

CHƯƠNG I. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA.

BÀI 1. CĂN BẬC HAI.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1/ Căn bậc hai

- Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Chú ý:
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai, là hai số đối nhau: số dương kí hiệu là \sqrt{a} , số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.
- Số âm không có căn bậc hai.

2/ Căn bậc hai số học

- Với số a không âm, số \sqrt{a} được gọi là căn bậc hai số học của a .
- Chú ý: Ta có
$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

3/ So sánh các căn bậc hai số học

Ta có : $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm căn bậc hai và căn bậc hai số học của một số

Phương pháp giải:

- Nếu $a > 0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm\sqrt{a}$; căn bậc hai số học của a là \sqrt{a}
- Nếu $a = 0$ thì căn bậc hai của a và căn bậc hai số học của a cùng bằng 0.
- Nếu $a < 0$ thì a không có căn bậc hai và do đó không có căn bậc hai số học

1A. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

- a) 0 b) 64 c) $\frac{9}{16}$ d) 0,04

1B. Căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau là bao nhiêu?

- a) -81 b) 0,25 c) 1,44 d) $1\frac{40}{81}$

Dạng 2: Tìm số có căn bậc hai số học là một số cho trước

Phương pháp giải:

Với số thực $a \geq 0$ cho trước ta có a^2 chính là số có căn bậc hai số học bằng a .

2A. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

- a) 12 b) -0,36 c) $2\sqrt{\frac{2}{7}}$ d) $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$

2B. Số nào có căn bậc hai số học là mỗi số sau đây?

- a) 13 b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$ d) $\frac{0,12}{\sqrt{0,3}}$

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải:

Với số $a \geq 0$ ta có $\sqrt{a^2} = a$ và $(\sqrt{a})^2 = a$

3A. Tính:

- a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ c) $-\sqrt{(-6)^2}$ d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

3B. Tính:

- a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ c) $(-\sqrt{2})^2$ d) $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$

4A. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36}$ b) $-4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{-25}}$

4B. Thực hiện phép tính:

- a) $\frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}}$

Dạng 4: Tìm giá trị của x thỏa mãn biểu thức cho trước

Phương pháp giải: Ta sử dụng chú ý:

- $x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$
- Với số $a \geq 0$, ta có $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$

5A. Tìm giá trị của x biết :

a) $9x^2 - 16 = 0$

b) $4x^2 = 13$

c) $2x^2 + 9 = 0$

d) $-\frac{\sqrt{2x+1}}{3} + 2 = 0$

5B. Tìm x, biết:

a) $3x^2 = 1$

b) $\sqrt{2x + \frac{1}{3}} = 3$

c) $\sqrt{2x+1} + 3 = 0$

d) $\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 3$

Dạng 5: So sánh các căn bậc hai số học

Phương pháp giải:

Ta có : $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$

6A. So sánh:

a) 3 và $2\sqrt{2}$

b) 5 và $\sqrt{17} + 1$

c) 3 và $\sqrt{15} - 1$

d) $1 - \sqrt{3}$ và $\sqrt{0,2}$

6B. Tìm số lớn hơn trong các cặp số sau:

a) 11 và $2\sqrt{30}$

b) 2 và $1 + \sqrt{2}$

c) 1 và $\sqrt{3} - 1$

d) -10 và $-3\sqrt{11}$

7A. Tìm giá trị của x, biết:

a) $\sqrt{2x} < \frac{1}{3}$

b) $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5$

7B. Tìm x thỏa mãn:

$$a) \sqrt{-2x+1} > 7$$

$$b) \sqrt{2x-1} \leq \frac{3}{2}$$

Dạng 6: Chứng minh một số là số vô tỉ:

8A*. Chứng minh:

$$a) \sqrt{3} \text{ là số vô tỉ}$$

$$b) \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ là số vô tỉ}$$

8B*. Chứng minh:

$$a) \sqrt{5} \text{ là số vô tỉ}$$

$$b) \sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ là số vô tỉ}$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

$$a) 225 \quad b) \frac{49}{289} \quad c) 2,25 \quad d) 0,16$$

10. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

$$a) 7 \quad b) -\left(-\frac{3}{4}\right) \quad c) \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad d) \frac{0,25}{\sqrt{0,5}}$$

11. Tính:

$$a) \sqrt{\frac{225}{9}} \quad b) -\sqrt{(-111)^2} \quad c) -\left(\sqrt{\frac{1}{400}}\right)^2 \quad d) \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2$$

12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{9}{2}\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{144} \quad b) 0,5\sqrt{0,09} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$c) \sqrt{1\frac{9}{16}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{64}{9}} \quad d) -\sqrt{\frac{-289}{-16}} + 10\sqrt{\frac{-0,09}{9}}$$

13. Tìm giá trị của x biết:

$$a) -x^2 + 324 = 0$$

$$b) 16x^2 - 5 = 0$$

$$c) \frac{2}{\sqrt{x-3}} = 4$$

$$d) \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$$

14. So sánh các cặp số sau:

4.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) 4 và $1+2\sqrt{2}$

b) 4 và $2\sqrt{6}-1$

c) $\sqrt{0,5}$ và $\sqrt{3}-2$

d) $-3\sqrt{3}$ và $-2\sqrt{7}$

15*. So sánh : $\sqrt{2015} + \sqrt{2018}$ và $\sqrt{2016} + \sqrt{2017}$

16. tìm x thỏa mãn:

a) $\sqrt{x+3} \geq 5$

b) $\sqrt{-2x+1} > 7$

c) $\sqrt{x+9} \leq 31$

d) $\sqrt{3x-1} < 2$

17*. Tìm x biết:

a) $\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x+1}$

b) $\sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2}$

18. Chứng minh:

a) $\sqrt{7}$ là số vô tỉ

b) $\sqrt{7}+3$ là số vô tỉ

19*. Cho biểu thức : $P = x - 2\sqrt{2x-3}$

a) Đặt $t = \sqrt{2x-3}$. Hãy biểu thị P theo t

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

20*. So sánh:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10

b) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$ và 3

$$P = \sqrt{x(29x+3y)} + \sqrt{y(29y+3x)}$$

ĐÁP ÁN

CHƯƠNG I. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

BÀI 1. CĂN BẬC HAI

1A. a) Căn bậc hai và căn bậc hai số học của 0 cùng là 0.

b) Căn bậc hai của 64 là ± 8 ; căn bậc hai số học của 64 là 8.

c) Tương tự, các căn bậc hai và căn bậc hai số học của $\frac{9}{16}$ lần lượt là $\pm \frac{3}{4}$ và $\frac{3}{4}$

d) Các căn bậc hai và căn bậc hai số học của 0.04 lần lượt là $\pm 0,2$ và 0,2

1B. Tương tự 1A

a) Không tồn tại

b) $\pm 0,5$ và 0,5

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) $\pm 1,2$ và $1,2$

d) $\pm \frac{11}{9}$ và $\frac{11}{9}$

2A. a) Số có căn bậc hai số học bằng 12 là 144

b) Vì $-0,36 < 0$ nên không tồn tại số nào có căn bậc hai số học bằng -036

c) Tương tự, số có căn bậc hai số học bằng $2\sqrt{\frac{2}{7}}$ là $\frac{8}{7}$

d) Số có căn bậc hai số học bằng $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$ và $\frac{0,04}{3}$ **0,04**
3

2B. a) 169

b) Không tồn tại

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{0,144}{3}$ **0,144**
3

3A. a) Ta có $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

b) Ta có $\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$

c) Ta có $\sqrt{(-6)^2} = -\sqrt{6^2} = -6$

d) Ta có $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4}$

3B. Tương tự 3A

a) 11 b) $\frac{4}{5}$ **4** c) 2 d) $\frac{3}{5}$ **3**

4A. a) Ta có $0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36} = 0,5\sqrt{0,2^2} + \sqrt{0,6^2} = 3,1$

b) Tương tự, ta có $-4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{25}} = -4\frac{5}{4} + 5\frac{3}{5} = -2$

4B. Tương tự 4A

a) 4 b) $-\frac{1}{6}$

5A. a) Ta có $9x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3}$

b) Ta có $4x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

c) Vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 9 > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

d) Ta có $\sqrt{2x+1} = 6 \Leftrightarrow 2x+1 = 6^2 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2}$

5B. Tương tự 5A

a) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $x = \frac{13}{3}$ c) $x \in \emptyset$ d) $x = 2$

6A. a) Ta có $3^2 = 9$ và $(2\sqrt{2})^2 = 8$. mà $9 > 8$ nên $3 > 2\sqrt{2}$

b) Ta có $5 = 4 + 1 = \sqrt{16} + 1$. mà $\sqrt{16} < \sqrt{17}$ (vì $16 < 17$) nên $5 < \sqrt{17} + 1$

c) Tương tự câu b, $3 = 4 - 1 = \sqrt{16} - 1$. mà $\sqrt{16} > \sqrt{15}$ (vì $16 > 15$) nên $3 > \sqrt{15} - 1$

d) Ta có $1 - \sqrt{3} = \sqrt{1} - \sqrt{3} < 0$. mà $0 < \sqrt{0,2}$ nên $1 - \sqrt{3} < \sqrt{0,2}$

6B. Tương tự 6A.

a) $2\sqrt{30}$ b) $1 + \sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} - 1$ d) $-3\sqrt{11}$

7A. a) Ta có $\sqrt{2x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2x} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{18}$

b) ĐK: $-3x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6}$

Ta có $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5 \Leftrightarrow -3x + \frac{1}{2} \geq 25 \Leftrightarrow x \leq -\frac{49}{6}$ (TMĐK)

7B. Tương tự 7A

a) ĐK: $x \leq \frac{1}{2}$. Ta có $-2x + 1 > 49 \Leftrightarrow x < -24$ (TMĐK)

b) ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$. Ta có $2x - 1 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{8}$ Kết hợp ĐK ta được $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{8}$

8A*. a) Giả sử $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ là số hữu tỉ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ và $(m, n) = 1$

Từ $\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2 : 3 \Rightarrow m : 3 \Rightarrow m = 3k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Thay $m = 3k$ vào $m^2 = 3n^2$ ta được $n^2 = 3k^2 \Rightarrow n^2 : 3 \Rightarrow n : 3$

Như vậy m, n có ước chung là 3, trái với giả thiết $(m, n) = 1$

Vậy $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

b) Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a$ là số hữu tỉ. Ta có $5 + 2\sqrt{6} = a^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{a^2 - 5}{2}$ (1)

Tương tự ý a, ta chứng minh được $\sqrt{6}$ là số vô tỉ (2)

Tuy nhiên, vì a là số hữu tỉ nên $\frac{a^2 - 5}{2}$ cũng là số hữu tỉ (3)

Từ (1), (2), (3) dẫn đến điều vô lý.

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ phải là số vô tỉ.

8B* Tương tự 8A

9) a) ± 15 và 15 b) $\pm \frac{7}{17}$ và $\frac{7}{17}$
 c) $\pm 1,5$ và 1,5 d) $\pm 0,4$ và 0,4

10. a) 49 b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{0,625}{2}$

11. a) $\frac{15}{3}$ b) -111 c) $-\frac{1}{400}$ d) $\frac{7}{3}$

12. a) 12 b) -0,35 c) $-\frac{11}{4}$ d) $-\frac{13}{4}$

13. a) $x = \pm 18$ b) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $x = \frac{13}{4}$ d) $x \in \{-1; 2\}$

14. Tương tự 6A

a) $4 > 1 + 2\sqrt{2}$ b) $4 > 2\sqrt{6} - 1$ c) $\sqrt{0,5} > \sqrt{3} - 2$ d) $-3\sqrt{3} > 2\sqrt{7}$

15* Đặt $A = \sqrt{2015} + \sqrt{2018}$ và $B = \sqrt{2016} + \sqrt{2017}$

Ta có $A^2 = 2015 + 2018 + 2\sqrt{2015 \cdot 2018} = 4033 + 2\sqrt{2015 \cdot 2018}$

Tương tự $B = 4033 + 2\sqrt{2016 \cdot 2017}$

Mặt khác $2015 \cdot 2018 = (2016-1)(2017+1) = 2016 \cdot 2017 - 2 < 2016 \cdot 2017$

$\Rightarrow A^2 < B^2 \Rightarrow A < B$

16. Tương tự 7A

a) $x \geq 22$ b) $x < -24$ c) $0 \leq x \leq 484$ d) $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$

17* a) ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$ Bình phương hai vế ta tìm được $x \geq 2$ (TMĐK)

b) ĐK; $x \geq 0$ Bình phương hai vế ta có

$$2x \leq x^2 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp ĐK ta được $x=0$ hoặc $x \geq 2$

18. a) Tương tự 8A

b) Giả sử $\sqrt{7} + 3 = a$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{7} = a - 3 \in \mathbb{Q}$

Mà $\sqrt{7}$ là số vô tỉ, trái với giả thiết $\Rightarrow \sqrt{7} + 3$ là số vô tỉ

19* a) Đặt $t = \sqrt{2x-3} (t \geq 0) \Rightarrow x = \frac{t^2+3}{2}$ từ đó $P = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}$

b) Ta có $P = \frac{1}{2}(t-2)^2 - \frac{1}{2}$ Từ đó tìm được $P_{\min} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

20* a) Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{100}} \Rightarrow a > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$$

$$\sqrt{4} < 3 \Rightarrow \sqrt{4 + \sqrt{4}} < \sqrt{4 + 3} < 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4}}} < \sqrt{4 + 3} < 3$$

b) Ta có $\Rightarrow \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}} < \sqrt{4 + 3} < 3$

BÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

$$\text{Hằng đẳng thức } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

1A. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01} \qquad \text{b) } \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$$

1B. Hãy tính:

$$\text{a) } \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \cdot \sqrt{81} \qquad \text{b) } 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$$

2A. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} \qquad \text{b) } \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$$

2B. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + 2\sqrt{2} \qquad \text{b) } \sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2}$$

3A. Chứng minh:

$$\text{a) } 11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2 \qquad \text{b) } \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$$

3B. Chứng minh:

$$\text{a) } 8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2 \qquad \text{b) } \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$$

4A. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}} \qquad \text{b) } \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$$

4B. Thực hiện phép tính:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{a) } \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

5A. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } 5\sqrt{25a^2} - 25a \text{ với } a \leq 0$$

$$\text{b) } \sqrt{16a^4} + 6a^2$$

5B. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \sqrt{49a^2} + 3a \text{ với } a \geq 0$$

$$\text{b) } 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 \text{ với } a \leq 0$$

6A. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9} \text{ với } 0 \leq x \neq 9$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2} \text{ với } x \neq -\frac{2}{3}$$

6B. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } M = 5\sqrt{x} - \frac{(x-10\sqrt{x}+25)(\sqrt{x}+5)}{x-25} \text{ với } 0 \leq x \neq 25$$

$$\text{b) } N = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1} \text{ với } x \neq \frac{1}{2}$$

Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Phương pháp giải:

Chú ý rằng biểu thức \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$

7A. Với các giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa ?

$$\text{a) } \sqrt{\frac{-2}{3x-1}}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{3x-2}{x^2-2x+4}}$$

7B. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa:

$$a) \sqrt{\frac{2x-3}{2x^2+1}}$$

$$b) \sqrt{\frac{3}{1-5x}}$$

Chú ý rằng, với a là số dương, ta luôn có:

- $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$
- $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

8A. Các căn thức sau có nghĩa khi nào?

$$a) \sqrt{x^2 - 8x - 9}$$

$$b) \sqrt{\frac{2x-4}{5-x}}$$

8B. Xác định giá trị của x để các căn thức sau có nghĩa?

$$a) \sqrt{\frac{x-6}{x-2}}$$

$$b) \sqrt{4-9x^2}$$

Dạng 4: Giải phương trình chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải: Ta chú ý một số phép biến đổi tương đương liên quan đến căn thức bậc hai sau đây.

- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
- $\sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

9A. Giải các phương trình:

$$a) \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$$

$$b) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$$

9B. Giải các phương trình:

$$a) \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2x - 1$$

$$b) \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = 2$$

10A. Giải các phương trình:

$$a) \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x-1}$$

$$b) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$

10B. Giải các phương trình:

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{x - 2}$$

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

11. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$$

$$\text{b) } 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225}$$

12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } A = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$$

13. Chứng minh: $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$. Từ đó rút gọn biểu thức:

$$M = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

14. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } M = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$\text{b) } N = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$$

15. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } P = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$\text{b) } Q = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$$

16. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{64a^2} + 2a$$

$$\text{b) } B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$$

17*. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} \text{ với } -3 \leq a \leq 3$$

$$\text{b) } B = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \text{ với } 1 \leq a \leq 2$$

18. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa?

$$\text{a) } \sqrt{-5x - 10}$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$$

$$\text{d) } \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$$

19. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x$$

$$\text{b) } \sqrt{2x - 2 + 2\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{2x + 13 + 8\sqrt{2x - 3}} = 5 \quad 20^*$$

Giải các phương trình sau:

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{a) } \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-6x+9} = 0 \quad \text{b) } \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} = 3$$

21*. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$\text{a) } P = \sqrt{4x^2-4x+1} + \sqrt{4x^2-12x+9}$$

$$\text{b) } Q = \sqrt{49x^2-42x+9} + \sqrt{49x^2+42x+9}$$

22*. Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau:

$$x+y+z+8 = 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-2} + 6\sqrt{z-3}$$

BÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

$$1A. \text{ a) Ta có } \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{0,1^2} = 1,05$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & (\sqrt{0,15} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169} \\ & = (\sqrt{0,5^2} - \sqrt{15^2} + \sqrt{1,5^2}) : \sqrt{13^2} = -1 \end{aligned}$$

1B. Tương tự 1A

a) 90

b) 3

$$2A. \text{ a) Ta có } \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4-\sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4; \quad (4 > \sqrt{15})$$

$$\text{b) Tương tự } \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = 1$$

Chú ý: $2-\sqrt{3} > 0$ vì $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$; $1-\sqrt{3} < 0$ vì $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3}$

2B. Tương tự 2A

a) 3

b) 1

$$3A. \text{ a) Ta có } 11 + 6\sqrt{2} = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = (3 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Áp dụng câu a) ta có:

$$\sqrt{11 + \sqrt{2}} + \sqrt{11 - \sqrt{2}} = |\sqrt{2} + 3| + |\sqrt{2} - 3| = 6 \Rightarrow \text{đpcm}$$

3B. Tương tự 3A. HS tự làm

$$4A. \text{ a) Chú ý : ta có } 49 - 12\sqrt{5} = (2 - 3\sqrt{5})^2; \quad 49 + 12\sqrt{5} = (2 + 3\sqrt{5})^2$$

Từ đó rút gọn được kết quả bằng -4

$$\text{b) Chú ý : Ta có } 29 + 12\sqrt{5} = (3 + 2\sqrt{5})^2; \quad 29 - 12\sqrt{5} = (3 - 2\sqrt{5})^2$$

Từ đó rút gọn được kết quả bằng 6

4B. Tương tự 4A.

$$\text{a) } \text{Chú ý: } 7 \pm 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 2)^2.$$

5. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Từ đó rút gọn được kết quả bằng $2\sqrt{3}$.

b) Chú ý: $41 - 12\sqrt{5} = (6 - \sqrt{5})^2$ và $41 + 12\sqrt{5} = (6 + \sqrt{5})^2$

Từ đó rút gọn được kết quả bằng $-2\sqrt{5}$.

5A. a) Ta có $5\sqrt{25a^2} - 25a = 5|5a| - 25a = -50a$ (vì $a < 0$).

b) Tương tự, $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = 10a^2$.

Chú ý $\sqrt{16a^4} = |4a^2| = 4a^2$ vì $a^2 \geq 0 \forall a$

5B. Tương tự 5A.

a) $10a$.

b) $15a^3$

6A. a) Ta có $A = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x} + 3)^2(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$

Từ đó tính được $A = 3(\sqrt{x} - 1)$ với $0 \leq x \neq 9$

b) Ta có $B = \frac{|3x + 2|}{3x + 2} = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < -\frac{2}{3} \\ 1 & \text{khi } x > -\frac{2}{3} \end{cases}$

6B. Tương tự 6A.

a) Tính được $M = 4\sqrt{x} + 5$ với $0 \leq x \neq 25$

b) Tìm được $N = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

7A. a) Ta có $\sqrt{\frac{-2}{3x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{-2}{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 3x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$

b) Ta có $\sqrt{\frac{3x-2}{x^2-2x+4}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{3x-2}{x^2-2x+4} \geq 0$

Mặt khác $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

Do đó $\frac{3x-2}{x^2-2x+4} \geq 0 \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

7B. Tương tự 7A

a) a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x > \frac{1}{5}$

8A. a) *Cách 1.* Ta có $\sqrt{x^2 - 8x - 9} = \sqrt{(x-1)(x-9)}$

Từ đó $\sqrt{x^2 - 8x - 9}$ có nghĩa $\Leftrightarrow (x+1)(x-9) \geq 0$.

Tìm được $x \geq 9$ hoặc $x \leq -1$.

Cách 2. Ta có $\sqrt{x^2 - 8x - 9} = \sqrt{(x-4)^2 - 25}$

Từ đó $\sqrt{x^2 - 8x - 9}$ có nghĩa $\Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 25$.

Tìm được $x \geq 9$ hoặc $x \leq -1$.

b) Ta có $\sqrt{\frac{2x-4}{5-x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{2x-4}{5-x} \geq 0$.

Tìm được $2 \leq x < 5$.

8B. Tương tự 8A.

a) $x \geq 9$ hoặc $x < 2$. b) $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$

9A. a) Ta có $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (2x - 2)^2 \end{cases}$

Giải ra ta được $x = 2$.

b) *Cách 1.* Ta có

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x-1} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 4(x-1) = (4-x)^2 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x=2$

Cách 2. Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1} + 1| = 2$

Từ đó tìm được $x=2$

9B. Tương tự 9A

a) $x = 1$ b) $x = 4$

10A. a) Ta có $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x-1 \end{cases}$

Giải ra ta được $x=1$ hoặc $x=3$

b) Ta có $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \Leftrightarrow |x-2| = |2x-3|$

Giải ra ta được $x=1$ hoặc $x=\frac{5}{3}$

10B. Tương tự 10 A.

a) $x = 2$ hoặc $x = 4$ b) $x = -2$ hoặc $x = \frac{4}{3}$

11. Tương tự 1A.

a) 86. b)-13.

12. Tương tự 2 A.

a) $A = 2\sqrt{2} - 2$. b) $B = 3 - \sqrt{7}$.

13. HS tự chứng minh $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$.

Tương tự chứng minh được $6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$

Từ đó tính được $M = 2$.

14. Tương tự 4A.

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $M = 4$.

b) $N = -2$.

15. Tương tự 4A.

a) $P = 2\sqrt{2}$.

b) $Q = 6$.

16. Tương tự 5 A.

a) $A = 10a$ nếu $a \geq 0$ và $A = -6a$ nếu $a < 0$.

b) $B = -15a^2$ nếu $a < 0$ và $B = 3a^3$ nếu $a \geq 0$

17*. Tương tự 6A.

a) Ta có $A = |a + 3| + |a - 3| = a + 3 + (3 - a) = 6$

b) Chú ý: $a \pm 2\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} \pm 1)^2$ Tìm được $B=2$

18. a) $x \leq -2$.

b) $x \geq 2$ hoặc $x \leq 1$

c) $-3 \leq x < 5$.

d) $x=2$.

19. a) Cách 1. Biên đổi $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x \Leftrightarrow |x - 3| = 4 - x$

Từ đó tìm được $x = \frac{7}{2}$

Cách 2. Áp dụng $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ ta tìm được $x = \frac{7}{2}$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow |\sqrt{2x-3} + 1| + |\sqrt{2x-3} + 4| = 5$.

Từ đó tìm được $x = \frac{3}{2}$

20* a) Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2} = 0 \end{cases}$ Từ đó tìm được $x = 3$

b) Phương trình $\Leftrightarrow |x-1| + |x-2| = 3$. Từ đó tìm được $x = 0$

hoặc $x = 3$.

21*. Chú ý: Sử dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$).

a) Ta có $P = |2x - 1| + |3 - 2x| \geq |(2x - 1) + (3 - 2x)| = 2$.

Dấu "=" xảy ra $(2x - 1)(3 - 2x) \geq 0$.

Từ đó tìm được $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) Tương tự, tìm được $Q_{\min} = 6 \Leftrightarrow -\frac{3}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$

22*. Cách 1. Biến đổi đẳng thức về dạng:

$$(\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y-2} - 2)^2 + (\sqrt{z-3} - 3)^2 = 0$$

Từ đó tìm được $x = 2$; $y = 6$ và $z = 12$.

Cách 2. Ta có: $x = (x - 1) + 1 \geq 2\sqrt{x-1}$

Tương tự: $y + 2 = (y - 2) + 4 \geq 4\sqrt{y-2}$

$$z + 6 = (z-3) + 9 \geq 6\sqrt{z-3}$$

Từ đó tìm được $x = 2$; $y = 6$ và $z = 12$.

BÀI 3. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khai phương một tích:

Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có: $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

Mở rộng: Với $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \dots, A_n \geq 0$ ta có:

$$\sqrt{A_1 A_2 \dots A_n} = \sqrt{A_1} \cdot \sqrt{A_2} \dots \sqrt{A_n}$$

2. Khai phương một thương:

Với $A \geq 0, B > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Thực hiện phép tính

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức khai phương một tích và khai phương một thương ở trên.

1A. Tính:

a) $\sqrt{25 \cdot 144}$

b) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$

1B. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{45 \cdot 80}$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$

2A. Tính:

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

b) $\frac{\sqrt{12,5}}{0,5}$

2B. Tính:

a) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

b) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

3A. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$

3B. Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$$

$$\text{b) } \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$$

4A. Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } \left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7} \right) : \sqrt{7}$$

$$\text{b) } \sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$$

4B. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3} \right) : \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2}$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức khai phương một tích và khai phương một thương ở trên.

5A. Rút gọn:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$$

5B. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$$

$$\text{b) } \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$$

6A. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{-3t}{8}} \text{ với } t \leq 0$$

$$\text{b) } \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \text{ với } x \geq 1$$

6B. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \text{ với } y < 0$$

$$\text{b) } \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$$

7A. Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } M = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, xy \neq 0$$

$$\text{b) } N = \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \text{ với } a \geq 0, a \neq \frac{1}{4}$$

2.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

7B. Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } Q = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$$

$$\text{b) } P = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2} \text{ với } a \geq 0, a \neq 4$$

Dạng 3: Giải phương trình

Phương pháp giải: Khi giải phương trình chứa căn thức luôn cần chú ý đến các điều kiện đi kèm. Cụ thể là:

- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

8A. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2 - 3x}$$

8B. Tìm x biết:

$$\text{a) } \sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3$$

$$\text{b) } \sqrt{x - 3} - 2\sqrt{x^2 - 9} = 0$$

9A. Giải phương trình (ẩn y):

$$2\sqrt{9y - 27} - \frac{1}{5}\sqrt{25y - 75} - \frac{1}{7}\sqrt{49y - 147} = 20$$

9B. Tìm y biết:

$$\sqrt{4y - 20} + \sqrt{y - 5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y - 45} = 4$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{32.200}$$

$$\text{b) } \sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$$

11. Làm tính:

$$\text{a) } \sqrt{2\frac{7}{81}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{0,5}}{\sqrt{12,5}}$$

12. Làm tính:

3.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{a) } \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{250} + \sqrt{19,6} : \sqrt{4,9}$$

$$\text{b) } \sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}}$$

13. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } M = (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75})$$

$$\text{b) } N = (\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$$

14. Thực hiện các phép tính:

$$\text{a) } P = \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$$

$$\text{b) } Q = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

15. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}{u - v} \text{ với } u \geq 0, v \geq 0, \text{ và } u \neq v$$

$$\text{b) } B = \frac{2u + \sqrt{uv} - 3v}{2u - 5\sqrt{uv} + 3v} \text{ với } u \geq 0, v \geq 0 \text{ và } u \neq v$$

16. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } M = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} \text{ với } x \neq \pm\sqrt{2}$$

$$\text{b) } N = \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5} \text{ với } x \neq -\sqrt{5}$$

17. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{t-3}}{\sqrt{2t+1}} = 2$$

$$\text{b) } \sqrt{25t^2 - 9} = 2\sqrt{5t - 3}$$

18. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{-2x^2 + 6} = x - 1$$

$$\text{b) } \sqrt{t-5} + \sqrt{4t-20} - \frac{1}{5}\sqrt{9t-45} = 3$$

**BÀI 3. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA
VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG**

1A. a) Ta có $\sqrt{25.144} = \sqrt{25}.\sqrt{144} = 5.12 = 60$

b) Ta có $\sqrt{52}.\sqrt{13} = \sqrt{52.13} = \sqrt{4.13.13} = \sqrt{4}.\sqrt{13^2} = 26$

1B. a) Thực hiện biến đổi $\sqrt{45.80} = \sqrt{5.9.5.16} = \sqrt{25}.\sqrt{9}.\sqrt{16} = 60$

b) Tương tự câu a) Ta có

$$\sqrt{7}.\sqrt{28} = \sqrt{7.28} = \sqrt{7.7.4} = \sqrt{49}.\sqrt{4} = 17$$

2A. a) Ta có $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$

b) Ta có $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}} = \sqrt{\frac{12,5}{0,5}} = \sqrt{25} = 5$

2B. a) Ta có $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$

b) Ta có $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}} = \sqrt{\frac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10$

3A. a) Ta có $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24}\right).\sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}}.6 + \sqrt{\frac{50}{3}}.6 - \sqrt{24.6} = 0$

b) Ta có $\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{2} = \sqrt{3.2+2.\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$

3B. Tương tự 3A

a) 7

b) $2(\sqrt{5}-1)$

4A. a) Ta có $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right) . \frac{1}{\sqrt{7}}$

Từ đó tìm được kết quả bằng $\frac{4}{7}$

b) Ta có $\sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$

4B. a) Tương tự 4A. Tính được $\frac{2}{3}$

b) Ta có $\sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} : 2 = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5A. a) Ta có $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}$

Từ đó tính được kết quả bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Tương tự câu a), tính được kết quả bằng $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

5B. a) $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{21}}{7}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

6A. a) Ta có $\sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{-\frac{3t}{8}} = \sqrt{\frac{-2t}{3} \cdot \left(-\frac{3t}{8}\right)} = \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{4}} = -\frac{t}{2}$ do $t \leq 0$

b) Nhận xét $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$

Thực hiện khai phương một tích ta được kết quả bằng 1.

6B. a) Chú ý $\sqrt{y^2} = |y| = -y$ với $y < 0$. Kết quả $-2y$.

b) Chú ý $(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)(\sqrt{x^4 + 4} + x^2) = (x^4 + 4) - (x^2)^2 = 4$

Thực hiện phép khai phương hai vế ta được kết quả bằng 2.

7A. a) Biến đổi tử số $= \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ và mẫu số $= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

Từ đó, chú ý điều kiện, rút gọn được kết quả $M = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

6.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Biến đổi tử số $= (2\sqrt{a} - 1)(1 - \sqrt{a})$ và mẫu số $= (2\sqrt{a} - 1)^2$

Từ đó, chú ý điều kiện, rút gọn được kết quả $N = \frac{1 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$

7B. a) Tương tự 7A. Rút gọn được $Q = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

$$b) a + 4\sqrt{a} + 4 = (\sqrt{a} + 2)^2; 4 - a = (2 - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 2)$$

Từ đó, chú ý điều kiện, rút gọn được kết quả $P = 0$.

$$8A. \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (2x - 2)^2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1) thu được $x = 2$, thỏa mãn $2x - 2 \geq 0$.

$$b) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 2x = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

Tương tự câu a) ta tìm được $x = -2$

$$8B. a) \text{ Ta có } \sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ -x^2 + x + 4 = (x - 3)^2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1) thu được $x = 1$; $x = \frac{5}{2}$ đều không thỏa mãn $x - 3 \geq 0$.

Vậy $x \in \emptyset$

b) Cách 1. Với $x \geq 3$, ta phân tích $\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x - 3} \cdot \sqrt{x + 3}$

Đặt nhân tử chung $\sqrt{x - 3}$, ta thu được phương trình tích $\sqrt{x - 3}(1 - 2\sqrt{x + 3}) = 0$.

Giải ra ta được $x = 3$ (TM $x \geq 3$) và $x = \frac{-11}{4}$ (KTM $x \geq 3$).

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 2.Đưa về $\sqrt{x-3} = 2\sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ (x-3) = 4(x^2-9) \end{cases}$

Giải $x-3 = 4(x^2-9)$ ta được hai nghiệm $x = 3$ (TM) hoặc $x = \frac{-11}{4}$ (loại do KTM).

9A. Biến đổi thu gọn được vế trái = $4\sqrt{y-3}$.

Giải phương trình $4\sqrt{y-3} = 20$ thu được $y = 28$.

9B. Tương tự 9A. Biến đổi thu gọn được vế trái = $4\sqrt{y-5}$

Giải $2\sqrt{y-5} = 4$ thu được $y=9$

10. a) 80 b) 25

11. a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{1}{5}$

12. a) 22 b) $\frac{14}{3}$

13. a) M = 0 b) N=10

14. a) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow P = \frac{-\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$; $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} \Rightarrow Q = 2$

15. a) Chú ý : $\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3} = u\sqrt{u} + v\sqrt{v}$

Thực hiện quy đồng $A = \frac{(u-v)(\sqrt{u}-\sqrt{v})}{u-v} - \frac{u\sqrt{u}+v\sqrt{v}}{u-v}$

Thu gọn ta được $A = \frac{-\sqrt{uv}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$

b) Tử số = $(\sqrt{u}-\sqrt{v})(2\sqrt{u}+3\sqrt{v})$

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{Mẫu số} = (\sqrt{u} - \sqrt{v})(2\sqrt{u} - 3\sqrt{v})$$

$$\text{Thu gọn ta được } M = \frac{(2\sqrt{u} + 3\sqrt{v})}{(2\sqrt{u} - 3\sqrt{v})}$$

$$16. a) \text{ Tử số} = (x - \sqrt{2})^2 \quad \text{mẫu số} = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$\text{Thu được } M = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$b) \text{ Mẫu số} = (x - \sqrt{5})^2 \quad \text{thu gọn được } N = \frac{1}{x + \sqrt{5}}$$

$$17. a) \text{ Đưa về dạng } \sqrt{t-3} = 2\sqrt{2t+1} \quad \text{hay } \sqrt{t-3} = 2\sqrt{4(2t+1)}$$

Giải phương trình ta được $t \in \emptyset$

$$b) \text{ Đưa về dạng } \sqrt{25t^2 - 9} = \sqrt{4(5t - 3)}$$

$$\text{Giải phương trình ta được } t = \frac{1}{5} \text{ (loại) và } \frac{3}{5} \text{ (TM)}$$

$$18. a) \text{ Đưa về phương trình } -2x^2 + 6 = (x - 1)^2 \text{ với } x \geq 1.$$

$$\text{Giải ra được } x = \frac{3}{5} \text{ (TM } x \geq 1).$$

$$b) \text{ Thu gọn được về trái} = \frac{12}{5}\sqrt{t-5}$$

$$\text{Giải phương trình ta tìm được } t = \frac{105}{16}$$

BÀI 4. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1/ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad \text{Với } B \geq 0$$

2/ Đưa thừa số vào trong dấu căn.

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

3/ Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai.

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{AB} \quad \text{với } B \neq 0 \text{ và } AB \geq 0$$

4/ Trục căn thức ở mẫu.

- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{B}$
- $\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$
- $\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, hoặc vào trong dấu căn.

Phương pháp giải: Sử dụng kiến thức sau:

- Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ Với $B \geq 0$

- Cách đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

1A. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{27x^2}$ với $x \geq 0$

b) $\sqrt{8xy^2}$ với $x \geq 0, y \leq 0$

1B. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$

b) $\sqrt{48xy^4}$ với $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$

2A. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{13}$ với $a \geq 0$

b) $a\sqrt{\frac{-15}{a}}$ với $a < 0$

2B. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ với $a > 0$

b) $a\sqrt{2}$ với $a \leq 0$

Dạng 2: So sánh căn bậc hai.

Phương pháp giải: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, hoặc vào trong dấu căn rồi so sánh.

3A. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

3B. Tìm số bé hơn trong các cặp số sau:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

4A. Sắp xếp các số $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$ theo thứ tự tăng dần.

4B. Sắp xếp các số $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}; 5\sqrt{2}$ theo thứ tự giảm dần.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.

Phương pháp giải: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, hoặc vào trong dấu căn rồi rút gọn.

5A. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}}$ với $x > 0$

b) $B = \frac{1}{3}\sqrt{9+6v+v^2} + \frac{4v}{3} + 5$ với $v \leq -3$

5B. Rút gọn các biểu thức:

a) $M = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^2}{4}}$ với $u > 0$

$$\text{b) } N = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4-4t+t^2} - 2 \text{ với } t \leq 2$$

Dạng 4: Giải phương trình cần đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn.

Phương pháp giải: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, hoặc vào trong dấu căn rồi tính toán.

6A. Giải phương trình:

$$25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0$$

6B. Tìm x thỏa mãn:

$$\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$$

Dạng 5: Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai.

Phương pháp giải: Cách khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai.

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{AB} \text{ với } B \neq 0 \text{ và } AB \geq 0$$

7A. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5x^3}{59y}} \text{ với } x \geq 0, y > 0 \qquad \text{b) } 7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} \text{ với } x < 0, y > 0$$

7B. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau đây:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5b}{49a^3}} \text{ với } a > 0, b \geq 0 \qquad \text{b) } -\frac{1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} \text{ với } a < 0, b < 0$$

Dạng 6: Trục căn thức ở mẫu.

Phương pháp giải: Cách trục căn thức ở mẫu.

