

RÚT GỌN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN
LUYỆN THI VÀO 10

Câu 1. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát vòng 1- Ái Mộ -Long Biên-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0$, $x \neq 4$; $x \neq \frac{9}{4}$.

a) Tính giá trị biểu thức B khi $x = 25$.

b) Biết $P = B : A$. Chứng minh rằng: $P = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Khi $x = 25$, giá trị của biểu thức B là: $\frac{2}{\sqrt{25}-2} = \frac{2}{3}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{4\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2(2\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

c) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3} = \frac{1}{2-\frac{3}{\sqrt{x}}}$ (Vì $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0$).

P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{1}{2-\frac{3}{\sqrt{x}}}$ nguyên $\Leftrightarrow 2-\frac{3}{\sqrt{x}} \in U(1) = \{1; -1\}$.

Khi đó $P = 1$ hoặc $P = -1$.

Với $P = 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

Với $P = -1 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $x \in \{1; 9\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Cách khác:

Đề P nguyên thì $\sqrt{x}:(2\sqrt{x}-3) \Rightarrow 2\sqrt{x}:(2\sqrt{x}-3)$

Mà $(2\sqrt{x}-3):(2\sqrt{x}-3) \Rightarrow (2\sqrt{x}-3)-2\sqrt{x}:(2\sqrt{x}-3) \Leftrightarrow -3:(2\sqrt{x}-3)$

Suy ra $(2\sqrt{x}-3) \in U(-3) = \{\pm 1; \pm 3\}$. Giải rồi thử lại điều kiện và kết luận.

Câu 2. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Trung tâm Bồi dưỡng Văn hóa Hà Nội – Amsterdam 07/6/2020

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

c) Tìm x thỏa mãn $(x - \sqrt{x} - 3) \cdot M = 1$.

Hướng dẫn

a) Rút gọn M .

Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 1$

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}+x}{x-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}} \right)$$

$$M = \left[\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+4)}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x}+x)(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}(x+2\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+4)}$$

$$M = \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x - x\sqrt{x} - 2x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+4)}$$

$$M = \frac{x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x}}{x(x-\sqrt{x}+4)}$$

$$M = \frac{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+4)}{x(x-\sqrt{x}+4)}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{x}}. \text{ Vậy: } \dots\dots\dots$$

b) Tính giá trị của M khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Thay $x = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ (thỏa mãn $x > 0, x \neq 1$) vào M ta được:

$$M = \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

c) Tìm x thỏa mãn $(x-\sqrt{x}-3).M=1$.

Với $x > 0, x \neq 1$

$$(x-\sqrt{x}-3).M=1 \Leftrightarrow (x-\sqrt{x}-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-3 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-3=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ (loại) hoặc } \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn } x > 0, x \neq 1)$$

Vậy $x=9$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

Câu 3. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK2-Amsterdam-2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{x-7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=9$

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

1) Với $x=9$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Thay } x=9 \text{ vào } A, \text{ ta có: } A = \frac{9-7}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy khi } x=9 \text{ thì } A = \frac{2}{3}$$

$$2) B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4} \text{ với } x > 0, x \neq 4$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2-x-2\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0, x \neq 4$$

3) $P = A.B$ ($x > 0, x \neq 4$)

$$P = \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2}$$

$$+ \text{ Xét } P = 0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x-7=0 \Leftrightarrow x=7 \text{ (thỏa mãn dk)}$$

+ Xét $P \neq 0$.

TH1: $x \in \mathbb{Z}; x \neq 7; \sqrt{x}$ là số vô tỉ $P \notin \mathbb{Z}$ (loại)

TH2: $x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x-4-3}{\sqrt{x+2}} = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Đề } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \in U(3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \in \{1, 3\}$$

$$\text{do } \sqrt{x+2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $x \in \{1, 7\}$ thì P có giá trị nguyên

Câu 4. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (ARCHIMEDES ACADEMY - 15/05/2020)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-x-3}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của x để $A = \frac{4}{5}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .

Hướng dẫn

$$\text{a) } A = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-x-3}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \text{ (với } x \geq 0, x \neq 1 \text{)}$$

$$A = \left(\frac{(\sqrt{x+1})^2}{x-1} - \frac{(\sqrt{x-1})^2}{x-1} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x-x-3}}{x-1} - \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \right)$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x+1}-x+2\sqrt{x-1}-8\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x-x-3}-\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$A = \frac{-4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{-\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có $A = \frac{4}{5}$ ($x \geq 0, x \neq 1$)

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{x}}{x+4} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{20\sqrt{x}}{5(x+4)} = \frac{4(x+4)}{5(x+4)} \Rightarrow 5\sqrt{x} = x+4$$

$$\Leftrightarrow x - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 4 = 0 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 & (\text{tm}) \\ x = 1 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy $A = \frac{4}{5}$ khi $x = 16$.

c)

+) Với $x = 0$ (tmdkxd) $\Rightarrow A = \frac{4 \cdot \sqrt{0}}{0+4} = 0$.

+) Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 4\sqrt{x} > 0$

Ta có $A = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{x+4}{4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (có thể chia cả tử và mẫu cho \sqrt{x} mà không cần phải nghịch

đảo A)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{\sqrt{x}}{4}$ và $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) ta có:

$$\frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq 1 \Leftrightarrow A \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{4} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 1$ khi $x = 4$.

Câu 5. (Thầy Nguyễn Chí Thành) KHẢO SÁT LỚP 9 – BA ĐÌNH NĂM HỌC 2019-2020

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm các số nguyên tố x để $A \cdot B < 1$

Hướng dẫn

1) * Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện)

* Ta có: $A = \frac{\sqrt{25}+1}{\sqrt{25}-3} = \frac{5+1}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$

* Vậy $A = 3$ tại $x = 25$

2) $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 1$.

$$B = \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{(2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$3) A, B = \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow x < 9$$

Mà $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 9$

Mà x là số nguyên tố nên $x \in \{2; 3; 5; 7\}$

Câu 6. (Thầy Nguyễn Chí Thành) ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG – BẮC NINH – 2020-2021

a) Thực hiện phép tính $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{108} - \sqrt{12}$

b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

Hướng dẫn

a) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{108} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

b) $A = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}+\sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+2$$

Vậy $A = 2\sqrt{x}+2$ với $x > 0, x \neq 1$

Câu 7. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát – Bắc Từ Liêm-2019-2020)

Cho hai biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}$ Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

1) Tính giá trị biểu thức P khi $x = 25$.

2) Rút gọn biểu thức Q.

3) Biết $A = \frac{P}{Q}$. Tìm số nguyên x để $|A| > A$.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 25$ (tmđk) vào P, ta có: $P = \frac{1}{\sqrt{25}+1} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
 2) Q &= \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+2+x-9-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}
 \end{aligned}$$

$$3) A = \frac{P}{Q} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Ta có: $|A| > A \Leftrightarrow A < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2; \sqrt{x}+1$ cùng dấu

$\Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0$ vì $(\sqrt{x}+1 > 0)$.

$\Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 \leq x < 4$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3\}$

Câu 8. (Thầy Nguyễn Chí Thành) KHẢO SÁT PHỨC DIỄN – 2019 – 2020

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm x để biểu thức $M = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

1) $x=16$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Thay $x=16$ vào biểu thức A , ta được: $A = \frac{\sqrt{16}+5}{2\sqrt{16}-1} = \frac{4+5}{2.4-1} = \frac{9}{7}$

Vậy khi $x=16$ thì giá trị của biểu thức là $A = \frac{9}{7}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$. Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$B = \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq \frac{1}{4}$ thì $B = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

3) Với $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq \frac{1}{4}$. Ta có: $M = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} + 5}{2\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$.

Với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{4} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} + 1} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1} \leq 5 \Rightarrow M \leq 5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy khi $x = 0$ thì biểu thức M đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

Câu 9. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát chất lượng – Bò Đề - Long Biên-30/6/2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức $C = A + B$.
- So sánh giá trị của biểu thức C với 1.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

Ta có $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

Thay $x = 4$ vào biểu thức A , ta được: $A = \frac{4+2}{4\sqrt{4}-1} = \frac{6}{7}$.

Vậy $A = \frac{6}{7}$ khi $x = 4$.

b) Rút gọn biểu thức $C = A + B$.

Ta có $C = A + B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$C = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy $C = A + B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

c) So sánh giá trị của biểu thức C với 1.

$$\text{Xét } C - 1 = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{-(x+1)}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vì $x \geq 0$ nên $x+1 > 0$; $x+\sqrt{x}+1 > 0$ do đó $C - 1 = \frac{-(x+1)}{x+\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow C < 1$.

Vậy $C < 1$.

Câu 10. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK2-Câu Giấy-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 16$

2) Biết $P = A + B$. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

3) Với x để $P > \frac{3}{2}$

Hướng dẫn

1) Giá trị $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) $x \geq 0; x \neq 4$, thay vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{2}{\sqrt{16}-2} = \frac{2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

Vậy khi $x = 16$ thì $B = 1$

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} P = A + B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 6 + 2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 6 + 2\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ (đpcm)

3) Để $P > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2}) > 3(\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+4} > 3\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq x < 1$ thì $P > \frac{3}{2}$

Câu 11. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát lần 2 – Cầu Giấy – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}-7}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị A khi $x=16$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$.

c) Cho biểu thức $M = A.B$. Tìm giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{16-3}{\sqrt{16+1}} = \frac{13}{4+1} = \frac{13}{5}$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$, ta lần lượt có

$$\begin{aligned} B &= \frac{x-\sqrt{x}-7}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} + \frac{x-4}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} - \frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-7+(x-4)-(x-9)}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-7+x-4-x+9}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} \text{ (Điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

c) Ta có

$$M = A.B = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} = \frac{x-3}{\sqrt{x+3}} = \frac{x-9+6}{\sqrt{x+3}} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3})+6}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x}-3 + \frac{6}{\sqrt{x+3}}$$

+ Xét $x=3 \Rightarrow M=0 \in \mathbb{Z}$. Vậy $x=3$ thỏa mãn.

+ Xét $x \neq 3, x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow M \notin \mathbb{Z}$.

+ Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x+3}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}) \in U(6)$.

Mà $U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ và $\sqrt{x+3} \geq 3$ với $x \geq 0; x \neq 4$ nên $(\sqrt{x+3}) \in \{3; 6\}$.

+) Nếu $\sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn).

+) Nếu $\sqrt{x+3} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (Thỏa mãn).

Vậy khi $x \in \{0; 3; 9\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

Câu 12. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề minh họa vào 10 – Cầu Giấy – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}} + \frac{3+5\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị A khi $x = 16$.

b) Chứng minh rằng: $B = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$

c) Cho biểu thức $M = B.A$. Tìm giá trị của m để có x thỏa mãn $M = m$.

Hướng dẫn

a) Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện). Thay $x = 16$ vào A ta được

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}+3} = \frac{4-1}{4+3} = \frac{3}{7}$$

Vậy với $x = 16$ thì giá trị của biểu thức $A = \frac{3}{7}$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}} + \frac{3+5\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(3\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+3x+9\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9+3+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{4x+16\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{4(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy điều phải chứng minh $B = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$.

$$c) M = B.A = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Để } M = m \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} = m \Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4 = m(\sqrt{x}+3)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4 = m\sqrt{x}+3m \Leftrightarrow 4\sqrt{x}-m\sqrt{x} = 3m-4 \Leftrightarrow \sqrt{x}(4-m) = 3m-4 \quad (*)$$

Xét $m = 4 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 8 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

$$\text{Với } m \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3m-4}{4-m}$$

$$\text{Để có giá trị của } x \text{ thì } \begin{cases} \frac{3m-4}{4-m} \geq 0 \\ \frac{3m-4}{4-m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq m < 4 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy với $\frac{4}{3} \leq m < 4$ và $m \neq 2$ để có x thỏa mãn $M = m$.

Câu 13. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát tháng 4/2020-Dịch Vọng Hậu- Cầu Giấy)

Cho $P = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ và với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh $P > \frac{1}{2}$.

c) Tìm x để $N = P \cdot \frac{3\sqrt{x}}{x-1}$ nguyên.

Hướng dẫn

a) Với mọi x thỏa mãn ĐKXD ta có:

$$P = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) Với mọi x thỏa mãn ĐKXD ta có

$$P > \frac{1}{2} \Leftrightarrow P - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \text{ (thỏa mãn)}. \text{ Kết hợp điều kiện xác định suy ra } x > 4$$

Vậy $x > 4$.

$$c) N = P \cdot \frac{3\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Ta có : $N = \frac{3}{\sqrt{x+1}} > 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định

Và $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq 3 \Rightarrow 0 < N \leq 3$

Mà $N \in \mathbb{Z} \Rightarrow N \in \{1; 2; 3\}$.

Các em giải từng trường hợp $N = 1; N = 2; N = 3$ sẽ tìm được $x \in \{0; 1; 4\}$

Kết luận :

Câu 14. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát tháng 5/2020-Dịch Vọng Hậu- Cầu Giấy)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{x-4}$ và $B = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$.
- 3) So sánh P và \sqrt{P} .

Hướng dẫn

1) Với $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định, thay vào biểu thức B ta có:

$$B = \frac{4(\sqrt{9}+2)}{\sqrt{9}-2} = \frac{4(3+2)}{3-2} = \frac{20}{1} = 20.$$

2) Với $x \geq 0, x \neq 4$

$$P = A : B$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{x-4} \right) : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{4x}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \left[\frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{4x}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{x+4\sqrt{x}+4-x+4\sqrt{x}-4+4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \frac{4x+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{4(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

$$3) \text{ Ta có } P-1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{-2}{\sqrt{x+2}}$$

Với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 2 > 0$ mà $-2 < 0$.

Suy ra

$$P-1 = \frac{-2}{\sqrt{x+2}} < 0 \Rightarrow P < 1 \text{ mà } P \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 4$$

$$\Rightarrow P(P-1) \leq 0 \Leftrightarrow P^2 - P \leq 0 \Leftrightarrow P^2 \leq P \Leftrightarrow P \leq \sqrt{P}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $\sqrt{P} \geq P$.

Câu 15. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10- Dương Nội – 2019-2020)

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ với $x = 4$

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$ ($x > 0, x \neq 4$)

a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$

Hướng dẫn

1) Với $x = 4$ thì $A = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4-1}} = \frac{3}{1} = 3$

2a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$P = \left(\frac{x-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) $2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} + 2 = 0$ (1)

Đặt $\sqrt{x} = t (t \geq 0, t \neq 2)$. Khi đó phương trình (1) trở thành: $2t^2 + 3t + 2 = 0$ (2)

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$$

\Rightarrow Phương trình (2) vô nghiệm.

\Rightarrow Không có giá trị của x thỏa mãn.

Câu 16. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát Đại Áng – Thanh Trì tháng 5 – 2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{3\sqrt{x}+6}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \frac{81}{16}$.
 b) Rút gọn biểu thức B.
 c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = A.B$.

Hướng dẫn

a) Với $x = \frac{81}{16}$ (Thỏa mãn ĐKXD) ta có $A = \frac{\sqrt{\frac{81}{16}}-2}{\sqrt{\frac{81}{16}}+3} = \frac{\frac{9}{4}-2}{\frac{9}{4}+3} = \frac{1}{21}$.

Vậy khi $x = \frac{81}{16}$ thì $A = \frac{1}{21}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có:

$$B = \left(\frac{3\sqrt{x}+6}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} : (\sqrt{x}+3) = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

c) Ta có $M = A.B$ hay $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (t/m).

Vậy GTLN của biểu thức $M = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 17. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề khảo sát vào 10 – Đan Phượng-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$;

3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

Hướng dẫn

1) Khi $x = 25$ (tmdk): $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$.

$$2) B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x-4} - \frac{3(\sqrt{x}-2)}{x-4} - \frac{12}{x-4}$$

$$= \frac{x+4\sqrt{x}+4-3\sqrt{x}+6-12}{x-4} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$$|P| > P \Leftrightarrow P > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} > 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với $x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$

Vậy với $x > 1, x \neq 4$ thì $|P| > P$.

Câu 18. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề khảo sát chất lượng Lần 6-Đền Lừ-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+3}{x-1}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq \pm 1$

- 1) Tính giá trị biểu thức B với $x = 4$
- 2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$ với $x \geq 0, x \neq \pm 1$
- 3) Tìm các giá trị của x để $P < -1$

Hướng dẫn

1) Tính giá trị biểu thức B với $x = 4$

Với $x = 4$ thỏa mãn $x \geq 0, x \neq \pm 1$. Khi đó $B = \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{4}{\sqrt{4}-1} = \frac{4}{2-1} = 4$

2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$ với $x \geq 0, x \neq \pm 1$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+3}{x-1}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} + \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x-1} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{x+\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}+1-x-3}{x-1}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)}$$

$$\text{Vậy: } A : B = \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)} : \frac{x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 2)}{x}$$

3. Tìm các giá trị của x để $P < -1$

$$P < -1 \Leftrightarrow P + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 2)}{x} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 2) + x}{x} < 0$$

Do $x > 0$ (điều kiện câu b)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2) \cdot (\sqrt{x} - 1) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \quad (\text{Do } (\sqrt{x} + 2) > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy với $0 < x < 1$ thì $\Leftrightarrow P < -1$

Câu 19. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề HK2-Đông Đa-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 7}$ và $B = \frac{2 - 3\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

2) Chứng minh: $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$.

3) Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả giá trị nguyên của x để $\sqrt{P} \leq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được

$$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 7} = \frac{\sqrt{9} - 2}{\sqrt{9} + 7} = \frac{3 - 2}{3 + 7} = \frac{1}{10}$$

Vậy $A = \frac{1}{10}$ khi $x = 9$.

$$2) B = \frac{2 - 3\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \frac{2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} + \frac{x}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{2 - 3\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2 + x}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

$$3) P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+7}} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}}$$

Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}} > 0, \forall x > 0$ nên \sqrt{P} luôn xác định.

$$\text{Đề } \sqrt{P} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}} - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-7}{4(\sqrt{x+7})} \leq 0$$

$$\text{Ta có: } x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} > 7 \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+7}) > 28 > 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x}-7 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{49}{9}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $0 < x \leq \frac{49}{9}$ và $x \neq 4$.

$\Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 5\}$ là các giá trị nguyên của x .

Vậy $x \in \{1; 2; 3; 5\}$ là các giá trị nguyên cần tìm để $\sqrt{P} \leq \frac{1}{2}$.

Câu 20. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề Khảo sát-Đông Đa-20/6/2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{4\sqrt{x}-6}{x-3\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm tất cả các giá trị của m để có giá trị x thỏa mãn $P+m=1$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$

Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0; x \neq 9$) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{36}+1}{\sqrt{36}} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$

Vậy với $x = 36$ thì $A = \frac{7}{6}$

b) Rút gọn biểu thức B

Với $x > 0; x \neq 9$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{4\sqrt{x}-6}{x-3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{4\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (4\sqrt{x}-6)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 9$ thì $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$.

c) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm tất cả các giá trị của m để có giá trị x thỏa mãn $P + m = 1$

Với $x > 0; x \neq 9$

Ta có: $P = \frac{B}{A}$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$$

Theo bài: $P + m = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} + m = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} = m$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} = m > 0 \text{ (Vì } x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0)$$

Vì $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} < 3 \Leftrightarrow m < 3$

Vì $x \neq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 3 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \neq 4 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{4}$

Từ đó suy ra: $0 < m < 3, m \neq \frac{3}{4}$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

Câu 21. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10 – EDUFLY - 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2(x + \sqrt{x}) + 3}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \left(\frac{x - 21}{x - 9} - \frac{2}{3 - \sqrt{x}} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 10}{x - 9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{9}$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm các giá trị của x biết $2AB = 3 - 2x^2$.

Hướng dẫn

1) Với $x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Thay $x = \frac{1}{9}$ vào biểu thức $A = \frac{2(x + \sqrt{x}) + 3}{\sqrt{x} - 3}$ ta được:

$$A = \frac{2\left(\frac{1}{9} + \sqrt{\frac{1}{9}}\right) + 3}{\sqrt{\frac{1}{9}} - 3} = \frac{\left[2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + 3\right] \cdot 9}{\left(\frac{1}{3} - 3\right) \cdot 9} = \frac{2(1+3) + 27}{3 - 27} = \frac{8 + 27}{-24} = -\frac{35}{24}$$

Vậy khi $x = \frac{1}{9}$ thì $A = -\frac{35}{24}$.

2) Với $x \geq 0$; $x \neq 9$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x-21}{x-9} - \frac{2}{3-\sqrt{x}} \right) : \frac{2\sqrt{x}+10}{x-9} \\ &= \left(\frac{x-21}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) \cdot \frac{x-9}{2\sqrt{x}+10} \\ &= \frac{x-21+2\sqrt{x}+6}{x-9} \cdot \frac{x-9}{2\sqrt{x}+10} = \frac{x+2\sqrt{x}-15}{2\sqrt{x}+10} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+5\sqrt{x}-15}{2\sqrt{x}+10} = \frac{(x-3\sqrt{x})+(5\sqrt{x}-15)}{2\sqrt{x}+10} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+5(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)}{2(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 9$ thì $B = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$.

$$3) \text{ Với } x \geq 0; x \neq 9, \text{ ta có } 2AB = 3 - 2x^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2(x+\sqrt{x})+3}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = 3 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+\sqrt{x})+3 = 3 - 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \text{ (do } x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

Vậy với $x = 0$ thì $2AB = 3 - 2x^2$.

Câu 22. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi khảo sát vào lớp 10- Gia Lâm – 25/6/2020)

Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$; $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ với $x > 0$, $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức Q .

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 16$ (TMDK) vào biểu thức P ta có: $P = \frac{16+3}{\sqrt{16}-2} = \frac{19}{4-2} = \frac{19}{2}$

Vậy với $x = 16$ thì $P = \frac{19}{2}$

2) Rút gọn biểu thức Q .

$$Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{4-x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất:

Ta có: $\frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

Vì $x > 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \frac{3}{\sqrt{x}} > 0$

Áp dụng BĐT Cosi cho 2 số $\sqrt{x}, \frac{3}{\sqrt{x}}$ ta có: $\frac{P}{Q} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3}$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$ (TM)

Vậy $\text{Min} \frac{P}{Q} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3$

Câu 23. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử Giảng Võ – 28/5/2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} + \frac{6\sqrt{x}+20}{25-x}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.

1. Tính giá trị của A khi $x = 64$.

2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+5}$.

