Chương I:

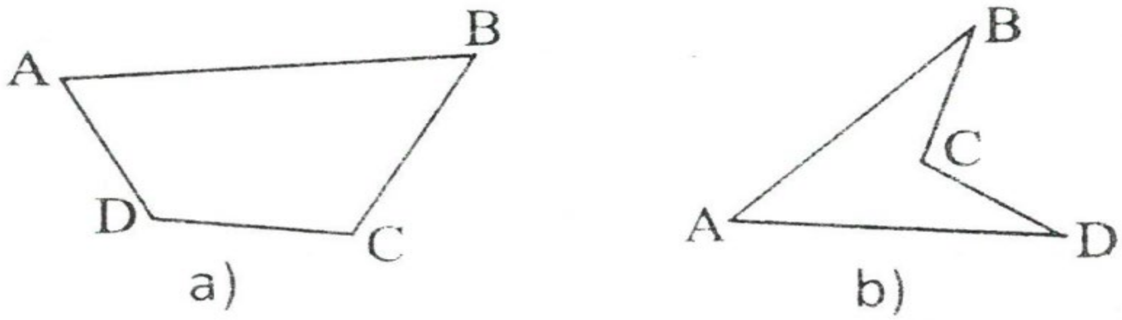
TỨ GIÁC

Chuyên đề 1.

TỨ GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng (h.1.1 a, b).



Hình 1.1

Ta phân biệt tứ giác lồi (h.1.1 a) và tứ giác lõm (h.1.1 b). Nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

2. Tổng các góc của tứ giác bằng $360°$.

$$\boxed{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°.}$$

B. Một số ví dụ

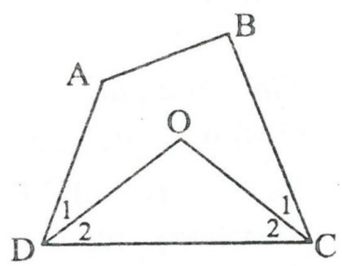
Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD, $\widehat{A}-\widehat{B}=40°$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{COD}=110°$. Chứng minh rằng $AB\perp BC$.

Giải (h.1.2)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $AB\perp BC$ ta chứng minh $\widehat{B}=90°$.

Đã biết hiệu $\widehat{A}-\widehat{B}$ nên cần tính tổng $\widehat{A}+\widehat{B}$.



Hình 1.2

*** Trình bày lời giải**

Xét ΔCOD có $\widehat{COD}=180°-\left(\widehat{C_2}+\widehat{D_2}\right)=180°-\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$

(vì $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$; $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$).

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{C}+\widehat{D}=360°-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)$, do đó

$\widehat{COD} = 180° - \dfrac{360° - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)}{2} = 180° - 180° + \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

Vậy $\widehat{COD} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD} = 110°$ nên $\widehat{A} + \widehat{B} = 220°$.

Mặt khác, $\widehat{A} - \widehat{B} = 40°$ nên $\widehat{B} = \left(220° - 40°\right) : 2 = 90°$. Do đó $AB \perp BC$.

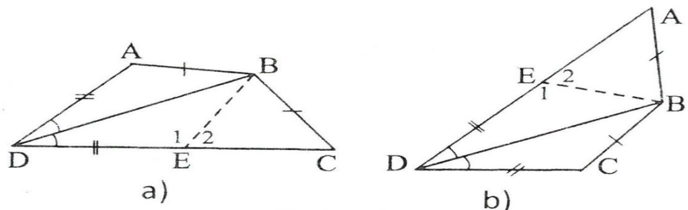
Ví dụ 2: Tứ giác ABCD có AB = BC và hai cạnh AD, DC không bằng nhau. Đường chéo DB là đường phân giác của góc D. Chứng minh rằng các góc đối của tứ giác này bù nhau.

Giải (h.1.3 a,b)

*** Tìm cách giải**

Để chứng minh hai góc A và C bù nhau ta tạo ra một góc thứ ba làm trung gian, góc này bằng góc A chẳng hạn. Khi đó chỉ còn phải chứng minh góc này bù với góc C.

*** Trình bày lời giải**



Hình 1.3

- *Xét trường hợp* AD < DC (h.1.3a)

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho DE = DA

$\Delta ADB = \Delta EDB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = EB$ và $\widehat{A} = \widehat{E_1}$.

Mặt khác, $AB = BC$ nên $BE = BC$. Vậy ΔBEC cân $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E_2}$.

Ta có: $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 180° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180°$.

Do đó: $\widehat{B} + \widehat{D} = 360° - 180° = 180°$.

- *Xét trường hợp* AD > DC (h.1.3b)

Trên tia DA lấy điểm E sao cho DE = DC

Chứng minh tương tự như trên, ta được: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$; $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

Ví dụ 3. Tứ giác ABCD có tổng hai đường chéo bằng a. Gọi M là một điểm bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$.

Giải (h.1.4)

*** Tìm cách giải**

Để tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$ ta phải chứng minh $MA + MB + MC + MD \geq k$ (k là hằng số).

Ghép tổng trên thành hai nhóm $\left(MA + MC\right) + \left(MB + MD\right)$.

Ta thấy ngay có thể dùng bất đẳng thức tam giác mở rộng.

*** Trình bày lời giải**

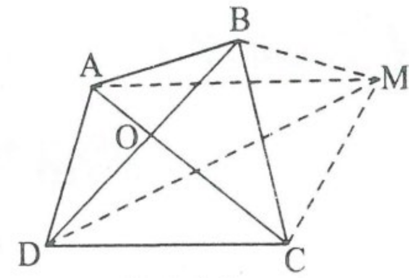
Xét ba điểm M, A, C có $MA + MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra khi $M \in AC$).

Xét ba điểm M, B, D có $MB + MD \geq BD$

(dấu '=' xảy ra khi $M \in BD$).

Do đó: $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD = a$.

Vậy $\min\left(MA + MB + MC + MD\right) = a$ khi M trùng với giao điểm O của đường chéo AC và BD.



Hình 1.4

C. Bài tập vận dụng

- **Tính số đo góc**

1.1. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

1.2. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^\circ$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K. Tính số đo của góc CKD.

1.3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

1.4. Cho tứ giác ABCD có $AD = DC = CB$; $\widehat{C} = 130^\circ$; $\widehat{D} = 110^\circ$. Tính số đo góc A, góc B.

(Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương 2010)

- **So sánh các độ dài**

1.5. Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 ?

1.6. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB = 3; BC = 6{,}6; CD = 6$. Tính độ dài AD.

1.7. Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác.

1.8. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

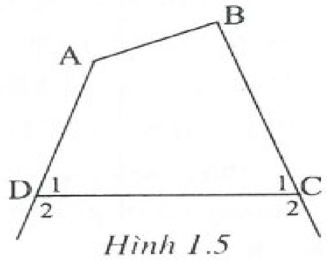
1.9. Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S = a + b + c + d$ chia hết cho a, cho b, cho c, cho d. Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

- **Bài toán giải bằng phương trình tô màu**

1.10. Có chín người trong đó bất kì ba người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

Hướng dẫn giải

1.1. • **Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau** (h.1.5)



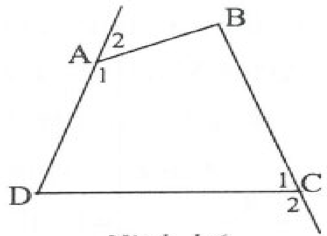
Hình 1.5

Gọi $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$ là số đo hai góc trong; $\widehat{D_2}$, $\widehat{D_2}$ là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D. Ta có:

$\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\left(180^\circ-\widehat{C_1}\right)+\left(180^\circ-\widehat{D_1}\right)=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (1)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A}+\widehat{B}=360^\circ-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\widehat{A}+\widehat{B}$.

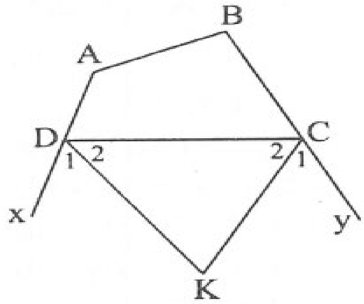


Hình 1.6

• **Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau** (h.1.6)

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{A_2}+\widehat{C_2}=\widehat{B}+\widehat{D}$

1.2. (h.1.7)



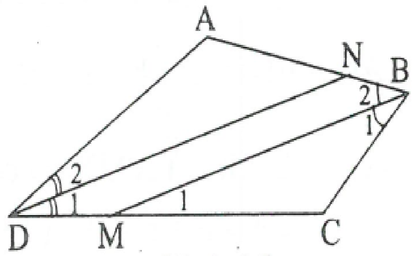
Hình 1.7

Ta có: $\widehat{CDx}+\widehat{DCy}=\widehat{A}+\widehat{B}=220^\circ$. (bài 1.1).

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{CDx}+\widehat{CDy}}{2}=110^\circ$. Do đó $\widehat{D_2}+\widehat{C_2}=110^\circ$.

Xét ΔCKD có: $\widehat{CKD}=180^\circ-\left(\widehat{D_2}+\widehat{C_2}\right)=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

1.3. (h.1.8)



Hình 1.8

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{B}+\widehat{D}=360^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)=360^\circ-2\widehat{C}$.

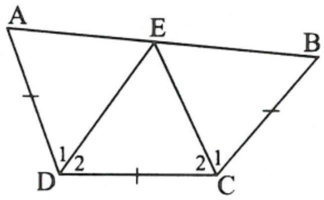
Vì $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$ nên $\widehat{B_1}+\widehat{D_1}=180^\circ-\widehat{C}\Rightarrow \widehat{B_1}+\widehat{D_1}+\widehat{C}=180^\circ$.

(1)

Xét ΔBCM có $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}+\widehat{C}=180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{M_1}$. Do đó $DN\,//\,BM$.

1.4. (h.1.9)



Hình 1.9

Vẽ đường phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ chúng cắt nhau tại E.

Xét ΔECD có $\widehat{CED}=180^\circ-\dfrac{110^\circ+130^\circ}{2}=60^\circ$.

$\Delta ADE=\Delta CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{CED}=60^\circ$.

$\Delta BCE=\Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC}=\widehat{DEC}=60^\circ$.

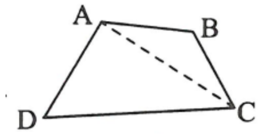
Suy ra $\widehat{AEB}=180^\circ$ do đó ba điểm A, E, B thẳng hàng

Vậy $\widehat{BAD}=\widehat{EAD}=\widehat{ECD}=65^\circ$. Do đó $\widehat{ABC}=360^\circ-\left(65^\circ+110^\circ+130^\circ\right)=55^\circ$.

1.5. (h.1.10)

Giả sử tứ giác ABCD có CD là cạnh dài nhất.

Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại (1).



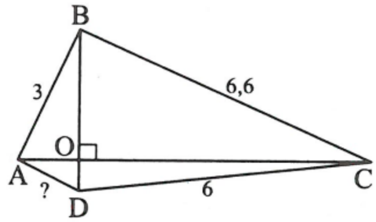
Hình 1.10

Thật vậy, xét ΔABC ta có: $AC < AB + BC$.

Xét ΔADC có: $CD < AD + AC$. Do đó $CD < AD + AB + BC$.

Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.

1.6. (h.1.11)



Hình 1.11

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Xét ΔAOB, ΔCOD vuông tại O, ta có:

$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

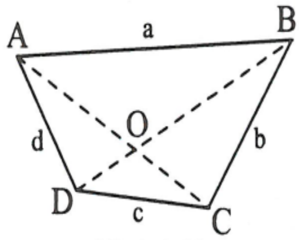
Chứng minh tương tự, ta được:

$BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$.

Do đó: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Suy ra: $3^2 + 6^2 = 6,6^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 9 + 36 - 43,56 = 1,44 \Rightarrow AD = 1,2$.

1.7. (h1.12)



Hình 1.12

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD.

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d. Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:

$OA + OB > a;\ OC + OD > c$.

Do đó $(OA + OC) + (OB + OD) > a + c$ hay $AC + BD > a + c$. (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $AC + BD > d + b$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được:

$$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \frac{a+b+c+d}{2}$$

Xét các ΔABC và ΔADC ta có: $AC < a + b;\ AC < c + d$

$\Rightarrow 2AC < a + b + c + d$. (3)

Tương tự có: $2BD < a + b + c + d$. (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được: $2(AC + BD) < 2(a + b + c + d)$

$\Rightarrow AC + BD < a + b + c + d$.

Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

1.8. • Trước hết ta chứng minh một bài toán phụ:

Cho ΔABC, $\widehat{A} \ge 90°$. Chứng minh rằng $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$.

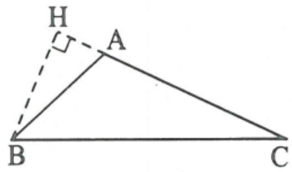
Giải (h.1.13).

Vẽ $BH \perp AC$. Vì $\widehat{A} \ge 90°$ nên H nằm trên tia đối của tia AC.

Xét ΔHBC và ΔHBA vuông tại H, ta có:

$BC^2 = HB^2 + HC^2 = \left(AB^2 - HA^2\right) + \left(HA + AC\right)^2$

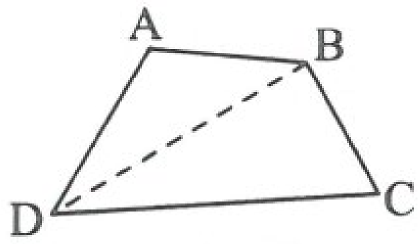
$= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2HA.AC$.



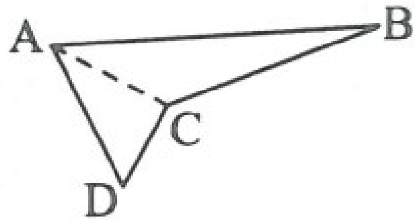
Hình 1.13

Vì $HA.AC \geq 0$ nên $BC^2 \geq AB^2 + AC^2$ (dấu "=" xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi ΔABC vuông).

- Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho



Hình 1.14



Hình 1.15

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lồi (h.1.14)

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$.

Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $90°$, giả sử $\widehat{A} \geq 90°$.

Xét ΔABD ta có $BD^2 \geq AB^2 + AD^2 > 10^2 + 10^2 = 200$ suy ra $BD > \sqrt{200}$, do đó $BD > 14$.

Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lõm (h.1.15)

Nối CA, Ta có: $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 360°$.

Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $120°$.

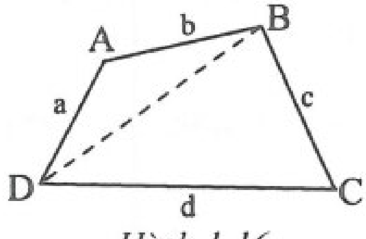
Giả sử $\widehat{ACB} \geq 120°$, do đó $\widehat{ACB}$ là góc tù

Xét ΔACB có $AB^2 \geq AC^2 + BC^2 > 10^2 + 10^2 = 200$.

Suy ra $AB > \sqrt{200} \Rightarrow AC > 14$.

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

1.9. (h.1.16)



Hình 1.16

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

Ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có: $a + b + c > BD + c > d$.

Do đó $a + b + c + d > 2d$. Ta đặt $a + b + c + d = S$ thì $S > 2d$. (*)

Ta có: $S \vdots a \Rightarrow S = ma \left(m \in N\right)$ (1)

$S \vdots b \Rightarrow S = nb \left(n \in N\right)$ (2)

$S \vdots c \Rightarrow S = pc \left(p \in N\right)$ (3)

$S \vdots d \Rightarrow S = qd \left(q \in N\right)$ (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$.

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$.

Do đó $q \geq 3;\ p \geq 4;\ n \geq 5;\ m \geq 6$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S}; \frac{1}{n} = \frac{b}{S}; \frac{1}{p} = \frac{c}{S}; \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$.

Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$.

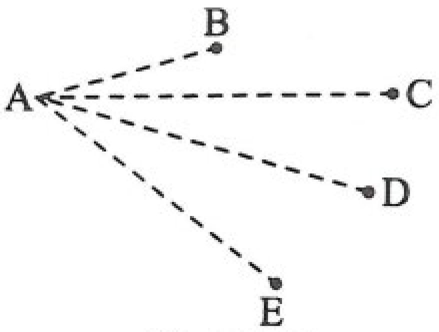
Từ đó: $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

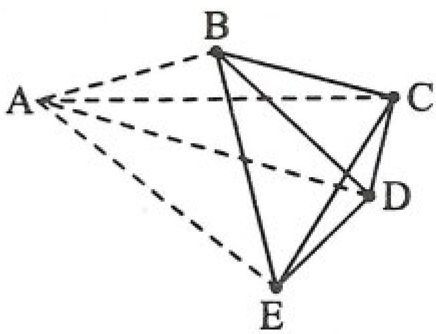
1.10. Coi mỗi người như một điểm, ta có chín điểm A, B, C,…

Nối hai điểm với nhau ta được một đoạn thẳng. Ta tô màu xanh nếu hai người không quen nhau, ta tô màu đỏ nếu hai người quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo cùng tô màu đỏ.

● Trường hợp có một điểm là đầu mút của bốn đoạn thẳng màu xanh AB, AC, AD, AE vẽ nét đứt (h.1.17)



Hình 1.17



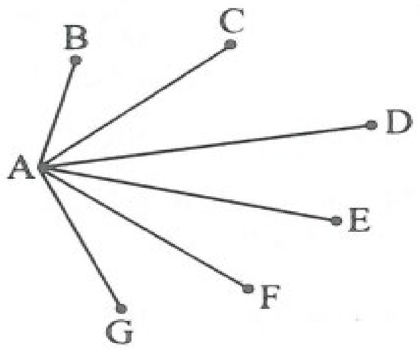
Hình 1.18

Xét ΔABC có hai đoạn thẳng AB, AC màu xanh nên đoạn thẳng BC màu đỏ vì bất kì tam giác nào cũng có một đoạn thẳng màu đỏ. Tương tự các đoạn thẳng CD, DE, EB, BD, CE cũng có màu đỏ (vẽ nét liền) (h.1.18). Do đó tứ giác BCDE có các cạnh và đường chéo được tô đỏ nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

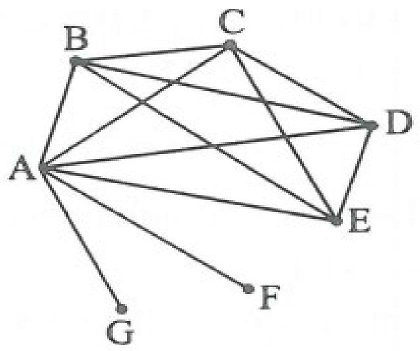
● Trường hợp mọi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là ba đoạn thẳng màu xanh. Không thể mọi điểm đều là đầu mút của ba đoạn thẳng màu xanh vì khi đó số đoạn thẳng màu xanh là $\frac{9.3}{2} \notin N$.

Như vậy tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất là hai đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn đó là điểm A, do đó A là đầu mút của ít nhất là sáu đoạn thẳng màu đỏ, giả sử đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG (h.1.19)

Trong sáu điểm B, C, D, E, F, G tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác có ba cạnh cùng màu (đây là bài toán cơ bản về phương pháp tô màu) chẳng hạn đó là ΔBCD (h.1.20).



Hình 1.19



Hình 1.20

Trong ΔBCD có một cạnh màu đỏ (theo đề bài) nên ba cạnh của ΔBCD cùng màu đỏ. Khi đó tứ giác ABCD là tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

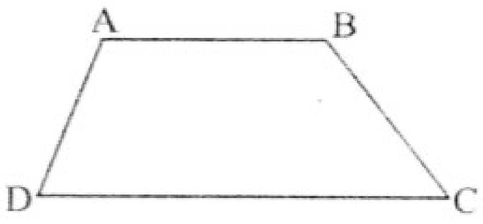
Chuyên đề 2.

HÌNH THANG . HÌNH THANG CÂN.
DỰNG HÌNH THANG

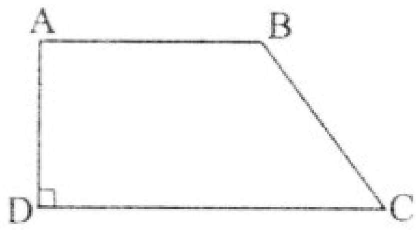
A. Kiến thức cần nhớ

1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (h.2.1)

Đặc biệt : Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông (h.2.2)



Hình 2.1

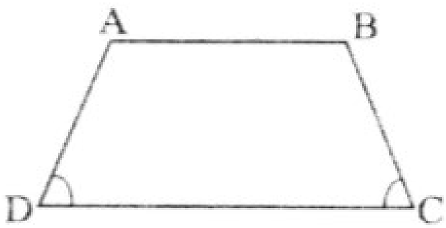


Hình 2.2

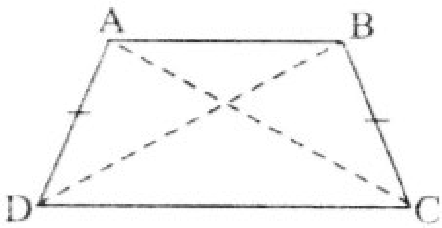
2. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau (h.2.3)

3. Trong hình thang cân :

- Hai cạnh bên bằng nhau ;
- Hai đường chéo bằng nhau (h.2.4)



Hình 2.3



Hình 2.4

4. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân :

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân ;
- Hình thang có hai đối bù nhau là hình thang cân ;
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

5. Dựng hình

- Dụng cụ dựng hình : Thước và compa.
- Các bước giải một bài toán dựng hình :
- Phân tích ;
- Cách dựng;
- Chứng minh;
- Biện luận.

Đối với một bài toán dựng hình đơn giản ta có thể không trình bày bước phân tích .

- Để dựng hình thang ta cần biết bốn yếu tố của nó, trong đó số góc cho trước không quá hai.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$, các tia phân giác của góc A, góc D cắt nhau tại M thuộc cạnh BC. Cho biết $AD = 7cm$, chứng minh rằng một trong hai đáy của hình thang có độ dài nhỏ hơn $4cm$.

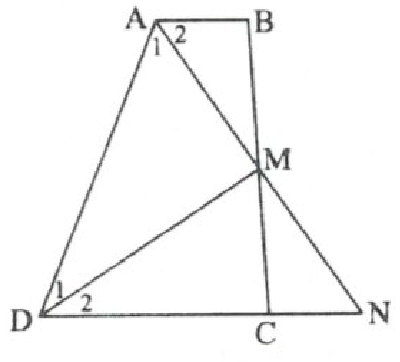
Giải(h.2.5)

****Tìm cách giải***

Để chứng minh một cạnh đáy nào đó nhỏ hơn $4cm$ ta có thể xét tổng của hai cạnh đáy rồi chứng minh tổng này nhỏ hơn $8cm$. Khi đó tồn tại một cạnh đáy có độ dài nhỏ hơn $4cm$.

****Trình bày lời giải***

Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC.



Hình 2.5

Ta có : $AB//CD$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{N}$ (so le trong)

Mặt khác , $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{N} \Rightarrow \triangle DAN$ cân tại D

$\Rightarrow DA = DN.$ $\quad (1)$

Xét $\triangle DAN$ có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên DM đồng thời là đường trung tuyến : $MA = MN.$

$\triangle ABM = \triangle NCM\,(g.c.g) \Rightarrow AB = CN.$

Ta có: $DC + AB = DC + CN = DN = DA = 7cm.$ Vậy $AB + CD < 8cm.$

Vậy một trong hai đáy AB, CD phải có độ dài nhỏ hơn $4cm.$

Ví dụ 2. Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$ và $AD = BC$. Chứng minh rằng tứ giác này là hình thang cân .

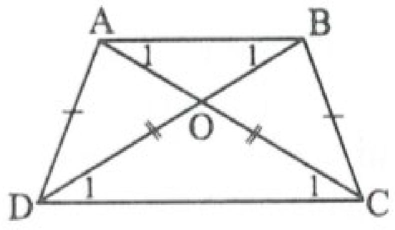
Giải (h.2.6)

****Tìm cách giải***

Tứ giác $ABCD$ đã có hai đường chéo bằng nhau nên để chứng minh nó là hình thang cân, chỉ cần chứng minh $AB//CD.$ Muốn vậy ta chứng minh một cặp góc so le trong bằng nhau .

****Trình bày lời giải***

$\triangle ADC = \triangle BCD(c.c.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$



Hình 2.6

$\triangle DAB = \triangle CBA(c.c.c) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}.$

Mặt khác, $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$ (đối đỉnh)

nên $2\widehat{C_1} = 2\widehat{A_1}$

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{A_1},$ do đó $AB//CD.$

Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang. Hình thang này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Ví dụ 3. Một hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên và góc kề với đáy lớn bằng $60°$. Biết chiều cao của hình thang cân này là $a\sqrt{3}$. Tính chu vi của hình thang cân.

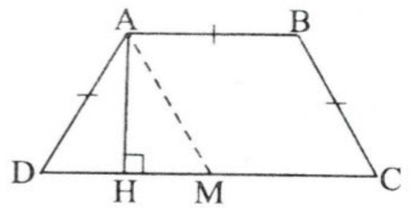
Giải(h.2.7)

**** Tìm cách giải***

Ta đã biết hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau. Từ đó ta vẽ thêm hình phụ để tìm sự liên hệ giữa đáy lớn và ba cạnh còn lại. Ta vẽ $AM//BC\left(M \in CD\right)$. Mặt khác, đề bài có cho góc $60°$, gợi ý cho ta vận dụng tính chất của tam giác đều để tính độ dài mỗi cạnh theo chiều cao của nó .

****Trình bày lời giải***

Ta đặt $AD = AB = BC = x.$



Hình 2.7

Vẽ $AM//BC\left(M \in CD\right)$, ta được

$AM = BC = x$ và $MC = AB = x$

$\triangle ADM$ cân, có $\widehat{D} = 60°$ nên là tam giác đều.

suy ra: $DM = AD = x.$

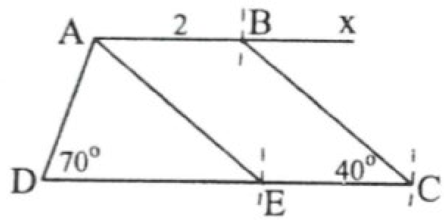
Vẽ $AH \perp CD$ thì AH là đường cao của hình thang cân, cũng là đường cao của tam giác đều: $AH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2}$. Vì $AH = a\sqrt{3}$ nên $\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a.$

Do đó chu vi của hình thang cân là : $2a.5 = 10a.$

Nhận xét: Qua một đỉnh vẽ đường thẳng song song với một cạnh bên của hình thang là một cách vẽ hình phụ để giải bài toán về hình thang.

Ví dụ 4. Dựng hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$ biết:

$AB = 2cm, CD = 5cm, \widehat{C} = 40°;\ \widehat{D} = 70°.$



Hình 2.8

Giải(h.2.8)

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được hình thang $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Vẽ $AE//BC\left(E \in CD\right)$ ta được

$\widehat{AED} = \widehat{C} = 40°,\ EC = AB = 2cm$ và $DE = DC - EC = 5 - 2 = 3cm.$

- $\triangle ADE$ dựng được ngay $\left(g.c.g\right)$.

- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia DE và C cách D là $5cm.$

- Điểm B thỏa mãn hai điều kiện: B nằm trên tia $Ax//DE$ (hai tia Ax và DE cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD) và B cách A là $2cm.$

b) Cách dựng

-Dựng $\triangle ADE$ sao cho $DE = 3cm;\ \widehat{D} = 70°;\ \widehat{E} = 40°$

- Dựng tia $Ax//DE$ (hai tia Ax và DE cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD).

- Trên tia Ax đặt $AB = 2cm.$

- Trên tia DE đặt $DC = 5cm.$

- Nối BC ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

c) Chứng minh

Theo cách dựng tứ giác $ABCD$ có $AB//CD$ nên nó là hình thang.

Xét hình thang $ABCE$ có $CE = 5 - 3 = 2(cm)$;

$AB = 2cm$ nên $AB = CE$ do đó $AE//BC \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{AED} = 40°.$

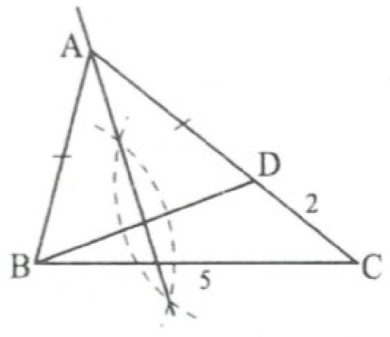
Như vậy hình thang $ABCD$ có $AB = 2cm; CD = 5cm; \widehat{D} = 70°$ và $\widehat{C} = 40°$

d) Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

Ví dụ 5. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = 70°$, $BC = 5cm$ và $AC - AB = 2cm.$

Giải (h.2.9)



Hình 2.9

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài.

Trên tia AC ta lấy điểm D sao cho $AD = AB.$

Khi đó: $DC = AC - AD = AC - AB = 2cm.$

$\triangle ABD$ cân, $\widehat{A} = 70° \Rightarrow \widehat{ADB} = 55° \Rightarrow \widehat{BDC} = 125°.$

- $\triangle DBC$ xác định được $\left(CD = 2cm;\ \widehat{D} = 125°;\ CB = 5cm\right).$

- Điểm A thỏa mãn hai điều kiện: nằm trên tia CD và A nằm trên đường trung trực của $BD.$

b) Cách dựng:

- Dựng $\triangle DBC$ sao cho $\widehat{D} = 125°; DC = 2cm$ và $CB = 5cm.$

- Dựng đường trung trực của BD cắt tia CD tại A.

- Nối AB ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

c) Chứng minh

$\triangle ABC$ thỏa mãn đề bài vì theo cách dựng, điểm A nằm trên đường trung trực của BD nên $AD = AB$.

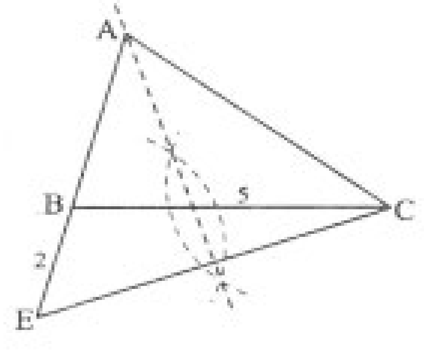
Do đó : $AC - AB = AC - AD = DC = 2cm; BC = 5cm$ và

$\widehat{ADB} = 180^0 - 125^0 = 55^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^0 - 2.55^0 = 70^0$.

d) Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét : Đề bài có cho đoạn thẳng $2cm$ nhưng trên hình vẽ chưa có đoạn thẳng nào như vậy. Ta đã làm xuất hiện đoạn thẳng $DC = 2cm$ bằng cách trên AC ta đặt $AD = AB$. Khi đó DC chính là hiệu $AC - AB$. Cũng có thể làm xuất hiện đoạn thẳng $2cm$ bằng cách trên tia AB ta đặt $AE = AC$ (h.2.10).