- $$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{B}$$

- $$\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$$
- $$\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}$$

8A. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$

8B. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$

9A. Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $M = \left(\frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$

b) $N = \left(1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} - 1 \right)$

9B. Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $P = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

b) $Q = \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} - 2 \right) \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} - 2 \right)$

I. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{5a^2}$ với $a \leq 0$ b) $\sqrt{18a^2}$ với $a \geq 0$
c) $\sqrt{-9b^3}$ với $b \leq 0$ d) $\sqrt{24a^4b^8}$ với $a; b \in \mathbb{R}$

11. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $x\sqrt{7}$ với $x \geq 0$ b) $x\sqrt{15}$ với $x \leq 0$

4.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{c) } \frac{1}{y}\sqrt{19y} \text{ với } y > 0 \quad \text{d) } \frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}} \text{ với } y \leq 0$$

12. Tìm số lớn hơn trong các cặp số dưới đây:

$$\text{a) } 2\sqrt{6} \text{ và } 3\sqrt{3} \quad \text{b) } \frac{2}{5}\sqrt{6} \text{ và } \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

13. Tìm số bé hơn trong các cặp số dưới đây:

$$\text{a) } 2\sqrt{23} \text{ và } 3\sqrt{10} \quad \text{b) } 2\sqrt{\frac{1}{5}} \text{ và } \frac{1}{5}\sqrt{21}$$

14. Sắp xếp các số:

$$\text{a) } 2\sqrt{5}; 3\sqrt{2}; 5; \sqrt{23} \text{ theo thứ tự tăng dần.}$$

$$\text{b) } 5\sqrt{2}; 2\sqrt{13}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47} \text{ theo thứ tự giảm dần.}$$

15. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}} \text{ với } x \geq 0$$

$$\text{b) } B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2} - \frac{3}{2} \text{ với } y \leq \frac{1}{2}$$

16. Tìm u, biết:

$$\text{a) } \sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4$$

$$\text{b) } \frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4$$

$$17^*. \text{ Tìm } x, y, z \text{ biết: } \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

18. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$$

$$\text{b) } Q = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

19*. Chứng minh:

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1+\sqrt{n}}} = \sqrt{n} - 1$$

BÀI 4. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

1A. a) Ta có $\sqrt{27x^2} = \sqrt{(3x)^2 \cdot 3} = |3x|\sqrt{3} = 3x\sqrt{3}$ vì $x \geq 0$

b) Ta có $\sqrt{8xy^2} = \sqrt{(2y)^2 \cdot 2x} = |2y|\sqrt{2x} = 2y\sqrt{2x}$ vì $y \leq 0$

1B. a) Ta có $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x}$ vì $x > 0$

b) Ta có $\sqrt{48xy^4} = 4y^2\sqrt{3x}$ vì $y^2 \geq 0$

2A. a) Vì $a \geq 0$ nên $a\sqrt{13} = \sqrt{13a^2}$

b) Vì $a < 0$ nên $a\sqrt{\frac{-15}{a}} = -(-a)\sqrt{\frac{-15}{a}} = -\sqrt{\frac{-15a^2}{a}} = -\sqrt{-15a}$

2B. Tương tự 2A

a) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} = \sqrt{3a}$

b) $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$

$$2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116} \text{ và } 3\sqrt{13} = \sqrt{117}$$

$$\text{Mà } \sqrt{116} < \sqrt{117} \Rightarrow 2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}.$$

3A. a) Ta có b) Ta có $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}}$

$$\text{Mà } \sqrt{\frac{25}{8}} < \sqrt{\frac{27}{8}} \Rightarrow \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

3B. a) Ta có $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$; $4\sqrt{3} = \sqrt{48} \Rightarrow$ Số bé hơn là $4\sqrt{3}$

b) Ta có $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{24}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}} = \sqrt{\frac{36}{37}}$

$$\Rightarrow \text{Số bé hơn là } 6\sqrt{\frac{1}{37}} \left(\text{vì } \frac{25}{24} > 1 > \frac{36}{37} \right)$$

4A. Thực hiện đưa thừa số' vào trong căn:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{45}; 2\sqrt{6} = \sqrt{24}; 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$$

6.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Từ đó ta có $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$

4B. Cách 1. Tương tự 4A.

Cách 2. Thực hiện đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ và $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Từ đó ta có $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$

5 A. Thực hiện đưa thừa số' ra ngoài dấu căn:

a) Ta có $5\sqrt{4x} = 10\sqrt{x}$; $3\sqrt{\frac{100x}{9}} = 10\sqrt{x}$ và $\frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} = 2\sqrt{x}$

Từ đó rút gọn được $A = 2\sqrt{x}$

b) Ta có $\sqrt{9+3v+v^2} = |3+v| = -v-3$ vì $v \leq -3$

Từ đó rút gọn được $B = v + 4$.

5B, Tương tự 5A.

a) Tìm được $M = 20\sqrt{u} - 10\sqrt{u} - 13\sqrt{u} = -3\sqrt{u}$ với $u \geq 0$

b) Tìm được $N = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}|2-t| - 2 = 1-t$ với $t \leq 2$

6A. Biên đổi vế trái của phương trình ta được:

$$\text{Vế trái} = \frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{a^2-9}$$

Cách 1. Đưa phương trình về dạng:

$$\sqrt{a-3} = 3\sqrt{a^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ a-3 = 9(a^2-9) \end{cases}$$

Giải ra được $a=3$

Cách 2. Điều kiện: $a \geq 3$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{a^2-9} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \sqrt{a+3}\right) = 0$$

Giải ra ta được $a=3$ (TM $a \geq 3$) hoặc $a = -\frac{26}{9}$ (KTM $a \geq 3$)

6B. Tương tự 6A. Biến đổi và rút gọn về trái ta được

$$\text{Về trái} = \frac{2}{3}\sqrt{2x+1}. \text{ Từ đó tìm được } x = \frac{35}{2}$$

7A. a) Ta có $\sqrt{\frac{5x^3}{49y}} = \frac{x}{7}\sqrt{\frac{5x}{y}} = \frac{x}{7}\sqrt{\frac{5xy}{y^2}} = \frac{x}{7|y|}\sqrt{5xy} = \frac{x}{7y}\sqrt{5xy}$

b) Ta có $7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} = 7xy\sqrt{\frac{-3xy}{x^2y^2}} = \frac{7xy}{|xy|}\sqrt{-3xy} = -7\sqrt{-3xy}$

7B. a) Ta có: $\sqrt{\frac{5b}{49a^3}} = \frac{1}{7a}\sqrt{\frac{5b}{a}} = \frac{1}{7a}\sqrt{\frac{5ab}{a^2}} = \frac{1}{7a^2}\sqrt{5ab}$

b) Ta có: $-\frac{1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} = -ab\sqrt{\frac{1}{ab}} = -ab\sqrt{\frac{ab}{a^2b^2}} = -\sqrt{ab}$

8A. a) Đưa về dạng $\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$ bằng cách đưa thừa số vào dấu căn.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{8-27} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{-19}$$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

8B. a) Ta có $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{10} = \sqrt{6}$

b) Ta có $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2+\sqrt{3}^2}} = 2-\sqrt{3}$

9A. a) Thực hiện trục căn thức trong ngoặc có

$$\frac{15}{\sqrt{6}+1} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1^2} = 3(\sqrt{6}-1)$$

Tương tự $\frac{4}{\sqrt{6}-2} = 2(\sqrt{6}+2)$ và $\frac{12}{3-\sqrt{6}} = 4(\sqrt{6}+3)$

Từ đó rút gọn M=-115

b) Tính được $\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ và $\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

Từ đó tìm được $N=4$

9B. Tương tự 8A

a) $P=2$ b) $Q=-1$

10. a) $\sqrt{5a^2} = -a\sqrt{5}$ b) $\sqrt{18a^2} = 3a\sqrt{2}$

c) $-3b\sqrt{-b}$ d) $\sqrt{24a^4b^8} = 2a^2b^4\sqrt{6}$

11. a) $\sqrt{7x^2}$ b) $-\sqrt{15x^2}$ c) $\sqrt{\frac{19}{y}}$ d) $-\sqrt{3}$

12. Số lớn hơn là:

a) $3\sqrt{3}$ b) $\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$

13. Số bé hơn là:

a) $3\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{\frac{1}{5}}$

14. Tương tự 4A.

a) $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < \sqrt{23} < 5$ b) $2\sqrt{13} > 5\sqrt{2} > 4\sqrt{3} > \sqrt{47}$

15. a) $A = 10\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{11}{2}\sqrt{x}$

b) $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}(1-2y) - \frac{3}{2} = -y - \frac{3}{4}$

16. a) Biến đổi được Vế trái = $2\sqrt{u-5}$. Từ đó tìm được $u = 9$.

b) Biến đổi được vế trái = $4\sqrt{u-1}$. Từ đó tìm được $u = 2$.

17*. Cách 1. Biến đổi về dạng:

$$(\sqrt{x+1}-1)^2 + (\sqrt{y-3}-1)^2 + (\sqrt{z-1}-1)^2 = 0$$

Từ đó tìm được $x=0, y=4, z=2$.

Cách 2. Ta có $x+2 = (x+1)+1 \geq 2\sqrt{x+1}$;

$$y-2 = (y-3)+1 \geq 2\sqrt{y-3}$$
 ;

$$z = (z - 1) + 1 \geq 2\sqrt{z - 1}$$

Cộng vế' với vế ta được $x + y + z \geq 2(\sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 3} + \sqrt{z - 1})$

Đâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0, y = 4, z = 2$

18. Tương tự 9A.

a) Ta có $P = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} + 5} = \frac{1}{2}$

b) Ta có $Q = (-\sqrt{7} - \sqrt{5}) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$

19* Thực hiện trục căn thức ở mẫu đối với từng thừa số.

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Thực hiện rút gọn VT = $\sqrt{n} - 1 = VP$ (ĐPCM)

BÀI 5. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng linh hoạt và phù hợp các phép biến đổi đơn giản như:

- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn;
- Đưa thừa số vào trong dấu căn;
- Trục căn thức ở mẫu;
- Quy đồng mẫu thức...

2. Các bài toán liên quan đến bài toán rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai thường là:

- Tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến;
- Tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức;
- Tìm giá trị nguyên của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên;
- Tìm giá trị thực của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên;
- So sánh biểu thức với một số hoặc một biểu thức khác;
- Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức...

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai đã cho, ta sử dụng các phép biến đổi như đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, trục căn thức ở mẫu, quy đồng mẫu thức... một cách linh hoạt.

Bước 2. Để tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến ta rút gọn giá trị của biến (nếu cần) sau đó thay vào biểu thức đã được rút gọn ở trên và tính kết quả.

CÁC BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.

1A. Cho biểu thức $P = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 9} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P trong các trường hợp:

i) $x = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

ii) $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

1B. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{7}{x - 4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q trong các trường hợp:

• $x = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$

• $x = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{3}}}$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức.

2A. Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2 - x}{x\sqrt{x} + x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M = \frac{-1}{2}$

2B. Cho biểu thức $N = \left(\frac{x + 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \frac{4\sqrt{x}}{3}$ với $x \geq 0$

a) Rút gọn N

b) Tìm x để $N = \frac{8}{9}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biến để biểu thức đạt giá trị nguyên.

3A. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để $M = A \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ có giá trị nguyên

3B. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn B

b) Tìm x nguyên để $C = A(B-2)$ có giá trị nguyên

4A. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x thực để $\frac{7P}{3}$ có giá trị nguyên

4B. Cho hai biểu thức

$$A = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \text{ và } B = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 25$$

a) Rút gọn A

b) Tìm x thực để $M = A - B$ có giá trị nguyên

Dạng 4: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và so sánh biểu thức với một số (hoặc một biểu thức khác).

Phương pháp giải: Để so sánh một biểu thức M với một số a, ta xét hiệu M-a và xét dấu của hiệu này, từ đó đi đến kết quả của phép so sánh.

5A. Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq 25$$

a) Rút gọn B

b) So sánh $C = \left(A \cdot B = \frac{x-5}{\sqrt{x}-5} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$ với 3

5B. Cho các biểu thức:

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} \text{ và } B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9, x \neq 25$$

- a) Rút gọn các biểu thức A và B
 b) Đặt $P = \frac{A}{B}$. hãy so sánh P với 1

Dạng 5: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị lớn nhất(hoặc giá trị nhỏ nhất) của biểu thức.

Phương pháp giải: Chú ý rằng

- Biểu thức P có giá trị lớn nhất là a, kí hiệu $P_{\max} = a$ nếu $P \leq a$ với mọi giá trị của biến và tồn tại ít nhất một giá trị của biến để dấu "=" xảy ra.
- Biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là b, kí hiệu $P_{\min} = b$ nếu $P \geq b$ với mọi giá trị của biến và tồn tại ít nhất một giá trị của biến để dấu "=" xảy ra.

6A. Cho hai biểu thức

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$$

- a) Rút gọn B
 b) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

6B. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

- a) Rút gọn P.
 b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

II. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho biểu thức: $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- a) Rút gọn M.
 b) Tính giá trị của M khi $X = 11 - 6\sqrt{2}$.
 c) Tìm các giá trị thực của x để $M = 2$.
 d) Tìm các giá trị thực của x để $M < 1$.
 e) Tìm các giá trị X nguyên để M nguyên.

$$- \frac{3x+9}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

8. Cho biểu thức: $Q = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

- Rút gọn Q.
- Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$.
- Tìm các giá trị của x để $Q = 3$.
- Tìm các giá trị của x để $Q > \frac{1}{2}$
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $Q \in \mathbb{Z}$.

9. Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x + 1} \right)$$

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị của x để $P < \frac{1}{2}$.
- Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$
- Tìm x nguyên để P nguyên.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

10. Cho biểu thức: $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1, x \neq 4$

- Rút gọn P.
- Tìm các giá trị của x thỏa mãn $P < \frac{1}{2}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

11* Cho biểu thức $N = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

- Rút gọn N.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của N.
- Tìm x để biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}}{N}$ nhận giá trị nguyên.

12. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a| \text{ với } a+b>0 \text{ và } b \neq 0$$

$$b) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0 \text{ và } a \neq b.$$

BÀI 5. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN

QUAN

1A. a) Rút gọn ta được

$$P = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9$$

$$b) i) \text{ Ta có } x = |2 + \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}| = 4 \text{ (TMĐK } x \geq 0, x \neq 9)$$

$$\text{Thay } x=4 \text{ vào } P \text{ tính được } P = \frac{4}{5}$$

ii) Tìm được $x=2$ (TMĐK $x \geq 0, x \neq 9$)

$$\text{Thay } x=2 \text{ vào } P \text{ tính được } P = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$$

$$1B. a) \text{ Rút gọn ta được } Q = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4$$

$$b) i) \text{ Ta có } x = |5 + \sqrt{2}| - 4|2 + \sqrt{2}| = 1 \text{ (TMĐK } x \geq 0, x \neq 4)$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } Q \text{ tính được } Q = 2$$

ii) Tìm được $x=2$ (TMĐK $x \geq 0, x \neq 4$)

$$\text{Thay } x=2 \text{ vào } Q \text{ tính được } Q = \frac{8 - 3\sqrt{2}}{2}$$

$$2A. a) \text{ Rút gọn ta được } M = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

b) Ta có $M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) = 0$

Giải ra ta được $x = \frac{1}{4}$

2B. a) Rút gọn ta được $N = \frac{4\sqrt{x}}{3(x - \sqrt{x} + 1)}$ với $x \geq 0$

b) Ta có $N = \frac{9}{8} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} - 1) = 0$

Giải ra ta được $x \in \left\{4; \frac{1}{4}\right\}$

3A. a) Rút gọn ta được $A = \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

b) Rút gọn ta được $M = \sqrt{x} - 3 + \frac{7}{\sqrt{x} + 3}$

Để M nguyên, ta cần có $\sqrt{x} \in \mathbb{N}, (\sqrt{x} + 3) \in \mathbb{U} (7)$

Từ đó tìm được $x = 6$

3B. a) Rút gọn ta được $B = \frac{2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

b) Rút gọn ta được $C = \frac{-2}{\sqrt{x} - 2}$

ta có C nguyên, $(\sqrt{x} - 2) \in \mathbb{U} (2)$ Giải ra ta được $x \in \{0, 1, 6, 16\}$

Ta có c nguyên $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2) \in \mathbb{U}(2)$.

4A. a) Rút gọn ta được $P = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

Đặt $M = \frac{7P}{3}$. Ta có $M = \frac{14}{3\sqrt{x} + 6}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

Cách 1. Tìm được $0 < M \leq \frac{7}{3}$ Mà $M \in \mathbb{Z}$ nên $M \in \{1; 2\}$

Từ đó tìm được $x = \frac{64}{9}$; $x = \frac{1}{9}$

4B. a) Rút gọn ta được $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

b) Ta có $M = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

Cách 1. Tìm được $0 \leq M < 1$. Mà $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M = 0$.

Từ đó tìm được $x = 0$ (TMĐK với $x \geq 0, x \neq 25$).

Cách 2. Đặt $\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = n$ với n nguyên.

Ta có $\sqrt{x} = \frac{n}{1 - n} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n < 1 \Rightarrow n = 0$

Từ đó tìm được $x = 0$ (TMĐK với $x \geq 0, x \neq 25$).

5A. a) Rút gọn ta được $B = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

b) Rút gọn ta được $C = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$

Xét hiệu $C - 3 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0$ với $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 1$

Từ đó ta có $C > 3$.

5B. a) Rút gọn ta được $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 3}$ và $P - 1 = \frac{8}{\sqrt{x} + 3} < 0$ nên $P < 1$.

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

6A. a) Rút gọn ta được $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

b) Tìm được $B = \frac{x + 2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

Ta có $P = (\sqrt{x} + 1) + \frac{4}{\sqrt{x} + 1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x} + 1}} = 4$

Dấu "=" xảy ra $\sqrt{x} + 1 = \frac{4}{\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$).

Vậy tìm được $P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = 0$

6B.

a) Rút gọn ta được $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

b) Tìm được $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

7.

a) Rút gọn ta được $M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

b) Từ $x = 11 - 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - \sqrt{2}$ (TMĐK với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$).

Thay $\sqrt{x} = 3 - \sqrt{2}$ vào M tính được $M = 1 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm được $x = 49$.

d) Ta có $M < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0$. Từ đó tìm được $0 \leq x < 9, x \neq 4$

e) Ta có $M = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

Từ điều kiện x và M nguyên ta tìm được $x = \{1; 16; 25; 49\}$.

8. a) Gợi ý: $x - \sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)$

Rút gọn ta được $Q = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

b) Ta có $\sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$ (TMĐK).

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$ vào Q tìm được $Q = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

9. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Ta có $Q = 3 \Leftrightarrow x = 4$ (TMĐK).

d) Ta có $Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3}{2(\sqrt{x} - 1)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

e) Tương tự 3A. Ta có $Q = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

Từ đó tìm được $x \in \{0; 4; 9\}$.

9. a) Rút gọn ta được $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

b) Ta có $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x} + 1)} < 0$. Từ đó tìm được $0 \leq x < 9, x \neq 1$

c) Giải $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{3}$ tìm được $x = 4$ (TMĐK).

d) Ta có $P = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$. Từ điều kiện P nguyên, tìm được $x = 0$

e) Từ $P = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ tìm được $P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

10. a) Rút gọn thu được $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 1$

Ta có $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4$

Giải ra và kết hợp điều kiện ta được $0 \leq x < 16, x \neq 1, x \neq 4$

c) Tương tự 6A. Ta có $P = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$

Từ đó tìm được $P_{\min} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$

11. a) Rút gọn ta được $N = x - \sqrt{x} + 1$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

b) Ta có $N = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$$\text{Vậy } N_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

c) Trường hợp 1. Xét $x = 0 \Rightarrow M = 0 \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2. Xét $x \neq 0$

$$\Rightarrow 0 < M = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \leq \frac{2}{2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} = 2$$

Khả năng 1. Với $M = 1$, tìm được $x = 7 \pm 3\sqrt{5}$ (TM).

Khả năng 2. Với $M = 2$, tìm được $x = 1$ (KTM).

Vậy các giá trị tìm được là $x = 0$ hoặc $x = 7 \pm 3\sqrt{5}$.

12. a) Sử dụng công thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{Khi } A \geq 0 \\ -A & \text{Khi } A < 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có VT} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a||b^2|}{|a+b|} = |a| = \text{VP(ĐPCM)}$$

$$\text{VT} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{2b}{a-b}$$

$$\text{b) } \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4b}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{4\sqrt{ab} - 4b}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{VP(ĐPCM)}$$

BÀI 6. CĂN BẬC BA

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc ba

- Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.
- Chú ý:
 - Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.
 - Căn bậc ba của số dương là số dương; của một số âm là số âm; của số 0 là 0.

2. Các công thức liên quan đến căn bậc ba

$$\begin{aligned} \text{a) } A < B &\Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} & \text{b) } \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} &\Leftrightarrow A = B \\ \text{c) } \sqrt[3]{AB} &= \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} & \text{d) } \sqrt[3]{\frac{A}{B}} &= \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} \text{ với } B \neq 0 \end{aligned}$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính có chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng công thức: $\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$

các hằng đẳng thức:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

và nắm vững bảng lập phương của các số đơn giản:

3		7	4	5	6	3	2	9

1A. Hãy tính:

$$\text{a) } \sqrt[3]{27}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{1}{125}}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{64a^3}; \quad \text{d) } \sqrt[3]{-8a^2b^6}$$

1B. Làm tính:

$$\text{a) } \sqrt[3]{729}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{1}{216}}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{343a^3}; \quad \text{d) } \sqrt[3]{-512a^3b^6}.$$

2A. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}} \quad \text{b) } 2\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$$

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$c) \frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{250}} - \sqrt[3]{160} \cdot \sqrt[3]{1,2}$$

$$d^*) \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

2B. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{432}$$

$$c) \sqrt[3]{-343} \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24}$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} + \frac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$$

3A. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1} - 5x$$

$$b) B = \sqrt[3]{x\sqrt{x}+1}\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1} - \sqrt[3]{1-x^3}$$

3B. Chứng minh các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến x :

$$a) A = \sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1} - (\sqrt{x}-2)$$

$$b) B = (\sqrt[3]{x}+1)^3 - (\sqrt[3]{x}-1)^3 + 6(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)$$

Dạng 2. So sánh các căn bậc ba

Phương pháp giải: Để so sánh các căn bậc ba, ta chú ý:

$$\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$$

4A. So sánh cặp số sau:

$$a) 2\sqrt[3]{3} \text{ và } \sqrt[3]{23} \quad b) 15 \text{ và } 3\sqrt[3]{126}$$

4B. Tìm số nhỏ hơn trong các cặp số sau:

$$a) 7 \text{ và } 2\sqrt[3]{43} \quad b) 5\sqrt[3]{6} \text{ và } 6\sqrt[3]{5}$$

5A. So sánh:

$$A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \text{ và } B = 2\sqrt[3]{9}$$

$$5B. \text{ So sánh: } M = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \text{ và } N = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$$

6A. Tìm x , biết:

$$a) \sqrt[3]{2x+1} > -5$$

$$b) \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x+4} \leq x+1$$

6B. Tìm x thỏa mãn:

$$a) \sqrt[3]{4-2x} \geq 4$$

$$b) \sqrt[3]{-x^3-3x^2+6x-10} < -x-1$$

Dạng 3. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

7A. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3;$$

$$b) \sqrt[3]{5+x} - x = 5$$

7B. Tìm x , biết:

$$a) \sqrt[3]{2-3x} = -2$$

$$b) \sqrt[3]{x-1} + 1 = x$$

8A. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - 2x = 3$ b) $\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{216x} + x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = 4$

8B. Tìm x thỏa mãn:

a) $\sqrt[3]{1 - 9x + 27x^2 - 27x^3} = 3x - 5$ b) $\sqrt[3]{8x^2} + x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 27$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Hãy tính:

a) $\sqrt[3]{512}$ b) $\sqrt[3]{\frac{-1}{125}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{343a^3b^6}{-216}}$ d) $\sqrt[3]{-64a^9b^9}$

10. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})$

11. Rút gọn biểu thức:

a) $M = 3x - \sqrt[3]{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1}$ b) $N = \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} - \sqrt[3]{x^3}$

12. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(4 - 2\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3} - 1)}$ b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$

13. So sánh các cặp số sau:

a) 6 và $2\sqrt[3]{26}$ b) $2\sqrt[3]{6}$ và $\sqrt[3]{47}$

14. Tìm số lớn hơn:

a) $3\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{53}$ b) 22 và $3\sqrt[3]{394}$

15. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 1$ b) $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = x + 2$

BÀI 6. CĂN BẬC BA

1A. a) Ta có $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) Ta có. $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{5}$

3.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Ta có. $\sqrt[3]{64a^3} = \sqrt[3]{(4a)^3} = 4a$

d) Ta có. $\sqrt[3]{-8a^3b^6} = \sqrt[3]{(-2ab^2)^3} = -2ab^2$

1B. Tương tự 1A.

a) 9. b) $\frac{1}{6}$. c) $7a$. d) $-8a b^2$

2A. a) Ta có $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}} = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} + \sqrt[3]{\frac{7,2}{0,9}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 5$

b) Ta có $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Tương tự $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3}$.

Thay vào đề bài tìm được kết quả bằng $5\sqrt[3]{3}$

c) **Tính được** $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{160} \cdot \sqrt[3]{1,2} = 4\sqrt[3]{3}$

Thay vào đề bài tìm được kết quả bằng $-3\sqrt[3]{3}$.

d) Ta có $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)} = 2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

Thay vào đề bài thu được kết quả bằng 2.

2B. Tương tự 2A.

a) Chú ý $\frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}} = 4\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{-54} = -3\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{432} = 6\sqrt[3]{2}$

Từ đó tìm được kết quả bằng $\sqrt[3]{2}$

b) Biến đổi được $\sqrt[3]{\frac{-29}{512}} = \frac{-3}{8}$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{-0,064} = \frac{-2}{5}$

Từ đó tìm được kết quả bằng $\frac{-1}{8}$

c) Biến đổi được $\sqrt[3]{-343} = -7; \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{-24} = -2\sqrt[3]{2}$

Từ đó tìm được kết quả bằng 0.

d) Biến đổi $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}$

Từ đó tìm được kết quả bằng $\frac{-1 + 2\sqrt[3]{2}}{3}$

3A. a) Chú ý $125x^3 + 75x^2 + 15x + 1 = (5x+1)^3$.

Từ đó rút gọn được $A = 1$.

b) Ta có $(x\sqrt{x} + 1)(x\sqrt{x} - 1) = x^3 - 1$

Từ đó rút gọn được $B = 2\sqrt[3]{x^3} - 1$

3B. a) Chú ý $x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^3$

Rút gọn được $P = -1$ (ĐPCM).

b) Chú ý $(\sqrt[3]{x} \pm 1)^3 = x \pm 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} \pm 1$

Từ đó rút gọn được $Q = 8$ (ĐPCM).

4A. a) Biên đổi $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$. Từ đó thu được $2\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{23}$

b) Biên đổi $15 = 3 \cdot 5 = 3\sqrt[3]{125}$. Từ đó thu được $15 < 3\sqrt[3]{126}$

4B. Tương tự 4A.

a) Số nhỏ hơn là 7. fr) Số nhỏ hơn là $5\sqrt[3]{6}$

5A. Chú ý $20 + 14\sqrt{2} = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 = (2 + \sqrt{2})^3$

Tương tự $20 - 14\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^3$. Từ đó, rút gọn được $A = 4$. Vì $4 = 2\sqrt[3]{8} < 2\sqrt[3]{9}$ nên $A < B$

5B. Tương tự 5A.

Biến đổi để được $7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3; 7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$ Từ đó tìm được

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$M = 2.$$

$$\text{Vì } 2 = \frac{4}{2} = \frac{4}{\sqrt[3]{8}} > \frac{4}{\sqrt[3]{9}} \text{ nên } M > N.$$

6A. a) Lập phương hai vế và biến đổi ta được $x > 63$.

b) Tương tự câu a), ta tìm được $x \leq -1$.

6B. Tương tự 6A.

a) $x \leq -30$. b) $x < 1$.

7A. a) Lập phương hai vế và biến đổi ta tìm được $x = 13$.

b) Biến đổi về $\sqrt[3]{5+x} = 5+x$, lập phương hai vế và biến đổi ta tìm được $x = -6$;
 $x = -5$ hoặc $x = -4$.

7B. Tương tự 7A.

a) $x = \frac{10}{3}$ b) $x = 0$; $x = 1$ hoặc $x = 2$.

8A. a) Rút gọn $VT = 1 - X$. Từ đó tìm được $x = -2$.

b) Rút gọn $VT = -2\sqrt[3]{x}$ Từ đó tìm được $x = -8$.

8B. Tương tự 8A.

a) Rút gọn $VT = 1 - 3x$. Từ đó tìm được $x = 1$.

b) Rút gọn $VT = 2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} = 3\sqrt[3]{x^2}$. Từ đó tìm được $x = \pm 27$.

9. a) 8. b) $\frac{-1}{5}$ c) $\frac{-7}{6}ab^2$ d) $-4a^3b^3$

10. a) Thu gọn được kết quả bằng - 3.

b) Cách 1. Nhân phá ngoặc rồi thu gọn được kết quả bằng 7.

Cách 2. Chú ý $(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{5})^3 + (2)^3 = 7$

11. a) Chú ý $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x + 1)^3$

Từ đó tìm được $M = -1$.

b) Chú ý $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$.

Từ đó tìm được $N = x + 1$.

12. a) Cách 1. Nhân phá ngoặc được $(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 6\sqrt{3} - 10$

Và lưu ý $6\sqrt{3} - 10 = (\sqrt{3} - 1)^3$

Từ đó thu được kết quả bằng $\sqrt{3} - 1$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 2. chú ý $(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)^2(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)^3$

b) Ta có $\sqrt[3]{10 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$

Từ đó thu được kết quả bằng $\sqrt{3} + 1$

13. a) $6 = 2\sqrt[3]{27} > 2\sqrt[3]{26}$ b) $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48} > \sqrt[3]{47}$

14. a) Số lớn là $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$ c) Số lớn là 22

15. a) $x = 0$ b) $x = -1$ hoặc $x = -2$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 6.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Với $x > 0$, cho các biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}, \quad B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \quad \text{và} \quad P = \frac{A}{B}$$

- Rút gọn và tính giá trị của P khi $x = 4$.
- Tìm các giá trị thực của x để $A \leq 3B$
- So sánh B với 1.
- Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$

1B. Cho biểu thức $P = \left[\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right]$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

- Rút gọn P .
- Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$
- Chứng minh $P > 2$ với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$
 - Tìm x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

2A. Cho biểu thức:

$$M = \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \right] : \left[\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} + \frac{\sqrt{a}+2}{3-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}+2}{a-5\sqrt{a}+6} \right] \quad \text{với } a \geq 0, a \neq 4, a \neq 9.$$

- Rút gọn M
- Tìm a để $M < 0$
- Tìm a để $M > 1$.
- Tính giá trị nhỏ nhất của M

2B. Với $a > 0, a \neq 1$ cho biểu thức.

$$N = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left[\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right]$$

- Rút gọn N
- Tìm a để $N = 7$
- Tìm a để $N > 6$.
- Tính giá trị nhỏ nhất của $N - \sqrt{a}$

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Tìm x để $A < 1$

d) Tìm x để A nguyên

6. Cho biểu thức:
$$B = \left[\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right]$$

a) Tìm a để biểu thức B có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm a để $B > \frac{1}{6}$

d) Giả sử a là số nguyên, tìm giá trị nhỏ nhất của B.

7. Với $x > 0$ và $x \neq 1$, cho biểu thức:
$$C = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn C.

b) Khi $x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{1-\sqrt{7}}-1} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{1-\sqrt{7}}+1}$, tính giá trị biểu thức C.

c) Tìm x để $C > 1$.

d) Tìm x nguyên để C nhận giá trị nguyên.

8. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ Cho biểu thức:
$$M = \left[\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right] : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm a để $M = -1$.

c) So sánh M với 1.

d) Tìm a để $M < 0$.

9. Cho biểu thức:

$$P = \left[\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right] \left[\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right]$$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P biết $x = 3 + 2\sqrt{2}$

d) Tìm giá trị lớn nhất của P

10. Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, cho biểu thức:

$$N = \left[\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right] \cdot \left[\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right]$$

a) Rút gọn N

b) Khi

3. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$x = \frac{2\sqrt{15}}{5} \left[\sqrt{\frac{9-4\sqrt{5}}{3}} + \sqrt{\frac{9-4\sqrt{5}}{3}} \right] \text{ Tính giá trị của N.}$$

- c) Tìm giá trị của x để N=3
d) Tìm giá trị nhỏ nhất của N

11. Cho biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$$

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tìm giá trị của x để A=2
d) Tìm x để A nhận giá trị nguyên

12. Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ cho biểu thức

$$B = \left[\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$$

- a) Rút gọn B
b) Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$
c) Tìm giá trị của x để B>0
d) Tìm giá trị lớn nhất của B

13. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ cho biểu thức

$$Q = \left[\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right]$$

- a) Rút gọn Q
b) Tìm a để Q<0
c) Tìm giá trị của a để Q=-2
d) Đặt $T = Q\sqrt{a}$. So sánh T với 1

14. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{5\sqrt{x} - 4}{2\sqrt{x} - x} \right) : \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right)$$

- a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa
b) Rút gọn P
c) Tính giá trị của P khi

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

d) Tìm m để có x thỏa mãn: $P = mx\sqrt{x} - 2mx + 1$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1A. a) Rút gọn được $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$ và $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$.

Với $x = 4$, tính được $P = \frac{7}{2}$

Ta có $A \leq B \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK).

b) Xét hiệu $(B - 1)$ và chứng minh được hiệu này luôn âm.

Từ đó ta có $B < 1$ với mọi $x > 0$.

c) Biên đổi ĐK đã cho về dạng: $(\sqrt{x} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{x - 4} - 1)^2 = 0$

Từ đó ta tìm được $x = 5$ (TMĐK).

1B. a) Rút gọn được $P = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

b) Ta biến đổi được. $\sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$

Từ đó tìm được $P = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$

c) Gọi ý: Xét hiệu $(P - 2)$ và chứng minh hiệu này luôn dương với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$.

d) Biên đổi điều kiện đã cho về dạng $(\sqrt{x} - 2)^2 = -\sqrt{x - 4}$. Từ đó tìm được $x = 4$ (TMĐK).

2A. a) Rút gọn được với $M = \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 1}$ với $a \geq 0$, $a \neq 4$, $a \neq 9$

b) Ta có $M < 0 \Leftrightarrow a < 4$

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq a < 4$.

c) Tương tự ý b), tìm được $a \in \emptyset$

d) Ta có $M = 1 - \frac{3}{\sqrt{a+1}} \geq -2$ với mọi $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 9$

Từ đó tìm được $M_{\min} = -2 \Leftrightarrow a = 0$

2B. a) Rút gọn được $N = \frac{2a + 2\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

b) Tìm được $a = \frac{1}{4}$ hoặc $a = 4$.

c) Tìm được $a > 0$ và $a \neq 1$

d) Ta có $N - \sqrt{a} = \sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 2$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta tìm được:

$$(N - \sqrt{a})_{\min} = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow a = 2$$

3A. a) Rút gọn được $P = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$ $x \geq 0, x \neq 1$

b) Với $x = 9$, tính được $P = \frac{-13}{6}$

c) Với $P = \frac{1}{2}$, Ta tìm được $x = \frac{1}{121}$

d) Ta có $P = -5 + \frac{17}{\sqrt{x} + 3}$. Ta có $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \in \mathbb{Z}$

Cách 1. Vì $0 < \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{17}{3}$ nên $\frac{17}{\sqrt{x} + 3} \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Từ đó tìm được $x \in \left\{ \frac{4}{25}; \frac{25}{16}; \frac{64}{9}; \frac{121}{4}; 196 \right\}$

Cách 2. Đặt $\frac{17}{\sqrt{x} + 3} = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{17 - 3n}{n} \geq 0 \Rightarrow 0 < n \leq \frac{17}{3}$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Từ đó tìm được $x \in \left\{ \frac{4}{25}; \frac{25}{16}; \frac{64}{9}; \frac{121}{4}; 196 \right\}$

3B. a) Rút gọn được $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ $a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9$

b) Ta biến đổi được $\sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$, tính được $P = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$

c) Ta có $P < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow x < 9$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow 0 \leq x < 9$ và $x \neq 1$

d) Ta có $P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-3}$ với $a \geq 0, a \neq 1, a \neq 9$

Để P nguyên thì $\sqrt{x}-3 \in U(2)$

Kết hợp với ĐK ta được $x \in \{4; 16; 25\}$.

4A. a) ĐK: $x > 0$ và $x \neq 1$.

b) Rút gọn được $E = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

c) Ta có $E > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

d) Từ giả thiết ta có $m = x + \sqrt{x} - 1$

Từ ĐK $x > 0$ và $x \neq 1$ ta tìm được $m > -1$ và $m \neq 0$.

4B. a) ĐK: $x > 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

b) Rút gọn được $F = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

c) Ta biến đổi được $\sqrt{x} = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow F = \frac{16\sqrt{3}-40}{13}$

d) Từ giả thiết ta có $m > \frac{x+1}{4x}$ với $x > 9$.

Mà $\frac{x+1}{4x} < \frac{5}{18}$ với $\forall x > 9$ nên ta tìm được $m \geq \frac{5}{18}$

5. a) Rút gọn được $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$ với mọi $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

- a) Tương tự 1B.
- b) Tìm được $x > 4$, $x \neq 9$ và $x \neq 25$.
- c) Tương tự 3A. Tìm được $x = 4$.

6. a) Điều kiện: $a > 0$, $a \neq 1$ và $a \neq 4$.

b) Rút gọn được $B = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}}$ với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$

c) Tìm được $a > 16$.

d) Chú ý $a \in \mathbb{Z}$ và kết hợp với điều kiện $\Rightarrow a \geq 2$. Từ đó ta lập luận được

$$B \geq \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Kết luận } B_{\min} = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow a = 2$$

7. a) Rút gọn được $C = \frac{2}{x-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

b) Tìm được $x = 2$, tính được $C = 2$.

c) Ta có $C > 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

d) Tương tự 3B. Tìm được $x \in \{2; 3\}$.

8. a) Rút gọn được $M = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Ta có $M = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ (TMĐK).

c) Ta biến đổi được $\sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$ Từ đó tìm được $P = 1 - \sqrt{2}$

d) Đánh giá được $P \leq -1 + \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Từ đó kết luận

$$P_{\max} = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$$

10. a) Rút gọn được $N = \sqrt{x} - 1$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

b) Tìm được $x = 4$. Từ đó tính được $N = 1$.

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Ta có $N = 3 \Leftrightarrow x = 16$ (TMĐK).

d) Ta có $N_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = 0$

11. a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4$

b) Rút gọn được $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

c) Tìm được $\sqrt{x} = -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

d) Tương tự 3A. Tìm được $x = 0$.

12. a) Rút gọn được $B = -x + \sqrt{x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

b) Tìm được $x = 1$ (Không TMĐK $x \geq 0; x \neq 1$) nên không tồn tại B .

c) Từ $B > 0$ tìm được $x < 1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq x < 1$

d) Ta có $B = -(\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

13. a) Rút gọn được $Q = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$ với $x > 0; x \neq 1$

b) Ta có $Q < 0 \Leftrightarrow a > 1$.

c) Ta có $Q = -2 \Leftrightarrow a = 3 + 2\sqrt{2}$

d) Ta có $T-1 = -a < 0$ với mọi $a > 0$ và $a \neq 1 \Rightarrow T < 1$.