3. Tìm x để $A.B = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn

1. Tính A khi $x = 64$

$$A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} = \frac{3\sqrt{64}}{\sqrt{64}+4} = \frac{3.8}{8+4} = \frac{24}{12} = 2.$$

2. Ta xét biểu thức B với $x \geq 0; x \neq 25$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} + \frac{6\sqrt{x}+20}{25-x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{6\sqrt{x}+20}{x-25} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{6\sqrt{x}+20}{(x-\sqrt{5})(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{6\sqrt{x}+20}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}-6\sqrt{x}-20}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-\sqrt{x}-20}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+5} \end{aligned}$$

3. Tìm x để $A.B = \frac{4}{\sqrt{x}}$

Với $x \geq 0; x \neq 25$.

$$A.B = \frac{(3\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+5)} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4\sqrt{x} + 20 \Leftrightarrow 3x - 4\sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(3\sqrt{x}-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \frac{100}{9} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy với $x = \frac{100}{9}$ thì $A.B = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Câu 24. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10- Giảng Võ – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm x để $B < \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn

1) Thay $x=9$ (TMĐK) vào biểu thức, ta có: $A = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}+1} = \frac{3}{2}$

Vậy khi $x=9$ giá trị của $A = \frac{3}{2}$

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có

$$B < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}+5-4\sqrt{x}-8}{5(\sqrt{x}+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{5(\sqrt{x}+2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \quad (\text{vì } 5(\sqrt{x}+2) > 0) \Rightarrow 0 \leq x < 9, x \neq 1$$

Vậy để $B < \frac{4}{5}$ thì $0 \leq x < 9, x \neq 1$

Câu 25. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10- Giảng Võ – 2019-2020)

Cho các biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-21}{x-9}; B = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

- a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=16$.
- b) Rút gọn biểu thức $M = A + B$.
- c) Tìm tất cả các số nguyên x để M có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $x=16$ (thỏa mãn ĐKXD) thì $B = \frac{2}{\sqrt{16}-3} = \frac{2}{4-3} = 2$.

$$b) M = \frac{3\sqrt{x} - 21 + 2(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{5\sqrt{x} - 15}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{5}{\sqrt{x} + 3}$$

$$c) \text{Ta có } M = \frac{5}{\sqrt{x} + 3} \text{ nên } 0 < M \leq \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Mà M là số nguyên nên M = 1.

$$\text{Do đó } \frac{5}{\sqrt{x} + 3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (Thỏa mãn ĐKXD)}$$

Câu 26. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát chất lượng – Hà Đông – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5}{1 - \sqrt{x}} + \frac{4}{x - 1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$).

a) Tính giá trị của A khi $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Đặt $P = A.B$. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để P có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của A khi $x = 36$.

$$\text{Thay } x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A, ta được: } A = \frac{\sqrt{36} - 1}{\sqrt{36} - 3} = \frac{6 - 1}{6 - 3} = \frac{5}{2}.$$

b) Rút gọn biểu thức B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5}{1 - \sqrt{x}} + \frac{4}{x - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3) \cdot (\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} + \frac{5 \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} + \frac{4}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} - 3 + 5\sqrt{x} + 5 + 4}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + 7\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + \sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1}. \text{ Vậy } B = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

c) Đặt $P = A.B$. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để P có giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } P = A.B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3}$$

$$P = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3 + 9}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{9}{\sqrt{x} - 3}$$

+) TH1: Với $0 \leq x < 9 \Rightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Rightarrow P < 1$.

+) TH2: Với $x > 9$ mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 10 \Rightarrow \sqrt{x} - 3 \geq \sqrt{10} - 3 > 0$.

$$\text{Do đó } \frac{9}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{9}{\sqrt{10}-3} \Rightarrow P \leq 1 + \frac{9}{\sqrt{10}-3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn)

Vậy $x=10$ thì P có giá trị lớn nhất.

Câu 27. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – Hà Đông – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $M = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $N = \frac{8}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0$.

a) Tính giá trị của N khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức M .

c) Tìm x sao cho $M \leq N$.

Hướng dẫn

a) $x=25$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

$$\text{Thay } x=25 \text{ vào biểu thức } N = \frac{8}{\sqrt{x}+3} \text{ ta được: } N = \frac{8}{\sqrt{25}+3} = \frac{8}{5+3} = \frac{8}{8} = 1.$$

Vậy khi $x=25$ thì $N=1$.

b) Với $x > 0$. Ta có:

$$M = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$M = \frac{x+\sqrt{x}+1+3\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$M = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy với } x > 0 \text{ thì } M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{c) Với } x > 0, \text{ ta có: } M \leq N \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{8}{\sqrt{x}+3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 \leq 8(\sqrt{x}+1) \text{ (do } \sqrt{x}+3 \text{ và } \sqrt{x}+1 \text{ dương)}$$

$$\Leftrightarrow x+6\sqrt{x}+9 \leq 8\sqrt{x}+8 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \text{ (do } (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy với $x=1$ thì $M \leq N$.

Câu 28. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Khảo sát chất lượng lần 1 – Hà Huy Tập – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{x+5}{x-1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x+1}}$ ($x > 0; x \neq 1$).

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Tìm x để $A.B(\sqrt{x}-1) \geq x-1$.

Hướng dẫn

a) Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào A , ta có $A = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Vậy với $x = 4$ thì $A = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x+5}{x-1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+5}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} + \frac{3}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+5}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} - \frac{2(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} + \frac{3(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{x+5-2(\sqrt{x+1})+3(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

$$\text{c) } A.B(\sqrt{x}-1) \geq x-1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x}-1) \geq x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq x-1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \leq 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+1 > 0, \forall x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Kết hợp điều kiện: $0 < x \leq 4; x \neq 1$

Vậy với $0 < x \leq 4; x \neq 1$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 29. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS-THPT Hà Thành – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$

3) Tìm x để $A.B$ có giá trị nguyên

Hướng dẫn

1) Thay $x = 9$ (TMĐK) vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+2} = \frac{4}{5}$

Vậy $A = \frac{4}{5}$ khi $x = 9$

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-11-x+2\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+4\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

3) $A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2}$

Có $x \geq 0$ với mọi x TMĐK

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} \leq 3 \Leftrightarrow A.B \leq 3 \quad (1)$$

Có $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi x TMĐK

$$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} > 1 \Rightarrow A.B > 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 1 < A.B \leq 3$

Mà $A.B \in \mathbb{Z} \Rightarrow A.B \in \{2; 3\}$

Với $A.B = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+6 = 2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow -\sqrt{x} = -2 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

Với $A.B = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+6 = 3\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow -2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (TM)

Vậy $x = 0$ thì $A.B$ có giá trị nguyên

Câu 30. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10 - THCS Hai Bà Trưng – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho $\frac{A}{B} < 4$

Hướng dẫn

1) Với $x > 0, x \neq 25$ ta có $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$

Ta thấy $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định

Thay $x = 9$ vào biểu thức A ta được: $A = \frac{4\sqrt{9}}{\sqrt{9}-5} = \frac{4 \cdot 3}{3-5} = \frac{12}{-2} = -6$.

2) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$.

$$B = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-4 + \sqrt{x}-1 + 5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

3) $\frac{A}{B} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-5}$.

Ta có $\frac{A}{B} < 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25$.

Kết hợp điều kiện xác định suy ra $0 < x < 25, x \neq 1$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x = 24$.

Câu 31. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THPT Hoàng Mai – 2020-2021)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right)$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm x để $P = \sqrt{x}-2$.

c) Tìm m để có x thỏa mãn $(\sqrt{x}+1)P = m-x$.

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)-(x+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x+1)+(x+1)} + \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P = \sqrt{x}-2 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = x-\sqrt{x}-2 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 = \sqrt{2} \\ \sqrt{x}-1 = -\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3+2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$(\sqrt{x}+1)P = m-x \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = m-x \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = m-x \Leftrightarrow x+\sqrt{x} = m+1$$

Có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Có $x \neq 1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{1} \neq m+1 \Leftrightarrow m \neq 1$

Vậy với $m \geq -1; m \neq 1$ thì có x thỏa mãn $(\sqrt{x}+1)P = m-x$

Câu 32. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Quận Hoàng Mai – 2020-2021)

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm x để $B(\sqrt{x}+1) \geq 2x - 2\sqrt{x} - 3$.

Hướng dẫn

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

Ta có $x = 4$ (tmdk), thay $x = 4$ vào biểu thức A ta được

$$A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4}+5}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$$

Vậy $A = \frac{7}{2}$ khi $x = 4$.

2)

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (3\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Xét $B(\sqrt{x}+1) \geq 2x - 2\sqrt{x} - 3$

Biến đổi được $(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) \leq 0$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Kết hợp với điều kiện được $0 < x \leq 4$ và $x \neq 1$.

Vậy: $0 < x \leq 4$ và $x \neq 1$ thì $B(\sqrt{x}+1) \geq 2x - 2\sqrt{x} - 3$

Câu 33. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề kiểm tra HK2 – Phòng GD Quận Hoàng Mai – 2020-2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.

c) Đặt $P = A : B$. Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 1$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được

$$A = \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-4}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } P = A : B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$2P = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-1) = (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-2 = 2x-3\sqrt{x}-2 \Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x}-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=\frac{25}{4} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \text{ . Vậy: ...}$$

Câu 34. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Huyện Ba Vì – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

a) Tính giá trị của B với $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức $S = A : B$.

c) Tìm giá trị của m để phương trình $\sqrt{x} \cdot S = m$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của B với $x = 16$

$$\text{Với } x = 16 \text{ thỏa mãn điều kiện nên ta có: } B = \frac{2\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}-3} - 1 = \frac{2 \cdot 4 - 2}{4 - 3} - 1 = \frac{8-2}{1} - 1 = 5$$

Vậy giá trị của B là 5 tại $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức $S = A : B$.

$$S = A : B = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - (3x+3)}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2-(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} \right) \\
 &= \left(\frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \right) \\
 &= \left(\frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \right) = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)}
 \end{aligned}$$

c) Tìm giá trị của m để phương trình $\sqrt{x}.S = m$ có nghiệm duy nhất.

$$\text{Ta có } \sqrt{x}.S = m \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)} = m \quad (1) \Rightarrow -3\sqrt{x} = m(\sqrt{x}+3)$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{x} = m\sqrt{x} + 3m \Leftrightarrow (m+3)\sqrt{x} = 3m$$

$$\text{Với } m \neq -3 \text{ thì } \sqrt{x} = \frac{3m}{m+3}$$

$$\text{Vì } x \geq 0, x \neq 9 \text{ nên } \begin{cases} \frac{3m}{m+3} \geq 0 \\ \frac{3m}{m+3} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3m \geq 0 \\ m+3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3m \leq 0 \\ m+3 < 0 \end{cases} \\ 3m \neq 3m+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < -3 \end{cases}$$

Câu 35. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề KS vào 10 - THCS Khương Mai - 2019-2020)

Cho hai biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x-7}}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-3}}$, với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm GTNN của $\frac{B}{A}$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

$$x = \frac{8}{3-\sqrt{5}} = \frac{8(3+\sqrt{5})}{9-5} = 2(3+\sqrt{5}) = 6+2\sqrt{5} \text{ (TMĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9).$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1.$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{5}+1$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{5}+1+3}{\sqrt{5}+1-3} = \frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{13+6\sqrt{5}}{5-4} = 13+6\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị của biểu thức $A = 13+6\sqrt{5}$ khi $x = \frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

b) Rút gọn biểu thức B với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-7}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{\sqrt{x}-7 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-7 - (x-9) + 2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

c) Tìm GTNN của $\frac{B}{A}$.

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+3}.$$

Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ thì:

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+3} \geq -1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} \geq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $\min \frac{B}{A} = 0$ khi $x = 0$.

Câu 36. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi HK2 - THCS Khương Thượng - 2019-2020)

Cho $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ và $Q = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 16$.

b) Rút gọn $M = P : Q$.

c) Tìm x để $M < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được: $Q = \frac{1}{\sqrt{16}-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$.

Vậy với $x = 16$ thì $Q = \frac{1}{3}$.

b) $M = P : Q$

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.$$

c) Khi $M < \frac{3}{2}$ thì $M - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} < 0$

Vì $2(\sqrt{x}+1) > 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} < 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy kết hợp với điều kiện đề bài $0 \leq x < 1$ thì $M < \frac{3}{2}$.

Câu 37. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi tuyển sinh vào 10 - Phòng GD Ứng Hòa - 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 25$).

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho $\frac{A}{B} < 4$.

Hướng dẫn

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

Với $x \geq 0, x \neq 25$, ta có $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$

Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{4.3}{3-5} = \frac{12}{-2} = -6$.

Vậy $x = 9$ thì $A = -6$.

- b) Rút gọn biểu thức B .

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x-4+\sqrt{x}-1+5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

- c) Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho $\frac{A}{B} < 4$.

Với $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$, ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-5}$$

$$\frac{A}{B} < 4 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-5} < 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} < 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < x < 25, x \neq 1$

Vậy số tự nhiên x lớn nhất sao cho $\frac{A}{B} < 4$ là $x = 24$.

Câu 38. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Kim Giang – 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$, (với $x > 0; x \neq 1$)

a) Tính giá trị của A khi $x = \frac{16}{25}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm các giá trị nguyên của tham số m sao cho tồn tại x thỏa mãn: $1 - 5AB = m$.

Hướng dẫn

a) $x = \frac{16}{25}$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

$$\text{Thay } x = \frac{16}{25} \text{ vào biểu thức } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \text{ ta được: } A = \frac{\sqrt{\frac{16}{25}}}{\sqrt{\frac{16}{25}}+2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+2} = \frac{4}{5} : \frac{14}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{14} = \frac{2}{7}.$$

Vậy khi $x = \frac{16}{25}$ thì $A = \frac{2}{7}$.

b) Với $x > 0; x \neq 1$. Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1} = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 1$ thì $B = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

c) Với $x > 0; x \neq 1$

$$\text{Ta có: } m = 1 - 5AB = 1 - 5 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) = 1 + \frac{5\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = 6 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{x+2}} > -\frac{5}{2} \Rightarrow m = 6 - \frac{5}{\sqrt{x+2}} > \frac{7}{2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} > 0 \Rightarrow m = 6 - \frac{5}{\sqrt{x+2}} < 6 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{7}{2} < m < 6, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 4 \text{ hoặc } m = 5$$

Thử lại:

$$\text{Với } m = 4 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } m = 5 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m \in \{4; 5\}$ tồn tại x thỏa mãn: $1 - 5AB = m$.

Câu 39. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – THCS CLC Lê Lợi – 2019-2020)

1. Cho biểu thức: $A = \frac{x-9}{\sqrt{x+3}}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x-2}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

3. Với các biểu thức A, B nói trên tìm giá trị của x để $A.B$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. ĐKXD của A là $x \geq 0$.

$$\text{Thay } x = 25 \text{ (TMĐK) vào biểu thức } A \text{ ta được: } A = \frac{25-9}{\sqrt{25+3}} = 2$$

Vậy giá trị của biểu thức A khi $x = 25$ là 2

$$\begin{aligned} 2. B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x-2}} = \frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} \\ &= \frac{x+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

$$3. \text{Ta có: } A.B = \frac{x-9}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x+2}}$$

$$\sqrt{x+2} \geq 2 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-5}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{-5}{2}$$

$AB \geq -\frac{3}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

KL: Giá trị nhỏ nhất của AB là $-\frac{3}{2}$ tại $x = 0$.

Câu 40. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Lê Ngọc Hân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+3}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 9$)

- 1) Tính giá trị biểu thức A tại $x = 49$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Cho $P = B : A$ tìm x để $P < 3$.

Lời giải

1) Thay $x = 49$ (TMĐK) vào A ta có: $A = \frac{\sqrt{49}}{1+3\sqrt{49}} = \frac{7}{22}$

Vậy $A = \frac{7}{22}$ tại $x = 49$

2) Với $x > 0, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+3}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x+3+2\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

3) Ta có:

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

$$P < 3 \Leftrightarrow \frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 3 \Leftrightarrow \frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+3\sqrt{x}-3\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$$

Kết hợp điều kiện cho : $0 < x < 9$ thì $P < 3$

Câu 41. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – THCS Lê Ngọc Hân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{6-\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$)

- 1) Tính giá trị của biểu thức A với $x=16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $B(1+\sqrt{x})+x-\sqrt{x}-m=0$ có nghiệm x .

Hướng dẫn

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn), ta có: $A = \frac{1-\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}} = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5}$

2) $B = \left[\frac{6-\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

3) Để $B(1+\sqrt{x})+x-\sqrt{x}-m=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-m+1=0$ (1) có nghiệm

Đặt $\sqrt{x}=t$

(1) $\Rightarrow t^2-t-m+1=0$ (2) có nghiệm $t \geq 0$ và $t \neq 2$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là $1-4(1-m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$

Trong đó $S=1, P=1-m$

Nếu $1-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$ thì phương trình (2) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $1-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ thì phương trình (2) có nghiệm cùng dấu. Để có nghiệm không âm thì $1 > 0$ (luôn đúng).

Vậy với mọi m thì phương trình (2) luôn có nghiệm không âm.

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm là $t \neq 2 \Leftrightarrow 4-2-m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Vậy $m \geq \frac{3}{4}, m \neq 3$ thì phương trình (1) có nghiệm.

Câu 42. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 3 – THCS Lê Ngọc Hân – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ($x > 0; x \neq 4$)

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=3-2\sqrt{2}$.

b) Rút gọn biểu thức B và tính $P = \frac{A}{B}$.

c) Tìm x thỏa mãn: $xP \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$.

Hướng dẫn

$$a) x=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$

Thay $\sqrt{x}=\sqrt{2}-1$ vào biểu thức A ta được:

$$A=\frac{\sqrt{2}-1+2}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}.$$

b) Với $x>0; x\neq 4$ ta có:

$$+B=\frac{x}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{x+(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$+P=\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=\frac{x-4}{x}.$$

c) Ta có $xP\leq 10\sqrt{x}-29-\sqrt{x-25}$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{x-4}{x}\leq 10\sqrt{x}-29-\sqrt{x-25} \text{ điều kiện: } x\geq 25$$

$$\Leftrightarrow x-4\leq 10\sqrt{x}-29-\sqrt{x-25} \Leftrightarrow x-4-10\sqrt{x}+29+\sqrt{x-25}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-10\sqrt{x}+25)+\sqrt{x-25}\leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-5)^2+\sqrt{x-25}\leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sqrt{x}-5)^2\geq 0 \\ \sqrt{x-25}\geq 0 \end{cases} \forall x \Rightarrow (\sqrt{x}-5)^2+\sqrt{x-25}\geq 0 \quad \forall x \quad (2) \text{ (thỏa mãn điều kiện } x\geq 25)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (\sqrt{x}-5)^2+\sqrt{x-25}=0 \text{ khi } \begin{cases} (\sqrt{x}-5)^2=0 \\ \sqrt{x-25}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x=25$ là giá trị cần tìm.

Câu 43. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 4 – THCS Lê Ngọc Hân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$; $B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-\sqrt{x}-1}$; với $x\geq 0; x\neq 1; x\neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=25$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Biết $M=36AB$. Tìm số tự nhiên x để M là số chính phương.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 25$ (TMDK) vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{25}-2}{25-1} = \frac{5-2}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Vậy $x = 25$ thì $A = \frac{1}{8}$.

2) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-4+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

3) $M = 36A.B = 36 \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{36}{\sqrt{x}+1}$

x là số tự nhiên thì \sqrt{x} là số tự nhiên hoặc số vô tỷ. Để M là số chính phương thì \sqrt{x} là số tự nhiên khi đó $(\sqrt{x}+1)$ là ước chính phương của 36. Khi đó $\sqrt{x}+1 \in \{1; 4; 9; 36\}$

| | | | | |
|----------------|----|----|----|------|
| $(\sqrt{x}+1)$ | 1 | 4 | 9 | 36 |
| \sqrt{x} | 0 | 3 | 8 | 35 |
| x | 0 | 9 | 64 | 1225 |
| | TM | TM | TM | TM |

Vậy $x \in \{0; 9; 64; 1225\}$ thì M là số chính phương.

Câu 44. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Quận Long Biên – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ (với $x \geq 0; x \neq 9$).

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

b) Đặt $P = \frac{B}{A}$. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tính giá trị của x nguyên nhỏ nhất để P có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} = \frac{7}{-1} = -7$

Vậy với $x = 4$ thì $A = -7$.

b) $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

$$= \frac{4(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{4\sqrt{x}-12+2x-\sqrt{x}-13-x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-25}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{B}{A} \text{ nên } P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}.$$

c) Tính giá trị nguyên của $P = \frac{B}{A}$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{8}{\sqrt{x}+3}.$$

Để P đạt giá trị nguyên thì $\frac{8}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $8: (\sqrt{x}-3)$ tức $\sqrt{x}-3 \in U_{(8)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng sau :

| | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|-------------------|-----|-------------------|
| $\sqrt{x}-3$ | 1 | -1 | 2 | -2 | 4 | -4 | 8 | -8 |
| \sqrt{x} | 4 | 2 | 5 | 1 | 7 | -1 | 11 | -5 |
| x | 16 | 4 | 25 | 1 | 49 | Không thỏa mãn | 121 | Không thỏa mãn |

Mà x nguyên nhỏ nhất nên kết hợp với điều kiện xác định thì $x=1$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 45. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 lần 3 – THCS Lương Thế Vinh – 2020-2021)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x-2\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Tìm m để có x thỏa mãn: $A.B = m$

Hướng dẫn

$$1) x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1} - \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3}+1| - \sqrt{3} = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3} = 1$$

Giá trị $x=1$ thỏa mãn điều kiện $x > 0, x \neq 4$. Thay $x=1$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{1}-3}{\sqrt{1}} = \frac{1-3}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Vậy $A = -2$ khi $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

2) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2x-2\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}} = \frac{2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2x-2\sqrt{x} + \sqrt{x}-2 - (x+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2x-2\sqrt{x} + \sqrt{x}-2 - x-2\sqrt{x} + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ Với $x > 0, x \neq 4$

3) Tìm m để có x thỏa mãn: $A.B = m$

Cách 1:

$$\text{Với } x > 0, x \neq 4 \text{ ta có: } A.B = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = m \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow m = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} < 1 \\ 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} > -\frac{3}{2} \\ 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} \neq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < m < 1 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $-\frac{3}{2} < m < 1, m \neq -\frac{1}{4}$ thì có x để $A.B = m$

Cách 2:

$$A.B = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = m \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow (1-m)\sqrt{x} = 2m+3$$

Xét $m=1$, thay vào phương trình trên ta được: $0=3$ (vô lý)

$$\text{Xét } m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2m+3}{1-m}$$

với điều kiện $x > 0, x \neq 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+3}{1-m} > 0 \\ \frac{2m+3}{1-m} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < m < 1 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 46. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10 – THCS Lương Thế Vinh – 2020-2021)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+15}{x-9} - \frac{x}{x-3\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{8\sqrt{x}-3}{14}$ với $x > 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho $A = 2B$.

c) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Rút gọn A .

$$A = \frac{\sqrt{x}+15}{x-9} - \frac{x}{x-3\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3} \quad (x > 0; x \neq 9)$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} + \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+15) - x(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x+15\sqrt{x} - x\sqrt{x} - 3x + (x-3\sqrt{x})(2\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x+15\sqrt{x} - x\sqrt{x} - 3x + 2x\sqrt{x} + 5x - 6x - 15\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x\sqrt{x} - 3x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$b) A = 2B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 2 \cdot \frac{8\sqrt{x}-3}{14} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{16\sqrt{x}-6}{14} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{16\sqrt{x}-6}{14} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{14\sqrt{x}}{14(\sqrt{x}+3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(16\sqrt{x}-6)}{14(\sqrt{x}+3)} = 0 \Rightarrow 14\sqrt{x} - (\sqrt{x}+3)(16\sqrt{x}-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{x} - (16x - 6\sqrt{x} + 48\sqrt{x} - 18) = 0 \Leftrightarrow 14\sqrt{x} - 16x + 6\sqrt{x} - 48\sqrt{x} + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -28\sqrt{x} - 16x + 18 = 0 \Leftrightarrow -16x - 28\sqrt{x} + 18 = 0 \Leftrightarrow 8x + 14\sqrt{x} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 18\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(4\sqrt{x}+9) - (4\sqrt{x}+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)(4\sqrt{x}+9) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1 = 0 \text{ (Vì } 4\sqrt{x}+9 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$c) \text{ Ta có với } x > 0; x \neq 9 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} > 0$$

$$\text{Lại có: } A = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+3} < 1 \Rightarrow 0 < A < 1$$

Vậy không tồn tại giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 47. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Lý Nam Đế - 2019-2020)

Với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$, cho hai biểu thức $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$.

1) Tính giá trị của B khi $x = 36$.

2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Tìm số tự nhiên $x \in \mathbb{N}$ để $P = B \cdot (A-1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta được

$$B = \frac{\sqrt{36}-2}{\sqrt{36}-3} = \frac{6-2}{6-3} = \frac{4}{3}$$

2) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

$$A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

3) Ta có

$$P = B.(A-1) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$$

Với $0 \leq x < 9$ và $x \neq 4$ thì $\sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow P < 0$.

Với $x > 9$ thì $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow P > 0$.

Có $x > 9$ mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \geq \sqrt{10}-3 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{2}{\sqrt{10}-3} \Leftrightarrow P \leq 6+2\sqrt{10}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn).

Vậy với $x \in \mathbb{N}$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức $P = B.(A-1)$ là $6+2\sqrt{10}$ khi $x = 10$.