Hình 2.10

Khi đó : $BE = AE - AB = AC - AB = 2cm$.

$\triangle AEC$ cân, có $\widehat{A} = 70^0$

$\Rightarrow \widehat{E} = \left(180^0 - 70^0\right) : 2 = 55^0$.

$\triangle BEC$ xác định được.

Khi đó điểm A thỏa mãn hai điều kiện : A nằm trên tia EB và A nằm trên đường trung trực của EC.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

- **Hình thang**

2.1 Cho tứ giác $ABCD$. Các tia phân giác của góc A, góc D cắt nhau tại M. Các tia phân giác của góc B, góc C cắt nhau tại N.

Cho biết $\widehat{AMD} = 90^0$, chứng minh rằng :

a) Tứ giác $ABCD$ là hình thang.

b) $NB \perp NC$.

2.2 Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Gọi M là trung điểm của AD. Cho biết $MB \perp MC$.

a) Chứng minh rằng: $BC = AB + CD$.

b) Vẽ $MH \perp BC$. Chứng minh rằng tứ giác $MBHD$ là hình thang.

2.3. Chứng minh rằng trong một hình thang vuông, hiệu các bình phương của hai đường chéo bằng hiệu các bình phương của hai đáy.

2.4. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Cho biết $AD = 20, AC = 52$ và $BC = 29$. Tính độ dài AB.

- **Hình thang cân**

2.5. Cho tam giác đều ABC, mỗi cạnh có độ dài bằng a. Gọi O là một điểm bất kì ở trong tam giác. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $OM\ //\ BC; ON\ //\ CA$ và $OP\ //\ AB$. Xác định vị trí của điểm O để tam giác MNP là tam giác đều. Tính chu vi của tam giác đều đó.

2.6. Cho hình thang $ABCD\ (AB\ //\ CD), \widehat{ADC} > \widehat{BCD}$.

Chứng minh rằng : $AC > BD$.

2.7. Cho góc xOy có số đo lớn hơn 60^0 nhưng nhỏ hơn 180^0. Trên cạnh Ox lấy điểm A, trên cạnh Oy lấy điểm C. Chứng minh rằng: $AC > \dfrac{OA+OC}{2}$.

2.8. Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD; \widehat{C} = \widehat{D}$ và $BD \perp BC$. Hỏi tứ giác $ABCD$ có phải là hình thang cân không?

- **Dựng hình**

2.9. Dựng hình thang $ABCD\ (AB // CD)$ biết $AD = 2cm; BD = 3cm; AC = 4cm$ và góc nhọn xen giữa hai đường chéo bằng 70^0.

2.10. Dựng hình thang $ABCD\ (AB // CD)$ biết $\widehat{A} = 120^0, AB = 2cm; BD = 4cm$ và $BC = a$.

2.11. Dựng tứ giác $ABCD$ biết $AB = 2,5cm; CD = 4cm; \widehat{A} = 120^0; \widehat{B} = 100^0$ và $\widehat{C} = 60^0$.

2.12. Dựng tam giác ABC vuông tại B có chu vi bằng $8cm$ và $\widehat{C} = m^0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

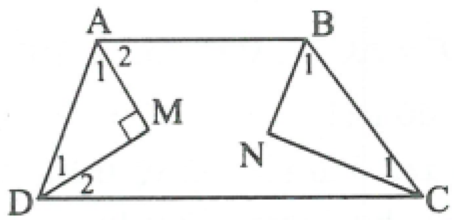
2.1 (h.2.11)

a) Xét $\triangle MAD$ có $\widehat{M} = 90^0$.

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^0 \Rightarrow \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^0 \Rightarrow AB // CD$

Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang.



Hình 2.11

b) Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^0$ (hai góc kề với một cạnh bên).

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{BCD}}{2} = 90^0$ hay $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 90^0$.

Xét $\triangle NBC$ có $\widehat{N} = 180^0 - (\widehat{B_1} + \widehat{C_1}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Vậy $NB \perp NC$.

2.2. (h.2.12)

a) Gọi E là giao điểm của tia BM với tia CD.

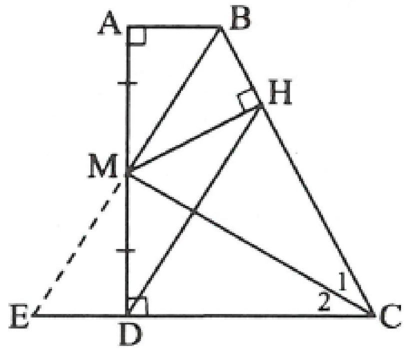
$\triangle ABM = \triangle DEM$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = DE$ và $MB = ME$.

$\triangle CBE$ có CM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân.

$\Rightarrow CB = CE$

$\Rightarrow CB = CD + DE \Rightarrow CB = CD + AB$ (vì $AB = DE$).



Hình 2.12

b) $\triangle CBE$ cân tại $C, CM \perp BM$ (1)

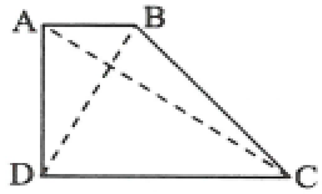
$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow MH = MD$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

$\triangle HCM = \triangle DCM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow CH = CD \Rightarrow \triangle CHD$ cân .

$\Rightarrow CM \perp DH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM // DH$ do đó tứ giác $MBHD$ là hình thang.

2.3. (h.2.13)



Hình 2.13

Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Giả sử $AB \le CD$.

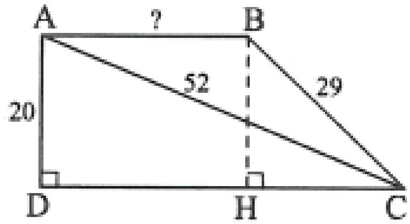
áp dụng định lý Py-ta-go, ta có : $AC^2 = AD^2 + DC^2; BD^2 = AD^2 + AB^2$.

Suy ra $AC^2 - BD^2 = (AD^2 + DC^2) - (AD^2 + AB^2)$.

Do đó $AC^2 - BD^2 = CD^2 - AB^2$.

2.4. (h.2.14)

Vẽ $BH \perp CD$ ta được $AB = DH; BH = AD = 20$.



Hình 2.14

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H có:

$HC^2 = BC^2 - BH^2 = 29^2 - 20^2 = 441 \Rightarrow HC = 21$.

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có:

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 52^2 - 20^2 = 2304 \Rightarrow CD = 48$.

Do đó: $DH = CD - HC = 48 - 21 = 27 \Rightarrow AB = 27$.

Nhận xét: Bài này đã vẽ thêm đường cao BH của hình thang. Đó là một cách vẽ hình phụ thường dùng khi giải toán về hình thang.

2.5. (h.2.15)

Tứ giác $MONB$ có $OM // BC$ nên là hình thang. Hình thang này có $\widehat{MBN} = \widehat{ONB} (= \widehat{ACB})$ nên là hình thang cân.

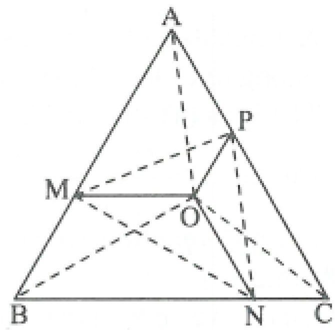
Chứng minh tương tự ta được các tứ giác $ONCP, OMAP$ cũng là hình thang cân.

Suy ra: $MN = OB; NP = OC; MP = OA$.

Do đó $\triangle MNP$ là tam giác đều $\Leftrightarrow MN = NP = PM$.

$\Leftrightarrow OB = OC = OA \Leftrightarrow O$ là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$.

Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực cũng là giao điểm của ba đường cao, ba đường trung tuyến.



Hình 2.15

Chiều cao h của tam giác đều cạnh a được tính theo công thức: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow OA = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó chu vi của $\triangle MNP$ là: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.3 = a\sqrt{3}$.

2.6. (h.2.16)

Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A vẽ tia Cx sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{ADC}$.

Tia Cx cắt tia AB tại E.

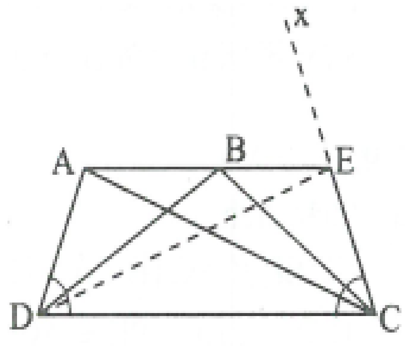
Khi đó hình thang $AECD$ là hình thang cân.

$\Rightarrow AC = DE$ và $\widehat{DAB} = \widehat{CEB}$.

Xét $\triangle ABD$ có góc DBE là góc ngoài nên

$\widehat{DBE} > \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DBE} > \widehat{CED}$ (vì $\widehat{DAB} = \widehat{CEB}$).

Do đó $\widehat{DBE} > \widehat{DEB} \Rightarrow DE > BD \Rightarrow AC > BD$.



Hình 2.16

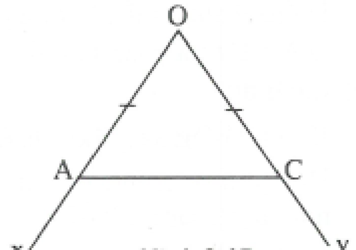
2.7.

- Xét trường hợp $OA = OC$ (h.2.17).

  $\triangle AOC$ là tam giác cân.

  Vì $\widehat{O} > 60^0$ nên $\widehat{A} = \widehat{C} < 60^0 \Rightarrow AC > OA = OC$.

  Do đó: $2AC > OA + OC \Rightarrow AC > \dfrac{OA + OC}{2}$.



Hình 2.17

- Trường hợp $OA < OC$ (h.2.18)

  Trên tia Ox lấy điểm D, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = OA, OD = OC$.

  Các $\triangle OAB$ và $\triangle ODC$ cân tại O nên:

  $\widehat{OAB} = \widehat{ODC} = \dfrac{180^0 - \widehat{O}}{2} \Rightarrow AB // CD$.

  $\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình thang.

  Mặt khác $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ nên $ABCD$ là hình thang cân

  $\Rightarrow AC = BD$.

  Gọi K là giao điểm của AC và BD. Ta có : $AC = AK + KC; BD = BK + KD$.

  $\Rightarrow AC + BD = (AK + BK) + (KC + KD)$ (1).

  Vì $AK + BK > AB; KC + KD > CD$ (2).

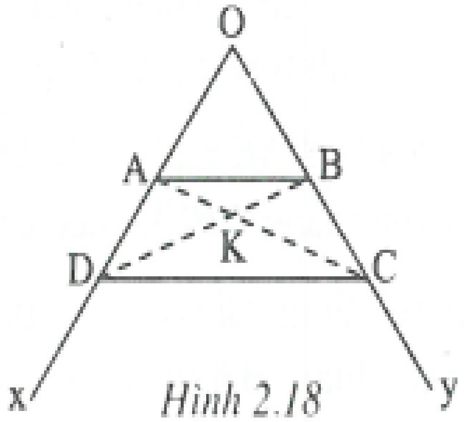
  nên từ (1) và (2) suy ra : $AC + BD > AB + CD$ (3).

  Xét $\triangle OAB$ có $\widehat{O} > 60^0$ nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} < 60^0 \Rightarrow AB > OA$.

  Tương tự $CD > OC$. Do đó : $AB + CD > OA + OC$ (4).

  Từ (3) và (4) suy ra : $AC + BD > OA + OC$ hay $2AC > OA + OC$.

  Do đó $AC > \dfrac{OA + OC}{2}$.



Hình 2.18

- Trường hợp $OA > OC$: Chứng minh tương tự.

2.8. (h.2.19)

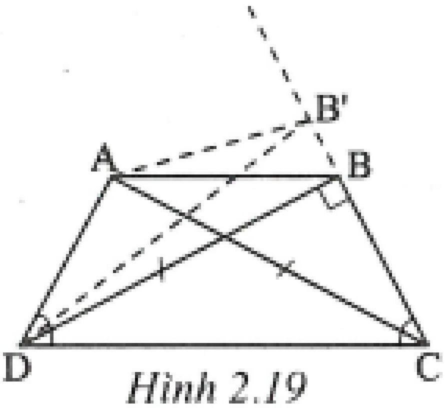
Qua A vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia CB tại B'. Hình thang $AB'CD$ có hai góc ở đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

- Vậy nếu B' trùng với B thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- Nếu B' không trùng với B, ta có: $AC = B'D$.

Mặt khác, $AC = BD$ nên $B'D = BD$.

Do đó $\triangle DBB'$ cân $\Rightarrow \widehat{DB'B} = \widehat{DBB'} = 90^0$, vô lí.

Vậy B' trùng với B và tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.



Hình 2.19

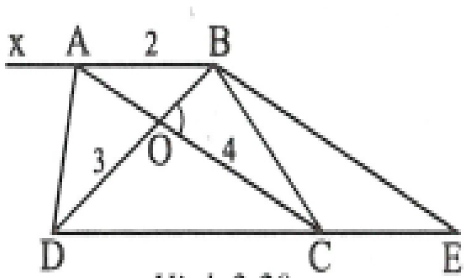
2.9. (h.2.20)

a) Phân tích:

Vẽ $BE // AC$ ($E \in$ tia DC), ta được:

$\widehat{DBE} = 110^0$, $BE = AC = 4cm$, $CE = AB = 2cm$.

- $\triangle BDE$ dựng được ngay (c.g.c);
- Điểm A thỏa mãn hai điều kiện: A nằm trên tia $Bx // DE$ và cách B là $2cm$.
- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia ED và cách E là $2cm$.



Hình 2.20

b) Cách dựng:

- Dựng $\triangle BDE$ sao cho $\widehat{DBE} = 110^0$, $BD = 3cm$, $BE = 4cm$.
- Dựng tia $Bx // DE$ và trên đó đặt $BA = 2cm$ (hai tia Bx và ED cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BE).
- Trên tia ED đặt $EC = 2cm$.
- Nối AD, BC ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

c) Chứng minh:

Tứ giác $ABCD$ theo cách dựng có $AB // CD$ nên là hình thang.

Xét hình thang $ABEC$ có $AB = EC = 2cm$ nên $AC // BE$ và $AC = BE = 4cm$.

$\widehat{DOC} = \widehat{DBE} = 110^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 70^0$

Hình thang $ABCD$ theo cách dựng có:

$AB = 2cm$, $BD = 3cm$, $AC = 4cm$ và $\widehat{BOC} = 70^0$.

d) Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

2.10. (h.2.21)

Cách dựng:

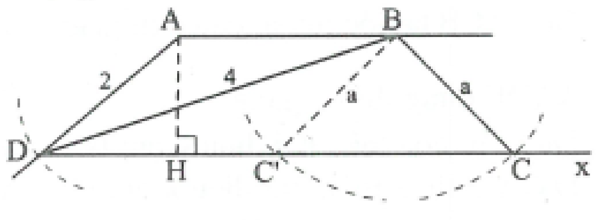
- Dựng $\triangle ABD$ sao cho $\widehat{A} = 120^0, AD = 2, DB = 4$.
- Dựng tia $Dx // AB$ (hai tia Dx và AB cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD).
- Dựng cung tròn tâm B, bán kính a cắt Dx tại C.
- Nối BC ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

Biện luận:

Vẽ $AH \perp CD$ thì $\widehat{DAH} = 30^0$.

Do đó $DH = \frac{1}{2}AD = 1cm$.

$\Rightarrow AH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$



Hình 2.21

- Nếu $a < \sqrt{3}$ thì đường tròn $(B; a)$ không cắt tia Dx nên bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $a = \sqrt{3}$ thì đường tròn $(B; a)$ có chung với tia Dx một điểm, bài toán có một nghiệm hình.
- Nếu $\sqrt{3} < a < 4$ thì đường tròn $(B; a)$ cắt tia Dx tại hai điểm C và C', bài toán có hai nghiệm hình.
- Nếu $a \geq 4$ thì đường tròn $(B; a)$ cắt tia Dx tại một điểm $C \neq D$ nên bài toán có một nghiệm hình.

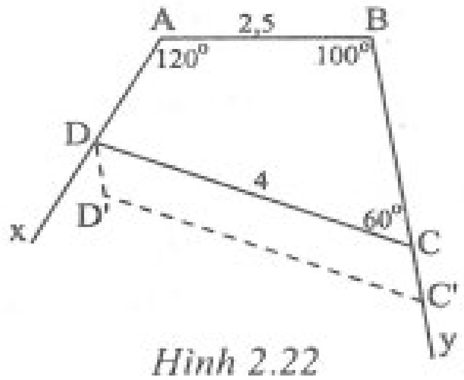
2.11. (h.2.22)

a) Phân tích:

Giả sử ta đã dựng được tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Ta thấy $AB = 2,5cm$ dựng được ngay.

Trên tia BC lấy điểm C'. Vẽ đoạn thẳng $C'D' // CD$ và $C'D' = CD$. Khi đó $\widehat{C'} = \widehat{C} = 60^0$ và $DD' // CC'$.



Hình 2.22

b) Cách dựng:

- Dựng $AB = 2,5cm$.
- Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng các tia Ax và By sao cho $\widehat{BAx} = 120^0, \widehat{ABy} = 100^0$.
- Trên tia By lấy điểm C'.
- Dựng đoạn thẳng $C'D'$ sao cho $\widehat{BC'D'} = 60^0$ và $C'D' = 4$ cm.
- Dựng $DD' = BC'$ $(D \in Ax)$.
- Dựng $DC // D'C'$ $(C \in By)$.

Tứ giác $ABCD$ là tứ giác phải dựng.

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

2.12. (h.2.23)

a) Phân tích:

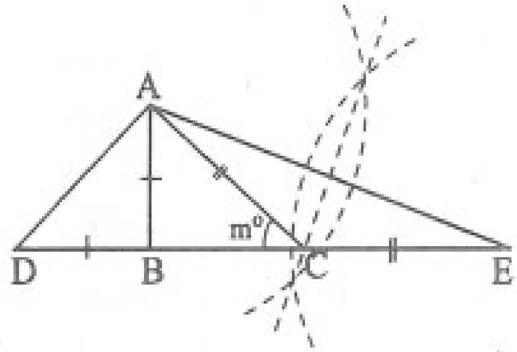
Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn đề bài.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D; trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BA, CE = CA$.

Khi đó: $DE = DB + BC + CE = BA + BC + CA = 8cm$.

$\triangle ABD$ vuông cân tại B nên $\widehat{D} = 45^0$.

Góc ACB là góc ngoài của tam giác cân CAE nên $\widehat{ACB} = 2\widehat{E} \Rightarrow \widehat{E} = \frac{m^0}{2}$.



Hình 2.23

- $\triangle ADE$ dựng được (g.c.g).
- Điểm B thỏa mãn hai điều kiện: B nằm trên đoạn thẳng DE và $AB \perp DE$.
- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên đoạn thẳng DE và nằm trên đường trung trực của AE (vì C cách đều hai đầu đoạn thẳng AE).

b) Cách dựng:

- Dựng $\triangle ADE$ sao cho $DE = 8cm; \widehat{D} = 45^0$ và $\widehat{E} = \frac{m^0}{2}$.
- Dựng $AB \perp DE\ (B \in DE)$.
- Dựng đường trung trực của AE cắt DE tại C.
- Nối AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

c) Chứng minh :

$\triangle ABD$ vuông tại B có $\widehat{D} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow BA = BD$.

Điểm C nằm trên đường trung trực của AE nên $CA = CE$.

$\triangle ABC$ có $AB + BC + CA = BD + BC + CE = DE = 8cm; \widehat{B} = 90^0$ và $\widehat{ACB} = 2.\widehat{E} = 2.\frac{m^o}{2} = m^o$.

d) Biện luận :

- Nếu $m \geq 90$ thì bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $0 < m < 90$ thì bài toán có một nghiệm hình.

Chương I

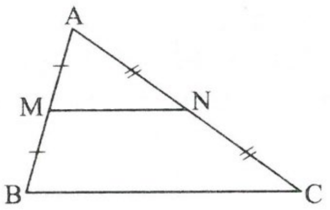
Chuyên đề 3

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

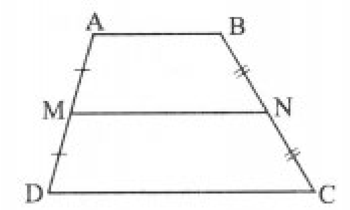
A.Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h.3.1)
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên của hình thang (h.32)



Hình 3.1



Hình 3.2

2. Tính chất

- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

  Trên hình 3.1 thì $MN//BC$ và $MN = \frac{BC}{2}$

- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai cạnh đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

  Trên hình 3.2 thì $MN//AB//CD$ và $MN = \frac{AB+CD}{2}$

3. Định lí

- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng AG chia đôi MN.

Giải (h.3.3)

**** Tìm cách giải***

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta dùng định lý đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba. Gọi H là trung điểm của BG thì ta có thể dùng định lý đường trung bình để chứng minh.

**** Trình bày lời giải***

Gọi O là giao điểm của AG và MN.

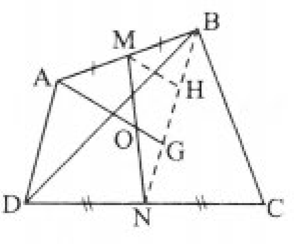
Gọi H là trung điểm của BG.

Theo tính chất của trọng tâm, ta có: $BH = HG = GN$.

Xét ΔABG có MH là đường trung bình $\Rightarrow MH//AG$.

Xét ΔHMN có $AG//MH$ và $NG = GH$ nên $ON = OM$.

Vậy AG chia đôi MN.



Hình 3.3

Nhận xét: Vẽ thêm trung điểm của một đoạn thẳng là cách vẽ hình phụ thường dùng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác.

Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$ có chu vi là $4a$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng EG và HF có một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a.

Giải (h.3.4)

**** Tìm cách giải***

Để chứng minh một trong hai đoạn thẳng EG và HF có độ dài không lớn hơn a, ta chứng minh tổng của hai đoạn này không lớn hơn $2a$. Khi đó một trong hai đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a.

**** Trình bày lời giải***

Gọi M là trung điểm của BD.

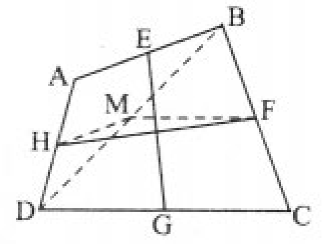
Xét ΔABD có HM là đường trung bình nên $HM = \dfrac{AB}{2}$.

Xét ΔBDC có MF là đường trung bình nên $MF = \dfrac{CD}{2}$.

Xét ba điểm M, H, F có $HF \le MH + MF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $EG \le \dfrac{AD + BC}{2}$.

Vậy $HF + EG \ge \dfrac{AB + CD + AD + BC}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.



Hình 3.4

Suy ra một trong hai đoạn thẳng HF, EG có độ dài không lớn hơn a.

Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này vẫn là vẽ trung điểm của đoạn thẳng BD. Cũng có thể vẽ trung điểm của đoạn thẳng AC thay cho trung điểm của đoạn thẳng BD.

Ví dụ 3: Cho tam giác $ABC, BC = 6cm$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = \dfrac{1}{3}AB$. Vẽ $DE//BC\left(E \in AC\right)$. Tính độ dài DE.

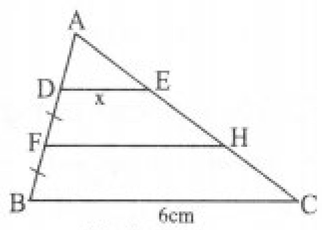
Giải (h.3.5)

**** Tìm cách giải***

Vì $AD = \frac{1}{2}DB$ nên ta vẽ trung điểm F của DB. Từ F vẽ một đường thẳng song song với BC thì DE chính là đường trung bình của một tam giác. Từ đó sẽ tính được độ dài của nó.

**** Trình bày lời giải***

Gọi F là trung điểm của DB. Khi đó: $AD = DF = FB$.



Hình 3.5

Vẽ $FH//BC\left(H \in AC\right)$.

Xét ΔAFH có $DE//FH$ và $AD = DF$ nên $AE = EH$.

Xét hình thang $DECB$ có $FH//BC$ và $DF = FB$ nên $EH = HC$.

Ta đặt $DE = x$.

Ta có DE là đường trung bình của $\Delta AFH \Rightarrow DE = \frac{1}{2}FH \Rightarrow FH = 2x$.

Ta có FH là đường trung bình của hình thang $DECB$

$\Rightarrow FH = \frac{DE + BC}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x = 2(cm)$.

Vậy $DE = 2cm$.

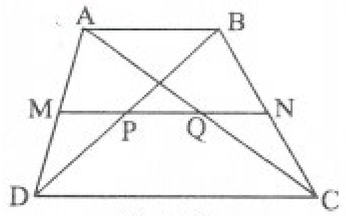
Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này là ngoài việc vẽ trung điểm của một đoạn thẳng ta còn thêm đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

Ví dụ 4: Cho hình thang $ABCD$, AB là đáy nhỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;

b) Chứng minh $PQ//CD$ và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$;

c) Hình thang $ABCD$ phải có điều kiện gì để $MP = PQ = QN$



Hình 3.6

Giải (h.3.6)

**** Tìm cách giải***

Trong hình vẽ có nhiều đường thẳng cùng đi qua một điểm và cùng song song với một đường thẳng nên có thể vận dụng tiên đề Ơ-clit để chứng minh thẳng hàng.

**** Trình bày lời giải***

a) Xét ΔABD có MP là đường trung bình $\Rightarrow MP//AB \Rightarrow MP//CD$.

Xét ΔADC có MQ là đường trung bình $\Rightarrow MQ//CD$.

Xét hình thang $ABCD$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN//CD$.

Qua điểm M có các đường thẳng MP, MQ, MN cùng song song với CD nên các đường thẳng này trùng nhau, suy ra bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Ta có: $MN//CD$ nên $PQ//CD; PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$.

c) Ta có: $MP = NQ = \frac{AB}{2}.MP = PQ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

$\Leftrightarrow AB = CD - AB \Leftrightarrow 2AB = CD$ (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ).

Nhận xét: Đường trung bình MN của hình thang và đoạn thẳng PQ nối trung điểm hai đường chéo có tính chất giống nhau là cùng song song với hai đáy, có tính chất khác nhau là MN bằng nửa tổng hai đáy còn PQ bằng nửa hiệu hai đáy.

C. Bài tập vận dụng

- **Đường trung bình của tam giác**

3.1. Cho tứ giác $ABCD,$ đường chéo BD là đường trung trực của AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AB. Vẽ $ME \perp BC$ và $NF \perp CD \left(E \in BC, F \in CD\right)$. Chứng minh rằng ba đường thẳng ME, NF và AC đồng quy.

3.2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE và CD. Đường thẳng MN cắt tia AB và AC lần lượt là tại P và Q. Hỏi hai điểm D và E phải có điều kiện gì để tam giác APQ cân tại A?

3.3. Cho tam giác ABC. Gọi Bx và Cy lần lượt là các đường chứa tia phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên Bx và Cy.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCKH$ là hình thang;

b) Tam giác ABC phải có điều kiện gì để hình thang $BCKH$ là hình thang cân?

3.4. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng khoảng cách từ O đến BC bằng nửa độ dài AH.

3.5. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và đường phân giác BD. Biết rằng $AH = \frac{1}{2}BD$, tính số đo các góc của tam giác ABC

3.6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm D ở trong tam giác. Vẽ tam giác ADE vuông cân tại A sao cho D và E thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và DE. Tính số đo các góc của tam giác MNP.

3.7. Cho hình thang cân $ABCD\left(AB//CD\right)$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của OA, OD và BC. Cho biết $\widehat{COD} = 60°$, tính các góc của tam giác GEF.

3.8. Cho tam giác ABC, góc A nhọn. Vẽ về phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ABM và CAN theo thứ tự có cạnh đáy là AB và AC. Gọi O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác OMN là tam giác vuông cân.

3.9 . Tam giác $ABC, AB < AC$. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $BE = CF$. Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng khi E và F di động trên AB, AC thì trung điểm M của EF nằm trên một đường thẳng cố định.

3.10. Cho đoạn thẳng AB và n điểm $O_1, O_2, ..., O_n$ không nằm giữa A và B sao cho $O_1A + O_2A + ... + O_nA = O_1B + O_2B + ... + O_nB = a$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M sao cho $O_1M + O_2M + ... + O_nM \le a$.

3.11. Cho tam giác $ABC, \widehat{C} \le \widehat{B} \le \widehat{A}$. Biết trung điểm của ba đường cao thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

- **Đường trung bình của hình thang**

3.12. Cho hình thang cân $ABCD\left(AB < CD\right)$. Vẽ $AH \perp CD$. Chứng minh rằng:

a) HD bằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo;

b) HC bằng đường trung bình của hình thang.

3.13. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm O sao cho $BO = \frac{1}{2}BC$. Đường thẳng OM cắt OC tại N. Chứng minh rằng: $AN = \frac{1}{4}AC$.

3.14. Cho tam giác ABC, cạnh BC cố định. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác ABM vuông cân tại B, tam giác CAN vuông cân tại C. Chứng minh rằng khi A di động trên một nửa mặt phẳng bờ BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3.15. Cho điểm M nằm giữa hai điểm A và B nhưng không là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác CAM và DBM cân tại C và D sao cho $\widehat{C} = \widehat{D}$. Gọi H và F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng: $HF = \frac{1}{2}CD$.

3.16. Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng nhau, xen giữa hai cạnh có tổng bằng nhau thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

3.1. (h.3.7)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $AC \perp BD$ và $OA = OC$.

Xét ΔABD có MN là đường trung bình

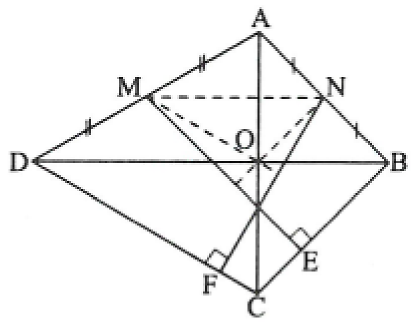
$\Rightarrow MN // BD$ và $OA \perp MN$ (vì $OA \perp BD$).

