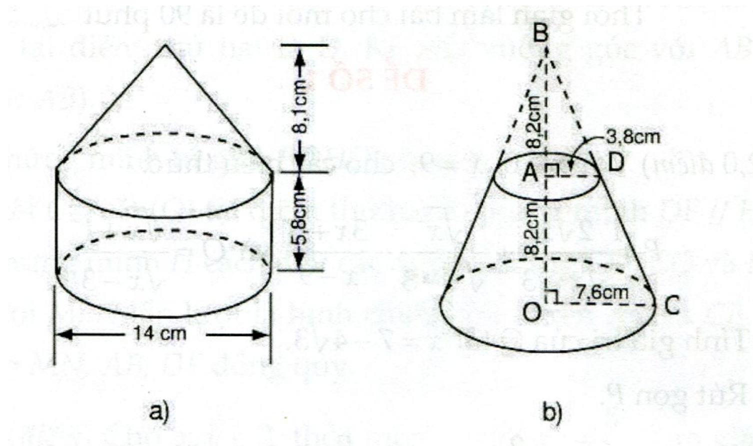
a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔBHK đi qua I.

b) Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K.

c) Kẻ DN ⊥ CB, DM ⊥ AC. Chứng minh MN, AB và CD đồng quy.

d) Cho BC = 25cm. Hãy tính diện tích xung qanh hình trụ tạo thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD.

Bài 2. (2,0 điểm) Hãy tính thể tích các hình dưới đây theo kích thước đã cho:



ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 90 phút

ĐỀ SỐ 1

Bài 1. (2,0 điểm) Với $x \geq 0, x \neq 9$, cho các biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}3-3} - \frac{3x+3}{x-9} \text{ và } Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.$$

a) Tính giá trị của Q tại x = 7 - $4\sqrt{3}$.

b) Rút gọn P.

c) Tìm x để $M \geq -\dfrac{2}{3}$ biết $M = \dfrac{P}{Q}$.

d) Đặt $A = x.M + \dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 2. (2,0 điểm) Giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 900 chi tiết máy trong một thời gian quy định. Do cải tiến kĩ thuật nên tổ một vượt mức 15%, tổ hai vượt mức 10% so với kế hoạch. Vì vậy hai tổ sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ sản xuất phải làm bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - \dfrac{2}{y+1} = 1 \\ 5x + \dfrac{2}{y+1} = 3 \end{cases}$.

b) Cho phương trình x^2 (m – 1)x – m^2 – 1 = 0 với x là ẩn và m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{2}$.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) đường kính AB (AC < BC). Trên dây CB lấy điểm H (với H khác C và B). AH cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Kẻ HQ vuông góc với AB (với Q thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác BDHQ nội tiếp.

b) Biết CQ cắt (O) tại điểm thứ hai F, chứng minh DF // HQ.

c) Chứng minh H cách đều các đường thẳng CD, CQ và DQ.

d) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của F trên AC và CB. Chứng minh MN, AB, DF đồng quy.

Bài 5. (0,5 điểm) Cho x, y ∈ R thỏa mãn x + y + xy = $\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $x^2 + y^2$.

ĐỀ SỐ 2

Bài 1. (2,0 điểm) Cho các biểu thức

$$A = \frac{x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \text{ và } B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{x + 9}{2\sqrt{x} + 6}$$

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

a) Tính giá trị của A khi x = 25.

b) Rút gọn B.

c) Tìm các giá trị x nguyên để A.B có giá trị nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một đội xe theo kế hoạch phải chở hết 200 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 4 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)(y-1)=xy-1\\(x-3)(y-3)=xy-3\end{cases}$

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho prabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2x + 2m^2 - 2m$. Tìm các giá trị của m để d cắt (P) cắt tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung Oy.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O; R), đường kính AB vuông góc với dây cung CD tại H (HB < R). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC, toa AM cắt đường thăng CD tại N; MB cắt CD tại E.

a) Chứng minh các tứ gics AMEH và MNBH nội tiếp.

b) Chứng minh NM.NA = NC.ND = NE.NH.

c) Nối BN cắt (O) tại K ($K \neq B$). Đường thẳng KH cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Chứng minh ba điểm A, E, K thẳng hàng và ΔAMF cân.

Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ AC thì I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 5. (0,5 điểm) Cho x, y là hai số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$M=\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}.$

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

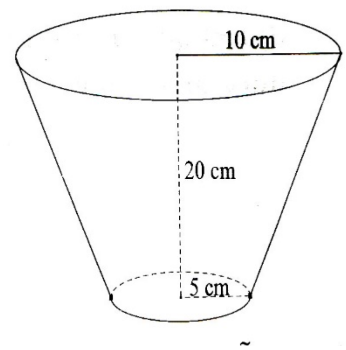
ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. D.	Câu 3. A.
Câu 2. D.	Câu 4. D.

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) Dung tích của xô là: $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$



với r_1 = 5cm, r_2 = 10cm; h = 20cm.

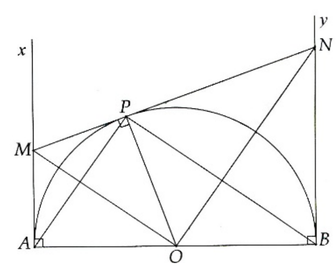
Thay số liệu và tính toán ta được $V \simeq 3663 cm^3$

b) Tính được đường sinh của xô dạng hình nón cụt là $l \simeq 20,6cm$.

Diện tích tôn để làm xô mà không kể diện tích các chỗ ghép là $S = S_{xq} + S_1 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2$ với S_1 là diện tích đáy nhỏ của đáy dưới của xô.

Thay số vào và tính toán ta được $S \simeq 1048,76 cm^2$

Bài 2. a) Sử dụng các tứ giác nội tiếp chứng minh được $\widehat{PMO} = \widehat{PAO}$ và $\widehat{PNO} = \widehat{PBO} \Rightarrow \Delta MON$ và ΔAPB đồng dạng (g.g)



b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: MP = MA và NP = NB.

Mặt khác MP.NP = PO^2 và PO = R $\Rightarrow$ AM.BN = R^2 (ĐPCM)

c) Ta có $AM = \frac{R}{2} \Rightarrow MP = \frac{R}{2}$

Mặt khác $AM = \frac{R}{2} \Rightarrow BN = 2R \Rightarrow PN = 2R$

Từ đó tìm được $MN = \frac{5R}{2}$

Vì ΔMON và ΔAPB đồng dạng nên $\frac{S_{\Delta MON}}{S_{\Delta APB}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{25}{16}$

d) Khi quay nửa đường tròn đường kính AB xung quanh AB ta được hình cầu với tâm O và bán kính R' = OA = R.

Thể tích hình cầu đó là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (đvdt)

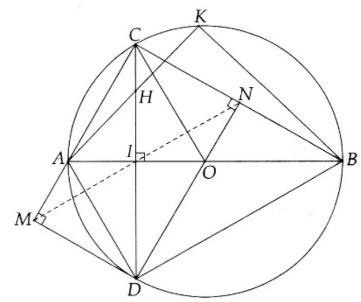
ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. D. Câu 3. A.

Câu 2. D. Câu 4. D.

PHẦN II. TỰ LUẬN



Bài 1. a) HS tự làm

b) Ta có ΔAHI đồng dạng với ΔABK (g.g)

$\Rightarrow AH.AK = AI.AB = R^2$

c) Chứng minh được I là trung điểm của CD.

Từ MCND là hình chữ nhật suy ra MN và CD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $\Rightarrow$ ĐPCM.

d) Chứng minh được $\widehat{IOC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ACO$ đều nên $\widehat{ACD} = 30^0$.

Chứng minh được ΔCBD đều nên CD = CB $\Rightarrow$ CD = 25cm.

Áp dụng tỉ số lượng giác trong $\Delta CDM\ (\widehat{M} = 90^0)$ ta tính được: MD = 12,5cm và $MC \simeq 21,7cm$.