Câu 48. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 5- THCS Lý Nam Đế - 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{4-6\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$
2. Rút gọn biểu thức B
3. Với $x \in \mathbb{N}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Hướng dẫn

1. Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta có: $A = \frac{\sqrt{36}+6}{\sqrt{36}} = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Vậy $A = 2$ khi $x = 36$.

2. $B = \frac{4-6\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

$$= \frac{4-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-6\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{4-6\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4+x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \quad (x > 0; x \neq 4)$$

3. $P = A.B$ ($x \in \mathbb{N}$)

$$P = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+2+4}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+2}$$

$$P_{\max} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} \max \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2) \min \Leftrightarrow \sqrt{x} \min \Leftrightarrow x \min.$$

Kết hợp với $x > 0$, $x \neq 4$, $x \in \mathbb{N}$, ta suy ra $x = 1$.

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow P = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } \text{Max}P = \frac{7}{3} \text{ khi } x = 1.$$

Câu 49. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Marie Curie – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} - \frac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$.
- Rút gọn B .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A : B$.

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{5}{6}$.

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{5}{6}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} - \frac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - \frac{10-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (10-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+3-x+4-10+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

c) Tính giá trị nhỏ nhất của $P = A : B$.

Ta có: $P = A : B$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$P = \sqrt{x}-3 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si cho 2 số dương ta có:

$$\sqrt{x}+1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+1}} = 2\sqrt{3}$$

Từ đó ta có: $\sqrt{x}+1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - 4 \geq 2\sqrt{3} - 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1 = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = (\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{3}-4$ khi $x = 4-2\sqrt{3}$.

Câu 50. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi HK2 – THCS Mỹ Đình 1 – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{x-5\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

- 1) Khi $x = 81$ hãy tính giá trị của biểu thức A
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Với $x > 9$ tìm giá trị nhỏ nhất B của biểu thức $P = A.B$

Hướng dẫn

1) Giá trị $x = 81$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0; x \neq 9$, thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{81-9}{\sqrt{81}-3} = \frac{72}{9-3} = \frac{72}{6} = 12$$

Vậy khi $x = 81$ thì $A = 12$

2) Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{x-5\sqrt{x}-3}{x-9} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{x-5\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}+3) + 2(\sqrt{x}-3) + x-5\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}+9+2\sqrt{x}-6+x-5\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x}{x-9} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x}{x-9}$ = Với $x \geq 0; x \neq 9$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Ta có: } P = A.B &= \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{x}{x-9} = \frac{x}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9+9}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)+9}{\sqrt{x}-3} \\ &= \sqrt{x}+3 + \frac{9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}-3 + \frac{9}{\sqrt{x}-3} + 6 \end{aligned}$$

vì $x > 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 3 \Rightarrow \sqrt{x}-3 > 0$ và $\frac{9}{\sqrt{x}-3} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với 2 số không âm ta có:

$$\sqrt{x}-3+\frac{9}{\sqrt{x}-3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{9}{\sqrt{x}-3}} = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3+\frac{9}{\sqrt{x}-3}+6 \geq 12$$

hay $P \geq 12$

$$\cdot \text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x}-3 = \frac{9}{\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=3 \\ \sqrt{x}-3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=6 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=36 \\ x=0 \end{cases}$$

Đổi chiều với điện ta thấy $x=36$ thỏa mãn điều kiện

Vậy Min $P=12 \Leftrightarrow x=36$

Câu 51. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Nam Từ Liêm – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của A khi $x=16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm tất cả các số tự nhiên x để $A < B$

Hướng dẫn

1) Thay $x=16$ (TMĐK) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{16-\sqrt{16}}{\sqrt{16}-2} = \frac{12}{2} = 6$$

Vậy khi $x=16$ thì giá trị của biểu thức $A=6$.

$$2) B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-4+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$3) \text{ Để } A < B \text{ thì } \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 1 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < 4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$ và x là số tự nhiên ta được $x \in \{0; 2; 3\}$.

Vậy với $x \in \{0; 2; 3\}$ thì $A < B$.

Câu 52. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL tháng 5 – THCS Nam Từ Liêm – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x-5}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=25$
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị x nguyên để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Hướng dẫn

a) Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào A ta có: $A = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$B = \frac{x-5}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{4}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-5-2\sqrt{x}+2+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}$$

c) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-1}} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Để \sqrt{P} tồn tại thì $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq 0$ (vì $\sqrt{x}+1 > 0 \forall x$ thỏa mãn điều kiện)

$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

Với $x \geq 4$ ta có: $\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow P - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}-8-\sqrt{x}-1}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-9 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+1 > 0 \forall x \text{ thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$$

Kết hợp với điều kiện ta có $\Rightarrow 4 \leq x < 9$ vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$

Vậy $x \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 53. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Nghĩa Tân – 2020-2021)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{4}{9}$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

c) Đặt $P = A : B$. Chứng minh rằng không có giá trị nào của x để P có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $x = \frac{4}{9}$ thỏa mãn điều kiện ta có: $A = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{9}}-2} = -\frac{3}{2}$

b) Ta có:

$$B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{3x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{3x-4-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{3x-4-x+4-x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

c) Ta có: $P = A : B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}+3}$

Vì $x \geq 0$ nên $0 < P < \frac{2}{3}$

\Rightarrow Không tồn tại giá trị P nguyên với mọi x .

Câu 54. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi Thử vào 10 – THCS Nghĩa Tân – 2019-2020)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$, với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Cho $P = A.B$. Tìm x là số nguyên lớn nhất để $P < -1$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$

Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta có $A = \frac{\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}+1} = \frac{2}{3}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)^2 - 2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-5\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-5(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-5}{\sqrt{x}-1}$$

c) Cho $P = A.B$. Tìm x là số nguyên lớn nhất để $P < -1$.

Ta có $P = A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{-5}{\sqrt{x}-1} = \frac{-5}{\sqrt{x}+1}$

Xét $P < -1 \Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-4 < 0$ (vì $\sqrt{x}+1 > 0 \forall x$ thỏa mãn điều kiện)

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow x < 16$

Kết hợp điều kiện có $0 \leq x < 16, x \neq 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$, x lớn nhất nên $x = 15$.

Câu 55. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề minh họa thi vào 10 – THCS Nghĩa Tân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$.
- 3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

Hướng dẫn

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

Ta có: $x = 25$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = 25$ vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$

Vậy khi $x = 25$ thì $A = \frac{3}{7}$

- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$.

$$B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

- 3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Đề } |P| > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x}+2 > 0)$$

$\Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp điều kiện suy ra $0 \leq x < 1$

Câu 56. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Ngọc Hồi – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ ($x > 0; x \neq 9$)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = A + \frac{1}{B}$

Hướng dẫn

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

$$\text{Khi } x=16 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \Rightarrow A = \frac{16+7}{\sqrt{16}} = \frac{23}{4}$$

2) Rút gọn biểu thức B

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}; \text{ĐK: } x > 0; x \neq 9 \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-2x+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = A + \frac{1}{B}$

Điều kiện: $x > 0$

$$P = A + \frac{1}{B} = \frac{x+7}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Vì $\sqrt{x} > 0; \frac{4}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 2.2 = 4$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 5 \Rightarrow P \geq 5$$

Vậy $\text{Min}P = 5$ khi $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

Câu 57. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Ngọc Lâm – 2019-2020)

Cho $A = \frac{5\sqrt{x}+9}{x-1}$ và $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ Với $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của A khi $x=81$.
- 2) Rút gọn biểu thức A, B .
- 3) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm các giá trị của m để $\frac{A}{B} = m$ có nghiệm x .

Hướng dẫn

1) Thay $x=81$ (TMDK vào A ta có:

$$A = \frac{5\sqrt{81}+9}{81-1} = \frac{5.9+9}{81} = \frac{27}{40}$$

Vậy $A = \frac{27}{40}$ tại $x=81$.

$$2) B = \frac{x+2}{x+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x+2}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{x+2-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} (x \geq 0, x \neq 1)$$

3) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có;

$$\frac{A}{B} = m \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}+9}{x-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = m \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+1} = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}+5+4}{\sqrt{x}+1} = m \Leftrightarrow 5 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = m$$

$$+) x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+1} \leq 4 \Leftrightarrow 5 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \leq 9 \Rightarrow m \leq 9 \quad (1)$$

$$+) x \geq 0 \Rightarrow 5 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} > 5 \Rightarrow m > 5 \quad (2)$$

$$+) x \neq 1 \Rightarrow 5 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \neq 5 + \frac{4}{\sqrt{1}+1} = 7 \Rightarrow m \neq 7 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1);(2);(3)} \Rightarrow \begin{cases} 5 < m \leq 9 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 5 < m \leq 9 \\ m \neq 7 \end{cases} \text{ thì } \frac{A}{B} = m \text{ có nghiệm } x.$$

Câu 58. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề minh họa thi vào 10 – THCS Ngọc Lâm – 2019-2020)

$$\text{Cho các biểu thức : } A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} \text{ và } B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 4$.

2) Rút gọn biểu thức A và B.

3) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{A}{B} < 0$

Hướng dẫn

1) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào B, ta có:

$$B = \frac{4+5\sqrt{4}}{4-25} = \frac{4+5 \cdot 2}{-21} = \frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}.$$

2) Rút gọn các biểu thức A và B.

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \quad (x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25)$$

$$B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \quad (x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25)$$

3) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{A}{B} < 0$.

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$$

$$P < 0 \Leftrightarrow \text{tử và mẫu phải khác dấu, mà } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25.$$

Kết hợp điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25 \Rightarrow 0 \leq x < 25; x \neq 9$.

Câu 59. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 3 – THCS Ngô Gia Tự - 2020-2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2x+4}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}$; $B = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của B khi $x = 9$
- 2) Rút gọn biểu thức A .
- 3) Với $x \in \mathbb{Z}^+$. tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = A.B$

Hướng dẫn

- 1) Tính giá trị của B khi $x = 9$

Giá trị $x = 9$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$. Thay $x = 9$ vào biểu thức B ta được

$$B = \frac{9 + \sqrt{9} + 1}{\sqrt{9} - 2} = \frac{9 + 3 + 1}{3 - 2} = \frac{13}{1} = 13$$

Vậy $x = 9$ thì $B = 13$

- 2) Rút gọn biểu thức A

Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x+4}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2x+4}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2x+4}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+4+x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2-2x-2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- 3) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ ta có :

$$K = A.B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+2}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

Trường hợp 1: Với $0 \leq x < 4$

Kết hợp với điều kiện $x \in \mathbb{Z}^+$ và $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ ta có :

$x \in \mathbb{Z}^+$ và $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ Nên ta có $x \in \{2; 3\}$

+ Với $x = 2$ Ta có: $K = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} = -1 - \sqrt{2} < 0$ (1)

+ Với $x=3$ Ta có: $K = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = -3-2\sqrt{3} < 0$ (2)

Trường hợp 2: Với $x > 4$

Kết hợp với điều kiện $x \in \mathbb{Z}^+$ và $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ ta có: $x \geq 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{5}-2} = 5 + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow K \leq 5 + 2\sqrt{5} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có giá trị lớn nhất của K là $5 + 2\sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=5$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$)

Câu 60. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Ngô Sĩ Liên – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{1}{9}$.

2. Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3. Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = B.(A-1)$.

Hướng dẫn

1. Thay $x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta có: $B = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}-2}}{\sqrt{\frac{1}{9}-3}} = \frac{\frac{1}{3}-2}{\frac{1}{3}-3} = \frac{5}{8}$

Vậy $B = \frac{5}{8}$ khi $x = \frac{1}{9}$.

2. Với mọi x thỏa mãn điều kiện ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với mọi x thỏa mãn điều kiện.

3. Với mọi x thỏa mãn điều kiện ta có:

$$K = B.(A-1).$$

$$K = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 \right).$$

$$K = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}.$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{x}-3}.$$

+) Nếu $x > 9$ ta có $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} > 0$ hay $K > 0$

+) Nếu $0 \leq x < 9; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow K < 0$.

Do đó K nhỏ nhất khi $K < 0$. Khi đó $\sqrt{x}-3$ là số âm lớn nhất có thể, mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 8$

$$\Rightarrow K = \frac{2}{2\sqrt{2}-3} = -2(2\sqrt{2}+3).$$

Vậy với $x > 0, x \in \mathbb{Z}$ thì $\min K = -2(2\sqrt{2}+3)$ khi $x = 8$.

Câu 61. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Ngôi Sao – 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

a) Tính giá trị của Q khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm giá trị của x để $P.Q\sqrt{x} < 8$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = P.Q - \sqrt{x}$

Hướng dẫn

a) Đkxd: $x \geq 0$,

Thay $x = 25$ (tmđk) vào biểu thức Q ta được $Q = \frac{\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$

Vậy khi $x = 25$ thì $Q = \frac{2}{3}$

b) Với $x > 0; x \neq 1$ ta có: $P = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1+x-\sqrt{x}+1-4}{\sqrt{x}} = \frac{2x-2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \frac{2x-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

$$c) \text{ có } P.Q\sqrt{x} < 8 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x} < 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x} < 8$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-1)^2 < 8 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1-4 < 0$$

$$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+\sqrt{x}-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \text{ vì } \sqrt{x}+1 > 0 \text{ (Với mọi } x \text{ thỏa mãn đk)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9 \text{ Kết hợp với đk } \Rightarrow 0 < x < 9 \& x \neq 1$$

Vậy $0 < x < 9 \& x \neq 1$ thì $P.Q\sqrt{x} < 8$

$$d) M = P.Q - \sqrt{x} = \frac{2x-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} \text{ Với } x > 0; x \neq 1$$

$$M = \frac{2 \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x}$$

$$M = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{2x-4\sqrt{x}+2-x}{\sqrt{x}} = \frac{x-4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

$$M = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x}; \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si với 2 số dương, ta có :

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 \geq 2\sqrt{2} - 4 \Rightarrow M \geq 2\sqrt{2} - 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } M = 2\sqrt{2} - 4 \Leftrightarrow x = 2(tm)$$

$$\text{Vậy } \min M = 2\sqrt{2} - 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Câu 62. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Tuyển sinh vào 10 – THCS Nguyễn Công Trứ - 2020-2021)

$$\text{Cho biểu thức } A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{x+\sqrt{x}-6} \text{ (khi } x \geq 0; x \neq 4)$$

a) Tính giá trị của A khi $x^2 = 4x$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tính $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| > P$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của A khi $x^2 = 4x$.

Xét biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} (x \geq 0)$

Theo đề bài: $x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

Với $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện xác định), thay vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{0}-3}{\sqrt{0}+3} = \frac{-3}{3} = -1$

Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện xác định), thay vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{4}-3}{\sqrt{4}+3} = \frac{2-3}{2+3} = \frac{-1}{5}$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

Với $x \geq 0, x \neq 4$, xét biểu thức

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{x+\sqrt{x}-6} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{x+\sqrt{x}-6} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-9-2\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tính $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| > P$.

Ta có $P = \frac{B}{A} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}}{\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Theo bài ra $|P| > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 0$

Mà $\forall x \geq 0, x \neq 4$ ta luôn có $\sqrt{x} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 9 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Câu 63. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Nguyễn Du – 2020-2021)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm x để $M = \frac{2}{7}$.

Hướng dẫn

a) $M = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

$$M = \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Để $M = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7}$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -3 \text{ (ktm)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow x=4 \text{ (tm)}$$

Vậy $x=4$ thì $M = \frac{2}{7}$.

Câu 64. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Nguyễn Trãi – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$, $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$.

- a) Khi $x = 9^{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ tính giá trị của A .
 b) Rút gọn B .
 c) Đặt $P = A + B$. Tìm x để giá trị của biểu thức P là một số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0$ ta có $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$

Ta có: $x = 9^{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$

$$\Rightarrow x^3 = \left(9^{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \right)^3 = 9^3 \cdot (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 9^3 \Rightarrow x = 9.$$

Ta thấy $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định

Thay $x = 9$ vào A ta được: $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{9}}{3+\sqrt{9}} = \frac{2 \cdot 3}{3+3} = 1.$

Vậy $x = 9$ thì $A = 1$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 25$ ta có

$$B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$$

$$B = \frac{15-\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 25$ thì $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

c) $P = A + B = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{1}{3+\sqrt{x}}$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{3+\sqrt{x}} = \frac{2(3+\sqrt{x})-5}{3+\sqrt{x}} = 2 - \frac{5}{3+\sqrt{x}}$$

Đặt $Q = \frac{5}{3+\sqrt{x}} \Rightarrow P = 2 - Q$

Do $2 \in \mathbb{Z}$ nên $P \in \mathbb{Z}$ khi $Q \in \mathbb{Z}$

Ta có $Q > 0$ (vì $5 > 0$ và $3 + \sqrt{x} > 0$)

$$\text{Mà } 3 + \sqrt{x} \geq 3 \Rightarrow \frac{5}{3 + \sqrt{x}} \leq \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < Q \leq \frac{5}{3}. \text{ Mà } Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3 + \sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 3 + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = 4$ thì $P = 2 - Q = 2 - 1 = 1$ là một số nguyên.

Câu 65. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – THCS Nguyễn Tri Phương – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-1}{4\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2. Chứng minh $B = \frac{2x+1}{x-1}$.

3. Cho $P = A.B$. Tìm các giá trị của x thỏa mãn $P.4\sqrt{x} \leq \sqrt{4x-4} + x + 1$.

Hướng dẫn

1. Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức ta có

$$A = \frac{9-1}{4\sqrt{9}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } x = 9 \text{ thì } A = \frac{2}{3}.$$

2. Với $x > 0, x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - \sqrt{x} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

3. Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

$$P.4\sqrt{x} \leq \sqrt{4x-4} + x + 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4\sqrt{x}}.4\sqrt{x} \leq \sqrt{4x-4} + x + 1$$

$$\Rightarrow 2x+1 \leq \sqrt{4x-4} + x + 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{4x-4} \Leftrightarrow x^2 \leq 4x-4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0.$$

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x thuộc điều kiện xác định nên để $(x-2)^2 \leq 0$ thì $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = 2$.

Câu 66. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Nguyễn Tri Phương – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$)

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
2. Rút gọn biểu thức B
3. Tìm x để biểu thức $P = B : A$ đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn

1. Khi $x = 16$ (Thỏa mãn điều kiện) thì $A = \frac{\sqrt{16}-2}{16+2} = \frac{1}{9}$

2. Ta có: $B = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$

$$= \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

3. Ta có: $P = B : A = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2}$ (Theo bất đẳng thức Cô si)

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$ (Thỏa mãn ĐK)

Vậy Min P = $2\sqrt{2}$ tại $x = 2$

Câu 67. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi Thử vào 10 – THCS Nguyễn Trường Tộ - 2020-2021)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.
- 2) Chứng minh : $B = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
- 3) Tìm x nguyên để $P = A : B$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

1) $x = 16$ (TMDK) $\Rightarrow \sqrt{x} = 4$

Thay $\sqrt{x} = 4$ vào biểu thức A ta có: $A = \frac{5}{4}$

Vậy $x = 16$ thì $A = \frac{5}{4}$

2) $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

$$B = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$3) P = A : B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} : \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì $\sqrt{x}-1 > 0$ và $\sqrt{x}-1$ nhỏ nhất .

Mà $x \in \mathbb{Z}$ và $x \geq 0, x \neq 1$ nên $x = 2$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{2}+1$ khi $x = 2$.

Câu 68. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Nguyễn Trường Tộ - 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{x+4}$ và $B = \frac{x}{x-16} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{2}{\sqrt{x}+4}$, $x \geq 0, x \neq 16$

- Tính giá trị của A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm các số thực x để biểu thức $C = A.B$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Ta có: $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Thay } x = 4 \text{ vào } A \text{ ta được: } A = \frac{\sqrt{4}+4}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Vậy $A = \frac{3}{4}$ khi $x = 4$ (thiếu KL)

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{x}{x-16} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{2}{\sqrt{x}+4} = \frac{x-2(\sqrt{x}+4)-2(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{x-2\sqrt{x}-8-2\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

$$c) \text{ Ta có với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } C = A.B = \frac{\sqrt{x}+4}{x+4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$$

*Ta có $x = 0$ thì $C = 0$, (1)

$$* \text{ Ta có } x > 0 \text{ thì } \frac{1}{C} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi có: $\frac{1}{C} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$

$$\Rightarrow C \leq \frac{1}{4}$$

Ta có $C = \frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn), (2)

Từ (1) và (2) suy ra C đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ là khi $x = 4$

Câu 69. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – Sở GD Ninh Bình – 2019-2020)

Cho biểu thức $S = \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}-14}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn $\frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$.

b) Rút gọn biểu thức S

c) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức của S nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$a) \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

$$b) S = \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}-14}{x-4} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}-14}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-14}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$c) S = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Có } \sqrt{x}+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow S \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Lại có } \sqrt{x}+2 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} > 0 \Leftrightarrow S > 0$$

Vậy $0 < S \leq \frac{5}{2}$ mà S có giá trị nguyên $\Rightarrow S \in \{1; 2\}$

$$\text{Với } S = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 5 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } S = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 9 \right\}$ thì biểu thức của S nhận giá trị nguyên.

Câu 70. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Phan Chu Trinh – 2019-2020)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}} + \frac{5\sqrt{x+12}}{x-16}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$).

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm m để phương trình $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm.

Hướng dẫn

a) Với $x = 9$ (TMĐK), thay vào biểu thức A ta được: $A = \frac{\sqrt{9+3}}{\sqrt{9-4}} = \frac{6}{-1} = -6$.

* Vậy $A = -6$ tại $x = 9$

b) Với $x \geq 0, x \neq 16$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}} + \frac{5\sqrt{x+12}}{x-16} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}} + \frac{5\sqrt{x+12}}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} + \frac{5\sqrt{x+12}}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{x - \sqrt{x} - 12 + 5\sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} \\ &= \frac{x + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 16$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$.

c) Với $x > 0, x \neq 16$, ta có $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}} \cdot \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$

* Để $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} = m+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = (m+1)\sqrt{x} \Leftrightarrow m\sqrt{x} = 3$ (1)

* TH1: $m = 0$, PT (1) có dạng $0 = 3$ (loại)

* TH2: $m \neq 0$, PT (1) có dạng $\sqrt{x} = \frac{3}{m}$

Để phương trình $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm thì phương trình (1) có nghiệm $x > 0, x \neq 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq \frac{3}{4}.$$

Vậy với $0 < m \neq \frac{3}{4}$ thì phương trình $\frac{A}{B} = m + 1$ có nghiệm.

Câu 71. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 1 – THCS Phan Chu Trinh – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{x-4\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Tìm x để $A : B = -2$

Hướng dẫn

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$. Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ (đkxđ: $x \geq 0$)

Thay $x = 25$ (tmdkxđ) vào A

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+2} = \frac{8}{7}$$

2) Rút gọn biểu thức B.