Xét ΔABC có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BC$ và $ON \perp ME$ (vì $ME \perp BC$).

Xét ΔACD có OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM // CD$ và $OM \perp NF$ (vì $NF \perp CD$).



Hình 3.7

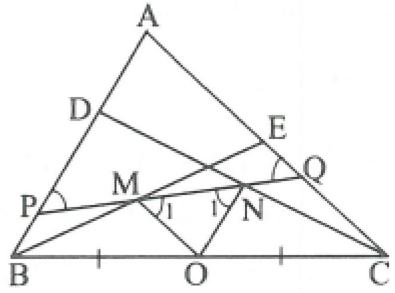
Xét ΔOMN có OA, ME, NF là ba đường cao nên chúng đồng quy.

3.2. (h.3.8)

Gọi O là trung điểm của BC.

Xét ΔEBC có OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM // CE$ và $OM = \dfrac{CE}{2}$.



Hình 3.8

Xét ΔDBC có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BD$ và $ON = \dfrac{BD}{2}$.

Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{AQP}, \widehat{N_1} = \widehat{APQ}$ (so le trong).

ΔAPQ cân tại $A \Leftrightarrow \widehat{Q} = \widehat{P} \Leftrightarrow \widehat{N_1} = \widehat{M_1} \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow CE = BD$.

3.3. (h.3.9)

a) Gọi D và E thứ tự là giao điểm của AH và AK với đường thẳng BC.

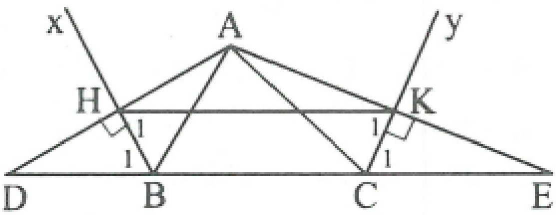
ΔABD có BH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên là tam giác cân $\Rightarrow HA = HD$.

Tương tự, ta có: $KA = KE$.

Xét ΔADE có HK là đường trung bình nên $HK // DE$

$\Rightarrow HK // BC.$

Do đó tứ giác $BCKH$ là hình thang.



Hình 3.9

b) Ta có: $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}; \widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong).

Hình thang $BCKH$ là hình thang cân $\Leftrightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_1} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

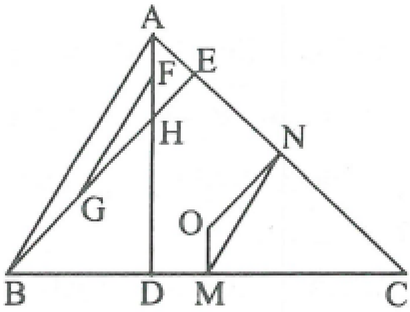
$\Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

3.4. (h.3.10)

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CA.

Gọi F và G lần lượt là trung điểm của AH và BH.

Ta có MN là đường trung bình của $\Delta ABC; FG$ là đường trung bình của ΔABH.



Hình 3.10

Suy ra $MN // AB$ và $MN = \dfrac{1}{2} AB$

$FG // AB$ và $FG = \dfrac{1}{2} AB$.

Do đó $MN // FG$ và $MN = FG$. Dễ thấy $OM // AD, ON // BE$.

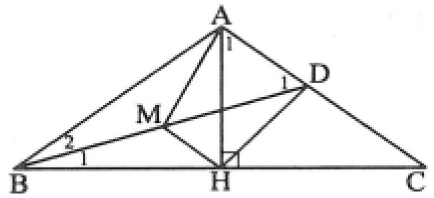
ΔOMN và ΔHFG có: $MN = FG; \widehat{OMN} = \widehat{HFG}; \widehat{ONM} = \widehat{HGF}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

Vậy $\Delta OMN = \Delta HFG(\text{g.c.g}) \Rightarrow OM = HF = \dfrac{AH}{2}$.

3.5. (h.3.11)

Gọi M là trung điểm của BD thì:

$MD = \frac{1}{2}BD = AH$.



Hình 3.11

ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên $HB = HC$.

Ta có HM là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow HM // AC$.

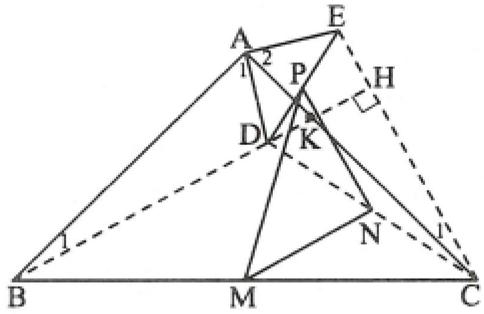
Hình thang $HMAD$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

$\Delta ADH = \Delta DAM\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \Leftrightarrow 90° - \widehat{C} = \widehat{B_1} + \widehat{C}$ (1)

Ta đặt $\widehat{B} = \widehat{C} = x$ thì $\left(1\right) \Leftrightarrow 90° - x = \frac{x}{2} + x \Leftrightarrow x = 36°$

Vậy ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 36°; \widehat{A} = 108°$.

3.6. (h.3.12)



Hình 3.12

ΔABD và ΔACE có:

$AB = AC; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với góc DAC);

$AD = AE$.

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACE\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow BD = CE$ và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Gọi H và K lần lượt là giao điểm của đường thẳng BD với CE và CA.

Ta có: $\widehat{B_1} + \widehat{BKA} = 90° \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{CKH} = 90° \Rightarrow \widehat{H} = 90°$.

Xét ΔCBD có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN // BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$

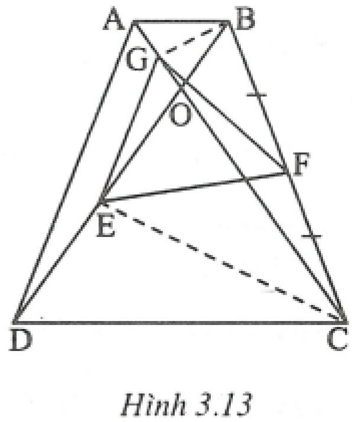
Xét ΔCED có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP//\text{CE}$ và $\text{NP}=\frac{1}{2}CE$.

Vì $BD = CE$ nên $MN = NP$.

Ta có: $\widehat{MNP} = \widehat{H} = 90°$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

Do đó ΔMNP vuông cân tại $N \Rightarrow \widehat{N} = 90°; \widehat{M} = \widehat{P} = 45°$.

3.7. (h.3.13)



Hình 3.13

ΔADC và ΔBCD có $AD = BC, AC = BD, CD$ chung.

Do đó $\Delta ADC = \Delta BCD\left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \Delta COD$ cân.

Mặt khác $\widehat{COD} = 60°$ nên ΔCOD đều.

Ta có: $OE = ED$ nên CE là đường trung tuyến của tam giác đều, do đó CE cũng là đường cao.

Vậy $CE \perp BD$.

Xét ΔEBC vuông tại E có EF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EF = \frac{1}{2}BC$.

Chứng minh tương tự, ta có: $GF = \frac{1}{2}BC$.

Xét ΔAOD có EG là đường trung bình nên $EG = \frac{1}{2}AD$

$\Rightarrow EG = \frac{1}{2}BC$ (vì $AD = BC$)

Vậy $EF = FG = EG\left(= \frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow \Delta GEF$ đều $\Rightarrow \widehat{G} = \widehat{E} = \widehat{F} = 60°$.

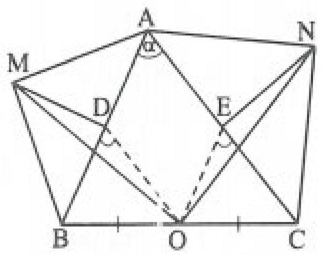
3.8. (h.3.14)

Gọi D và E thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Ta có OD và OE là đường trung bình của ΔABC nên $OE // AD$ và $OE = AD; OD // AE$ và $OD = AE$.

$\widehat{BDO} = \widehat{BAC}; \widehat{CEO} = \widehat{BAC}$ (đồng vị).

Vì ΔMAB vuông cân tại M nên $MD \perp AB$ và ΔMAD vuông cân $\Rightarrow AD = MD$.



Hình 3.14

Tương tự, $NE \perp AC$ và ΔNEA vuông cân $\Rightarrow AE = NE$.

ΔOMD và ΔNOE có:

$MD = OE(= AD); \widehat{ODM} = \widehat{OEN}\left(= 90° + \widehat{BAC}\right); OD = NE(= AE)$.

Vậy $\Delta OMD = \Delta NOE(c.g.c) \Rightarrow OM = ON$ và $\widehat{OMD} = \widehat{NOE}$.

Do đó $\widehat{MON} = \widehat{MOD} + \widehat{DOE} + \widehat{NOE} = \widehat{MOD} + \widehat{BDO} + \widehat{OMD} = 180° - 90° = 90°$.

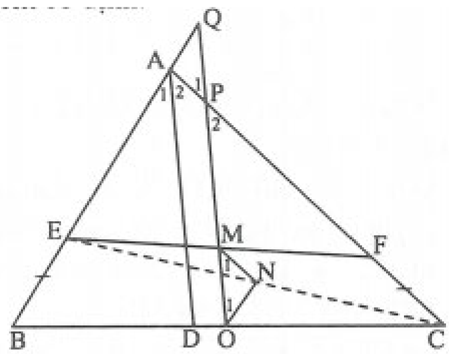
Vậy ΔMON vuông cân.

3.9. (h.3.15)

Vẽ đường phân giác AD thì AD là một đường thẳng cố định.

Gọi O là trung điểm của BC thì O là một điểm cố định.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng OM với các đường thẳng AC và AB.



Hình 3.15

Xét ΔEBC có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BE$ và $ON = \frac{1}{2}BE$.

Xét ΔECF có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN // CF$ và $MN = \frac{1}{2}CF$.

Vì $BE = CF$ nên $ON = MN \Rightarrow \Delta OMN$ cân $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{O_1}$.

Ta có $\widehat{P_1} = \widehat{M_1}\left(= \widehat{P_2}\right); \widehat{Q} = \widehat{O_1} \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{Q}$.

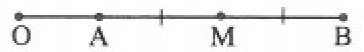
Xét ΔAPQ có $\widehat{BAC}$ là góc ngoài nên $\widehat{BAC} = \widehat{P_1} + \widehat{Q}$.

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{P_1} \Rightarrow OP // AD$.

Vậy M nằm trên một đường thẳng đi qua O và song song với AD. Đó là một đường thẳng cố định.

3.10. Gọi M là trung điểm của AB và O là một điểm tùy ý không nằm giữa A và B.

- Trường hợp O nằm trên tia đối của tia AB hay tia đối của tia BA (h.3.16), ta chứng minh được $OM = \dfrac{OA + OB}{2}$. $\quad (1)$



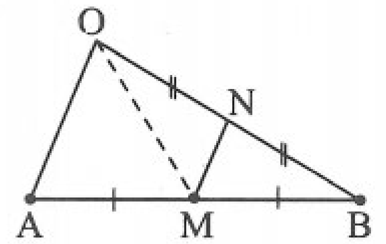
Hình 3.16

- Trường hợp O không thẳng hàng với A và B (h.3.17).

Gọi N là trung điểm của OB, khi đó MN là đường trung bình của $\Delta OAB, MN = \dfrac{OA}{2}$.

Xét ΔOMN, ta có: $OM < MN + ON$

$\Rightarrow OM < \dfrac{OA + OB}{2}$. $\quad (2)$



Từ (1) và (2) suy ra: $OM \le \dfrac{OA + OB}{2}$. $\quad (*)$

Áp dụng hệ thức $(*)$ đối với n điểm $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ta có:

$$O_1M \le \frac{O_1A + O_1B}{2}; O_2M \le \frac{O_2A + O_2B}{2}; \ldots; O_nM \le \frac{O_nA + O_nB}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$O_1M + O_2M + \ldots O_nM \le \frac{O_1A + O_1B}{2} + \frac{O_2A + O_2B}{2} + \ldots + \frac{O_nA + O_nB}{2}$$

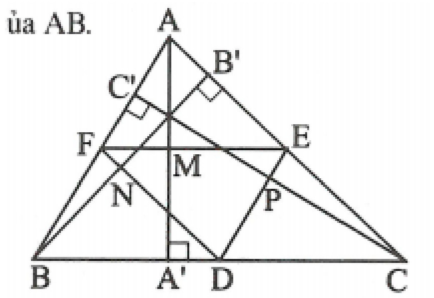
$$= \frac{O_1A + O_2A + \ldots + O_nA}{2} + \frac{O_1B + O_2B + \ldots + O_nB}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Như vậy điểm cần tìm chính là trung điểm M của AB.

3.11. (h.3.18)

Vì AA', BB', CC' là ba đường cao của ΔABC. Gọi M, N, P là trung điểm của các đường cao đó. Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm của BC, CA và AB.

Ta có: EF, FD, DE là các đường trung bình của ΔABC



Hình 3.18

$\Rightarrow EF//BC, FD//CA, DE//AB.$

Vì M là trung điểm của AA' nên $M \in FE$.

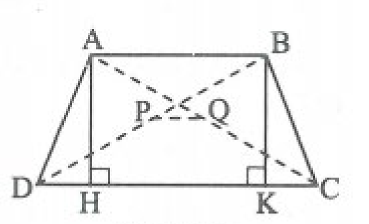
Vì N là trung điểm của BB' nên $N \in FD$. Vì P là trung điểm của CC' nên $P \in DE$.

Theo đề bài ra, ba điểm M, N, P thẳng hàng nên các điểm này chỉ có thể nằm trên một trong các cạnh DE, DF hoặc EF của ΔDEF.

- Nếu ba điểm M, N, P cùng nằm trên DE thì N trùng với D, M trùng với E, khi đó ΔABC vuông tại C, trái với giả thiết góc C là góc nhỏ nhất của ΔABC
- Nếu ba điểm M, N, P cùng nằm trên DF thì cũng lập luận như trên, ΔABC vuông tại B, trái với giả thiết $\widehat{B} \le \widehat{A}.$
- Vậy ba điểm M, N, P cùng nằm trên EF.

Lập luận tương tự như trên ta được ΔABC vuông tại A

3.12. (h.3.19)



Hình 3.19

a) Vẽ $BK \perp CD$ ta được $AH//BK$ và $AB//HK$

$\Rightarrow AB = HK$.

$\Delta ADH = \Delta BCK \Rightarrow HD = KC.$

Ta có: $HD + KC = CD - HK \Leftrightarrow 2HD = CD - AB$

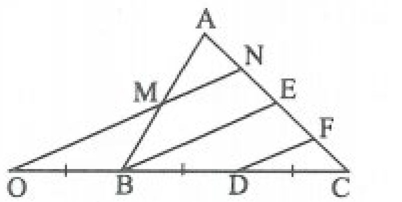
$\Leftrightarrow HD = \dfrac{CD - AB}{2}.$

Theo ví dụ 4 thì đoạn thẳng PQ nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy. Vậy $HD = PQ$

b) Ta có: $HC = CD - HD = CD - \dfrac{CD - AB}{2} = \dfrac{CD + AB}{2}.$

Đường trung bình của hình thang bằng nửa tổng hai đáy. Do đó HC bằng độ dài đường trung bình của hình thang.

3.13. (h.3.20)



Hình 3.20

Gọi D là trung điểm của BC.

Vẽ $BE//ON, DF//ON\left(E, F \in AC\right)$.

Ta có: $OB = BD = DC = \dfrac{1}{2}BC.$

- Xét ΔABE có $MN//BE$ và $MA = MB$ nên $NA = NE.$ $\quad (1)$
- Xét hình thang $ONFD$ có $BE//ON$ và $OB = BD$ nên $NE = EF.$ $\quad (2)$
- Xét ΔCBE có $DF//BE$ và $BD = DC$ nên $EF = FC.$ $\quad (3)$

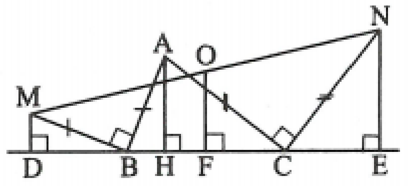
Từ $(1), (2), (3)$ suy ra: $AN = NE = EF = FC$, do đó $AN = \dfrac{1}{4}AC.$

3.14. (h.3.21)

Gọi O là trung điểm của MN.

Vẽ $OF \perp BC; AH \perp BC; MD \perp BC$ và $NE \perp BC$.

Ta có: $OF//AH//MD//NE$.



Hình 3.21

$\Delta BMD = \Delta ABH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MD = BH$ và $BD = AH$. $\quad (1)$

Tương tự, $\Delta CNE = \Delta ACH$

$\Rightarrow NE = CH$ và $CE = AH$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BD = CE (= AH)$.

Dễ thấy OF là đường trung bình của hình thang $MDEN$

$\Rightarrow OF = \dfrac{MD + NE}{2} = \dfrac{BH + CH}{2} = \dfrac{BC}{2}$ (không đổi).

Ta có: $FD = FE; BD = CE \Rightarrow FB = FC$.

Vậy O nằm trên đường trung trực của BC và cách BC một khoảng không đổi là $\dfrac{BC}{2}$. Do đó O là một điểm cố định.

Suy ra MN đi qua một điểm cố định là điểm O.

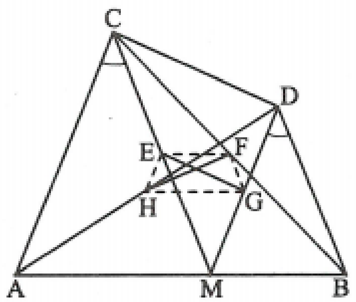
3.15. (h.3.22)

*** Tìm hướng giải**

Điều phải chứng minh là $HF = \dfrac{1}{2}CD$ gợi ý cho ta nghĩ đến định lí đường trung bình của tam giác. Ta vẽ đường trung bình EG của ΔMCD thì $EG = \dfrac{1}{2}CD$. Chỉ còn phải chứng minh $HF = EG$.

*** Trình bày lời giải**

Gọi E là trung điểm của CM, G là trung điểm của DM. Khi đó EG là đường trung bình của $\Delta MCD \Rightarrow EG = \dfrac{1}{2}CD. \quad (1)$



Hình 3.22

ΔCAM và ΔDBM cân tại C và D mà $\widehat{C} = \widehat{D}$ nên các góc ở đáy của chúng bằng nhau:

$\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = \widehat{DMB} = \widehat{DBM}$.

$\Rightarrow CA//DM$ và $CM//DB$ (vì có các cặp góc đồng vị bằng nhau).

Xét ΔCMB có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF//MB$.

Xét ΔDAM có HG là đường trung bình $\Rightarrow HG//AM$.

Suy ra: $EF//HG$ (vì cùng song song với AB). Vậy tứ giác $EFGH$ là hình thang.

Xét hình thang $ACDM$ có EH là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo nên $EH//AC$.

Tương tự, xét hình thang $CDBM$ có: $FG//DB$.

Do đó $\widehat{EHG} = \widehat{CAM}, \widehat{FGH} = \widehat{DBM}$.

Mặt khác $\widehat{CAM} = \widehat{DBM}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{EHG} = \widehat{FGH}$.

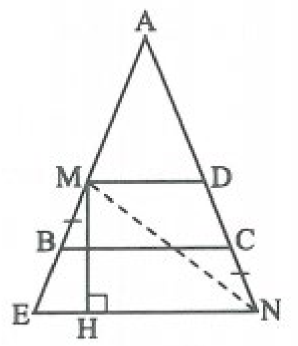
Vậy hình thang $EFGH$ là hình thang cân $\Rightarrow HF = EG.$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $HF = \frac{1}{2}CD$.

3.16. (h.3.23)

Vẽ ΔABC cân tại A.

Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN.$



Hình 3.23

Như vậy $AB + AC = AM + AN.$ $\quad (1)$

Ta phải chứng minh chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔAMN.

Muốn vậy ta phải chứng minh $BC < MN$.

Ta vẽ $MD//NE//BC$ ($D \in AC, E \in$ tia đối của tia BA).

Hình thang $MDCB$ là hình thang cân $\Rightarrow MB = DC$, mà $BM = CN$ và $DC = CN$.

Xét hình thang cân $MDNE$ có $BC//NE$ và $DC = CN$ nên $MB = BE$.

Vậy BC là đường trung bình của hình thang $MDNE$.

Vẽ $MH \perp EN$ thì $HN = BC$ (xem bài 3.12).

Xét ΔMHN vuông tại H có $HN < MN \Rightarrow BC < MN.$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi $\Delta AMN.$

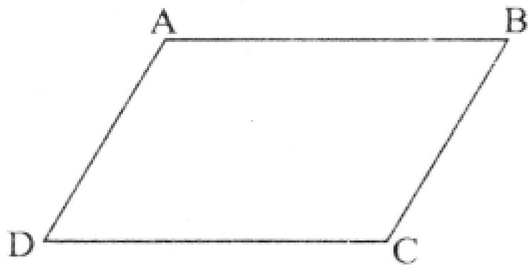
Chuyên đề 4

HÌNH BÌNH HÀNH

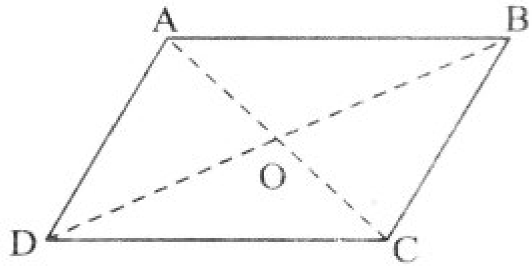
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song (h.4.1).



Hình 4.1



Hình 4.2

2. Tính chất

Trong hình bình hành (h.4.2):

- Các cạnh đối bằng nhau;
- Các góc đối bằng nhau;
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành;
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành;
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành;
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành;
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

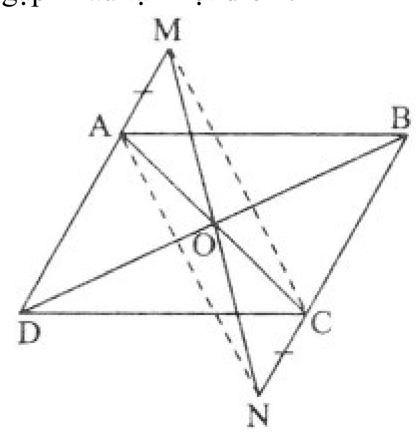
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình bình hành ACBD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AC, BD gặp nhau tại một điểm.

Giải (h.4.3)

*** Tìm cách giải**

AC và BD là hai đường chéo của hình bình hành ABCD nên chúng cắt nhau tại trung điểm O của AC. Ta còn phải chứng minh MN đi qua O. Muốn vậy chỉ cần chứng minh AMCN là hình bình hành để suy ra đường chéo MN đi qua trung điểm O của AC.



Hình 4.3

*** Trình bày lời giải**

Tứ giác: AMCN có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo MN và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Vậy các đường thẳng MN, BD và AC cùng đi qua trung điểm O của AC.

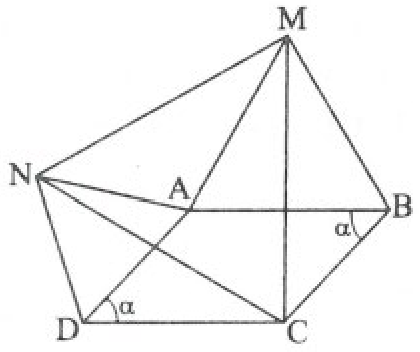
Nhận xét: Hai hình bình hành AMCD và ABCD có chung đường chéo AC thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các tam giác đều ABM và AND. Chứng minh rằng tam giác CMN là tam giác đều.

Giải (h4.4)

*** Tìm cách giải**

Đề bài cho hình bình hành và các tam giác đều nên có nhiều đoạn thẳng bằng nhau, nhiều góc bằng nhau. Do đó có thể nghĩ đến việc chứng minh tam giác bằng nhau.



Hình 4.4

*** Trình bày lời giải**

Ta đặt: $\widehat{ABC} = \alpha$ thì $\widehat{ADC} = \alpha; \widehat{BAD} = 180° - \alpha;$

$\widehat{MAN} = 360° - (60° + 60° + 180° - \alpha) = 60° + \alpha.$

ΔMAN và ΔCDN có:

$AM = DC(= AB); \widehat{MAN} = \widehat{CDN}(= 60° + \alpha); AN = DN.$

Do đó: $\Delta MAN = \Delta CDN(c.g.c) \Rightarrow MN = CN.(1)$

Chứng minh tương tự, ta được: $\Delta MAN = \Delta MBC(c.g.c) \Rightarrow MN = MC.(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $MN = CN = MC$. Vậy ΔCMN đều.

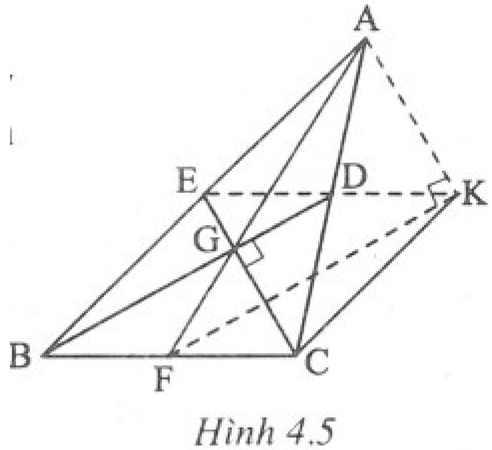
Nhận xét: Việc đặt $\widehat{ABC} = \alpha$ là một kỹ thuật giúp ta tính toán và so sánh góc được nhanh chóng, tiện lợi.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tổng các bình phương của hai đường trung tuyến này bằng bình phương đường trung tuyến thứ ba.

Giải (h4.5)

*** Tìm cách giải**

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta vận dụng định lý Py-ta-go. Muốn vậy phải vẽ đường phụ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng ba đường trung tuyến.



Hình 4.5

*** Trình bày lời giải**

Giả sử tam giác ABC là tam giác có ha đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Ta phải chứng minh $BD^2 + CE^2 = AF^2$ (AF là đường trung tuyến thứ ba).

Trên tia ED lấy điểm K sao cho D là trung điểm của EK. Tứ giác AKCE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$\Rightarrow AK \parallel CE$ và $AK = CE$.

Ta có: $DE \parallel BC$ và $DE = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow DK \parallel BF$ và $DK = BF$.

Vậy tứ giác DKFB là hình bình hành $\Rightarrow KF \parallel BD$ và $KF = BD$.

Mặt khác, $BD \perp CE$ nên $AK \perp KF$.

Do đó ΔKAF vuông tại $A \Rightarrow AK^2 + KF^2 = AF^2 \Rightarrow CE^2 + BD^2 = AF^2$.

C. Bài tập vận dụng

- **Tính chất hình bình hành**

4.1. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác ABD và tam giác ACE vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MA và BC vuông góc với nhau.

4.2. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM vuông cân tại A, tam giác BCN vuông cân tại C. Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

4.3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $\dfrac{3}{2}\left(HA + HB + HC\right)$.

4.4. Cho hình thang cân $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ và một điểm O ở trong hình này. Chứng minh rằng có một tứ giác mà bốn cạnh lần lượt bằng OA, OB, OC, OD và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình thang cân.

4.5. Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không cắt các cạnh của hình bình hành. Qua các đỉnh A, B, C, D vẽ các đường thẳng vuông góc với xy, cắt xy lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

4.6. Cho hình bình hành $ABCD\left(AD < AB\right)$. Vẽ ra ngoài hình bình hành tam giác ABM cân tại B và tam giác ADN cân tại D sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ADN}$.

a) Chứng minh rằng $CM = CN$;

b) Trên AC lấy một điểm O. Hãy so sánh OM với ON.

4.7. Cho tam giác ABC cân tại A, $AB < BC$. Trên tia AB có điểm D, trên tia CA có điểm E sao cho $AD = DE = EC = CB$. Tính các góc của tam giác ABC.

- **Nhận biết hình bình hành**

4.8. Chứng minh rằng trong một tứ giác, đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối diện gặp nhau tại một điểm (định lí Giéc-Gôn, nhà Toán học Pháp).

4.9. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, NB, MC, MD. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, EF, GH đồng quy.

4.10. Cho đoạn thẳng PQ và một điểm A ở ngoài đường thẳng PQ. Vẽ hình hình hành ABCD có đường chéo $BD \parallel PQ$ và $BD = PQ$. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng BC và CD luôn đi qua một điểm cố định.

4.11. Trong tất cả các tứ giác với hai đường chéo có độ dài m và n cho trước và góc xen giữa hai đường chéo có độ lớn α cho trước hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

- **Dựng hình bình hành**

4.12. Cho tam giác ABC. Dựng điểm $M \in AB$, điểm $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$ và $BM = AN$.

4.13. Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí các điểm A và vị trí các trung điểm M, N của BC và CD.

4.14. Cho trước hai điểm A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d. Một đoạn thẳng CD có dộ dài a cho trước nằm trên đường thẳng d. Hãy xác định vị trí của điểm C và D để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

4.15. Hai điểm dân cư A và B ở hai bên một con sông có hai bờ d và d'. Chiều rộng con sông bằng a. Hãy tìm địa điểm bắc cầu sao cho quãng đường từ A sang B là ngắn nhất (cầu vuông góc với bờ sông).

Hướng dẫn giải

4.1. (h.4.6)

Vẽ hình bình hành DAEF. Khi đó AF đi qua M.

Gọi H là giao điểm của MA với BC.