Từ đó tính được diện tích xung quanh hình trụ tạo thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD là:

$S_{xq} = 2\pi rh = 542,5\pi cm^2$

Bài 2. a) Gọi thể tích của hình trụ và hình nón lần lượt V_1 và V_2. Hình trụ và hình nón cùng có bán kính bằng r = 7cm.

Ta có thể tích của hình cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 = \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

với h_1; h_2 lần lượt là chiều cao ứng với hình trụ và hình nón.

Thay số ta được V = 416,5πcm³.

b) Thể tích hình nón cụt là: $V_{nc}=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$. Thay số vào và tính toán ta được $V_{nc}=276,3\pi cm^3$

Thể tích hình nón là: $V_n=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Thay số ta được $V_n=315,8\pi cm^3$

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ II

ĐỀ SỐ 1

Bài 1. a) Từ $x=7-4\sqrt{3}$, tìm được $\sqrt{x}=2-\sqrt{3}$. Thay vào Q và tính ta được $Q-3-2\sqrt{3}$

b) Rút gọn được $P=\frac{3\sqrt{x}+3}{9-x}$

c) Tìm được $M=\frac{P}{Q}=\frac{-3}{\sqrt{x}+3}$

Giải $M\geq-\frac{2}{3}$ ta tìm được $\frac{9}{4}\leq x\neq 9$.

d) Tìm được $A=\frac{x+7}{\sqrt{x}+3}$

Ta có $A=\frac{(x+1)+6}{\sqrt{x}+3}\geq\frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}=2$.

Từ đó đi đến kết luận $A_{min}=2\Leftrightarrow x=1$

* Cách khác: $A=\frac{x+7}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}$

$=\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}-6\geq 2\sqrt{16}-6=2$

⇒ Kết luận

Bài 2. Gọi số chi tiết máy tổ một và hai sản xuất được lần lượt là x và y ($x, y\in\mathbb{N}^*$; x, y < 900)

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=900\\1,15x+1,1y=1010\end{cases}$

Giải được x = 400 và y = 500

Vậy theo kế hoạch tổ một và hai phải sản xuất lần lượt 400 và 500 chi tiết máy.

Bài 3. a) Cách 1. Đặt $\frac{1}{y+1}=u$ ta được $\begin{cases}3x-2u=1\\5x+2u=3\end{cases}$

Giải ra ta được $x=\frac{1}{2}$ và $u=\frac{1}{4}$

Từ đó tìm được y = 3.

Cách 2. Cộng vế với vế hai phương trình, ta được 8x = 4.

Từ đó tìm được $x=\frac{1}{2}$ và y = 3.

b) Vì $x_1x_2 = -m^2 - 1 < 0\ \forall m$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt và trái dấu.

Cách 1. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$

Từ giả thiết thu được $-x_1+x_2=2\sqrt{2}$

Biến đổi thành $\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=8$

Áp dụng định lý Vi-ét, tìm được m = 1 hoặc $m=-\frac{3}{5}$

Cách 2. Bình phương hai vế của giả thiết và biến đổi về dạng

$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2\left|x_1x_2\right|=8.\Rightarrow\left(m-1\right)^2+4(m^2+1)=8$

Do $\left|x_1x_2\right|=-x_1x_2$)

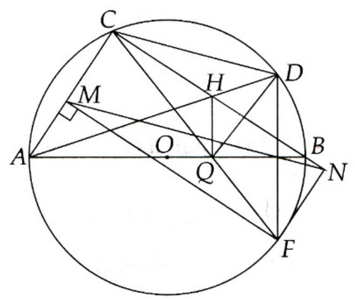
Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta cũng tìm được m = 1 hoặc $m=-\frac{3}{5}$

Bài 4. a) Tứ giác BDQH nội tiếp vì $\widehat{BDH}+\widehat{BQH}=180^0$

b) Vì tứ giác ACHQ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{CAH}=\widehat{CQH}$