Ta có: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{x-4\sqrt{x}+3}$ (đkxđ: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$)

$$\Leftrightarrow B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} \Leftrightarrow B = \frac{x-2\sqrt{x}+1-x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

3) Tìm x để $A : B = -2$

Ta có: $A : B = -2$ (đkxđ: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} : \frac{1}{\sqrt{x}-3} = -2 \Leftrightarrow x-9 = -2(\sqrt{x}+2)$$

$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}-5=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1 = \sqrt{6} \\ \sqrt{x}+1 = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{6}-1 \\ \sqrt{x} = -\sqrt{6}-1 \text{ (ko tmdk)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7-2\sqrt{6} \text{ (tmdk)}$$

Vậy $x = 7-2\sqrt{6}$ để $A : B = -2$

Câu 72. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Phan Huy Chú – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}-6} \right) : \frac{5}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{9}$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm x thỏa mãn $\frac{B}{A} \leq \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn

a) Với $x = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện xác định thì $A = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}}+1}{\sqrt{\frac{1}{9}}-3} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-3} = \frac{-1}{2}$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì $A = \frac{-1}{2}$

a) Rút gọn biểu thức B

Với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$

$$B = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}-6} \right) : \frac{5}{x-4}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6} \right) : \frac{5}{x-4} = \left[\frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot (x-4)$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+2)-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \cdot (x-4) = \frac{2\sqrt{x}+4-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $B = \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$.

c) Với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$ thì $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \neq 0$

$$\frac{B}{A} \leq \frac{2}{3} \quad \text{hay} \quad \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15(\sqrt{x}-2)-2(\sqrt{x}+1)}{3(\sqrt{x}+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{13\sqrt{x}-32}{3(\sqrt{x}+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 13\sqrt{x}-32 \leq 0 \quad (\text{vì } 3(\sqrt{x}+1) \geq 3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{32}{13} \Leftrightarrow x \leq \frac{1024}{169}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$ ta được $0 \leq x \leq \frac{1024}{169}, x \neq 9, x \neq 4$

Câu 73. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 1 – THCS Phú La – 2020-2021)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 9)$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = AB$.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} (x \geq 0; x \neq 9)$

Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta có: $A = \frac{\sqrt{36+2}}{\sqrt{36+1}} = \frac{6+2}{6+1} = \frac{8}{7}$.

Vậy giá trị của biểu thức A khi $x = 36$ là $\frac{8}{7}$.

b) $B = \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 9)$

$$B = \left[\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$$

c) Ta có: $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1+3}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ và $x \neq 9; x \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 1+3 \Leftrightarrow P \leq 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy GTLN của P là 4 khi $x = 0$.

Câu 74. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 2 – THCS Phương Liệt – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{3\sqrt{x-1}}{x-4\sqrt{x+3}}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 9$.

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{B}{A}$.

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

+ Ta có: $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện $x \neq 1$) thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{4+3}}{4-1} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}.$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 4$ là $\frac{5}{3}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

$$B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{3\sqrt{x-1}}{x-4\sqrt{x+3}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{3\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x+2}) \cdot (\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-1}) + 3\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6-(x-1)+3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6-x+1+3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})} = \frac{2(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x-3})} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{B}{A}$.

+ Với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 9$, ta có: $P = \frac{B}{A}$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{\sqrt{x-1}} : \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+3})} = 2 - \frac{4}{\sqrt{x+3}}$$

$$P_{\min} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+3}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x=0$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{2}{3} \text{ khi } x=0.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{2}{3} \text{ khi } x=0.$$

Câu 75. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Phương Liệt – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$; $B = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}} + \frac{7-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của A khi $x=16$

2) Chứng minh rằng $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm giá trị của m để phương trình $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm

Hướng dẫn

1) Thay $x=16$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$ vào A ta được $A = \frac{4+2}{4+3} = \frac{6}{7}$

2) Với $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}} + \frac{7-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}} + \frac{7-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-1}) + (7-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}-5+7-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Khi đó $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} : \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$.

3) $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = m+1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = (m+1)(\sqrt{x}+3)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = m\sqrt{x}+3m+\sqrt{x}+3 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow m\sqrt{x}+3m+4=0 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x} = -3m-4 \quad (1) \text{ có nghiệm}$$

Nếu $m=0$ thì phương trình (1) trở thành $0 = -4$ (vô lý) \Rightarrow loại $m=0$.

Nếu $m \neq 0$ thì $\sqrt{x} = \frac{-3m-4}{m}$

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\frac{-3m-4}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3m+4}{m} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+4 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq m < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+4 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{4}{3} \\ m < 0 \end{cases}$$

Vì $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow m \neq -3m-4 \Leftrightarrow 4m \neq -4 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy để $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm thì $-\frac{4}{3} \leq m < 0$ và $m \neq -1$.

Cách 2: $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = m+1$ có nghiệm $\Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} - 1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow m = \frac{-4}{\sqrt{x}+3}$ có nghiệm

Vì $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{x}+3} \geq \frac{-4}{3} \Rightarrow m \geq -\frac{4}{3}$

Mặt khác: $\sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{x}+3} < 0 \Rightarrow m < 0$

Vì $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3m-4 \Leftrightarrow 4m \neq -4 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy để $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm thì $-\frac{4}{3} \leq m < 0$ và $m \neq -1$.

Cách 3: Ta có: $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = m+1$

Xét hiệu: $m+1-1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x}+3} < 0 \Leftrightarrow m < 0$

$m+1 + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} \geq 0 \Leftrightarrow m + \frac{4}{3} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{3}$

Vì $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3m-4 \Leftrightarrow 4m \neq -4 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy để $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm thì $-\frac{4}{3} \leq m < 0$ và $m \neq -1$.

Câu 76. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 2 – Trường School – 2019-2020)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = 1 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}$ và với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=16$.

2) Rút gọn $P = A : B$.

3) Tìm giá trị của x để $4 - \frac{2}{3}P$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Hướng dẫn

1. Với $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow B = 1 - \frac{2}{1-\sqrt{16}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

2. Ta có $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = 1 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}$ và với $x \geq 0, x \neq 1$.

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} + \frac{4\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2+4\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = A : B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} : \left(1 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} : \frac{-1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

3. P xác định $\Leftrightarrow A, B$ xác định và $B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \neq 1 \\ \frac{-\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1$.

Đặt $Q = 4 - \frac{3}{2}P = 4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = \frac{8\sqrt{x}+8-3\sqrt{x}-6}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)}$

$$Q = \frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2\sqrt{x}+2} < \frac{5}{2} \Rightarrow Q < \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$Q = \frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)} = 1 + \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2} \geq 1 \Rightarrow Q \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 \leq Q < \frac{5}{2} \Rightarrow Q \in \{1; 2\}$, mà Q là số nguyên lớn nhất nên $Q = 2$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)} = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}+2 = 4\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4(TM)$$

Vậy $x = 4$ thì $4 - \frac{2}{3}P$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 77. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 1 – Trường Pschool – 2020-2021)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}(x+1)}{2(\sqrt{x}-1)}$ và $B = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ (với $x > 0, x \neq 1$).

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$ với $x > 1$.

Hướng dẫn

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 1$

$x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Thay } x = 4 \text{ vào } A \text{ ta có: } A = \frac{\sqrt{4} \cdot (4+1)}{2 \cdot (\sqrt{4}-1)} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 5$$

Vậy $A = 5$ khi $x = 4$.

- b) Rút gọn biểu thức B .

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1) + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$ với $x > 1$.

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}(x+1)}{2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}-1) + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + 2$$

$$\text{Vì } x > 1 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x}-1 > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{x}-1} > 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{x}-1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{2} + 2$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 = \sqrt{2} \\ \sqrt{x}-1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} < 0 \text{(loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 78. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử lần 1 – Phòng GD Quốc Oai – 2020-2021)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$; $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x-1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

b) Rút gọn B .

c) Tìm x để $A.B \leq \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào $A = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4+3}} = \frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}) + 2\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

$$\text{c) } A.B \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3})} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 4 - \sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x+3})} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 7}{2(\sqrt{x+3})} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 49$$

Kết hợp điều kiện $0 \leq x \leq 49$, $x \neq 1$

Câu 79. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Quỳnh Mai – 2020-2021)

Cho biểu thức $A = \frac{x+8}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x-5\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

2) Rút gọn B .

3) Tìm các giá trị của x để $A.B \leq 4$.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 4$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 9$ vào A ta được $A = \frac{4+8}{\sqrt{4+2}} = \frac{12}{4} = 3$.

2) Với $x \geq 0$, $x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x-5\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + (\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}) - (2x-5\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})} = \frac{2x-6\sqrt{x}+x-1-2x+5\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3})} \end{aligned}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

3) Với $x \geq 0$, $x \neq 9$ ta có

$$AB \leq 4 \Leftrightarrow AB - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+8-4(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \leq 0 \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 \leq 0.$$

Vì $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện nên

$$(\sqrt{x}-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 80. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Sóc Sơn – 2020-2021)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \frac{10\sqrt{x}-12}{4-x}$ ($x \geq 0; x \neq 4$).

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $\sqrt{\frac{B}{A}} < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

a) Khi $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow A = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}+2} = \frac{5}{6}$

b) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \frac{10\sqrt{x}-12}{4-x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 4(\sqrt{x}-2) - 10\sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}-8-10\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

c) Ta có $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

Điều kiện để $\sqrt{\frac{B}{A}}$ có nghĩa là: $\sqrt{x}-2 > 0$ (vì $x \neq 4$).

$$\Leftrightarrow x > 4$$

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{B}{A}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{B}{A} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}-8-\sqrt{x}-1}{4(\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow x < 9$$

Mà $x > 4, x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Vậy $x \in \{5, 6, 7, 8\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 81. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Thị Xã Sơn Tây – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+1}}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} - \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} + \frac{36}{9-x} \right) \cdot \frac{7\sqrt{x}-2}{12}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=16$
2. Rút gọn biểu thức B
3. Tìm x để biểu thức $P = A.B$ nhận giá trị là số nguyên dương.

Hướng dẫn

1. Thay $x=16$ (thỏa mãn đkxđ) vào A ta được $A = \frac{\sqrt{16+3}}{2\sqrt{16+1}} = \frac{7}{9}$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x=16$ là $\frac{7}{9}$.

2. Với $x \geq 0; x \neq 9$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} - \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} + \frac{36}{9-x} \right) \cdot \frac{7\sqrt{x}-2}{12}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{x+3})^2}{x-9} - \frac{(\sqrt{x-3})^2}{x-9} - \frac{36}{x-9} \right) \cdot \frac{7\sqrt{x}-2}{12} = \frac{12}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{7\sqrt{x}-2}{12} = \frac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+3}}$$

3. Với $x \geq 0; x \neq 9$

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+3}} = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow 2P = \frac{14\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x+1}} = 7 - \frac{11}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Với } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 7 > 2P \geq -4 \Leftrightarrow \frac{7}{2} > P \geq -2$$

Để P nhận giá trị là số nguyên dương $\Rightarrow P \in \{1; 2; 3\}$

$$\text{TH1: } P = 1 \Rightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{9}{25} (tm)$$

$$\text{TH2: } P = 2 \Rightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} (tm)$$

$$\text{TH3: } P = 3 \Rightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25 (tm)$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{9}{25}; \frac{16}{9}; 25 \right\}$

Câu 82. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Quận Thanh Xuân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{x+4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A.B \geq 2\sqrt{x}-3$

Lời giải

a) Giá trị $x=9$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$ thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{9-2.3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

Vậy khi $x=9$ thì $A = \frac{3}{5}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{x+4} = \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)+2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x+4} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x+4} = \frac{x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x+4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ (đpcm)

c) Với $x \geq 0; x \neq 4$ để $A.B \geq 2\sqrt{x}-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 2\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 2\sqrt{x}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{x}-3 \Rightarrow x \geq (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) \Rightarrow x \geq 2x + \sqrt{x} - 6$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2) \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 \leq 0 \text{ (do } \sqrt{x}+3 > 0) \Rightarrow x \leq 4$$

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq x < 4$ thì $A.B \geq 2\sqrt{x}-3$

Câu 83. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KTCL – Trường THCS Thanh Xuân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

b) Đặt $P = A+B$. Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm m để có x thỏa mãn $P(\sqrt{x+3}) = m$.

Lời giải

a) $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

$$\text{Thay } x = 16 \text{ vào biểu thức } A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} \text{ ta được: } A = \frac{3\sqrt{16}-2}{1-\sqrt{16}} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{1-4} = \frac{12-2}{-3} = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy khi } x = 16 \text{ thì } A = -\frac{10}{3}.$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$. Ta có:

$$P = A + B = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{(-3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-3x-7\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2x+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-3x-7\sqrt{x}+6+15\sqrt{x}-11-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(-5x+5\sqrt{x})+(2\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-5\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 1 \text{ thì } P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{c) Với } x \geq 0; x \neq 1, \text{ ta có: } m = P(\sqrt{x+3}) = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} \cdot (\sqrt{x}+3) = -5\sqrt{x}+2$$

$$\bullet \text{ Với } x \geq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \leq 2 \Rightarrow m \leq 2 \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Mặt khác: } x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow -5\sqrt{x} \neq -5 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \neq -3 \Rightarrow m \neq -3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m \leq 2; m \neq -3$

Vậy với $m \leq 2; m \neq -3$ thì có x thỏa mãn $P(\sqrt{x+3}) = m$.

Cho các biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{2x-8}{x+\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.
 b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $2B - A < \frac{7}{2}$.

Lời giải

- a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

Thay $x = 4$ (TMĐK) vào biểu thức A , ta được: $A = \frac{2\sqrt{4+3}}{\sqrt{4+2}} = \frac{4+3}{2+2} = \frac{7}{4}$.

- b) Rút gọn biểu thức B .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{2x-8}{x+\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2x-8}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} - \frac{2(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} + \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{2x-8-2\sqrt{x+2}+x+3\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} = \frac{3x+\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} = \frac{3x-3\sqrt{x}+4\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{(\sqrt{x-1})(3\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1})} = \frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+2}}. \text{ Vậy } B = \frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

- c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $2B - A < \frac{7}{2}$.

$$\text{Ta có: } 2B - A = \frac{2(3\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x+2}} - \frac{2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Để } 2B - A < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x+2}} < \frac{7}{2}.$$

$$\text{Vì } \sqrt{x+2} > 0; 2 > 0 \Rightarrow 2(4\sqrt{x}+5) < 7(\sqrt{x+2})$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x}+10 < 7\sqrt{x}+14 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow x < 16. \text{ Kết hợp ĐK } x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow 0 \leq x < 16$$

Mà x là số nguyên lớn nhất $\Rightarrow x = 15$.

Vậy $x = 15$ là giá trị cần tìm.

Câu 85. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề KSCL – THCS Thăng Long – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(1-\sqrt{x})}$ và $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 4$
- 2) Rút gọn biểu thức A .
- 3) Cho $S = A.B$ Chứng minh rằng $S \leq \frac{3}{2}$

Lời giải

1) Thay $x = 4$ (tmđk) vào biểu thức B ta được: $B = \frac{\sqrt{4+3}}{\sqrt{4+1}} = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$

Vậy $B = \frac{5}{3}$ khi $x = 4$.

2) với $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(1-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+1-\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)} = \frac{-x-2\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1-x}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

3) với $x \geq 0; x \neq 1$

$$S = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$$

Xét hiệu $S - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{x}+6-3\sqrt{x}-6}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}$

Với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow 2(\sqrt{x}+2) > 0$

Suy ra $\frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \leq 0 \Leftrightarrow S - \frac{3}{2} \leq 0 \Leftrightarrow S \leq \frac{3}{2}$ (đpcm).

Câu 86. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Huyện Thường Tín – 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $Q = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 49$.
- 2) Rút gọn biểu thức $A = P - Q$.
- 3) So sánh A với $\frac{1}{3}$.

Lời giải

1) Thay $x = 49$ vào $Q = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ ta có: $Q = \frac{1}{\sqrt{49}-1} = \frac{1}{7-1} = \frac{1}{6}$

Vậy $Q = \frac{1}{6}$ khi $x = 49$.

2) Ta có $A = P - Q = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x^3}-1} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}-1} = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $A - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

Vì $x \geq 0$ nên $x+\sqrt{x}+1 = (\sqrt{x} + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ mà $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0 \Rightarrow A - \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

Vậy $A < \frac{1}{3}$.

Câu 87. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Trạch Mỹ Lộc – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

b) Chứng minh rằng $P = A : B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0; x \neq 9$) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{\sqrt{25}+1}{25-3\sqrt{25}} = \frac{5+1}{25-15} = \frac{3}{5}$.

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{3}{5}$.

b) Chứng minh rằng $P = A : B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2}$.

Với $x > 0; x \neq 9$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = A : B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} : \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 9$ thì $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Với $x > 0; x \neq 9$

Ta có:
$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{1}{\frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}-2+\frac{4}{\sqrt{x}+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}-3}$$

Áp dụng BĐT Cosi cho các số dương: $\sqrt{x}+1$ và $\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1)\frac{4}{\sqrt{x}+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}-3 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}-3} \leq 1 \Rightarrow P \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \pm 2$

Mà $\sqrt{x}+1 > 0$

Suy ra $\sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy GTLN của $P = 1$ khi $x = 1$.

Câu 88. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Bài 1. (Thi thử vào 10 – THPT Trần Nhân Tông – 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2}{2\sqrt{x}+3}$ khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm các giá trị của x để $3P$ là số nguyên.

Lời giải

a) Thay $x=9$ vào $A = \frac{2}{2\sqrt{x}+3}$ ta được $A = \frac{2}{2\sqrt{9}+3} = \frac{2}{2.3+3} = \frac{2}{9}$

$$b) P = \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3} \right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3} \right) = \left(\frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}+3} \right) = \frac{2}{2\sqrt{x}+3}$$

c) $3P = \frac{6}{2\sqrt{x}+3}$

Ta có: Với $x \geq 0$ thì $\frac{6}{2\sqrt{x}+3} > 0$ hay $3P > 0$ (1)

Vì $2\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$ hay $\frac{6}{2\sqrt{x}+3} \leq 2$ nên $3P \leq 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < 3P \leq 2$

Vì $3P \in \mathbb{Z}$ nên $3P \in \{1; 2\}$

TH1: $3P = 1$ hay $\frac{6}{2\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{x}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (tmđk)

TH2: $3P = 2$ hay $\frac{6}{2\sqrt{x}+3} = 2 \Leftrightarrow 6 = 4\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (tmđk)

Vậy $x \in \left\{ 0; \frac{9}{4} \right\}$ thì $3P$ có giá trị nguyên

Câu 89. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL vòng 3 – THCS Trần Phú – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức $M = \frac{B}{A}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $3M$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Tính giá trị của A khi $x=16$.

Có $x=16$ (thỏa mãn điều kiện của x) $\Rightarrow \sqrt{x} = 4$ thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{(4+1)(4-3)}{4-2} = \frac{5.3}{2} = \frac{15}{2}$$

Vậy khi $x=16$ giá trị của A là $A = \frac{15}{2}$.

2) Rút gọn biểu thức $M = \frac{B}{A}$.

Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$, ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - (3\sqrt{x}+6)}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6}{x-4}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}-6}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$M = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

3) Xét $3.M = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$.

Với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3$

Mặt khác $3.M > 0$. Do đó $0 < 3.M \leq 3$

Để $3M$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow 3M \in \{1; 2; 3\}$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow x \in \left\{4; \frac{1}{4}; 0\right\}$$

$$\text{Vì } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}; 0\right\}.$$

KL: Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 0\right\}$ thì $3M$ nhận giá trị nguyên.

Câu 90. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Trưng Nhị - 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{4}$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Cho $P = A : B$. Tính giá trị nhỏ nhất của P khi $x \in \mathbb{N}, x > 8$.

Lời giải

1) Thay $x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn) vào biểu thức A : $A = \sqrt{\frac{1}{4}} : \left(\sqrt{\frac{1}{4}} + 1\right) = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$

Vậy khi $x = \frac{1}{4}$ thì $A = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \\ &= \frac{x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

$$3) \text{ Có } P = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

Vì $x \in \mathbb{N}, x > 8 \Rightarrow x \geq 9$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{3}$ khi $x = 9$.

Câu 91. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – THCS Trưng Nhị - 2019-2020)

Cho $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x+5}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-5}}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x = 3$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm giá trị của a để phương trình $A - B = a$ có nghiệm.

Lời giải

$$a) \text{ Thay } x = 3 \text{ (TMĐK) vào } A \text{ ta được: } A = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

Vậy với $x = 3$ thì $A = -2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} b) B &= \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x+5}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-5}} \\ &= \left(\frac{15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} + \frac{2(\sqrt{x-5})}{(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \left(\frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}} = \frac{5+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})} \cdot \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 25$ thì $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

c) Ta có: $A - B = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Để $A - B = a$ có nghiệm thì $\frac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = a$ có nghiệm

Suy ra $-\sqrt{x} - a\sqrt{x} - a = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-a \neq 0 \\ \sqrt{x} = \frac{a}{-1-a} \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ \frac{a}{a+1} \leq 0 \\ \frac{a}{-1-a} \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ a+1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0 \\ a+1 < 0 \end{cases} \\ a-5(-1-a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ -1 < a \leq 0 \\ a \neq \frac{-5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a \leq 0 \\ a \neq \frac{-5}{6} \end{cases}$$

Để $A - B = a$ có nghiệm thì $-1 < a \leq 0; a \neq \frac{-5}{6}$.

Câu 92. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – THCS Trưng Vương – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = A.B$ khi $x \in \mathbb{N}, x < 101$.

Lời giải

1) Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Thay $x = 25$ vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$

Vậy $A = \frac{3}{7}$ khi $x = 25$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2+3x+6\sqrt{x}-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{4x+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

3) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$M = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2}$$

Có $x \in \mathbb{N}; 0 \leq x < 101$ nên $0 \leq x \leq 100 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \leq 12$

$$\Rightarrow \frac{8}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2} \leq 4 - \frac{2}{3} \Rightarrow M \leq \frac{10}{3}$$

Vậy M có giá trị lớn nhất là $\frac{10}{3}$ khi $x = 100$.

Câu 93. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 3 – THCS Trưng Vương – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{9-3\sqrt{x}}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Tính giá trị của A khi $x = 16$.
2. Rút gọn biểu thức B .
3. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để biểu thức $P = A : B$ nhận giá trị là một số nguyên âm.

Lời giải

1. với $x \geq 0, x \neq 4$. Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) thỏa mãn điều kiện vào A ta được :

$$A = \frac{9-3\sqrt{16}}{16-4} = \frac{9-3 \cdot 4}{16-4} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

2. Ta xét biểu thức B với $x \geq 0; x \neq 4$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{-3}{\sqrt{x}-2}$$

3. Ta có: $P = A : B = \frac{9-3\sqrt{x}}{x-4} : \frac{-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{3(3-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{-3}$

$$P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Để } P \text{ nguyên thì } \frac{5}{\sqrt{x}+2} \text{ nguyên} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2=5 \\ 2\sqrt{x}+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Thử lại : $x=9 \Rightarrow P=0$ (loại)

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow P = -1 \text{ (thỏa mãn } P \text{ nguyên âm)}$$

Câu 94. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Phòng GD Huyện Ứng Hòa – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 25$).

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho $\frac{A}{B} < 4$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (Thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{4\sqrt{9}}{\sqrt{9}-5} = \frac{4 \cdot 3}{3-5} = -6$

Vậy $A = -6$ khi $x=9$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 25$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4+\sqrt{x}-1+5-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

3) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 25$

Điều kiện: $B \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow x > 0, x \neq 1, x \neq 25$.

$$\frac{A}{B} < 4 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < 4 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} < 4 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-5} < 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}-5} < 0$$

Ta có $7 > 0$ nên $\sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Rightarrow x < 25$

Mà x là số tự nhiên lớn nhất, $x > 0, x \neq 1, x \neq 25$ do đó $x = 24$ (TMĐK)

Vậy $x = 24$ là số tự nhiên lớn nhất để $\frac{A}{B} < 4$.

Câu 95. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Vạn Điểm – 2019-2020)

Cho các biểu thức $P = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

- 1) Rút gọn biểu thức : P
- 2) Tìm x để $(\sqrt{x}+2)P = 12$
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

1) Với $x \geq 0; x \neq 25$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} + \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{x+4\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

2) Với $x \geq 0; x \neq 25$ để

$$(\sqrt{x}+2)P = 12 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 13 \Leftrightarrow x = 169 \text{ (tmdk)}$$

Vậy với $x = 169$ thì $(\sqrt{x}+2)P = 12$

$$3) P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+2-3}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{vì } \sqrt{x}+2 \geq 2 \quad \forall x \in \text{TXĐ} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+2} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2} \geq 1 - \frac{3}{2}$$

hay $P \geq \frac{-1}{2}$ dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ (TMĐK). Vậy Min $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = 0$

Câu 96. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Văn Quán – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x+9}{x-1} + \frac{5}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$.
- 3) Tìm m để có 2 giá trị x thỏa mãn: $mA = \sqrt{x} - 2$.