Ta có: $EF = AD = AB.$

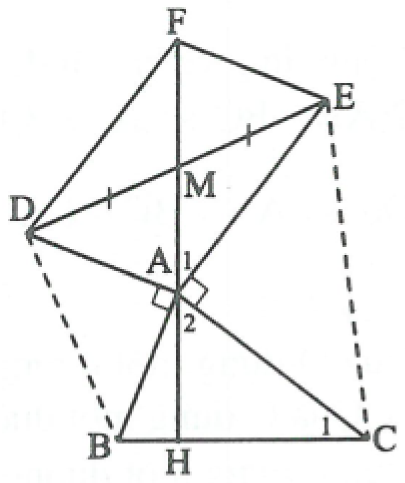
$\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 180^\circ$ mà $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$ nên

$\widehat{AEF} = \widehat{BAC}.$

$\Delta AEF = \Delta CAB\left(g.c.g\right) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}.$

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ.$

Do đó: $MA \perp BC.$



Hình 4.6

4.2. (h.4.7)

Ta đặt $\widehat{ADC} = \alpha$ thì $\widehat{DAM} = 90^\circ + \alpha; \widehat{NCD} = 90^\circ + \alpha.$

ΔDAM và ΔNCD có:

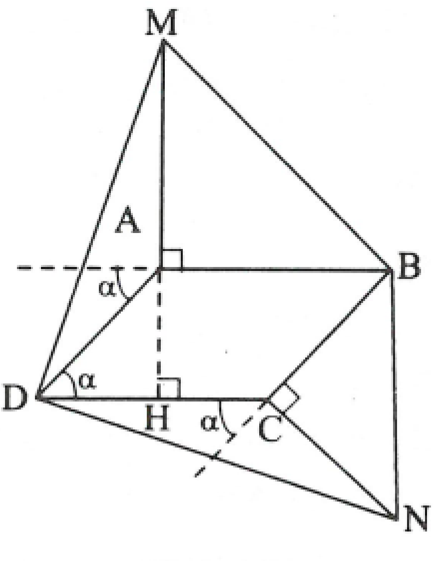
$AM = CD\left(= AB\right); \widehat{DAM} = \widehat{NCD}\left(= 90^\circ + \alpha\right);$

$AD = CN\left(= BC\right).$

Do đó $\Delta DAM = \Delta NCD\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow DM = DN$ (1)

và $\widehat{DMA} = \widehat{NDC}.$



Hình 4.7

Kéo dài MA cắt CD tại H. Ta có:

$MA \perp AB \Rightarrow MH \perp CD.$

Xét ΔMDH có $\widehat{DMA}+\widehat{ADM}+\alpha=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NDC}+\widehat{ADM}+\alpha=90^\circ$

Hay $\widehat{MDN}=90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔDMN vuông cân tại D

4.3. (H.4.8)

Vẽ $HM \parallel AC\left(M \in AB\right), HN \parallel AB\left(N \in AC\right)$.

Vì $CH \perp AB$ nên $CH \perp HN$. Vì $BH \perp AC$ nên $BH \perp HM$.

Xét ΔHBM vuông tại H có $BM > HB.$ (1)

Xét ΔHCN vuông tại H có $CN > HC$. (2)

Xét hình bình hành ANHM có

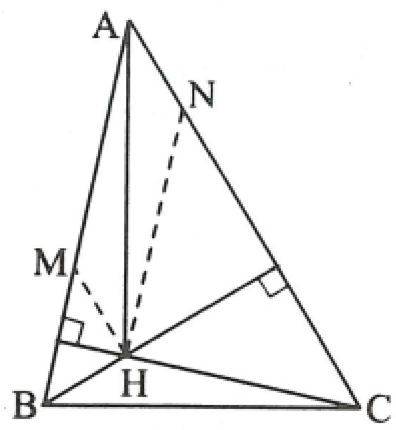
$AM + AN = AM + MH > HA..$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$BM + CN + AM + AN > HB + HC + HA$

do đó $\left(MB + AM\right)+\left(CN + AN\right) > HA + HB + HC$

hay $AB + AC > HA + HB + HC.$



Hình 4.8

Chứng minh tương tự, ta được: $BC + BA > HA + HB + HC$

$CA + CB > HA + HB + HC.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$2\left(AB + BC + CA\right) > 3\left(HA + HB + HC\right)$

Do đó $AB + BC + CA > \frac{3}{2}\left(HA + HB + HC\right).$

4.4. (h.4.9)

Qua O dựng một đường thẳng song song với BC cắt AB và CD lần lượt tại E và G. Qua O dựng một đường thẳng song song với CD cắt AD tại H.

Qua E dựng một đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Khi đó tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.

Thật vậy, các tứ giác AEOH, HOGD là những hình thang cân.

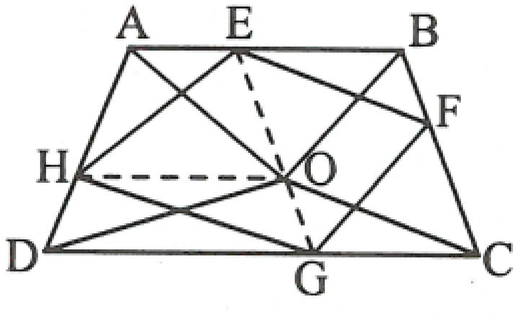
$\Rightarrow OA = EH; OD = HG.$ (1)

Tứ giác EFCO là hình bình hành $\Rightarrow OC = EF$ (2)

và $OE = CF$. Suy ra $OG = BF$

Vậy tứ giác OBFG là hình bình hành $\Rightarrow OB = GF$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.



Hình 4.9

4.5. (h.4.10)

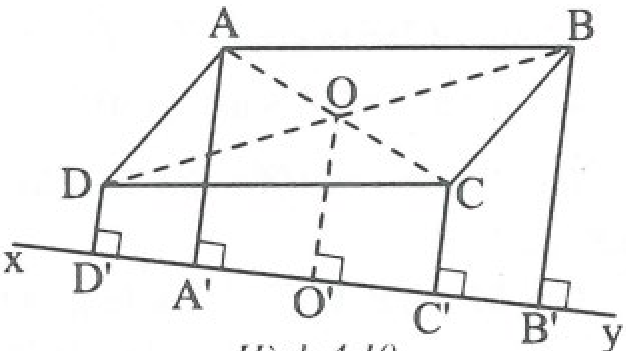
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ $OO' \perp xy$.

Ta có: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel OO'$.

Xét hình thang $AA'C'C$ có $OA = OC$

và $OO' \parallel AA'$ nên $O'A' = O'C'$.

Do đó OO' là đường trung bình của



Hình 4.10

hình thang $AA'C'C \Rightarrow OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$ hay $AA' + CC' = 2OO'$.

Xét hình thang $DD'B'B$, cũng chứng minh tương tự, ta có: $BB' + DD' = 2OO'$.

Từ đó suy ra: $AA' + CC' = BB' + DD'$.

4.6. (h.4.11)

a) Vì ABCD là hình bình hành nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

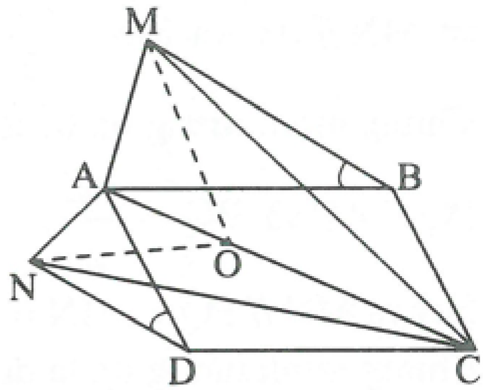
Ta đặt $\widehat{ABC} = m°, \widehat{ABM} = n°,$ khi đó

$\widehat{MBC} = \widehat{CDN} = m° + n°$

ΔMBC và ΔCDN có:

$MB = CD\left(= AB\right); \widehat{MBC} = \widehat{CDN}$ (chứng minh trên);

$BC = DN\left(= AD\right)$. Vậy $\Delta MBC = \Delta CDN\left(c.g.c\right) \Rightarrow CM = CN$.



Hình 4.11

b) Các ΔABM và ΔAND là những tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau mà $AB > AD$ nên $AM > AN$ (bạn đọc tự chứng minh)

Xét ΔACM và ΔCAN có $CM = CN$; CA chung và $AM > AN$ nên $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$.

Xét ΔOCM và ΔOCN có $CM = CN$; CO chung và $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$ nên $OM > ON$.

4.7. (h.4.12)

Vẽ hình bình hành BDEF thì $EF = BD\left(1\right); ED = FB$.

Ta có: $AD = CE; AB = AC \Rightarrow BD = EA.\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = EA$.

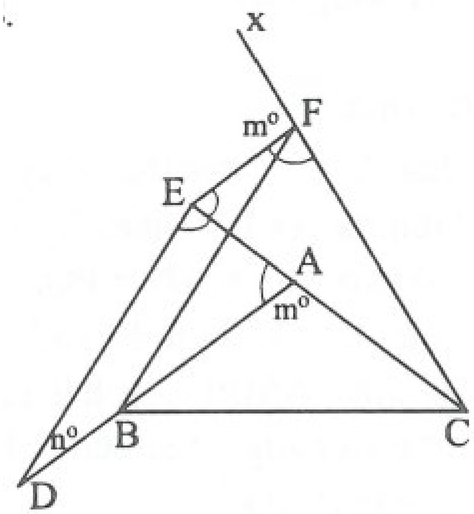
Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{DAE}$ (so le trong);

$\widehat{DEA} = \widehat{DAE}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân).

Suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{DEA}$.

$\Delta CEF = \Delta DEA\left(c.g.c\right) \Rightarrow CF = AD$.

Từ đó suy ra: $BF = CF = BC \Rightarrow \Delta FBC$ đều.



Hình 4.12

Ta đặt $\widehat{BAC} = m°, \widehat{ADE} = n°$.

Vẽ tia Fx là tia đối của tia FC.

Vì $\widehat{CFE} = \widehat{DAE}$ nên $\widehat{EFx} = \widehat{BAC} = m°$.

Ta có: $\widehat{BFx} = 120°$ hay $m° + n° = 120°$. (*)

Trong ΔCEF ta có $\widehat{ECF} = \widehat{D} = n°$; $\widehat{CFE} = \widehat{CEF} = 60° + n°$.

Do đó: $n° + (60° + n°) + (60 + n°) = 180° \Rightarrow 3n° = 60° \Rightarrow n° = 20°$.

Từ $(*) \Rightarrow m° = 100°$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$.

4.8. (h.4.13)

Gọi M, N, P, Q, E. F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD. Ta phải chứng minh MP, NQ và EF cùng đi qua một điểm.

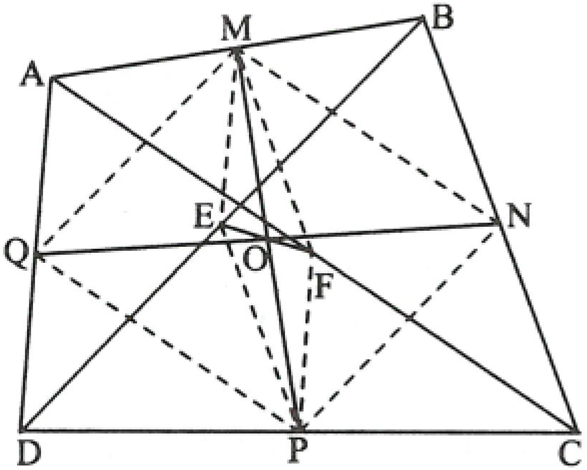
Xét ΔABC có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{AC}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$PQ \parallel AC$ và $PQ = \dfrac{AC}{2}$.

Suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$. Do đó tứ giác MNPQ là hình bình hành.



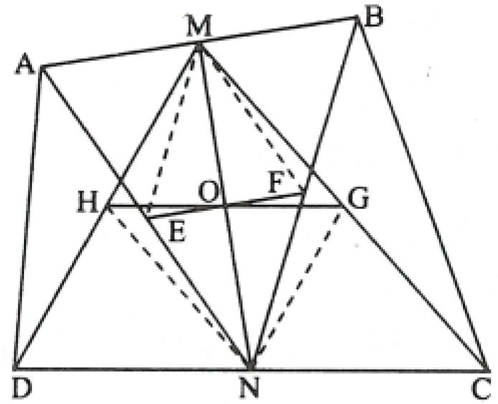
Hình 4.13

Chứng minh tương tự, ta được tứ giác MEPF là hình bình hành.

Hai hình bình hành MNPQ và MEPF có chung đường chéo MP nên các đường chéo MP, NQ và EF đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

4.9. (h.4.14)

Bạn chứng minh tứ giác MGNH và MFNE là hình bình hành.Hai hình bình hành này có chung đường chéo MN nên các đường chéo MN, EF và GH đồng quy.



Hình 4.14

4.10. (h.4.15)

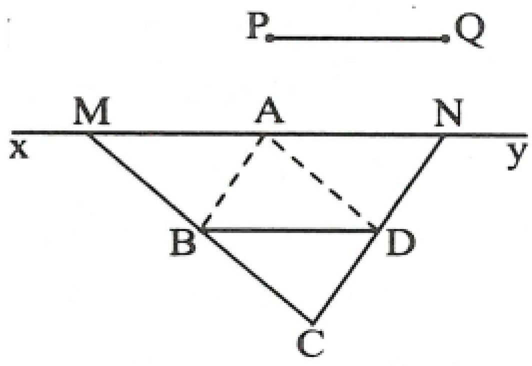
Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel PQ$.

Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = PQ$.

Như vậy các điểm M và N cố định.

Tứ giác AMBD có hai cạnh đối diện song song và bằng nhau nên là hình bình hành $\Rightarrow BM \parallel AD$.

Mặt khác, $BC \parallel AD$ nên ba điểm B, M, C thẳng hàng (tiên đề Ơ-clit)



Hình 4.15

Do đó đường thẳng BC đi qua điểm cố định M.

Chứng minh tương tự, ta được đường thẳng CD đi qua điểm cố định N.

4.11. (h.4.16)

Xét tứ giác ABCD có $AC = m, BD = n$ và $\widehat{BOC} = \alpha$.

Vẽ hình bình hành ADBE và vẽ hình bình hành CAEF.

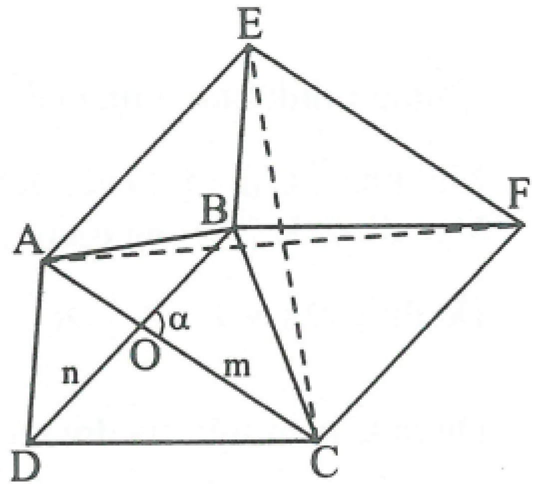
Khi đó: $EF = AC = m; CF = AE = BD = n;$

$\widehat{EAC} = \widehat{BOC} = \alpha.$

Như vậy hình bình hành CAEF hoàn toàn được xác định, do đó hai đường chéo AF và CE không đổi.

Dễ thấy tứ giác BFCD là hình bình hành $\Rightarrow BF = CD$.

Chu vi tứ giác ABCD là:



Hình 4.16

$(AB + CD) + (BC + AD) = (AB + BF) + (BC + BE) \ge AF + CE.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, F & \text{thẳng hàng} \\ C, B, E & \text{thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Vậy chu vi của tứ giác ABCD nhỏ nhất khi và chỉ khi ABCD là hình bình hành.

4.12. (h.4.17)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được $MN \parallel BC$ sao cho $BM = AN$.

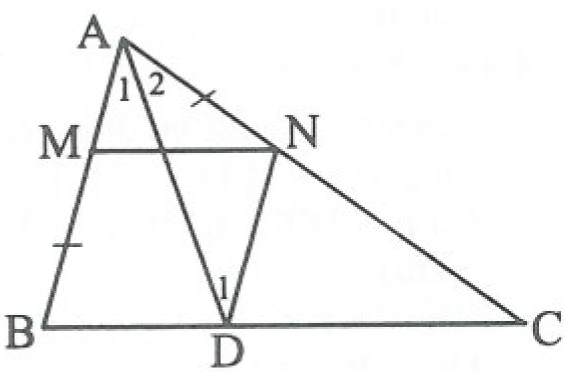
Vẽ $ND \parallel AB \left(D \in BC\right)$

Tứ giác MNDB là hình bình hành

$\Rightarrow DN = BM$ mà $BM = AN$ nên $DN = AN \Rightarrow$

ΔNAD cân $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D_1}$.

Mặt khác, $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (so le trong) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.



Hình 4.17

Do đó AD là đường phân giác của góc A.

Điểm D dựng được suy ra các điểm N và M cũng dựng được.

b) Cách dựng

- Dựng đường phân giác AD của tam giác ABC.
- Dựng $DN \parallel AB\left(N \in AC\right)$.
- Dựng $NM \parallel BC\left(M \in AB\right)$.

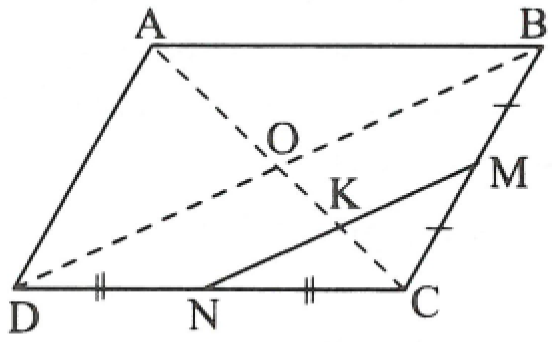
Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

4.13. (h.4.18)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình bình hành thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và K là giao điểm của MN và AC.



Hình 4.18

Xét ΔCBD có MN là đường trung bình, $MN \parallel BD$.

Xét ΔCOB có $MB = MC$ và $MK \parallel OB$ nên $CK = KO$.

Vậy MK là đường trung bình nên $MK = \frac{1}{2}OB$.

Chứng minh tương tự, ta được $KN = \frac{1}{2}OD$.

Mặt khác, $OB = OD$ nên $KM = KN$.

Vậy điểm K là trung điểm của MN xác định được.

Dễ thấy $OK = KC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA \Rightarrow KC = \frac{1}{4}AC$ suy ra $KC = \frac{1}{3}KA$.

Điểm C nằm trên tia đối của tia KA và cách K một khoảng $\frac{1}{3}AK$.

Điểm C xác định được thì các điểm B và D cũng xác định được.

b) Cách dựng

- Dựng đoạn thẳng MN.
- Dựng trung điểm K của MN.
- Dựng tia AK.
- Trên tia đối của tia KA dựng điểm C sao cho $KC = \frac{1}{3}KA$.
- Dựng điểm B sao cho M là trung điểm của CB.
- Dựng điểm D sao cho N là trung điểm của CD.
- Dựng các đoạn thẳng AB, AD ta được hình bình hành phải dựng.

Bạn đọc giải tiếp các bước còn lại.

4.14. (h.4.19)

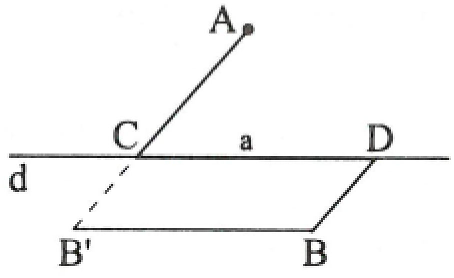
Giả sử đã xác định được vị trí của C và $D \in d$ để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất. Vẽ hình bình hành $CDBB'$ (chú ý CD và BB' ngược chiều nhau).

Khi đó $BB' = CD = a$ (không đổi); $DB = CB'$.

Điểm B' cố định.

Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC + DB$ nhỏ nhất (vì $CD = a$ không đổi).

$\Leftrightarrow AC + CB'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, C, B'$ thẳng hàng.



Hình 4.19

Từ đó ta xác định điểm $C \in d$ như sau:

- Qua B vẽ một đường thẳng song song với d, trên đó lấy B' sao cho $BB' = a$ (BB' ngược chiều với CD)
- Lấy giao điểm C của $B'A$ và d
- Lấy $D \in d$ sao cho $CD = a$ (CD và BB' ngược chiều)

Khi đó tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

4.15. (h.4.20)

Giả sử đã xác định được vị trí CD của cầu $\left(C \in d; D \in d'\right)$ sao cho tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Vẽ hình bình hành $ACDA'$.

Ta có: $AC = A'D, AA' = CD = a$ và $AA' \perp d$.

Khi đó A' là một điểm cố định.

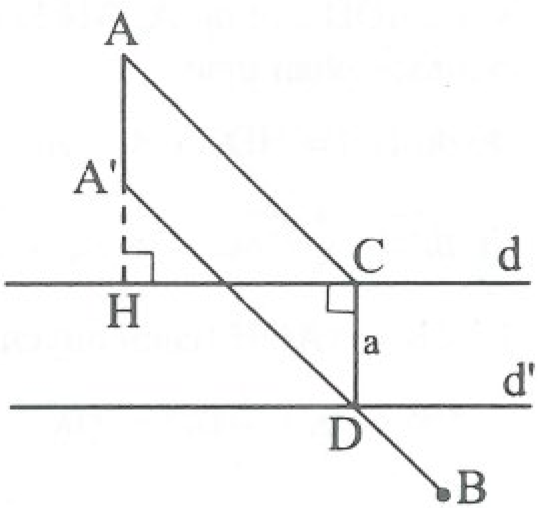
Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AC + DB$ nhỏ nhất (vì $CD = a$ không đổi)

$\Leftrightarrow A'D + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A', D, B$ thẳng hàng.

Từ đó ta xác định vị trí CD của cầu như sau:

- Vẽ $AH \perp d$
- Trên tia AH lấy A' sao cho $AA' = a$
- Lấy giao điểm D của $A'B$ và d'.
- Vẽ $DC \perp d \left(C \in d\right)$.



Hình 4.20

Khi đó $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

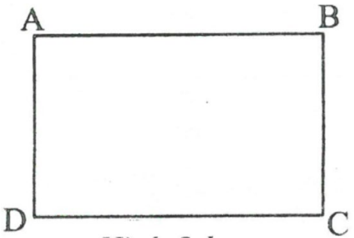
Chuyên đề 5.

HÌNH CHỮ NHẬT. TÍNH CHẤT CỦA CÁC ĐIỂM CÁCH ĐỀU MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

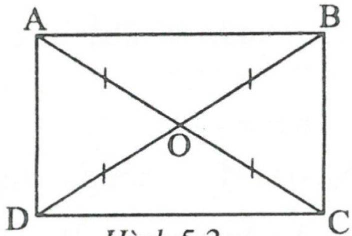
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông (h.5.1)



Hình 5.1



Hình 5.2

2. Tính chất

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (h.5.2).

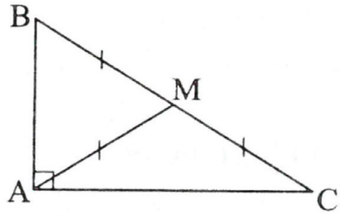
3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật;
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật;
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật;
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác (h.5.3)

$\Delta ABC:\ MB = MC$

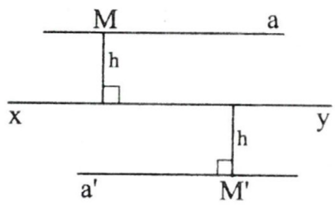
$\widehat{A} = 90° \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 5.3

5. Tính chất các điểm cách đều một đường thẳng cho trước (h.5.4)

Tập hợp các điểm cách đều một đường thẳng cố định một khoảng cách bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.



Hình 5.4

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy một điểm M. Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của N trên đường thẳng BC và CD. Chứng minh rằng ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Giải (h.5.5)

*** Tìm cách giải**

Xét ΔCAN, đường thẳng EF đi qua trung điểm của CN, muốn cho EF đi qua trung điểm M của AN ta cần chứng minh $EF\, //\, AC$.

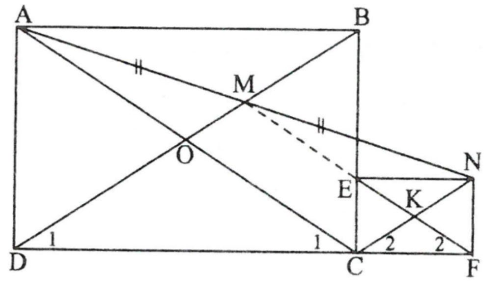
*** Trình bày lời giải**

Tứ giác $ENFC$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và K là giao điểm của EF và CN. Theo tính chất hình chữ nhật, ta có:

$OA = OB = OC = OD;$

$KC = KN = KE = FE.$



Hình 5.5

Xét ΔCAN có OM là đường trung bình nên $OM\, //\, CN$. Do đó $BD\, //\, CN$.

$\Delta OCD, \Delta KCF$ cân, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}, \widehat{C_2} = \widehat{F_2}.$

Mặt khác, $\widehat{D_1} = \widehat{C_2}$ (cặp góc đồng vị) nên $\widehat{C_1} = \widehat{F_2}$. Suy ra $AC\, //\, EF$.

Xét ΔCAN có đường thẳng EF đi qua trung điểm K của CN và $EF\, //\, AC$ nên EF đi qua trung điểm của AN, tức là đi qua M. Vậy ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Chứng minh rằng tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.

Giải (h.5.6)

*** Tìm cách giải**

Dễ thấy tứ giác $AKDH$ có hai góc vuông là $\widehat{H} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên chỉ cần chứng minh tứ giác này có một góc vuông nữa là thành hình chữ nhật.

*** Trình bày lời giải**

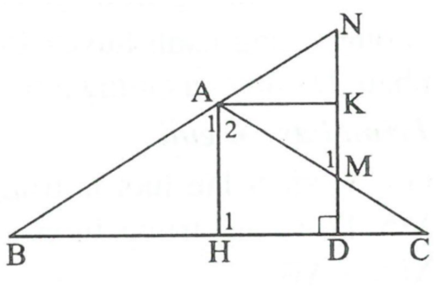
ΔABC cân tại A, AH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó: $\widehat{H_1} = 90^\circ$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$

Ta có: $AH\, //\, DN$ (vì cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A_1}$ (cặp góc đồng vị); $\widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ (cặp góc so le trong).

Do đó $\widehat{N} = \widehat{M_1}$ (vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$).



Hình 5.6

Vậy ΔAMN cân tại A mà AK là đường trung tuyến nên AK cũng là đường cao, $\widehat{K} = 90^\circ$. Tứ giác $AKDH$ có $\widehat{K} = \widehat{H} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh huyền BC lấy điểm D. Vẽ $DH \perp AB, DK \perp AC$. Biết $AB = a$, tính giá trị lớn nhất của tích $DH.DK$.

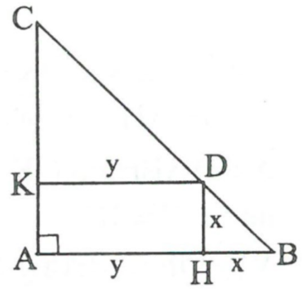
Giải(h.5.7)

*** Tìm cách giải**

Ta thấy $DH + DK = AB$ (không đổi). Dựa vào các hằng đẳng thức ta có thể tìm được mối quan hệ giữa tích $DH.DK$ với tổng $DH + DK$. Mối quan hệ này được biểu diễn như sau:

Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$



Hình 5.7

*** Trình bày lời giải.**

Tứ giác $AHDK$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Tam giác HBD có $\widehat{H} = 90°; \widehat{B} = 45°$ nên là tam giác vuông cân. Ta đặt: $DH = x, DK = y$ thì $HB = x, AH = y$ và $x + y = a$.

Ta có: $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $DH.DK$ là $\dfrac{a^2}{4}$ khi D là trung điểm của BC.

Ví dụ 4: Cho hình thang $ABCD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$. Trên cạnh AD có một điểm H mà $AH < DH$ và $\widehat{BHC} = 90°$. Chứng minh rằng trên cạnh AD còn một điểm K sao cho $\widehat{BKC} = 90°$.

Giải (h.5.8)

*** Tìm cách giải**

Giả sử đã chứng minh được $\widehat{BKC} = 90°$ thì ΔBHC và ΔBKC là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền BC nên hai đường trung tuyến ứng với BC phải bằng nhau. Do đó cần chứng minh hai đường trung tuyến này bằng nhau.

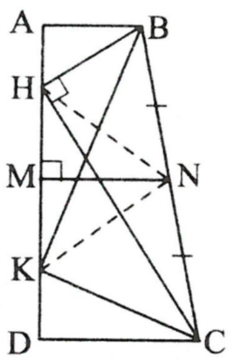
*** Trình bày lời giải**

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khi đó MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra:

$MN \,//\, AB$

$\Rightarrow MN \perp AD$ (vì $AB \perp AD$)

Trên cạnh AD lấy điểm K sao cho $DK = AH \Rightarrow MK = MH$. ΔNHK có NM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân $\Rightarrow KN = HN$.



Hình 5.8

Xét ΔHBC vuông tại H có $HN = \frac{1}{2}BC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền). Suy ra $KN = \frac{1}{2}BC$ (vì $KN = HN$).

Do đó ΔKBC vuông tại $K \Rightarrow \widehat{BKC} = 90°$.

Ví dụ 5: Cho đường thẳng xy. Một điểm A cố định nằm ngoài xy và một điểm B di động trên xy. Gọi O là trung điểm của AB. Hỏi điểm O di động trên đường nào?

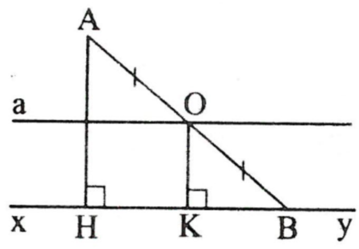
Giải (h.5.9)

Vẽ $AH \perp xy, OK \perp xy$.

Ta có: AH là một đoạn thẳng cố định. Xét ΔABH có $OK // AH$ và $OA = OB$ nên $KH = KB$.

Vậy OK là đường trung bình suy ra:

$OK = \frac{1}{2}AH$ (không đổi).



Hình 5.9

Điểm O cách đường thẳng xy cho trước một khoảng không đổi là $\frac{1}{2}AH$ nên điểm O di động trên đường thẳng $a // xy$ và cách xy là $\frac{AH}{2}$ (đường thẳng a và điểm A cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy).

C. Bài tập vận dụng

*** Tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật**

5.1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC. Vẽ $ME \perp AB, MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác DEF.

5.2. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

5.3. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 8, BC = 6$. Điểm M nằm trong hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

5.4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O là một giao điểm bất kì trong tam giác. Vẽ $OD \perp AB, OE \perp BC$ và $OF \perp CA$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = OD^2 + OE^2 + OF^2$

5.5. Cho hình chữ nhật $ABCD$, đường chéo $AC = d$. Trên các cạnh AB, BC, CD và DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$

5.6. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = CE$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài DE.

*** Tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông**

5.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M. Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$ và $AH \perp BC$. Tính số đo của góc DHE.