14. a) Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 4$.

b) Rút gọn được $P = \frac{2-3\sqrt{x}}{2}$ với $x > 0; x \neq 1$

c) Biến đổi được $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow P = \frac{7-3\sqrt{5}}{4}$

d) Ta có $P = m\sqrt{x} - 2mx + 1 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{2m} = (\sqrt{x}-1)^2$

Bằng lập luận, tìm được $m \geq \frac{3}{2}$ hoặc $m < 0$.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Căn bậc hai số học của 25 là:

- A. 5 B. -5 C. ± 5 D. 625

Câu 2. Trong các số $\sqrt{12}$; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{4}$ số lớn nhất là:

- A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{4}$ D. $\sqrt{10}$

Câu 3. Hàm số

$$y = \sqrt{\frac{-5}{3-4x}} \text{ xác định khi và chỉ khi}$$

- A. $x < \frac{3}{4}$ B. $x \neq -\frac{3}{4}$ C. $x > \frac{3}{4}$ D. $\forall x \in \mathbb{R}$

Câu 4. Giá trị của $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ bằng:

- A. $2\sqrt{5}$ B. $1+2\sqrt{5}$ C. $1-2\sqrt{5}$ D. -1

Câu 5. Giá trị của x để $\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{x}{9}} - 2 = 0$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 6. Giá trị của $\sqrt{(2\sqrt{7} - 7\sqrt{2})^2}$ bằng:

- A. $7\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7} - 7\sqrt{2}$
C. $\pm(2\sqrt{7} - 7\sqrt{2})$ D. Không xác định.

Câu 7. Với $a > 0$, biểu thức $2a^2\sqrt{\frac{b^4}{a^2}}$ bằng:

- A. $2b^2$ B. $2ab^2$ C. $2|a|b^2$ D. $\pm 2ab^2$

Câu 8. Một hình lập phương có thể tích bằng 27cm^3 , cạnh hình lập phương là:

- A. 27cm B. 9cm C. $3\sqrt{3}$ D. 3cm

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ b) $B = 2\sqrt{27} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \frac{4}{\sqrt{3} + 1}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{5}\sqrt{25x + 50} - 5\sqrt{x + 2} + \sqrt{9x + 18} + 9 = 0$

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 7x - 1$

Bài 3: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{3x + 3}{x - 9} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

- a) Rút gọn P
 b) Tính giá trị của P khi $x = 20 - 6\sqrt{11}$
 c) Tìm x để $P > \frac{1}{2}$
 d) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $Q = \frac{2P\sqrt{x}}{3}$ nhận giá trị nguyên.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Căn bậc hai số học của 16 là:

- A. 4 B. ± 4 C. 256 D. -4

Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $2\sqrt{5} > 5\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5} = 5\sqrt{2}$ C. $\sqrt{20} < 5\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5} > \sqrt{50}$ Câu 3.

Hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{3x + 1}}$ xác định khi và chỉ khi:

- A. $x \geq -\frac{1}{3}$ B. $x \leq -\frac{1}{3}$ C. $x \neq -\frac{1}{3}$ D. $x > -\frac{1}{3}$

Câu 4. Giá trị của $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ bằng:

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

A. $2\sqrt{2} + 2$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 0

Câu 5. Giá trị của x để $\frac{1}{2}\sqrt{4x+8} - 4\sqrt{\frac{9x+18}{16}} = -6$ là:

A. 1 B. 7 C. 5 D. -1

Câu 6. Biểu thức $\sqrt{25x^2 - 20x + 4}$ bằng:

A. $5x - 2$ B. $2 - 5x$ C. $|5x - 2|$ D. $5x + 2$

Câu 7. Với $a, b > 0$, biểu thức $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ bằng:

A. 2 B. $\sqrt{\frac{2a}{b}}$ C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ D. $\frac{2\sqrt{ab}}{b}$

Câu 8. Biểu thức $\sqrt{64x^6y^4z^2}$ bằng:

A. $8x^3y^2|z|$ B. $8|x^3| \cdot |y^2| \cdot |z|$ C. $8x^3y^2z$ D. $-8x^3y^2z$

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \frac{3}{1+\sqrt{3}} - \frac{2}{1-\sqrt{3}}$

b) $B = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+3} + \frac{2}{\sqrt{2}}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{49 - 28x + 4x^2} - 5 = 0$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{x-2} - 4\sqrt{\frac{4x-8}{9}} + \sqrt{9x-18} - 5 = 0$

Bài 3. Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ a) Tính

giá trị của B khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$

c) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{4}{3}$

d) Tìm x thỏa mãn: $(\sqrt{x} + 1)P - \sqrt{x} - 4\sqrt{x-1} + 26 = -6x + 10\sqrt{5x}$

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Câu 1. A

Câu 5. D

Câu 2. B

Câu 6. A

Câu 3. B

Câu 7. B

Câu 4. B

Câu 8. D

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. a) Ta có $A = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}{7-3} + \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}{7-3}$

Từ đó tìm được $A = 5$.

b) Ta có $B = 6\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 - \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{2}$

Từ đó tìm được $B = 5\sqrt{3} + 1$.

Bài 2. a) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{5}\sqrt{25(x+2)} - 5\sqrt{(x+2)} + \sqrt{9(x+2)} + 9 = 0$

Biên đổi đưa về dạng $\sqrt{(x+2)} = 9$.

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $x = 79$

b) Cách 1. Phương trình $\Leftrightarrow |x - 2| = 7x - 1$.

Từ đó sử dụng phương pháp chia khoảng hoặc biến đổi tương đương ta tìm được

$$x = \frac{3}{8}$$

Cách 2. Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 = (7x - 1)^2 \end{cases}$

Giải ra ta cũng tìm được $x = \frac{3}{8}$

Bài 3. a) Rút gọn ta được $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

b) Tìm được $\sqrt{x} = \sqrt{11} - 3$. Thay vào P ta được $P = \frac{3\sqrt{11}}{11}$

c) Giải ra ta được $0 \leq x < 9$.

d) Ta có $Q = 2 - \frac{6}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

Từ điều kiện Q nguyên ta tìm được $x \in \{0; 9\}$.

Tuy nhiên chỉ có $x = 0$ thỏa mãn.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Câu 1. A

Câu 5. B

Câu 2. C

Câu 6. C

Câu 3. D

Câu 7. D

Câu 4. C

Câu 8. B

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. a) Tính được $A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ b) Tính được $B = \sqrt{2}$

Bài 2. a) Ta biến đổi được $|2x - 7| = 5$. Từ đó tìm được $x \in \{1; 6\}$.

b) Ta biến đổi về dạng $\sqrt{x - 2} = 6$

Từ đó tìm được $x = 38$ (TMĐK).

Bài 3. a) Ta biến đổi được $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$. Tính được $B = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

5. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Rút gọn được $P = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

c) Ta có $P = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Đối chiếu điều kiện thấy không thỏa mãn $\Rightarrow x \in \emptyset$

d) Ta biến đổi được về dạng

$$14 + 3x = 2\sqrt{x-1} + 5\sqrt{5x} \quad (1)$$

Cách 1: Ta có (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 2)^2 + (\sqrt{5x} - 5)^2 = 0$

Cách 2. Ta có (1) $\Leftrightarrow (5-x) \left(\frac{2}{2+\sqrt{x-1}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} - 3 \right) = 0$

Từ đó tìm được $x=5$.

CHƯƠNG II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

BÀI 1. NHẮC LẠI VÀ BỔ XUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x thay đổi sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x (x gọi là biến số).
Ta viết: $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

Ví dụ: Ta có $y = 2x + 3$ là một hàm số của y theo biến x .

Lưu ý: Khi x thay đổi mà y luôn nhận giá trị không đổi thì hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm hằng.

2. Giá trị của hàm số, điều kiện xác định của hàm số

- Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 kí hiệu là $y_0 = f(x_0)$.
- Điều kiện xác định của hàm số $y = f(x)$ là tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho x, y thỏa mãn hệ thức $y = f(x)$.

- Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

4. Hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị x thuộc R .

- Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị $y = f(x)$ tương ứng cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên R
- Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị $y = f(x)$ tương ứng lại giảm đi thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên R .

Nói cách khác, với x_1, x_2 bất kì thuộc R :

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

Trong quá trình giải toán ta có thể sử dụng kiến thức sau đây để xét tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số trên R :

Cho x_1, x_2 bất kì thuộc R và $x_1 \neq x_2$. Đặt $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ khi đó:

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

+ Nếu $T > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên \mathbb{R}

+ Nếu $T < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên \mathbb{R} .

I. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 , ta thay $x = x_0$

vào $y = f(x)$ được $y_0 = f(x_0)$

1A. Tính giá trị của hàm số:

a) $y = f(x) = x^2 + x - 2$ tại $x_0 = \frac{1}{2}$

b) $y = f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = \sqrt{3}$

1B. Tính giá trị của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x^2 - 1} + 2$ tại:

a) $x_0 = \sqrt{5}$

b) $x_0 = \frac{1}{4}$

2A. Cho hàm số $y = f(x) = 3\sqrt{x+1} + mx^2 - 2x + 3$ với m là tham số

Tìm m để $f(3) = f(-1)$.

2B. Tìm m để hàm số $y = f(x) = (\sqrt{m^2 + 4} - m)x^2 - 2mx + 5$ thỏa mãn điều kiện

$f(0) = f(1)$.

Dạng 2. Tìm điều kiện xác định của hàm số

Phương pháp giải: Chú ý rằng:

- Hàm số dạng căn thức $y = \sqrt{A(x)}$ xác định (hoặc có nghĩa) $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$

- Hàm số dạng phân thức $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ xác định (hoặc có nghĩa) $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

3A. Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định:

a) $y = \frac{2}{x+1} + 3$

b) $y = \sqrt{2x-1} - 3\frac{x}{x-1} + 5$

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$c) y = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{1-x}}$$

$$d) y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$$

3B. Tìm tất cả các giá trị của x để hàm số sau có nghĩa:

$$a) y = \frac{5x+3}{x^2+1}$$

$$b) y = x - 3\sqrt{x+7} + \frac{4}{x}$$

$$c) y = \frac{x - 4\sqrt{x}}{x-1}$$

$$d) y = \frac{2 + \sqrt{2-x}}{\sqrt{3x+4}}$$

Dạng 3. Biểu diễn tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Phương pháp giải: Để biểu diễn tọa độ của điểm $M(x_0; y_0)$ trên hệ trục tọa độ Oxy, ta làm như sau:

1. Vẽ đường thẳng song song với trục Oy tại điểm có hoành độ $x = x_0$
2. Vẽ đường thẳng song song với trục Ox tại điểm có tung độ $y = y_0$
3. Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $M(x_0; y_0)$

4A. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm $A(-2;1)$, $B(0;-1)$ và $C(-3/2;-2)$.

- a) Biểu diễn A, B, C trên Oxy
- b) Trong các điểm A, B, C điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x-1$?

4B. Cho các điểm $M(1;-1)$, $N(2;0)$, và $P(-2;2)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

- a) Biểu diễn M, N, và P trên Oxy.
- b) Trong các điểm M, N, và P điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

5A. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD với $A(-1;2)$, $B(-3;0)$, $C(2;0)$, $D(2;2)$.

- a) Vẽ tứ giác ABCD trên mặt phẳng tọa độ.
- b) Coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là 1cm, tính diện tích tứ giác ABCD.

5B. Cho tam giác ABC trên mặt phẳng tọa độ Oxy với $A(3;0)$, $B(-2;0)$ và $C(0;4)$

- a) Vẽ tam giác ABC trên Oxy.
- b) Tính diện tích tam giác ABC biết mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là 1m.

Dạng 4: Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Phương pháp giải: ta thực hiện một trong các cách sau:

Cách 1: Với mọi x_1, x_2 thuộc R, giả sử $x_1 < x_2$

- Nếu hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì hàm số đồng biến.
- Nếu hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì hàm số nghịch biến.

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 2: Với mọi x_1, x_2 thuộc \mathbb{R} và $x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Nếu $T > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $T < 0$ thì hàm số nghịch biến

6A. Chứng minh:

a) Hàm số $y = f(x) = 3x - \frac{1}{4}$ đồng biến trên \mathbb{R}

b) Hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

6B. Với a là hằng số, các hàm số sau đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ?

a) $y = f(x) = -\frac{2}{3}x + 5a$ b) $y = f(x) = 5x + a^2 - \frac{1}{2}$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Tính giá trị của hàm số:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ tại $x_0 = 2$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$ tại $x_0 = \frac{3}{4}$

c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ tại $x_0 = \sqrt{6}$

d) $f(x) = mx + (2m - 1)$ tại $x_0 = 3$ với m là hằng số.

8. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + mx + 2$ (với m là tham số) thỏa mãn

$$f(5 - 2\sqrt{3}) = f(2)$$

9. Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định:

a) $y = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2x+5}$ b) $y = \frac{4}{5}\sqrt{x+1} - 5x^2 + \frac{1}{2x-3}$

c) $y = \frac{x+2}{2\sqrt{x}-1}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}}{5-2x} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

10. Cho các điểm $K(-1;2)$, $M(0;-3)$ và $N(4;2)$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

a) Biểu diễn K, M, N trên Oxy.

4.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$d) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \neq 3$$

3B. Tương tự 3A

- a) Với mọi giá trị của x b) $-7 \leq x \neq 0$
 c) $0 \leq x \neq 1$ d) $\frac{-4}{3} < x \leq 2$

4A. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) * Xét điểm A(-2;1):

Thay $x = 2; y = 1$ vào $y = 2x - 1$ ta được $1 = 2 \cdot (-2) - 1$ (vô lí). Vậy điểm A(-2;1) không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 1$

* Tương tự B(0;-1) thuộc và C(-3/2;-2) không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 1$

4B. Tương tự 4A

- a) Học sinh tự vẽ hình.
 b) Các điểm M, N không thuộc, điểm P thuộc đồ thị hàm số.

5A. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Từ hình vẽ nhận thấy ABCD là hình thang vuông đáy AD và BC, chiều cao CD. Từ đó áp dụng công thức tính diện tích hình thang tính được $S_{ABCD} = 8\text{cm}^2$.

5B. Tương tự 5A

- a) Học sinh tự vẽ hình.
 b) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB$ mà $CO = 4\text{m}$, $AB = 5\text{m}$ nên $S_{ABC} = 10\text{m}^2$.

6A. a) Cách 1. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, giả sử $x_1 < x_2$. Ta có:

$$f(x_1) = 3x_1 - \frac{1}{4} \text{ và } f(x_2) = 3x_2 - \frac{1}{4}.$$

Xét hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) = 3(x_1 - x_2) < 0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến.

Cách 2. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 3 > 0$

Vậy hàm số đã cho đồng biến.

b) Học sinh có thể làm một trong hai cách như câu a.

6B. Tương tự như 6A

- a) Hàm số nghịch biến. b) Hàm số đồng biến.

7. Tương tự 1A

- a) $f(2) = 9$ b) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2}$
 c) $f(\sqrt{6}) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ d) $f(3) = 5m - 1$

8. Từ $f(5 - 2\sqrt{3}) = f(2)$, tìm được $m = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

6.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

9. Tương tự 3A.

a) $x \neq \frac{5}{2}$ b) $-1 \leq x \neq \frac{3}{2}$ c) $0 \leq x \neq \frac{1}{4}$ d) $0 \leq x \leq 3, x \neq \frac{5}{2}$

10. a) Học sinh tự làm b) $M(0;-3)$ thuộc đồ thị.

11. a) Học sinh tự vẽ hình

b) Gọi ý: Kẻ $AH \perp BC$. Tính được $S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 8m^2$

12. Học sinh tự làm.

BÀI 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số bậc nhất

Là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$

2. Các tính chất của hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất xác định với mọi giá trị của x thuộc \mathbb{R}

- Hàm số bậc nhất: + Đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 0$

+ Nghịch biến trên \mathbb{R} khi $a < 0$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Nhận dạng hàm số bậc nhất

Phương pháp giải: Dựa vào định nghĩa hàm số bậc nhất

1A. Hãy xét xem trong các hàm số sau đây, đâu là hàm số bậc nhất? Hãy chỉ rõ các hệ số a và b trong trường hợp đó là hàm số bậc nhất.

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -3x + 3(x - 1)$

c) $y = \frac{2x - 3}{4}$ d) $y = (x - 1)(x - 3) - x^2$

1B. Hãy xét xem trong các hàm số sau đây, đâu là hàm số bậc nhất?

a) $y = 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = \frac{3}{x} - 2$ d) $y = \frac{x^2}{5} - 9$

2A. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a) $y = (2m^2 - 6)x - m - 5$ b) $y = (2 + m)x^2 - 8x + 7$

c) $y = x\sqrt{(m^2 + 3)(m + 1)} - 1$ d) $y = \frac{x\sqrt{m + 1} + 5}{m^2 + m - 2}$

2B. Với những giá trị nào của k , mỗi hàm số sau đây là hàm bậc nhất?

a) $y = (|k - 3| - 1)x + 5$ b) $y = (k^2 - 4)x^2 + (k - 2)x - 1$

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$c) y = \frac{\sqrt{3-k}}{k+2}x - \frac{3k}{7}$$

$$d) y = \frac{\sqrt{k}+2}{\sqrt{k}-2}x + 2017$$

3A. Chứng minh các hàm số sau là hàm số bậc nhất với mọi giá trị của tham số m.

$$a) y = (m^2 + m + 1)x - 9$$

$$b) y = (-m^2 + 4m - 7)x + m + 3$$

3B. Chứng minh các hàm số sau là hàm số bậc nhất với mọi giá trị của tham số m.

$$a) y = \sqrt{m^2 + 1}x - (1 - 2m)$$

$$b) y = (|m - 1| + 5)x - 2$$

Dạng 2: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất

Phương pháp giải: xét hàm số bậc nhất $y = ax + b$ với a, b là hằng số, $a \neq 0$

- Khi $a > 0$, Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

- Khi $a < 0$, Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R}

4A. Các hàm số bậc nhất sau đồng biến hay nghịch biến? vì sao?

$$a) y = 7 - 9x$$

$$b) y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{2}$$

$$c) y = 3(2x - 1) - 4x + 1$$

$$d) y = (2x - 1)^2 - 4x(x + 1)$$

4B. Các hàm số bậc nhất sau đồng biến hay nghịch biến? vì sao?

$$a) y = (2 - \sqrt{3})x - 1$$

$$b) y = \frac{1}{4}(x + 3) - \frac{1}{3}x$$

$$c) y = \frac{-9x + 1}{3} - 3$$

$$d) y = \sqrt{5}x + \frac{7}{4} - (2x - 1)$$

5A. Tìm m để các hàm số:

$$a) y = (2m - 5)x - 13 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$b) y = (4m^2 - 9)x + 2 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}$$

5B. Tìm m để các hàm số:

$$a) y = \frac{3m + 2}{2}x - 5 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}$$

$$b) y = (3 - m^2)x + 2m + 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

2.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

6A. Cho hàm số $y = f(x) = (-m^2 + m - 2)x + 9 - 3m$ với m là tham số.

a) Chứng minh hàm số đã cho luôn là hàm số bậc nhất và nghịch biến trên \mathbb{R} .

b) Hãy so sánh $f(-10)$ và $f(-3\sqrt{11})$

6B. Cho hàm số $y = f(x) = (k^2 + 2k + 3)x + k - 5$ với k là tham số

a) Chứng minh hàm số đã cho luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến trên \mathbb{R} .

b) Hãy so sánh $f(\sqrt{2} - 1)$ và $f(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Trong các hàm số sau đây, đâu là hàm số bậc nhất? Trong trường hợp là hàm số bậc nhất, hãy chỉ rõ các hệ số a, b

a) $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$

b) $y = (2x - 3)(x + 3) - 2x^2$

c) $y = \sqrt{x + 3} + 1$

d) $y = \frac{-x - 1}{4}$

8. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a) $y = (9m^2 + 6m + 1)x + 65$

b) $y = \frac{m - 3}{\sqrt{m + 4}}x + 1$

c) $y = mx^2 + x\sqrt{m - 1} + 2$

d) $y = \frac{\sqrt{m + 2}(x + 1)}{m^2 + 5m + 4}$

9. Chứng minh các hàm số sau là hàm số bậc nhất. Các hàm số đó đồng biến hay nghịch biến?

a) $y = 3(2 - x)$

b) $y = \frac{x + 7}{4} - \frac{1 - 3x}{6}$

c) $y = 2(x^2 + x + 1) - x(2x + \sqrt{3})$

d) $y = \frac{-x - 2\sqrt{2}}{5} + \sqrt{2} + \frac{x}{6}$

10. Cho hàm số $y = f(x) = (2m^2 - m + 1)x - 6m + 1$ với m là tham số.

a) Hàm số trên có là hàm số bậc nhất không? Nếu có hãy chỉ rõ hàm số đồng biến hay nghịch biến

3.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) So sánh $f(3)$ và $f(\sqrt{15}-1)$

11. Tìm m để các hàm số:

a) $y = m(m+3)x + 18$ nghịch biến trên \mathbb{R}

b) $y = \frac{m}{2m+3}x + 7$ đồng biến trên \mathbb{R}

12. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - m + 1)x + 2m - \frac{1}{2}$ với m là tham số

a) Chứng minh hàm số trên luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến

b) Không cần tính, hãy so sánh $f(-1 + \sqrt{2})$ và $f(-\sqrt{0,001})$.

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1A. a) Là hàm số bậc nhất với $a = \frac{1}{2}$ và $b = 0$

b) Thu gọn được $y = -3$, không là hàm số bậc nhất.

c) Biến đổi được $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ là hàm số bậc nhất với $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{4}$

d) Thu gọn được $y = -2x - 3$, là hàm số bậc nhất với $a = -2$ và $b = -3$.

1B. Tương tự 1A, Chỉ có $y = -x + 5$ là hàm số bậc nhất với $a = -1$ và $b = 5$

2A. a) Là hàm số bậc nhất $\Leftrightarrow a = 2m^2 - 6 \neq 0$. Giải được $m \neq \pm\sqrt{3}$

b) Là hàm số là bậc nhất khi hệ số của x^2 bị triệt tiêu. Giải ra được $m = -2$.

c) là hàm số bậc nhất $\Leftrightarrow \sqrt{(m^2 + 3)(m + 1)} \neq 0$. Giải được $m > -1$

d) Đưa hàm số về dạng $y = \frac{\sqrt{m+1}}{m^2 + m - 2}x + \frac{5}{m^2 + m - 2}$

Là hàm số bậc nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases}$. Giải được $-1 < m \neq 1$

2B. a) Điều kiện $|k-3|-1 \neq 0$. Giải ra được $k \neq 2$ và $k \neq 4$

b) Điều kiện $\begin{cases} k^2 - 4 = 0 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases}$. Giải ra được $k = -2$

c) Điều kiện $\begin{cases} 3 - k > 0 \\ k + 2 \neq 0 \end{cases}$. Giải ra được $-2 \neq k < 3$

d) Điều kiện $\begin{cases} k \geq 0 \\ \sqrt{k} - 2 \neq 0 \end{cases}$. Giải ra được $0 \leq k \neq 4$

3A. a) Biến đổi được $a = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$ với mọi m

b) Biến đổi được $a = -(m - 2)^2 - 3 \neq 0$ với mọi m .

3B. a) $a = \sqrt{m^2 + 1}$ xác định và khác 0 với mọi m .

b) $a = |m - 1| + 5 \neq 0$ với mọi m .

4A. a) Vì $a = -9 < 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R}

b) Vì $a = 4/7 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

c) Thu gọn được $y = 2x - 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

d) Thu gọn được $y = -8x + 1 \Rightarrow a = -8 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R}

4B. a) $a = 2 - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

b) $a = \frac{-1}{12} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R}

c) $a = -3 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R}

d) $a = \sqrt{5} - 2 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

5A. a) Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2m - 5 > 0$. Giải ra được $m > \frac{5}{2}$

b) Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow 4m^2 - 9 < 0$. Giải ra ta được $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$

5B. Tương tự 5A

a) $m < -\frac{2}{3}$ b) $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

6A. a) Ta có $a = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0$ với mọi m .

Vì vậy hàm số đã cho luôn là hàm số bậc nhất và nghịch biến trên \mathbb{R} .

b) Ta có $-10 = -\sqrt{100} < -\sqrt{99} = -3\sqrt{11}$. Mà hàm số đã cho là nghịch biến nên $f(-10) > f(-3\sqrt{11})$.

6B. Tương tự 6A

a) Vì $a = (k + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi k bất kì nên hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến trên \mathbb{R} .

b) Vì $\sqrt{2} - 1 > 0$, $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Mà hàm số đã cho là đồng biến nên $f(\sqrt{2} - 1) > f(\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

7. a) Không là hàm số bậc nhất.

b) Hàm số bậc nhất với $a = 3$ và $b = -9$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Không là hàm số bậc nhất.

d) Hàm số bậc nhất với $a = -\frac{1}{4}$ và $b = -\frac{1}{4}$

8. Tương tự 2A

a) $m \neq -\frac{1}{3}$ b) $-4 < m \neq 3$ c) $m \notin \emptyset$ d) $-2 \leq m \neq -1$

9. Tương tự 4A

a) Biến đổi được $y = -3x + 6$ là hàm số bậc nhất và nghịch biến

b) Biến đổi được $y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{12}$ là hàm số bậc nhất và đồng biến

c) Biến đổi được $y = (2 - \sqrt{3})x + 6$ là hàm số bậc nhất và đồng biến

d) Biến đổi được $y = -\frac{1}{30}x + \frac{3\sqrt{2}}{5}$ là hàm số bậc nhất và nghịch biến

10. Tương tự 6A

a) Vì $a = 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$ với mọi m nên hàm số đã cho là bậc nhất và đồng biến

b) Vì hàm số đồng biến và $3 = 4 - 1 = \sqrt{16} - 1 > \sqrt{15} - 1$

nên $f(3) > f(\sqrt{15} - 1)$.

11. a) $-3 < m < 0$ b) $m > 0$ hoặc $m < -3/2$

12. Tương tự bài 10 học sinh tự làm.

BÀI 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đồ thị hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ với $a \neq 0$ có đồ thị là một đường thẳng, kí hiệu là $d: y = ax + b$

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất

Xét đường thẳng $d: y = ax + b$ với $a \neq 0$

- Nếu $b = 0$ ta có $d: y = ax$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1; a)$.
- Nếu $b \neq 0$ thì d đi qua hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

3. Chú ý

- Trục hoành là đường thẳng : $y = 0$
- Trục tung là đường thẳng : $x = 0$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Phương pháp giải: Xét đường thẳng $d: y = ax + b$ với $a \neq 0$

- Nếu $b = 0$ ta có $d: y = ax$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1; a)$.
- Nếu $b \neq 0$ thì d đi qua hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

1A. Vẽ đồ thị các hàm số bậc nhất sau đây:

a) $y = -2x$ b) $y = 4x - 3$

1B. Vẽ các đồ thị hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Dạng 2: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$.

Để tìm tọa độ giao điểm của d và d' ta làm như sau:

*Cách 1: Dùng phương pháp đồ thị (thường sử dụng trong trường hợp d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ nguyên)

- Vẽ d và d' trên cùng một hệ trục tọa độ

1.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

- Xác định tọa độ giao điểm trên hình vẽ
- Chứng tỏ tọa độ giao điểm đó cùng thuộc d và d'

*Cách 2: Dùng phương pháp đại số:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm d và d' :
 $ax + b = a'x + b'$
- Từ phương trình hoành độ giao điểm, tìm được x thay vào phương trình của d (hoặc d') để tìm y
- Kết luận tọa độ giao điểm của d và d'

2A. Cho hai đường thẳng $d : y = 2x + 1$ và $d' : y = x + 3$. Bằng phương pháp đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của d và d'

2B. Tìm tọa độ giao điểm của các đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - 3$ và $d': y = -2x + 2$ bằng cách vẽ đồ thị.

3A. Cho các đường thẳng:

$d: y = x\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$ và $d': y = x\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - 2$ không vẽ đồ thị, tìm tọa độ giao điểm của d và d' .

3B. Không vẽ đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của các đường thẳng

$d: y = \frac{3}{4}x + 1$ và $d': y = -x + 2$

Dạng 3: Xét tính đồng quy của ba đường thẳng

Phương pháp giải:

- Ba đường thẳng đồng quy là ba đường thẳng phân biệt và cùng đi qua một điểm
- Để xét tính đồng quy của ba đường thẳng (phân biệt) cho trước, ta làm như sau:

1. Tìm tọa độ giao điểm của hai trong ba đường thẳng đã cho.

2. Kiểm tra nếu giao điểm vừa tìm được thuộc đường thẳng còn lại thì kết luận ba đường thẳng đó đồng quy.

4A. Cho ba đường thẳng $d_1: y = 4x - 3$; $d_2: y = 3x - 1$ và $d_3: y = x + 3$

Chứng minh d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

4B. Ba đường thẳng $d_1: 3x - y - 7 = 0$; $d_2: y = -2x + 3$ và $d_3: 3x - 2y - 7 = 0$ có đồng quy hay không?

5A. Cho ba đường thẳng: $d_1 : y = x - 4$; $d_2: y = 2x + 3$ và $d_3: y = mx + m + 1$

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy.

5B. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy:

$$d_1 : y = 3x - 8 ; d_2 : y = -2x - 3 \text{ và } d_3 : y = 3mx + 2m + 1$$

Dạng 4: Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến một đường thẳng không đi qua O

Phương pháp giải: Để tính khoảng cách từ O đến đường thẳng d (không đi qua O) ta làm như sau:

Bước 1: Tìm A,B lần lượt là giao điểm của d với Ox, Oy.

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, khi đó:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

6A*. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $y = 2x - 2$ và điểm I(3;-2). Hãy tính khoảng cách:

- a) Từ O đến d b) Từ I đến d

6B*. Cho đường thẳng $\Delta : y = -2x + 1$ và điểm M(-1;-3) trên hệ trục tọa độ Oxy. Hãy tính khoảng cách:

- a) Từ O đến Δ b) Từ M đến Δ

Dạng 5. Tìm điểm cố định của đường thẳng phụ thuộc tham số

Phương pháp giải: Cho đường thẳng d: $y = ax + b$ phụ thuộc tham số m

1. Điểm I($x_0; y_0$) được gọi là điểm cố định của d nếu I luôn thuộc d với mọi giá trị của m.

2. Để tìm điểm cố định của d, ta làm như sau:

- Gọi I($x_0; y_0$) là điểm cố định của d $\Rightarrow y_0 = ax_0 + b$ với mọi m.
- Biến đổi $y_0 = ax_0 + b$ về dạng $A(x_0; y_0)m + B(x_0; y_0) = 0$

Hoặc $A(x_0; y_0)m^2 + B(x_0; y_0)m + C(x_0; y_0) = 0$

- Ta có $A(x_0; y_0)m + B(x_0; y_0) = 0$ với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0; y_0) = 0 \\ B(x_0; y_0) = 0 \end{cases}$

- Tương tự $A(x_0; y_0)m^2 + B(x_0; y_0)m + C(x_0; y_0) = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0; y_0) = 0 \\ B(x_0; y_0) = 0 \\ C(x_0; y_0) = 0 \end{cases}$$

- Từ đó tìm được $x_0; y_0$ và kết luận.

7A. a) Chứng minh điểm $I\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng

$$\Delta: y = (1 - 2m)x + m - \frac{7}{2} \text{ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số } m.$$

b) Cho đường thẳng $d: y = (2m+1)x + m - 2$ với m là tham số.

Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m .

7B. a) Cho đường thẳng $d: y = (2m+1)x - 3m + 1$ với m là tham số.

Điểm $K\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ có là điểm d luôn đi qua với mọi m hay không

b) Chứng minh đường thẳng $\Delta: y = (m - 2)x + 3m + 1$ luôn đi qua điểm cố định với mọi giá trị của tham số m .

Dạng 6. Tìm tham số m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng cho trước là lớn nhất

Phương pháp giải : cho đường thẳng $d: y = ax + b$ phụ thuộc tham số m . Muốn tìm m để khoảng cách từ O đến d là lớn nhất, ta có thể làm theo một trong hai cách sau :

Cách 1. phương pháp hình học

- Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy ; H là hình chiếu vuông góc của O trên d .

- Ta có khoảng cách từ O đến d và OH và được tính bằng công thức

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

- Từ đó tìm điều kiện của m để OH đạt giá trị lớn nhất.

Cách 2: Phương pháp điểm cố định

- Tìm được I là điểm cố định mà d luôn đi qua.
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $d \Leftrightarrow OH \leq OI = \text{hằng số}$
- Ta có $OH_{\max} = OI \Leftrightarrow d$ là đường thẳng qua I và vuông góc với OI . Từ đó tìm được tham số m .

8A*. Cho đường thẳng $d: y = mx - 2m - 1$ với m là tham số. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d đạt giá trị

- a) Nhỏ nhất b) Lớn nhất.

8B* Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $\Delta: y = (m + 1)x + m + 2$ đạt giá trị

- a) Nhỏ nhất b) Lớn nhất.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Cho đường thẳng $d_1: y = 2x - 3$ và $d_2: y = -3x + 7$.

- a) Vẽ d_1, d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.
b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1, d_2 .

10. Cho hai đường thẳng $d: y = -3x + 1$ và $d': y = -x - 2$.

Tìm tọa độ giao điểm của d và d' .

11. các đường thẳng sau đây có đồng quy không?

- a) $d_1: y = 3x + 1, d_2: y = -x$ và $d_3: y = x + \frac{1}{2}$
b) $d_1: x + y - 1 = 0, d_2: y = 3x + 5$ và $d_3: x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{3} = 0$

12. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:

a) $d_1: y = \frac{4}{3}x + 1, d_2: y = x - 1$ và $d_3: y = mx + m + 3;$

b*) $d_1: y = x - m + 1, d_2: y = 2x$ và $d_3: y = 2(2m - 1)x + \frac{1}{4}$

13. Cho đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.
b) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d với lần lượt hai trục tọa độ Ox và Oy .
c) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến d .
d) Tính khoảng cách từ $I(-1; -2)$ đến d .
e) Tính diện tích tam giác OAB

14. Cho đường thẳng $d: y = (m + 2)x + m$ với m là tham số

- a) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m .

5. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Tìm m để d cắt Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB = $\frac{1}{2}$.

15*. Cho đường thẳng d: $(2m - 5)x + y - 1 + m = 0$. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d là:

a) Nhỏ nhất

b) Lớn nhất.

BÀI 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

1A. a) Gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -2x$

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ d đi qua O(0;0)

- Cho $x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ d đi qua A(1;-2).

Hs biểu diễn điểm A trên hệ trục tọa độ và vẽ d là đường thẳng đi qua hai điểm O, A.

b) Gọi d là đường thẳng biểu diễn đồ thị hàm số $y = 4x - 3$

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ d đi qua A(0;-3)

- Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow$ d đi qua B($\frac{3}{4}$;0)

Hs biểu diễn các điểm A, B trên hệ trục tọa độ và vẽ d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B.

B.

1B. Tương tự 1A học sinh tự làm

2A. Hs tự vẽ d : $y = 2x + 1$ và d' : $y = x + 3$ trên cùng hệ trục Oxy. Từ đồ thị dự đoán d cắt d' tại I(2;5). Thay tọa độ của I vào d và d' thấy thỏa mãn. Vậy I(2;5) là tọa độ giao điểm của d và d'

2B. Tương tự 2A. Tìm được (2;-2) là tọa độ giao điểm của d và d'.

3A. Chú ý d: $y = (2\sqrt{2} - 1)x$ và d': $y = (\sqrt{2} - 1)x - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và d'.

$$(2\sqrt{2} - 1)x = (\sqrt{2} - 1)x - 2. \text{ Giải phương trình này tìm được } x = -\sqrt{2}$$

Thay $x = -\sqrt{2}$ vào d (hoặc d') tìm được $y = -4 + \sqrt{2}$. Vậy d cắt d' tại điểm $(-\sqrt{2}; -4 + \sqrt{2})$.

3B. Tương tự 3A.

Tìm được $(\frac{4}{7}; \frac{10}{7})$ là tọa độ giao điểm của d và d'.

4A. a) Gọi $I = d_1 \cap d_2$. Tìm được I(2;5), Thay tọa độ của I vào d_3 thấy thỏa mãn.

Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy.

4B. Tương tự 4A.

Tìm được B(2;-1) là tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 . Thay tọa độ của B vào d_3 thấy không thỏa mãn. Vậy d_1, d_2 và d_3 không đồng quy.

5A. Tìm được B(-7;-11) là tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 . Thay tọa độ của B vào d_3 tìm được $m = 2$. Với $m = 2 \Rightarrow d_3: y = 2x + 3$ trùng với d_2 .

Vậy không có giá trị m nào để d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

5B. Tương tự 5A.

Tìm được A(1;-5) là giao điểm của d_1 và d_2 . Điều kiện cần để d_1, d_2 và d_3 đồng quy là $A \in d_3$

. Từ đó tìm được $m = -\frac{6}{5}$. Thử lại, với $m = -\frac{6}{5}$, ta có

$d_3: y = -\frac{18}{5}x - \frac{7}{5}$ không trùng với d_1 và d_2 .

Vậy để ba đường thẳng đồng quy thì $m = -\frac{6}{5}$.

6A. a) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox, Oy.

Tìm được A(1;0) và B(0;-2) \Rightarrow OA = 1, OB = 2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d \Rightarrow OH là khoảng cách từ O đến d.

Sử dụng công thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ tính được OH = $\sqrt{5}$

b) Qua I kẻ d' lần lượt vuông góc với Ox và Oy, d' cắt d lần lượt tại điểm C(3;4) và B(0;-2). Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên d \Rightarrow IK là khoảng cách từ I đến d. Sử dụng công thức

$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IB^2}$ tính được IK = $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

6B. Tương tự 6A.

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

7A. a) Thay $x = \frac{1}{2}, y = -3$ vào d thấy luôn thỏa mãn với mọi m ta được ĐPCM.

b) Gọi I($x_0; y_0$) là điểm cố định của d

$$\Rightarrow y_0 = (2m + 1)x_0 + m - 2, \forall m$$

$$\Rightarrow (2x_0 + 1)m + (x_0 - y_0 - 2) = 0, \forall m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ là điểm cố định của d.

7B. Tương tự 7A.

a) Thay tọa độ của K vào d thấy không thỏa mãn. Từ đó kết luận K không là điểm cố định của d.

b) Tìm được (-3;7) là điểm cố định của d.

8A. a) Khoảng cách từ O đến d có nhỏ nhất bằng 0 \Leftrightarrow O \in d.