Lời giải

1) $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Thay $x = 25$ vào biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ ta được: $A = \frac{2\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}+1} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5 + 1} = \frac{10 - 1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Vậy khi $x = 25$ thì $A = \frac{3}{2}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$. Ta có:

$$P = A : B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{x+9}{x-1} + \frac{5}{1-\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{x+9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{5}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{x+9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{5(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x+9-5\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-5\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4\sqrt{x}-\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(x-4\sqrt{x}) - (\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) - (\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4}$.

3) Với $x \geq 0$, ta có: $mA = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow m \cdot \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 2$

$$\Leftrightarrow m(2\sqrt{x}-1) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$$

$$\Leftrightarrow 2m\sqrt{x} - m = x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow x - (2m+1)\sqrt{x} + m - 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - (2m+1)t + m - 2 = 0 \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt không âm $t_1; t_2$

$$\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1(m-2) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m + 8 = 4m^2 + 9 > 0 \text{ với mọi } m.$$

\Rightarrow Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ với mọi m .

$$\text{Theo định lí Vi-et, ta có: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 1 \\ t_1 t_2 = m - 2 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt không âm } t_1; t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > -1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Vậy với $m \geq 2$ thì có 2 giá trị x thỏa mãn: $mA = \sqrt{x} - 2$.

Câu 97. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – Trường thực nghiệm KHGD – 2020-2021)

Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 4}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{5\sqrt{x} - 8}{x - 2\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 16$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $S = A.B$. So sánh S với 2.

Lời giải

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

Thay $x = 25$ (TMĐK) vào A ta được $A = \frac{25 + \sqrt{25} + 1}{\sqrt{25} - 4} = 31$

- 2) Rút gọn biểu thức B .

Với $x > 0; x \neq 4; x \neq 16$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{5\sqrt{x} - 8}{x - 2\sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 2} = \frac{x - 6\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}}$$

- 3) Cho $S = A.B$. So sánh S với 2

Với $x > 0; x \neq 4; x \neq 16$

$$S = A.B = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

$x > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 2 \Rightarrow S > 2$$

Cách 2: Xét hiệu $S - 2 = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}} > 0$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 16$

Suy ra $S > 2$

Câu 98. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Ôn thi vào 10 – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x - 3\sqrt{x} + 16}{\sqrt{x} - 3}$; $B = \frac{2x - 4\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

- a) Tính giá trị của A khi $x = 36$
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) Cho $P = A.B$. Tìm GTNN của P .

Lời giải

a) Tính giá trị của A khi $x = 36$

Ta có: $A = \frac{x - 3\sqrt{x} + 16}{\sqrt{x} - 3}$ (đkxđ: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$)

Thay $x = 36$ (tmđkxđ) vào biểu thức A, ta có:

$$A = \frac{36 - 3\sqrt{36} + 16}{\sqrt{36} - 3} = \frac{34}{3}$$

b) Rút gọn biểu thức B

Ta có: $B = \frac{2x - 4\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ (đkxđ: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$)

$$\Leftrightarrow B = \frac{2x - 4\sqrt{x} + 6 - x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \Leftrightarrow B = \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \Leftrightarrow B = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

c) Cho $P = A \cdot B$. Tìm GTNN của P

Ta có: $P = A \cdot B$ (đkxđ: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$)

$$\Leftrightarrow P = \frac{x - 3\sqrt{x} + 16}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow P = \frac{x - 3\sqrt{x} + 16}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow P = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x}}$$

Áp dụng BĐT Cosi cho 2 số dương \sqrt{x} và $\frac{16}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{16}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{16}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{16}{\sqrt{x}} - 3 \geq 2 \cdot \sqrt{16} - 3 \Rightarrow P \geq 5$$

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 16$ (tmđkxđ)

Vậy GTNN của P bằng 5 khi $x = 16$

Câu 99. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Bài 1 (Đề ôn thi vào 10 – 2020-2021)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x} + 6}{x - 1}$; $B = \frac{x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 7 - 2\sqrt{6}$

b) Rút gọn biểu thức $P = A : B$

c) Tìm x để $(\sqrt{x} + 1) \cdot P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} + 10$

Lời giải

a) Tính giá trị của A khi $x = 7 - 2\sqrt{6}$

Ta có: $x = 7 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{6} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6} - 1$ (TMĐK) Thay vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{2(\sqrt{6}-1)+6}{7-2\sqrt{6}-1} = \frac{2\sqrt{6}+4}{6-2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+2}{3-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}+2)(3+\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} = \frac{5\sqrt{6}+12}{3}$$

Vậy khi $x = 7 - 2\sqrt{6}$ thì $A = \frac{5\sqrt{6}+12}{3}$

b) Rút gọn biểu thức $P = A : B$

Ta có

$$\begin{aligned} P = A : B &= \frac{2\sqrt{x}+6}{x-1} : \left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}+6}{x-1} : \frac{x+2-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

c) Tìm x để $(\sqrt{x}+1) \cdot P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} + 10$

Ta có: $(\sqrt{x}+1) \cdot P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} + 10$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} + 10$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+6 = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} + 10 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0$$

Vì $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$\sqrt{x-4} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 4$$

Nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ \sqrt{x-4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (TMĐK)

Vậy $x=4$ thì $(\sqrt{x}+1) \cdot P = x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} + 10$

Câu 100. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Tạ Quang Bửu – 2020-2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{3\sqrt{x}+4}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nguyên.

Lời giải

a) Thay $x=9$ thỏa mãn điều kiện vào biểu thức $A : A = \frac{4\sqrt{9}-7}{\sqrt{9}-2} = \frac{4.3-7}{3-2} = 5$

b) $B = \left(\frac{3\sqrt{x}+4}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}+2}$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+4-\sqrt{x}+2}{x-4} : \frac{\sqrt{x}+2}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}+6}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

c) $\frac{A}{B} = \frac{4\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{4\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{4\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+3} = 4 + \frac{-19}{\sqrt{x}+3}$

Có $x \in \mathbb{Z}$ thì \sqrt{x} là số nguyên hoặc số vô tỉ.

Trường hợp 1: \sqrt{x} là số vô tỉ, khi đó $\frac{A}{B}$ có giá trị là số vô tỉ (loại)

Trường hợp 2: \sqrt{x} là số nguyên.

$$\frac{A}{B} = 4 + \frac{-19}{\sqrt{x}+3} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \in U(19) = \{\pm 1; \pm 19\}$$

Mà $\sqrt{x}+3 \geq 3$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3=19 \Leftrightarrow \sqrt{x}=16 \Leftrightarrow x=256 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x=256$ thì $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nguyên.

Câu 101. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Tam Hiệp – 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=9$.

c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên (khi biểu thức P có nghĩa).

Lời giải

a) $P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

$$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2x+2+x+\sqrt{x}+1+x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

b) Thay $x=9$ vào ta được $P = \frac{2.9+2\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}} = \frac{18+6+2}{3} = \frac{26}{3}$

c) Với $x > 0; x \neq 1$ thì: $\frac{7}{P} = \frac{7\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x}+1)}$ với $\sqrt{x} > 1$ và x là số chính phương.

Ta có: $x+\sqrt{x}+1 > 3\sqrt{x}$ nên $\frac{7}{P} = \frac{7\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x}+1)} < \frac{7}{6}$

Suy ra $\frac{7}{P}$ chỉ nhận giá trị nguyên đó là giá trị 1,

Tức là: $\frac{7\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x}+1)} = 1 \Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 2x+2\sqrt{x}+2$

$$\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Câu 102. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Tam Khương – 2020-2021)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x để $B(\sqrt{x}-2)+2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x-2)} + 7$.

Lời giải

1) Khi $x=16$ (thỏa mãn điều kiện)

Ta có $A = \frac{\sqrt{16}+3}{\sqrt{16}-2} = \frac{4+3}{4-2} = \frac{7}{2}$.

2) Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2+x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$\begin{aligned}
 3) B(\sqrt{x}-2)+2\sqrt{x} &= x-\sqrt{7(x-2)}+7 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}(\sqrt{x}-2)+2\sqrt{x} = x-\sqrt{7(x-2)}+7 \\
 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-\sqrt{7(x-2)}+9 &= 0 \Leftrightarrow 2x-6\sqrt{x}-2\sqrt{7(x-2)}+18=0 \\
 \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9+(x-2)-2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{7} &+7+4=0 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2+(\sqrt{x-2}-\sqrt{7})^2 &+4=0 \text{ (vô nghiệm)}.
 \end{aligned}$$

Câu 103. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Tân Định – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x sao cho $\left| \frac{A}{B} \right| > \frac{A}{B}$

Lời giải

1) Thay $x = 4$ vào $A = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ ta có $A = \frac{\sqrt{4}-4}{\sqrt{4}} = \frac{2-4}{2} = -1$

Vậy $A = -1$ khi $x = 4$

$$\begin{aligned}
 2) B &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}-10+x-\sqrt{x}-x+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$3) \frac{A}{B} = \frac{\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3} \text{ đk } x \geq 0$$

Để $\left| \frac{A}{B} \right| > \frac{A}{B}$ thì $\frac{A}{B} < 0$ hay $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3} < 0$ Vì với $x \geq 0$ thì $\sqrt{x}+3 > 0$

Nên $\sqrt{x}-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x < 16$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $x=15$ thì $\left| \frac{A}{B} \right| > \frac{A}{B}$

Câu 104. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề minh họa thi vào 10 – Phòng GD Quận Tây Hồ - 2020-2021)

1. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{12} - \frac{1}{4}\sqrt{48} + \sqrt{27}$

2. a) Chứng minh rằng biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2(x+4)}{x-4}$ ($x \geq 0; x \neq 4$) bằng $\frac{3}{\sqrt{x}+2}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B?

Lời giải

1) Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} - \frac{1}{4}\sqrt{48} + \sqrt{27} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

2a) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2(x+4)}{x-4} \quad (x \geq 0; x \neq 4) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) - 2(x+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}+4+x-\sqrt{x}-2-2x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$ (dpcm)

b) Ta có: $\sqrt{x}+2 \geq 2, \forall x \geq 0, x \neq 4$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TM)

Vậy giá trị lớn nhất $B = \frac{3}{2}$ khi $x=0$

Câu 105. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề minh họa thi vào 10 – Phòng GD Quận Tây Hồ - 2019-2020)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tính giá trị của A khi $x = 16$.

b) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$. Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{B} + A$.

Lời giải

a) Cho biểu thức $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tính giá trị của A khi $x = 16$.

Khi $x = 16$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$, thay $x = 16$ vào $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ ta được: $A = \frac{16+7}{\sqrt{16}} = \frac{23}{4}$.

Vậy với $x = 16$ thì $A = \frac{23}{4}$.

b) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$. Rút gọn biểu thức B .

Với $x > 0, x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - (2x-\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-2x+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 9$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{B} + A$.

Với $x > 0, x \neq 9$, ta có:

$$S = \frac{1}{B} + A = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}} + \frac{x+7}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} + \frac{x+7}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 1 + 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 5$$

(do áp dụng bất đẳng thức Cauchy).

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 5 xảy ra khi $x = 4$.

Câu 106. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK2 – Phòng GD Quận Tây Hồ - 2019-2020)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5}{\sqrt{x+1}} + \frac{2\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$

c) Tìm giá trị của x để $\frac{B}{A} < \frac{3}{4}$.

Lời giải

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9+1}} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$$

Vậy với $x = 9$ thì $A = \frac{3}{4}$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5}{\sqrt{x+1}} + \frac{2\sqrt{x}-4}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}) - 5(\sqrt{x-1}) + 2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \Leftrightarrow B = \frac{x + \sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 5 + 2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \Leftrightarrow B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

c) Tìm giá trị của x để $\frac{B}{A} < \frac{3}{4}$.

$$\text{Ta có: } \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Để } \frac{B}{A} < \frac{3}{4} \text{ thì } \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < \frac{3}{4} \text{ (} x > 0, x \neq 1 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}-4-3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{4\sqrt{x}} < 0$$

Vì $\sqrt{x} > 0 \forall x > 0$ nên $4\sqrt{x} > 0$ nên $\frac{\sqrt{x}-4}{4\sqrt{x}} < 0$ khi $\sqrt{x}-4 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4$

$\Rightarrow x < 16$ kết hợp với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ suy ra $0 < x < 16, x \neq 1$.

Vậy với $0 < x < 16, x \neq 1$ thì $\frac{B}{A} < \frac{3}{4}$.

Câu 107. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10 – Phòng GD Quận Thạch Hà – 2020-2021)

1) Thực hiện phép tính $3\sqrt{20} - \sqrt{80} + 4\sqrt{5}$.

2) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn Q .

b) Tìm giá trị của x để $Q \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

1) Ta có $3\sqrt{20} - \sqrt{80} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

2) a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$$

b) $Q \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} \geq 0$ (do $\sqrt{x+2} > 0$)

Vậy $0 \leq x \leq 4$

Mà $x > 0, x \neq 4$ nên $0 < x < 4$

Vậy $0 < x < 4$ để $Q \geq \frac{1}{2}$.

Câu 108. (Thầy Nguyễn Chí Thành)

Cho biểu thức: $B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để $B = 5$

Lời giải

a) Rút gọn B

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

$$B = \frac{(2x+1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right]$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1)^2$$

$$B = \sqrt{x}-1$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ thì $B = \sqrt{x}-1$

b) Tìm x để $B=5$

$$B=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36 \quad (\text{Thỏa mãn } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1)$$

Vậy $x=36$ thì $B=5$.

Câu 109. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (TS 10 – Phòng GD Tỉnh Thái Nguyên – 2020-2021)

Cho biểu thức: $B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để $B=5$

Lời giải

a) Rút gọn B

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

$$B = \frac{(2x+1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right]$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1)^2$$

$$B = \sqrt{x}-1$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ thì $B = \sqrt{x}-1$

b) Tìm x để $B=5$

$$B=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36 \quad (\text{Thỏa mãn } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1)$$

Vậy $x=36$ thì $B=5$.

Câu 110. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử vào 10 – THCS Thái Thịnh – 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x-2\sqrt{x}+8}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Gọi $P = A.B$. So sánh P và $|P|$

Lời giải

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$

Thay $x=9$ (thỏa mãn ĐK: $x \geq 0; x \neq 4$) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9-2\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}-2} = \frac{9-6+3}{3-2} = 6$$

Vậy với $x=9$, giá trị của biểu thức $A = 6$

2) Rút gọn biểu thức B

Với $x \geq 0; x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x-2\sqrt{x}+8}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2\sqrt{x}+8-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4$ thì $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) Gọi $P = A.B$. So sánh P và $|P|$

Với $x \geq 0; x \neq 4$, ta có:

$$P = A.B = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2+2}{\sqrt{x}+2} > 0,$$

do đó $|P| = P$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

Câu 111. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi tuyển sinh vào 10 – THCS Thái Thịnh – 2020-2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-3\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
- b) Rút gọn biểu thức B .
- c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{9-7}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Vậy $x=9$ thì $A = \frac{2}{3}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-3\sqrt{x}+6}{x-4} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2x-3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-6-x-2\sqrt{x}+2x-3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Ta có: $P = A.B$

$$P = \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4-3}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \sqrt{x}-2 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}.$$

+ Xét $x=7 \Rightarrow P=0 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x=7$ thỏa mãn.

+ Xét $x \neq 7, x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \sqrt{x}+2$ là số vô tỷ.

Mà $x-7$ là số nguyên khác 0 $\Rightarrow P$ là số vô tỷ.

+ Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+2 \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}-2 \in \mathbb{Z}$.

Do đó $P \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{3}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+2 \in U(3)$.

Mà $\sqrt{x}+2 \geq 2$

$\Rightarrow \sqrt{x}+2=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy $x=7; x=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 112. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Thành Công – 2020-2021)

1) Cho $x = 3 - \sqrt{2}$, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11(\sqrt{x}-1)+8}{x+2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

3) Tìm các giá trị của x để biểu thức $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Cho $x = 3 - \sqrt{2}$, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ với $x \geq 0$

Thay $x = 3 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$) vào biểu thức, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+3}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+2}} = \frac{\sqrt{2}-1+3}{\sqrt{2}-1+2}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}$$

Vậy với $x = 3 - \sqrt{2}$ thì giá trị của biểu thức $A = \sqrt{2}$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11(\sqrt{x}-1)+8}{x+2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11(\sqrt{x}-1)+8}{x+2\sqrt{x}-3}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - (11\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2x+6\sqrt{x}-11\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2x-5\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm các giá trị của x để biểu thức $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$P = A.B$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+4-7}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{\sqrt{x}+2} \geq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+2} \geq 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Hay } P \geq -\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Có: } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+2} > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+2} < 2$$

$$\text{Hay } P < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $-\frac{3}{2} \leq P < 2$ mà $P \in \mathbb{Z}$ nên $P = \{-1; 0; 1\}$

$$+) P = -1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-3 = -\sqrt{x}-2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \quad (\text{thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 1)$$

$$+) P = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \quad (\text{thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 1)$$

$$+) P = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-3 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25 \quad (\text{thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 1)$$

Vậy với $x \in \left\{ \frac{1}{9}; \frac{4}{9}; 25 \right\}$ thì $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Câu 113. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL – THCS Thành Công – 2020-2021)

1) Cho $x = 25$. Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

2) Rút gọn biểu thức $P = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{6x}{4-x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

3) Tìm x để biểu thức $M = P.Q$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

1) Giá trị $x = 25$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 5$, thay vào biểu thức Q ta được:

$$Q = \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} = \frac{25-4}{5+1} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Vậy khi $x = 25$ thì $Q = \frac{7}{2}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có: $P = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{6x}{4-x}$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{6x}{x-4} \\ &= \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{6x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - (3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2) - 6x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{5x+10\sqrt{x}-3\sqrt{x}+6+x-2\sqrt{x}-6x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$.

3) Ta có: $M = P \cdot Q = \frac{5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} = \frac{5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = \frac{5\sqrt{x}+5+1}{\sqrt{x}+1} = 5 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \Rightarrow 5 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 6$.

hay $M \leq 6$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\max M = 6$ khi $x = 0$.

Câu 114. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 1 – Phòng GD Thanh Oai – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+5} - \frac{15-\sqrt{x}}{25-x} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.

1) Tính giá trị của B khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức A .

3) Đặt $P = A - B$. So sánh P và P^2 .

Lời giải

1) $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Thay $x = 16$ vào biểu thức $B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ta được: $B = \frac{1-\sqrt{16}}{\sqrt{16}+1} = \frac{1-4}{4+1} = \frac{-3}{5}$

Vậy khi $x = 16$ thì $A = \frac{-3}{5}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 25$. Ta có:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+5} - \frac{15-\sqrt{x}}{25-x} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$$

$$A = \left(\frac{2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} - \frac{-15+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-10+15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 25$ thì $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

3) Với $x \geq 0$; $x \neq 25$. Ta có: $P = A - B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Do $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 1 \Rightarrow P \geq P^2$

Vậy với $P = A - B$ thì $P \geq P^2$.

Câu 115. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 2 – Phòng GD Thanh Oai – 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{3x-3}{\sqrt{x}-9}$, $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 49$.

2) Chứng minh rằng $P = \frac{A}{B} = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm x sao cho $P(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x-2} + x = 2$.

Lời giải

1) Thay $x = 49$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta có $B = \frac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}-3} = \frac{8}{4} = 2$.

Vậy khi $x = 49$ thì $B = 2$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 3x - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-3}{(\sqrt{x} + 3)}$$

Vậy $P = \frac{A}{B} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$.

3) Điều kiện: $x \geq 2, x \neq 9$.

$$P(\sqrt{x} + 3) + 2\sqrt{x-2} + x = 2 \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}(\sqrt{x} + 3) + 2\sqrt{x-2} + x = 2$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2\sqrt{x-2} + 2 = 2 \Leftrightarrow x - 2 + 2\sqrt{x-2} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x-2} (t \geq 0)$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ t+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases}$$

Với $t = 1$ (thỏa mãn điều kiện của t) $\Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện của x).

Với $t = -3$ (không thỏa mãn điều kiện của t , loại)

Vậy $x = 3$ thì $P(\sqrt{x} + 3) + 2\sqrt{x-2} + x = 2$.

Câu 116. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Bài 1. (KSCL tháng 5 – THCS Thanh Quan – 2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$.

3) Với $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị của x để $|P| - P = 0$.

Lời giải

1) Thay $x = 9$ (tmđk) vào biểu thức A , ta có: $A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}-1} = \frac{3}{2}$

Vậy $A = \frac{3}{2}$ khi $x = 9$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x} - (\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \quad (\text{ĐPCM})$$

$$3) P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$|P| - P = 0 \Leftrightarrow |P| = P \Leftrightarrow P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

\Rightarrow Tử và mẫu cùng dấu

$\Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

Vậy: $|P| - P = 0$ khi $x > 1$ và $x \neq 4$.

Câu 117. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Yên Mỹ - 2020-2021)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ và $B = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 25$

2. Rút gọn biểu thức A .

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{A} + B$.

Lời giải

1. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ khi $x = 25$

Thay $x = 25$ (TMDK) vào biểu thức B ta có: $B = \frac{25+7}{\sqrt{25}} = \frac{32}{5}$

2. Rút gọn biểu thức A .

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$A = \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-2x+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{A} + B$.

$$S = \frac{1}{A} + B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} + \frac{x+7}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1$$

Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số không âm \sqrt{x} và $\frac{4}{\sqrt{x}}$, ta có :

$$S = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} + 1 = 5$$

$$S_{\min} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$$

Câu 118. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL lần 1 – Phòng GD huyện Thanh Trì – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 16$.

2. Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$.

3. Tìm x để: $\frac{A}{B} = \frac{2}{7}$.

Lời giải

1. Ta có $x = 16$ thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$.

Thay $x = 16$ vào biểu thức B ta được: $B = \frac{\sqrt{16}+3}{\sqrt{16}-3} = \frac{4+3}{4-3} = 7$.

2. Với $x \geq 0; x \neq 9$ thì biểu thức A được xác định.

$$\text{Biến đổi: } A = \frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+\sqrt{x}+9-(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

3. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2}{7}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 6 = 7 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (tmđk).}$$

Câu 119. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL học kì 2 – THCS Thanh Xuân Nam – 2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của B khi $x = 49$

2) Rút gọn biểu thức $S = A - B$

3) So sánh S với $\frac{1}{3}$

Lời giải

1) Khi $x = 49$ thỏa mãn ĐKXD nên thay vào B ta có $B = \frac{1}{\sqrt{49}-1} = \frac{1}{7-1} = \frac{1}{6}$

2) $S = A - B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

$$S = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$S = \frac{x+2+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$S = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$S = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

3) So sánh S với $\frac{1}{3}$

$$\text{Ta có } S - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0 \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

Nên $S < \frac{1}{3}$

Câu 120. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Thi thử vào 10 – THCS Thanh Xuân Nam – 2020-2021)

Cho các biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức $P = A : B$.

c) Tính giá trị nhỏ nhất của P .

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B , ta có: $B = \frac{1}{\sqrt{25}+1} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$

Vậy giá trị của biểu thức B là $\frac{1}{6}$ khi $x = 25$.

$$b) P = A : B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$c) \text{ Với } x > 0 \text{ ta có: } P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

Áp dụng bđt cô – si cho hai số dương \sqrt{x} và $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có:

$$P = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2 + 1 \Rightarrow P \geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $x = 1$.

Câu 121. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK2 – Phòng GD Quận Thanh Xuân – 2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ($x > 0; x \neq 4$)

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm tất cả giá trị của x để $A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

Lời giải

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

$$\text{Khi } x = 16 \text{ (t/m)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

b) Rút gọn biểu thức B .

$$B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

c) Tìm tất cả giá trị của x để $A.B = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$.

$$\text{Ta có } A.B = \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x + 5\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} - 2)} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(5 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ 5 - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (k\text{tm}) \\ x = 25 (t\text{m}) \end{cases}$$

Vậy $x = 25$ là giá trị cần tìm.