5.8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AD. Vẽ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HB và HC.

a) Chứng minh rằng $EM \,//\, FN \,//\, AD$;

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì ba đường thẳng $EM, FN.AD$ là ba đường thẳng song song cách đều.

5.9. Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB < AC\right)$, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi M là trung điểm của BD. Chứng minh rằng tia HM là tia phân giác của góc AHC.

5.10. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 15, BC = 8$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$.

*** Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước**

5.11. Cho góc xOy có số đo bằng $30°$. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 2cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 2BA$. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm C di động trên đường nào?

5.12. Cho góc xOy có số đo bằng $45°$. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 3\sqrt{2}cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy. Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm G di động trên đường nào?

5.13. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = CN$. Gọi O là trung điểm của MN. Hỏi điểm O di động trên đường nào?

5.14. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×6 cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 10 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn $2,3$.

5.15. Bên trong hình chữ nhật có kích thước 3×6 cho 8 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai trong số 8 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn $2,3$.

Hướng dẫn giải

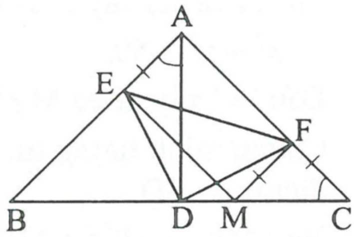
5.1. (h.5.10)

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật .

$\Rightarrow AE = MF$

Tam giác FMC vuông tại $F, \widehat{C} = 45°$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow CF = MF$. Do đó $AE = CF$.

Tam giác ABC vuông cân, AD là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác nên $AD = DC = \frac{1}{2}BC; \widehat{EAD} = \widehat{FCD} = 45°.$



Hình 5.10

$\Delta EDA = \Delta FDC\left(c.g.c\right) \Rightarrow DE = DF$ và $\widehat{EDA} = \widehat{FDC}$

Ta có: $\widehat{ADF} + \widehat{FDC} = 90° \Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{EDA} = 90°$ hay $\widehat{EDF} = 90°.$

Do đó ΔDEF vuông cân $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} = 45°; \widehat{EDF} = 90°.$

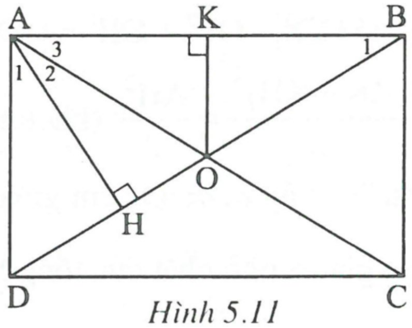
5.2. (h.5.11)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OA = OC$

Vì $AD = \frac{1}{2}AC$ nên $AD = AO$

Vẽ $AH \perp OD, OK \perp AB.$

Xét ΔAOD cân tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, cũng là đường phân giác.



Hình 5.11

Do đó $HO = HD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$ nên $\widehat{A_3} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$.

$\Delta AOK = \Delta AOH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \widehat{B_1} = 30°.$

Xét ΔABH vuông tại H có $\widehat{B_1} = 30°$ nên $\widehat{HAB} = 60°$ suy ra $\widehat{DAB} = 90°$.

Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

5.3. (h.5.12)

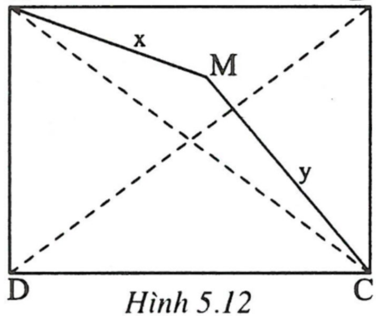
$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$

Ta đặt $MA = x, MC = y$.

Xét ba điểm M, A, C ta có: $MA + MC \geq AC$

do đó $x + y \geq 10 \Rightarrow \left(x + y\right)^2 \geq 100$ hay $x^2 + y^2 + 2xy \geq 100.$ (1)

Mặt khác, $\left(x - y\right)^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0.$ (2)



Hình 5.12

Từ (1) và (2) suy ra $2\left(x^2+y^2\right)\ge 100$

$\Rightarrow x^2+y^2\ge 50.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa A và C và $MA=MC \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AC.

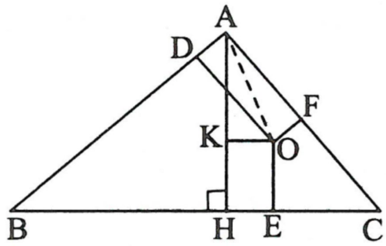
Chứng minh tương tự, ta được: $MB^2+MD^2\ge 50$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD.

Vậy $MA^2+MC^2+MB^2+MD^2\ge 100.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của tổng S là 100 khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

5.4. (h.5.13)

Vẽ $AH\perp BC, OK\perp AH$..


Hình 5.13

Tứ giác $ADOF$ và $KOEH$ là hình chữ nhật nên $OF=AD$ và $OE=KH$.

Xét ΔAOD vuông tại D, ta có

$OD^2+AD^2=OA^2\ge AK^2.$

Do đó $OD^2+OF^2+OE^2=OD^2+AD^2+OE^2\ge AK^2+KH^2$

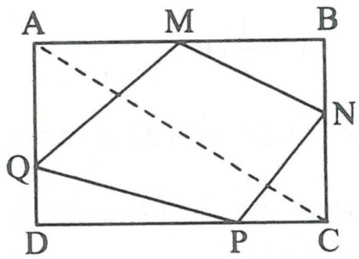
$\ge \dfrac{\left(AK+KH\right)^2}{2}=\dfrac{AH^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O$ nằm giữa A và H và $AK=KH \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là $\dfrac{AH^2}{2}$ khi O là trung điểm của AH.

5.5. (h.5.14)

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên


Hình 5.14

$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90°.$

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:

$MN^2=BM^2+BN^2; NP^2=CN^2+CP^2;$

$PQ^2=DP^2+DQ^2; QM^2=AQ^2+AM^2.$

Do đó: $S=MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2$

$$=\left(AM^2+BM^2\right)+\left(BN^2+CN^2\right)+\left(CP^2+DP^2\right)+\left(DQ^2+AQ^2\right)$$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi $a=b$), ta được:

$$S\ge\frac{\left(AM+BM\right)^2}{2}+\frac{\left(BN+CN\right)^2}{2}+\frac{\left(CP+DP\right)^2}{2}+\frac{\left(DQ+AQ\right)^2}{2}$$

$$=\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}+\frac{CD^2}{2}+\frac{AD^2}{2}=\frac{2\left(AB^2+BC^2\right)}{2}=AC^2=d^2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là d^2 khi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh hình chữ nhật.

5.6. (h.5.15)

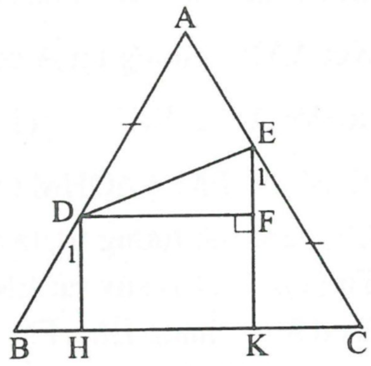
Vẽ $DH \perp BC, EK \perp BC$ và $DF \perp EK$

Tứ giác $DFKH$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Suy ra $DF = HK$.

ΔHBD vuông tại H có $\widehat{B} = 60°$ nên

$\widehat{D_1} = 30° \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}BD.$



Hình 5.15

ΔKCE vuông tại K có $\widehat{C} = 60°$ nên $\widehat{E}_1 = 30° \Rightarrow CK = \dfrac{1}{2}CE = \dfrac{1}{2}AD.$

Ta có: $DE \geq DF = HK = BC - (BH + KC) = BC - \left(\dfrac{1}{2}BD + \dfrac{1}{2}AD\right) = BC - \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của DE là $\dfrac{a}{2}$ khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC .

5.7. (h.5.16)

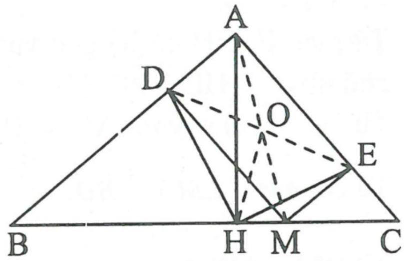
Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $AM = DE$.

Gọi O là giao điểm của AM và DE , ta có:

$OA = OM = OD = OE.$

Xét ΔAHM vuông tại H , ta có: $HO = \dfrac{1}{2}AM$

$\Rightarrow HO = \dfrac{1}{2}DE.$



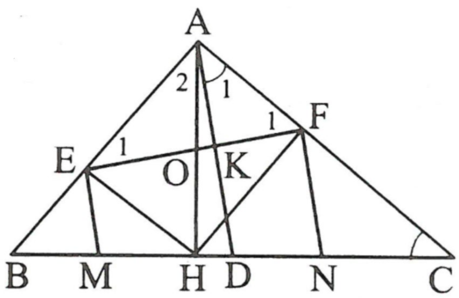
Hình 5.16

Xét ΔHDE có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE mà $HO = \dfrac{1}{2}DE$ nên ΔHDE vuông tại $H \Rightarrow \widehat{DHE} = 90°.$

5.8. (h.5.17)

a) Tứ giác $AFHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OF = OH = OE.$

Xét ΔABC vuông tại A có AD là đường trung tuyến nên $AD = DB = DC.$



Hình 5.17

ΔDAC cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}.$

Mặt khác, $\widehat{C} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$);

$\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân)

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}.$

Gọi K là giao điểm của AD và EF .

Xét ΔAEF vuông tại A có $\widehat{E_1}+\widehat{F_1}=90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{F_1}=90^\circ \Rightarrow \widehat{K}=90^\circ$.

Do đó: $AD\perp EF$, (1)

Ta có: $\Delta OEM=\Delta OHM\,(c.c.c)\Rightarrow \widehat{OEM}=\widehat{OHM}=90^\circ \Rightarrow EM\perp EF$. (2)

Chứng minh tương tự, ta được: $FN\perp EF$. (3)

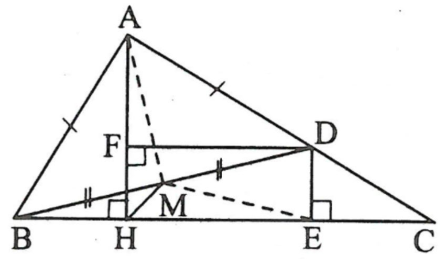
Từ (1), (2), (3) suy ra: $EM\,//\,FN\,//\,AD$ (vì cùng vuông góc với EF).

b) Ba đường thẳng EM, FN và AD là ba đường thẳng song song cách đều

$\Leftrightarrow KF=KE \Leftrightarrow K\equiv O \Leftrightarrow AD\equiv AH \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân.

5.9. (h.5.18)

Vẽ $DE\perp BC, DF\perp AH$.



Hình 5.18

ΔHAB và ΔFDA có: $\widehat{H}=\widehat{F}=90^\circ$; $AB=AD$;

$\widehat{HAB}=\widehat{FDA}$ (cùng phụ với $\widehat{FAD}$).

Do đó $\Delta HAB=\Delta FDA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AH=FD.$ (1)

Tứ giác $FDEH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow HE=FD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH=HE.$

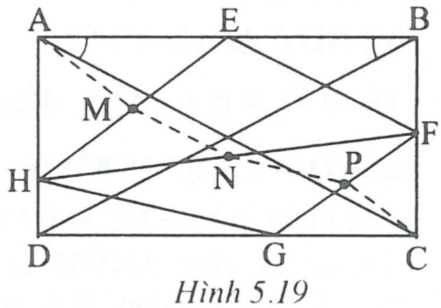
Ta có $AM=EM=\dfrac{1}{2}BD.$

$\Delta AHM=\Delta EHM\,(c.c.c)\Rightarrow \widehat{AHM}=\widehat{EHM}.$

Do đó tia HM là tia phân giác của góc AHC

5.10. (h.5.19)

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của HE, HF và FG



Hình 5.19

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$EF=2MN; FG=2CP; GH=2NP; HE=2AM$.

Do đó chu vi của hình tứ giác $EFGH$ là:

$EF+FG+GH+HE=2\left(AM+MN+NP+PC\right)$.

Xét các điểm A, M, N, P, C, ta có: $AM+MN+NP+PC\ge AC$ (không đổi).

$AC^2=AB^2+BC^2=15^2+8^2=289\Rightarrow AC=17.$

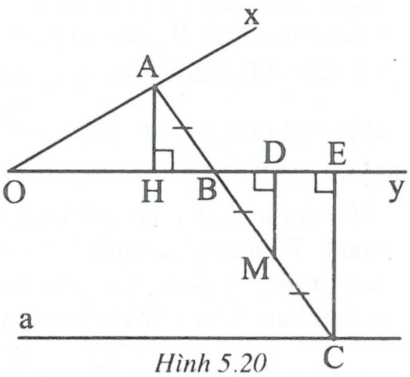
Vậy chu vi của tứ giác $EFGH\ge 2.17=34$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M, N, P$ nằm trên AC theo thứ tự đó $\Leftrightarrow EF\,//\,AC\,//\,HG$ và $HE\,//\,BD\,//\,FG$).

Do đó giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$ là 34.

5.11. (h.5.20)

Gọi M là trung điểm của BC.

Vẽ $AH \perp Oy, MD \perp Oy$ và $CE \perp Oy$.



Hình 5.20

Xét ΔAOH vuông tại H, có $\widehat{O} = 30°$ nên

$AH = \frac{1}{2}OA = 1cm.$

$\Delta MDB = \Delta AHB \Rightarrow MD = AH = 1cm.$

Xét ΔBCE, dễ thấy MD là đường trung bình nên $CE = 2MD = 2cm.$

Điểm C cách Oy một khoảng là $2cm$ nên C di động trên đường thẳng $a \,//\, Oy$ và cách Oy là $2cm$.

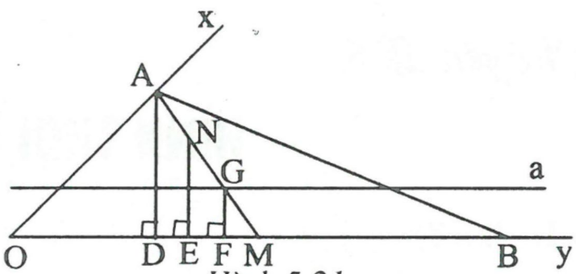
5.12. (h.5.21)

Gọi M là trung điểm của OB.

Khi đó $G \in AM$ và $AG = 2GM$.

Gọi N là trung điểm của AG, ta được $AN = NG = GM$.

Vẽ AD, NE, GF cùng vuông góc với Oy.



Hình 5.21

Ba đường thẳng AD, NE và GF là ba đường thẳng song song cách đều nên $DE = EF = FM$.

Ta đặt $FG = x$ thì $EN = 2x$ và $EN = \frac{FG + AD}{2}$. Do đó $2x = \frac{x + AD}{2} \Rightarrow AD = 3x$.

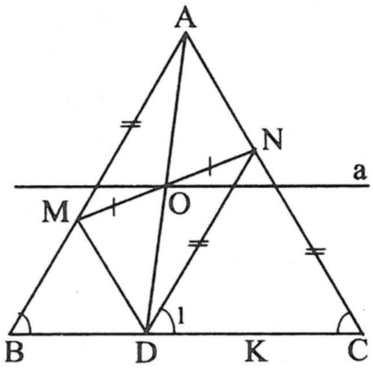
Xét ΔDOA vuông cân tại $D \Rightarrow OA^2 = 2DA^2$.

Do đó $2DA^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow DA = 3(cm) \Rightarrow FG = 1cm.$

Điểm G cách Oy một khoảng không đổi là $1cm$ nên điểm G di động trên đường thẳng $a \,//\, Oy$ và cách Oy là $1cm$.

5.13. (h.5.22)

Vẽ $ND \,//\, AB\,(D \in BC)$.



Hình 5.22

Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị) mà $\widehat{B} = \widehat{C}$

Nên $\widehat{D_1} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta NDC$ cân. Do đó $ND = NC$

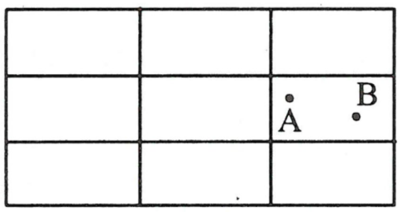
Mặt khác, $AM = NC$ nên $ND = AM$.

Suy ra tứ giác $ANDM$ là hình bình hành, trung điểm O của MN cũng là trung điểm O của AD.

Ta có điểm A và BC cố định, theo ví dụ 5, thì điểm O di động trên đường thẳng $a \,//\, BC$ và cách BC một khoảng $\frac{AH}{2}$ (AH là đường cao của ΔABC).

5.14. (h.5.23)

Chia hình chữ nhật có kích thước 3×6 thành 9 hình chữ nhật nhỏ có kích thước 1×2. Có 10 điểm nằm trong 9 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn A và B thuộc cùng một phần.



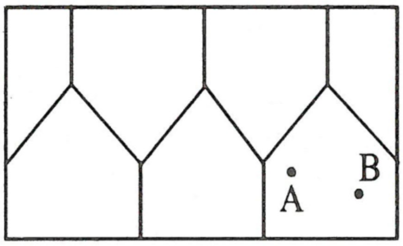
Hình 5.23

Dễ thấy $AB\le$ độ dài đường chéo của mỗi hình chữ nhật nhỏ, tức là

$AB\le\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}<2,3$

5.15. (h.5.24)

Chia hình chữ nhật có kích thước 3×6 thành 7 phần như hình 5.24. Có 8 điểm nằm trong 7 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn A và B thuộc cùng một phần.



Hình 5.24

Dễ thấy $AB\le\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}<2,3$

Chương 1

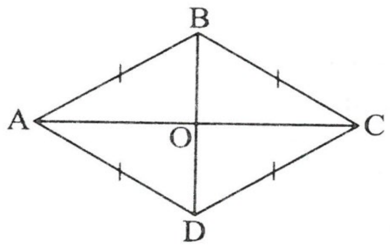
Chuyên đề 6

HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

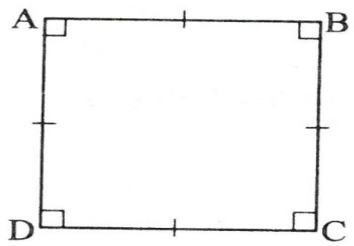
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.6.1).
- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.6.2).



Hình 6.1



Hình 6.2

2. Tính chất:

* Trong hình thoi:

- Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau;
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi;

* Hình vuông có đủ các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết:

* Nhận biết hình thoi:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

* Nhận biết hình vuông:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông;
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông;
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông;
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông;
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình thoi $ABCD$, độ dài mỗi cạnh là $13cm$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ $OH \perp AD$. Biết $OH = 6cm$, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC.

Giải (h.6.3)

*** Tìm cách giải**

Vẽ thêm $BK \perp AD$ để dùng định lí đường trung bình của tam giác, định lý Py-ta-go tính bình phương độ dài của mỗi đường chéo.

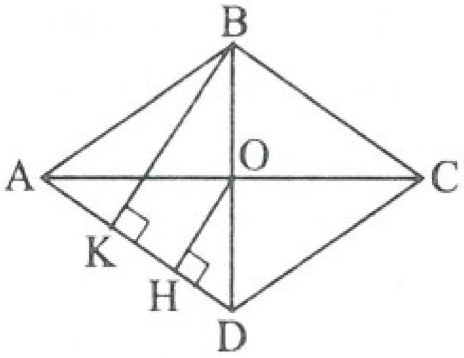
*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BK \perp AD$.

Xét $\triangle BKD$ có $OH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với AD) và $OB = OD$ nên $KH = HD$.

Vậy OH là đường trung bình của $\triangle BKD$.

Suy ra $OH = \frac{1}{2}BK$, do đó $BK = 12cm$.



Hình 6.3

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K, có

$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5cm$

do đó $KD = 8cm$.

Xét $\triangle BKD$ vuông tại K có $BD^2 = BK^2 + KD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$.

Xét $\triangle AOH$ vuông tại H có $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

$\Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468$.

Do đó: $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt EF tại D, cắt BC tại G. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC. Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

Giải (h.6.4)

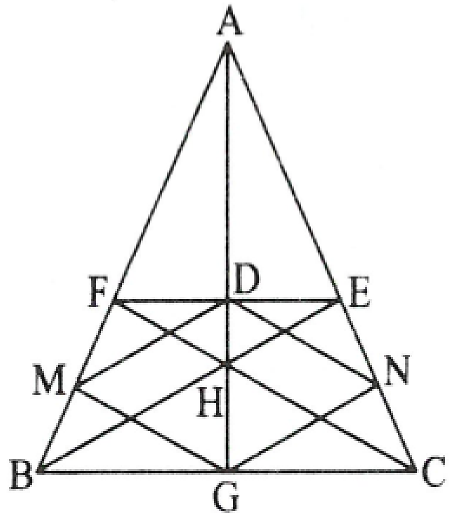
*** Tìm cách giải**

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác $DNGM$ là hình bình hành. Sau đó chứng minh hai cạnh kề bằng nhau.

*** Trình bày lời giải**

$\triangle ABE = \triangle ACF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$.

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.



Hình 6.4

Xét $\triangle EBC$ có $GN \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB = GC$ nên $NE = NC$.

Chứng minh tương tự, ta được: $MF = MB$.

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

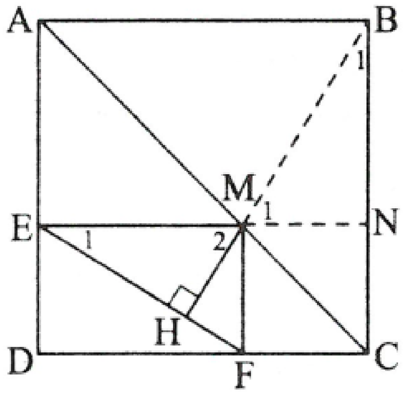
Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M trên đường chéo AC. Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$ và $MH \perp EF$. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên AC thì đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.6.5)

*** Tìm cách giải**

Vẽ hình chính xác ta thấy đường thẳng MH đi qua một điểm cố định là điểm B. Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm H, M, B thẳng hàng bằng cách chứng minh $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

*** Trình bày lời giải**



Hình 6.5

Gọi N là giao điểm của đường thẳng EM và BC.

Khi đó $BN = AE$; $AE = ME$ (vì ΔAEM vuông cân) suy ra $BN = ME$.

Chứng minh tương tự, ta được: $MN = MF$.

Nối MB ta được: $\triangle BMN = \triangle EFM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

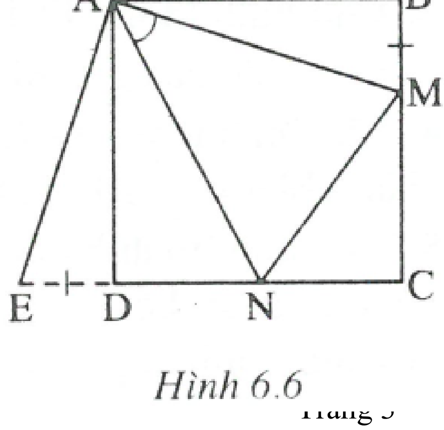
Từ đó ba điểm H, M, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định là điểm B.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi các tam giác CMN bằng $2a$. Chứng minh rằng góc MAN có số đo không đổi.

Giải (h.6.6)

*** Tìm cách giải**



Hình 6.6

Vẽ hình chính xác ta luôn thấy $\widehat{MAN} = 45^0$. Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc 90^0 rồi chứng minh $\widehat{MAN}$ bằng nửa góc vuông đó.

*** Trình bày lời giải**

Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$.

$\triangle BAM = \triangle DAE$ (c.g.c) suy ra $AM = AE$ và $\widehat{BAM} = \widehat{DAE}$.

Ta có: $\widehat{BAM}+\widehat{DAM}=90^0$.

$\Rightarrow \widehat{DAE}+\widehat{DAM}=90^0$ hay $\widehat{EAM}=90^0$.

Theo đề bài, $CM+CN+MN=2a$ mà $CM+CN+MB+ND=2a$ nên $MN=MB+ND$ hay $MN=DE+ND=EN$.

$\triangle MAN=\triangle EAN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MAN}+\widehat{EAN}=\dfrac{\widehat{EAM}}{2}=45^0$.

Vậy, góc MAN có số đo không đổi.

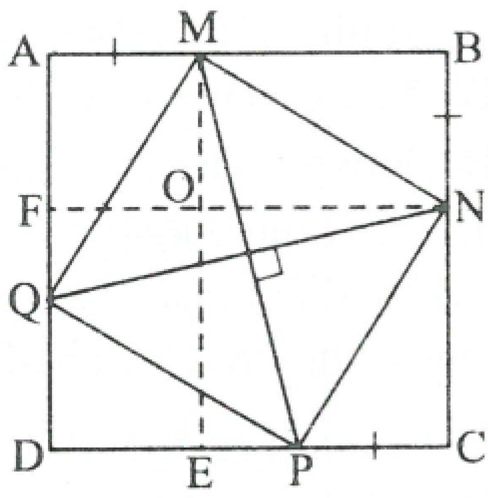
Ví dụ 5: Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB,BC,CD lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $AM=BN=CP$. Qua N vẽ một đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại Q. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Giải (h.6.7)

*** Tìm cách giải**

Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác $MNPQ$ bằng nhau, ta được tứ giác này là hình thoi. Sau đó chứng minh hai đường chéo bằng nhau để được hình vuông.

*** Trình bày lời giải**



Hình 6.7

Vẽ $ME\perp CD$, $NF\perp AD$.

Gọi O là giao điểm của ME và NF.

Ta có: $AB=BC=CD=DA$ mà $AM=BN=CP$ nên $BM=CN=DP$.

Dễ thấy tứ giác $AMOF$ là hình vuông.

$\triangle EMP$ và $\triangle FNQ$ có:

$\widehat{E}=\widehat{F}=90^0$; $ME=NF$ (bằng cạnh hình vuông);

$\widehat{EMP}=\widehat{FNQ}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \triangle EMP=\triangle FNQ$ (g.c.g) $\Rightarrow MP=NQ$ và $EP=FQ$.

Ta có: $DE=AM=AF\Rightarrow DP=AQ$ do đó $DQ=CP$.

Các tam giác BNM,CPN,DQP và AMQ bằng nhau suy ra:

$MN=NP=PQ=QM$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thoi. Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

C. Bài tập vận dụng

- **Hình thoi**

6.1. Một hình thoi có góc nhọn bằng 30^0. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến mỗi cạnh bằng h. Tính độ dài mỗi cạnh của hình thoi.

6.2. Cho hình thoi $ABCD$, chu vi bằng $8cm$. Tìm giá trị lớn nhất của tích hai đường chéo.

6.3. Cho hình thoi $ABCD$, $\widehat{A} = 40^0$. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ $DH \perp CM$. Tính số đo của góc MHB.

6.4. Cho hình thoi $ABCD$. Trên nửa mặt phẳng bờ BD có chứa điểm C, vẽ hình bình hành $BDEF$ có $DE = DC$. Chứng minh rằng C là trực tâm của tam giác AEF.

6.5. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác AOB, BOC, COD và DOA. Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

6.6. Dựng hình thoi $ABCD$ biết $AC + BD = 8cm$ và $\widehat{ABD} = 25^0$.

- **Hình vuông**

6.7. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy các điểm E và F sao cho $BE = EF = FC$. Trên cạnh AD lấy điểm G sao cho $AG = \frac{1}{3}AD$.

Tính tổng: $\widehat{AEG} + \widehat{AFG} + \widehat{ACG}$

6.8. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo AC lấy một điểm M. Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AF, CE và BM đồng quy.

6.9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy;

b) Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

6.10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là trung điểm của EF. Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM. Chứng minh rằng tứ giác $DEMF$ là hình vuông.

6.11. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 45^0$. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

6.12. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông có một cạnh là cạnh của hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm (tức là giao điểm của hai đường chéo) của các hình vuông vẽ trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng: $EG = HF$ và $EG \perp HF$.

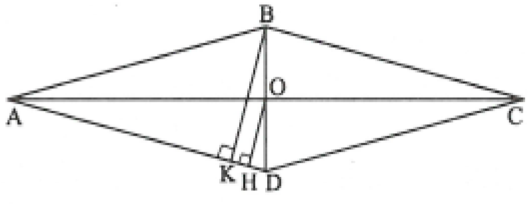
6.13. Dựng hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A và trung điểm M của CD.

6.14. Một bàn cờ hình vuông có kích thước $6x6$. Có thể dùng 9 mảnh gỗ hình chữ nhật có kích thước $1x4$ để ghép kín bàn cờ được không?

6.15. Một hình chữ nhật có kích thước $3x6$. Hãy chia hình chữ nhật này thành nhiều phần (hình tam giác, tứ giác) để ghép lại thành một hình vuông (số phần được chia ra càng ít càng tốt).

Hướng dẫn giải

6.1. (h.6.8)



Hình 6.8

Giả sử $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{A}=30^0$. Hai đường chéo cắt nhau tại O.

Vẽ $OH \perp AD$, $BK \perp AD$ thì $OH \parallel BK$ và OH là đường trung bình của tam giác $BKD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}BK$. (1)

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K, $\widehat{A}=30^0 \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Rightarrow OH = \frac{1}{4}AB$ do đó $AB = 4OH = 4.h$.

6.2. (h.6.9)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Ta đặt $OA = x, OB = y$ thì $AC = 2x, BD = 2y$.

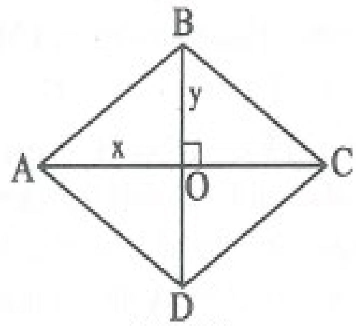
Ta có: $AB = 8:4 = 2cm$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 \ge 2xy$ suy ra $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Do đó: $AC.BD = 2x.2y = 4xy \le 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $AC.BD$ là $8(cm^2)$ khi x = y

$\Leftrightarrow$ AC = BD $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.