Từ đó tìm được m = 3.

b) Cách 1: Xét hai trường hợp:

• Trường hợp 1. Nếu m = 0 \Rightarrow d: y = -1 \Rightarrow khoảng cách từ O đến d bằng 1.

• Trường hợp 2. Nếu m \neq 0 \Rightarrow d cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A $\left(\frac{2m+1}{m}; 0\right)$ và B(0;-2m-1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d. Từ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$, tìm được

$$OH^2 = \frac{(2m+1)^2}{m^2+1}. \text{ Chú ý: Ta có } OH^2 - 5 = -\frac{(m-2)^2}{m^2+1} \leq 0 \Rightarrow OH \leq \sqrt{5}$$

Với mọi $m \neq 0$.

Kết hợp các trường hợp 1 và 2 ta được $OH_{MAX} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$.

Cách 2: Gọi I là điểm cố định của d. Ta tìm được $I(2;-1)$. Với mỗi m gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d $\Rightarrow OH \leq OI = \sqrt{5}, \forall m$. Từ đó $OH_{MAX} = \sqrt{5} \Leftrightarrow d \perp OI$. Tìm được $m = 2$.

8B. tương tự 8A.

a) Khoảng cách từ O đến d có giá trị nhỏ nhất bằng 0, đạt được khi O thuộc d. từ đó tìm được $m = -2$

b) Cách 1. Xét 2 trường hợp:

- Trường hợp 1: Với $m = -1 \Rightarrow \Delta: y = 1 \Rightarrow d(O; \Delta) = 1$
- Trường hợp 2: Với $m \neq -1 \Rightarrow \Delta$ cắt Ox, Oy lần lượt tại:

$$A\left(-\frac{m+2}{m+1}; 0\right) \text{ và } B(0; m+2)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $\Delta \Rightarrow d(O; \Delta) = OH$.

$$\text{Từ } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}, \text{ tìm được } OH^2 = \frac{(m+2)^2}{m^2+2m+2}$$

HS tự chứng minh $OH^2 \leq 2, \forall m \neq -1$.

Kết hợp các trường hợp 1 và 2 ta được $OH_{MAX} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0$.

Cách 2: Tìm được $I(-1;1)$ là điểm cố định của Δ .

Lập luận tương tự cách 2 của 8A. Tìm được $m = 0$.

9. a) HS tự vẽ hình

b) Từ hình vẽ, dự đoán $d_1 \cap d_2 = I(2;1)$ và chứng tỏ dự đoán đúng bằng cách thay tọa độ của I vào d_1, d_2 để kiểm tra.

10. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và d' để tìm được hoành độ $x = -3/2$. Thay $x = -3/2$ vào d hoặc d' tìm được $y = -7/2$. Vậy d và d' giao nhau tại $(-3/2; -7/2)$.

11. a) Đồng quy tại điểm $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

b) Không đồng quy vì $d_2 \equiv d_3$.

12. a) Tìm được $d_1 \cap d_2 = I(-6; -7)$. Thay tọa độ của I vào d_3 tìm được $m = 2$.

b) Tìm được $d_1 \cap d_2 = I(1-m; 2-2m)$. Thay tọa độ của I vào d_3 tìm được:

$$16m^2 - 32m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \text{ hoặc } m = \frac{4}{5}.$$

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

- Với $m = \frac{3}{4} \Rightarrow d_1 \equiv d_3 : y = x + \frac{1}{4} \Rightarrow$ loại
- Với $m = \frac{5}{4} \Rightarrow d_1 : y = x - \frac{1}{4}; d_2 : y = 2x$ và $d_3 : y = 3x + \frac{1}{4}$ đôi một phân biệt nên thỏa mãn.

Vậy điều kiện để ba đường thẳng đồng quy là $m = 5/4$.

13. a) HS tự vẽ hình.

b) Tìm được $A\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và $B(0; 3)$.

c) Tìm được $OA = \frac{3}{4}$. Và $OB = 3$. Từ đó tính được khoảng cách từ O đến d là

$$OH = \frac{3\sqrt{17}}{17}.$$

d) Qua I, kẻ các đường thẳng lần lượt song song với Ox và Oy, cắt d lần lượt tại

$M\left(\frac{5}{4}; -2\right)$ và $N(-1; 7)$. Tính được $IM = 9/4$ và $IN = 9$ nên khoảng cách từ I đến d bằng $\frac{9\sqrt{17}}{17}$.

e) Tìm được $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{9}{8}$

14. a) Tìm được $I(-1; -2)$ là điểm cố định của d.

b) Giao điểm của d với hai trục Ox, Oy lần lượt là: $A\left(-\frac{m}{m+2}; 0\right)$ và $B(0; m)$. Tính được

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{|m+2|}$. Từ $S = \frac{1}{2}$ tìm được $m = 2$ và $m = -1$.

15. Tương tự 8A

a) $m = 1$ b) $OH_{MAX} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$

BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $d': y = a'x + b'$ với $a' \neq 0$ khi đó ta có :

1. d và d' song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

2. d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

3. d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$.

Đặc biệt d và d' vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.a' = -1$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Cho hai đường thẳng: $d: y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $d': y = a'x + b'$ với $a' \neq 0$ khi đó ta có:

1. d và d' song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

2. d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

3. d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$.

Đặc biệt d và d' vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.a' = -1$

1A. Hãy nhận xét về vị trí tương đối hai đường thẳng d và d' trong các trường hợp sau:

a) $d: y = 2x - 3$ và $d': y = 2x + 5$

b) $d: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$ và $d': y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

c) $d: y = -2x + 1$ và $d': y = \frac{1}{2}x - 2$

d) $d: 3y = -x + 1$ và $d': y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

1B. Cho các đường thẳng :

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$d_1 : y = 3x - 1, d_2 : y = -x, d_3 : x + y + 1 = 0,$$

$$d_4 : y = x + \frac{4}{5}, d_5 : y = 3x + 7, \text{ và } d_6 : y = \frac{x}{3} - 3.$$

Trong các đường thẳng trên hãy chỉ ra các cặp đường thẳng

- a) Song song b) Vuông góc.

2A. Cho đường thẳng $\Delta : y = (m^2 - 2)x + m - 1$ với m là tham số. Tìm m để:

a) Δ song song với đường thẳng $d_1 : y = 2x - 3$.

b) Δ trùng với đường thẳng $d_2 : y = -x - 2$.

c) Δ cắt đường thẳng $d_3 : y = 3x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = -1$

d) Δ vuông góc với đường thẳng $d_4 : y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{2}$

2B. Cho các đường thẳng:

$$d : y = (m - 3)x + 4m - 1 \qquad d_1 : y = 5mx - 2 + 3m$$

$$d_2 : y = 2m^2x + 2m - 4 \qquad d_3 : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$d_4 : y = \frac{1}{2}(3m - 4)x + 5$$

Tìm m để:

a) $d \parallel d_1$ b) $d \equiv d_2$

c) d cắt d_3 tại K có $y_K = 1/2$ d) $d \perp d_4$

Dạng 2: Xác định phương trình đường thẳng.

Phương pháp giải: Để xác định phương trình đường thẳng, ta thường làm như sau:

Bước 1: Gọi $d : y = ax + b$ là phương trình đường thẳng cần tìm (a, b là hằng số).

Bước 2: Từ giả thiết của đề bài, tìm được a, b từ đó đi đến kết luận.

3A. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) d đi qua $M(-2;5)$ và vuông góc với $d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) d song song đường thẳng $d_1: y - 3x + 4$ và đi qua giao của hai đường thẳng $d_2: y = 2x - 3$ và $d_3 : y = 3x - \frac{7}{2}$

3B. Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Tìm a và b biết:

a) d đi qua điểm A nằm trên Ox có hoành độ bằng -1 và song song với đường thẳng $d_1: x + y + 2 = 0$

b) d vuông góc với đường thẳng $d_2: y = -\frac{1}{3}x + 2017$ và đi qua giao điểm của $d_3: y = x - 2$ với trục tung.

4A. cho đường thẳng $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Tìm a và b biết:

a) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .

b) d đi qua hai điểm A, B với $A(1;-3)$, và $B(2;1)$.

4B. Tìm các số a và b để đường thẳng $d: y = ax + b$

a) Cắt $d_1: y = 3x - 6$ tại một điểm nằm trên trục Ox , và cắt $d_2: y = 2x - 1$ tại một điểm nằm trên trục Oy .

b) Đi qua hai điểm I, K với $I(1;-2)$, và $K(4;2)$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho các đường thẳng

$$d_1 : x + y - 1 = 0 ; \quad d_2 : y = -2x + 1$$

$$d_3 : y = 3 - 2x ; \quad d_4 : 2y = x - 4$$

a) Chỉ ra các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng vuông góc với nhau

b) Hỏi có bao nhiêu cặp đường thẳng cắt nhau ?

6. Cho các đường thẳng :

$$d_1 : y = (2m + 1) \text{ và } d_2 : y = (m - 1)x + m$$

Tìm m để :

- a) d_1 cắt d_2 b) d_1 song song d_2
 c) d_1 trùng d_2 d) d_1 vuông góc d_2

7. Cho đường thẳng $d: y = (m^2 + 2m)x + m + 1$ với m là tham số. Tìm m để:

- a) d song song với đường thẳng $d_1: y = (m + 6)x - 2$
 b) d vuông góc với đường thẳng $d_2: y = \frac{-1}{3}x - 3$
 c) d trùng với đường thẳng $d_3: y = -m^2x + 1$
 d) d đi qua giao điểm của các đường thẳng $d_4: y = 2x - 3$ và $d_5: y = -3x - 8$

8. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua điểm $M(1;-2)$ và song song với đường thẳng $d_1: x + 2y = 1$
 b) d cắt đường thẳng $d_2: x - y + 1 = 0$ tại điểm có tung độ bằng 2 và vuông góc với đường thẳng $d_3: y = 3 - x$
 c) d đi qua gốc tọa độ và giao điểm của hai đường thẳng $d_4: y = 4x - 3$ và $d_5: y = -x + 3$
 d) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 và đi qua điểm $M(2;3)$.

9. Cho các đường thẳng:

$$d_1: y = 2mx - (m+5) \text{ và } d_2: y = (1 - 3n)x + n$$

- a) Tìm điểm cố định mà d_1 luôn đi qua với mọi m .
 b) Gọi I là điểm cố định mà d_1 luôn đi qua. Tìm n để d_2 đi qua I .
 c) Tìm m để d_2 đi qua điểm cố định của d_1 .
 d) Tìm m và n để d_1 và d_2 trùng nhau.

10. Tìm tập hợp điểm I và K nằm trên mặt phẳng tọa độ sau đây:

$$\text{a) } I\left(\frac{m+1}{2}; \frac{2m-1}{3}\right) \qquad \text{b) } K\left(\frac{2-3m}{5}; \frac{m+7}{3}\right)$$

BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

1A. a) Ta có $d \parallel d'$ vì $a = a'$ và $b \neq b'$

4. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Ta có d cắt d' vì $a \neq a'$

c) Ta có $d \perp d'$ vì $a \cdot a' = -1$

d) Đưa d về dạng $d: y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow d \equiv d'$ vì $a = a', b = b'$.

1B. Tương tự 1A.

a) Các cặp đường thẳng song song: $d_1 // d_5$ và $d_2 // d_3$.

b) Các cặp đường thẳng vuông góc: $d_2 \perp d_4$ và $d_3 \perp d_4$.

2A. a) Ta có $\Delta // d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 2 \\ m - 1 \neq -3 \end{cases}$. Giải ra được $m = 2$.

b) Ta có $\Delta \equiv d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ m - 1 = -2 \end{cases}$. Giải ra được $m = -1$.

c) Thay $x = -1$ và $y = -5$ vào Δ tìm được $m = -2$, hoặc $m = 3$.

Thử lại thấy cả $m = -2$ và $m = 3$ đều thỏa mãn.

d) Ta có $\Delta \perp d_4 \Leftrightarrow (m^2 - 2) \frac{4}{5} = -1$. Giải ra được $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2B. Tương tự 2A.

a) $m = -3/4$

b) $m = -3/2$

c) $m = -9/4$

d) $m = 2$ hoặc $m = 7/3$

3A. a) Gọi $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Từ $d \perp d_1$ tìm được $a = 2$. Vì d đi qua M nên $-2a + b =$

5. Từ đó tìm được $d: y = 2x + 9$.

b) Gọi $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Từ $d // d_1$ nên được $a = -3$ và $b \neq 4$. Tìm được

$d_2 \cap d_3 = I\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. Vì d đi qua I nên $\frac{1}{2}a + b = -2$. Từ đó tìm được $d: y = -3x - \frac{1}{2}$.

3B. Tương tự 3A.

a) $d: y = -x - 1$

b) $d: y = 3x - 2$

4A. a) Gọi $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Vì d cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 5 nên đi qua điểm $(0;5)$. Từ đó tìm được $b = 5$.

Tương tự d cắt Ox tại điểm có hoành độ -2 nên d đi qua điểm $(-2;0)$. Từ đó tìm được $a = 5/2$.

Kết luận $d: y = \frac{5}{2}x + 5$.

b) Gọi $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Thay tọa độ của A và B vào d ta được

$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$. Từ đó tìm được $d: y = 4x - 7$.

4B. Tương tự 4A

a) $d: y = \frac{1}{2}x - 1$

b) $d: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

5. a) Cặp đường thẳng song song là d_2 và d_3 . Các cặp đường thẳng vuông góc là d_2 và d_4 , d_3 và d_4 .

b) Có 5 cặp đường thẳng cắt nhau.

6. a) $m \neq -2$ b) $m = -2$ c) Không tồn tại m d) $m =$ hoặc $m = 1/27$. 7. a) Tìm được $m = 2$ (chú ý loại $m = -3$ vì khi đó d trùng d_1).

b) Tìm được $m = -3$ và $m = 1$.

c) Tìm được $m = 0$ (chú ý loại $m = -1$ vì khi đó $d \parallel d_3$).

d) Ta có d_4 cắt d_5 tại $I(-1;-5)$. Thay tọa độ của I vào d tìm được $m = -3$ hoặc $m = 2$.

8. a) Đưa d_1 về dạng $y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$. Kết quả $y = \frac{-1}{2}x - \frac{3}{2}$

b) Đưa về bài toán d đi qua $A(1;2)$ và vuông góc với d_3 . Kết quả $d: y = x+1$.

c) Đưa về bài toán d đi qua $O(0;0)$ và $B\left(\frac{6}{5}; \frac{9}{5}\right)$. Kết quả $d: y = \frac{3}{2}x$.

d) Đưa về dạng d đi qua $N(5;0)$ và $M(2;3)$. Kết quả $d: y = -x + 5$.

9. a) d_1 luôn đi qua điểm cố định $I\left(\frac{1}{2}; -5\right)$.

b) Thay tọa độ của I vào d_2 tìm được $n = 11$.

c) d_2 luôn đi qua điểm cố định $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Thay tọa độ của K vào d_1 tìm được $m = -16$.

d) Tìm được $m = -16, n = 11$.

10. Giả sử $I(x_1; y_1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m+1}{2} \\ y_1 = \frac{2m-1}{3} \end{cases}$. Khi m từ hệ điều kiện trên ta được $4x_1 - 3y_1 - 3 = 0$. Từ đó

kết luận I nằm trên đường thẳng $y = \frac{4}{3}x - 1$.

b) Tương tự, K nằm trên đường thẳng $y = -\frac{5}{9}x + \frac{23}{9}$.

BÀI 5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó:

- Số thực a là hệ số góc của d .
- Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và d . Ta có:
 - + Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $a > 0$ và $a = \tan \alpha$.
 - + Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $a < 0$ và $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$
- Khi $a > 0$ thì góc tạo bởi Ox và d là góc nhọn. Hệ số a càng lớn thì góc α càng lớn nhưng luôn nhỏ hơn 90° .
- Khi $a < 0$ thì góc tạo bởi Ox và d là góc tù. Hệ số a càng lớn thì góc α càng lớn nhưng luôn nhỏ hơn 180° .

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm hệ số góc của đường thẳng

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức liên quan đến vị trí tương đối giữa hai đường thẳng và hệ số góc của đường thẳng.

1A. Cho đường thẳng $d: y = ax + b$. Xác định hệ số góc của d biết:

a) d song song với đường thẳng $d_1: 2x - y - 3 = 0$

b) d tạo với tia Ox một góc $\alpha = 30^\circ$

1B. Cho đường thẳng $d: y = ax + b$. Xác định hệ số góc của d biết:

a) d vuông góc với đường thẳng $d_1: y = -2x - 3$

b) d tạo với tia Ox một góc $\alpha = 135^\circ$

2A. Cho đường thẳng $d: y = (m - 5)x - m$. Tìm hệ số góc của d biết:

a) d cắt trục tung tại điểm có tung độ -3 .

b) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ 2 .

2B. Tìm hệ số góc của đường thẳng d biết:

a) d đi qua điểm $M(-2;1)$ và $N(0;4)$.

b) d đi qua điểm $P(-1;-3)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng

$d_1: y = x - 7$ và $d_2: y = -4x + 3$.

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

3A. Cho đường thẳng $d : y = (m^2 - 4m + 1)x + 2m - 1$ với m là tham số. Hãy tìm m để d có hệ số góc nhỏ nhất

3B. Tìm m để đường thẳng $d : y = (-4m^2 + 4m + 3)x + 4$ có hệ số góc lớn nhất.

Dạng 2: Xác định góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox.

Phương pháp giải: Để xác định góc giữa đường thẳng d và tia Ox, ta làm như sau:

Cách 1. Vẽ d trên mặt phẳng tọa độ và sử dụng tỉ số lượng giác của tam giác vuông một cách phù hợp.

Cách 2. Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và d . Ta có:

+ Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $a > 0$ và $a = \tan \alpha$.

+ Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $a < 0$ và $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$

4A. Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d biết:

a) d có phương trình là $y = -x + 2$

b) d cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 1 và cắt Ox tại điểm cố hoành độ bằng $-\sqrt{3}$

4B. Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d biết:

a) d có phương trình là $y = 2x + 1$

b) d đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(\sqrt{3}; 0)$

5A. Cho các đường thẳng $d_1: y = x + 1$ và $d_2: y = x\sqrt{3} - 3$

a) Vẽ d_1 , và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_1, d_2 với trục hoành và C là giao điểm của d_1 và d_2 . Tính số đo các góc của tam giác ABC.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

5B. a) Vẽ đường thẳng $d_1 : y = x + 2$ và $d_2 : y = -\frac{1}{2}x - 1$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ và chứng minh chúng cắt nhau tại điểm A nằm trên trục hoành.

b) Gọi giao điểm của d_1 , và d_2 với trục tung theo thứ tự là B và C.

Tính các góc của tam giác ABC.

c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

Dạng 3: Xác định đường thẳng biết hệ số góc

Phương pháp giải: Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $d: y = ax + b$. Ta cần xác định a và b dựa vào các kiến thức về góc và hệ số góc.

6A. Xác định đường thẳng d biết rằng:

a) d đi qua điểm $A(2;-3)$ và có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$.

b) d đi qua $B(2;1)$ và tạo với tia Ox một góc 60° .

c) d đi qua $C(-4;0)$ và tạo với tia Ox một góc 150° .

6B. Xác định đường thẳng d biết rằng :

a) d đi qua điểm $M\left(\frac{4}{5}; -1\right)$ và có hệ số góc bằng -3 .

b) d đi qua $N(-2;-3)$ và tạo với tia Ox một góc 120° .

c) d đi qua $P(0;-2)$ và tạo với tia Ox một góc 30° .

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ.

7. Cho đường thẳng $d: y = ax + 3$. Tìm hệ số góc của d biết rằng:

a) d song song với đường thẳng $d': 3x - y - 1 = 0$.

b) d vuông góc với đường thẳng $d' : 4x + 2y + 3\sqrt{2} = 0$

c) d đi qua điểm $A(-1;-2)$.

8. Tìm hệ số góc của d biết rằng:

a) d đi qua hai điểm $A(\sqrt{2};1)$ và $B(0;1+3\sqrt{2})$

b) d đi qua $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ và đồng quy với hai đường thẳng $d_1 : y = \frac{2}{5}x + 1$ và $d_2: y = -x$

+ 2

c) d đi qua điểm $D(0;-1)$ và điểm cố định của đường thẳng

$$d_3 : y = \frac{m}{m-1}x - \frac{3m-2}{m-1} \text{ với } m \neq 1$$

9. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 4$ và $d_2: y = -x + 4$

a) Xác định các góc giữa d_1, d_2 với tia Ox (làm tròn đến độ).

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2

c) Gọi giao điểm của d_1, d_2 với trục hoành theo thứ tự là A, B và giao điểm của hai đường thẳng là C. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là centimet).

10. Xác định đường thẳng d biết rằng:

a) d đi qua điểm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

b) d đi qua điểm $J(2\sqrt{3}; 1)$ và tạo với tia Ox một góc 150° .

c) d đi qua $K(4; \sqrt{3})$ và tạo với trục Ox một góc 60° .

BÀI 5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

1A. a) Chuyển d_1 về dạng $y = 2x - 3$.

Ta có $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq -3 \end{cases}$. Vậy hệ số góc của d là $a = 2$.

b) Vì $a = 30^\circ < 90^\circ \Rightarrow a = \tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy hệ số góc của d là $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1B. a) Từ $d \perp d_1$ tìm được $a = \frac{1}{2}$.

b) Vì $a > 90^\circ \Rightarrow a = -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -1$.

2A. a) Từ d cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -3 tìm được $m = 3$. Từ đó tìm được hệ số góc của d là $a = -2$.

b) Từ d cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2 tìm được $m = 10$. Từ đó tìm được hệ số góc của d là $a = 5$.

2B. a) Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$. Vì d đi qua M, N nên tìm được $a = 3/2$, $b = 4$. Vậy hệ số góc của d là $3/2$.

b) Tìm được d_1 cắt d_2 tại $M(2; -5)$. Đưa về bài toán d đi qua $P(-1; -3)$ và $M(2; -5)$. Giải ra tìm được hệ số góc của d là $-2/3$.

3A. Ta có: $a = m^2 - 4m + 1 = (m - 2)^2 - 5 \Rightarrow a_{\min} = -5 \Leftrightarrow m = 2$

3B. Ta có: $a = -4m^2 + 4m + 3 = -(2m - 1)^2 + 4 \Rightarrow a_{\min} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

4A. a) Cách 1: Vẽ d trên hệ trục tọa độ (HS tự vẽ hình).

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Oy , Ox . Ta có góc tạo bởi d và Ox là:

$$\alpha = 180^\circ - \widehat{ABO} = 135^\circ \left(\text{vi } \widehat{ABO} = 45^\circ \right).$$

Cách 2:

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$a = -1 < 0 \Rightarrow a = -\tan(180^\circ - \alpha) \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

b) Tương tự tìm được $\alpha = 30^\circ$

4B. Tương tự 4A.

a) Ta có $a = \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^\circ 26'$

b) Chú ý: $\alpha = 180^\circ - \widehat{AOB}$ và $\tan \widehat{AOB} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy góc $\alpha = 150^\circ$.

5A. a) HS tự vẽ hình.

b) Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{CAx}$ mà $\tan \widehat{CAx} = a_1 = 1 \Rightarrow \widehat{CAB} = 45^\circ$

Ta có $\tan \widehat{CBx} = a_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CBA} = 120^\circ$. Từ đó $\widehat{ACB} = 15^\circ$

c) Tính được $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3) = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{2}$ (ĐVDT)

5B. a) HS tự vẽ hình. Chứng minh được $d_1 \cap d_2 = A(-2; 0)$

b) Tính được $\widehat{BAC} = 75^\circ, \widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 60^\circ$.

c) Chu vi $= 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (ĐVDT) và $S_{\Delta ABC} = 3$ (ĐVDT).

6A. Gọi phương trình đường thẳng d: $y = ax + b$

a) Vì d có hệ số góc là $1/4$ nên $a = 1/4 \Rightarrow d: y = \frac{1}{4}x + b$. Điểm $A(2; -3) \in d$ nên $b = -\frac{7}{4}$

b) Vì d tạo với trục Ox một góc bằng 60° nên $a = \sqrt{3}$. Vì $B(2; 1) \in d$ nên $b = 1 - 2\sqrt{3}$

c) Tương tự câu b) chú ý $a = -\tan(180^\circ - 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tìm được d: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

6B. Tương tự 6A

a) $d: y = -3x + \frac{7}{5}$ b) $d: y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$

c) $d: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

7. a) Chú ý chuyển d' về dạng $y = ax + b$. Kết quả $a = 3$.

b) Chú ý chuyển d' về dạng $y = ax + b$. Kết quả $a = 1/2$.

c) Kết quả $a = 5$.

8. Tương tự 2.

a) $a = -3$ b) $a = 43/6$

c) Chú ý điểm $M(-1; -2)$ là điểm cố định thuộc d'. Đưa về bài toán d đi qua hai điểm $M(-1; -2)$ và $D(0; -1)$. Giải tìm được hệ số góc của d bằng 1.

9. a) Tương tự 4. Kết quả $\alpha_1 = 27^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$

b) Tương tự 5. Kết quả góc giữa d_1 và d_2 bằng 108° .

c) Tìm được $A(-8; 0), B(0; 0), C(0; 4)$.

5. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Tính được $OA = 8\text{cm}$, $OB = 4\text{cm}$, $OC = 4\text{cm}$.

Từ đó $AB = 12\text{cm}$, $AC = 4\sqrt{5}\text{ cm}$, $BC = 4\sqrt{2}\text{ cm}$. Chu vi $P = 12 + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$.

Diện tích $S = 24\text{cm}^2$.

10. Tương tự 6.

a) d : $y = \frac{1}{3}x + 1$

b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$

c) d : $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần tóm tắt lý thuyết từ bài 1 đến bài 5.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Tìm tất cả các giá trị của x để hàm số sau xác định:

$$a) y = \frac{3x+3}{\sqrt{x-2}}$$

$$b) y = \sqrt{3x+2} - \frac{3-2x}{x}$$

$$c) y = \frac{3x - \sqrt{|x|}}{2\sqrt{|x|} - 1}$$

$$d) y = \frac{\frac{3}{x+2} + 1}{\sqrt{-x+4}}$$

1B. Tìm x để các hàm số sau có nghĩa:

$$a) y = 3x + 7$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x+2}}{2x-1}$$

$$c) y = \frac{x^2 - \sqrt{3-4x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$d) y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$$

2A. Tìm m để các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất:

$$a) y = (m^2 + 6)x + 1$$

$$b) y = (4m^2 - 3)x + \frac{7}{9}$$

$$c) y = x\sqrt{(2m^2 + 1)(3m - 1)}$$

$$d) y = \frac{x\sqrt{1-2m} + 1}{3m^2 + 5m - 8}$$

2B. Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất.

$$a) y = (m + 7)x^2 - m - x$$

$$b) y = 4x^2 - (m + 3)x + 5$$

$$c) y = \frac{2m-7}{m+5}x - \frac{m}{4} + 1$$

$$d) y = \frac{x-2}{m^2+2m+4}$$

3A. Cho hàm số $y = f(x) = (k^2 + 3k + 3)x + 4k$ với k là tham số

a) Chứng minh $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến với mọi k .

b) Không cần tính, hãy so sánh $f(-3\sqrt{11})$ và $f(-10)$.

1.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

3B. Cho hàm số $y = f(x) = (-2 + 4m - 5m^2)x + \frac{3}{2}$ với m là tham số.

a) Chứng minh hàm số luôn là hàm số bậc nhất và nghịch biến với mọi m

b) Không cần tính, hãy so sánh $f(-3)$ và $f(1 - \sqrt{17})$

4A. Cho hai hàm số $y = -x + 3$ và $y = 3x - 1$ có đồ thị lần lượt là hai đường thẳng d_1 và d_2 .

a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

4B. Cho hai đường thẳng $d_1: y = 7 - 2x$ và $d_2: y = x + 1$

a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

5A. Xác định phương trình đường thẳng d trong các trường hợp:

a) d đi qua điểm $A(4; -5)$ và có hệ số góc bằng -1 .

b) d đi qua điểm $B(-2; 0)$ và cắt đường thẳng $d_1: y = 4x - 1$ tại một điểm nằm trên trục tung.

c) d vuông góc với đường thẳng $d_2: y = -\frac{x}{2} - 1$ đi qua giao điểm đường thẳng $d_3: y = x - 2$ và $d_4: y = 3x + 4$.

5B. Các định đường thẳng d biết:

a) d đi qua điểm $M\left(\frac{4}{5}; -1\right)$ và có hệ số góc bằng -3

b) d đi qua điểm $N(-2; -3)$ và tạo với tia Ox một góc 120° .

6A. Cho đường thẳng $d: y = (3m - 2)x + m - 2$ với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của m để d cùng với hai đường thẳng $d_1: y = x + \frac{2}{3}$

và $d_2: y = x$ đồng quy.

b) Tìm m để d song song với đường thẳng $d_3: y = 2x + 1$

c) Tìm điểm cố định mà d đi qua với mọi m .

d*) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến d là lớn nhất.

e*) Tìm m để d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$

6B. Cho đường thẳng d: $y = (m + 1)x - 2m - 5$ với m là tham số.

a) Tìm m để d cùng với các đường thẳng d₁: $y = -2x$ và d₂: $y = 9 - 5x$ đồng quy.

b) Tìm m để d vuông góc với các đường thẳng d₃: $y = \frac{1}{4}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

d*) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến d lớn nhất.

e*) Tìm m để d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{3}{2}$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định:

$$\text{a) } y = \frac{2x + 2}{x^2 + 1} \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{x - 7}{2}} \quad \text{c) } y = \frac{\frac{3}{x+1} - 2x}{4x^2 + 3}$$

8. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = (7m + 1)x - m & \text{b) } y = 4mx^2 - 2(m + 1)x \\ \text{c) } y = 1 - \frac{m - 7}{5m + 1}x & \text{d) } y = \frac{(m - 1)(2x + 3)}{m^2 + 4} \end{array}$$

9. Cho hàm số $y = f(x) = (m^4 + m^2 + 2)x - 3$ với m là tham số.

a) Chứng minh hàm số trên luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến.

b) Không cần tính hãy so sánh $f\left(\frac{2}{3}\right)$ và $f\left(\frac{3}{4}\right)$

10. Viết phương trình đường thẳng d biết rằng:

a) d cắt đường thẳng d₁: $y = -2x - 3$ tại một điểm thuộc trục hoành và cắt đường thẳng d₂: $y = x - 4$ tại một điểm thuộc trục tung.

b) d đi qua điểm $A\left(\frac{1}{4}; -2\right)$ và song song với đường thẳng $d_3: 2x + y = 0$.

c) d đi qua điểm $B\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ và tạo với tia Ox một góc 30° .

11. Cho đường thẳng $d: y = (m - 2)x + 2 - m$ với m là tham số.

a) Tìm m để d và các đường thẳng $d_1: y = x + 2$ và $d_2: y = 4 - 3x$ đồng quy.

b) Tìm m để d vuông góc với đường thẳng $d_3: x - 3y - 1 = 0$

c) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m .

d) Tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến d .

12. Cho ba đường thẳng $d_1: y = 3x$; $d_2: y = \frac{1}{3}x$; $d_3: y = -x + 4$

a) Vẽ d_1, d_2, d_3 trên cùng mặt phẳng tọa độ.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_3 với d_1, d_2 . Tìm tọa độ của A và B .

c) Chứng minh tam giác OAB cân.

d) Tính các góc trong tam giác OAB (làm tròn đến độ).

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1A. a) $0 \leq x \neq 4$ b) $-\frac{2}{3} \leq x \neq 0$ c) $x \neq \pm 4$ d) $-2 \neq x < 4$

1B. a) Với mọi giá trị x b) $-2 \leq x \neq \frac{1}{2}$
c) Không có giá trị x d) $1 \leq x \neq 2$

2A. a) Với mọi x bất kì b) $m \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $m > \frac{1}{3}$ d) $\frac{-8}{3} \neq m < \frac{1}{2}$

2B. a) $m \neq -7$ b) Không có giá trị m
c) $m \neq \frac{7}{2}; m \neq -5$ d) $\forall m \in \mathbb{R}$

3A. a) Vì $a = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi k nên hàm số luôn là bậc nhất và đồng biến.

b) Vì $-3\sqrt{11} = -\sqrt{99} > -\sqrt{100} = -10$

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

và $y = f(x)$ là hàm số đồng biến nên $f(-3\sqrt{11}) > f(-10)$

3B. a) Vì $a = -5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{6}{5} < 0$ với mọi m nên hàm số luôn là bậc nhất và nghịch biến.

b) Vì $-3 = 1 - \sqrt{16} > 1 - \sqrt{17}$ và $y = f(x)$ là hàm nghịch biến nên $f(-3) < f(1 - \sqrt{17})$.

4A. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Từ hình vẽ, dự đoán $d_1 \cap d_2 = I(1;2)$. Thay tọa độ của I vào d_1, d_2 để kết luận I là tọa độ giao điểm cần tìm.

4B. Tương tự 4A.

a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Tìm được $d_1 \cap d_2 = I(2;3)$

5A. Gọi $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số cần tìm.

A) Vì d có hệ số góc bằng $-1 \Rightarrow a = -1$. Kết hợp với $A(4;-5) \in d$, tìm được $b = -1$. Vậy $d: y = -x - 1$

b) Từ $B(-2;0) \in d \Rightarrow b = 2a$. Ta có d cắt d_1 tại $A(0;-1)$ nên $b = -1$. Từ đó $d: y = -\frac{1}{2}x - 1$

c) Từ $d \perp d_2 \Rightarrow a = 2$. Tìm được giao điểm của d_3 và d_4 là $M(-3;-5)$

Vì $M(-3;-5) \in d \Rightarrow b = 1$. Vậy $d: y = 2x + 1$

5B. Tương tự 5A.

a) $d: y = -3x + \frac{7}{5}$ b) $d: y = -\sqrt{3}x - (3 + 2\sqrt{3})$ c) $d: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2$

6A. a) Vì $a_1 = a_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow$ Không tồn tại m để d_1, d_2, d_3 đồng quy.

b) Để $d_1 \parallel d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 = 2 \\ m - 2 \neq 1 \end{cases}$. Giải ra được $m = 4/3$.

c) Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của d .

$\Rightarrow y_0 = (3m-2)x_0 + m - 2, \forall m$

$\Rightarrow (3x_0 + 1)m - (2x_0 + y_0 + 2) = 0, \forall m$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 2 = 0 \end{cases}$. Tìm được $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

d) Theo câu c) d luôn đi qua $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Kẻ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow OH \leq OI$ không đổi nên:

$OH_{\max} = OI \Leftrightarrow H \equiv I$.

Phương trình đường thẳng $OI: y = 4x$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{Vì } OI \perp d \Rightarrow m = \frac{7}{12}$$

e) Tìm được d cắt Ox, Oy lần lượt tại

$$A\left(\frac{2-m}{3m-2}; 0\right) \text{ và } B(0; m-2) \text{ với } m \neq \frac{2}{3}. \text{ Tính được } S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \frac{(m-2)^2}{|3m-2|}.$$

Từ $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}$, tìm được $(m-2)^2 = |3m-2|$. Giải ra được $m = 1$ hoặc $m = 6$

6B. Tương tự 6A.

a) d_1 và d_2 cắt nhau tại $N(3;-6)$. Từ $N(3;-6) \in d$ tìm được $m = -4$.

b) Từ $d \perp d_3$ giải được $m = -5$.

c) Tìm được $I(2;-3)$ là điểm cố định của d.

d) Theo câu c), d luôn đi qua $I(2;-3)$.

Kẻ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow OH \leq OI$ không đổi nên:

$$OH_{\max} = OI \Leftrightarrow H \equiv I.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } OI: y = -\frac{3}{2}x$$

$$\text{-Vì } OI \perp d \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{e) Tìm được } S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} |2m+5| \left| \frac{2m+5}{m+1} \right| \text{ với } m \neq -1.$$

$$\text{Giải } (2m+5)^2 = 3|m+1| \text{ tìm được } m = -4 \text{ hoặc } m = \frac{-7}{4}$$

7. a) $\forall x \in \mathbb{R}$ b) $x \geq 7$ c) $x \neq -1$

8. a) $m \neq -\frac{1}{7}$ b) $m = 0$ c) $m \neq 7, m \neq -\frac{1}{5}$ d) $m \neq 1$

9. HS tự làm.

10. a) $d: y = -\frac{8}{3}x - 4$ b) $d: y = -2x - \frac{3}{2}$ c) $d: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}$

11. a) $m = -3$ b) $m = -1$ c) $M(1;0)$ d) $OH_{\max} = 1$

12. a) HS tự làm. b) Tìm được $A(1;3), B(3;1)$

c) Vì $OA = OB = \sqrt{10} \Rightarrow$ Tam giác OAB cân tại O.

$$\text{d) Ta có: } \widehat{AOB} = \widehat{AOx} - \widehat{BOx} \text{ mà } \tan \widehat{AOx} = 3 \text{ và } \tan \widehat{BOx} = \frac{1}{3}$$

$$\text{nên } \widehat{AOB} \approx 53^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} \approx 64^\circ$$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cho các hàm số sau, hàm số bậc nhất là:

- A. $y = \frac{1}{x} - 3$ B. $y = \frac{3}{4}x - 2$
C. $y = 0x - 4$ D. $y = |x| + 9$

Câu 2. Hàm số nào sau đây đồng biến trên \mathbb{R} :

- A. $y = 0,9x - 1$ B. $y = \frac{-2x + 3}{5}$
C. $y = 3 - 0,5x$ D. $x + 2y + 3 = 0$

Câu 3. Đường thẳng nào có hệ số góc là 2018?

- A. $y = -2018 + 2017$ B. $y = \frac{2018x + 1}{2}$
C. $2018x - y + 2017$ D. $2018x + y + 2017 = 0$

Câu 4. Điều kiện xác định của hàm số: $y = \frac{\frac{3}{x-1} + 2}{\sqrt{x-1}}$ là:

- A. $x \neq 1$ B. $x \geq 1$ C. $\forall x \in \mathbb{R}$ D. $x > 1$

Câu 5. Góc tạo bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x + 1$ với tia Ox là:

- A. 60° B. 30° C. 120° D. 150°

Câu 6. Điểm cố định mà đường thẳng $d: y = (m+2)x + 3$ luôn đi qua với mọi giá trị của m có tọa độ là:

- A. $(-3;0)$ B. $(0;3)$ C. $(0;-3)$ D. $(3;0)$

Câu 7. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $d: y = 4x + 4$?

a) $d': y = x + \frac{1}{4}$

b) $d': y = -x + 2$

c) $d': y = -\frac{1}{4}x$

d) $d': y = \frac{1}{4}x - 1$

Câu 8. Đồ thị trong hình vẽ sau đây là của hàm số nào?

a) $y = -x$

b) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1: Gọi d_1 , d_2 lần lượt là đồ thị các hàm số $y = -3x + 5$ và $y = x + 3$.