Câu 122. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Kim Chung 2014 – 2015)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{3x+9}{9-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$ và $Q = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để $Q : P$ nhận giá trị nguyên dương.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 3x - 9 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{x - 3\sqrt{x} - 3x - 9 + 2x + 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

b) Ta có:

$$x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1. \text{ Thay vào Q ta được:}$$

$$Q = \frac{3}{\sqrt{3} + 1 - 1} = \sqrt{3}. \text{ Vậy } x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ thì } Q = \sqrt{3}$$

c) Ta có:

$$Q : P = \frac{3}{\sqrt{x}-1} : \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$$

Để $Q : P$ là số nguyên thì $\sqrt{x}-1 \in U(4)$. Ta có bảng:

| | | | | | | |
|---------------|------|------|----|---|----------|----|
| $\sqrt{x}-1$ | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
| x | Loại | Loại | 0 | 4 | 9 (loại) | 25 |
| $\frac{Q}{P}$ | | | -3 | 5 | | 2 |

Dựa vào bảng giá trị trên, để $Q : P$ là số nguyên dương thì $x \in \{4; 25\}$

Câu 123. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Vĩnh Bảo – Hải Phòng 2017 – 2018)

a) Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{147} - 2\sqrt{18}$ và $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

b) Rút gọn biểu thức: $C = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0$; $x \neq 1$)

c) Tìm x để: $3B + C < 0$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$A = \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{147} - 2\sqrt{18} = \frac{7(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \sqrt{7^2 \cdot 3} - 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 2}$$

$$= 7\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Và $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5}-2| - \sqrt{5} = \sqrt{5}-2-\sqrt{5} = -2$

b) Ta có:

$$C = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}, \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

c) Ta có:

$$3B + C < 0 \Leftrightarrow -6 + 2\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Câu 124. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Vĩnh Bảo – Hải Phòng 2018-2019)

Cho hai biểu thức $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, ($x > 0$, $x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A và B.

b) Tìm giá trị của x để tổng ba lần biểu thức A với biểu thức B có giá trị bằng 0?

Hướng dẫn

a) Ta có: $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5}-2| - \sqrt{5} = \sqrt{5}-2-\sqrt{5} = -2$

$$B = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}, \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

b) Ta có:

$$3A + B = 0 \Leftrightarrow -6 + 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Câu 125. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Công Trứ 2018 – 2019)

Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1}$ với $x > 0; x \neq \frac{1}{9}$

- a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 4$
 b) Rút gọn biểu thức $P = A.B$
 c) Tìm x nguyên sao cho biểu thức $\frac{1}{P}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn

a) Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{3\sqrt{4}+1}{4+\sqrt{4}} = \frac{3.2+1}{4+2} = \frac{7}{6}. \text{ Vậy } A = \frac{7}{6} \text{ khi } x = 4.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1) - (3\sqrt{x}-1) + 8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{3x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 1 - 3\sqrt{x} + 1 + 8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{3x + 3\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Suy ra } P = A.B = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{3\sqrt{x}-1}$$

c) Ta có:

$$\frac{1}{P} = \frac{3\sqrt{x}-1}{3} = \sqrt{x} - \frac{1}{3}$$

Để $\frac{1}{P}$ đạt GTNN thì \sqrt{x} nhỏ nhất, mà $x > 0; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$

$$\text{Vậy } \min \frac{1}{P} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 126. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Công Trứ 2017 – 2018)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\sqrt{x} - \frac{3x+1}{x+3\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ (Với $x > 0; x \neq 1$)

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
 b) Rút gọn biểu thức B.
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = A.B$ với $x > 1$.

a) Với $x=9$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } x=9 \text{ thì } A = \frac{3}{2}.$$

b) Ta có:

$$B = \left(\sqrt{x} - \frac{3x+1}{x+3\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}) - 3x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{x\sqrt{x} + 3x - 3x - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

c) Ta có:

$$M = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 2 + \frac{3}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}-1) + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + 3.$$

Vì $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi cho hai số $(\sqrt{x}-1); \frac{3}{\sqrt{x}-1}$ ta có:

$$(\sqrt{x}-1) + \frac{3}{\sqrt{x}-1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{x}-1}} = 2\sqrt{3}$$

Suy ra $M \geq 2\sqrt{3} + 3$. Dấu bằng xảy ra khi :

$$(\sqrt{x}-1) = \frac{3}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = (\sqrt{3}+1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

Vậy $\min M = 3 + 2\sqrt{3}$ khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 127. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Công Trứ 2018 – 2019)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 6 + 2\sqrt{5}$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Tìm các giá trị của x để biểu thức $P = \frac{B}{A}$ nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn

1) Ta có: $x = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

Suy ra $\sqrt{x} = \sqrt{5} + 1$. Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1+3}{\sqrt{5}+1-2} = \frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}-1} = \frac{9+5\sqrt{5}}{4}. \text{ Vậy } x = 6+2\sqrt{5} \text{ thì } A = \frac{9+5\sqrt{5}}{4}.$$

2) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}-2)^2 + 4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+4\sqrt{x}+4-x+4\sqrt{x}-4+4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

c) Ta có:

$$P = \frac{B}{A} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow P \geq 0$.

$$\text{Mà } P = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 4 - \frac{12}{\sqrt{x}+3} < 4 \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 4.$$

Suy ra $0 \leq P < 4$, mà $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$\text{Với } P = 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } P = 1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } P = 2 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 2 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } P = 3 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 3 \Leftrightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{0; 1; 9; 81\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Câu 128. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Chương Mĩ 2017-2018)

Cho các biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ (Với $x \geq 0, x \neq 9$)

a). Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 25$

b). Rút gọn biểu thức $P = A : B$

c). Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Hướng dẫn

a) Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{\sqrt{25} + 1}{\sqrt{25} - 3} = \frac{5 + 1}{5 - 3} = 3. \text{ Vậy } x = 25 \text{ thì } B = 3.$$

b) Ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 3x - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$A = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 3x - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$A = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$\text{Suy ra } P = A : B = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$$

Vì $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \leq 1 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x} + 3} \geq -1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $\min P = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 129. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Thanh Trì 2017 – 2018)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{2x + 2\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1. Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Chứng minh rằng $\frac{B}{A} < \frac{1}{3}$

Hướng dẫn

1. Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16} + 2}{\sqrt{16} - 1} = \frac{4 + 2}{4 - 1} = 2. \text{ Vậy } x = 16 \text{ thì } A = 2.$$

2. Ta có:

$$B = \frac{2x + 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$B = \frac{2x + 2\sqrt{x} - 1 - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$B = \frac{2x + 2\sqrt{x} - 1 - x + 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(x-1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(x-1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

3. Ta có:

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(x-1)(x + \sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Cách 1:

$$\frac{B}{A} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x - 2\sqrt{x} - 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x} + 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} < 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \geq 0, x \neq 1 \text{) điều phải chứng minh.}$$

Cách 2:

+ **Xét** $x = 0 \Rightarrow \frac{B}{A} = 0 < \frac{1}{3}$.

Xét $x >, x \neq 1$, suy ra $\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ (chia cả tử và mẫu cho \sqrt{x})

Áp dụng BĐT Cossi ta có: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq \frac{1}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn)

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} < \frac{1}{3}$ hay $\frac{B}{A} < \frac{1}{3}$

Câu 130. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Phan Chu Trinh 2017 – 2018)

1) Cho biểu thức $A = \frac{x-4}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$). Tìm giá trị của x để $A = 4$

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{18}{A.B}$

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$A = 4 \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}-1} = 4 \Leftrightarrow x-4 = 4\sqrt{x}-4 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=16 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x=0; x=16$ thì $A=4$.

2) Ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$B = \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 4$$

3) Ta có:

$$A.B = \frac{x-4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Suy ra } \frac{18}{A.B} = \frac{18(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+2} = 18 - \frac{54}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow 18 - \frac{54}{\sqrt{x}+2} \geq 18 - \frac{54}{2} = -9$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=0$.

$$\text{Vậy } \min \frac{18}{A.B} = -9 \Leftrightarrow x=0$$

Câu 131. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Hoàng Hoa Thám 2018 – 2019)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2. Rút gọn biểu thức $P = A.B$.

3. Tìm x để $(6x+18).P \geq x+9$

Hướng dẫn

1. Với $x=16$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}-2}{16+3} = \frac{4-2}{19} = \frac{2}{19}. \text{ Vậy } x=16 \text{ thì } A = \frac{2}{19}.$$

2. Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Suy ra } P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$$

3. Ta có:

$$(6x+18).P \geq x+9 \Leftrightarrow (6x+18) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+3} \geq x+9$$

$$\Leftrightarrow 6(x+3) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+3} \geq x+9 \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0 \text{ mà } (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 4$$

Nên $\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $x=9$

Câu 132. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Nam Từ Liêm 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ với $x > 0; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.
2. Rút gọn biểu thức B
3. Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $P = m$.

Hướng dẫn

1. Với $x=36$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{36}-2}{\sqrt{36}} = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } x=36 \text{ thì } A = \frac{2}{3}.$$

2. Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - 7\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x+3\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-7\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x-5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

3. Ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Đề } P = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = m \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(m-1) = 3 \quad (*)$$

Xét $m=1 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot 0 = 3 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

$$\text{Xét } m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-1}.$$

$$\text{Đề phương trình } (*) \text{ có nghiệm thì } x > 0; x \neq 9 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-1} > 0 \\ \frac{3}{m-1} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì phương trình $P = m$ có nghiệm

Câu 133. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Bắc Từ Liêm 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm giá trị m để $A \cdot B = m$ có nghiệm.

Hướng dẫn

a) Với $x=9$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9+\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-1} = \frac{9+3+1}{3-1} = \frac{13}{2}. \text{ Vậy } x=9 \text{ thì } A = \frac{13}{2}.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

c) Ta có:

$$A.B = m \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = m.\sqrt{x} - m \Leftrightarrow \sqrt{x}(m-1) = m \quad (1)$$

+ Với $m=1$ thay vào (1) suy ra $\sqrt{x}.0 = 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{m}{m-1}.$$

Vì $x \geq 0$; $x \neq 1$ nên để phương trình (1) có nghiệm thì:

$$\begin{cases} \frac{m}{m-1} \geq 0 \\ \frac{m}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m > 1 \end{cases}. \text{ Vậy } \begin{cases} m \leq 0 \\ m > 1 \end{cases} \text{ thì } A.B = m \text{ có nghiệm}$$

Câu 134. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Phú Đô 2017 - 2018)

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính $P = \frac{A}{B}$

c) Với $x > 1$ tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{A}$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$A = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

b) Ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

c) Ta có:

$$\frac{1}{A} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+2 + \frac{3}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}-1) + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + 3$$

Vì $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$, áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $\sqrt{x}-1$, $\frac{3}{\sqrt{x}-1}$ ta được:

$$\sqrt{x}-1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{x}-1}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{A} = (\sqrt{x}-1) + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + 3 \geq 2\sqrt{3} + 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (\sqrt{x}-1) = \frac{3}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = (\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \min \frac{1}{A} = 2\sqrt{3} + 3 \text{ khi } x = 4+2\sqrt{3}.$$

Câu 135. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Dịch Vọng Hậu – 2018 – 2019)

a) Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi $x = 3-2\sqrt{2}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức $P = \frac{3}{2}A - B$ là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $x = 3-2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Suy ra $x = (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$, thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{2}-1-2}{\sqrt{2}-1+2} = \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+1} = 5-4\sqrt{2}. \text{ Vậy } x = 3-2\sqrt{2} \text{ thì } A = 5-4\sqrt{2}.$$

b) Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

c) Ta có:

$$P = \frac{3}{2}A - B = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{3\sqrt{x}-6-2\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-6}{2(\sqrt{x}+2)}$$

$$\text{Để } P \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-6}{2(\sqrt{x}+2)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-6 : 2(\sqrt{x}+2)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}-12 : 2\sqrt{x}+4 \Rightarrow (2\sqrt{x}+4-16) : (2\sqrt{x}+4) \Rightarrow 16 : (2\sqrt{x}+4)$$

$$\text{Mà } x \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}+4 \geq 4 \Rightarrow 2\sqrt{x}+4 \in \{4; 8; 16\} \Rightarrow x \in \{0; 4; 36\}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $x \in \{0; 36\}$.

Thử lại:

$$x = 0 \Rightarrow P = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ không thỏa mãn.}$$

$$x = 36 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow x = 36 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy $x = 36$ thì P nhận giá trị nguyên.

Câu 136. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Thái Thịnh 2017 – 2018)

Cho $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn

1) Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{16+3}{\sqrt{16}+3} = \frac{19}{7}. \text{ Vậy } x = 16 \text{ thì } A = \frac{19}{7}.$$

2) Ta có:

$$B = \left[\frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{x+3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

3) Ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi ta có:

$$\sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} = 4$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $\min P = 2$ khi $x = 1$.

Câu 137. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Hà Đông 2016 – 2017)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ ($x \geq 0, x \neq 9$)

- Tính giá trị biểu thức A khi $x = 36$.
- Rút gọn biểu thức B.
- Tìm x để hiệu $A - B$ có giá trị là số tự nhiên.

Hướng dẫn

a) Với $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{7\sqrt{36}+2}{2\sqrt{36}+1} = \frac{7 \cdot 6 + 2}{2 \cdot 6 + 1} = \frac{44}{13}. \text{ Vậy } x = 36 \text{ thì } A = \frac{44}{13}.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+3)^2 + (\sqrt{x}-3)^2 - 36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x+6\sqrt{x}+9+x-6\sqrt{x}+9-36}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = 2$$

c) Ta có:

$$A - B = \frac{7\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1} - 2 = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(2\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} A - B = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \geq 0 \\ A - B = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{3}{2} \end{cases} \text{ mà } A - B \in \mathbb{N} \Rightarrow A - B \in \{0; 1\}.$$

$$\text{Với } A - B = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } A - B = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x \in \{0; 1\}$ thì $A - B$ có giá trị là số tự nhiên

Câu 138. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Hà Đông 2017-2018)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của A tại $x = 6 - 2\sqrt{5}$;

b) Rút gọn biểu thức B và tính $P = \frac{A}{B}$;

c) Tìm x thỏa mãn $xP \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$

Hướng dẫn

a) Với $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1$

thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{5}-1+2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } x = 6 - 2\sqrt{5} \text{ thì } A = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

Suy ra $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4}{x}$

c) Ta có:

$$xP \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{x-4}{x} \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$$

$$\Leftrightarrow x-4 \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$$

$$\Leftrightarrow x - 10\sqrt{x} + 25 + \sqrt{x-25} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-5)^2 + \sqrt{x-25} \leq 0$$

Vì $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-25} \geq 0 \end{cases}$ với mọi $x > 0, x \neq 4$, nên $(\sqrt{x}-5)^2 + \sqrt{x-25} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-5)^2 = 0 \\ \sqrt{x-25} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 25$ (thỏa

mãn). Vậy $x = 25$.

Câu 139. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Vĩnh Tuy 2015-2016)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn A.

b) Tìm các giá trị của x để $A < 1$

c) Tìm các giá trị của m để phương trình $A = m$ có nghiệm

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 - 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

b) Ta có:

$$A < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \quad (\text{vì } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0).$$

Suy ra $x < 4$. Kết hợp điều kiện suy ra $\begin{cases} 0 \leq x < 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

c) Ta có:

$$A = m \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = m \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 = m\sqrt{x} + m \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - m) = m + 1 \quad (*)$$

+ Xét $m = 2$ thay vào (*) $\Rightarrow \sqrt{x} \cdot 0 = 3 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

$$+ \text{ Xét } m \neq 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{m + 1}{2 - m}.$$

Vì $x \geq 0, x \neq 1$ nên để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} \frac{m + 1}{2 - m} \geq 0 \\ \frac{m + 1}{2 - m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 2 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} -1 \leq m < 2 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ thì phương trình $A = m$ có nghiệm.

Câu 140. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Trưng Nhị 2017 – 2018)

Cho $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{x + 1}{2} - \sqrt{x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 4$.

b) Rút gọn biểu thức $P = A \cdot B$

c) Tìm m để phương trình $(\sqrt{x} + 1)P = m - x$ có nghiệm x.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{x - 1}$$

Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } x=4 \text{ thì } A = \frac{2}{3}.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$$

$$\text{Suy ra } P = A \cdot B = \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

c) Ta có:

$$(\sqrt{x}+1)P = m-x \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = m-x \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1 = m$$

$$\text{Vì } x \geq 0; x \neq 1 \text{ nên } \begin{cases} x+\sqrt{x}-1 \geq -1 \\ x+\sqrt{x}-1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó, để } x+\sqrt{x}-1 = m \text{ có nghiệm thì } \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Câu 141. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Minh Khai 2017 – 2018)

a. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}}$ (với $x > 0; x \neq 4$)

b) Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ tại $x=9$.

c) Tìm số hữu tỉ x để $M = \frac{P}{Q}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$P = \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}, \text{ với } x > 0; x \neq 4.$$

b) Với $x=9$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức Q ta được:

$$Q = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4. \text{ Vậy } x=9 \text{ thì } Q=4.$$

c) Ta có:

$$M = \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$M = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} < 1 \text{ với mọi } x > 0$$

Mặt khác $M + 3 = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} + 3 = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > 0$ với mọi $x > 0$ nên $M > -3$

Suy ra $-3 < M < 1$.

mà $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{-2; -1; 0\}$.

Với $M = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (tmđk).

Với $M = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (tmđk).

Với $M = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (tmđk).

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{9}; 1; 9 \right\}$ thì $M = \frac{P}{Q}$ nhận giá trị nguyên.

Chú ý:

Các em có thể chỉ ra $-3 < M < 1$ bằng cách sau:

$$M = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow M \cdot \sqrt{x} + M = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-M) = M + 3 \quad (*)$$

Xét $M = 1$ phương trình (*) vô nghiệm.

Xét $M \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{M+3}{1-M}$.

$$\text{Vì } x > 0; x \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{M+3}{1-M} > 0 \\ \frac{M+3}{1-M} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < M < 1 \\ M \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 142. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Ngô Sĩ Liên 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{5\sqrt{x}+9}{x-1}$ và $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{9}$

2. Chứng minh rằng: $\frac{A}{B} = \frac{5\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+1}$

3. Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$, tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\frac{A}{B} = m$ có nghiệm x

Hướng dẫn

1. Thay $x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A, ta được:

$$A = \frac{5\sqrt{\frac{1}{9}} + 9}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{\frac{5}{3} + 9}{-\frac{8}{9}} = -12. \text{ Vậy } x = \frac{1}{9} \text{ thì } A = -12.$$

2. Ta có:

$$B = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x+2 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+2-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{5\sqrt{x}+9}{x-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{5\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{5\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+1}$ (điều phải chứng minh)

3. Ta có:

$$\frac{A}{B} = m \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+1} = m \Leftrightarrow 5\sqrt{x}+9 = m(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}(5-m) = m-9 \quad (1)$$

Xét $m=5$ thay vào (*) $\Rightarrow \sqrt{x}.0 = -4 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Xét $m \neq 5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{m-9}{5-m}.$

Để phương trình $\frac{A}{B} = m$ có nghiệm thì $x \geq 0, x \neq 1.$

Suy ra $\begin{cases} \frac{m-9}{5-m} \geq 0 \\ \frac{m-9}{5-m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < m \leq 9 \\ m \neq 7 \end{cases}.$ Vậy:

Câu 143. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Thanh Quan – Hoàn Kiếm 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức: $M = \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1}$ và $P = \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-3} - \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+3} - \frac{36}{a-9}$, với $a \geq 0; a \neq 9.$

- a) Tính giá trị của M với $a = 4.$
- b) Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của a để $M = P.$
- c) Tìm các giá trị của a để M nhận giá trị là số nguyên dương.

Hướng dẫn

a) Thay $a = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được:

$$M = \frac{7\sqrt{4}-2}{2\sqrt{4}+1} = \frac{7.2-2}{2.2+1} = \frac{12}{5}. \text{ Vậy } a = 4 \text{ thì } M = \frac{12}{5}.$$

b) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-3} - \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+3} - \frac{36}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{a}+3)^2 - (\sqrt{a}-3)^2 - 36}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$P = \frac{a+6\sqrt{a}+9-a+6\sqrt{a}-9-36}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$P = \frac{12(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{12}{\sqrt{a}+3}, \text{ với } a \geq 0; a \neq 9.$$

$$\text{Đề } M = P \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} = \frac{12}{\sqrt{a}+3} \Leftrightarrow (7\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+3) = 12(2\sqrt{a}+1)$$

$$\Leftrightarrow 7a+21\sqrt{a}-2\sqrt{a}-6-24\sqrt{a}-12=0$$

$$\Leftrightarrow 7a-5\sqrt{a}-18=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)(7\sqrt{a}+9)=0$$

Vì $a \geq 0; a \neq 9$

Nên $(\sqrt{a}-2)(7\sqrt{a}+9)=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-2=0 \Leftrightarrow a=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $a=4$ thì $M=P$.

c) Ta có:

$$\text{Ta có: } M = \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} = \frac{7}{2} - \frac{11}{2(2\sqrt{a}+1)} < \frac{7}{2} \text{ với mọi } a \geq 0; a \neq 9.$$

$$\text{Mặt khác } M+2 = \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} + 2 = \frac{11\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+1} \geq 0 \text{ với mọi } a \geq 0; a \neq 9.$$

$$\text{Nên } M \geq -2 \Rightarrow -2 \leq M < \frac{7}{2}.$$

mà M nhận giá trị là số nguyên dương nên $M \in \{1; 2; 3\}$.

$$+ \text{ Với } M=1 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow a = \frac{9}{25} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$+ \text{ Với } M=2 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{16}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$+ \text{ Với } M=3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 5 \Leftrightarrow a = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a \in \left\{ \frac{9}{25}; \frac{16}{9}; 25 \right\}$ thì M nhận giá trị là số nguyên dương.

Chú ý: Để chỉ ra $-2 \leq M < \frac{7}{2}$ các em có thể làm như sau:

$$M = \frac{7\sqrt{a}-2}{2\sqrt{a}+1} \Leftrightarrow 7\sqrt{a}-2 = 2M\sqrt{a}+M \Leftrightarrow \sqrt{a}(7-2M) = M+2.$$

Vì M nguyên dương nên $7-2M \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{M+2}{7-2M}$ (*)

Vì $a \geq 0$; $a \neq 9$ nên phương trình (*) có nghiệm khi :

$$\begin{cases} \frac{M+2}{7-2M} \geq 0 \\ \frac{M+2}{7-2M} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq M < \frac{7}{2} \\ M \neq \frac{19}{7} \end{cases}$$

Câu 144. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Trưng Vương 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ và $B = \frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.
- 3) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $81x^2 - 18x = P - 9\sqrt{x} + 4$.

Hướng dẫn

1) Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25}+1}{(\sqrt{25}-1)^2} = \frac{5+1}{(5-1)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}. \text{ Vậy } x = 25 \text{ thì } A = \frac{3}{8}.$$

2) Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

Suy ra $P = \frac{B}{A} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

3) Ta có:

$$81x^2 - 18x = P - 9\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow 81x^2 - 18x = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow 81x^2 - 18x + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow (9x-1)^2 = 6 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) \quad (*)$$

Ta có: $(9x-1)^2 \geq 0$ với mọi $x > 0$; $x \neq 1$.

Áp dụng BĐT Cosi ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 9\sqrt{x}} = 6 \Rightarrow 6 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) \leq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = 9\sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

Suy ra $(9x-1)^2 = 6 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} (9x-1)^2 = 0 \\ 6 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì $81x^2 - 18x = P - 9\sqrt{x} + 4$

Câu 145. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Hoàng Mai 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x + \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{3x - 4}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1) Với $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9 + \sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 2} = \frac{9 + 3 + 4}{3 - 2} = 16. \text{ Vậy } x = 9 \text{ thì } A = 16.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3x - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{3x - 4 - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{3x - 4 - x + 4 - x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

3) Ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{x + \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{x + \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x} + 1} = \left(\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1}\right) - 1$$

Áp dụng BĐT Cosi ta có:

$$\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{x} + 1}} = 4$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} = \left(\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1}\right) - 1 \geq 4 - 1 = 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\min \frac{A}{B} = 4$ khi $x=1$.