Hình 6.9

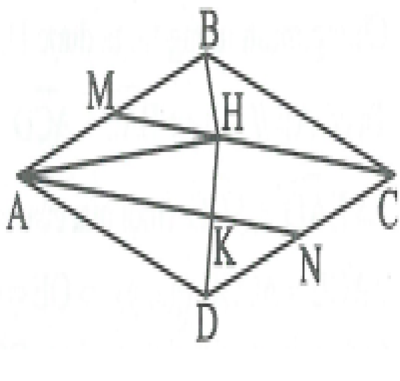
6.3. (h.6.10)

Gọi N là trung điểm của CD.

Ta có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel CM$.

Mặt khác, $DH \perp CM$ nên $DH \perp AN$ tại K.

Xét $\triangle HCD$ có $KN \parallel CH$ và $NC = ND$ nên $KH = KD$.



$\triangle ADH$ Có AK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ADH$ cân

$\Rightarrow AH = AD.$

Hình 6.10

Mặt khác, $AB = AD$ nên $AH = AB \Rightarrow \triangle ABH$ cân.

Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AHD}$ và $\widehat{ABH} = \widehat{AHB}$.

Xét tứ giác $ABHD$ có $\widehat{ADH} + \widehat{DHA} + \widehat{BHA} + \widehat{ABH} = 360^0 - \widehat{A}$

$\Rightarrow 2(\widehat{DHA} + \widehat{BHA}) = 360^0 - 40^0 \Rightarrow 2\widehat{BHD} = 320^0 \Rightarrow \widehat{BHD} = 160^0$.

Mặt khác, $\widehat{DHM} = 90^0$ nên $\widehat{MHB} = 160^0 - 90^0 = 70^0$.

6.4. (h.6.11)

Ta có $AC \perp DB$ mà $DB \parallel EF$ nên $AC \perp EF$. (1)

Vẽ điểm M sao cho D là trung điểm của EM.

Xét $\triangle CEM$ có CD là đường trung tuyến mà $CD = \dfrac{1}{2}EM$ nên $\triangle CEM$ vuông tại C.

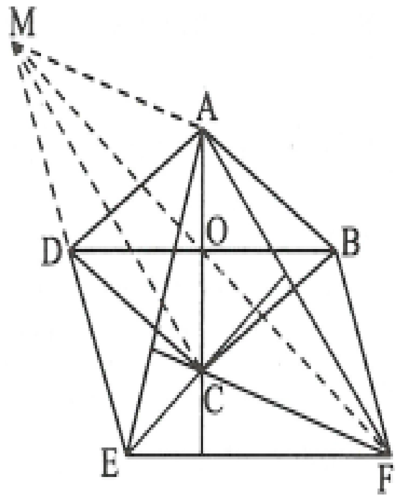
$\Rightarrow CM \perp CE$.

Tứ giác $MDFB$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

$\Rightarrow DB$ và MF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, O là trung điểm của DB nên O là trung điểm của MF.

Tứ giác $AMCF$ có $OA = OC, OM = OF$ nên là hình bình hành



Hình 6.11

$\Rightarrow CM \parallel AF$

$\Rightarrow CE \perp AF$. (2)

Xét $\triangle AEF$ có AC và EC là hai đường cao cắt nhau tại C nên C là trực tâm.

Nhận xét: Nếu vẽ hình bình hành $DBEF$ về phía điểm A thì kết luận của bài toán vẫn đúng.

6.5. (h.6.12)

Ta có $OE \perp OH, OG \perp OH$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù)

$\Rightarrow E, O, G$ thẳng hàng.

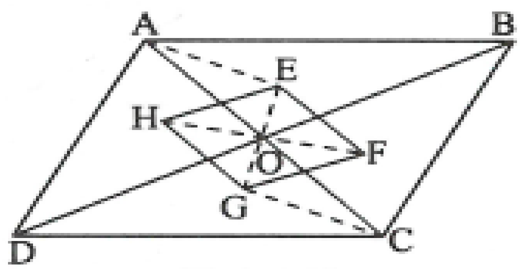
Chứng minh tương tự, ta được H, O, F thẳng hàng.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{ACG}$ (một nửa của hai góc bằng nhau)

$\triangle AOE = \triangle COG$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OG$.

Chứng minh tương tự, ta được $OF = OH$.



Hình 6.12

Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

6.6. (h.6.13)

Giả sử đã dựng được hình thoi $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

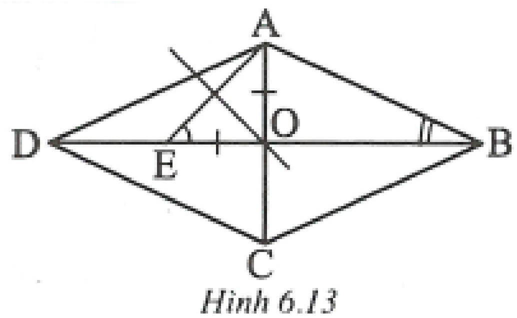
Ta có $AC \perp BD$ và $OA = OC; OB = OD$.

Do đó $OA + OB = 8 : 2 = 4(cm)$.

Trên tia OD lấy điểm E sao cho $OE = OA$.

Khi đó $BE = 4cm$ và $\triangle AOE$ vuông cân

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 45^0$.



Hình 6.13

Từ đó $\triangle AEB$ dựng được ngay (g.c.g).

- Điểm O thỏa mãn hai điều kiện: O nằm trên BE và O nằm trên đường trung trực của AE.
- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia AO sao cho $OC = OA$.
- Điểm D thỏa mãn hai điều kiện: D nằm trên tia BO sao cho $OB = OB$.

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

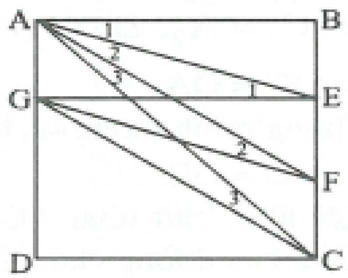
6.7. (h.6.14)

Các tứ giác $ABEG, AEFG, AFCG$ là hình bình hành nên:

$AB \parallel EG, AE \parallel GF, AF \parallel CG$

Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}; \widehat{F_2} = \widehat{A_2}; \widehat{C_3} = \widehat{A_3}$

Do đó: $\widehat{E_1} + \widehat{F_2} + \widehat{C_3} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{BAC} = 45^0$.



Hình 6.14

6.8 (h.6.15)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh AF, CE và BM đồng quy ta chứng minh chúng là các đường thẳng chứa đường cao của $\triangle BEF$.

*** Trình bày lời giải**

Tứ giác $MEDF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

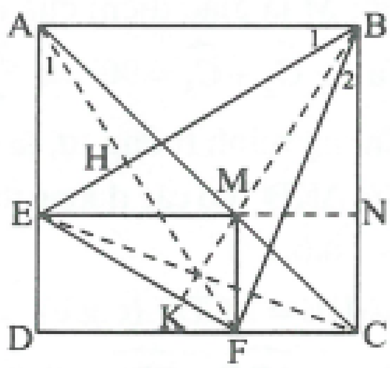
$\Rightarrow ME = DF; MF = DE$

$\triangle ADC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACD} = 45^0$.

Do đó $\triangle AEM$ và $\triangle CFM$ vuông cân $\Rightarrow AE = ME$

$\Rightarrow AE = DF$;

$CF = MF \Rightarrow DE = CF$.



Hình 6.15

$\triangle ABE = \triangle DAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{H} = 90^0$

(H là giao điểm của BE và CF).

Chứng minh tương tự, ta được $CE \perp BF$.

Gọi N là giao điểm của EM với BC; K là giao điểm của BM với EF.

Ta có $MF = MN$ (vì M nằm trên tia phân giác của góc C).

$ME = BN (= AE)$

$\triangle MFE = \triangle NMB$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{NMB}$

Ta có: $\widehat{NMB} + \widehat{FMK} = 90^0$ (vì $\widehat{NMF} = 90^0$).

$\Rightarrow \widehat{MFE} + \widehat{FMK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{K} = 90^0 \Rightarrow BM \perp EF$

Vậy ba đường thẳng AF, CE và BM là ba đường cao của $\triangle BEF$ nên chúng đồng quy.

6.9 (h.6.16)

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và FG.

Tứ giác $AGKE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH và EG.

$\triangle AEG = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{C_1}$.

Ta lại có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$); Và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{A_2}$. Do đó $\triangle OAG$ cân.

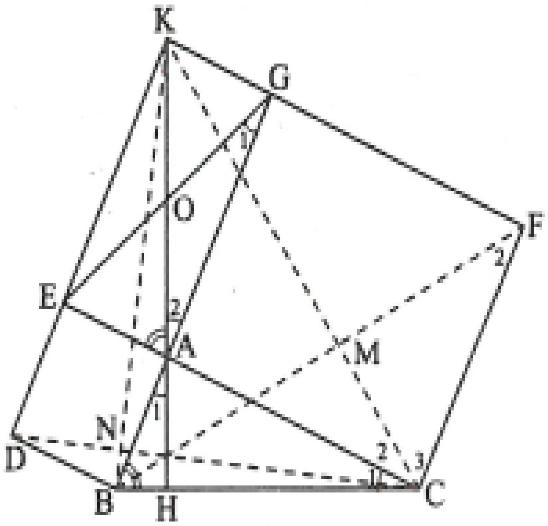
$\Rightarrow OG = OA$

Chứng minh tương tự, ta được $OE = OA$

$\Rightarrow OG = OE$

Xét hình chữ nhật $AGKE$ có O là trung điểm của đường chéo EG nên đường chéo AK phải đi qua O hay đường thẳng AH đi qua K.

Vậy ba đường thẳng AH, DE, FG đồng quy.



Hình 6.16

b) $\triangle BCF$ và $\triangle KAC$ có:

$BC = KA$ (cùng bằng EG); $\widehat{BCF} = \widehat{KAC}$ (vì $90^0 + \widehat{C_1} = 90^0 + \widehat{A_2}$); $CF = AC$.

Do đó $\triangle BCF = \triangle KAC \Rightarrow \widehat{F_2} = \widehat{C_2}$

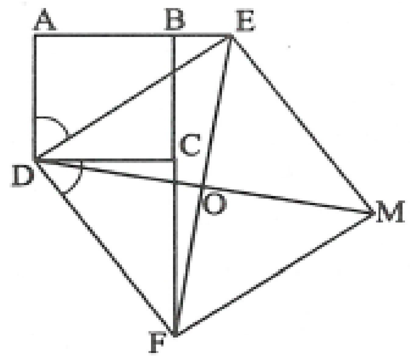
Gọi M là giao điểm của BF và KC.

Ta có $\widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{F_2} + \widehat{C_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{M} = 90^0$. Vậy $BF \perp KC$

Chứng minh tương tự, ta được $CD \perp KB$

Xét $\triangle KBC$ có các đường thẳng AH, BF, CD chứa ba đường cao nên chúng đồng quy.

6.10. (h.6.17)



Hình 6.17

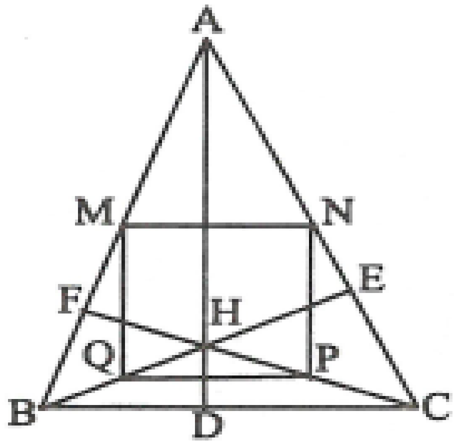
$\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$ và $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$.

Ta có $\widehat{ADE} + \widehat{CDF} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{CDE} = 90^0$ hay $\widehat{EDF} = 90^0$.

Tứ giác $DEMF$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành này có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi. Hình thoi này có $\widehat{EDF} = 90^0$ nên là hình vuông.

6.11. (h.6.18)



Hình 6.18

$\triangle FAC$ vuông tại F, $\widehat{A} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow AF = FC$

$\triangle AFH$ và $\triangle CFB$ có: $\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{CFB} = 90^0; AF = FC$;

$\widehat{FAH} = \widehat{FCB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\triangle AFH = \triangle CFB$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = BC$

Vận dụng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.

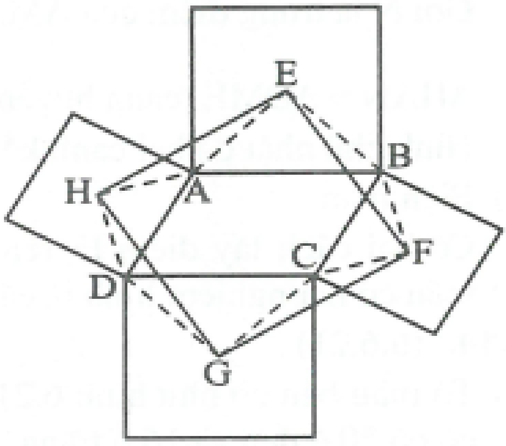
Ta có: $MQ = \dfrac{1}{2}AH; MN = \dfrac{1}{2}BC$

mà $AH = BC$ nên $MQ = MN$

Hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Bạn đọc tự chứng minh $\widehat{M} = 90^0$ suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

6.12 (h.6.19)



Hình 6.19

Ta đặt $\widehat{B} = \alpha (\alpha \le 90^0)$

Khi đó $\widehat{EBF} = \widehat{GCF} = 90^0 + \alpha$

$\triangle EFB = \triangle GFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow EF = GF$ và $\widehat{EFB} = \widehat{GFC}$.

Ta có $\widehat{CFE} + \widehat{EFB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CFE} + \widehat{GFC} = 90^0$ hay $\widehat{EFG} = 90^0$

Chứng minh tương tự, ta được $FG = GH = HE$

Tứ giác $EFGH$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

Hình thoi này có $\widehat{EFG} = 90^0$ nên là hình vuông, suy ra $EG = HF$ và. $EG \perp HF$.

6.13 (h.6.20)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$.

Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt đường thẳng AD tại E .

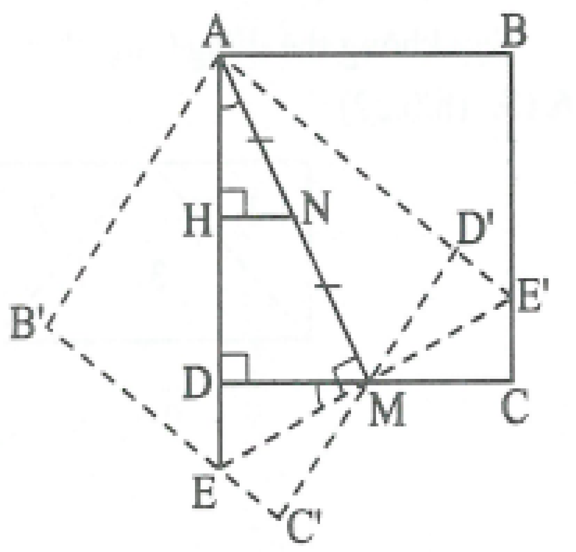
Xét $\triangle ADM$ có $NH \parallel MD$ và $AN = NM$ nên $AH = HD = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, $MD = MC = \frac{1}{2}CD$ nên $MD = AH$

Ta có $\widehat{DME} = \widehat{HAN}$ (cùng phụ với $\widehat{DMA}$).

$\triangle DME = \triangle HAN$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = AN = \frac{1}{2}AM$

Vậy E xác định được, từ đó xác định được D, C, B .



Hình 6.20

b) Cách dựng

- Dựng đường thẳng $d \perp AM$ tại M ;
- Trên d lấy điểm E sao cho $ME = \frac{1}{2}AM$;
- Dựng $MD \perp AE$
- Dựng điểm C sao cho M là trung điểm của CD ;
- Dựng $Cx \parallel AD$ và $Ay \parallel CD$ chúng cắt nhau tại B .

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông phải dựng.

c) Chứng minh

Thật vậy, tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\widehat{D} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$ thì $AH = \frac{1}{2}AD$.

$\triangle HAN = \triangle DME$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DM \Rightarrow AD = DC$

Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

d) Biện luận

Có hai cách lấy điểm E trên đường thẳng d (về hai phía của điểm M) nên bài toán có hai nghiệm hình là các hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$.

6.14 (h.6.21)

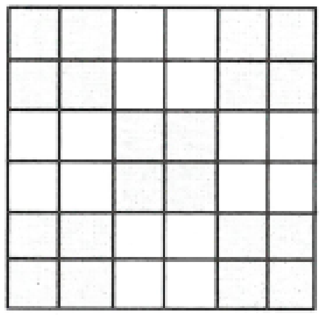
Tô màu bàn cờ như hình 6.21. Lúc này trên bàn cờ có 20 ô đen và 16 ô trắng.

Mỗi mảnh gỗ $1x4$ khi đặt lên bàn cờ che lấp được 2 ô đen và 2 ô trắng.

Do đó 9 mảnh gỗ $1x4$ chỉ che lấp được 18 ô đen.

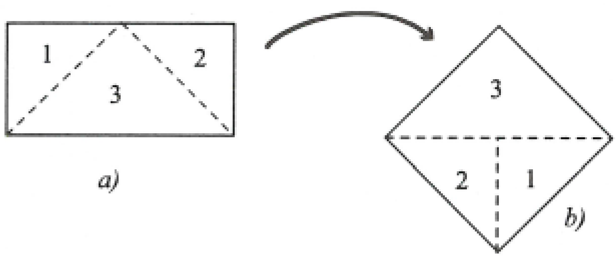
Như vậy với mọi cách đặt 9 mảnh gỗ lên bàn cờ bao giờ cũng còn thừa hai ô đen không được che lấp.

Vậy không thể dùng 9 mảnh gỗ $1x4$ để lấp kín bàn cờ.



Hình 6.21

6.15 (h.6.22)



Hình 6.22

Chương 1

Chuyên đề 7

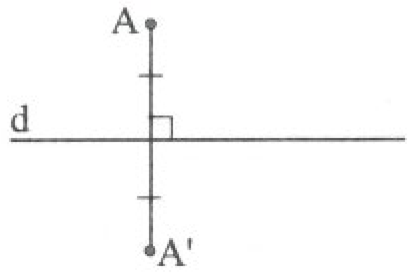
ĐỐI XỨNG TRỤC - ĐỐI XỨNG TÂM

A. Kiến thức cần nhớ

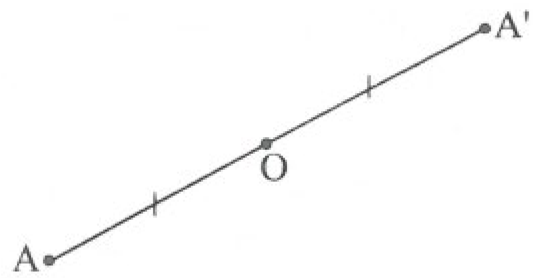
1. Các định nghĩa

• Hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d, nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.1).

• Hai điểm đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.2).



Hình 7.1



Hình 7.2

• Hai hình gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O) nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O) và ngược lại.

2. Tính chất

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng (hoặc qua một điểm) thì chúng bằng nhau.

3. Hình có trục đối xứng, có tâm đối xứng

- Hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy.

- Tương tự hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

- Hình thoi có hai trục đối xứng là hai đường chéo. Hình vuông có 4 trục đối xứng

- Hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông có tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD, hai đường thẳng AB và CD không vuông góc với nhau. Dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho tia phân giác của góc AMB vuông góc với đường thẳng CD.

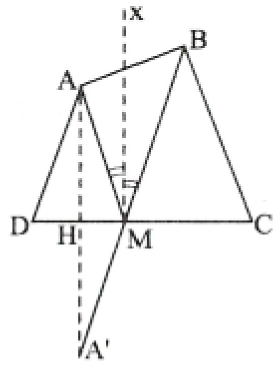
Giải (h.7.3)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm M trên đường thẳng CD sao cho tia phân giác Mx của góc AMB vuông góc với đường thẳng CD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm A' sao cho $MA' = MA$.

Vì tia Mx là tia phân giác của góc AMB và $Mx \perp CD$ nên đường thẳng CD là đường phân giác của góc AMA'.

Xét $\Delta MAA'$ cân tại M có MD là đường phân giác nên MD cũng là đường trung trực, suy ra A và A' đối xứng qua đường thẳng CD.



Hình 7.3

b) Cách dựng

- Dựng điểm A' đối xứng với A qua CD;
- Dựng giao điểm M của $A'B$ với đường thẳng CD. Khi đó M là điểm cần dựng.

c) Chứng minh

Vì A và A' đối xứng qua CD nên CD là đường trung trực của AA', do đó CD cũng là đường phân giác của góc AMA'.

Nếu Mx là tia phân giác của góc AMB thì $Mx \perp CD$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

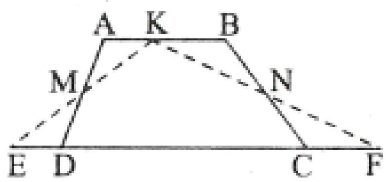
Nhận xét: Cách dựng điểm M như trên còn cho ta kết quả là tổng $AM + MB$ ngắn nhất.

Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Trên đáy AB lấy điểm K tùy ý. Vẽ điểm E đối xứng với K qua trung điểm M của AD. Vẽ điểm F đối xứng với K qua trung điểm N của BC. Chứng minh rằng EF có độ dài không đổi.

Giải (h.7.4)

**** Tìm cách giải***

Ta thấy: $EF = ED + DC + CF$ mà CD không đổi nên muốn chứng minh EF không đổi ta cần chứng minh $ED + CF$ không đổi.



Hình 7.4

**** Trình bày lời giải***

DE và AK đối xứng nhau qua M nên DE = AK và DE // AK do đó DE // AB.

Mặt khác, DC // AB suy ra ba điểm E, D, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được: BK = CF và ba điểm D, C, F thẳng hàng.

Ta có $EF = ED + DC + CF = AK + DC + BK = AB + CD$ (không đổi).

Nhận xét: Khi điểm K di động trên cả đường thẳng AB thì độ dài của đoạn thẳng EF vẫn không đổi.

Ví dụ 3: Cho góc xOy khác góc bẹt và hai điểm M, N nằm trong góc đó. Dựng hình bình hành AMBN sao cho $A \in Ox$ và $B \in Oy$.

Giải (h.7.5)

a) Phân tích

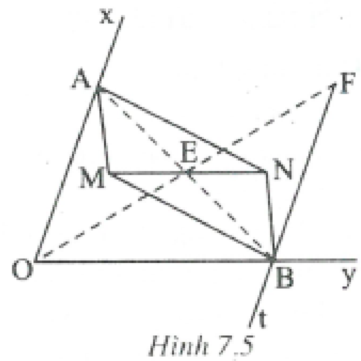
Giả sử đã dựng được hình bình hành AMBN thỏa mãn đề bài. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ điểm F đối xứng với O qua E. Khi đó tứ giác AOBF là hình bình hành.

• Điểm B thỏa mãn hai điều kiện: $B \in Oy$ và $B \in Ft$ // Ox.

• Điểm A thỏa mãn hai điều kiện: $A \in Ox$ và A thuộc tia BE.

b) Cách dựng

- Dựng trung điểm E của MN;
- Dựng điểm F đối xứng với O qua E;
- Dựng tia Ft // Ox cắt tia Oy tại B;
- Dựng giao điểm của tia BE và tia Ox.



Hình 7.5

c) Chứng minh

$\Delta AOE = \Delta BFE(g.c.g) \Rightarrow EA = EB$.

Mặt khác, $EM = EN$ nên tứ giác AMNB là hình bình hành.

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, điểm D thuộc cạnh huyền BC. Vẽ điểm M và điểm N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC. Chứng minh rằng:

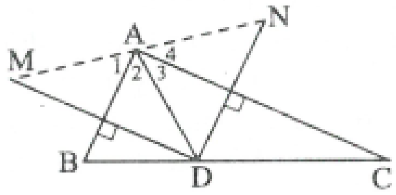
a) M và N đối xứng qua A;

b) Xác định vị trí của điểm D để MN ngắn nhất, dài nhất.

Giải (h.7.6)

**** Tìm cách giải***

Muốn chứng minh hai điểm M và N đối xứng qua A, ta chứng minh $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 180°$.



Hình 7.6

**** Trình bày lời giải***

a) AM đối xứng với AD qua AB nên $AM = AD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. (1)

AN đối xứng với AD qua AC nên $AN = AD$ và $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 2\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 2\widehat{BAC} = 2.90° = 180°$.

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.

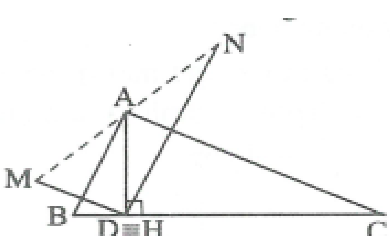
Từ đó suy ra M và N đối xứng qua A và $MN = 2AD$.

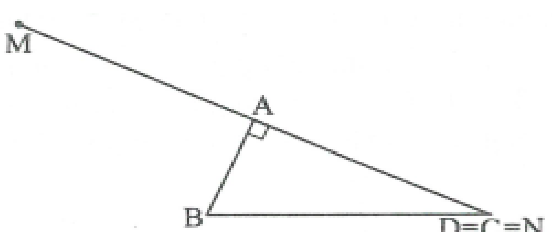
b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $AD \geq AH$, do đó $MN \geq 2AH$.

Vậy MN ngắn nhất là bằng $2AH$ khi $D \equiv H$ (h.7.7).

Dựa vào quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $AD \leq AC$ suy ra $MN = 2AD \leq 2AC$.

Do đó MN dài nhất là bằng $2AC$ khi $D \equiv C$ (h.7.8).





C. Bài tập vận dụng

- **Đối xứng trục**

7.1. Cho tam giác ABD. Vẽ điểm C đối xứng với A qua BD. Vẽ các đường phân giác ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác ABCD chúng cắt nhau tạo thành tứ giác EFGH.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH;

b) Chứng minh rằng BD là trục đối xứng của tứ giác EFGH.

7.2. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D là điểm nằm giữa B và C. Vẽ các điểm M và N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC.

a) Chứng minh rằng góc MAN luôn có số đo không đổi;

b) Xác định vị trí của D để MN có độ dài ngắn nhất.

7.3. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của D, E, F để chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

7.4. Cho hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ xy. Hãy tìm trên xy hai điểm C và D sao cho $CD = a$ cho trước và chu vi tứ giác ABCD là nhỏ nhất.

7.5. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và một điểm M ở trong tam giác. Vẽ các điểm N, P, A' đối xứng với M lần lượt qua AB, AC và AD.

a) Chứng minh rằng N và P đối xứng qua AA';

b) Gọi B', C' là các điểm đối xứng với M lần lượt qua các đường phân giác của góc B, góc C. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

7.6. Cho tứ giác ABCD và một điểm M nằm giữa A và B. Chứng minh rằng $MC + MD$ nhỏ hơn số lớn nhất trong hai tổng $AC + AD; BC + BD$.

- **Đối xứng tâm**

7.7. Cho tam giác ABC và O là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O qua D, E, F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

7.8. Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm G ở trong góc đó. Dựng điểm $A \in Ox$, điểm $B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.

7.9. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua điểm B. Vẽ điểm E đối xứng với B qua C. Vẽ điểm F đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng một trọng tâm.

7.10. Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí trung điểm M của AB, trung điểm N của BC và trung điểm P của CD.

7.11. Dựng tứ giác ABCD biết $AD = AB = BC$ và ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, AB và BC (Biết M, N, P không thẳng hàng).

7.12. Cho một hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Trong mỗi ô viết một trong các số 1, 2, 3, 4. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có đỉnh là tâm của bốn ô vuông sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện là bằng nhau.

Hướng dẫn giải

7.1. (h.7.9)

a) Vì C đối xứng với A qua BD nên ΔABD đối xứng với ΔCBD qua BD.

Do đó $\Delta ABD = \Delta CBD$, suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$; $BA = BC$ và $DA = DC$.

Ta có BD và BE là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh B nên $BD \perp BE$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BD \perp DH$.

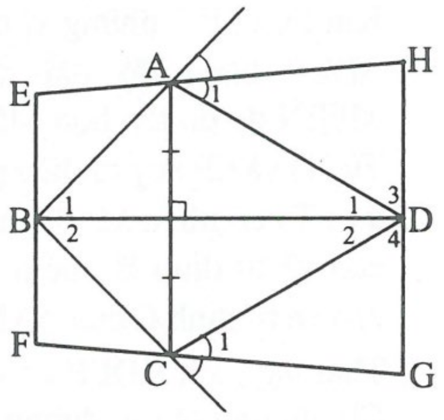
Suy ra EF // HG $\Rightarrow$ Tứ giác EFGH là hình thang.

Ta có $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Suy ra $\widehat{H} = \widehat{G}$

Hình thang EFGH có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.



Hình 7.9

b) $\Delta ADH = \Delta CDG (g.c.g) \Rightarrow DH = DG$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BE = BF$.

Đường thẳng BD đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân nên là trục đối xứng của hình thang cân EFGH.

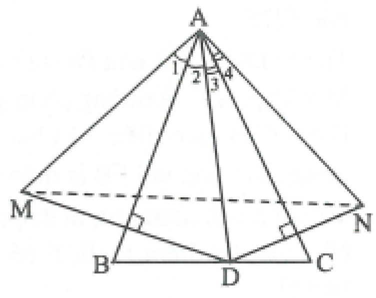
7.2. (h.7.10)

a) Các đoạn thẳng AM và AN đối xứng với AD lần lượt qua AB và AC nên:

$AM = AD; AN = AD; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

Ta có:

$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{NAD} = 2\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi).



Hình 7.10

b) Xét ΔAMN có $AM = AN$ (cùng bằng AD) nên là tam giác cân. Tam giác cân này có góc MAN không đổi nên cạnh đáy MN ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ cạnh bên AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AD ngắn nhất (vì $AM = AD$)

$\Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow$ D là hình chiếu của A trên BC.

7.3. (h.7.11)

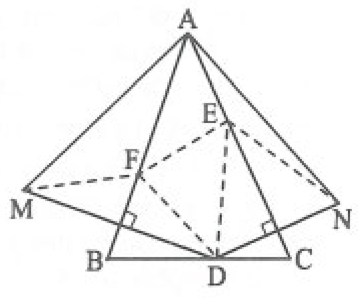
Vẽ điểm M đối xứng với D qua AB và vẽ điểm N đối xứng với D qua AC. Khi đó $MF = DF; EN = ED$.

Chu vi $\Delta DEF = DF + FE + ED = MF + FE + EN$

Chu vi ΔDEF nhỏ nhất khi độ dài đường gấp khúc MFEN ngắn nhất.