- Vẽ d_1 , d_2 trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm M của d_1 , d_2 .
- Tính góc tạo bởi d_2 và tia Ox.

Bài 2: Viết phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$ biết:

- d có hệ số góc là -2 và đi qua điểm $A(1;4)$.
- d song song với đường thẳng $d': y = -0,5x + 2$ và đi qua một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng -1 .

Bài 3: Tìm m để đường thẳng $d: y = (m^2+2)x + 1$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{8}$.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Câu 1. Cho các hàm số sau, hàm số bậc nhất là:

A. $y = x^2 - 2x + 3$ B. $y = -2x + 5$

C. $y = \sqrt{2x} - 1$ D. $y = 9$

Câu 2. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên \mathbb{R} :

A. $y = 1 + 2x$ B. $y = \frac{\sqrt{2}x + 3}{2}$

C. $y = (\sqrt{3} - 2)x + 1$ D. $2x - 3y + 4 = 0$

Câu 3. Đường thẳng $y = -9x + 4$ có hệ số góc là:

A. 9 B. 4 C. -4 D. -9

Câu 4. Hàm số: $y = \frac{2m^2 + 3}{m + 2}x - \sqrt{5}$ là hàm số bậc nhất khi:

A. $x \neq \pm \frac{3}{2}$ B. $x > -2$ C. $m \neq 2$ D. $\forall m \in \mathbb{R}$

Câu 5. Góc tạo bởi đường thẳng $y = -x + 1$ với tia Ox là:

A. 60° B. 150° C. 45° D. 135°

Câu 6. Hàm số $y = (\sqrt{5} + m\sqrt{2})x - 3\sqrt{3}$ đồng biến trên \mathbb{R} khi:

A. $m \geq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ B. $m > -\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $m \leq -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ D. $m < -\frac{\sqrt{10}}{2}$

Câu 7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $d: y = x + 1$ và $d': y = 1 - 2x$ là:

- a) Cắt nhau b) Song song
c) Vuông góc d) Trùng nhau.

Câu 8. Đồ thị trong hình vẽ sau đây là của hàm số nào?

a) $y = 2x$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = -2x$

d) $y = -2x - 1$

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hàm số sau d: $y = x + 2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Gọi A, B là giao điểm của d với Ox, Oy. Tính diện tích tam giác OAB.

c) Tính góc tạo bởi d và tia Ox.

Bài 2: Cho đường thẳng d: $y = (m - 1)x + 2m + 1$ và $m \neq 1$.

a) Tìm m để d đi qua điểm A(2;7).

b) Tìm m để d song song với đường thẳng $d_1: y = -4x + 2$

Bài 3: Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d: $y = (1-3m)x + m$ lớn nhất.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II.**PHẦN I. TRẮC NGHIỆM**

in								

PHẦN II. TỰ LUẬN.

Bài 1. a) HS tự làm

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x+3 = -3x + 5$

Giải phương trình tìm được $x = \frac{1}{2}$ và thay vào d_1 (hoặc d_2) tìm được $y = 7/2$.

Từ đó kết luận $M\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ là tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

c) Xét tam giác vuông OCD, ta có:

$$\tan \widehat{ODC} = \frac{OC}{OD} = 1 \Rightarrow \widehat{ODC} = 45^\circ. \text{ Vậy góc tạo bởi } d_2 \text{ và tia Ox là } \alpha = 45^\circ.$$

Bài 2. a) Vì d có hệ số góc là -2 nên $a = -2 \Rightarrow d: y = -2x + b$.

Vì $A(1;4) \in d$ nên $b = 6$.

Do đó phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -2x + 6$.

$$b) \text{ Ta có } d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5 \\ b \neq 2 \end{cases} \Rightarrow d: y = -0,5x + b \text{ với } b \neq 2$$

Đường thẳng d đi qua một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng -1
 $\Rightarrow b = -0,5(\text{TMDK})$. Vậy $d: y = -0,5x - 0,5$.

Bài 3. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy . Tìm được

$$A\left(-\frac{1}{m^2 + 2}; 0\right), B(0; 1).$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m^2 + 2} \right|. \text{ Từ } S_{\Delta AOB} = \frac{1}{8} \text{ ta tìm được } m = \pm \sqrt{2}$$

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II. ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

án								

PHẦN II. TỰ LUẬN.

Bài 1. a) HS tự làm

b) Xét tam giác vuông AOB , ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (ĐVDT)} .$$

c) Xét tam giác vuông AOB , ta có:

$$\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{OAB} = 45^\circ . \text{ Vậy góc tạo bởi } d \text{ và tia } Ox \text{ là } \alpha = 45^\circ .$$

Bài 2. a) Điểm $A(2; 7) \in d$ nên $7 = 2(m - 1) + 2m + 1 \Leftrightarrow m = 2$.

$$b) \text{ Ta có } d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = -4 \\ 2m + 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Bài 3. Cách 1. Xét hai trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: Với } m = \frac{1}{3} \Rightarrow d(O; d) = \frac{1}{3}$$

Trường hợp 2:

$$\text{Với } m \neq \frac{1}{3} \Rightarrow d \text{ đi qua hai điểm } A(0; m) \text{ và } B\left(\frac{m}{3m - 1}; 0\right).$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 2 \left(\frac{1}{m} - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Kết hợp các trường hợp trên ta được $OH_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Cách 2. Tìm được $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ là điểm cố định của d . Dựng $OH \perp d$, Ta có $OH \leq OI$ (không đổi)

$\Rightarrow OH$ lớn nhất $\Leftrightarrow OH = OM$ hay $H \equiv M$.

- Viết phương trình $OM : y = x$.
- Vì $OM \perp d \Rightarrow m = 2/3$.

CHƯƠNG III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

* Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là phương trình có dạng:

$$ax + by = c$$

trong đó a, b, c là các số cho trước, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

* Nếu các số thực $x_0; y_0$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$.

2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $d : ax + by = c$.

* Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in R \end{cases}$$

và đường thẳng d song song hoặc trùng với trục tung.

* Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$$

và đường thẳng d song song hoặc trùng với trục hoành.

* Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x \in R \\ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{cases}$$

hoặc
$$\begin{cases} y \in R \\ x = \frac{-b}{a}y + \frac{c}{a} \end{cases}$$
 khi đó đường thẳng d cắt cả hai trục tọa độ.

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Đường thẳng d là đồ thị hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét xem một cặp số cho trước có là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn hay không

Phương pháp giải: Nếu cặp số thức $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$ thì nó được gọi là nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

1A. Trong các cặp số $(12; 1)$, $(1; 1)$, $(2; -3)$, $(1; -2)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 5y = 19$.

1B. Cặp số $(-2; 3)$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau:

- a) $x - y = 1$; b) $2x + 3y = 5$; c) $2x + y = -4$;
d) $2x - y = -7$; e) $x - 3y = -10$; g) $2x - y = 2$.

2A. Tìm các giá trị của tham số m để cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình $x - 5y = 3m - 1$.

2B. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình bậc nhất hai ẩn $\sqrt{m+1}x - 2y = m+1$ có một nghiệm là $(1; -1)$.

3A. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn có hai nghiệm là $(2;0)$ và $(-1;-2)$.

3B. Cho biết $(0;-2)$ và $(2;-5)$ là hai nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn. Hãy tìm phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

Dạng 2. Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ

Phương pháp giải: Xét phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$.

1. Để viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình, trước tiên, ta biểu diễn x theo y (hoặc y theo x) rồi đưa ra kết luận về công thức nghiệm tổng quát.

2. Để biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên mặt phẳng tọa độ, ta vẽ đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$.

4A. Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

2.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $2x - 3y = 5$; b) $4x + 0y = 12$; c) $0x - 3y = 6$.

4B. Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

a) $2x - y = 3$; b) $5x + 0y = 20$; c) $0x - 8y = 16$.

Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để đường thẳng $ax + by = c$ thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải: Ta có thể sử dụng một số lưu ý sau đây khi giải dạng toán này:

1. Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình đường thẳng $d : ax + by = c$ có dạng $d : x = \frac{c}{a}$.

Khi đó d song song hoặc trùng với Oy .

2. Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình đường thẳng $d : ax + by = c$ có dạng $d : y = \frac{c}{b}$.

Khi đó d song song hoặc trùng với Ox .

3. Đường thẳng $d : ax + by = c$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi $ax_0 + by_0 = c$.

5A. Cho đường thẳng d có phương trình

$$(m - 2)x + (3m - 1)y = 6m - 2.$$

Tìm các giá trị của tham số m để:

a) d song song với trục hoành;

b) d song song với trục tung;

c) d đi qua gốc tọa độ;

d) d đi qua điểm $A(1; -1)$.

5B. Cho đường thẳng d có phương trình:

$$(2m - 1)x + 3(m - 1)y = 4m - 2.$$

Tìm các giá trị của tham số m để:

a) d song song với trục hoành;

b) d song song với trục tung;

c) d đi qua gốc tọa độ;

d) d đi qua điểm $A(2; 1)$.

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

11. Tìm phương trình đường thẳng d biết rằng d đi qua hai điểm phân biệt $M(2; 1)$ và $N(5; -1)$.

12. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

a) $2x - 3y = 7$; b) $2x + 5y = 15$.

13. Cho phương trình: $5x + 7y = 112$.

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình;

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình.

CHƯƠNG III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1A. * Xét cặp số $(12; 1)$

Thay $x = 12, y = 1$ vào $2x - 5y = 19$ ta có $2.12 - 5.1 = 19$ (luôn đúng). Vậy $(12; 1)$ là nghiệm của phương trình $2x - 5y = 19$.

* Xét cặp số $(1; 1)$:

Thay mặt $x = 1, y = 1$ vào $2x - 5y = 19$ ta có: $2.1 - 5.1 = 19$ (vô lí)

Vậy $(1; 1)$ không là nghiệm của phương trình $2x - 5y = 19$.

* Tương tự như trên, ta có cặp số $(2; -3)$ là nghiệm, $(1; -2)$ không là nghiệm của phương trình.

1B. Tương tự 1A. Ta có $(-2; 3)$ là nghiệm của các phương trình b) và d).

2A. Để cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình $mx - 5y = 3m - 1$ ta phải có: $2m - 5.(-1) = 3m - 1 \Leftrightarrow m = 6$.

Vậy với $m = 6$ thì $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2B. Tương tự 2A. Vì $(1; -1)$ là nghiệm của phương trình nên

$$\sqrt{m+1} = m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+1 = (m-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

3A. Gọi phương trình cần tìm có dạng: $ax + by = c$

Thay các nghiệm $(2; 0)$ và $(-1; -2)$ vào $ax + by = c$ ta được:

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\begin{cases} 2a + 0b = c \\ -a - 2b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{2} \\ b = -\frac{3}{4}c \end{cases}$$

Chọn $c = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y = 4.$

* Chú ý:

- Nếu chọn $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Loại.

- Nếu $c \neq 0$, ta có thể chọn c tùy ý. Tuy nhiên, nên cân nhắc chọn c hợp lý để tìm được a, b là những số "đẹp".

3B. Tương tự 3A. Đáp số: $-3x - 2y = 4.$

4A. a) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y \in \mathbb{R}' \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases}$

Chú ý: Học sinh tự biểu diễn các tập nghiệm của các phương trình bằng cách lần lượt vẽ các đường thẳng có phương trình $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, x = 3$ và $y = -2$ trên mặt phẳng tọa độ.

4B. Tương tự 4A

a) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 3' \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y \in \mathbb{R}' \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases}$

5A. a) song song với $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ 3m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2 \\ 6m - 2 \neq 0 \end{cases}$

b) d song song với $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq \\ 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset \\ 6m - 2 \neq 0 \end{cases}$

c) d đi qua $O(0;0) \Leftrightarrow O \in (d) \Leftrightarrow 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$

6.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$d) d \text{ đi qua } A(1; -1) \Leftrightarrow (m-2) - (3m-1) = 6m-2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$$

5B. Tương tự 5A. a) $m \in \emptyset$; b) $m = 1$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = 1$

6A. Cách 1. Vì $(1; -1)$ là nghiệm của $3x - 2y = 5$ nên ta có:

$$3(x-1) = 2(y+1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Cách 2. Ta có } 3x - 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{3x-5}{2} = x + \frac{x-5}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{x-5}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Hai kết quả trong cách 1 và cách 2 hình thức viết khác nhau nhưng nếu biểu diễn tập hợp nghiệm trên mặt phẳng tọa độ thì lại trùng nhau. Vì vậy, cả hai đều đúng.

6B. Tương tự 6A.

$$a) \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 1 + 5t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}) \quad b) \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 23 - 7t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

$$7A. \text{ Tương tự 6A } \begin{cases} x = 6 + 18t \\ y = 3 - 11t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

b) Vì x, y nguyên dương nên ta có:

$$-\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} < t < \frac{3}{11} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

8. Tương tự 1A. Đáp số: $(-1; -8), (3; -2)$

9. Tương tự 6A

$$a) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x}{3} - 2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

10. Tương tự 5A

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{a) } m = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } m = \frac{1}{3};$$

$$\text{c) } m = -2;$$

$$\text{d) } m = \frac{9}{13}$$

11. Tương tự 3A. $2x + 3y = 7$.

12. Tương tự 6A. a) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{Z});$

b) $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

13. Tương tự 7A.

a) $\begin{cases} x = 14 + 7t \\ y = 6 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

b) $(x; y) \in \{(7; 11), (14; 6), (21; 1)\}$

BÀI 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Trong đó a, b, a', b' là các số thực cho trước và $a^2 + b^2 \neq 0; a'^2 + b'^2 \neq 0$, x và y là ẩn số.

- Nếu hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình. Nếu hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung thì hệ phương trình vô nghiệm.

- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $d: ax + by = c$ và $d': a'x + b'y = c'$.

Trường hợp 1. $d \cap d' = A(x_0; y_0) \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$;

Trường hợp 2. $d // d' \Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm;

Trường hợp 3. $d \equiv d' \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm;

- Chú ý:

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;

Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;

Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Dạng 1. Không giải hệ phương trình, đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải: Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1. Hệ phương trình có duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;

2. Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;

3. Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

1A. Dựa vào các hệ số a, b, c, a', b', c' dự đoán số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 3 \\ 3\sqrt{2}x - 6y = -7 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ 3x - 0y = 2\sqrt{3} \end{cases}$.

1B. Không giải hệ phương trình, dự đoán số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 0x + 4y = -8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 0x - 5y = -11 \\ 2x - 0y = 2\sqrt{3} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -2x + y = \frac{1}{2} \\ -3x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2\sqrt{2}x + 4y = 3 \\ -\sqrt{2}x - 2y = \frac{3}{2} \end{cases}$.

2A. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để hệ phương trình:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

c) Vô số nghiệm.

Bước 1. Vẽ hai đường thẳng $d: ax + by = c$ và $d': a'x + b'y = c'$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bước 2. Xác định nghiệm của hệ phương trình dựa vào đồ thị đã vẽ ở Bước 1.

5A. Cho hai phương trình đường thẳng:

$$d_1: 2x - y = 5 \text{ và } d_2: x - 2y = 1.$$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Từ đồ thị của d_1 và d_2 , tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

c) Cho đường thẳng $d_3: mx + (2m - 1)y = 3$. Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

5B. Cho ba đường thẳng:

$$d_1: x + 2y = 5, d_2: 2x + y = 4 \text{ và } d_3: 2mx + (m - 1)y = 3m + 1.$$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Từ đồ thị của d_1 và d_2 tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

c) Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Không giải hệ phương trình, xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 0x - 2y = 0 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$; g) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases}$.

7. Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng không:

a) $(1, 1)$ và $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$; b) $(-2; 1)$ và $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$.

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3mx + y = 2m \\ -3x - my = -1 + m \end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất; b) Vô nghiệm;
ô nghiệm;
c) Vô số nghiệm; d) Nhận $\left(\frac{1}{9}; -\frac{10}{3}\right)$ làm nghiệm.

9. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x + y = 3$ và $d_2 : x - 4y = 6$.

- a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ.
b) Từ đồ thị của d_1 và d_2 , tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$

c) Cho đường thẳng $d_3 : (2m + 1)x + my = 2m - 3$. Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

BÀI 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1A. a) Ta có $a = 3; b = -2; c = 4; a' = -6; b' = 4; c' = -8$

$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{Hệ phương trình có vô số nghiệm.}$$

b) Ta có: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

c) Ta có $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

d) Vì $b' = 0$ nên ta xét: $\frac{a'}{a} = \frac{3}{2}; \frac{b'}{b} = \frac{0}{-5} = 0 \Rightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$

1B. Tương tự 1A. Hệ phương trình

- a) Có nghiệm duy nhất b) Có nghiệm duy nhất;
c) Vô số nghiệm; d) Vô nghiệm.

2A. Xét các tỉ số: $\frac{a'}{a} = \frac{m}{1} = m; \frac{b'}{b} = 1; \frac{c'}{c} = 2m$. Hệ phương trình:

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \Leftrightarrow m \neq 1$.

b) Vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

c) Vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

2B. * Xét $m = 0$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

* Xét $m \neq 0$: Tương tự 2A. a) $m \neq \pm 1$; b) $m = -1$; c) $cm = 1$

3A. a) Thay $x = -4$ và $y = 5$ vào $-3x + 2y = 21$ ta có: $-3 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 = 21$ (Vô lý)

$\Rightarrow (-4; 5)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

b) Thay $x = -4$ và $y = 5$ vào các phương trình của hệ phương trình thấy đều thỏa mãn. Vậy $(-4; 5)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

3B. Tương tự 3A. a) Có;

b) Không

4A. Thay $x = 1$ và $y = 2$ vào hệ phương trình, ta được: $\begin{cases} -m + 2 = -2m \\ 1 - 2m^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

4B. Tương tự 4A. $m = \frac{1}{5}$.

5A. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Từ đồ thị của (d_1) và (d_2) , ta xác định tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(3; 1) \Rightarrow (3; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

c) $(d_1), (d_2)$ và (d_3) đồng quy $\Leftrightarrow M(3; 1) \in (d_3) \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$

5B. Tương tự 5A. a) Học sinh tự vẽ hình; b) $(1; 2)$; c) $m = 3$

6. Tương tự 1A. hệ phương trình:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

c) Có nghiệm duy nhất;

d) Có nghiệm duy nhất;

e) Vô số nghiệm

g) Có nghiệm duy nhất;

7. Tương tự bài 3A.

a) Không

b) Có

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

8. Tương tự 2A.

a) $m \neq \pm 1$;

b) $m = -1$;

c) $m = 1$;

d) $m = -2$

9. Tương tự 5A.

a) Học sinh tự vẽ hình

b) (2; -1);

c) $m = -5$.

BÀI 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Để giải một hệ phương trình, ta có thể biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình tương đương đơn giản hơn.

- Phương pháp thế là một trong những cách biến đổi tương đương hệ phương trình, ta sử dụng *quy tắc thế*, bao gồm hai bước:

Bước 1. Từ một phương trình của hệ phương trình đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ phương trình và giữ nguyên phương trình thứ nhất, ta được hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình đã cho.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Phương pháp giải: Căn cứ vào *quy tắc thế*, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta làm như sau:

Bước 1. Từ một phương trình của hệ phương trình, biểu diễn một ẩn bằng ẩn còn lại, sau đó thế vào phương trình còn lại, ta được phương trình mới chỉ còn một ẩn.

Bước 2. Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Chú ý: Để lời giải được đơn giản, ở bước 1, ta thường chọn phương trình có các hệ số có giá trị tuyệt đối không quá lớn (thường là 1 hoặc -1).

1A. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}.$$

1B. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} -x - \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = -\sqrt{6} \end{cases}.$$

Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình nhất hai ẩn

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ phương trình nhất hai ẩn.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn tìm được.

2A. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3(y-5) + 2(x-3) = 0 \\ 7(x-4) + 3(x+y-1) - 14 = 0 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x+1)(y-1) = (x-2)(y+1) - 1 \\ 2(x-2)y - x = 2xy - 3 \end{cases}.$$

2B. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 5(x+2y) - 3(x-y) = 99 \\ x-3y = 7x-4y-17 \end{cases} \quad b) \begin{cases} (x+1)(y-1) = xy-1 \\ (x-3)(y-3) = xy-3 \end{cases}.$$

Dạng 3. Giải hệ phương trình bằng cách đặt ẩn phụ

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Chọn ẩn phụ cho các biểu thức của hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới ở dạng cơ bản

(Tìm điều kiện của ẩn phụ nếu có).

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, từ đó tìm nghiệm của hệ phương trình đã cho.

3A. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}.$$

3B. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \frac{4}{2x-3y} + \frac{5}{3x+y} = -2 \\ \frac{3}{3x+y} - \frac{5}{2x-3y} = 21 \end{cases}.$$

Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Phương pháp giải: Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$.

- Đường thẳng $d : ax + by = c$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$

$$\Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c.$$

4A. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = 4 \end{cases}$. Tìm các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm $(1; -2)$.

4B. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (3a + b)x + (4a - b + 1)y = 35 \\ bx + 4ay = 29 \end{cases}$. Tìm các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm là $(1; -3)$.

5A. Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : mx - 2(3n + 2)y = 6 \text{ và } d_2 : (3m - 1)x + 2ny = 56.$$

Tìm các giá trị của tham số m và n để d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $I(2; -5)$.

5B. Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : 5x - 4y = 8 \text{ và } d_2 : x + 2y = m + 1.$$

Tìm các giá trị của tham số m để d_1, d_2 cắt nhau tại một điểm trên trục Oy. Từ đó vẽ hai đường thẳng này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}.$$

7. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} (x + 1)(y - 1) = xy - 1 \\ (x - 3)(y + 3) = xy - 3 \end{cases}.$$

8. Giải các phương trình sau:

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{2y-1} = 1 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{x-2y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2x+y} - \frac{1}{x-2y} = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (3a-2)x + 2(2b+1)y = 30 \\ (a+2)x - 2(3b-1)y = -20 \end{cases}$. Tìm các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm là $(3; -1)$.

10. Cho hai đường thẳng

$$d_1 : 2mx + 3y = 10 - m \text{ và } d_2 : 2x - 2y = 3.$$

Tìm các giá trị của tham số m để d_1, d_2 cắt nhau tại một trên trục Ox. Từ đó vẽ hai đường thẳng này trên cùng một phẳng tọa độ.

11. Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : 2x + ay = -3 \text{ và } d_2 : bx - 2ay = 8.$$

Tìm giao điểm của d_1, d_2 biết rằng d_1 đi qua điểm $A(-1; 2)$ và d_2 đi qua điểm $B(3; 4)$.

12. Tìm các giá trị của a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(3; -5), N(-1; \frac{3}{2})$.

13. Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : mx - 2(3n + 2)y = 18 \text{ và } d_2 : (3m - 1)x + 2ny = -37.$$

Tìm các giá trị của tham số m và n để d_1, d_2 cắt nhau tại đi $I(-5; 2)$.

BÀI 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

1A. Từ PT đầu $\Rightarrow y = 3x - 5$. Thay vào PT tìm được $x = 3$

Thay $x = 3$ vào $y = 3x - 5$ tìm được $y = 4$.

Vậy nghiệm của HPT là $(3; 4)$

b) Tương tự ý a), nghiệm của HPT là $\left(\frac{\sqrt{2}+3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

1B. Tương tự 1A

a) $(-3; 2)$

b) Vô số nghiệm

2A. a) HPT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 10x + 3y = 45 \end{cases}$

Từ đó tìm được nghiệm của HPT là (3; 5)

b) HPT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$

Từ đó tìm được nghiệm của HPT là $\left(\frac{17}{11}; \frac{4}{11}\right)$

2B. Tương tự A.

a) (4; 7)

b) (2; 2)

3A. a) ĐK: $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Đặt $\frac{1}{x} = u$ và $\frac{1}{y} = v$, ta được HPT: $\begin{cases} 15u - 7v = 9 \\ 4u + 9v = 35 \end{cases}$

Giải ra ta được $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$

Từ đó nghiệm của HPT ban đầu là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

b) Tương tự ý a), ta được nghiệm của HPT là $\left(-\frac{10}{3}; \frac{19}{3}\right)$

3B. Tương tự 3A.

a) $\left(\frac{7}{9}; \frac{7}{2}\right)$

b) $\left(\frac{7}{66}; \frac{2}{11}\right)$

4A. Thay $x = 1$ và $y = -2$ vào HPT đã cho ta được: $\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = 4 \end{cases}$

Giải ra ta được $a = \frac{1}{2}$ và $b = 3$.

4B. Tương tự 4A. Tìm được $a = -2$ và $b = 5$.

5A. Vì d_1, d_2 cắt nhau tại điểm I (2; -5) nên $\begin{cases} I \in d_1 \\ I \in d_2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được $m = 8$ và $n = -1$.

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

5B. Ta có giao điểm của d_1 và trục Oy là $A(0; -2)$

Vì $A \in d_2$ nên tìm được $m = -5$.

HS tự vẽ hình

6. a) $(10; 7)$ b) $\left(3; \frac{3}{2}\right)$

7. a) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{13}{2}\right)$ b) Vô nghiệm

8. a) $\left(\frac{19}{7}; \frac{4}{3}\right)$ b) $\left(\frac{18}{5}; \frac{4}{5}\right)$

9. Tìm được $a = 2$ và $b = -5$.

10. Tìm được $m = \frac{5}{2}$. HS tự vẽ hình.

11. Tìm được $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{4}{3}$. Từ đó tìm được tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $I\left(\frac{3}{8}; \frac{15}{2}\right)$.

12. Tìm được $a = -\frac{13}{8}$ và $b = -\frac{1}{8}$

13. Tìm được $m = 2$ và $n = -3$.

BÀI 4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số, ta sử dụng *quy tắc cộng đại số* bao gồm hai bước như sau:

Bước 1. Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ phương trình và giữ nguyên phương trình kia ta được một hệ mới tương đương với hệ đã cho.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Phương pháp giải: Căn cứ vào *quy tắc cộng đại số*, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số, ta làm như sau:

Bước 1. Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau;

Bước 2. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình để thu được một phương trình một ẩn;

Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

1A. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ 4x - 3y = -24 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases}.$$

1B. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x + \sqrt{7} = -2\sqrt{3} \\ -2x - 2\sqrt{7}y = \sqrt{11} \end{cases}.$$

Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo hai bước sau:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Bước 1. Biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số như ở *Dạng 1*.

2A. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 5(x+2y) - 3(x-y) = 99 \\ x-3y = 7x-4y-17 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x+y)(x-1) = (x-y)(x+1) + 2(xy+1) \\ (y-x)(y+1) = (y+x)(y-2) - 2xy \end{cases}.$$

2B. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x+y = \frac{4x-3}{5} \\ x+3y = \frac{15-9y}{14} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x-3)(2y+5) = (2x+7)(y-1) \\ (4x+1)(3y-6) = (6x-1)(2y+3) \end{cases}.$$

Dạng 3. Giải hệ phương trình bằng cách đặt ẩn phụ

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Chọn ẩn phụ cho các biểu thức của hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới ở dạng cơ bản.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, từ đó tìm nghiệm của hệ phương trình đã cho.

3A. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 4 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = \frac{9}{2} \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4 \end{cases}.$$

3B. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{7} = 13 \\ 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}.$$

2.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải: Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ có nghiệm

$$(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Đường thẳng $d: ax + by = c$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$

$$\Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c.$$

4A. Cho đường thẳng $d: y = (2r + 1)x + 3n - 1$.

a) Tìm các giá trị r và n để d đi qua điểm $M(-1; -2)$ và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Cho biết r, n thỏa mãn $2m - n = 1$, chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

4B. Cho đường thẳng $d: 2ax - (3b + 1)y - a - 1$. Tìm các giá trị của a và b để d đi qua hai điểm $M(-7; 6)$ và $N(4; -3)$.

5A. Cho ba đường thẳng: $d_1: 5x - 17y = 8$, $d_2: 15x + 7y = 82$ và $d_3: (2m - 1)x - 2my = m + 2$. Tìm các giá trị của r để ba đường thẳng đồng quy.

5B. Cho đường thẳng $d: y = (2r + 3)x - 3m + 4$. Tìm các giá trị của tham số m để d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y = 12$ và $d_2: 3x + 4y = 1$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{4} \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{5} + 1 \end{cases}.$$

7. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 9 \\ 5(x+y) - 7(x-y) = 8 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} (x-1)(y+3) = xy + 27 \\ (x-2)(y+1) = xy + 8 \end{cases}.$$

8. Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x}-7} - \frac{4}{\sqrt{y}+6} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x}-7} + \frac{3}{\sqrt{y}+6} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+by = -2 \\ bx-ay = -3 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b biết rằng hệ phương trình :

a) Có nghiệm là $(1;-2)$;

b) Có nghiệm là $(\sqrt{2}-1;\sqrt{2})$.

10. Cho đường thẳng $d : mx - 2ny = -3$. Tìm các giá trị của tham số m và n để $4m - 5n = 3$ và d đi qua điểm $(-5; 6)$.

11. Tìm các giá trị của tham số m để nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{3} - \frac{y+1}{4} = \frac{4x-2y+2}{5} \\ \frac{2x-3}{4} - \frac{y-4}{3} = -2x+2y-2 \end{cases}$$

cũng là nghiệm của phương trình $6mx - 5y = 2m - 4$.

BÀI 4. GIẢI HPT BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

1A. a) Lấy hai PT trừ cho nhau ta được $y = 4$.

Thay $y = 4$ vào một trong hai PT của hệ tìm được $x = -3$.

Vậy nghiệm của HPT là $(-3; 4)$

b) Tương tự câu a) tìm được nghiệm của HPT là $(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{7}}{2})$

1B. Tương tự 1A

a) $(2; 1)$

b) Vô nghiệm

2A. a) HPT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+13y = 99 \\ 6x-y = 17 \end{cases}$ Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

b) HPT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ x+3y = 0 \end{cases}$ Từ đó tìm được $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

4.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

2B. Tương tự 2A

a) $(12; -3)$

b) $\left(-\frac{79}{511}; -\frac{51}{73}\right)$

3A. a) ĐK: $x \neq 1$ và $y \neq -2$. Đặt $\frac{1}{x-1} = a, \frac{1}{y+2} = b$, ta được $\begin{cases} 3a + b = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$

Giải ra ra được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) Tương tự câu a) đặt $\frac{1}{x-y+2} = a, \frac{1}{x+y-1} = b$. Từ đó tìm được nghiệm của HPT là $(x, y) = (1; 2)$

3B. Tương tự 3A.

a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

b) $10; 4)$

4A. a) Theo đề bài ta có d đi qua M $(-1; -2)$ và cắt Ox tại N $(2; 0)$. Từ đó thay tọa độ các điểm M, N vào d tính được: $m = -\frac{3}{2}$ và $n = -1$.

b) Từ $2m - n = 1 \Rightarrow n = 2m - 1 \Rightarrow d : y = (2m + 1)x + 6m - 4$

Gọi I $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của d

$$\Rightarrow (2x_0 + 6)m + (x_0 - y_0 - 4) = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 6 = 0 \\ x_0 - y_0 - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -7 \end{cases}$

Kết luận.

4B. Tương tự 4A. Đáp số: $a = 3$ và $b = -\frac{25}{9}$

5A. Gọi $M = d_1 \cap d_2$. Tìm được $M(5; 1)$

Để d_1, d_2 và d_3 đồng quy thì $M(5; 1) \in d_3$.

Từ đó tìm được $m = 1$.

Thử lại thấy $m = 1$ thoả mãn điều kiện d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

5B. Tương tự 5A. Đáp số: $m = -5$.

6. a) $(14; 11)$; b) $\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{6}\right)$

7. a) $(2; 1)$; b) $(10; 0)$

8. a) $\left(-\frac{53}{2}; -\frac{47}{4}\right)$; b) $(100; 0)$

9. a) $\left(-\frac{9}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; b) $\left(\frac{3\sqrt{2}-1}{2}; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$

10. Tìm được $m = \frac{51}{73}, n = -\frac{3}{73}$

11. Tìm được $\left(\frac{11}{2}; 7\right)$ là nghiệm của HPT đã cho.

Thay vào PT $6mx - 5y = 2m - 4$ ta thu được $m = 1$.

BÀI 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

CHỨA THAM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (*)$.

- Để giải hệ phương trình (*), ta thường dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.
- Từ hai phương trình của hệ phương trình (*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (một ẩn). Khi đó *số nghiệm của phương trình mới bằng số nghiệm của hệ phương trình đã cho*.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải và biện luận hệ phương trình

Phương pháp giải: Để giải và biện luận hệ phương trình (*), ta làm như sau:

Bước 1. Từ hai phương trình của (*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Giải và biện luận phương trình mới, từ đó đi đến kết luận về giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

1A. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2m \\ mx + y = 1 - m \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình:

i) Có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó;

ii) Vô nghiệm;

iii) Vô số nghiệm.

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y):

i) Hãy tìm các giá trị nguyên để x và y cùng nguyên.

ii) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc m.

1B. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 8x + my = m + 2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$:

i) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc m ;

ii) Tìm giá trị của m để: $4x + 3y = 7$.

2A. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - 3y = m + 6 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$:

i) Chứng minh rằng $2x + y = 3$ với mọi giá trị của m ;

ii) Tìm giá trị của m để: $6x - 2y = 13$.

2B. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$:

i) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc m ;

ii) Tìm điều kiện của m để $x > 1$ và $y > 0$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải: Một số bài toán thường gặp của dạng toán này là:

Bài toán 1. Tìm điều kiện nguyên của tham số để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$, trong đó x và y cùng là những số nguyên.

Bài toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức cho trước.

3A. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx - 5y = -2 \\ 5x - 2my = 3 - 2m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để

hệ phương trình có nghiệm nguyên. Tìm nghiệm nguyên đó.

3B. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ x + 2my = 4 - 4m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất (x; y) sao cho x và y nguyên.

4A. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện $x > 1$ và $y > 0$.

4B. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 5 \\ 2x + 3my = 7 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm (x;y) thỏa mãn điều kiện $x > 0$ và $y < 0$.

5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) sao biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $ra = 1$;

b) Tìm các giá trị của tham số ra để hệ phương trình có nghiệm (x;y) thỏa mãn $x - y - 2$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị tham số của ra để hệ phương trình:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

c) Vô số nghiệm.

8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - (m+1)y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất (x; y) sao cho x và y nguyên.

9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 4 - m \\ mx + y = 1 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất (x; y) sao cho x và y nguyên.

3.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

10. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho;

b) Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 2}$.

11. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho;

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$, gọi $M(x; y)$ là điểm tương ứng với nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình.

i) Chứng minh M luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

ii) Tìm các giá trị của m để M thuộc góc phần tư thứ nhất;

iii) Xác định giá trị của m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

BÀI 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN CHỨA THAM SỐ

1A. Từ phương trình thứ nhất ta có $x = 2m - my$. Thay vào phương trình còn lại, ta được: $(m^2 - 1)y = 2m^2 + m - 1$ (*)

Số nghiệm của hệ phương trình ban đầu bằng số nghiệm của (*)

a) Khi đó hệ phương trình:

i) Có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$. Nghiệm duy nhất là: $(x; y) = \left(\frac{-m}{m-1}; \frac{2m-1}{m-1} \right)$

ii) Vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m^2 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

iii) Vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m^2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

b) Với $m \neq \pm 1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{-m}{m-1}; \frac{2m-1}{m-1} \right)$

$$\text{i) Ta có } \begin{cases} x = \frac{-m}{m-1} = -1 - \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{2m-1}{m-1} = 2 + \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m-1 = \pm 1 \Rightarrow m \in \{0; 2\}$$

ii) Hệ thức không phụ thuộc vào m là $x + y = 1$.

1B. a) Cách 1. Làm tương tự như 1A

Cách 2:

* Xét $m = 0 \Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$

* Xét $m \neq 0$: Với $\frac{2m}{8} \neq \frac{1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2$: Hệ Phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right)$

Với $m = 2$: Hệ phương trình vô số nghiệm.

Với $m = -2$: Hệ phương trình vô nghiệm.

b) i) Với $m \neq \pm 2$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right) \Rightarrow y = 1 + 4x$$

$$\text{ii) } 4x + 3y = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{2m+4} + \frac{3(m+4)}{m+2} = 7 \Leftrightarrow m = 0$$

2A. Tương tự 1A

a) $m \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{2m+3}{m+2}; \frac{-m}{m+2}\right)$

$m = -2 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm;

$m = 2 \Rightarrow$ hệ vô số nghiệm;

b) Với $m \neq \pm 2$

i) Thay $x = \frac{2m+3}{m+2}; y = \frac{-m}{m+2}$ vào hệ thức $2x + y = 3 \Rightarrow$ Đpcm.

$$\text{ii) } 6x - 2y = 13 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2m+3}{m+2} - 2 \cdot \frac{-m}{m+2} = 13 \Leftrightarrow m = 8.$$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

2B. Tương tự 1A

a) Với $m \neq \frac{-1}{2}$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$(x; y) = \left(\frac{2m+2}{2m+1}; \frac{-m}{2m+1} \right)$$

Với $m = \frac{-1}{2}$, hệ phương trình vô nghiệm.

b) i) $x + 2y = 2$

$$\text{ii) } x > 1; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2m+1} > 0; \frac{m}{2m+1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

3A. Từ phương trình thứ nhất ta có $y = \frac{2mx+2}{5}$. Thay vào phương trình còn lại ta được phương trình $(25-4m^2)x = 15 - 6m$.

Với $m \neq \pm \frac{5}{2}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{3}{2m+5}; 1 - \frac{3}{2m+5} \right)$$

Khi đó $x; y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2m+5)$ nhận giá trị là ước của 3 $\Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}$

Các cặp nghiệm nguyên là $\{(-1; 2); (-3; 4); (3; -2); (1, 0)\}$

3B. Tương tự 3A. $(x; y) = \left(\frac{4}{2m+1}; \frac{4}{2m+1} - 2 \right) \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$

4A. Tương tự 3A. Với $m \neq \pm 2$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{3}{m+2}; \frac{6}{m+2} \right)$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{m+2} > 1 \\ \frac{6}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 1$$

4B. Tương tự 4A. $\frac{-7}{15} < m < \frac{10}{7}$

5. Tương tự 3A. Với $m \neq -1$: hệ có nghiệm duy nhất $(m+1; m-3)$

Khi đó $S = x^2 + y^2 = 2(m-1)^2 + 8 \geq 8$.

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$\Rightarrow S_{\min} = 8$ tại $m = 1$.