Câu 146. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Hoàng Mai 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = \frac{4B}{A}$ có giá trị là số nguyên dương.

Hướng dẫn

1) Thay $x=4$ (thỏa mãn điều kiện), vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2\sqrt{4}+3}{4+\sqrt{4}+1} = \frac{2.2+3}{4+2+1} = 1. \text{ Vậy } x=4 \text{ thì } A=1.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 1 \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

3) Ta có:

$$P = \frac{4B}{A} = 4 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vì } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} \geq 0$$

$$\text{Xét } P-2 = \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} - 2 = \frac{-6}{2\sqrt{x}+3} < 0 \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 1.$$

Suy ra $0 \leq P < 2$.

Mà P có giá trị là số nguyên dương nên $P=1$.

$$\text{Với } P=1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Cách khác:

$$\text{Suy ra } P = \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow P \cdot (2\sqrt{x}+3) = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow 2P\sqrt{x}+3P = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(4-2P) = 3P \quad (*)$$

Xét $P = 2$ thay vào (*) $\Rightarrow \sqrt{x} \cdot 0 = 6 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Xét $P \neq 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3P}{4-2P}$, phương trình (*) có nghiệm $x \geq 0$; $x \neq 1$ khi:

$$\begin{cases} \frac{3P}{4-2P} \geq 0 \\ \frac{3P}{4-2P} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq P < 2 \\ P \neq \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Câu 147. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Gia Thụy 2014 – 2015)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$. Ta có:

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right]$$

$$A = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

b) Ta có: $A < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} < 0$.

Vì $x > 0$; $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0$ nên $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < x < 1$. Vậy $0 < x < 1$ thì $A < 0$

Câu 148. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Long Biên 2015 – 2016)

1) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x = 225$

2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tìm x để $B = \sqrt{x} - 1$

1) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Thay $x = 225$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$P = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{225} - 2} = \frac{15}{13}. \text{ Vậy } x = 225 \text{ thì } A = \frac{15}{13}.$$

2a) Rút gọn B:

$$B = \left[\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}, \text{ với } x > 0; x \neq 4.$$

2b) Ta có:

$$B = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) = 0$$

Vì $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0$ nên $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

Vậy không tồn tại giá trị của x để $B = \sqrt{x} - 1$

Câu 149. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Ngọc Lâm 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức B với $x = 16$.

b) Rút gọn biểu thức $P = A.B$.

c) Tìm x để $|P+1| > P+1$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}. \text{ Vậy } x = 16 \text{ thì } A = \frac{5}{4}.$$

b) Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}$$

$$\text{Suy ra } P = A.B = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{x-1}$$

Vậy $P = \frac{2}{x-1}$, với $x > 0; x \neq 1$.

c) Để $|P+1| > P+1 \Leftrightarrow P+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$

Vì $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ nên $\frac{x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < x < 1$.

Câu 150. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Tây Hồ 2017)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}$ (Với $x \geq 0, x \neq 25$)

a) Tính giá trị của A khi $x = \frac{25}{16}$

b) Rút gọn biểu thức: $M = \frac{B}{A}$

c) Tìm các giá trị của x để $M(\sqrt{x}+2) \geq 3x+1$

Hướng dẫn

a) Thay $x = \frac{25}{16}$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{25}{16}} + 2}{\sqrt{\frac{25}{16}} - 5} = \frac{\frac{5}{4} + 2}{\frac{5}{4} - 5} = \frac{\frac{13}{4}}{-\frac{15}{4}} = -\frac{13}{15}. \text{ Vậy với } x = \frac{25}{16} \text{ thì } A = -\frac{13}{15}.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x+4\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$$

Suy ra $M = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$.

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

c) Ta có:

$$M(\sqrt{x}+2) \geq 3x+1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot (\sqrt{x}+2) \geq 3x+1$$

$$\Leftrightarrow 3x - \sqrt{x} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2x + \frac{7}{4} \leq 0 \quad (*)$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2x + \frac{7}{4} > 0$. Suy ra bất phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại giá trị của x để $M(\sqrt{x}+2) \geq 3x+1$

Câu 151. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Achimedes Academy 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$, (với $x > 0; x \neq 9$)

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A + \frac{1}{B}$.

Hướng dẫn

1. Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{16+7}{\sqrt{16}} = \frac{23}{4}. \text{ Vậy } x=16 \text{ thì } A = \frac{23}{4}.$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - 2x + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2x + 6\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3 - 2x + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

3. Ta có:

$$P = A + \frac{1}{B} = \frac{x+7}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1$$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $\sqrt{x}, \frac{4}{\sqrt{x}}$ ta có:

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4 \text{ suy ra } P = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 \geq 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\min P = 5$ khi $x = 4$.

Câu 152. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 THCS Achimedes Academy 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3\sqrt{x} + 2}{x - 4}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B.
- So sánh $\sqrt{A \cdot B}$ và 1 với điều kiện $\sqrt{A \cdot B}$ có nghĩa.

Hướng dẫn

1. Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25} + 2}{\sqrt{25} - 2} = \frac{5 + 2}{5 - 2} = \frac{7}{3}. \text{ Vậy } x = 25 \text{ thì } A = \frac{7}{3}.$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 4 \end{aligned}$$

3. Ta có:

$$A \cdot B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}.$$

Biểu thức $\sqrt{A \cdot B}$ có nghĩa khi $\sqrt{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

$$\text{Với } x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} - 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} > 1 \Rightarrow A \cdot B > 1 \Leftrightarrow \sqrt{A \cdot B} > 1.$$

Vậy $\sqrt{A \cdot B} > 1$, với $x > 4$.

Câu 153. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lâmôlôxốp 2017-2018)

Cho các biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$ và $B = \frac{x + 3}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị biểu thức A khi $|x - 5| = 4$
- Rút gọn biểu thức $M = A \cdot B$.

c) So sánh M với $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $|x-5|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9(tm) \\ x=1(L) \end{cases}$

Với $x=9$ thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9-\sqrt{9}}{2-\sqrt{9}} = \frac{9-3}{2-3} = -6. \text{ Vậy } x=9 \text{ thì } A=-6.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{x+3}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+3-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

Suy ra $M = A.B = \frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

c) Xét $M - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

Vì $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow M - \frac{1}{3} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0 \Rightarrow M < \frac{1}{3}$. Vậy $M < \frac{1}{3}$

Câu 154. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lâmônôxốp 2017-2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5x+2}{4-x}$ với điều kiện $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị A biết $9x^2 = 4x$

b) Rút gọn B

c) Tìm các giá trị x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Ta có: $9x^2 = 4x \Leftrightarrow x(9x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(L) \\ x=\frac{4}{9}(tm) \end{cases}$

Với $x = \frac{4}{9}$ thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}}-2}{\sqrt{\frac{4}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -2. \text{ Vậy } x = \frac{4}{9} \text{ thì } A = -2.$$

b) Ta có:

$$B = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5x+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) - 5x-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{5x+10\sqrt{x}+x-3\sqrt{x}+2-5x-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+7\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}, \text{ với } x > 0, x \neq 4.$$

c) Ta có:

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x+7\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

Vì $x > 0, x \neq 4$ nên $P = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+2} > 1$

Mặt khác $P - \frac{7}{2} = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} - \frac{7}{2} = \frac{-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4$.

Suy ra $1 < P < \frac{7}{2}$.

Mà $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{2; 3\}$.

+ Với $P = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

+ Với $P = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{16}; 9 \right\}$ thì $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Cách khác chỉ ra $1 < P < \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow P(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}+7 \Leftrightarrow \sqrt{x}(P-1) = 7-2P \quad (*)$$

+ Xét $P = 1$ thay vào (*) suy ra $\sqrt{x} \cdot 0 = 5 \Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm

+ Xét $P \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{7-2P}{P-1}$, để phương trình (*) có nghiệm thì $x > 0, x \neq 4$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{7-2P}{P-1} > 0 \\ \frac{7-2P}{P-1} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < P < \frac{7}{2} \\ P \neq \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Câu 155. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lâmônôxốp 2017-2018)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{3-\sqrt{x}} \right) : \left(\sqrt{x}-3 + \frac{12-x}{\sqrt{x}+3} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A và rút gọn A

b) Tìm x để $A < 2$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{2-\sqrt{x}}{A}$

Hướng dẫn

a) Biểu thức có nghĩa khi $\begin{cases} x-9 \neq 0 \\ x \geq 0 \\ 3-\sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right] : \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)+12-x}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-3)-3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{x-9+12-x}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6-3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{-15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{3} = \frac{-5}{\sqrt{x}-3}, \text{ với } \begin{cases} x \neq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$A < 2 \Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}-3} < 2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} > 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-1 > 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 9$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-1 < 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x < 9 \end{cases}, \text{ kết hợp điều kiện suy ra } 0 \leq x < \frac{1}{4}.$$

Vậy $x > 9$ hoặc $0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $A < 2$.

c) Ta có:

$$B = \frac{2-\sqrt{x}}{A} = (2-\sqrt{x}) : \frac{-5}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-5\sqrt{x}+6}{5} = \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{5}$$

$$\text{Vì } \left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{5} \geq -\frac{1}{20}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } \min B = -\frac{1}{20} \text{ khi } x = \frac{25}{4}.$$

Câu 156. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lương Thế Vinh 2017 – 2018)

Cho biểu thức $A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2}{3} + 1 \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

2) Rút gọn B

3) Gọi $M = A.B$. So sánh M và \sqrt{M}

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}} = \sqrt{(4+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} \\ &= |4+\sqrt{3}| + |4-\sqrt{3}| = 4+\sqrt{3} + 4-\sqrt{3} = 8 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}. \end{aligned}$$

Thay $x = 8$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2-5\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1} = -6+2\sqrt{2}. \text{ Vậy } x=8 \text{ thì } A = -6+2\sqrt{2}$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-2+3}{3} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 9. \end{aligned}$$

3) Ta có:

$$M = A.B = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$$

Biểu thức \sqrt{M} xác định khi $\begin{cases} 2-5\sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0, x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{25}.$

$$\text{Xét } M^2 - M = M(M-1) = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \left(\frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 1 \right) = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{-1-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vì } \frac{-1-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} < 0 \text{ và } \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \geq 0 \text{ với mọi } 0 \leq x \leq \frac{4}{25}$$

$$\text{Nên } M^2 - M \leq 0 \Leftrightarrow M^2 \leq M \Leftrightarrow M \leq \sqrt{M}.$$

Câu 157. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lương Thế Vinh 2017 – 2018)

Cho các biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \frac{x-4\sqrt{x}-9}{9-x}$; $Q = \frac{\sqrt{x}+5}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm x sao cho $P = 3$

3) Đặt $M = P : Q$. Tìm giá trị của x để $|M| < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{x-4\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3) - x + 4\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} - 6 + x - 2\sqrt{x} - 3 - x + 4\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}. \text{ Vậy } P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9 \end{aligned}$$

2) Ta có:

$$P = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{x}-9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \frac{81}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x = \frac{81}{4}$ thì $P = 3$.

3) Ta có:

$$M = P : Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+5}{3-\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$$

$$\text{Vì } x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow M = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \leq 0 \Rightarrow |M| = -M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \text{ (vì } \sqrt{x}+5 > 0 \text{ với mọi } x \geq 0, x \neq 9)$$

Suy ra $x < 25$. Kết hợp điều kiện suy ra $\begin{cases} 0 \leq x < 25 \\ x \neq 9 \end{cases}$. Vậy:

$$\text{Khi đó } |M| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{2(\sqrt{x}+5)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0$$

Câu 158. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lương Thế Vinh 2017 – 2018)

Cho các biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của B khi $x = 4\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)$

b) Rút gọn biểu thức A .

c) Tìm các số nguyên x để $\sqrt{AB} < \frac{2}{3}$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$x = 4\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}\right) = 4\left(\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}\right)$$

$$= 4\left(|\sqrt{5}+2| - |\sqrt{5}-2|\right) = 4(\sqrt{5}+2 - \sqrt{5}+2) = 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Thay $x = 16$ vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}+1} = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}. \text{ Vậy } x=16 \text{ thì } B = \frac{2}{5}.$$

b) Ta có:

$$A = \frac{3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$, với $x > 0; x \neq 4$.

c) Ta có:

$$A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

Biểu thức \sqrt{AB} xác định khi $\begin{cases} \sqrt{x}-1 \geq 0 \\ x > 0; x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Ta có: $\sqrt{AB} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow AB < \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{4}{9} < 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}-13}{9\sqrt{x}+9} < 0$

Vì $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$ nên $9\sqrt{x}+9 > 0 \Rightarrow \frac{5\sqrt{x}-13}{9\sqrt{x}+9} < 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}-13 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{169}{25}$

Vậy $\begin{cases} 1 \leq x < \frac{169}{25} \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Câu 159. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Tất Thành – Hưng Yên 2014 – 2015)

a) Không dùng máy tính, hãy rút gọn biểu thức sau: $A = (\sqrt{22} + 7\sqrt{2})\sqrt{30 - 7\sqrt{11}}$

b) Rút gọn biểu thức sau: $B = \left(\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+6}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2}(\sqrt{11} + 7)\sqrt{30 - 7\sqrt{11}} = (\sqrt{11} + 7)\sqrt{60 - 14\sqrt{11}} \\ &= (\sqrt{11} + 7)\sqrt{(7 - \sqrt{11})^2} = (\sqrt{11} + 7)(7 - \sqrt{11}) = 49 - 11 = 38 \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4$.

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] : \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) - (x-1)(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{4}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x - x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{4}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{4x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{4} = \frac{x-2}{\sqrt{x}+2}. \text{ Vậy } B = \frac{x-2}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4 \end{aligned}$$

Câu 160. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

Cho $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{5\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left(\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$

1) Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn P

2) Tìm m để có x thỏa mãn điều kiện xác định của P sao $P = m\sqrt{x} - 2mx + 1$

Hướng dẫn

1) Biểu thức xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Ta có:

$$P = \left[\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-5\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{-4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{-4} = \sqrt{x}-1$$

2) Ta có:

$$P = mx\sqrt{x} - 2mx + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = mx\sqrt{x} - 2mx + 1$$

$$\Leftrightarrow mx\sqrt{x} - 2mx - \sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(mx - 1) = 0$$

Vì $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ nên $(\sqrt{x} - 2)(mx - 1) = 0 \Leftrightarrow mx - 1 = 0 \Leftrightarrow mx = 1$

Xét $m = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m}$. Để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} > 0 \\ \frac{1}{m} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$ thì $P = mx\sqrt{x} - 2mx + 1$ có nghiệm.

Câu 161. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

Cho $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4}$ và $B = 2 - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}; x \geq 0, x \neq 4$

1. Tính B với $x = 81$

2. Đặt $P = A : B$. Rút gọn P.

3. Tìm GTNN của \sqrt{P}

Hướng dẫn

1. Ta có:

$$B = 2 - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}+4-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Với $x = 81$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{1}{\sqrt{81}+2} = \frac{1}{11}. \text{ Vậy } x = 81 \text{ thì } B = \frac{1}{11}.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x - 6\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}. \end{aligned}$$

Suy ra $P = A \cdot B = \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$.

Biểu thức \sqrt{P} xác định khi $\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x-2}} \geq 0 \\ x \geq 0, x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$

Với $x > 4 \Rightarrow P = \frac{2x}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x} + 4 + \frac{8}{\sqrt{x-2}} = 2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x-2}} + 8$

Áp dụng BĐT Cossi ta có: $2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x-2}} \geq 2\sqrt{2(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{8}{\sqrt{x-2}}} = 8$

$\Rightarrow 2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x-2}} + 8 \geq 16 \Rightarrow P \geq 16$

Dấu bằng xảy ra khi $2(\sqrt{x}-2) = \frac{8}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 2 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\min \sqrt{P} = 4$ khi $x = 16$

Câu 162. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

Cho biểu thức $P = \frac{1+x}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}; 0 \neq x \leq 1$

- 1) Chứng tỏ rằng $P = \frac{2}{x} - 2\sqrt{1-x}$ 2) Tìm x để $P = 2$.

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$P = \frac{1+x}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{(1+x)(1-\sqrt{1-x}) + (1-x)(1+\sqrt{1-x})}{(1+\sqrt{1-x})(1-\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-x} + x - x\sqrt{1-x} + 1 + \sqrt{1-x} - x - x\sqrt{1-x}}{1-(1-x)} = \frac{2-2x\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{x} - 2\sqrt{1-x} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

2) Ta có:

$P = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2\sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2(1-x) - 2x\sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} - x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = 0 \\ x = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Câu 163. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+2}{1-x^3}$

2) Tính giá trị của biểu thức $A = a^3 + 3a + 2003$ với $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$P = \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+2}{1-x^3} = \frac{2}{2(1-x)} - \frac{x^2+2}{1-x^3}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^2+2}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-x^2-2}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

2) Ta có:

$$a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \Rightarrow a^3 = \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 7+5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right) + 7-5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 14 + 3\sqrt[3]{49-50} \cdot a \Leftrightarrow a^3 + 3a = 14$$

Suy ra $A = a^3 + 3a + 2003 = 14 + 2003 = 2017$

Câu 164. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1, x \neq 4$ cho hai biểu thức $A = \frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+3}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 144$.
2. Rút gọn biểu thức $P = A.B$
3. Chứng minh rằng: $P < \frac{1}{3}$

Hướng dẫn

1. Thay $x = 144$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{144-\sqrt{144}}{2-\sqrt{144}} = \frac{144-12}{2-12} = \frac{132}{-10} = -\frac{66}{5}$$

2. Ta có:

$$B = \frac{x+3}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+3}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+3-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Suy ra } P = A.B = \frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$3. \text{ Xét } P = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} < 0 \text{ Với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1, x \neq 4 \text{ nên } P < \frac{1}{3}$$

Câu 165. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Nguyễn Tất Thành – Hà Nội 2017 – 2018)

$$\text{Cho biểu thức } P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}; 0 \leq x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P < -\frac{1}{3}$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1} &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x+2-x-\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{1-\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1}. \text{ Vậy } P = \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} \text{ với } 0 \leq x \neq 1. \end{aligned}$$

$$b) P < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-6+x+\sqrt{x}+1}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4\sqrt{x}-5}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+5)}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+5 > 0 \\ 3(x+\sqrt{x}+1) > 0 \end{cases} \text{ nên } \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1. \text{ Kết hợp điều kiện suy ra } 0 \leq x < 1$$

Câu 166. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Giảng Võ– Hà Nội 2017 – 2018)

$$\text{Cho hai biểu thức } A = \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+3}{x-1} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x^2 = 16$.

2) Thu gọn biểu thức $M = A : B$

3) Tìm giá trị của k sao cho phương trình $M = \frac{1}{k}$ có nghiệm.

Hướng dẫn

1) Ta có: $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Kết hợp điều kiện suy ra $x = 4$.

Với $x = 4$ ta có: $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4} + 2}{4 - \sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$. Vậy:

2) Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+3}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + x+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

Suy ra $M = A : B = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{2(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$.

3) Ta có: $M = \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k(\sqrt{x} + 1) = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - k) = k$.

Với $k = 2$ suy ra $\sqrt{x} \cdot 0 = 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $k \neq 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{k}{2-k}$. Để phương trình có nghiệm thỏa mãn $x > 0; x \neq 1$ thì:

$$\begin{cases} \frac{k}{2-k} > 0 \\ \frac{k}{2-k} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < 2 \\ k \neq 1 \end{cases} \text{ . Vậy:}$$

Câu 167. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Hà Huy Tập– Hà Nội 2018 – 2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn

1) Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) . Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{16+3}{\sqrt{16}+3} = \frac{19}{7} \text{ . Vậy với } x = 16 \text{ thì } A = \frac{19}{7} \text{ .}$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \left[\frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{x+3\sqrt{x}-2 - (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}. \text{ Vậy } B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9.
 \end{aligned}$$

3) Ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = (\sqrt{x}+1) + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng BĐT Cosi ta có:

$$(\sqrt{x}+1) + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} = 4 \Rightarrow P \geq 2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (\sqrt{x}+1) = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 (tm)$$

$$\text{Vậy } \min P = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 168. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Lê Thánh Tông– Hà Nội 2018 – 2019)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ (với $x > 0; x \neq 1$)

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] : \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] = \frac{1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

2) Với $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Suy ra } A = \frac{3-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{|\sqrt{2}-1|} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } x = 3 - 2\sqrt{2} \text{ thì } A = 2\sqrt{2}$$

Câu 169. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Phúc Xá – Hà Nội 2018 – 2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$ Với $x > 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

2) Rút gọn biểu thức $P = A : B$.

3) Tìm x sao cho $(1 - \sqrt{x}) \cdot P = 10$.

Hướng dẫn

1) Ta có: $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

Thay vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{|\sqrt{3} - 1| - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 2} = -2$$

Vậy $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ thì $B = -2$.

2) Ta có:

$$A = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

Suy ra $P = A : B = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} : \frac{x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2 - \sqrt{x}}{x}$. Vậy $P = \frac{2 - \sqrt{x}}{x}$ với $x > 0; x \neq 1$.

3) Ta có:

$$(1 - \sqrt{x}) \cdot P = 10 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x}) \cdot \frac{2 - \sqrt{x}}{x} = 10 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x})(2 - \sqrt{x}) = 10x$$

$$\Leftrightarrow 10x = 2 - 3\sqrt{x} + x \Leftrightarrow 9x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 9x + 6\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}(3\sqrt{x} + 2) - (3\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow (3\sqrt{x} + 2)(3\sqrt{x} - 1) = 0$$

Vì $x > 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn). Vậy:

Câu 170. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Phương Liệt – Hà Nội 2015 – 2016) (2 điểm)

Cho $A = \frac{3\sqrt{x} + 9}{x - 9}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 9}{x - 9}$ ($x \geq 0, x \neq 9$)

1) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

2) Chứng tỏ rằng biểu thức B luôn dương với mọi giá trị x thỏa mãn ĐKXD

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{B}{A}$

Hướng dẫn

1) Với $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{3\sqrt{4}+9}{4-9} = \frac{15}{-5} = -3. \text{ Vậy } x = 4 \text{ thì } A = -3.$$

2) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x+3}) - 3x - 9}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2x + 6\sqrt{x} - 3x - 9}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3}{\sqrt{x+3}}.$$

Vì $x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow B = \frac{3}{\sqrt{x+3}} > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9$.

Vậy B luôn dương với mọi $x \geq 0, x \neq 9$.

c) $\frac{B}{A} = \frac{3}{\sqrt{x+3}} : \frac{3\sqrt{x}+9}{x-9} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 1 - \frac{6}{\sqrt{x+3}}$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 9$

Nên $\sqrt{x+3} \geq 3 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+3}} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{6}{\sqrt{x+3}} \geq -1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$. Vậy $\min\left(\frac{B}{A}\right) = -1 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 171. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Sài Đồng 2018 – 2019) (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ ($x > 0$; $x \neq 4$)

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

2) Rút gọn B.

3) So sánh $P = \frac{B}{A}$ với -2 .

Hướng dẫn

1) $A = \frac{4}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

c) Xét hiệu $\frac{B}{A} + 2 = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > 0$ với mọi $x > 0$; $x \neq 4$ nên $\frac{B}{A} > -2$.