Vì tứ giác ACDF nội tiếp $\Rightarrow\widehat{CAD}=\widehat{CFD}$

Từ đó có $\widehat{CQH}=\widehat{CFD}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ DF//HQ.



c) Ta có $\widehat{HQD} = \widehat{HBD}$ (câu a)

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2} sđ\, \overset{\frown}{CD}$

$\widehat{CAD} = \widehat{CQH}$ (ACHQ cũng nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{HQD} = \widehat{HQC} \Rightarrow QH$ là phân giác $\widehat{CQD}$

Mặt khác chứng minh được CH là phân giác góc $\widehat{QCD}$

Trong tam giác QCD có H là giao của ba đường phân giác nên H là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow$ H cách đều 3 cạnh CD, CQ, DQ.

d) Vì CMFN là hình chữ nhật nên MN và CF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Trong tam giác FCD có MN//CD và MN đi qua trung điểm CF nên MN đi qua trung điểm DF.

Mặt khác AB đi qua trung điểm của DF nên 3 đường thẳng MN, AB, DF đồng quy.

Bài 5. Ta có: $2x^2 + \frac{1}{2} \geq 2x, 2y^2 + \frac{1}{2} \geq 2y$ và $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được:

$3\left(x^2 + y^2\right) + 1 \geq 2\left(x + y + xy\right) = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow A = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$

Từ đó tìm được $A_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

ĐỀ SỐ 2

Bài 1. a) Thay x = 25, ta tính được $A=\frac{10}{7}$

b) Rút gọn được $B=\frac{2}{\sqrt{x}-3}$

c) Ta có $A.B=2-\frac{4}{\sqrt{x}+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{2}+2\in Ư(4)$. Từ đó tìm được x = 0, x = 4.

Bài 2. Gọi thời gian đội chpr hàng và số hàng đội cần chở mỗi ngày theo kế hoạch lần lượt là x (ngày) và y (tấn/ngày)

ĐK: $x\in\mathbb{N}^*; x>1$

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases}xy=200\\(x-1)(y+4)=216\end{cases}$

Giải ra ta được x = 10; y = 20 (TMĐK)

Kết luận

bài 3. a) Biến đổi hệ phương trình ban đầu ta được hệ $\begin{cases}x-y=0\\3x+3y=12\end{cases}$

Từ đó tìm được x = 2, y = 2.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (p):

$$x^2 - 2x - m^2 + 2m = 0 \quad (1)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung Oy ⇔ (1) có hai nghiệm trái dấu. Từ đó tìm được $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$

Kết luận $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$

Bài 4. a) HS tự chứng minh.

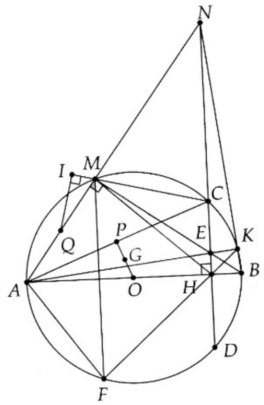
b) Chứng minh $\Delta NMC\sim\Delta NDA$ và $\Delta NME-NHA$.

c) Chứng minh ΔANB có E là trực tâm $\Rightarrow AE\perp BN$ mà có $AK\perp BN$ nên có ĐPCM.

Chứng minh tứ giác EKBH nội tiếp, từ đó có $\widehat{AKF}=\widehat{ABM}$.

d) Lấy P và G lần lượt là trung điểm của AC và OP.

Chứng minh I thuộc đường tròn (G, GA)



Bài 5. Biến đổi M, ta được

$$M=\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{4}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{x}$ ta được ab = 1, suy ra $a^2+b^2\geq 2$.

Từ đó ta có

$$M=\frac{4}{(a+b)^2}+a^2+b^2=\frac{4}{a^2+b^2+2}+\frac{a^2+b^2+2}{4}+\frac{3\left(a^2+b^2+2\right)}{4}-2$$

$\geq 2+3-2=3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\pm 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$