6. a) $(x; y) = (-2; 1)$; b) Tương tự 2A. $m = \frac{-2}{3}$

7. Tương tự 1A a) $m \neq \pm 1$ b) $m = -1$ c) $m = 1$.

8. Tương tự 3A. $m \in \{-1; 0\}$

9. Tương tự 3A. $(x; y) = \left(\frac{4}{m^2 + 1}; \frac{m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1} \right)$

Đáp số: x và y nguyên với $m \in \{-1; 0; 1\}$

10. Tương tự 1A. a) Với mọi giá trị m , hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$(x; y) = \left(\frac{2m + 5}{m^2 + 2}; \frac{5m - 4}{m^2 + 2} \right)$; b) $m = \frac{1}{7}$

11. a) Tương tự 2A

Với $m \neq 0$ và $m \neq 1$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m-1}{m}; \frac{1}{m} \right)$

Với $m = 0$: hệ phương trình vô nghiệm

Với $m = 1$: hệ phương trình vô số nghiệm $(2 - 2y; y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$

b) i) gọi ý: Từ $(x; y) = \left(\frac{m-1}{m}; \frac{1}{m} \right)$ ta khử m để tìm được hệ thức giữa x, y không phụ

thuộc m . Đáp án: M chạy trên đường thẳng có phương trình $y = -x + 1$

ii) $M(x; y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất $\Leftrightarrow x > 0$ và $y > 0$

Đáp số: $m > 1$;

iii) Gọi ý: $M \in (0; \sqrt{5}) \Leftrightarrow OM = \sqrt{5} \Rightarrow m \in \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$

BÀI 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1. Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện, đơn vị thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa tìm được.

Bước 3. Kết luận:

- Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
- Kết luận bài toán.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán về quan hệ giữa các số

Phương pháp giải: Ta sử dụng một số kiến thức liên quan sau đây:

1. Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$ trong đó a là chữ số hàng chục và $0 < a \leq 9, a \in \mathbb{N}, b$ là chữ số hàng đơn vị và $0 < b \leq 9, b \in \mathbb{N}$.

2. Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, trong đó, a là chữ số hàng trăm và $0 < a \leq 9, a \in \mathbb{N}, b$ là chữ số hàng chục và $0 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}, c$ là chữ số hàng đơn vị và $0 \leq c \leq 9, c \in \mathbb{N}$.

1A. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Biết tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99, tìm số đã cho.

1B. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 630 đơn vị.

Dạng 2. Bài toán về làm chung, làm riêng công việc

Phương pháp giải: Một số lưu ý khi giải bài toán về làm chung, làm riêng công việc:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

1. Bài toán về *làm chung, làm riêng công việc* còn có tên gọi khác là *toán năng suất*.

2. Có ba đại lượng tham gia vào bài toán là:

- Toàn bộ công việc;
- Phần công việc làm được bằng một đơn vị thời gian (năng suất);
- Thời gian hoàn thành một phần hoặc toàn bộ công việc.

3. Nếu một đội làm xong công việc trong x ngày thì một ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

4. Thường coi toàn bộ công việc là 1.

2A. Hai bạn A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Hỏi nếu A làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì B hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu? Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày.

2B. Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình bao lâu xong công việc?

3A. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi

chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

3B. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình mà đầy bể.

Dạng 3. Bài toán về chuyển động của một vật

Phương pháp giải: Một số lưu ý khi giải bài toán về chuyển động của một vật:

1. Có ba đại lượng tham gia là quãng đường (s), vận tốc (v) và thời gian (t).
2. Ta có công thức liên hệ giữa ba đại lượng s , v và t là:

$$s = v.t.$$

4A. Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50km/giờ , rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/giờ . Biết quãng đường tổng cộng dài 165km và thời gian ô tô đi trên quãng đường

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

4B. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB .

5A. Một canô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108km và ngược dòng 63km . Một lần khác cũng trong 7 giờ canô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84km . Tính vận tốc nước chảy và vận tốc canô lúc nước yên lặng.

5B. Một chiếc canô đi xuôi dòng theo một khúc sông trong 3 giờ và đi ngược dòng trong vòng 4 giờ, được 380km . Một lần khác, canô này đi xuôi dòng trong 1 giờ và ngược dòng trong vòng 30 phút được 85km . Hãy tính vận tốc thật (lúc nước yên lặng) của canô và vận tốc của dòng nước (biết vận tốc thật của canô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

6A. Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường dài 640km . Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5km ?

6B. Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau 38km . Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau 4 giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng đến khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai 2km ?

Dạng 4. Bài toán về tỉ số phần trăm

Phương pháp giải: Chú ý rằng, nếu gọi số sản phẩm là x thì số sản phẩm khi vượt mức $a\%$ là $(100 + a)\%.x$.

7A. Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Trên thực tế, xí nghiệp 1 vượt mức 12%, xí nghiệp 2 vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm.

7B. Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25%, tổ B giảm mức 18% nên trong tuần này, cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu?

Dạng 5. Bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

-Với hình chữ nhật:

3.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Diện tích = Chiều dài x Chiều rộng

Chu vi = (Chiều dài + Chiều rộng) x 2

-Voi tam giác:

Diện tích = (Đường cao x Cạnh đáy): 2

Chu vi = Tổng độ dài ba cạnh.

8A. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm $3dm$ và cạnh đáy giảm đi $3dm$ thì diện tích của nó tăng thêm $12 dm^2$. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

8B. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng $48m$. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là $162m$. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Dạng 6. Bài toán về sự thay đổi các thừa số của tích

9A. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc $8km/h$ thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu ô tô giảm vận tốc $4km/h$ thì đến B chậm hơn dự định 40 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định.

9B. Trong hội trường có một số băng ghế, mỗi băng ghế quy định ngồi một số người như nhau. Nếu bớt 2 băng ghế và mỗi băng ghế ngồi thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 băng ghế và mỗi băng ghế ngồi bớt 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số băng ghế trong hội trường.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài thêm $6m$ và giảm chiều rộng đi $4m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

11. Một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

12. Hai vòi nước cùng chảy chung vào một bể không có nước trong 12 giờ thì đầy bể. Nếu để vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi thứ hai chảy một mình trong 15 giờ thì được 75% thể tích của bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

4.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

13. Hai công nhân nếu làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm một nửa công việc, sau đó người thứ hai làm nốt nửa công việc còn lại thì toàn bộ công việc sẽ được hoàn thành trong 9 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc đó trong bao nhiêu ngày?

14. Một canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc riêng là 10km/giờ , sau đó lại xuôi từ bến B trở về bên A. Thời gian canô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian canô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bên A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5km/giờ , vận tốc riêng của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

15. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90km , đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

16. Hai địa điểm A và B cách nhau 200km . Cùng một lúc có một ô tô đi từ A và một xe máy đi từ B. Xe máy và ô tô gặp nhau tại C cách A một khoảng bằng 120km . Nếu ô tô khởi hành sau xe máy 1 giờ thì sẽ gặp nhau tại D cách C một khoảng 24km . Tính vận tốc xe máy và ô tô.

17. Có hai phân xưởng, phân xưởng I làm trong 20 ngày, phân xưởng II làm trong 15 ngày được 1600 dụng cụ. Biết số dụng cụ phân xưởng I làm trong 4 ngày bằng số dụng cụ phân xưởng II làm trong 5 ngày. Tính số dụng cụ mỗi phân xưởng đã làm.

18. Trong một kì thi, hai trường A, B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả hai trường đó có 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có 97% và trường B có 96% số học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi.

19. Người ta trộn 4kg chất lỏng loại I với 3kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700kg/m^3 . Biết khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II 200kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất.

20. Trong một buổi liên hoan văn nghệ, phòng họp chỉ có 320 chỗ ngồi, nhưng số người tới dự hôm đó có tới 420 người. Do đó phải đặt thêm 1 dãy ghế và thu xếp để mỗi dãy ghế thêm được 4 người ngồi nữa mới đủ. Hỏi lúc đầu trong phòng có bao nhiêu dãy ghế?

BÀI 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1A. Gọi số cần tìm là \overline{ab} , $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $a; b \leq 9$

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = 63 \\ \overline{ab} + \overline{ba} = 99 \end{cases}$$

Giải HPT thu được $\overline{ab} = 18$, $\overline{ba} = 81$

Từ đó ta có số cần tìm là 18.

1B. Gọi số cần tìm là \overline{ab} , $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$, $a, b \leq 9$

Ta có HPT:
$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 90a = 630 \end{cases}$$
. Từ đó thu được số cần tìm là 75.

2A. Gọi thời gian A, B làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày) (ĐK: $x, y < 6$).

Mỗi ngày các bạn A, B lần lượt làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ công việc.

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ y - x = 9 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 18 \end{cases}$$

Kết luận.

2B. Gọi thời gian xe I, xe II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày) (ĐK: $x, y > 18$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{40}{100} \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 45 \\ y = 30 \end{cases}$$

Kết luận.

3A. Gọi thời gian vòi I, vòi II, chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ) (ĐK: $x, y > 5$).

Tìm được HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$$

Kết luận.

3B. Gọi thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ) (ĐK: $x, y > 3$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35} \\ x - y = 2 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kết luận

4A. Gọi thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường lần lượt là x, y (giờ) (ĐK: $y > x > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = 0,5 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Kết luận.

4B. Gọi chiều dài AB cần tìm là x ($x > 0, \text{km}$) và vận tốc theo dự định là y ($y > 10, \text{km/giờ}$)

Theo bài ra ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{x}{y+10} = \frac{x}{y} - 3 \\ \frac{x}{y-10} = \frac{x}{y} + 5 \end{cases}$$

Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 600 \\ y = 40 \end{cases}$$

Vậy vận tốc lúc đầu là 40km/giờ , thời gian dự định là 15 giờ, quãng đường AB dài 600km .

5A. Gọi vận tốc riêng của canô và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y (km/h) (ĐK: $x > y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \\ \frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy vận tốc dòng nước và vận tốc canô lần lượt là 3km/h và 24km/h .

5B. Gọi vận tốc riêng của canô và dòng nước lần lượt là x, y (km/h) (ĐK: $x > y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} 3(x+y) + 4(x-y) = 380 \\ (x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = 85 \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 55 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kết luận.

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

6A. Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h) và vận tốc tàu hỏa là y (km/h) ($y > x > 5$). Ta có HPT:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 640 \\ y - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4,5 \end{cases}$$

Vận tốc của người A là 5km/h, vận tốc của người B là 4,5km/h.

7A. Gọi số dụng cụ xí nghiệp I và II làm lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x + y = 360 \\ 112\%.x + 110\%.y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases}$$

Vậy số dụng cụ xí nghiệp I và II lần lượt phải làm là 200 (dụng cụ) và 160 (dụng cụ)

7B. Gọi số bộ quần áo tổ A và B sản xuất được trong tuần đầu lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x + y = 1500 \\ 125\%.x + 82\%.y = 1617 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases}$$

Vậy số bộ quần áo tổ A và B lần lượt làm trong tuần đầu là 900 (bộ) và 600 (bộ)

8A. Gọi chiều cao và chiều dài đáy của tam giác lần lượt là x, y (dm) ($x > 0, y > 3$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ \frac{1}{2}(x+3)(y-3) - \frac{1}{2}xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 44 \end{cases}$$

Vậy chiều cao và chiều dài đáy của tam giác là 33dm và 44dm.

8B. Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt là x, y (m) ($x, y > 0$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x + y = 24 \\ 4x + 3y = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 15 \end{cases}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng khu vườn là 9m và 16m.

9A. Gọi vận tốc dự định và thời gian dự định của ô tô lần lượt là x (km/h), y (giờ) ($x > 4, y > 1$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} (x+8)(y-1) = xy \\ (x-4)(y+\frac{2}{3}) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 40km/h và thời gian dự định là 6 (giờ).

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

9B. Gọi số băng ghế là x (ghế) và số chỗ ngồi trên mỗi băng ghế là y (chỗ) ($x > 2, y > 1, x, y \in \mathbb{N}$).

Số người ban đầu là xy (người)

Sau khi bớt đi 2 băng ghế thì còn lại $x - 2$ ghế. Mỗi ghế ngồi thêm 1 người thì số chỗ ngồi trên mỗi băng ghế là $y + 1$. Khi đó thêm được 8 người so với ban đầu, do đó ta có phương trình $(x - 2)(y + 1) = xy + 8$.

Lập luận tương tự ta có HPT:

$$\begin{cases} (x-2)(y+1) = xy + 8 \\ (x+3)(y-1) = xy - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy số băng ghế là 20 (ghế)

10. Gọi chiều dài và chiều rộng khu vườn lần lượt là x, y (m) ($x > 0, y > 4$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} xy = 720 \\ (x+6)(y-4) = 720 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 24 \end{cases}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng khu vườn lần lượt là 30m và 24m.

11. Gọi chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) ($x > 2, y > 3$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} (x+2)(y-3) = xy + 100 \\ (x+6)(y-2) = xy - 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 14 \end{cases}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là 22m và 14m.

12. Gọi thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ) ($x, y > 12$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{5}{x} + \frac{15}{y} = \frac{75}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là 20 giờ và 30 giờ.

13. Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình lần lượt là x, y (ngày) ($x, y > 4$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$$

9.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vậy thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm 1 mình xong việc là 6 ngày và 12 ngày hoặc ngược lại.

14. Gọi thời gian ca nô ngược dòng từ A đến B và xuôi dòng từ B về A lần lượt là x, y (giờ) ($x > y > 0$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x - y = \frac{8}{3} \\ 15x = 25y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy khoảng cách AB là $25 \cdot 4 = 100\text{km}$.

15. Gọi vận tốc xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là x, y (km/h) ($x, y > 0$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} 1,2x + 1,2y = 90 \\ \frac{90}{y} - \frac{90}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là 45km/h và 30km/h.

16. Gọi vận tốc xe ô tô và xe máy lần lượt là x, y (km/h) ($x, y > 0$). Khi 2 xe cùng xuất phát và gặp nhau tại C thì ô tô và xe máy lần lượt đi được quãng đường 120km và 80km ta có phương trình $\frac{120}{x} = \frac{80}{y}$;

Khi xe ô tô xuất phát sau xe máy và gặp nhau tại D thì ô tô và xe máy lần lượt đi được quãng đường 96km và 104km ta có phương trình $\frac{96}{x} + 1 = \frac{104}{y}$;

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{120}{x} = \frac{80}{y} \\ \frac{96}{x} + 1 = \frac{104}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô là 60km/h và vận tốc của xe máy là 40km/h.

17. Gọi số dụng cụ 2 phân xưởng làm trong 1 ngày lần lượt là x, y (dụng cụ) ($x > y > 0$). ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} 20x + 15y = 1600 \\ 4x = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$

Vậy số dụng cụ phân xưởng I và II phải làm lần lượt là $20 \cdot 50 = 1000$ (dụng cụ) và $15 \cdot 40 = 600$ (dụng cụ)

10. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

18. Gọi số học sinh hai trường lần lượt là x, y (học sinh) ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} x + y = 350 \\ \frac{97}{100}x + \frac{96}{100}y = 338 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \end{cases}$$

Vậy số học sinh dự thi trường A và B lần lượt là 200 học sinh và 150 học sinh.

19. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng loại I và loại II lần lượt là x, y (kg/m^3) ($x, y > 0$)

4kg chất lỏng loại I và 3kg chất lỏng loại II lần lượt có khối lượng riêng là $\frac{4}{x}; \frac{3}{y}$ (kg/m^3), khi đó hỗn hợp sau khi trộn có khối lượng riêng là $\frac{7}{\frac{4}{x} + \frac{3}{y}}$ (kg/m^3)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{7}{\frac{4}{x} + \frac{3}{y}} = 700 \\ x - y = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 600 \end{cases}$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng loại I là $800\text{kg}/\text{m}^3$, của chất lỏng loại II là $600\text{kg}/\text{m}^3$.

20. Gọi số dãy ghế trong phòng lúc đầu là x (dãy) ($x \in \mathbb{N}^*$). Gọi số ghế trong mỗi dãy là y (ghế) ($y \in \mathbb{N}^*$)

Ban đầu có 320 người nên ta có phương trình $xy = 320$;

Khi tăng số dãy ghế thêm 1 và số người 1 dãy thêm 4, ta có phương trình $(x + 1)(y + 4) = 420$.

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} xy = 320 \\ (x + 1)(y + 4) = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 80 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 20 \\ y = 16 \end{cases}$$

Vậy số dãy ghế lúc đầu trong phòng là 4 dãy hoặc 20 dãy.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 6 của chương này.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$
 (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình đã cho:

i) Có nghiệm duy nhất;

ii) Vô nghiệm;

iii) Vô số nghiệm.

1B. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$$
 (m là tham số).

a) Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi giá trị của tham số m .

b) Gọi $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Tìm các giá trị của m để:

i) $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$;

ii) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$.

2A. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$$
 (m là tham số).

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .

b) Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x và y là những số nguyên.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc m .

2B. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y = m \\ x + my = 3 \end{cases}$$
 (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = -3$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Tìm các giá trị của m hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3x + 4y = -5$.

3A. Một hình chữ nhật có chu vi 110m. Hai lần chiều dài hơn ba chiều rộng là 10m. Tính diện tích hình chữ nhật.

3B. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2m, diện tích còn lại là 4256m². Tính các kích thước của khu vườn.

4A. Hai người cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai, làm trong 3 giờ thì được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong mấy giờ thì xong công việc?

4B. Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một đi, điểm quy định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chờ thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu?

5A. Một canô xuôi từ A đến B với vận tốc xuôi dòng là 30km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5km/h và vận tốc riêng của canô khi xuôi và ngược là bằng nhau.

5B. Một canô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81A:m và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, canô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của canô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của canô không đổi.

6A. Bạn Tuấn vào cửa hàng Bách hóa hỏi mua 1 đôi giày và 1 bộ quần áo thể thao, giá tiền tổng cộng là 148 000 đồng. Một tuần sau trở lại, giá mỗi đôi giày giảm 20%, giá mỗi bộ quần áo thể thao giảm 40%. Bạn Tuấn đưa cho cô bán hàng 110 000 đồng; cô bán hàng trả lại cho bạn Tuấn 8 900 đồng. Hỏi giá tiền 1 đôi giày, giá tiền 1 bộ quần áo thể thao khi chưa giảm giá là bao nhiêu?

6B. Tháng thứ nhất hai tô sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tô đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tô sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

2.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x, y nguyên dương.

8. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \text{ (} m \text{ là tham số).}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0$.

9. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a-1)x + y = a \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases} \text{ (} a \text{ là tham số).}$$

a) Giải biện luận hệ phương trình đã cho theo a .

b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$, hãy tìm:

i) Hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc a .

ii) Các giá trị của a để x và y thỏa mãn $6x^2 - 19y = 5$.

10. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2\sqrt{m} + 6 \\ x - y = \sqrt{m} + 2 \end{cases} \text{ (} m \text{ là tham số không âm).}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 4$.

b) Tìm các giá trị của m sao cho biểu thức $p = x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

11. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases} \text{ (} m \text{ là tham số).}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số ra.

c) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$, tìm các giá trị của ra để:

i) $y - 5x = -4$;

ii) $x < 1$ và $y > 0$.

12. Tìm hai số biết tổng của chúng là 17, tổng bình phương mỗi số là 157.

13. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là $100m^2$. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng, biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm $5m^2$.

14. Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích $180m^2$. Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm 4m và chiều cao giảm đi 1 ra thì diện tích không đổi.

3.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

15. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?
16. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km:ra với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10km/giờ trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.
17. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó, để đến B đúng hẹn người đó đã tăng vận tốc thêm 2km/giờ trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.
18. Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.
19. Có hai loại quặng chứa 75% sắt và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66% sắt.
20. Có ba thùng chứa tất cả 80 lít dầu. Thùng thứ nhất chứa nhiều hơn thùng thứ hai 10 lít. Nếu đổ 26 lít từ thùng thứ nhất sang thùng thứ ba, thì số dầu ở thùng thứ hai và thùng thứ ba bằng nhau. Hỏi số dầu ban đầu ở thùng thứ nhất và thùng thứ hai?
21. Trong một phòng họp có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 5 người thì có 9 người không có chỗ ngồi. Nếu xếp ghế 6 người thì thừa 1 ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu ghế và có bao nhiêu người dự họp?

ÔN TẬP CHƯƠNG III

11. a) Học sinh tự giải: $(a; y) = \left(\frac{17}{5}; \frac{1}{5}\right)$

b) i) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{m}{-2} \Rightarrow m \neq -2$

ii) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{m}{-2} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow m = 2$

iii) Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{m}{-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ không tồn tại m thỏa mãn.

1B. a) Ta có $\frac{m}{3} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m^2 \neq -3$ đúng với mọi m . Vậy hệ có nghiệm duy nhất với mọi m .

b) Sử dụng phương pháp thế (hoặc cộng đại số) tìm được $(x; y) = \left(\frac{2m+5}{m^2+3}; \frac{5m-6}{m^2+3} \right)$.

Khi đó

$$\text{i) } x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2+3} \Leftrightarrow \frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} = 1 - \frac{m^2}{m^2+3} \Leftrightarrow m = \frac{4}{7}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+5}{m^2+3} > 0 \\ \frac{5m-6}{m^2+3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m < \frac{6}{5}$$

2A. a) Đưa hệ phương trình về $\begin{cases} x = -my + m + 1 \\ (m-1)(m+1).y = m(m-1) \end{cases}$

+ Nếu $m = -1$ hệ đã cho vô nghiệm;

+ Nếu $m = 1$ hệ đã cho có vô số nghiệm;

+ Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -1$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{2m+1}{m+1} \\ y = \frac{m}{m+1} \end{cases}$

$$\text{b) Theo câu c, ta có } x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{m+1} \in \mathbb{Z} \\ \frac{m}{m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \frac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \\ 1 - \frac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Từ đó tìm được $m = \{0; -2\}$

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{m+1} \\ y = 1 - \frac{1}{m+1} \end{cases} \Rightarrow x - y = 1$$

2B. a) Học sinh tự giải: $(x; y) = \left(-\frac{3}{11}; -\frac{12}{11} \right)$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Đưa hệ phương trình về
$$\begin{cases} x = -my + 3 \\ (2 - 3m)y = m - 9 \end{cases}$$

+ Nếu $m = \frac{2}{3}$ hệ đã cho vô nghiệm;

+ Nếu $m \neq \frac{2}{3}$ hệ đã có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = \frac{-m^2 + 6}{2 - 3m} \\ y = \frac{m - 9}{2 - 3} \end{cases}$$

c) Theo câu b ta có

$$3x + 4y = -5 \Rightarrow \frac{-3m^2 + 18}{2 - 3} + \frac{4m - 36}{2 - 3m} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{8}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

3A. Gọi chiều dài, chiều rộng mảnh đất x, y (m) (ĐK $x, y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 35 \\ y = 20 \end{cases}$$

Kết luận.

3B. Gọi chiều dài, chiều rộng mảnh đất là x, y (m) (ĐK $x > y > 4$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 140 \\ (x - 4)(y - 4) = 4256 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 80 \\ y = 60 \end{cases}$$

Kết luận.

4A. Gọi thời gian người thứ nhất và thứ hai là một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ) (ĐK: $x, y > 7$)

Mỗi giờ người thứ nhất và thứ hai lần lượt làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 50\% \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$$

Kết luận.

4B. Gọi số xe lúc đầu và lúc sau lần lượt là x, y (xe) (ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*, x, y > 2$)

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{28}{y} - \frac{28}{x} = 0,7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 8 \end{cases}$$

Kết luận.

5A. Gọi quãng đường AB và vận tốc riêng của ca nô lần lượt là x (km), y (km/h) (ĐK: $x > 0$, $y > 5$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{x}{y-5} - \frac{x}{y+5} = \frac{4}{2} \\ y+5 = 30 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 80 \\ y = 25 \end{cases}$$

Kết luận.

5B. Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y (km/h) (ĐK: $x > y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{105}{x-y} = 8 \\ \frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \end{cases}$$
. Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận.

6A. Gọi giá tiền 1 đôi giày và 1 bộ quần áo trước khi giảm giá lần lượt là x, y (đồng) (ĐK: $x, y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 148000 \\ 80\%.x + 60\%.y = 101100 \end{cases}$$

Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 61500 \\ y = 86500 \end{cases}$$

Kết luận.

6B. Gọi số chi tiết máy tổ I và tổ II làm trong tháng, thứ nhất lần lượt là x, y (chi tiết) (ĐK: $x, y > 0$)

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 115\%.x + 110\%.y = 1010 \end{cases}$$

Giải HPT thu được
$$\begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases}$$

Kết luận.

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

7. a) Học sinh tự giải $(x; y) = \left(\frac{12}{5}; -\frac{2}{5}\right)$;

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{m}{2} \neq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq -\frac{2}{3}$

Khi đó giải HPT tìm được
$$\begin{cases} x = \frac{12}{3m+2} \\ y = \frac{-6m+4}{3m+2} \end{cases}$$

Ta có $x, y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \frac{12}{3m+2} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = 0$ thử lại thỏa mãn.

8. a) Học sinh tự giải $(x; y) = \left(\frac{6}{17}; \frac{13}{17}\right)$;

b) Giải HPT tìm được
$$\begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ y = \frac{5-2}{17} \end{cases}$$
. Ta có $x, y > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{5}$

9. a) Đưa hệ phương trình về
$$\begin{cases} y = -(a-1)x + a \\ a(a-2).x = (a-2)(a+1) \end{cases}$$

+ Nếu $a = 0$ hệ đã cho vô nghiệm;

+ Nếu $a = 2$ hệ đã cho có vô số nghiệm;

+ Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = \frac{a+1}{a} \\ y = \frac{1}{a} \end{cases}$$

b) i) ta có
$$\begin{cases} x = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \\ y = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow x - y = 1$$

ii) Ta có $6x^2 - 19y = 5 \Leftrightarrow 6\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 - 19 \cdot \frac{1}{a} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 6 \end{cases}$

10. a) Học sinh tự giải $(x; y) = (2; -2)$;

b) Với $m \geq 0$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$(x; y) = (\sqrt{m}; -2) \Rightarrow P = \sqrt{m} - 2 \geq -2 \quad \forall m \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = -2 \text{ tại } m=0$$

11. a) Học sinh tự giải $(x; y) = \left(9 - 5\sqrt{2}; \frac{10 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Đưa hệ phương trình về
$$\begin{cases} x = -my + 4 \\ (2 - m)(2 + m).y = 10 - 5m \end{cases}$$

+ Nếu $m = -2$ hệ đã cho vô nghiệm;

+ Nếu $m = 2$ hệ đã cho có vô số nghiệm;

+ Nếu $m \neq \pm 2$ hệ đã cho có nghiệm duy
$$\begin{cases} x = \frac{8 - m}{m + 2} \\ y = \frac{5}{m + 2} \end{cases}$$

c) Với $m \neq \pm 2$ HPT có nghiệm duy nhất $\left(\frac{8 - m}{m + 2}; \frac{5}{m + 2}\right)$; giải các yêu cầu bài toán ta

tìm được.

i) $m = 3$

ii) $m > 3$

12. Gọi 2 số cần tìm là x, y (ĐK $x; y \in \mathbb{Z}$)

Ta có
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 157 \end{cases}$$

Giải HPT thu được $\begin{cases} x = 6 \\ y = 11 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$

Kết luận. Hai số cần tìm là 6 và 11

13. Gọi chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng lần lượt là x, y (m) (ĐK $x > 5; y > 0$)

Ta có HPT
$$\begin{cases} xy = 100 \\ (x - 5)(y + 2) = 105 \end{cases}$$
 . Giải HPT thu được $\begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$

Kết luận

14. Gọi chiều cao và chiều dài cạnh đáy của thửa ruộng lần lượt là x, y (m) (ĐK $x > ; y > 0$)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} \frac{1}{2}xy = 180 \\ \frac{1}{2}(x-1)(y+4) = 180 \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 10 \\ y = 36 \end{cases}$$

Kết luận

15. Gọi thời gian tổ I và III làm 1 mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ) ($\text{ĐK } x; y > 6$)

Trong 1 giờ mỗi tổ lần lượt làm được $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ công việc.

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{10}{x} = 1 \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$$

Kết luận

16. Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là $x(\text{km/h}), y$ (giờ) ($\text{ĐK } x; y > 0$)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} xy = 120 \\ \frac{40}{x} + \frac{80}{x+10} + \frac{2}{5} = y \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 40 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận. Vận tốc dự định là 40 (km/h), thời gian lăn bánh trên đường là $\frac{40}{40} + \frac{80}{40+10} = 2,6$ (giờ).

17. Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là x (km/h), y (giờ) ($\text{ĐK } x; y > 0$)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} xy = 36 \\ \frac{18}{x} + \frac{3}{10} + \frac{18}{x+2} = y \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{18}{5} \end{cases}$$

Kết luận. Vận tốc dự định là 10 (km/h), thời gian lăn bánh trên đường là $\frac{18}{10} + \frac{18}{10+2} = 3,3$ (giờ)

18. Gọi năng suất làm trong 1 giờ của công nhân là x (sản phẩm). Gọi thời gian dự định làm xong việc là y (giờ) ($\text{ĐK } x \in \mathbb{Z}^+; y > 0$)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} xy = 150 \\ 2 + \frac{150-2x}{x+2} + \frac{1}{2} = y \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 20 \\ y = \frac{15}{2} \end{cases}$$

10. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Kết luận. Năng suất dự định trong 1 giờ làm 20 sản phẩm.

19. Gọi khối lượng 2 loại quặng lần lượt là x, y (tấn)

(ĐK $0 < x, y < 25$)

66% sắt có trong 25 tấn quặng chiếm 16,5 tấn.

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} x + y = 25 \\ 75\%.x + 50\%.y = 16,5 \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases}$$

Kết luận.

20. Gọi số dầu trong thùng 1 và 3 lần lượt là x, y (lít) (ĐK: $x > 10, y > 0$). Số dầu thùng 2 là $(x - 10)$ (lít)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} x + (x - 10) + y = 80 \\ x - 10 = y + 26 \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 42 \\ y = 6 \end{cases}$$

Kết luận.

21. Gọi số ghế và số người trong phòng họp lần lượt là x (ghế) và y (người) (ĐK $x > 1; x, y \in \mathbb{Z}^+$)

$$\text{Ta có HPT } \begin{cases} 5x + 9 = y \\ 6(x - 1) = y \end{cases} . \text{ Giải HPT thu được } \begin{cases} x = 15 \\ y = 84 \end{cases}$$

Kết luận.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Tập nghiệm tổng quát của phương trình $\sqrt{5}x + 0y = 4\sqrt{5}$ là:

- A. $\begin{cases} x = 4 \\ y \in R \end{cases}$; B. $\begin{cases} x = -4 \\ y \in R \end{cases}$; C. $\begin{cases} x \in R \\ y = 4 \end{cases}$; D. $\begin{cases} x \in R \\ y = -4 \end{cases}$.

Câu 2. Phương trình nào dưới đây có thể kết hợp với phương trình $x - y = 1$ để được một hệ phương trình bậc nhất một ẩn có vô số nghiệm?

- A. $2y = 2x - 2$; B. $y = x + 1$;
C. $2y = 2 - 2x$; D. $y = 2x - 2$.

Câu 3. Hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là:

- A. (2; -3); B. (2; 3); C. (0; 1); D. (-1; 1).

Câu 4. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $xy + x = 3$; B. $2x - y = 0$;
C. $x^2 + 2y = 1$; D. $x + 3 = 0$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (2,0 điểm) Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{3}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 4 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}$

Bài 2. (2,5 điểm) Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó là 6. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số mới nhỏ hơn số đã cho là 18 đơn vị.

Bài 3. (3,5 điểm) Cho phương trình $x + my - m + 1$ với m là tham số.

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Với $m = 1$, hãy tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên hệ trục tọa độ.

b) Tìm m để phương trình đã cho và phương trình $2x - y = 5$

không có nghiệm chung.

c) Tìm m để phương trình đã cho cùng với phương trình $mx + y = 3m - 1$ có nghiệm chung duy nhất sao cho tích $x.y$ có giá trị nhỏ nhất.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cho hai đường thẳng $d: y = 2x + 5$ và $d': y = ax + 5$.

Ta có $d // d'$ khi d' có phương trình là:

A. $y = 3x + 5$ B. $y = 5x + 5$ C. $y = -2x + 5$ D. Cả 3 sai.

Câu 2. Phương trình $4x - 3y = -1$ nhận cặp số nào sau đây là nghiệm:

A. (1;-1) B. (-1;-1) C. (1;1) D. (-1; 1)

Câu 3. Với giá trị nào của k thì phương trình $x - ky = -1$ nhận cặp số (1; 2) làm nghiệm.

A. $k = 2$ B. $k = 1$ C. $k = -1$ D. $k = 0$

Câu 4. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} y = ax + 5 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $a = 0$ B. $a = 1$ C. $a = 2$ D. $a = 3$

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (3,0 điểm) Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} (x+1)(y-1) = xy - 1 \\ (x-3)(y-3) = xy - 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2}+1)y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}$$

Bài 2. (3 điểm) Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội một làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình bao lâu xong công việc?

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a-1)x + y = a \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất là $(x; y)$ (a là tham số).

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào a .

b) Tìm các giá trị của a thỏa mãn $6x^2 + 17y = 5$.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. A.

Câu 2. A.

Câu 3. B.

Câu 4. B.

PHẦN II. TỰ LUẬN

a) Sử dụng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế, ta tìm được:
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) Điều kiện $x \neq -1; y \neq 2$.

Đặt $a = \frac{1}{x+1}$ và $b = \frac{1}{y-2}$, ta được
$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = b = 1$.

Từ đó tìm được
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 2. Gọi số cần tìm là: $\overline{ab}; a \in N^0; b \in N; a, b \leq 9$

Theo bài ta có
$$\begin{cases} a + b = 6 \\ \overline{ab} - \overline{ba} = 18 \end{cases}$$

Giải ra ta được số cần tìm là: 42

Bài 3. a) Với $m = 1$, phương trình có nghiệm tổng quát là:
$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

HS tự biểu diễn tập nghiệm trên hệ trục tọa độ.

b) Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Để 2 phương trình không có nghiệm chung thì hệ phương trình trên vô nghiệm
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = -m \neq \frac{m+1}{5} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

c) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$$

Với $m \neq \pm 1$, HPT có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{3m+1}{m+1}; \frac{m-1}{m+1} \right)$

Ta có:
$$x \cdot y = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m+1} = \frac{3(m^2 + 2m + 1)}{(m+1)^2} - \frac{8(m+1)}{(m+1)^2} + \frac{4}{(m+1)^2}$$

Từ đó tìm được $x \cdot y$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $m = 0$.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. D.

Câu 2. B.

Câu 3. B.

Câu 4. A.

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) Ta biến đổi về hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$$

b) Biến đổi, ta được
$$\begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

c) Điều kiện $x, y \neq 0$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 15a - 7b = 9 \\ 4a + 9b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 2. Gọi thời gian để đội 1 và đội 2 làm xong công việc một mình lần lượt là x và y (ngày) với ($x > 0$; $y > 0$)

Mỗi ngày đội 1 và đội 2 làm được lần lượt $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ (công việc)

$$\text{Theo bài ta có: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = 40\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy đội 1 làm một mình hết 45 ngày thì xong công việc.

Vậy đội 2 làm một mình hết 30 ngày thì xong công việc.

Bài 3. Với $a \neq 0$ và $a \neq 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = \left(\frac{a+1}{a}; \frac{1}{a} \right)$

a) Từ $x = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}; y = \frac{1}{a} \Rightarrow x - y = 1$

b) Thay $x = \frac{a+1}{a}; y = \frac{1}{a}$ vào $6x^2 - 17y = 5$ ta được:

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $a \neq 2 \Rightarrow a = 3(tm)$

CHƯƠNG IV. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN
BÀI 1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) VÀ ĐỒ THỊ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

- a) Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) nghịch biến $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
b) Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol đi qua gốc tọa độ O , nhận Oy làm trục đối xứng (O đỉnh của parabol).

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm cho trước

Phương pháp giải: Giá trị của hàm số $y = ax^2$ tại điểm $x = x_0$ là $y_0 = ax_0^2$.

1A. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

- a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là -2 ; 0 và $3 - 2\sqrt{2}$.
b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = -10 + 4\sqrt{6}$.
c) Tìm điều kiện của b , biết rằng $f(b) \geq 4b + 6$.

1B. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$.

- a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là -3 ; $2\sqrt{2}$ và $1 - 2\sqrt{3}$.
b) Tìm a biết $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$.
c) Tìm a biết $f(b) \geq 6b + 12$.

2A. Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$;

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$$

2B. Cho hàm số $y = (2m - 1)x^2$ (m là tham số).

a) Tìm giá trị của m để $y = -2$ khi $x = -1$.

b) Tìm giá trị của m biết $(x; y)$ thỏa mãn:

$$\text{i) } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}; \quad \text{ii) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = -4 \end{cases}$$

3A. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100m. Quỹ đạo chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức $S = 4t^2$.

a) Hỏi sau các khoảng thời gian lần lượt là 3 giây và 5 giây vật này cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Sau thời gian bao lâu thì vật tiếp đất?

3B. Một khách du lịch chơi trò Bungee từ tỉnh tháp Macao cao 234 mét so với mặt đất.

Quỹ đạo chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của người rơi phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức: $S = \frac{13}{2}t^2$.

a) Hỏi sau khoảng thời gian 4 giây du khách cách mặt đất lần lượt là bao nhiêu mét?

b) Sau khoảng thời gian bao lâu thì du khách cách mặt đất 71,5 mét?

Dạng 2. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số

Phương pháp giải: Xét hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Ta có:

1. Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

2. Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

4A. Cho hàm số $y = (3m + 2)x^2$ với $m \neq -\frac{2}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Đồng biến với mọi $x < 0$.

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Nghịch biến với mọi $x < 0$.

c) Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.

d) Đạt giá trị lớn nhất là 0.

4B. Cho hàm số $y = (3m - 4)x^2$ với $m \neq \frac{4}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Nghịch biến với mọi $x > 0$.

b) Đồng biến với mọi $x > 0$.

c) Đạt giá trị lớn nhất là 0.

d) Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.

5A. Cho hàm số $y = (-m^2 - 2m - 3)x^2$.

a) Chứng minh rằng với mọi tham số m , hàm số luôn nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để khi $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = -\frac{11}{4}$.

5B. Cho hàm số $y = (\sqrt{2m-3} - 2)x^2$ với $m \geq \frac{3}{2}; m \neq \frac{7}{2}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ và nghịch biến với mọi $x < 0$.