Muốn vậy bốn điểm M, F, E, N phải thẳng hàng theo thứ tự đó.

Do đó ta phải tìm điểm D trên BC sao cho MN nhỏ nhất.



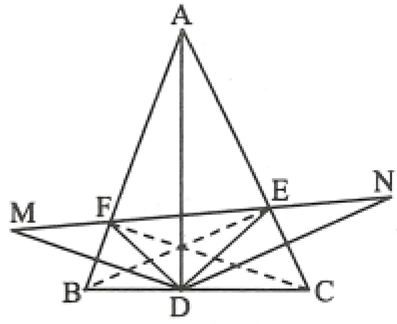
Hình 7.11

Theo kết quả bài 7.2, để MN nhỏ nhất thì D là hình chiếu của A trên BC. Khi đó E và F lần lượt là giao điểm của MN với AC và AB (h.7.12).

Ta chứng minh với cách xác định D, E, F như vậy thì chu vi ΔDEF nhỏ nhất.

Thật vậy, khi $AD \perp BC$ thì chu vi ΔDEF bằng MN và MN nhỏ nhất. (1)

Khi D, E, F ở những vị trí khác thì chu vi ΔDEF bằng độ dài đường gấp khúc MFEN do đó lớn hơn MN. (2)



Hình.7.12

Chú ý: Ta có nhận xét điểm E là chân đường cao vẽ từ đỉnh B, điểm F là chân đường cao vẽ từ đỉnh C của ΔABC.

Thật vậy, xét ΔDEF có các đường BF và CE lần lượt là các đường phân giác ngoài tại đỉnh F và E. Hai đường thẳng này cắt nhau tại A nên tia DA là tia phân giác của góc EDF.

Ta có: $DC \perp DA$ nên DC là tia phân giác ngoài tại đỉnh D của ΔDEF.

Mặt khác, EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E.

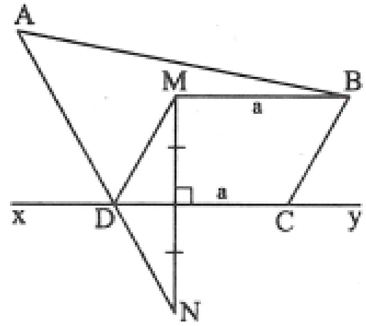
Điểm C là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên FC là đường phân giác trong. Kết hợp với FB là đường phân giác, suy ra $FC \perp FB$ hay $CF \perp AB$.

Chứng minh tương tự, ta được $BE \perp AC$.

Như vậy ba điểm D, E, F có thể xác định bởi chân của ba đường cao của tam giác.

7.4. (h.7.13).

Giả sử đã dựng được hai điểm C và D $\in xy$ sao cho $CD = a$ và chu vi tứ giác ABCD nhỏ nhất.



Hình 7.13

Vẽ hình bình hành BMDC (điểm M ở phía gần A).

Khi đó $BM = CD = a$ và $DM = BC$

Vẽ điểm N đối xứng với điểm M qua xy, điểm N là một điểm cố định và $DN = DM$.

Ta có $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow BC + DA$ nhỏ nhất (vì AB và CD không đổi)

$\Leftrightarrow DM + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DN + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D nằm giữa A và N.

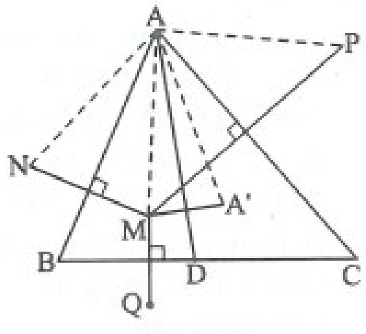
Từ đó ta xác định điểm D như sau:

- Qua B vẽ một đường thẳng song song với xy và trên đó lấy điểm M sao cho $BM = a$ (điểm M ở phía gần A);
- Vẽ điểm N đối xứng với M qua xy;
- Lấy giao điểm D của AN với xy;
- Lấy điểm $C \in xy$ sao cho $DC = MB = a$ (DC và MB cùng chiều).

Khi đó tổng $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

7.5. (h.7.14)



Hình 7.14

a) • AN đối xứng với AM qua AB

$\Rightarrow AN = AM$ và $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$. (1)

• AP đối xứng với AM qua AC

$\Rightarrow AP = AM$ và $\widehat{MAC} = \widehat{PAC}$. (2)

• AA' đối xứng với AM qua AD nên $\widehat{MAD} = \widehat{A'AD}$.

Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$.

Ta có $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AC} + \widehat{PAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{A'AN} = \widehat{BAC}$, suy ra: $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AN}$.

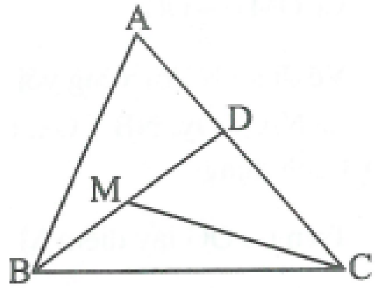
ΔANP cân tại A có AA' là đường phân giác nên AA' cũng là đường trung trực của NP $\Rightarrow$ N và P đối xứng qua AA'.

b) Gọi Q là điểm đối xứng của M qua BC.

Chứng minh tương tự như trên ta được BB' là đường trung trực của NQ và CC' là đường trung trực của PQ.

Vậy AA', BB', CC' là ba đường trung trực của ΔNPQ nên chúng đồng quy.

7.6. Trước hết ta chứng minh bài toán phụ:



Hình 7.15

Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác (hoặc ở trên một cạnh nhưng không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $MB + MC < AB + AC$ (h.7.15).

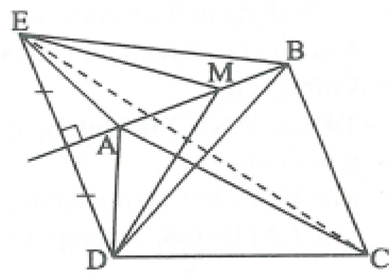
Thật vậy, xét ΔABD, ta có $BD < AB + AD$ hay $MB + MD < AB + AD$. (1)

Xét ΔMCD có $MC < DC + MD$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được:

$MB + MD + MC < AB + AD + DC + MD \Rightarrow MB + MC < AB + AC$

Bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu điểm M nằm trên một cạnh nhưng không trùng với đỉnh của tam giác.



Hình 7.16

Bây giờ ta vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho.

Vẽ điểm E đối xứng với D qua đường thẳng AB (h.7.16).

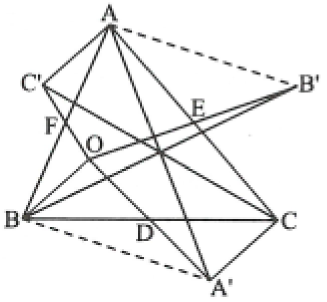
Khi đó $AE = AD; ME = MD$ và $BE = BD$.

Vì điểm M nằm giữa A và B nên hoặc điểm M nằm trong ΔBEC hoặc điểm M nằm trong ΔAEC hoặc điểm M nằm trên cạnh EC.

Ta có $\left[\begin{array}{l} ME+MC<AE+AC \\ ME+MC<BE+BC \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} MD+MC<AD+AC \\ MD+MC<BD+BC \end{array}\right.$.

Do đó $MD+MC<\max\{AD+AC;BD+BC\}$.

7.7. (h.7.17)



Hình 7.17

Ta có AC' và BO đối xứng nhau qua F nên $AC'=BO$ và AC' // BO. (1)

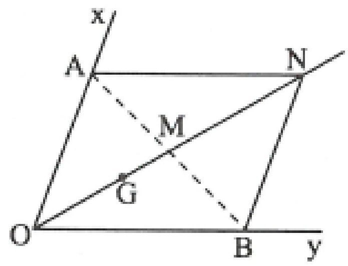
BO và CA' đối xứng nhau qua D nên $BO=CA'$ và BO // CA' (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AC'=CA'$ và $AC'//CA'$, do đó tứ giác $ACA'C'$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $ABA'B'$ là hình bình hành.

Hai hình bình hành $ACA'C'$ và $ABA'B'$ có chung đường chéo AA' nên các đường chéo AA',BB',CC' đồng quy.

7.8. (h.7.18)



Hình 7.18

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm $A\in Ox$ và $B\in Oy$ sao cho G là trọng tâm của ΔAOB.

Tia OG cắt AB tại trung điểm M của AB và $OM=\frac{3}{2}OG$.

Vẽ điểm N đối xứng với O qua điểm M. Tứ giác ANBO là hình bình hành $\Rightarrow$ NA // Oy; NB // Ox, từ đó xác định được A và B.

b) Cách dựng

- Trên tia OG lấy điểm M sao cho $OM=\frac{3}{2}OG$.
- Dựng điểm N đối xứng với điểm O qua M.
- Từ N dựng một tia song song với Oy cắt Ox tại A.
- Từ N dựng một tia song song với Ox cắt Oy tại B.

Khi đó G là trọng tâm của tam giác AOB.

c) Chứng minh

Tứ giác ANBO là hình bình hành, suy ra AB và ON cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, M là trung điểm của ON nên M là trung điểm của AB.

Vậy OM là đường trung tuyến của tam giác AOB.

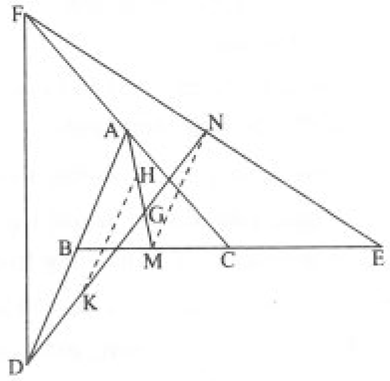
Ta có $OM=\frac{3}{2}OG$ nên G là trọng tâm của ΔAOB.

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

7.9. (h.7.19)

Vẽ đường trung tuyến AM của tam giác ABC và đường trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi G là giao điểm của hai đường trung tuyến này. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của GA và GD.

Xét ΔFCE có AN là đường trung bình $\Rightarrow$ AN // CE và $AN = \dfrac{1}{2}CE$ do đó AN // BM và $AN = BM$, dẫn tới ANMB là hình bình hành $\Rightarrow$MN // AB và $MN = \dfrac{1}{2}AD$.



Hình 7.19

Mặt khác, HK là đường trung bình của ΔGAD nên HK // AD và $HK = \dfrac{1}{2}AD$.

Từ đó MN // HK và $MN = HK$.

Suy ra MNHK là hình bình hành, hai đường chéo HM và NK cắt nhau tại G nên G là trung điểm của mỗi đường.

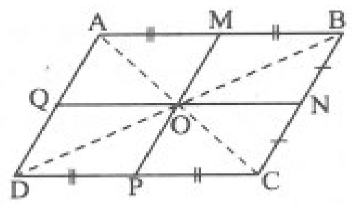
Do đó $GM = GH = HA \Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔABC.

$GN = GK = KD \Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔDEF .

Vậy ΔABC và ΔDEF có cùng một trọng tâm.

7.10. (h.7.20)

a) Phân tích



Hình 7.20

Giả sử đã dựng được hình bình hành ABCD thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có M và P đối xứng qua O.

Gọi Q là giao điểm của NO với AD thì Q và N đối xứng qua O.

Vậy điểm Q xác định được, từ đó xác định được hình bình hành ABCD.

b) Cách dựng

- Dựng trung điểm O của MP;
- Dựng điểm Q đối xứng với N qua O;
- Qua M và P dựng những đường thẳng song song với NQ; qua N và Q dựng những đường thẳng song song với MP ta được các giao điểm A, B, C, D.

Khi đó tứ giác ABCD là hình bình hành phải dựng.

Các phần còn lại, bạn đọc tự giải.

7.11. (h.7.21)

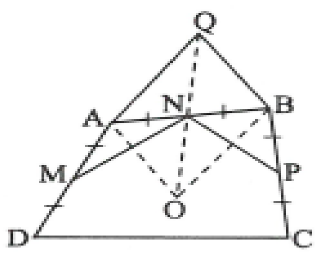
a) Phân tích

Giả sử đã dựng được tứ giác ABCD thỏa mãn đề bài.

Vẽ các đường trung trực của MN và NP chúng cắt nhau tại O.

Gọi Q là điểm đối xứng của O qua N. Tứ giác AOBQ là hình bình hành.

- Điểm A thỏa mãn hai điều kiện:



Hình 7.21

A nằm trên đường trung trực của MN và QA song song với đường trung trực của NP.

• Điểm B thỏa mãn hai điều kiện:

B nằm trên đường trung trực của NP và QB song song với đường trung trực của MN.

Khi đó hai điểm C, D còn lại được xác định dễ dàng.

c) Cách dựng

- Dựng các đường trung trực d_1 của MN và d_2 của NP, chúng cắt nhau tại O;
- Dựng điểm Q đối xứng với O qua N;
- Qua Q dựng một đường thẳng song song với d_2 cắt d_1 tại A;
- Qua Q dựng một đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại B;
- Dựng điểm C đối xứng với B qua P;
- Dựng điểm D đối xứng với A qua M;

Khi đó tứ giác ABCD là tứ giác phải dựng.

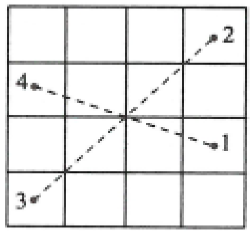
Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

7.12. (h.7.22)

Hình vuông có $4\times 4=16$ ô vuông, chia thành 8 cặp đối xứng nhau qua tâm hình vuông. Xét các cặp hai số ở hai ô đối xứng qua tâm đó.

Tổng hai số của mỗi cặp nhỏ nhất là $1+1=2$, lớn nhất là $4+4=8$.

Có 7 tổng (là 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) mà có 8 cặp số nên phải có hai cặp có tổng bằng nhau.



Hình 7.22

Vị trí của 4 số trong hai cặp này là đỉnh của một hình bình hành phải tìm (trường hợp đặc biệt: 4 số này nằm trong 4 ô có tâm thẳng hàng, ta nói hình bình hành "suy biến" thành đoạn thẳng).

Chuyên đề 8

HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN TRONG CHƯƠNG TỨ GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

Nhiều bài toán trong chương tứ giác cần phải vẽ hình phụ thì mới giải được. Vẽ hình phụ để tạo thêm sự liên kết giữa giả thiết và kết luận từ đó dễ tìm ra cách giải. Một số cách vẽ hình phụ thường dùng trong chương này là:

1. Nếu đề bài có hình thang thì từ một đỉnh có thể vẽ thêm một đường thẳng:

- song song với một cạnh bên;
- song song với một đường chéo;
- vuông góc với đáy.

Khi vẽ như vậy, một đoạn thẳng đã được dời song song với chính nó từ vị trí này đến một vị trí khác thuận lợi hơn trong việc liên kết với các yếu tố khác, từ đó giải được bài toán.

2. Vẽ thêm hình bình hành để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh quan hệ về độ dài, chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng, tính số đo góc,...

3. Vẽ thêm trung điểm của đoạn thẳng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác, của hình thang, định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông. Cũng có thể vẽ thêm đường thẳng song song để tạo ra đường trung bình của tam giác, hình thang.

Dùng định lý đường trung bình có thể chứng minh các quan hệ song song, thẳng hàng, các quan hệ về độ dài,...

4. Vẽ điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một đường thẳng hoặc qua một điểm. Nhờ cách vẽ này ta cũng có thể dời một đoạn thẳng, một góc từ vị trí này sang vị trí khác thuận lợi cho việc chứng minh.

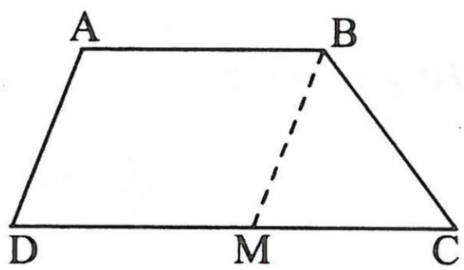
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một hình thang tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai cạnh đáy.

Giải (h.8.1)

*** Tìm cách giải**

Xét hình thang *ABCD (AB // CD)*, ta phải chứng minh *AD* + *BC* > *CD* - *AB*. Điều phải chứng minh rất gần với bất đẳng thức tam giác. Điều này gợi ý cho ta vẽ hình phụ để có *AD* + *BC* là tổng các độ dài hai cạnh của một tam giác.



Hình 8.1

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BM\,//\,AD\left(M\in CD\right)$ ta được $DM=AB$ và $BM=AD$.

Xét ΔBMC có $BM+BC>MC\Rightarrow AD+BC>DC-DM$ hay $AD+BC>CD-AB$ (đpcm).

Trường hợp hai cạnh bên song song thì hai đáy bằng nhau, bài toán hiển nhiên đúng.

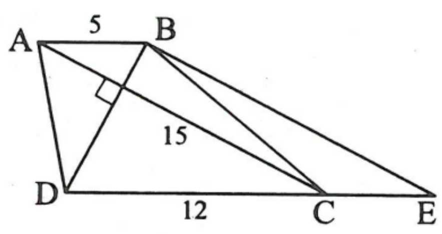
Ví dụ 2. Cho hình thang *ABCD (AB // CD)*, hai đường chéo vuông góc với nhau.

Biết AB = 5cm, CD = 12cm và AC = 15cm. Tính độ dài BD.

Giải (h.8.2)

*** Tìm cách giải**

Ba đoạn thẳng *AB, AC* và *CD* đã biết độ dài nhưng ba đoạn thẳng này không phải ba cạnh của một tam giác nên không tiện sử dụng. Ta sẽ dời song song đường chéo *AC* đến vị trí *BE* thì tam giác *BDE* vuông tại *B* biết độ dài hai cạnh, dễ dàng tính được độ dài cạnh thứ ba *BD*.



Hình 8.2

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BE // AC\left(E \in tia\ DC\right)$. Khi đó: $BE = AC$ = 15cm; CE = AB = 5cm.

Ta có: $BE \perp BD$ (vì $AC \perp BD$).

Xét ΔBDE vuông tại B có $BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (cm).

Ví dụ 3. Hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^O$ Biết AB = 3cm; $BC = 2\sqrt{2}$ cm và CD = 5cm. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 3\widehat{C}$.

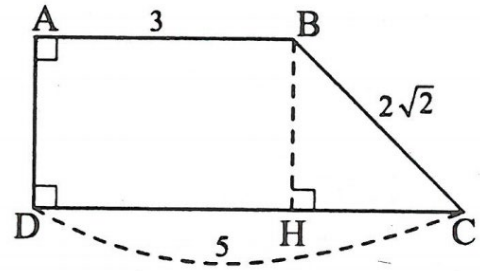
Giải (h.8.3)

*** Tìm cách giải**

Nếu dời song song đoạn thẳng *AD* tới vị trí *BH* thì được ΔBHC vuông tại *H*. Ta dễ dàng tính được *HC* = *HB*, do đó tính được góc *C*, góc *B*.

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BH \perp CD$ $\left(H \in CD\right)$ thì *BH // AD*, do đó *DH* = *AB* = 3cm suy ra: *HC* = 5 - 3 = 2 (cm).



Hình 8.3

Xét ΔBHC vuông tại *H*, áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2} = 2 \text{ (cm)}.$$

Vậy ΔHBC vuông cân $\Rightarrow \widehat{C} = 45^O$ do đó $\widehat{ABC} = 135^O$ suy ra $\widehat{ABC} = 3\widehat{C}$.

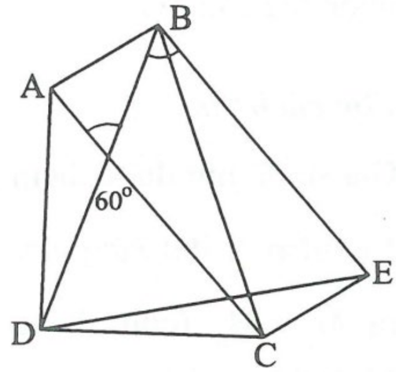
Ví dụ 4. Cho tứ giác *ABCD*, hai đường chéo cắt nhau tại *O*. Cho biết $\widehat{AOB} = 60^o$ và *AC* = *BD* = a. Chứng minh rằng $AB + CD \geq a$.

Giải (h.8.4)

*** Tìm cách giải**

Từ điều phải chứng minh ta thấy cần vận dụng bất đẳng thức tam giác. Do đó cần vẽ hình phụ để tạo ra một tam giác có hai cạnh lần lượt bằng *AB, CD* và cạnh thứ ba bằng đường chéo *AC*.

Nếu vẽ thêm hình bình hành *ABEC* thì các yêu cầu trên được thoả mãn.



Hình 8.4

*** Trình bày lời giải**

Vẽ hình bình hành *ABEC*, ta được *BE // AC*

suy ra $D\hat{B}E = A\hat{O}B = 60^o$

$BE = AC =$ a; $AB =$ CE.

Tam giác *BDE* là tam giác đều $\Rightarrow DE = a$.

Xét ba điểm *C, D, E* ta có: $CE + CD \geq DE$ hay $AB + CD \geq a$

(dấu "=" xảy ra khi điểm *C* nằm giữa *D* và *E* hay *DC // AB*. Khi đó tứ giác *ABCD* là hình thang cân).

Ví dụ 5. Cho hình chữ nhật *ABCD*. Vẽ $AH \perp BD$. Gọi *K* và *M* lần lượt là trung điểm của *BH* và *CD*. Tính số đo của góc *AKM*.

Giải (h.8.5)

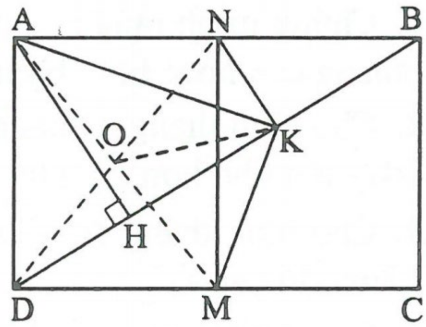
*** Tìm cách giải**

Bài toán có cho hai trung điểm *K* và *M* nhưng chưa thể vận dụng trực tiếp được.

Ta vẽ thêm trung điểm *N* của *AB* để vận dụng định lý đường trung bình của hình chữ nhật, đường trung bình của tam giác.

*** Trình bày lời giải**

Gọi *N* là trung điểm cửa *AB* thì *MN* là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MN // AD$.



Hình 8.5

Mặt khác, *AN // DM* nên tứ giác *ANMD* là hình bình hành. Hình bình hành này có $\widehat{D} = 90^o$ nên là hình chữ nhật. Suy ra hai đường chéo *AM* và *DN* cắt nhau tại trung điểm *O* của mỗi đường:

OA = OM = ON = OD.

Xét ΔABH có *NK* là đường trung bình nên $NK // AH \Rightarrow NK \perp BD$ (vì $AH \perp BD$). Do đó ΔKDN vuông tại *K*.

Xét ΔKDN có *KO* là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $KO = \frac{1}{2}DN$

$\Rightarrow KO = \frac{1}{2}AM = OA = OM$

Vậy ΔKAM vuông tại $K \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^O$

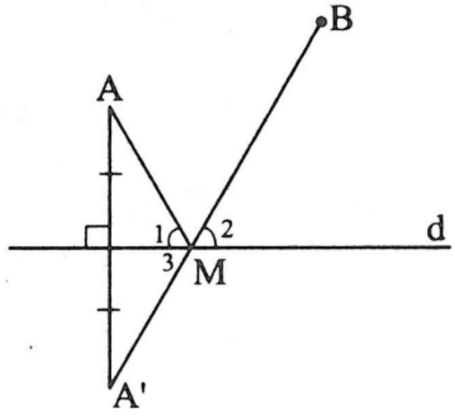
Ví dụ 6. Cho hai điểm *A* và *B* thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d*. Tìm trên *d* một điểm *M* sao cho hai tia *MA, MB* tạo với đường thẳng *d* hai góc nhọn bằng nhau.

Giải (h.8.6)

*** Tìm cách giải**

Giả sử đã tìm được điểm $M \in d$ sao cho $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Vẽ điểm *A'* đối xứng với *A* qua *d* thì $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ suy ra $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$ (cùng bằng $\widehat{M}_1$). Do đó ba điểm *A', M, B* thẳng hàng.



Hình 8.6

*** Trình bày lời giải**

- Vẽ điểm *A'* đối xứng với *A* qua *d*;
- Vẽ đoạn thẳng *A'B* cắt đường thẳng *d* tại *M*;
- Vẽ đoạn thẳng *MA* ta được $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Thật vậy, do *A'* đối xứng với *A* qua *d* nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$.

Mặt khác, $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$. (đối đỉnh) nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

C. Bài tập vận dụng

• Vẽ thêm đường thẳng song song

8.1. Chứng minh rằng nếu một hình thang có hai cạnh bên bằng nhau thì đó là hình thang cân hoặc hình bình hành.

8.2. Cho hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng tổng hai góc kề đáy lớn nhỏ hơn tổng hai góc kề đáy nhỏ.

8.3. Cho hình thang *ABCD (AB // CD),* $BD \perp CD$. Cho biết *AB + CD = BD = a*. Tính độ dài *AC*.

8.4. Cho hình thang cân *ABCD* (AB // CD), đường cao bằng *h* và tổng hai đáy bằng 2*h*. Tính góc xen giữa hai đường chéo.

8.5. Chứng minh rằng trong một hình thang thì tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng với hai lần tích của hai cạnh đáy.

•Vẽ thêm hình bình hành

8.6. Cho tam giác *ABC*. Dựng ra ngoài tam giác này các tam giác đều *ABD, BCE, CAF*. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác *DEF* trùng với trọng tâm của tam giác *ABC*.

8.7. Cho tam giác đều *ABC*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *M*. Qua *M* vẽ một đường thẳng vuông góc với *AB* cắt *AB* tại *H*, cắt đường thẳng vuông góc với *AC* vẽ từ C tại điểm *K*. Gọi *N* là trung điểm của *BM*. Chứng minh rằng tam giác *ANK* có số đo các góc tỉ lệ với 1, 2, 3.

8.8. Dựng tứ giác *ABCD* sao cho $AB = 2,5cm$; $BC = 3cm$; $CD = 4,5cm$; $DA = 3,5cm$ và góc nhọn giữa hai đường thẳng *AD, BC* là 40^o.

• Vẽ thêm trung điểm - Tạo đường trung bình

8.9. Cho hình thang $ABCD\left(AB // CD\right)$, $\widehat{A} = 90^o, AB = \frac{1}{2}CD$. Vẽ $DH \perp AC$. Gọi *K* là trung điểm của *HC*. Tính số đo của góc *BKD*.

8.10. Cho hình vuông *ABCD*, hai đường chéo cắt nhau tại *O*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *OA* và *CD*. Chứng minh rằng tam giác *MNB* vuông cân.

8.11. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, đường phân giác *BM*. Từ *M* vẽ một đường thẳng vuông góc với *BM* cắt đường thẳng *BC* tại *D*. Chứng minh rằng: $BD = 2CM$.

8.12. Cho tứ giác $ABCD, \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^o$. Gọi *E* và *F* lần lượt là hình chiếu của *C* và *D* trên đường thẳng *AB*. Chứng minh rằng *AF* = *BE*.

8.13. Cho đường thẳng *xy*. Vẽ tam giác *ABC* trên một nửa mặt phẳng bờ *xy*. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. Từ *A, B, C* và *G* vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt *xy* lần lượt tại *A', B', C'* và *G'*. Chứng minh rằng:

$AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

8.14. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Trên các cạnh *AB* và *AC* lần lượt lấy các điểm *M* và *D* sao cho $AM = AD$. Từ *A* và *M* vẽ các đường thẳng vuông góc với *BD* chúng cắt *BC* lần lượt tại *E* và *F*. Chứng minh rằng:

$$AE = \frac{BD + MF}{2}$$

8.15. Cho tứ giác **ABCD**. Gọi *A', B', C', D'* lần lượt là trọng tâm của các tam giác *BCD, CDA, DAB, ABC*. Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng *AA', BB', CC', DD'* cùng đi qua một điểm;

b) Điểm này chia *AA', BB', CC', DD'* theo cùng một tỉ số.

8.16. Cho tam giác *ABC* và một điểm *O* nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Vẽ $OH \perp AB, OK \perp AC$. Chứng minh rằng đường trung trực của *HK* đi qua một điểm cố định.

• Vẽ thêm hình đối xứng

8.17. Cho góc *xOy* có số đo bằng 60^O và một điểm *A* ở trong góc đó sao cho *A* cách *Ox* là 2cm và cách *Oy* là lcm.

a) Tìm một điểm *B* trên *Ox* và một điểm *C* trên *Oy* sao cho chu vi tam giác *ABC* nhỏ nhất;

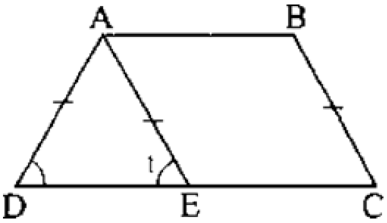
b) Tính độ dài nhỏ nhất của chu vi tam giác *ABC*.

8.18. Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

Hướng dẫn giải

8.1. (h.8.7)

Xét hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$



Hình 8.7

• Trường hợp hai cạnh bên song song:

Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Điều kiện $AD = BC$ ở đề bài được thoả mãn.

• Trường hợp hai cạnh bên không song song:

Vẽ $AE//BC\left(E \in CD\right)$ ta được $ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = BC$.

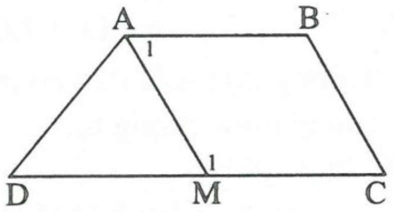
Mặt khác, $AD = BC$ nên $AE = AD \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E}_1$. (1)

Ta lại có: $AE//BC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E}_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{D} = \widehat{C}$, do đó hình thang ABCD là hình thang cân.

8.2. (h.8.8)

Xét hình thang $ABCD$ có $AB//CD$ và $AB < CD$. Ta phải chứng minh: $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$.



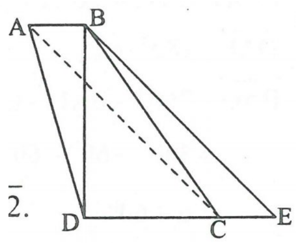
Hình 8.8

Vẽ $AM//BC\left(M \in CD\right)$ khi đó $\widehat{B} = \widehat{M_1}$ và $\widehat{C} = \widehat{A_1}$.