Câu 172. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – Vinschool 2017 – 2018) (2 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x-5}}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ ($x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$)

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 49$
 b) Rút gọn biểu thức B.
 c) Tìm các giá trị nguyên của x để $A - B$ có giá trị là số tự nhiên.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 49$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2\sqrt{49+1}}{\sqrt{49+3}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy: } \dots$$

$$b) B = \left[\frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x-5}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \right] : \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x-3}) - \sqrt{x+5}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

c) Ta có:

$$A - B = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = 2 - \frac{6}{\sqrt{x+3}}$$

$$\text{Để } A - B \text{ là số tự nhiên thì } \begin{cases} A - B \geq 0 \\ (A - B) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suy ra $6 : (\sqrt{x+3})$. Từ đó giải được $x = 0$

Câu 175. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Văn Khê 2015 – 2016) (2 điểm):

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-2}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+2}} + \frac{2+5\sqrt{a}}{4-a}$ với $a \geq 0, a \neq 4$

- a) Rút gọn P. b) Tính giá trị của P với $a = 3 - 2\sqrt{2}$.
 c) Tìm a để $P > \frac{1}{3}$. d) Tìm a để $P = 2$.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-2}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+2}} - \frac{2+5\sqrt{a}}{(\sqrt{a-2})(\sqrt{a+2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1})(\sqrt{a+2}) + 2\sqrt{a}(\sqrt{a-2}) - 2 - 5\sqrt{a}}{(\sqrt{a-2})(\sqrt{a+2})}$$

$$= \frac{3a - 6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}.$$

b) Ta có: $a = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

Suy ra $\sqrt{a} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$. Thay vào biểu thức P ta được:

$$P = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1+2} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 3(3-2\sqrt{2}) = 9-6\sqrt{2}.$$

c) Ta có:

$$P > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2}{3(\sqrt{a}+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{a} - 2}{3(\sqrt{a}+2)} > 0$$

$$\text{Vì } a \geq 0 \Rightarrow 3(\sqrt{a}+2) > 0 \Rightarrow 8\sqrt{a} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow a > \frac{1}{16}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a > \frac{1}{16} \\ a \neq 4 \end{cases}$$

d) Ta có: $P = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{a} = 2\sqrt{a} + 4 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 4 \Leftrightarrow a = 16(tm)$. Vậy: ...

Câu 176. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – TTBDVH Dạy Tốt 2016 – 2017)

Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}+x}{9-x}$ và $B = \frac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(1-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

c) Tìm các giá trị của x để $\frac{A}{B} > 1$.

Hướng dẫn

a) Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{3\sqrt{16}+16}{9-16} = \frac{28}{-7} = -4. \text{ Vậy:}$$

b) Ta có: $B = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(1-\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}-3}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

$$= \frac{\sqrt{x}-3}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-3}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

c) Ta có:

$$\frac{A}{B} > 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+x}{9-x} : \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}+1} > 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}+1} < 0 \Rightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy: } \dots$$

Câu 177. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – TTBDVH Edufly 2016 – 2017)

1) Rút gọn biểu thức sau $A = \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Với $x > 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 \cdot P$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} 1) A &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{3}+3} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}+1 + |2-\sqrt{3}| = \sqrt{3}+1+2-\sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right) = \left[\frac{2\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

3) Ta có: $A = x^2 \cdot P = x^2 \cdot \frac{1}{x-1} = x+1 - \frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 2.$

Vì $x > 1$ nên áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ ta được:

$$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2 \Rightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ (vì $x > 1$).

Vậy:

Câu 178. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Thanh Oai 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức: $P = \frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a+1}}$ và $Q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}} + \frac{1}{\sqrt{a+2}} - \frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}-2}$ với $a \geq 0; a \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 16$.
- Rút gọn biểu thức Q.
- Tìm a để biểu thức $S = P \cdot Q$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

- Thay $a = 16$ (thỏa mãn điều kiện) các em tính được $P = \frac{7}{5}$.
- Rút gọn $Q = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+2}}$.
- Tính $S = \frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a+2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{a+2}}$. Lập luận chỉ ra $\max S = \frac{3}{2}$ khi $a = 0$.

Câu 179. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 tổng hợp – TP Hà Nội 2017 – 2018)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

- Tính giá trị của Q khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $A = P \cdot Q$
- Tìm các giá trị của x để $A\sqrt{x} < 8$

Hướng dẫn

- Đáp số: $x = 25$ thì $Q = \frac{2}{3}$.
- Rút gọn $P = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}}$, từ đó tính được $A = \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$.
- $A\sqrt{x} < 8 \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} < 8 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 < 2 \\ \sqrt{x}-1 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 9$.

Vậy $\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Câu 180. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 tổng hợp – TP Hà Nội 2011 – 2018)

Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị của A khi $x = 9$.

3) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn

1) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} \end{aligned}$$

2) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{9}-5}{\sqrt{9}+5} = \frac{3-5}{3+5} = -\frac{1}{4}. \text{ Vậy: } \dots$$

3) Ta có:

$$\begin{aligned} A < \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} - \frac{1}{3} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-15-\sqrt{x}-5}{3(\sqrt{x}+5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-20}{3(\sqrt{x}+5)} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+5 > 0 \text{ nên } \frac{2\sqrt{x}-20}{3(\sqrt{x}+5)} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-20 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 10 \Leftrightarrow x < 100$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 0 \leq x < 100 \\ x \neq 25 \end{cases}.$$

Câu 181. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-AMSTERDAM-2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x+3\sqrt{x}+10}{x-4}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Tính giá trị của A khi $x=16$

2. Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

3. Tìm tất cả giá trị của x để $A.B \geq -2$

Hướng dẫn

1) Với $x=16$ (thỏa mãn điều kiện). Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{4}{\sqrt{16}+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } x=16 \text{ thì } A = \frac{2}{3}.$$

2) Ta có:

$$B = \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2x+3\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2x+3\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}-6-(x+2\sqrt{x})+2x+3\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

3) Ta có:

$$A.B \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-2} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(TM) \\ x > 4(TM) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=0 \\ x > 4 \end{cases}$$

Câu 182. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Ba Đình-2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$; $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ và $x \neq 25$.

a) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 0.

- b) Rút gọn biểu thức B .
 c) Đặt $P = B : A$. So sánh P với 1.

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ và $x \neq 25$

Để $A = 0 \Leftrightarrow x + 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 (t/m)$ do $\sqrt{x} + 5 > 0$

b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ và $x \neq 25$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \text{ Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

c) Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ và $x \neq 25$. Ta có:

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Xét hiệu: } P - 1 = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - 1 = \frac{\sqrt{x}-5-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{-8}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Ta có: } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow \frac{-8}{\sqrt{x}+3} < 0 \Rightarrow P - 1 < 0 \Rightarrow P < 1.$$

Vậy $P < 1$.

Câu 183. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Ba Vì – 2019-2020)

Với $x > 0$ cho hai biểu thức: $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 64$ thỏa mãn ĐKXĐ vào biểu thức A ta được: $A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{4}$. Vậy:

b) Với $x > 0$ ta có: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

c) Tính được $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

Với $x > 0$ ta có: $\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện, kết luận: $0 < x < 4$

Câu 184. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Bắc Từ Liêm-2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- 2) Rút gọn biểu thức $M = A : B$.
- 3) Tìm các giá trị của x để $3\sqrt{x} + 5 = 2M$.

Hướng dẫn

1) Thay $x = 4$ (tmđk) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{6}{\sqrt{4}(\sqrt{4}-3)} = \frac{6}{2 \cdot (-1)} = -3$

Vậy khi $x = 4$ thì $A = -3$

2) Rút gọn biểu thức $M = A : B$.

Ta có:
$$M = A : B = \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right) = \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} : \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{6} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ với $(x > 0, x \neq 9)$

3) Tìm các giá trị của x để $3\sqrt{x} + 5 = 2M$.

$$3\sqrt{x} + 5 = 2M \Leftrightarrow 3\sqrt{x} + 5 = 2 \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1(TM) \\ \sqrt{x}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=-2(L) \end{cases}$$

Vậy khi $x = 1$ thì $3\sqrt{x} + 5 = 2M$

Câu 185. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Cầu Giấy-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Chứng minh $A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$

b) Tìm x biết $A = \frac{-2}{3}$.

c) Cho x là số nguyên, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Hướng dẫn

a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} - \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \right] : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{x-2\sqrt{x}}{x} = \frac{-4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}} = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$$

Vậy $A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$ (đpcm).

b) Tìm x biết $A = \frac{-2}{3}$.

Đề $A = \frac{-2}{3} \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 (t/m)$.

Vậy $x = 16$ thì $A = \frac{-2}{3}$.

c) Ta có: $A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$.

Ta có: x nguyên và $x > 0, x \neq 4$ hay $x \geq 1, x \neq 4, x \in \mathbb{Z}$

Với $x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{-4}{3} \Leftrightarrow P \geq \frac{-4}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{-4}{3}$ khi $x = 1$

Câu 186. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Đông Anh-2019-2020)

Cho $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$

b) Rút gọn biểu thức $P = B : A$

c) Tìm giá trị của x để $P > 0$

Hướng dẫn

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$

Ta có $x = 36$ (tmđk) nên $A = \frac{\sqrt{36} + 4}{\sqrt{36} + 2} = \frac{6 + 4}{6 + 2} = \frac{5}{4}$

b) Rút gọn biểu thức $P = B : A$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{-\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\Rightarrow P = B : A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{-\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+4)} = \frac{-1}{(\sqrt{x}-2)}$$

c) Tìm giá trị của x để $P > 0$

Với $x \geq 0; x \neq 4$ để $P > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}-2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp ĐKXĐ ta có: $0 \leq x < 4$ thì $P > 0$

Câu 187. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Đống Đa-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$

a) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Hướng dẫn

a) Khi $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) Thay vào A ta được: $A = \frac{9-2\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}} = \frac{9-2.3+2}{3} = \frac{5}{3}$

Vậy khi $x = 9$ thì $A = \frac{5}{3}$.

b) Với $x > 0$ ta có:

$$B = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{2x+\sqrt{x}-4-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

Với $x > 0$ thì $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

c) Với $x > 0$ ta có :

$$P = \frac{A}{B} = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2+1}{\sqrt{x}-2}$$

Vì $\begin{cases} x > 0 \\ (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 \forall x > 0 \end{cases}$ nên $P < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < x < 4$ Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$

Câu 188. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Gia Lâm-2019-2020)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 16$

b) Rút gọn biểu thức sau: $B = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $M = A.B < 0$.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} (x \geq 0)$

Thay $x = 16$ (Thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức A, ta có: $A = \frac{\sqrt{16}-3}{\sqrt{16}+1} = \frac{1}{5}$

Vậy $A = \frac{1}{5}$ khi $x = 16$.

b) $B = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

$$= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $M = A.B < 0$.

$$M = A.B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

* Có $\sqrt{x} > 0$ nên $M < 0$ thì $\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 9$

Kết hợp ĐKXD ta có $0 < x < 9; x \neq 1$.

Vậy $0 < x < 9; x \neq 1$ thì $M = A.B < 0$.

Câu 189. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Hà Đông-2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} - \frac{x-6\sqrt{x}}{x-7\sqrt{x}+12}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 16$

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn B.
- 3) Đặt $P = 2(\sqrt{x}-2)B : A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Hướng dẫn

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.

$$x = 25 \Rightarrow \sqrt{x} = 5(tm). \text{ Thay } \sqrt{x} = 5(tm) \text{ vào } A, \text{ ta có: } A = \frac{5+1}{5-4} = \frac{6}{1} = 6$$

Vậy $A = 6$ khi $x = 25$

- 2) Rút gọn B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} - \frac{x-6\sqrt{x}}{x-7\sqrt{x}+12} = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} - \frac{x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{2x-5\sqrt{x}-12-x+9-x+6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} = \frac{1}{\sqrt{x}-4} \end{aligned}$$

- 3) Đặt $P = 2(\sqrt{x}-2)B : A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

$$P = 2(\sqrt{x}-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{6}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0, \forall x \in dkxd \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x}+1} \geq -6 \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{\sqrt{x}+1} \geq -4$$

Min $P = -4$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0(tm)$

Câu 190. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Hoàng Mai-2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $M = \frac{A}{B}$. Tìm x để biểu thức M thỏa mãn $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

Với $x = 16$. (TMĐK), thay $x = 16$. vào biểu thức A , ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{16}+1)^2}{2-\sqrt{16}} = \frac{(4+1)^2}{2-4} = \frac{25}{-2} = -\frac{25}{2}$$

Vậy $x = 16$. thì $A = -\frac{25}{2}$

b) $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} - 2 - x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{2-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

c) Có $M = \frac{A}{B} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2-\sqrt{x}} : \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2-\sqrt{x}} \cdot (2-\sqrt{x}) = (\sqrt{x}+1)^2$$

+) $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0$ với $x \geq 0; x \neq 4$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0 \Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 \leq 0$$

Vì $(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$ với x thỏa mãn điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

Nên $(\sqrt{x} - 3)^2 \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (TMĐK)

Vậy $x = 9$ thì $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0$.

Câu 191. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Hai Bà Trưng-2019-2020)

Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$; $B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
 b) Rút gọn B.
 c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 36$ (tmdk) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36} + 2} = \frac{3}{4}$

Vậy $A = \frac{3}{4}$ khi $x = 36$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có :

$$B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

c) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có :

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x}{x-4} = 1 + \frac{4}{x-4}$$

$\forall x \in \mathbb{D}_{KXĐ}; x \in \mathbb{Z}; P$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{4}{x-4}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow x-4 \text{ là } U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=1 & x=5 \\ x-4=-1 & x=3 \\ x-4=2 & x=6 \\ x-4=-2 & x=2 \\ x-4=4 & x=8 \\ x-4=-4 & x=0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện suy ra $x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 8\}$ thì P nhận giá trị nguyên

Câu 192. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Nam Từ Liêm-2019-2020)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ ($x > 0; x \neq 9$)

a) Tính A khi $x = 25$.

b) Chứng minh: $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = A.B$

a) Với $x = 25$ (tmđk) thì $A = \frac{25+7}{3\sqrt{25}} = \frac{32}{15}$

b) Ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + (\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) - 7\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có:

$$P = A.B = \frac{x+7}{\sqrt{x+3}} = \frac{x-9+16}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} - 6$$

Do $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} > 0$; $\frac{16}{\sqrt{x+3}} > 0$ nên áp dụng BĐT Cosi cho $\sqrt{x+3}$ và $\frac{16}{\sqrt{x+3}}$ ta được:

$$\sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+3}) \cdot \frac{16}{\sqrt{x+3}}} = 8$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{x+3} + \frac{16}{\sqrt{x+3}} - 6 \geq 8 - 6 = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x+3} = \frac{16}{\sqrt{x+3}} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 193. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (HK1-Long Biên-2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-4}}{x-1} \right)$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$

c) Tìm số nguyên x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$. Ta có:

$$P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-4}}{x-1} \right)$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} - x - 2}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}) + \sqrt{x-4}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

b) Ta có: $x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$

Thay vào P ta được: $P = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$

c) Ta có: $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$.

Để P nguyên thì $\sqrt{x}+2 \in U(3)$. Mà $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x}+2=3 \Leftrightarrow x=1$ (loại)

Vậy không có giá trị x nguyên thỏa mãn điều kiện xác định để biểu thức P có giá trị nguyên.

Câu 194. (Thầy Nguyễn Chí Thành)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{3x+3}{9-x} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$

- a) Rút gọn A . b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 13 - 4\sqrt{3}$
 c) Tìm x để $A = -\frac{1}{3}$ d) Tìm x để $A \leq \frac{-1}{2}$.
 e) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$. f) Tìm GTNN của $S = A \cdot (\sqrt{x} - x)$

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 9$.

Ta có:

$$A = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right] : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $A = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$, với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

b) Ta có:

$x = 13 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3}-1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

Suy ra $\sqrt{x} = \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} = |2\sqrt{3}-1| = 2\sqrt{3}-1$.

Thay vào biểu thức A ta được: $A = \frac{-3}{2\sqrt{3}-1+3} = \frac{-3}{2\sqrt{3}+2} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $x = 13 - 4\sqrt{3}$ thì $A = \frac{3-3\sqrt{3}}{4}$.

c) Ta có :

$$A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $A = -\frac{1}{3}$ khi $x = 36$.

d) Ta có:

$$A \leq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} \leq 0.$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0$ nên $\frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} \leq 0$ khi $\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 9$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $0 \leq x < 9$

e) Ta có: $A = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$. Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $3:(\sqrt{x}+3)$, suy ra $(\sqrt{x}+3) \in U(3)$.

Mà $\sqrt{x}+3 \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $(\sqrt{x}+3) = 3 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

f) Ta có: $S = A \cdot (\sqrt{x} - x) = \frac{-3(\sqrt{x} - x)}{\sqrt{x} + 3} = \frac{3x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = 3\sqrt{x} - 12 + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} = 3(\sqrt{x} + 3) + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} - 21$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $3(\sqrt{x} + 3)$ và $\frac{36}{\sqrt{x} + 3}$ ta có:

$$3(\sqrt{x} + 3) + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} \geq 2\sqrt{3(\sqrt{x} + 3) \cdot \frac{36}{\sqrt{x} + 3}} = 12\sqrt{3}$$

Suy ra $3(\sqrt{x} + 3) + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} - 21 \geq 12\sqrt{3} - 21$

Dấu bằng xảy ra khi $3(\sqrt{x} + 3) = \frac{36}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{12} - 3 \Leftrightarrow x = (\sqrt{12} - 3)^2 =$

Câu 195. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Cho biểu thức $B = \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{2x - 5\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 + \frac{3 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right)$.

a) Rút gọn B .

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $x^2 - x = 0$

c) Tìm x để $|B| = -B$.

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để B nguyên dương.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq \frac{9}{4}$.

Các em rút gọn được $B = \frac{1}{3-2\sqrt{x}}$.

b) Ta có: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=1(L) \end{cases}$.

Với $x=0$ thay vào biểu thức $B = \frac{1}{3-2\sqrt{0}} = \frac{1}{3}$. Vậy:

c) Ta có: $|B| = -B \Leftrightarrow B \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3-2\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$.

Kết hợp điều kiện suy ra $x > \frac{9}{4}$.

d) Để B nhận giá trị nguyên thì $1:(3-2\sqrt{x}) \Rightarrow (3-2\sqrt{x}) \in U(1) = \{\pm 1\}$.

Ta có bảng:

| | | |
|---------------|-----------|--------|
| $3-2\sqrt{x}$ | -1 | 1 |
| \sqrt{x} | 2 | 1 |
| x | 4 | 1 |
| B | -1 (loại) | (loại) |

Vậy không tồn tại x thỏa mãn yêu cầu.

Câu 196. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Nghĩa Tân 2020 – 2021)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$.

3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

Hướng dẫn

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

Ta có: $x = 25$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = 25$ vào biểu thức A ta có: $A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$

Vậy khi $x = 25$ thì $A = \frac{3}{7}$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$.

$$B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \text{ (dpcm)}$$

3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

$$P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$|P| > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp điều kiện suy ra $0 \leq x < 1$

Câu 197. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (Đề thi thử 10 – THCS Cầu Giấy 2020 – 2021)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}} + \frac{3+5\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị A khi $x = 16$.

b) Chứng minh rằng: $B = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$

c) Cho biểu thức $M = B.A$. Tìm giá trị của m để có x thỏa mãn $M = m$.

Hướng dẫn

a) Với $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Thay } x = 16 \text{ vào } A \text{ ta được: } A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}+3} = \frac{4-1}{4+3} = \frac{3}{7}$$

Vậy với $x = 16$ thì giá trị của biểu thức $A = \frac{3}{7}$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}} + \frac{3+5\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(3\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x - \sqrt{x} + 3x + 9\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 9 + 3 + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{4x + 16\sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{4(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy điều phải chứng minh $B = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$.

$$c) M = B.A = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Đề } M = m \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} = m$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4 = m(\sqrt{x}+3)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4 = m\sqrt{x}+3m \Leftrightarrow 4\sqrt{x}-m\sqrt{x} = 3m-4 \Leftrightarrow \sqrt{x}(4-m) = 3m-4 \quad (*)$$

Xét $m = 4 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 8 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

$$\text{Với } m \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3m-4}{4-m}$$

$$\text{Để có giá trị của } x \text{ thì } \begin{cases} \frac{3m-4}{4-m} \geq 0 \\ \frac{3m-4}{4-m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq m < 4 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy với $\frac{4}{3} \leq m < 4$ và $m \neq 2$ để có x thỏa mãn $M = m$.

Câu 198. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL-Trung Vương-Hoàn Kiếm-2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{9-3\sqrt{x}}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Tính giá trị của A khi $x = 16$.
2. Rút gọn biểu thức B .
3. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để biểu thức $P = A : B$ nhận giá trị là một số nguyên âm.

Hướng dẫn

1. với $x \geq 0, x \neq 4$. Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) thỏa mãn điều kiện vào A ta được :

$$A = \frac{9 - 3\sqrt{16}}{16 - 4} = \frac{9 - 3 \cdot 4}{16 - 4} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

2. Ta xét biểu thức B với $x \geq 0; x \neq 4$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+4}}{x-\sqrt{x-2}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})} + \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})} - \frac{\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})} = \frac{-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})} = \frac{-3(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2})}$$

$$B = \frac{-3}{\sqrt{x-2}}$$

$$3. P = A : B = \frac{9-3\sqrt{x}}{x-4} : \frac{-3}{\sqrt{x-2}} = \frac{3 \cdot 3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{-3}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+2}} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Để } P \text{ nguyên thì } \frac{5}{\sqrt{x+2}} \text{ nguyên} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 5 \\ 2\sqrt{x+2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Thử lại : $x = 9 \Rightarrow P = 0$ (loại)

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow P = -1$ (thỏa mãn P nguyên âm)

Câu 199. (Thầy Nguyễn Chí Thành) Thi thử lần 4-Lương Thế Vinh- 2020-2021)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+15}}{x-9} - \frac{x}{x-3\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{8\sqrt{x}-3}{14}$ với $x > 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho $A = 2B$.

c) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) Rút gọn A .

$$A = \frac{\sqrt{x}+15}{x-9} - \frac{x}{x-3\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3} \quad (x > 0; x \neq 9)$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} + \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+15) - x(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x+15\sqrt{x} - x\sqrt{x} - 3x + (x-3\sqrt{x})(2\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x+15\sqrt{x} - x\sqrt{x} - 3x + 2x\sqrt{x} + 5x - 6x - 15\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x\sqrt{x} - 3x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{x(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$b) A = 2B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 2 \cdot \frac{8\sqrt{x}-3}{14} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{16\sqrt{x}-6}{14} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{16\sqrt{x}-6}{14} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{14\sqrt{x}}{14(\sqrt{x}+3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(16\sqrt{x}-6)}{14(\sqrt{x}+3)} = 0 \Rightarrow 14\sqrt{x} - (\sqrt{x}+3)(16\sqrt{x}-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{x} - (16x - 6\sqrt{x} + 48\sqrt{x} - 18) = 0 \Leftrightarrow 14\sqrt{x} - 16x + 6\sqrt{x} - 48\sqrt{x} + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -28\sqrt{x} - 16x + 18 = 0 \Leftrightarrow -16x - 28\sqrt{x} + 18 = 0 \Leftrightarrow 8x + 14\sqrt{x} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 18\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(4\sqrt{x}+9) - (4\sqrt{x}+9) = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)(4\sqrt{x}+9) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \quad (\text{Vì } 4\sqrt{x}+9 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$c) \text{ Ta có: } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vì } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Mà } 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in U(3) = (\pm 1; \pm 3)$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 3$$

Vậy không tồn tại giá trị x thỏa mãn đề bài.

Câu 200. (Thầy Nguyễn Chí Thành) (KSCL-Trung Vương-Lần 2-2019-2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = A.B$ khi $x \in \mathbb{N}, x < 101$

Hướng dẫn

1) Với $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

$$\text{Thay } x = 25 \text{ vào biểu thức } A \text{ ta có: } A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}+2} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{3}{7} \text{ khi } x = 25.$$

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}+2+3x+6\sqrt{x}-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{4x+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$M = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$M = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$M = 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2}$$

Có $x \in \mathbb{N}; 0 \leq x < 101$ nên $0 \leq x \leq 100 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \leq 12$

$$\Rightarrow \frac{8}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2} \leq 4 - \frac{2}{3} \Rightarrow M \leq \frac{10}{3}$$

Vậy M có giá trị lớn nhất là $\frac{10}{3}$ khi $x=100$