Dạng 3. Vẽ đồ thị của hàm số

Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng các giá trị đặc biệt tương ứng giữa x và y của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Bước 2. Biểu diễn các điểm đặc biệt trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị dạng parabol của hàm số đi qua các điểm đặc biệt đó.

6A. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$.

b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

ii) Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 2;

iii) Tìm các điểm trên (P) các đều hai trục tọa độ.

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

6B. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2$ ($m \neq 0$) có đồ thị parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 1)$.

b) Với giá trị m vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

ii) Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 1;

iii) Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

7A. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

b) Trong các điểm $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$ và $C(10; -200)$, điểm nào thuộc (P), điểm nào không thuộc (P)?

Dạng 4. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng

Phương pháp giải :Cho parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $d : y = mx + n$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

Bước 1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$ax^2 = mx + n \quad (*)$$

Bước 2. Giải phương trình (*) ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d .

Chú ý: Số nghiệm của (*) bằng đúng số giao điểm của (P) và d , cụ thể:

- Nếu (*) vô nghiệm thì d không cắt (P).

- Nếu (*) vô nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P).

- Nếu (*) có 2 nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

8A. Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $d : y = \frac{1}{2}x$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d .

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình $x^2 \geq \frac{1}{2}x$.

8B. Cho parabol (P) : $y = 2x^2$ và đường thẳng d : $y = x + 1$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d.

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình: $2x^2 - x - 1 < 0$.

9A. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P).

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ.

b) Tìm các điểm thuộc (P) thỏa mãn:

i) Có tung độ bằng 4.

ii) Cách đều hai trục tọa độ.

c) Dựa vào đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình $2x^2 - 2m + 3 = 0$ theo m.

9B. Cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Dựa vào đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 2m + 4 = 0$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Không vẽ đồ thị hãy tìm tọa độ các giao điểm của các đồ thị hàm số sau: (m là tham số)

a) $y = x^2$ và $y = \frac{1}{2}x$;

b) $y = x^2$ và $y = 2x - 1$;

c) $y = x^2$ và $y = 2x - 3$;

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = mx + \frac{1}{2}m^2 - 8$.

11. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định giá trị của tham số m để các điểm sau thuộc đồ thị hàm số:

a) $A(2; m)$;

b) $B(-\sqrt{2}; m)$;

c) $C(m; \frac{3}{4})$.

12. Cho hàm số $y = (m^2 + 2m + 3)x^2$ (m là tham số).

a) Chứng minh hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$.

b) Tìm các giá trị của m biết khi $x = 1$ hoặc $x = -1$ thì $y = 4$.

13. Cho hàm số $y = (\sqrt{3m+4} - 3)x^2$ với $m \geq -\frac{4}{3}; m \neq \frac{5}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Nghịch biến với mọi $x > 0$.

b) Đồng biến với mọi $x > 0$.

14. Cho hàm số $y = (3m + 1)x^2$ với $m \neq -\frac{1}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) Đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

b) Đi qua điểm $B(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$$

15. Một con cá heo biểu diễn nhảy lên khỏi mặt nước một khoảng là 4m rồi nhảy xuống. Quãng đường nhảy xuống S (đơn vị bằng mét) của cá heo phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức: $S = t^2$.

a) Hỏi sau khoảng thời gian 1,5 giây tính từ lúc cá heo nhảy xuống, cá heo cách mặt nước bao nhiêu mét ?

b) Sau thời gian bao lâu thì cá heo tiếp nước tính từ lúc cá heo nhảy xuống.

16. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Tìm hệ số a biết rằng (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và điểm $N(2; 4)$.

c) Vẽ (P) và d xác định được ở các câu a) và b) trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d ở các câu a) và b).

17. Cho parabol (P) : $y = 2x^2$ và d : $y = \frac{3}{2}x$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d.

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình: $2x^2 \leq \frac{3}{2}x$.

CHƯƠNG IV. CHƯƠNG 2. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) VÀ ĐỒ THỊ

1A. a) Tìm được $f(-2) = -8$; $f(0)$; $f(3 - 2\sqrt{2}) = -34 + 24\sqrt{2}$

b) Ta có $f(a) = -10 + 4\sqrt{6} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) Ta có $f(b) \geq 4b + 6 \Rightarrow -2b^2 \geq 4b + 6$. Từ đó tìm được $b \in \emptyset$.

1B. Tương tự 1A

a) Tìm được $f(-3) = 27$; $f(2\sqrt{2}) = 24$, $f(1 - 2\sqrt{3}) = 39 - 12\sqrt{3}$

b) ta có $a = \pm(\sqrt{3} + 1)$. c) Ta có $b \geq 1 + \sqrt{5}$ hoặc $b \leq 1 - \sqrt{5}$

2A. a) Thay tọa độ điểm A với $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ vào phương trình $y = (2m + 1)x^2$. Tìm được $m = 1$.

b) Do $(-2; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$ nên tương tự **Câu a)** ta tìm được $m = \frac{-3}{8}$.

2B. Tương tự 2A.

a) Tìm được $m = \frac{-1}{2}$

b) i) $m = \frac{1}{2}$; ii) $m = 1$

3A. a) Tính được $S(3) = 36m$; $S(5) = 100m \Rightarrow$ Vật cách mặt đất sau thời gian 3 giây là $100 - S(3) = 64m$ và sau thời gian 5 giây là $0m$.

b) Ta có $4t^2 = 100$. Tìm được $t = 5(s)$

3B. Tương tự 3A

a) ta có $s(4) = 130(m)$

b) $t = 5(s)$

4A. a) Ta có $3m + 2 < 0$. Từ đó tính được $m < -\frac{2}{3}$

b) Ta có $3m + 2 > 0$. Từ đó tính được $m > -\frac{2}{3}$

c) Ta có $3m + 2 > 0$. Từ đó tính được $m > -\frac{2}{3}$

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

d) Ta có $3m + 2 < 0$. Từ đó tính được $m < -\frac{2}{3}$

4B. Tương tự 4A.

a) $m < \frac{4}{3}$

b) $m > \frac{4}{3}$

c) $m < \frac{4}{3}$

d) $m > \frac{4}{3}$

5A. a) Ta có $a = -m^2 - 2m - 3 = -(m + 1)^2 - 2 < 0, \forall m \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

b) Ta có $(-m^2 - 2m - 3) \frac{1}{4} = \frac{-11}{4}$. Tìm được $m \in \{-4; 2\}$

5B. Ta có $\begin{cases} \sqrt{2m-3} - 2 > 0 \\ 2m-3 \geq 0 \end{cases}$. Từ đó tìm được $m > \frac{7}{2}$

6A. a) Từ $A(-\sqrt{2}; 4) \in (P)$, tìm được $a = 2$.

b) i) Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ (hình vẽ)

ii) Cho $y = 2$ ta tìm được $x = \pm 1$.

Vậy các điểm cần tìm là $(1; 2)$ và $(-1; 2)$.

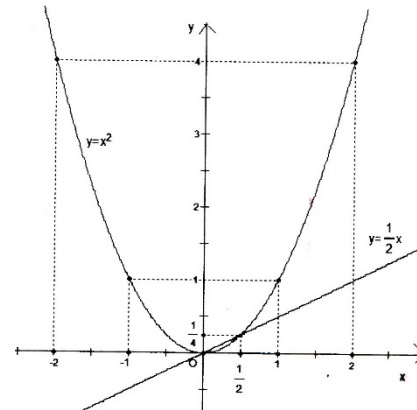
iii) Có $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = 2x_0^2$.

M cách đều Ox, Oy nên ta có

$$|x_0| = |y_0| \Rightarrow x_0 = \pm 2x_0^2. \text{ Tìm được}$$

$$x_0 \in \left\{ 0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}. \text{ Vậy các điểm cần tìm là}$$

$$M_1(0; 0), M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ và } M_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$



6B. Tương tự 6A

a) $m = \frac{4}{3}$

b) i HS tự vẽ. ii) $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

iii) $(0; 0), (6; 12)$

7A. a) Học sinh tự làm.

b) Thay $x = 1, y = 1$ vào (P), ta được đẳng thức luôn đúng do đó A thuộc (P). Tương tự ta có B $(-1; -1)$, C $(10; -200)$ không thuộc (p).

7B. Tương tự 7A

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Học sinh tự làm.

b) Các điểm B, C thuộc (P), điểm A không thuộc (P)

8A. a) Đồ thị (P) và d như hình vẽ.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P)

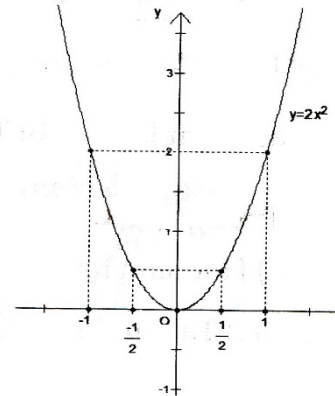
và $d: x^2 = \frac{1}{2}x$.

Tìm được $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{2}$. Vậy giao điểm là $(0; 0)$

và $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy $x \leq 0$ hoặc $x \geq \frac{1}{2}$ là

nghiệm của bất phương trình $x^2 \geq \frac{1}{2}x$



8B. Tương tự 8A

a) Học sinh tự làm.

b) i) Ta tìm được các điểm $(\sqrt{2}; 4), (-\sqrt{2}; 4)$.

ii) Ta tìm được các điểm $(0; 0), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) Ta có: $2x^2 = 2m - 3$. Đường thẳng $d: y = 2m - 3$ là song song với trục hoành. Dựa vào đồ thị, ta có:

* Với $m = \frac{3}{2}$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

* Với $m > \frac{3}{2}$: Phương trình hai nghiệm $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2m-3}{2}}$;

* Với $m < \frac{3}{2}$: Phương trình vô nghiệm.

9B. Tương tự 9A

a) Học sinh tự vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

b) Với $m = 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

9. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Với $m > 2$: Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{2m-4}$.

Với $m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

10. a) Hai giao điểm là O (0;0) và $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

b) Tìm được N(1;1) c) Không tồn tại giao điểm.

d) Ta có $K(-m-4; \frac{m^2}{2}-4m-8)$, $H(4-m; \frac{m^2}{2}+4m-8)$

11. a) Ta có $m = 1$ b) Ta có $m = \frac{1}{2}$ c) Ta có $m = \pm\sqrt{3}$.

12. Tương tự 5A

a) Ta có $m^2 + 2m + 3 > 0 - (m+1)^2 + 2 > 0$ (luôn đúng)

b) Ta có $m^2 + 2m + 3 = 4$. Tìm được $\begin{cases} m = -1 + \sqrt{2} \\ m = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

13. Tương tự 4A

a) Tìm được $\frac{-4}{3} \leq m < \frac{5}{3}$ b) Tìm được $m > \frac{5}{3}$

14. Tương tự 2A.

a) Tìm được $m = 0$. b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$.

15. Tương tự 3A

a) Ta có $S(,15) = 2,25(m) \Rightarrow$ cá heo cách mặt trước sau 1,5 giây là 1,75 mét.

b) Tính được $t = 2$ giây.

16. a) Tìm được $a = 1$.

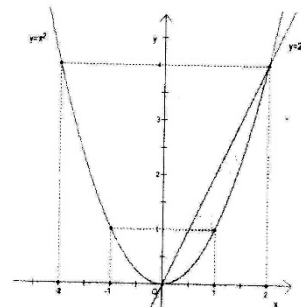
b) Ta có d đi qua O nên d : $y = mx$. Vì d đi qua N(2; 4) nên $4 = 2m$. Tìm được $m = 2$.
Vậy d : $y = 2x$.

c) Đồ thị (p) và d như hình vẽ.

d) Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x$. Tìm được

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là: (0; 0) và (2; 4)



17. Tương tự 8A

a) Học sinh tự làm

b) Tọa độ giao điểm của (P) và d là (0; 0) và $\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{8}\right)$

c) Tính được $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$

BÀI 2. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc hai một ẩn

- Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

trong đó a, b, c là các số thực cho trước, x là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

2. thức nghiệm của phương trình bậc hai

Trường hợp 1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $A' = b'^2 - ac$.

Trường hợp 1. Nếu $A' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $A' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $A' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{A'}}{a}.$$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Dạng 1. Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Phương pháp giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Đưa phương trình đã cho về dạng tích.

Cách 2. Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái một bình phương còn vế phải là một hằng số.

1A. Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x = 0$;

b) $-3x^2 + 9 = 0$;

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

d) $3x^2 + 12x + 1 = 0$.

1B. Giải các phương trình:

a) $-\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$;

b) $-\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$;

c) $x^2 - x - 9 = 0$;

d) $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

2A. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4x^2 + m^2x + 4m = 0$ có nghiệm $x = 1$?

2B. Cho phương trình $4mx^2 - x - 10m^2 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 2$.

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn:

Phương pháp giải: Sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai để giải.

3A. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$.

3B. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức A (hoặc A' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $x^2 - x - 11 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$;

d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

4A. Giải các phương trình sau:

2. Đường tụy gần không đi sẽ không đến - Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0;$

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0.$

4B. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0;$

b) $152x^2 - 5x + 1 = 0;$

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0;$

d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0.$

Dạng 3. Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải: Xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1. Phương trình có hai nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}.$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}.$

3. Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0.$

4. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}.$

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ' .

5A. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

c) Vô nghiệm;

e) Có nghiệm.

b) Có nghiệm kép;

d) Có đúng một nghiệm;

5B. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

c) Vô nghiệm;

e) Có nghiệm.

b) Có nghiệm kép;

d) Có đúng một nghiệm;

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải:

* *Giải và biện luận phương trình* dạng bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m .

* Xét phương trình dạng bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (hoặc } \Delta' = b'^2 - ac).$$

- Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.

- Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo A .

6A. Giải và biện luận các phương trình sau: (ra là tham số).

a) $x^2 + (1 - m)x - m = 0$;

b) $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$.

6B. Giải và biện luận các phương trình sau: (ra là tham số).

a) $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$;

b) $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$.

Dạng 5. Một số bài toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai; Nghiệm chung của các phương trình dạng bậc hai; Hai phương trình dạng bậc hai tương đương

Phương pháp giải:

1. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \text{ (hoặc } \Delta' \geq 0).$$

2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm chung, ta làm như sau:

Bước 1. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Thay x_0 vào 2 phương trình để tìm được điều kiện của tham số.

Bước 2. Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.

3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tương đương, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Hai phương trình cùng vô nghiệm.

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Trường hợp 2. Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

- Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số.

- Điều kiện đủ với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình tập nghiệm bằng nhau hay không và kết luận.

7A. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ luôn vô nghiệm.

7B. Cho phương trình $x^2 + (a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình trên luôn vô nghiệm.

8A. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$. Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì:

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0.$$

8B. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + bx + a = 0$ trong đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

9A. Cho hai phương trình $x^2 + x - m = 0$ và $x^2 - mx + 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hai phương trình có nghiệm chung;

b) Hai phương trình tương đương.

9B. Cho hai phương trình $x^2 - 2ax + 3 = 0$ và $x^2 - x + a = 0$, (a là tham số). Với giá trị nào của a thì:

a) Hai phương trình trên có nghiệm chung?

b) Hai phương trình trên tương đương?

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Giải các phương trình:

a) $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$;

b) $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$;

c) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;

d) $\frac{1}{2}x(x + 1) = (x - 1)^2$.

11. Cho phương trình $2x^2 - (4m + 3)x + 2m^2 - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt; b) Có nghiệm kép;
c) Vô nghiệm; d) Có đúng một nghiệm;
e) Có nghiệm.

12. Biện luận theo m số nghiệm phương trình:

$$mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

13. Cho hai phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình:

- a) Có nghiệm chung; b) Tương đương.

BÀI 2. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1A. a) Ta có $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 7) = 0$. Tìm được $x \in \left\{0; \frac{7}{5}\right\}$

b) Ta có $-3x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Tìm được $x = \pm\sqrt{3}$

c) Ta có $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$. Tìm được $x \in \{1; 5\}$

d) Ta biến đổi thành $3(x + 2)^2 = 11$. Tìm được $x = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$

1B. Tương tự 1A.

a) Tìm được $x = \{2\sqrt{3}; 0\}$. b) Vô nghiệm.

c) Tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$. d) Vô nghiệm.

2A. Thay $x = 1$ vào phương trình ta có $4.1^2 + m^2 + 4m = 0$. Tìm được $m = -2$.

2B. Tương tự 2A.

$$\text{Tìm được } m = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}$$

3A. a) Ta có $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. Tính được $\Delta = 49 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) ta có $a = 1$, $b = -6$, $b' = -3$, $c = 8$. Tính được $\Delta' = 1$. Ta tìm được $x \in \{4; 2\}$.

c) Ta có $a = 9$, $b = -12$, $c = 4$. Tính được $\Delta = 0$. Phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.

d) Ta có $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$. Tính được $\Delta = -32 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

3B. Tương tự 3A.

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

b) Tìm được $x = 2$.

c) Tìm được $x \in \left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$

d) Tìm được $x \in \emptyset$.

4A. Tương tự 3A

a) Tìm được $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Tìm được $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -1$

d) Tìm được $x \in \left\{\frac{6+2\sqrt{6}}{3}; \frac{-6+2\sqrt{6}}{3}\right\}$

4B. Tương tự 3A, 4A

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{11} \pm 5}{2}$

b) Tìm được $x \in \emptyset$

c) Tìm được $x \in \{2; \sqrt{3}\}$

b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5A. Xét $\Delta' = (m - 1)^2 - m(m - 3) = m + 1$

a) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m \neq 0, m > -1$.

b) Xét $m = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (TM)$

Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

c) Tương tự, ta tìm được $m < -1$

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

d) Tìm được $m = 0$

e) Tìm được $m \geq 1; m \neq 0$.

5B. Tương tự 5A

a) Tìm được $m > \frac{-1}{4}, m \neq 2$ b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

d) Tìm được $m < \frac{-1}{4}$ d) Tìm được $m = 2$

e) Tìm được $m = 2$ hoặc $m > \frac{-1}{4}$.

6A. a) Ta có $\Delta = m^2 + 2m + 1 \geq 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |m + 1|$

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$: Phương trình đã cho có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{2}$

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: Phương trình đã cho có nghiệm phân biệt: $x_1 = m, x_2 = -1$

b) Với $m = 3 \Rightarrow$ Phương trình có dạng: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Với $m \neq 3 \Rightarrow \Delta' = 9m - 18$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m}{m-3}$

* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$: Phương trình có nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m-18}}{m-3}$

6B. Tương tự 6A

a) Với $m = 0 \Rightarrow x = 2$;

Với $n \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12m + 1$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1-2m}{2m}$

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{12} \end{cases} : \text{Phương trình hai có nghiệm phân biệt: } x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{1-12m}}{2m}$$

b) Với $m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$;

Với $m \neq 2 \Rightarrow \Delta' = 4m + 1$:

$$* \Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4} : \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

$$* \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4} : \text{Phương trình có nghiệm kép: } x_1 = x_2 = \frac{m+1}{m-2}$$

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} : \text{Phương trình có hai nghiệm kép: } x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{m-2}$$

7A. Ta có $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$. Từ đó chứng minh được $\Delta < 0$.

7B. Ta có $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Vì $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca$. Tương tự ta có $b^2 < ab+bc$ và $c^2 < ca+bc$. Từ đó suy ra $\Delta < 0$.

8A. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có: $(a-c)x_0 = d-b$

Nếu $a \neq c$ thì $x_0 = \frac{d-b}{a-c}$. Thay x_0 vào phương trình ta được ĐPCM.

Nếu $a = c$ thì $b = d \Rightarrow$ ĐPCM.

8B. Ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b)$. Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}ab$.

Từ đó ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ĐPCM.

9A. a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta biến đổi được $(1+m)x_0 = m+1$.

Tìm được $m = -1$ hoặc $m = 2$.

b) Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai phương trình cùng vô nghiệm $\Rightarrow -2, m < -\frac{1}{4}$

Trường hợp 2: Hai phương trình cùng có nghiệm và tập nghiệm giống nhau $\Rightarrow m = -1$.

9. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vậy $-2 < m < \frac{-1}{4}$ thì hai phương trình tương đương.

9B. Tương tự 9A

a) Tìm được $a \in \emptyset$

b) Tìm được $\frac{1}{4} < a < \sqrt{3}$

10. Tương tự 1A

a) Tìm được $x \in \left\{ \frac{1}{2}; -\sqrt{2} \right\}$

b) Tìm được $x \in \emptyset$.

c) Tìm được $x \in \left\{ \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$

d) Tìm được $x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

11. Tương tự 5A

a) $m > \frac{-17}{24}$

b) $m = \frac{-17}{24}$

c) $m < \frac{-17}{24}$

d) $m \in \emptyset$

e) $m \geq \frac{-17}{24}$

12. a) $m \neq 0, m > -1$

b) $m = -1$

c) $m < -1$.

d) $m = 0$

e) $m \geq -1$

13. Tương tự 9A

a) Tìm được $m = 2$ hoặc $m = -3$.

b) Tìm được $1 < m < 2\sqrt{2}$

BÀI 3. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức Vi-ét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

2. Ứng dụng của hệ thức Vi-ét

a) Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là

$$x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0.$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. Từ đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta

có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$ sau đó áp dụng *Bước 1*.

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là:

$$\bullet A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P;$$

$$\bullet B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS;$$

$$\bullet C = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2;$$

$$\bullet D = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}.$$

1A. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = x_1^2 + x_2^2;$

b) $B = x_1^3 + x_2^3;$

1B. Cho phương trình: $-3x^2 - 5x - 2 = 0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình, hãy tính:

a) $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2;$

b) $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3};$

c) $P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2};$

d) $Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}.$

2A. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (ra là tham số).

a) Tìm điều kiện của ra để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Với ra tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào ra.

2B. Cho phương trình $x^2 + (m + 2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào ra.

Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm

Phương pháp giải: Sử dụng ứng dụng của hệ thức Vi-ét.

3A. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau:

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0;$

b) $1230x^2 - 4x - 1234 = 0;$

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0;$

d) $\sqrt{5}x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2 = 0.$

2. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

3B. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0$; b) $23x^2 - 9x - 32 = 0$;

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$; d) $31, 1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$.

4A. Cho phương trình $(ra - 2)x^2 - (2m + 5)x + ra + 7 = 0$ với tham số ra.

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số ra.

4B. Cho phương trình $(2m - 1)x^2 + (m - 3)x - 6m - 2 = 0$.

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = -2$.

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số ra.

5A. Cho phương trình $mx^2 - 3(m + 1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ (ra là tham số). Tìm các giá trị của ra để phương trình có một nghiệm là $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

5B. Tìm giá trị của tham số ra để phương trình $x^2 + 3mx - 108 = 0$ (ra là tham số) có một nghiệm là 6. Tìm nghiệm còn lại.

Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Phương pháp giải: Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = x.y$, ta làm như sau:

Bước 1. Giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2 .

Bước 2. Khi đó các số x, y cần tìm là $x = X_1, y = X_2$ hoặc $x = X_2, y = X_1$.

6A. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15, uv = 36$; b) $u^2 + v^2 = 13, uv = 6$.

6B. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 4, uv = 7$; b) $u + v = -12, uv = -20$.

7A. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$.

7B. Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 7 và -11 là nghiệm.

8A. Cho phương trình $x^2 + 5x - 3m = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2 .

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$.

8B. Cho phương trình $3x^2 + 5x - m = 0$. Với giá trị nào của tham số m , phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2 ? Khi đó, hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_1 + 1}$.

Dạng 4. Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử

Phương pháp giải: Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì tam thức được phân tích thành nhân tử:

$$ax^2 + bx + c - a(x - x_1)(x - x_2).$$

9A. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 7x + 6$;

b) $30x^2 - 4x - 34$;

c) $x - 5\sqrt{x} + 6$;

d) $2x - 5\sqrt{x} + 3$.

9B. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 5x + 1$;

b) $21x^2 - 5x - 26$;

c) $4x - 7\sqrt{x} + 3$;

d) $12x - 5\sqrt{x} - 7$.

Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Phương pháp giải: Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Khi đó: 1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow p < 0$.

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

4. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

5. Phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Chú ý: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$; Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

10A. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $x^2 - 2(m - 1)x + ra + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu;

b) $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt;

c) $x^2 - 2(m - 3)x + 8 - 4m = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm;

d) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương;

e) $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - ra = 0$ có đúng một nghiệm dương.

10B. Tìm các giá trị của tham số ra để phương trình:

a) $2x^2 - 3(m + 1)x + m^2 - ra - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu;

b) $3mx^2 + 2(2m + 1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm;

c) $x^2 + mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn m ;

d) $mx^2 - 2(m - 2)x + 3(ra - 2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước

Phương pháp giải: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

Bước 2. Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét, tìm được điều kiện của tham số.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện của tham số xem có thỏa mãn điều kiện ở *Bước 1* hay không rồi kết luận.

11A. Cho phương trình $x^2 - 5x + m + 4 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $|x_1| + |x_2| = 4$;

b) $3x_1 + 4x_2 = 6$;

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$; $= -3$;

d) $x_1(1 - 3x_2) + x_2(1 - 3x_1) = m^2 - 23$.

5. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

11B. Cho phương trình $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

- a) Có một nghiệm bằng 5. Tìm nghiệm còn lại.
- b) Có hai nghiệm âm phân biệt;
- c) Có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương;
- d) Có hai nghiệm cùng dấu;
- e) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = -1$;
- g) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| \geq 3$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Cho phương trình: $-3x^2 + x + 1 = 0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình, hãy tính:

- a) $A = x_1^2 + \frac{2}{x_1} + x_2^2 + \frac{2}{x_2}$;
- b) $B = \frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3}$;
- c) $B = \frac{2x_1 - 5}{x_1} + \frac{2x_2 - 5}{x_2}$;
- d) $D = \frac{x_1 - 1}{x_1^4} + \frac{x_2 - 1}{x_2^4}$.

13. Tính nhẩm các nghiệm của các phương trình:

- a) $16x - 17x + 1 = 0$;
- c) $2x^2 - 40x + 38 = 0$;
- b) $2x^2 - 4x - 6 = 0$;
- d) $1230x^2 - 5x - 1235 = 0$.

14. Tìm hai số u, v biết rằng:

- a) $u + v = -8, uv = -105$;
- b) $u + v = 9, uv = -90$.

15. Cho phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và:

- a) Thỏa mãn điều kiện $x_2 - x_1 = 17$;
- b) Biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất;
- c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ vào m .

16. Cho phương trình bậc hai: $(m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

- a) Có 2 nghiệm trái dấu;
- b) Có 2 nghiệm dương phân biệt;
- c) Có 2 nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm;
- d) Có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$.

17. Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (ra là tham số).

- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Tìm các giá trị của tham số ra để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$.
- d) Tìm các giá trị của ra để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$|x_1^3 + x_2^3| = 19.$$

18. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (ra là tham số).

- a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi ra.
- b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm ra để x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$.

BÀI 3. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

1A. Ta có $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ PT đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$$

a) Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 19$

b) Ta có $C = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 80$

c) Ta có $D = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 \cdot x_2)^4} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4} = \frac{343}{81}$

d) Ta có $E = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{13}$

1B. Tương tự 1A

a) Ta có $M = -\frac{25}{6}$

b) Ta có $N = \frac{13}{14}$

c) Ta có $P = -\frac{49}{4}$

d) Ta có $Q = -\frac{17}{12}$

2A. a) Ta có $\Delta' = (m-3)^2 \geq 0, \forall m$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1 \cdot x_1 = 2m - 5 \end{cases}$$

Biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là: $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1$

2B. Tương tự 2A

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m

Biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là: $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -4$

3A. a) Ta có $a + b + c = 15 + (-17) + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{15}$

b) Ta có $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1234}{1230}$

c) Ta có $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -7 - 4\sqrt{3}$

d) Ta có $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

3B. Tương tự 3A

a) Ta có $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{7}$

b) Ta có $x_1 = -1, x_2 = \frac{32}{23}$

c) Ta có $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1979}{1975}$

d) Ta có $x_1 = -1, x_2 = \frac{198}{311}$

4A. a) Ta thấy $a + b + c = (m-2) + (-2m-5) + m + 7 = 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm $x = 1$ không phụ thuộc vào m .

b) Với $m = 2$: Phương trình chỉ có nghiệm $x = 1$.

Với $m \neq 2$: Phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{m+7}{m-2}$

8. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

4B. a) Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho, ta có $(2m-1)(-2)^2 + (m-3)(-2) - 6m - 2 = 0$
(luôn đúng) $\Rightarrow \text{ĐPCM}$.

b) Với $m = \frac{1}{2}$: Phương trình chỉ có nghiệm $x = -2$.

Với $m \neq \frac{1}{2}$: Phương trình có hai nghiệm $x \in \left\{-2; \frac{3m+1}{2m-1}\right\}$

5A. Thay $x = -2$ vào phương trình ta tìm được $m = 1$ hoặc $m = 2$

* Với $m = 1$, ta có: $x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}$

* Với $m = 2$, ta có: $2x^2 - 9x - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

5B. Tương tự 5A. Tính được $m = 4$; $x_2 = -18$.

6A. a) Ta có u, v là hai nghiệm của phương trình sau

$$X^2 - 15X + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 12 \\ X = 3 \end{cases} \Rightarrow (u, v) \in \{(12; 3), (3; 12)\}$$

b) Ta có $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 13 + 2.6 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 5 \\ u+v = -5 \end{cases}$

* Với $u+v = 5$ ta có u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 3 \end{cases}$$

Vậy $(u, v) \in \{(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2)\}$

6B. Tương tự 6A

a) Không tồn tại u, v thỏa mãn vì $4^2 - 4.7 = -12 < 0$.

b) Tìm được $(u, v) \in \{(-2; -10), (-10; -2)\}$

7A. Ta có $(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$ và $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$

Do đó $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình sau: $X^2 - 4X + 1 = 0$

9.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

7B. Tương tự 7A. Tìm được phương trình $X^2 + 4X - 77 = 0$.

8A. a) Ta có $\Delta = 25 + 12m \geq 0$. Tìm được $m \geq -\frac{25}{12}$

b) Ta có
$$S = \frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1 x_2)^2} = \frac{50 + 12m}{9m^2}$$

Và $P = \frac{2}{x_1^2} \cdot \frac{2}{x_2^2} = \frac{4}{(x_1 x_2)^2} = \frac{9}{9m^2}$. Với ĐK $0 \neq m \geq \frac{25}{12}$ thì ta có $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$ là hai nghiệm của

phương trình bậc hai $X^2 - \frac{50+12}{9m^2}X + \frac{4}{9m^2} = 0$ hay $9m^2 X^2 - 2(6m+25)X + 4 = 0$.

8B. Tương tự 8A

Điều kiện $m \geq -\frac{25}{12}$. Phương trình tìm được là $X^2 + \frac{10+6m}{3m+6}X + \frac{m}{m+2} = 0$ (Điều kiện: $-2 \neq m \geq -\frac{25}{12}$)

9A. a) Ta có $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

b) Ta có $30x^2 - 4x - 34 = 30(x+1)\left(x - \frac{17}{15}\right)$

c) Ta có $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)$

d) Ta có $2x - 5\sqrt{x} + 3 = 2(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)$

9B. Tương tự 9A

a) Ta có $4x^2 - 5x + 1 = 4(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

b) Ta có $21x^2 - 5x - 26 = 21(x+1)\left(x - \frac{26}{21}\right)$

c) Ta có $4x - 7\sqrt{x} + 3 = 4(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{3}{4}\right)$

d) Ta có $12x - 5\sqrt{x} - 7 = 12(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} + \frac{7}{12}\right)$

10A. a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < -1$

10. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta = 8^2 - 4(2m + 6) > 0 \Leftrightarrow m < 5$$

c) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(m - 3) < 0 \\ 8 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

d) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 8m > 0 \\ 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 4$$

e) Vì $\Delta = (m - 1)^2 - 4(-3 - m) = (2m - 1)^2 + 15 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

\Rightarrow Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow ac = -3 - m < 0$. Tìm được $m > -3$

10B. Tương tự 10A

a) Tìm được $-1 < m < 2$ b) Tìm được $\begin{cases} m > 0 \\ m \leq -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

c) Tìm được $m < -1$ d) Tìm được $-1 \leq m < 0$

11A. Ta có $\Delta = 5^2 - 4(m + 4) = 9 - 4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 4 \end{cases}$

a) ta có $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 16$

$\Rightarrow 2|m + 4| = 2m - 1$. Tìm được $m \in \emptyset$.

b) Ta có $3x_1 + 4x_2 = 6 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -9$

Vì $x = -9$ là nghiệm của phương trình nên ta có $(-9)^2 - 5 \cdot (-9) + m + 4 = 0$. Tìm được $m = -3 \pm \sqrt{13}$

11.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

11B. Tương tự 10A và 11A

a) Tìm được $\begin{cases} m = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

b) Tìm được $\begin{cases} m < -1 \\ x_2 \neq -2 \end{cases}$

c) Tìm được $-1 < m < 0$

d) Tìm được $\begin{cases} m < -1 \\ x_2 \neq -2 \end{cases}$

3) Tìm được $m = -1$

g) Tìm được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -5 \end{cases}$

12. Tương tự 1A

a) Ta có $A = -\frac{11}{9}$

b) Ta có $B = -\frac{16}{87}$

c) Ta có $C = 9$

d) Ta có $D = -41$

13. Tương tự 3A

a) Ta có $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{16}$

b) Ta có $x_1 = -1, x_2 = 3$

c) Ta có $x_1 = 1, x_2 = 19$

d) Ta có $x_1 = -1, x_2 = \frac{247}{246}$

14. Tương tự 6A

a) Tìm được $(u, v) \in \{(7; -15), (-15; 7)\}$

b) Tìm được $(u, v) \in \{(15; -6), (-6; 15)\}$

15. a) Tìm được $m = \pm 4$

b) Ta có $A_{\min} = 33 \Leftrightarrow m = 0$

c) Ta có hệ thức $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -17$

16. Tương tự 10A.

a) Tìm được $-2 < m < 4$

b) Tìm được $\begin{cases} m > \\ -\frac{9}{4} < m < -2 \end{cases}$

c) Tìm được $-2 < m < -1$

d) Tìm được $m \in \emptyset$

17. Tương tự 10A và 11A.

12. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) ta có $\Delta = 25 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

b) Tìm được $m < -3$

c) Ta có $A_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$

d) Tìm được $\begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}$

18. a) Ta có $\Delta = 4(m-3)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$

b) Tìm được $m > 1$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình trùng phương

- Phương trình trùng phương là phương trình có dạng:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

- Cách giải: Đặt ẩn phụ $t = x^2$ ($t > 0$) để đưa phương trình về phương trình bậc hai: $at^2 + bt + c = 0$ ($a \neq 0$).

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ở *Bước 2*.

Bước 4. So sánh các nghiệm tìm được ở *Bước 3* với điều kiện xác định và kết luận.

3. Phương trình đưa về dạng tích

Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2. Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải phương trình trùng phương

Phương pháp giải: Xét phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Bước 1. Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta được phương trình bậc hai:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Bước 2. Giải phương trình bậc hai ẩn t từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình trùng phương đã cho.

1A. Giải các phương trình sau:

1. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$;

b) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 84 = 0$.

Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$;

b) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$;

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Phương pháp giải: Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của ẩn.

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình bậc hai nhận được ở *Bước 2*.

Bước 4. So sánh các nghiệm tìm được ở *Bước 3* với điều kiện xác định và kết luận.

2A. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$;

b) $\frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5}$;

c) $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) = \frac{3}{14-x}$.

2B. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+5} = \frac{x-7}{x-1} + 3$;

b) $\frac{x^2-3x+5}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}$;

c) $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2-5x+6}$;

Dạng 3. Phương trình đưa về dạng tích

Phương pháp giải: Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Chuyển vế và phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2. Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

3A. Giải các phương trình sau:

2.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

a) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$;

b) $(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 - (x + 2)^3 = 0$;

3B. Giải các phương trình sau:

a) $2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 = 0$;

b) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$.

Dạng 4. Giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải:

Bước 1. Đặt điều kiện xác định (nếu có);

Bước 2. Đặt ẩn phụ, đặt điều kiện của ẩn phụ (nếu có) và giải phương trình theo ẩn mới;

Bước 3. Tìm nghiệm ban đầu và so sánh với điều kiện xác định và kết luận.

4A. Giải các phương trình sau:

a) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 8$;

b) $(x^2 + 16x + 60)(x^2 + 17x + 60) = 6x^2$;

c) $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

4B. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$;

b) $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$;

c) $\frac{x}{x+1} - 10\frac{x+1}{x} = 3$.

Dạng 5. Phương trình chứa biểu thức trong dấu căn

Phương pháp giải: Làm mất dấu căn bằng cách đặt ẩn phụ hoặc lũy thừa hai vế.

Chú ý: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

5A. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 6\sqrt{x} + 9} = 3 - \sqrt{x}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$.

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

5B. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = (1 - x)\sqrt{3x - 2}$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{7x+1} = \sqrt{14x-6}$.

Dạng 6. Một số dạng khác

Phương pháp giải: Ngoài các phương pháp trên, ta còn dùng các phương pháp hằng đẳng thức, thêm bớt hạng tử, hoặc đánh giá hai vế... để giải phương trình.

6. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thêm bớt hạng tử hoặc dùng hằng đẳng thức:

a) $x^4 = 24x + 32$;

b) $x^3 = -3x^2 + 3x - 1$;

c) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$;

7. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đánh giá:

a) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} = 1$;

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12x + 9} = 6$.

8. Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 4x - 6|2x - 1| + 6 = 0$;

b) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$;

b) $(x + 1)^4 + (x + 1)^2 - 20 = 0$.

11. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(1-x)(x+2)}$;

b) $\frac{x}{x+4} + \frac{2x}{2-x} = \frac{8(x+1)}{(2-x)(x+4)}$.

12. Giải các phương trình sau:

a) $(x + 1)(x-3)(x^2 - 2x) = -2$;

b) $(6x + 5)^2 (3x + 2)(x + 1) = 35$.

4.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

c) $(x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = 2x^2$;

d) $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$.

13. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0$; b) $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1A. a) Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta có: $t^2 + 5t - 6 = 0$

Giải ra ta được $t = 1$ (TM) hoặc $t = -6$ (loại)

Từ đó tìm được $x = \pm 1$

b) Đặt $(x+1)^2 = t \geq 0$

Sau khi tìm được t ta tìm được $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$.

1B. a) $x \in \emptyset$ b) $x = \pm 1$

2A. a) ĐK: $x \neq 1$ và $x \neq 2$

Quy đồng mẫu thức, giải được: $x = \pm\sqrt{19} - 3$

b) Tìm được $x = -17$ hoặc $x = -1 \pm \sqrt{31}$

c) Tìm được $x = 5$

2B. a) $x = -\frac{5}{4}$ hoặc $x = 5$ b) $x = 1$ c) $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 5$

3A. a) Đưa PT về dạng: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 3) = 0$

Từ đó tìm được $x \in \{\pm\sqrt{2}; -3\}$

b) Tìm được $x = 4$

3B. a) $x = 1$ hoặc $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$ b) $x = \frac{1}{2}; x = 0$ hoặc $x = \frac{10}{3}$

4A. a) Đặt $y = x^2 + 3x + 1$. Giải ra ta được $y = \pm 3$

Từ đó tìm được $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

b) Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Với $x = 0$, thay vào thấy không là nghiệm

Trường hợp 2. Với $x \neq 0$, chia cả hai vế của PT cho x^2 sau đó đặt $x + 16 + \frac{60}{x} = y$. Giải ra ta được $y = 2$ hoặc $y = -3$.

Từ đó tìm được $x = 15$ hoặc $x = -4$.

c) Trường hợp 1. Xét $x = 0$, thay vào thấy không là nghiệm.

Trường hợp 2. Xét $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu cho x sau đó đặt $y = 3x + \frac{2}{x}$. Giải ra ta được $y = -11$ hoặc $y = 2$.

Từ đó tìm được $x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$

4B. a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$ hoặc $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) $x = 4$ hoặc $x = -5$

c) $x = \frac{5}{4}$ hoặc $x = -\frac{2}{3}$

5A. a) ĐK: $x \geq 0$; Biến đổi phương trình ta được

$$|\sqrt{x} - 3| = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$$

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}$

5B. a) $x = 1$

b) $x = 1$ hoặc $x = 5$

6. a) Thêm $4x^2$ ở cả hai vế của PT, ta được $(x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2$

Giải ra ta được $x = 1 \pm \sqrt{5}$

b) Tìm được $x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}$

c) Tìm được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

7. a) ĐK: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt[4]{1-x} \geq 1-x$ và $\sqrt[4]{x} \geq x \Rightarrow VT \geq 1-x+x=1=VP$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Kết luận

b) Tìm được $x = \frac{1}{2}$.

8. Đặt $|2x-1| = t (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$. Tìm được t từ đó tìm được $x \in \{-2; 0; 1; 3\}$

b) PT $\Leftrightarrow \left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + 2x \frac{5x}{x+5} = 11$

Đặt $\frac{x^2}{x+5} = t$, tìm được $t = -11$ hoặc $t = 1$

Từ đó tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

10. a) $x = \pm 2\sqrt{2}$

b) $x = 1$ hoặc $x = -3$

11. a) $x = \frac{2}{5}$

b) Vô nghiệm

12. a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$ hoặc $x = 1 \pm \sqrt{2}$

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

c) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

13. a) $x = -1$ hoặc $x = 1 \pm \sqrt{7}$

b) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

BÀI 5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
- Biểu diễn các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.
- Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

Bước 2. Giải phương trình

Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) và với đề bài để đưa ra kết luận.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán về năng suất lao động

Phương pháp giải: Năng suất được tính bằng tỉ số giữa Khối lượng công việc và Thời gian hoàn thành.

1A. Một phân xưởng theo kế hoạch phải dệt 3000 tấm thảm. Trong 8 ngày đầu họ đã thực hiện được đúng kế hoạch, những ngày còn lại họ đã dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm, nên đã hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải dệt bao nhiêu tấm?

1B. Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng 2 tổ 1 làm vượt mức 12%, tổ 2 vượt mức 15% nên cả hai tổ đã làm được 819 dụng cụ. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

Dạng 2. Toán về công việc làm chung, làm riêng .

Phương pháp giải: Ta chú ý rằng:

- Thường coi khối lượng công việc là 1 đơn vị.
- Năng suất 1 + Năng suất 2 = Tổng năng suất.

2A. Hai tổ sản xuất cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi tổ cần bao nhiêu thời gian mới hoàn thành công việc, biết khi làm riêng tổ 1 hoàn thành sớm hơn tổ 2 là 3 giờ?

1.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

2B. Hai người cùng làm chung một công việc trong 24 giờ thì xong. Năng suất người thứ nhất bằng năng suất người thứ hai. Hỏi nếu mỗi người làm công việc đó một mình thì hoàn thành sau bao lâu?

3A. Hai công nhân nếu làm chung thì trong 12 giờ sẽ hoàn thành công việc. Họ làm chung trong 4 giờ thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, người thứ hai làm nốt công việc còn lại trong 10 giờ thì xong. Hỏi người thứ hai làm một mình bao lâu thì hoàn thành công việc?

3B. Hai người cùng làm chung một công việc thì 15 giờ sẽ xong. Hai người làm được 8 giờ thì người thứ nhất được điều đi làm công việc khác, người thứ hai tiếp tục làm việc trong 21 giờ nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc?

Dạng 3. Toán về quan hệ các số

4A. Tìm hai số dương biết rằng hai lần số lớn lớn hơn ba lần số bé là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119.

4B. Tìm 2 số biết tổng của chúng là 17 và tổng lập phương của chúng bằng 1241.

Dạng 4. Toán có nội dung hình học

5A. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2m, diện tích còn lại của khu vườn là 4256m². Tính các kích thước của khu vườn.

5B. Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2m và chiều rộng 3m thì diện tích tăng 100m². Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng 2m thì diện tích giảm 68m². Tính diện tích thửa ruộng đó.

Dạng 5. Toán chuyển động

Phương pháp giải: Chú ý rằng:

$$\text{Quãng đường} = \text{Vận tốc} \times \text{Thời gian.}$$

6A. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc 30km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

6B. Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình 40km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình 30km/h. Tính quãng đường AB biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

7A. Hai xe máy khởi hành lúc 7 giờ sáng từ A để đến B. Xe máy thứ nhất chạy với vận tốc 30km/h, xe máy thứ hai chạy với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy thứ nhất là 6km/h. Trên đường đi xe thứ hai dừng lại nghỉ 40 phút rồi lại tiếp tục chạy với vận tốc cũ. Tính chiều dài quãng đường AB, biết cả hai xe đến B cùng lúc.

7B. Hai người đi xe đạp cùng lúc, ngược chiều nhau từ hai địa điểm A và B cách nhau 42km và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là 3km.

8A. Lúc 7 giờ sáng, một người đi xe đạp khởi hành từ A với vận tốc 10km/h. Sau đó lúc 8 giờ 40 phút, một người khác đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 30km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

8B. Một đoàn tàu hỏa từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh, 1 giờ 48 phút sau, một đoàn tàu khác khởi hành từ Nam Định cũng đi Thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của đoàn tàu thứ nhất là 5km/h. Hai đoàn tàu gặp nhau (tại 1 ga nào đó) sau 4 giờ 48 phút kể từ khi đoàn tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi đoàn tàu, biết rằng Ga Nam Định nằm trên đường từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh và cách Ga Hà Nội 87km.

Dạng 6. Toán về chuyên động trên dòng nước

Phương pháp giải: Ta có chú ý sau:

- Vận tốc tàu khi xuôi dòng = Vận tốc của tàu khi nước yên lặng

+ Vận tốc dòng nước;

-+ Vận tốc tàu khi ngược dòng = Vận tốc của tàu khi nước yên lặng - Vận tốc dòng nước.

9A. Một canô tuần tra đi xuôi dòng từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2 giờ. Tính vận tốc riêng của canô, biết vận tốc dòng nước là 3km/h.

9B. Một canô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc canô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30km và vận tốc dòng nước là 4km/giờ.

Dạng 7. Các dạng khác

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

10A. Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh biết rằng 25% số học sinh 8A và 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi. Tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21. Tính số học sinh của mỗi lớp?

10B. Tìm số học sinh của hai lớp 8A và 8B, biết rằng nếu chuyển 3 học sinh từ lớp 8A sang lớp 8B thì số học sinh hai lớp bằng nhau, nếu chuyển 5 học sinh từ lớp 8B sang lớp 8A thì số học sinh 8B bằng $\frac{11}{19}$ số học sinh lớp 8A?

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

11. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

12. Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 600 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 10%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó, cả hai đơn vị thu hoạch được 685 tấn thóc. Hỏi năm ngoái, mỗi đơn vị đã thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

13. Một tổ sản xuất phải làm được 600 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất quy định. Sau khi làm xong 400 sản phẩm tổ sản xuất tăng năng suất lao động, mỗi ngày làm tăng thêm 10 sản phẩm so với quy định. Vì vậy mà công việc được hoàn thành sớm hơn quy định một ngày. Tính xem, theo quy định, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm.

14. Một tam giác vuông có chu vi là 30cm, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

15. Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 5 và tổng các bình phương hai chữ số của nó bằng 13. 16. Quãng đường một canô đi xuôi dòng trong 4 giờ bằng 2,4 lần quãng đường một canô đi ngược dòng trong 2 giờ. Hỏi vận tốc canô khi xuôi dòng, biết rằng vận tốc canô khi nước yên tĩnh là 15km/h.

17. Một ô tô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường dài 120km trong một thời gian đã định. Đi được một nửa quãng đường xe nghỉ 3 phút nên để đến nơi đúng giờ, xe phải tăng vận tốc thêm 2km/h trên nửa quãng đường còn lại. Tính thời gian xe lăn bánh trên đường.

18. Hai sân bay Hà Nội và Đà Nẵng cách nhau 600km. Một máy bay cánh quạt từ Đà Nẵng đi Hà Nội. Sau đó 10 phút, một máy bay phản lực từ Hà Nội bay tới Đà Nẵng với vận tốc

4.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

lớn hơn máy bay cánh quạt là 300km/h. Máy bay phản lực đến Đà Nẵng trước khi máy bay cánh quạt đến Hà Nội 10 phút. Tính vận tốc của mỗi máy bay.

19. Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn là $0,2\text{g/cm}^3$ để được một chất lỏng có khối lượng riêng là $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

BÀI 5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

1A. Gọi số tấm thảm phân xưởng phải dệt trong một ngày theo kế hoạch là x (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có phương trình:
$$\frac{3000}{x} - 2 = 8 + \frac{3000 - 8x}{x + 10}$$

Giải phương trình ta được $x = 100$ (TMĐK)

Kết luận

1B. Tương tự 1A, tháng đầu tổ 1 và tổ 2 lần lượt làm được 300 và 420 sản phẩm.

2A. Gọi năng suất của tổ 1 là: x ($x > 0$, phần công việc/giờ); Năng suất của tổ 2 là $\frac{1}{2} - x$ (phần công việc/giờ)

Thời gian tổ 1 làm 1 mình xong công việc là: $\frac{1}{x}$ giờ;

Thời gian tổ 2 làm 1 mình xong công việc là: $\frac{1}{\frac{1}{2} - x}$ giờ;

Theo bài ra có phương trình:
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2} - x} - 3.$$

Giải phương trình ta được $x = \frac{1}{3}$

Vậy thời gian tổ 1, tổ 2 hoàn thành công việc 1 mình lần lượt là 3 giờ và 6 giờ.

2B. Người thứ nhất hoàn thành công việc một mình trong 40 giờ.

Người thứ hai hoàn thành công việc một mình trong 60 giờ.

3A. Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 15 giờ.

3B. Nếu làm một mình, người thứ nhất làm xong công việc trong 22 giờ 30 phút, người thứ hai làm trong 45 giờ.

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

4A. Gọi số lớn là a; số bé là $\frac{2a-9}{3}$

Ta có phương trình: $a^2 - \left(\frac{2a-9}{3}\right)^2 = 119$

Giải phương trình ta được a = 12.

Vậy số lớn là 12, số bé là 5

4B. Gọi số thứ nhất là a, số thứ hai là 17 - a.

Theo đề bài ta có phương trình: $a^3 + (17-a)^3 = 1241$

Giải phương trình ta có a = 9 hoặc a = 8

Vậy số lớn là 9, số bé là 8.

5A. Chiều rộng khu vườn là 60m; Chiều dài khu vườn là 80m.

5B. Diện tích thửa ruộng là 308m².

6A. Gọi thời gian người đó đi từ A đến B là t giờ.

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút nên thời gian về là $t - \frac{1}{3}$ (giờ). Từ đó ta có

phương trình $25t = 30\left(t - \frac{1}{3}\right)$

Giải phương trình ta được t = 2 (giờ). Vậy quãng đường AB là 50km.

6B. Quãng đường AB là 60km

7A. Gọi quãng đường AB là x km (x > 30)

Thời gian xe máy thứ nhất chạy là $\frac{x}{30}$ giờ, thời gian xe máy thứ hai chạy là $\frac{x}{36} + \frac{2}{3}$ (giờ).

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{x}{30} = \frac{x}{36} + \frac{2}{3}$

Giải phương trình ta được x = 120

Vậy quãng đường AB là 120km

7B. Vận tốc người đi từ A đến B là 12km/h và của người đi từ B đến A là 9km/h.

8A. Gọi thời điểm hai người gặp nhau là lúc x(giờ) (x > 0);

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Theo bài ra ta có phương trình: $10(x-7) = 30\left(x - \frac{26}{3}\right)$;

Giải phương trình ta được $x = 9, 5$; hay lúc 9 giờ 30 phút.

hai người gặp nhau lúc 9 giờ 30 phút.

8B. Đoàn tàu từ Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc 40km/h; đoàn tàu từ Nam Định đi thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc 35km/h.

9A. Gọi vận tốc riêng của canô là v (km/h). Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{4}{3}(v+3) = 2(v-3)$$

Giải phương trình ta được $v = 15$ (km/h)

9B. Vận tốc canô khi nước yên lặng là 16km/h.

10A. Gọi số học sinh lớp 8A là x ($x > 21$); Số học sinh lớp 8A là $94 - x$. Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{25}{100}x + \frac{20}{100}(94 - x) = 21$

Giải phương trình ta có $x = 44$.

Vậy số học sinh lớp 8A là 44 em, 8B là 50 em.

10B. Số học sinh lớp 8A là 33 em, 8B là 27 em.

11. Người thứ nhất làm một mình trong 4 giờ thì xong công việc;

Người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì xong công việc.

12. Đơn vị 1 thu hoạch được 350 tấn thóc; đơn vị 2 thu hoạch được 250 tấn thóc.

13. Theo quy định mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 40 sản phẩm.

14. Độ dài các cạnh của tam giác vuông lần lượt là 5cm, 12cm và 13cm.

15. Đáp số: 23 và 32

16. Vận tốc canôo khi xuôi dòng là $\frac{180}{11} \text{ km/h}$

17. Thời gian xe lăn bánh trên đường là 48 giờ.

18. Vận tốc của máy bay cánh quạt là 600km/h; Vận tốc của maysbay phản lực là 900km/h.

19. Khối lượng riêng hai chất lần lượt là 0,8g/cm³; 0,6g/cm³.

7.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

8.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

BÀI 6. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THANG VÀ PARABOL

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho đường thẳng $d : y = mx + n$ và parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Khi đó số giao điểm của d và (P) bằng đúng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$ax^2 = mx + n.$$

Ta có bảng sau đây:

Số giao điểm của d và (P)	Biệt thức Δ của phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)	Vị trí tương đối của d và (P)
0	$\Delta < 0$	d không cắt (P)
1	$\Delta = 0$	d tiếp xúc với (P)
2	$\Delta > 0$	d cắt (P) tại hai điểm phân biệt

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d : y = \frac{1}{2}x + n$.

a) Với $n = 1$, hãy:

- Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ;
- Tìm tọa độ các giao điểm A và B của (P) và d ;
- Tính diện tích tam giác AOB.

b) Tìm các giá trị của n để:

- d và (P) tiếp xúc nhau.
- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt;
- d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía đối của trục Oy.

1B. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m$.

a) Với $m = 3$, hãy:

- Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ;

1.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

ii) Tìm tọa độ các giao điểm M và N của (P) và d;

iii) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm các giá trị của m để:

i) d và (P) tiếp xúc nhau.

ii) d cắt (P) không cắt nhau;

iii) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

2A. Viết phương trình đường thẳng d, biết:

a) d đi qua hai điểm A, B thuộc (P): $y = \frac{x^2}{4}$ và có hoành độ lần lượt là -2; 4;

b) d song song với đường thẳng d': $2y + 4x = 5$ và tiếp xúc với (P): $y = x^2$;

c) d tiếp xúc với (P): $y = \frac{x^3}{3}$ tại điểm C(3; 3).

2B. Viết phương trình đường thẳng d, biết:

a) d đi qua gốc tọa độ và điểm M thuộc (P): $y = 2x^2$ có hoành độ là $\frac{1}{2}$;

b) d vuông góc với đường thẳng d': $x - 3y + 1 = 0$ và tiếp xúc với (P) : $y = \frac{x^2}{2}$;

c) d tiếp xúc với (P): $y = 3x^2$ tại điểm N(1; 3).

3A. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm M(0; -1) có hệ số góc là k.

a) Viết phương trình đường thẳng d và chứng minh với mọi giá trị của k thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.

c) Chứng minh tam giác OAB vuông.

3B. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho M(1;2) và đường thẳng d: $y = -3x + 1$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' đi qua M và song song với d.

b) Cho parabol (P) : $y = mx^2$ ($m \neq 0$). Tìm các giá trị của tham số m để d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B nằm cùng phía đối với trục tung.

2. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

4A. Cho parabol (P) : $y = (2m - 1)x^2$ với ra $m \neq \frac{1}{2}$.

- Xác định tham số ra biết đồ thị hàm số đi qua A(3; 3). Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
- Một đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4, cắt (P) trên tại 2 điểm A và B. Tính diện tích tam giác AOB.

4B. Cho parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng d : $y - 2mx - m + 2$.

- Xác định tham số a biết (P) đi qua A(1;-1);
- Biện luận số giao điểm của (P) và d theo tham số ra.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Trong cùng mặt phẳng tọa độ cho parabol (P) : $y = ax^2$ $a \neq 0$ (a là tham số) và hai đường thẳng $d_1 : y = x + 1$ và $d_2 : x + 2y + 4 = 0$.

- Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 .
- Tìm giá trị của a để (P) đi qua A. Vẽ (P) với a vừa tìm được.
- Viết phương trình đường thẳng d biết d tiếp xúc với (P) tại A.

6. Trong cùng mặt phẳng tọa độ, cho parabol: (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d : $y = mx - 2m - 1$.

- Vẽ (P).
- Tìm giá trị của tham số ra sao cho d tiếp xúc với (P).
- Chứng tỏ d luôn luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).

7. Cho parabol (P): $y =$ và đường thẳng d: $mx + y = 2$.

- Chứng minh (P) và d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Xác định m để AB nhỏ nhất. Tính diện tích A AOB với m vừa tìm được.

8. Cho (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng d đi qua 7(0; 2) có hệ số góc k.

- Chứng minh (P) và d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox. Chứng minh tam giác IHK vuông tại I.

3.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

9. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = mx - m + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn:

a) $|x_1| + |x_2| = 4$;

b) $x_1 = 9x_2$.

10. Cho parabol (P) có đồ thị đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm

a) Viết phương trình của (P).

b) Tìm các giá trị nào của tham số m để đường thẳng d: $y = -\frac{1}{2}x + m$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + 5x_2 = 5$.

11. Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 2m + 3$.

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) biết tung độ của chúng bằng 2.

b) Chứng minh với mọi giá trị của tham số m, thì đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Gọi y_1, y_2 là tung độ các giao điểm của d và (P). Tìm các giá trị của tham số m để $y_1 + y_2 < 9$.

BÀI 6. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẺ PARABOL

1A. a) Với $n = 1$, ta được d: $y = \frac{1}{2}x + 1$

i) HS tự làm.

ii) Xét PT hoành độ giao điểm của d và (P): $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

Từ đó tìm được $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; $B(2; 2)$

iii) Tính được $S_{AOB} = \frac{3}{2}$ bằng một trong các cách sau:

Cách 1. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục Ox. Khi đó

$$S_{AOB} = S_{AHKB} - S_{AHO} - S_{BKO}$$

Cách 2. Gọi I là giao điểm của d và Oy, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Oy. Khi đó

4. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$S_{AOB} = S_{AOI} + S_{BOI} = \frac{1}{2}AM.OI + \frac{1}{2}BN.OI$$

Cách 3. Gọi T là hình chiếu vuông góc của O trên d. Khi đó: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OT.AB$

b) PT hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 - x - 2n = 0$.

i) d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow \Delta = 0$. Từ đó tìm được $n = -\frac{1}{8}$

ii) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

Từ đó tìm được $n > -\frac{1}{8}$

iii) d cắt (P) tại hai điểm nằm ở hai phía trục $Oy \Leftrightarrow ac < 0$. Từ đó tìm được $n > 0$.

1B. a) Với $m = 3$, ta được d : $y = -2x + 3$

i) HS tự làm.

ii) Xét PT hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Giải ra ta được $x_M = -3$ và $x_N = 1$.

Từ đó tìm được $M(-3; 9)$, $N(1; 1)$

iii) Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = 4\sqrt{5}$

b) PT hoành độ giao điểm của d và (p): $x^2 + 2x - m = 0$.

i) d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow \Delta = 0$. Từ đó tìm được $m = -1$.

ii) d cắt không cắt nhau $\Leftrightarrow \Delta < 0$. Từ đó tìm được $m < -1$.

iii) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0. \text{ Từ đó tìm được } -1 < m < 0. \\ P > 0 \end{cases}$$

2A. a) Gọi PT đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Theo đề bài ta có: $A, B \in (P) \Rightarrow A(-2; 1), B(4; 4)$

$$\text{Do } A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d : y = \frac{1}{2}x + 2$$

b) PT đường thẳng d có dạng: $y = -2x + b$ với $b \neq \frac{5}{2}$

PT hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 2x - b = 0$.

d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$

c) Gọi PT đường thẳng d có dạng $y = ax + b$

PT hoành độ giao điểm của d và (p) là:

$$\frac{x^2}{3} - ax - b = 0, \text{ với } \Delta = a^2 + \frac{4}{3}b$$

Để d tiếp xúc với (P) tại điểm C(3;3)

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow d : y = 2x - 3$$

2B. Gọi PT đường thẳng d có dạng $y = ax + b$

a) Vì $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Do } O, M \in d \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \cdot \text{Tìm được } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Từ đó d : $y = x$

b) Vì $d \perp d'$ nên d có dạng: $y = -3x + b$.

PT hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 + 6x - 2b = 0$

Vì d tiếp xúc với (P) nên $\Delta' = 0$

Từ đó tìm được $d : y = -3x - \frac{9}{2}$

c) PT hoành độ giao điểm của d và (P) là $3x^2 - ax - b = 0$.

Vì d tiếp xúc với (P) tại điểm N (1; 3) nên $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a + b = 3 \end{cases}$

6. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Từ đó tìm được $d: y = kx - 1$.

3A. a) Ta có $d: y = kx - 1$

PT hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 + kx - 1 = 0$

Ta có: $\Delta = k^2 + 4 > 0$ với mọi $k \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

b) Ta có: $|x_1 - x_2|^2 = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$

c) Sử dụng định lý Pitago đảo

3B. a) Tìm được $d': y = -3x + 5$ b) Tìm được $-\frac{9}{4} < m < 0$

4A. a) Thay tọa độ điểm A vào PT của (P) tìm được $m = \frac{2}{3}$. Khi đó ta được parabol

$$(P): y = \frac{1}{3}x^2$$

b) Tìm được $A(-2\sqrt{3}; 4)$ và $B(2\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$

Từ đó $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot 4 = 8\sqrt{3}$ (đvdt)

4B. a) Tìm được $y = -x^2$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 + 2mx - m + 2 = 0$ có $\Delta = m^2 + m - 2$.

Với $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -2$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

- Với $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -2$ thì d tiếp xúc (P) .

- Với $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$ thì d không cắt (P) .

5. a) $A(-2; -1)$ b) $a = \frac{-1}{4}$ và $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$ c) $y = x + 1$

6. a) HS tự vẽ hình

b) Tìm được $m = -1$.

c) d luôn đi qua $A(2; -1)$ thuộc (P)

7. a) PT hoành độ giao điểm của d và $(P): \frac{1}{2}x^2 + mx - 2 = 0$

7. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Vì a, c trái dấu (hoặc $\Delta = m^2 + 4 > 0$) $\forall m$ nên ta có ĐPCM.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của PT hoành độ giao điểm

$$\Rightarrow A(x_1; 2 - mx_1), B(x_2; 2 - mx_2) \text{ và } x_1 + x_2 = -2m, x_1x_2 = -4$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(4m^2 + 16)(m^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow AB_{\min} = 4 \text{ tại } m = 0$$

Từ đó $S_{AOB} = 4$

8. a) PT hoành độ giao điểm của d và (P) có a, c trái dấu.

b) Sử dụng định lý Pitago đảo.

9. a) $m = -2$ hoặc $m = 4$

b) $m = 10$ hoặc $m = \frac{10}{9}$

10. a) $y = \frac{-1}{4}x^2$

b) $m = \frac{-5}{16}$

11. a) $(\sqrt{2}; 2)$ và $(-\sqrt{2}; 2)$

b) $\Delta' = (m-1)^2 + 2 > 0 \forall m$

c) $\frac{-1}{2} < m < \frac{3}{2}$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* các bài từ Bài 1 đến Bài 6 của chương này.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Cho phương trình $2mx^2 - 2(2m - 1)x + 2m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt;
- b) Có nghiệm kép;
- c) Vô nghiệm;
- d) Có duy nhất 1 nghiệm;
- e) Có nghiệm.

1B. Cho phương trình $x^2 - (a + 2)x + 4 = 0$. Tìm a để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt;
- b) Có hai nghiệm phân biệt trái dấu;
- c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu dương;
- d) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu âm.

2A. Cho các phương trình:

$$ax^2 + 2bx + c = 0;$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0;$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0$$

trong đó $a, b, c \neq 0$. Chứng minh có ít nhất một trong ba phương trình trên có nghiệm.

2B. Chứng minh phương trình

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

luôn có nghiệm với mọi a, b, c .

3A. Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$; b) $(x - 1)^{2016} + (x - 2)^{2016} = 1$.

3B. Giải các phương trình:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x - 2008 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$.

1.Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

4A. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng đi qua $N(-1;-2)$ và có hệ số góc k .

a) Viết phương trình đường thẳng d .

b) Tìm các giá trị của k để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của trục tung.

c) Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Tìm các giá trị của k để biểu thức $S = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ đạt giá trị lớn nhất.

4B. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$. (m là tham số)

a) Vẽ (P) và d khi $m = 1$.

b) Chứng minh với mọi giá trị của m , d luôn đi qua một điểm cố định và luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

c) Tìm các giá trị của m để tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

5A. Cho phương trình $x^2 + (m + 2)x + 2m - 0$. (m là tham số)

a) Giải và biện luận phương trình.

b) Biết phương trình có một nghiệm là $x = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2.$$

d) Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm đối nhau.

e) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó 2 nghiệm cùng âm hay cùng dương?

g) Đặt $A = x^2 + x^2 - 4x_1x_2 + 4$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình.

Hãy:

i) Tìm biểu thức A theo m ;

ii) Tìm các giá trị của m để $A = 8$;

iii) Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của m .

h) Chứng minh biểu thức: $p = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 4$ không phụ thuộc vào m .

2. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

5B. Cho phương trình: $x^2 - (2a - 1)x - 4a - 3 = 0$. (a là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1 x_2 + x_2^2$

c) Tìm các giá trị của a để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

d) Tìm các giá trị của a để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Cho phương trình: $x^2 - (2a - 6)x + ra - 13 = 0$ (ra là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x_1 x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$.

c) Tìm các giá trị của ra để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

7. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = mx - 2$.

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B với mọi giá trị của tham số ra .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A và B . Tìm giá trị của tham số ra để m để $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 2017$.

8. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = rax + ra + 1$. (ra là tham số)

a) Tìm các giá trị của ra để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B .

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B . Tìm các giá trị của ra để

$$|x_1 - x_2| = 2.$$

c) Tìm các giá trị của ra để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt cùng nằm về phía bên trái của trục tung.

9. Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = 4x - 2$.

a) Chứng minh d tiếp xúc với (P) tại điểm $A(1;2)$.

b) Viết phương trình đường thẳng d' có hệ số góc là ra và đi qua điểm $A(1;2)$. Tìm ra để d' cắt (P) tại hai điểm phân biệt mà một trong hai giao điểm đó có hoành độ lớn hơn 3.

c) Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

3. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

a) Chứng minh với mọi giá trị của a, d luôn cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các giao điểm của d và parabol

(P). Tìm giá trị của a để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$.

11. Cho parabol (P) có đồ thị đi qua gốc tọa độ và qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{4}\right)$.

a) Viết phương trình của (P).

b) Tìm giá trị của a để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $3x_1 + 5x_2 = 5$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1A. a) $-\frac{1}{2} < m \neq 0$

b) $m = \frac{-1}{2}$

c) $m < \frac{-1}{2}$

d) $m = \frac{-1}{2}, m = 0$

e) $m \geq \frac{-1}{2}$

1B. a) $a > 2$ hoặc $a < -6$. b) $a \in \emptyset$

c) $a > 2$; d) $a < -6$.

2A. Chứng minh được: $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 > 0 \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

2B. Ta có: $\Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$

Chứng minh được $\Delta' \geq 0 \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

3A. a) Biến đổi phương trình thành $\sqrt[3]{5-x} = 1 - \sqrt[3]{2+x}$. Sau đó lập phương cả hai vế và đặt $\sqrt[3]{2+x} = t$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - t - 2 = 0$. Giải ra ta được $t = -1$ hoặc $t = 2$

Từ đó tìm được $x = -3$ hoặc $x = 6$

b) Cách 1. Dễ thấy $x = 2$ và $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Đặt $A = (x-1)^{2016} + (x-2)^{2016}$. Ta nhận thấy khi $x > 2$ hoặc $x < 1$ thì $A > 1$. Khi $1 < x < 2$ thì $A < 1$.

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 2. Đặt $a = x - 1$. Phương trình trở thành $a^{2016} + (a-1)^{2016} = 1$.

Nhận xét phương trình chỉ có nghiệm khi $0 \leq a \leq 1$ và khi đó $a^{2016} + (a-1)^{2016} \leq a^2 + (a-1)^2 = 1 - 2a(1-a)$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$

3B. a) Biến đổi phương trình về $(x+1)^3 = 2009$.

Từ đó tìm được $x = -1 + \sqrt[3]{2009}$;

b) Biến đổi phương trình về $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$.

$$x = 1 \pm \sqrt{2}, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

4A. a) d : $y = kx + k - 2$;

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + kx + k - 2 = 0$.

Ta có a, c trái dấu $\Leftrightarrow k < 2$;

$$c) S_{max} = \frac{-15}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} (TM \quad k < 2)$$

4B. a) Khi $m = 1$ thì d : $y = x + 1$. HS tự vẽ hình.

b) d luôn đi qua điểm cố định M (0;1)

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có a, c trái dấu hoặc có $\Delta = m^2 + 1 > 0 \forall m$

$$c) m = \pm 2\sqrt{3}$$

5A. a) Với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$;

Với $m \neq 2$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = -2$ và $x_2 = -m$.

b) $m = -3$ và nghiệm còn lại là $x = -2$;

c) $m = 2$;

d) $m = -2$;

e) $m > 0$ và hai nghiệm cùng âm;

5. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

g) i) $A = m^2 - 8m + 8$; ii) $m = 0$; iii) $A_{\min} = -8 \Leftrightarrow m = 4$;

5B. a) $\Delta = (2a+3)^2 + 4 > 0 \forall a \in \mathbb{R}$ b) $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$

c) $a > -\frac{3}{4}$; d) $a \in \emptyset$

6. a) $\Delta = (2m-7)^2 + 39 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ b) $A_{\max} = -\frac{471}{16} \Leftrightarrow m = \frac{27}{8}$

c) $m = 3$.

7. a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có a, c trái dấu:

b) $m = \frac{2017}{2}$

8.a) $m \neq -2$; b) $m = 0; m = -4$ c) $m < -1; m \neq -2$

9.a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép $x = 1 \Rightarrow y = 2$;

b) $m > 8$.

10. a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có a, c trái dấu;

b) $m = \pm 1$

11. a) $y = -x^2$ b) $m = -20$.

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Phương trình $-3x^2 + 2x + 5 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{1; \frac{5}{3}\right\}$; B. $\left\{1; -\frac{5}{3}\right\}$; C. $\left\{-1; \frac{5}{3}\right\}$; D. $\left\{-1; -\frac{5}{3}\right\}$.

Câu 2. Phương trình nào sau đây có hai nghiệm phân biệt?

- A. $x^2 + 3 = 0$; B. $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
C. $7x^2 + 3x + 5 = 0$; D. $2x^2 - x - 11 = 0$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d: y - ax + 2$ và parabol (P): $y = x^2$. Cho biết d cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 3, hỏi giá trị a khi đó là bao nhiêu?

Câu 4. Cho phương trình $X^2 - 5x = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
B. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
C. Phương trình có đúng một nghiệm dương.
D. Phương trình có hai nghiệm bằng nhau.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Bài 1. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

- a) $2x^2 + 13x + 20 = 0$; b) $x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$.

Bài 2. (2,0 điểm)

- a) Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m(m-1) - 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình không có hai nghiệm phân biệt cùng dương.
b) Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 5 và tổng các bình phương hai chữ số của nó bằng 13.

Bài 3. (4,0 điểm) Cho đường thẳng d và parabol (P) với:

1. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$$d: y - mx + 2 \text{ và } (P): y = \frac{1}{2}x^2. \text{ (m là tham số)}$$

- a) Khi $m = 1$, hãy vẽ d và (P) trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Chứng minh với mọi giá trị của m sao cho d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- c) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) . Hãy tìm ra để:
- i) $x_1 - 2x_2 = 9$;
- ii) Biểu thức $A = 2(x_1 + x_2) - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Phương trình $5x^2 - 3x - 8 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{1; \frac{8}{5}\right\}$; B. $\left\{-1; \frac{8}{5}\right\}$; C. $\left\{1; -\frac{8}{5}\right\}$; D. $\left\{-1; -\frac{8}{5}\right\}$.

Câu 2. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào có nghiệm kép?

- A. $x^2 + 3x - 5 = 0$; B. $2x^2 - 4x + 2 = 0$;
C. $-x^2 + 4x - 5 = 0$; D. $2x^2 + 2 = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng $d: y = x - m$. Giá trị của m để (P) và d tiếp xúc với nhau là:

- A. $m = -1$; B. $m = 8$; C. $m = \frac{1}{16}$ D. $m = \frac{1}{8}$.

Câu 4. Cho phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là nghịch đảo của nhau.
B. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.
C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
D. Phương trình có hai nghiệm bằng nhau.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

2. Đường tuy ngắn không đi sẽ không đến - Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

Bài 1. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0.$

Bài 2. (2,0 điểm) Cho đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 1$ và parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}.$

a) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và d.

b) Tính diện tích tam giác AOB.

Bài 3. (4,0 điểm) Cho phương trình $2x^2 - (m + 4)x + m = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Với $m = 5$, gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tính giá trị của $M = x_1^2 + x_2^2.$

c) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2.$

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. C

Câu 3. A.

Câu 2. D

Câu 4. C

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. Giải ra ta được: a) $x \in \left\{-4; \frac{-5}{2}\right\}$ b) $x \in \{-1 + \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}\}$

Bài 2. a) PT có hai nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 8m + 1 > 0 \\ S = 2m + 1 > 0 \\ P = m(m - 1) > 0 \end{cases} \text{ . Giải ra ta được } m > 1.$$

Từ đó kết luận: PT không có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow m \leq 1.$

b) Gọi các chữ số hàng chục và hàng đơn vị lần lượt là a và b ($a \in \mathbb{N}^*$, $a \leq 9$; $b \in \mathbb{N}$, $b \leq 9$)

Theo đề bài, ta có:
$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

3. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Giải ra ta được $a = 2, b = 3$ hoặc $a = 3, b = 2$.

Kết luận.

Bài 3. a) HS tự làm

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 = 2mx - 4 = 0$.

Cách 1. Vì $\Delta' = m^2 + 4 > 0 \forall m$ nên ta có ĐPCM.

Cách 2. Vì $ac = -4 < 0$ nên PT luôn có hai nghiệm trái dấu do đó chúng phân biệt (ĐPCM)

c) i) Từ giả thiết và theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = -4 \\ x_1 - 2x_2 = 9 \end{cases}$$

Giải ra ta được $x_1 = 1, x_2 = -2m$ nên tìm được $m = -\frac{3}{2}$ hoặc $m = \frac{15}{4}$

ii) Ta có $A = 2(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét và biến đổi ta được: $A = -(2m - 1)^2 - 7$.

Từ đó tìm được $A_{\min} = -7 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. B Câu 3. D.

Câu 2. B Câu 4. A

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) $\left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$ b) $\{-1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

Bài 2.a) Tìm được $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $B(2; 2)$ là tọa độ các giao điểm của d và (P) .

b) HS tự vẽ d và (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

Cách 1. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục Ox. Khi đó:

$$S_{AOB} = S_{AHKB} - S_{AHO} - S_{BKO}$$

Từ đó tìm được $S_{AOB} = \frac{3}{2}$ (đvdt)

4. Đường tụy gần không đi sẽ không đến-Việc tụy nhỏ không làm sẽ không nên

Cách 2. Gọi I là giao điểm của d và Oy, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Oy. Khi đó:

$$S_{AOB} = S_{AOI} + S_{BOI} = \frac{1}{2}AM.OI + \frac{1}{2}BN.OI$$

Từ đó ta cũng tìm được $S_{AOB} = \frac{3}{2}$ (đvdt)

Cách 3. Gọi T là hình chiếu vuông góc của O trên d. T đồng thời thuộc đường thẳng đi qua O và vuông góc với d. Từ đó tính được OT và AB rồi áp dụng công thức $S_{AOB} = \frac{1}{2}OT.AB$ ta cũng tìm được $S_{AOB} = \frac{3}{2}$ (đvdt).

Bài 3. a) PT có hai nghiệm x_1, x_2 , trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$. Từ đó tìm được $m < 0$.

b) Với $m = 5$, phương trình có dạng $2x^2 - 9x + 5 = 0$.

Cách 1. Áp dụng công thức nghiệm của PT bậc hai, các nghiệm x_1, x_2 và thay vào M tìm được $M = \frac{61}{4}$.

Cách 2. Biến đổi $M = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ rồi áp dụng hệ thức Vi-ét ta cũng tìm được $M = \frac{61}{4}$.

c) Vì $\Delta = m^2 + 16 > 0 \forall m$ nên PT luôn có hai nghiệm phân biệt.

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Ta có $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Trường hợp 2. Ta có $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Trường hợp 3. Ta có $x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Kết luận

d) Ta có $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$