Ta có: $\widehat{A} > \widehat{A_1} = \widehat{C}; \widehat{M_1} > \widehat{D}$ (tính chất góc ngoài của ΔADM)

$\Rightarrow \widehat{B} > \widehat{D}$. Do đó $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$.

8.3. (h.8.9)



Hình 8.9

Vẽ $BE//AC,\ E \in CD$. Ta được $CE = AB$ và $BE = AC$.

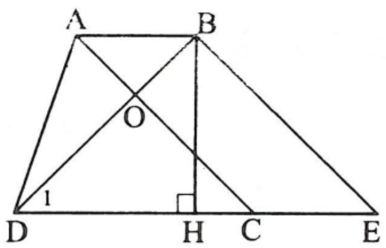
Ta có: $AB + CD = CE + CD = DE$.

Vì $AB + CD = a$ nên $DE = a$.

Tam giác BDE vuông cân $\Rightarrow BE = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

8.4. (h.8.10)

Qua B vẽ $BE//AC(\in G$ đường thẳng $CD)$, ta được $BE = AC$ và $CE = AB$.



Hình 8.10

Do đó $DE = DC + CE = DC + AB = 2h$.

Ta có: $BD = AC$ (hai đường chéo của hình thang cân)

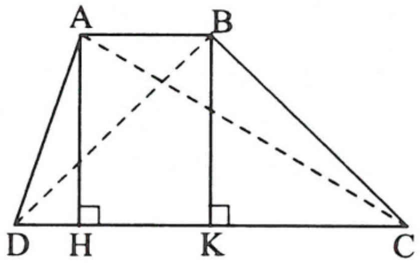
mà $BE = AC$ nên $BD = BE$.

ΔBDE cân tại B, BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, suy ra $DH = HE = h; BH = h$. Do đó các tam giác HBD, HBE vuông cân

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E} = 45^o$ Suy ra ΔBDE vuông tại $B \Rightarrow \widehat{COD} = \widehat{EBD} = 90^O$.

8.5. (h.8.11)

• Trường hợp hình thang có hai góc kề một đáy cùng tù, hai góc kề đáy kia cùng nhọn



Hình 8.11

Vẽ $AH \perp CD, BK \perp CD$ thì $HK = AB$

Ta có: $AC^2 - HC^2 = AD^2 - DH^2 \left(= AH^2\right)$;

$BD^2 - KD^2 = BC^2 - KC^2 = \left(= BK^2\right)$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được:

$\left(AC^2 - HC^2\right) + \left(BD^2 - KD^2\right) = \left(AD^2 + BC^2\right) - DH^2 - CK^2$

$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = \left(AD^2 + BC^2\right) + \left(CH^2 - CK^2\right) + \left(DK^2 - DH^2\right)$

$$= AD^2 + BC^2 + (CH - CK)(CH + CK) + (DK - DH)(DK + DH)$$
$$= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK) + HK(DK + DH)$$
$$= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK + DK + DH)$$
$$= AD^2 + BC^2 + HK(CD + CD)$$
$$= AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$$

• Trường hợp mỗi đáy có một góc tù (hoặc một góc vuông), một góc nhọn: Cũng chứng minh tương tự.

8.6. (h.8.12)

Vẽ hình bình hành *DAFH.*

Gọi *N* là giao điểm của hai đường chéo *DF* và *AH, M* là giao điểm của *EH* và *BC*.

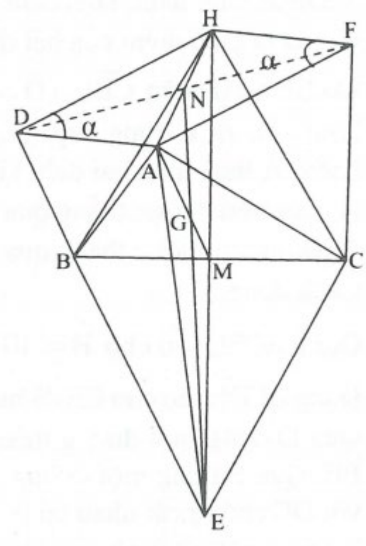
Ta có $NA = NH$, $ND = NF$.

Ta đặt $\widehat{DAH} = \widehat{AFH} = \alpha$ thì $\widehat{BDH} = \widehat{HFC} = \alpha + 60^O$.

$\widehat{DAF} = 180^O = \alpha;$

$\widehat{\mathrm{BAC}} = 360^O - \widehat{BAD} - \widehat{CAF} - \widehat{DAF}$

$$= 360^O - 60^O - 60^O - \left(180^O - \alpha\right)$$
$$= \alpha + 60^O$$



Hình 8.12

ΔBDH và ΔHFC có: $BD = HF\left(= AD\right); B\hat{D}H = H\hat{F}C$ (chứng minh trên); $DH = FC\left(= AF\right)$. Do đó $\Delta BDH = \Delta HFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow HB = HC.$ (1) Chứng minh tương tự, ta được

$\Delta BAC = \Delta HFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = HC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HB = HC = BC$.

Tứ giác *BHCE* có các cặp cạnh đối bằng nhau (cùng bằng *BC*) nên là hình bình hành $\Rightarrow MB = MC$ và $MH = ME$.

• Xét ΔAEH có *AM* và *AN* là hai đường trung tuyến nên giao điểm *G* của chúng là trọng tâm

$\Rightarrow EG = \dfrac{2}{3}EN$ và $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

• Xét ΔABC có AM là đường trung tuyến mà $AG = \dfrac{2}{3}AM$ nên G là trọng tâm của ΔABC.

• Xét ΔEDF có EN là đường trung tuyến mà $EG = \dfrac{2}{3}EN$ nên G là trọng tâm của AEDF.

Vậy ΔABC và ΔEDF có cùng trọng tâm G.

8.7. (h.8.13)

ΔHBM vuông tại H có $\widehat{ABC} = 60^o$ nên: $\widehat{HMB} = 30^o$

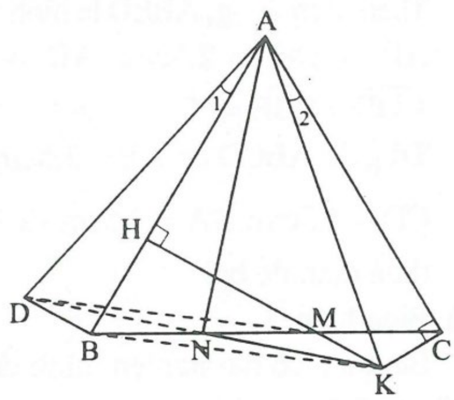
ΔCAK vuông tại C có $\widehat{ACB} = 60^o$ nên: $\widehat{KCM} = 30^o$

Suy ra: $\widehat{KMC} = \widehat{KCM}$ (cùng nằm $\widehat{HMB}$)

Do đó ΔKMC cân $\Rightarrow KC = KM$. .

Vẽ hình bình hành $BKMD \Rightarrow BD // KM$ và $BD = KM$.

Do đó $BD \perp AB$ (vì $KM \perp AB$) và $BD = KC$ (vì cùng bằng KM).



Hình 8.13

$\Delta ABD = \Delta ACK$ $(c.g.c) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ và $AD = AK$.

Tam giác ADK cân, AN là đường trung tuyến nên là đường cao, đường phân giác $\Rightarrow AN \perp DK, \widehat{AHK} = 90^O$

Ta có $A_2 + \widehat{BAK} = \widehat{BAC} = 60^O \Rightarrow A_1 + \widehat{BAK} = 60^O$

hay $\widehat{DAK} = 60^O \Rightarrow \widehat{NAK} = 60^O : 2 = 30^O$

Do đó $\widehat{AKN} = 90^O - 30^O = 60^O$

Xét ΔANK có $\widehat{NAK} : \widehat{NKA} : \widehat{ANK} = 30^O : 60^O : 90^O = 1 : 2 : 3$

8.8. (h.8.14)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được tứ giác $ABCD$ thoả mãn đề bài.

Vẽ hình bình hành $DABE$ ta được $BE = AD = 3,5cm$; $DE = AB = 2,5cm.$ Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

Do $BE // AD$ nên $\widehat{CBE} = \widehat{O} = 40^O$.

Tam giác BCE dựng được (c.g.c). Tam giác CDE dựng được (c.c.c). Điểm A thoả mãn hai điều kiện:

- A nằm trên đường thẳng qua D và song song với BE;

- A nằm trên đường thẳng qua B và song song với DE.

b) Cách dựng

- Dựng ΔCBE sao cho $B = 40^O$; $BC = 3cm$; $BE = 3,5cm.$

- Dựng ΔCDE sao cho CE đã biết; $CD = 4,5cm$; $ED = 2,5cm$.

- Qua D dựng một đường thẳng song song với BE. Qua B dựng một đường thẳng song song với DE chúng cắt nhau tại A.

Tứ giác $ABCD$ là tứ giác phải dựng.

c) Chứng minh

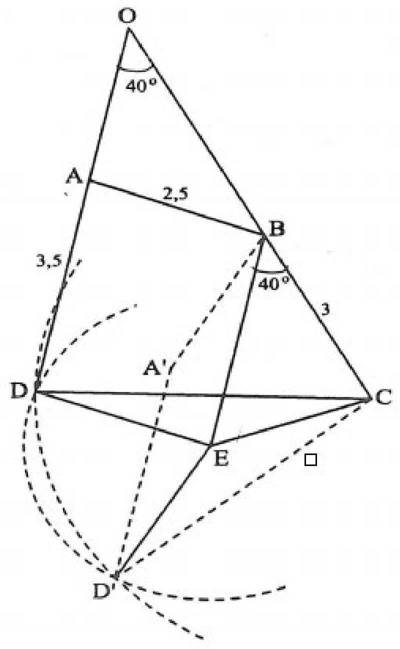
Theo cách dựng, $ABED$ là hình bình hành nên $AB = DE = 2,5$ cm; $AD = BE = 3,5$ cm

$\widehat{COD} = \widehat{CBE} = 40^O$.

Tứ giác $ABCD$ có $AB = 2,5cm$; $BC = 3cm$; $CD = 4,5cm$; $DA = 3,5cm$ và $\widehat{COD} = 40^O$, thoả mãn đề bài.

d) Biện luận

Bài toán có hai nghiệm hình là tứ giác $ABCD$ và tứ giác $A'BCD'$.



Hình 8.14

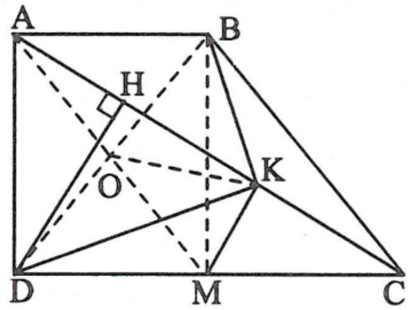
8.9. (h.8.15)

Gọi M là trung điểm của CD.

Xét ΔHCD có KM là đường hung bình nên $KM // HD$ do đó $KM \perp AC$ (vì $HD \perp AC$).

Tứ giác $ADMB$ có $AB // MD$ và $AB = DM$ $\left(= \frac{1}{2}CD\right)$ nên $ABMD$ là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình chữ nhật. Suy ra $AM = BD$ và $OA = OM = OB = OD$.



Hình 8.15

Xét ΔKAM vuông tại K có KO là đường trung tuyến nên $KO = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BD$.

Xét ΔKBD có KO là đường trung tuyến mà $KO = \frac{1}{2}BD$ nên ΔKBD vuông tại K, do đó $\widehat{BKD} = 90^o$.

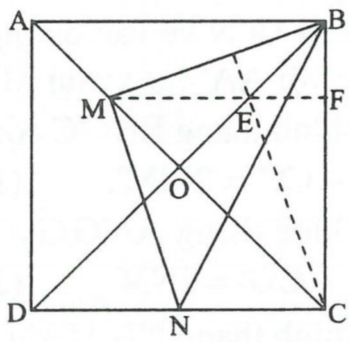
8.10. (h.8.16)

Gọi E là trung điểm của OB thì ME là đường trung bình của $\Delta AOB \Rightarrow ME // AB$ và $ME = \frac{1}{2}AB$.

Do đó $ME // NC$ và $ME = NC$.

Tứ giác $MECN$ là hình bình hành $\Rightarrow CE // MN$ và $CE = MN$.

Ta có: $ME \perp BC$ tại F (vì $AB \perp BC$), $BO \perp AC$ (tính chất đường chéo hình vuông).



Hình 8.16

Xét ΔMBC có E là trực tâm nên $CE \perp MB$ do đó $MN \perp MB$. (1)

ΔMAB và ΔEBC có:

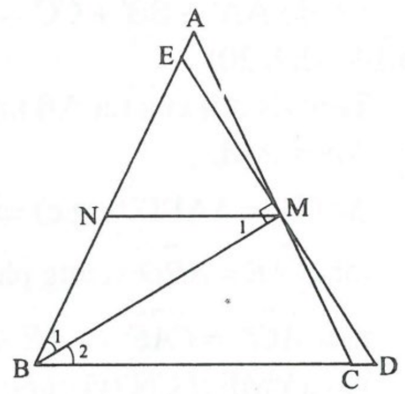
$AB = BC; \widehat{MAB} = \widehat{EBC} = 45^o; MA = EB$ (một nửa của hai đoạn thẳng bằng nhau).

Vậy $\Delta MAB = \Delta EBC$ (c.g.c)$\Rightarrow MB = EC \Rightarrow MB = MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra *AMNB* vuông cân.

8.11. (h.8.17)

Gọi E là giao điểm của đường thẳng *DM* với *AB*. Tam giác *BDE* có *BM* vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân, do đó $BD = BE$ và $MD = ME$.



Hình 8.17

Gọi N là trung điểm của BE thì MN là đường trung bình của $\Delta EBD \Rightarrow MN // BD$

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_2$, do đó $\hat{M}_1 = \hat{B}_1 \left(= \hat{B}_2\right)$

$\Rightarrow \Delta NBM$ cân $\Rightarrow BN = MN$.

Tứ giác *BCMN* là hình thang cân$\Rightarrow BN = CM$.

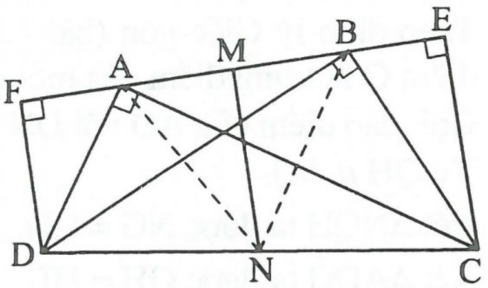
$\Rightarrow MN = CM$

Xét ΔMBE vuông tại *M* có *MN* là đường trung tuyến nên $MN = \frac{1}{2}BE$.

$\Rightarrow BE = 2MN \Rightarrow BD = 2CM$

8.12. (h.8.18)

Ta có: $CE // DF$ (cùng vuông góc với *AB*). Tứ giác *FECD* là hình thang.



Hình 8.18

Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *EF* và *CD, MN* là đường trung bình của hình thang *CEFD*. Do đó $MN // CE$

$\Rightarrow MN \perp EF$.

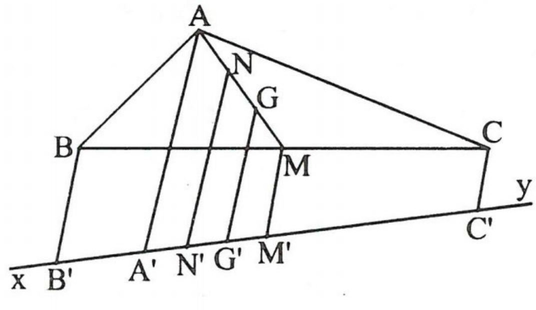
Ta có: $AN = BN = \frac{1}{2}CD$ (tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông) $\Rightarrow \Delta NAB$ cân

Mặt khác, NM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MA = MB$ dẫn tới $AF = BE$.

8.13. (h.8.19)

Vẽ đường trung tuyến *AM*. Gọi *N* là trung điểm của *AG*.

Qua *M* và *N* vẽ các đường thẳng song song với *AA'* cắt *xy* tại *M'* và *N'*.



Hình 8.19

• Xét hình thang *BB'CC'* có:

$BB' + CC' = 2MM'$. (1)

• Xét hình thang *AA'G'G* có:

$AA' + GG' = 2NN'$. (2)

• Xét hình thang *NN'M'M* có $NN' + MM' = 2GG' \Rightarrow 2\left(NN' + MM'\right) = 4GG'$

Từ (1) và (2) suy ra: $AA'+BB'+CC'+GG'=2(NN'+MM')$.

$\Rightarrow\ AA'+BB'+CC'+GG'=4GG'$.

Do đó: $AA'+BB'+CC'=3GG'$.

8.14. (h.8.20)

Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *N* sao cho:

$AN=AM$.

$\Delta ACN=\Delta ABD$ (c.g.c) $\Rightarrow$ CN = BD và $\widehat{ACN}=\widehat{ABD}$ mà

$\widehat{CAE}=\widehat{ABD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAE}$)

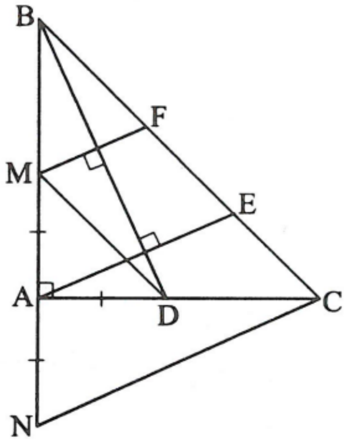
nên $\hat{ACN}=\hat{CAE}\Rightarrow AE//CN$

Do đó $MF//CN$ (vì cùng song song với *AE*).

Xét hình thang *MFCN* có $AE//CN$

và $AM=AN$ nên $EF=EC$.

Suy ra $AE=\dfrac{MF+CN}{2}=\dfrac{MF+BD}{2}$



Hình 8.20

8.15. (h.8.21)

a) Gọi *M, N, P, Q, E, F* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD, DA, AC* và *BD*. Theo định lý Giéc-gôn (bài 4.8) thì ba đường thẳng *MP, NQ, EF* đồng quy tại điểm *O* là trung điểm của mỗi đoạn thẳng đó.

Gọi giao điểm của *AO* với *DN* là *G*.

Vẽ $QH//AG$.

Xét ΔNQH ta được $NG=GH$

Xét ΔADG ta được $GH=HD$

Vậy $NG=GH=HD\Rightarrow HG=\dfrac{1}{3}DN.\ (1)$

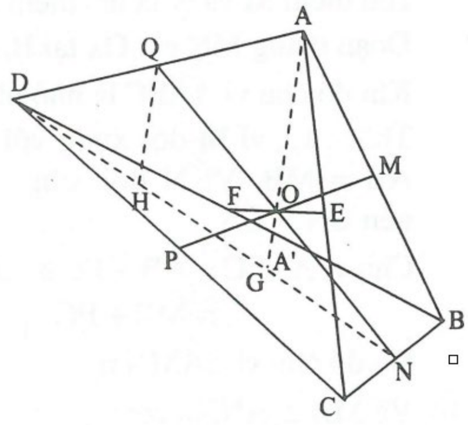
Vì *A'* là trọng tâm của *ABCD* nên $A'\in DN$

và $NA'=\dfrac{1}{3}DN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $G\equiv A'$ do đó *AA'* đi qua *O*.

Chứng minh tương tự, các đường thẳng *BB'*, *CC'*, *DD'* đều đi qua *O*.

Suy ra *AA', BB', CC', DD'* đồng quy tại *O*.



Hình 8.21

b) Ta có: $OA'=\dfrac{1}{2}QH$ mà $QH=\dfrac{1}{2}AA'$ nên $OA'=\dfrac{1}{4}AA'$.

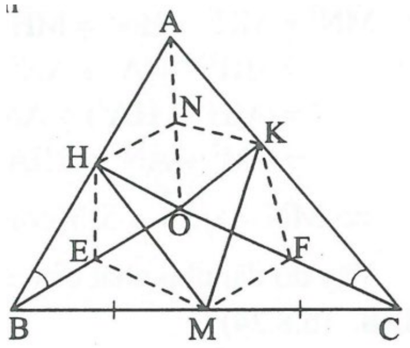
Suy ra: $OA'=\dfrac{1}{3}OA$ hay $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{1}{3}$.

Chứng minh tương tự, ta được $\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{3}$.

8.16. (h.8.22)

Gọi *E, F, M* lần lượt là trung điểm của *OB, OC, BC.* Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có:

$EH=EB=EO=\frac{1}{2}OB; FK=FC=FO=\frac{1}{2}OC.$



Hình 8.22

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có tứ giác *OFME* là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{OEM}=\widehat{OFM}\quad (1)$

Mặt khác, $\widehat{HEO}=2\widehat{ABO}; \widehat{KFO}=2\widehat{ACO}$

mà $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}$ nên $\widehat{HEO}=\widehat{KFO}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{HEM}=\widehat{MFK}$.

ΔHEM và ΔMFK có: $HE=MF\left(=\frac{1}{2}OB\right); H\hat{E}M=M\hat{F}K$ (chứng minh trên); $EM=FK\,(=OC)$

Do đó $\Delta HEM=\Delta MFK$ (c.g.c) $\Rightarrow MH=MK$ (3)

Gọi *N* là trung điểm của *OA*, ta có: $NH=NK\left(=\frac{1}{2}OA\right)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra *MN* là đường trung trực của *HK*.

Vậy đường trung trực của *HK* đi qua điểm cố định *M* là trung điểm của *BC*.

8.17. (h.8.23)

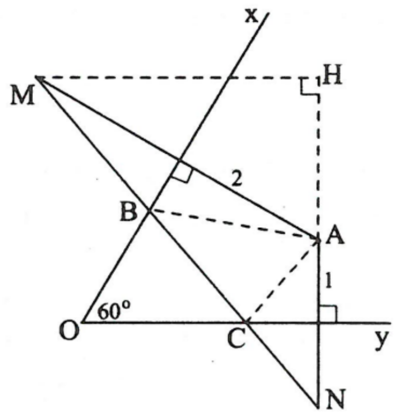
a) Vẽ điểm *M* đối xứng *A* qua *Ox*.

Vẽ điểm *N* đối xứng *A* qua *Oy*.

Hai điểm *M* và *N* là hai điểm cố định.

Đoạn thẳng *MN* cắt *Ox* tại *B*, cắt *Oy* tại *C*. Khi đó chu vi ΔABC là nhỏ nhất.

Thật vậy, vì *M* đối xứng với *A* qua *Ox* nên *AB = MB*. Vì *N* đối xứng với *A* qua *Oy* nên *CN = CA*.



Hình 8.23

Chu vi $\Delta ABC=AB+BC+CA$

$=MB+BC+CN=MN.$

Do đó chu vi ΔAMN nhỏ nhất là bằng *MN*.

b) Vẽ $MH\perp AN$, ta có:

$\widehat{MAH}=\widehat{O}=60^o$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) $\Rightarrow \widehat{AMH}=30^o$.

Xét ΔAMH vuông tại H, $\widehat{AMH} = 30^o$ nên $AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}.4 = 2$ cm.

Xét ΔHMN vuông tại H, ta có:

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 = MH^2 + \left(HA + AN\right)^2$$

$$= MH^2 + HA^2 + AN^2 + 2HA.AN$$

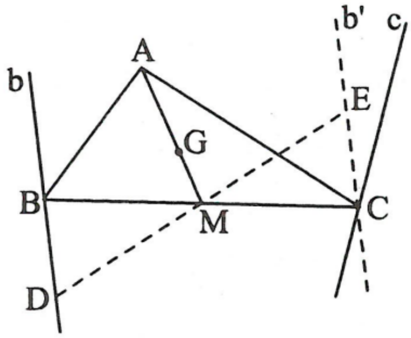
$$= \left(MH^2 + HA^2\right) + AN^2 + 2HA.AN$$

$$= AM^2 + AN^2 + 2HA.AN = 4^2 + 2^2 + 2.2.2 = 28$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{28} \approx 5,3$$

Vậy độ dài nhỏ nhất của chu vi ΔABC là 5,3 cm.

8.18. (h.8.24)



Hình 8.24

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được tam giác ABC có đỉnh A tại vị trí A cho trước có trọng tâm G tại vị trí G cho trước, có đỉnh $B \in b$,đỉnh $C \in c$ với b, c cho trước.

Gọi M là giao của tia AG với BC.

Ta có $AM = \frac{3}{2}AG$ nên điểm M xác định được.

Gọi D là một điểm trên b. Vẽ điểm E đối xứng với D qua M.

Khi đó đường thẳng b' đi qua C và E là đường thẳng đối xứng với b qua M.

• Điểm C thoả mãn hai điều kiện: $C \in c$ và $C \in b'$.

• Điểm $B \in b$ và $B \in$ B e tia CM.

b) Cách dựng

Dựng điểm M thuộc tia AG sao cho $AM = \frac{3}{2}AG$;

Dựng đường thẳng b' đối xứng với b qua M, b' cắt c tại C;

Dựng giao điểm B của đường thẳng b với tia CM;

Vẽ các đoạn thẳng AB, AC ta được ΔABC phải dựng.

Các phần còn lại bạn đọc tự giải.

Chuyên đề 9:

TOÁN QUỸ TÍCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Quỹ tích của những điểm có tính chất T nào đó là tập hợp tất cả những điểm có tính chất T đó.

2. Các quỹ tích cơ bản

- Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng đó. (1).
- Quỹ tích các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó. (2).
- Quỹ tích các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h. (3)
- Quỹ tích những điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O, bán kính R. (4).

3. Cách giải bài toán tìm quỹ tích các điểm có chung tính chất T nào đó

a) *Phần thuận*: Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất T thì điểm M thuộc một hình H nào đó.

b) *Phần đảo*: Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình H thì điểm M có tính chất T.

c) *Kết luận*: Quỹ tích của điểm M là hình H.

4. Một số lưu ý khi giải bài toán tìm quỹ tích.

a) *Tìm hiểu đề bài*

Cần xét xem:

- Yếu tố nào cố định (vì trong các quỹ tích cơ bản đều có nói đến yếu tố cố định như điểm, đoạn thẳng, góc,….).
- Yếu tố nào không đổi (thường là khoảng cách không đổi, góc có số đo không đổi,…);
- Quan hệ nào không đổi (ví dụ điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng, cách đều hai cạnh của một góc,…);
- Yếu tố nào chuyển động (điểm nào có vị trí thay đổi, liên quan đến điểm phải tìm quỹ tích như thế nào?).

b) *Dự đoán quỹ tích.*

Vẽ nháp vài vị trí của điểm cần tìm quỹ tích (thường là vẽ ba vị trí).

- Nếu ba điểm này thẳng hàng thì ta dự đoán quỹ tích là đường thẳng (đường thẳng song song, đường trung trực, tia phân giác,…).
- Nếu ba điểm không thẳng hàng thì quỹ tích có thể là đường tròn.

c) *Giới hạn quỹ tích*

Có nhiều bài toán quỹ tích cần tìm chỉ là một phần của hình H, phần còn lại không thỏa mãn điều kiện của bài toán, ta phải loại trừ phần này. Làm như vậy gọi là tìm giới hạn của quỹ tích.

Việc tìm giới hạn của quỹ tích thường làm sau phần thuận, trước phần đảo.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và D là một điểm di động trên cạnh BC. Vẽ DE//AB, DF//AC $\left(E \in AC,\ F \in AB\right)$. Gọi M là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích của điểm M.

Giải (h.9.1)

a) Phần thuận

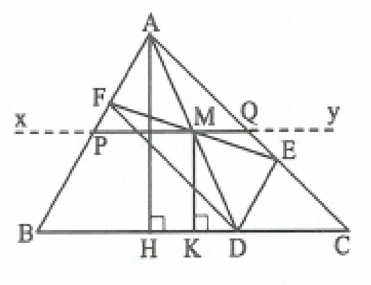
Tứ giác AEDF có DE//AF, DF//AE nên là hình bình hành.

Suy ra AD và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy trung điểm M của EF cũng là trung điểm của AD.

Vẽ $MK \perp BC,\ AH \perp BC$.

Do AH cố định nên AH có độ dài không đổi.

Xét ΔAHD có MK là đường trung bình, $MK = \dfrac{1}{2}AH$ (không đổi).



Hình 9.1

Điểm M cách đường thẳng BC cố định một khoảng $\dfrac{1}{2}AH$ không đổi nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy\,//\,BC$ và cách BC một khoảng $\dfrac{1}{2}AH$. (xy nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A).

Giới hạn: Khi điểm D di động tới điểm B thì điểm M di động tới trung điểm P của AB. Khi điểm D di động tới điểm C thì điểm M di động tới trung điểm Q của AC. Vậy M chỉ nằm trên đường trung bình PQ của tam giác ABC.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng PQ. Vẽ tia AM cắt BC tại D. Vẽ DE // AB, DF // AC $\left(E \in AC,\ F \in AB\right)$. Ta phải chứng minh M là trung điểm của EF.

Thật vậy, xét tam giác ABC có PQ // BC và PA = PB nên MA = MD.

Tứ giác AEDF là hình bình hành nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Do M là trung điểm của AD nên M là trung điểm của EF.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác ABC.

Nhận xét: Điểm M là trung điểm của EF. Đây là *tính chất ban đầu* của điểm M, chưa phải *tính chất cơ bản* theo các quỹ tích (1), (2), (3), (4). Dó đó chưa thể vận dụng để trả lời điểm M nằm trên hình nào.

Ta đã giải quyết vấn đề này bằng cách biến đổi tính chất ban đầu của điểm M lần lượt như sau:

M là trung điểm của EF (tính chất ban đầu)

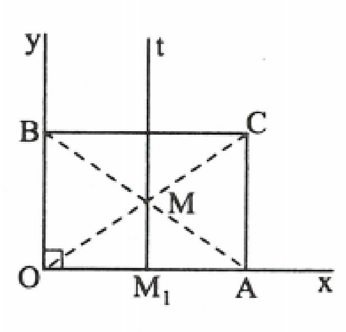
$\Rightarrow$ M là trung điểm của AD (tính chất T')

$\Rightarrow$ M cách đường thẳng BC cố định một khoảng không đổi bằng $\dfrac{AH}{2}$ (đây mới là tính chất cơ bản của điểm M)

$\Rightarrow$ M nằm trên đường thẳng xy // BC và cách BC một khoảng $\frac{AH}{2}$.

Như vậy ta phải chuyển *tính chất ban đầu* của điểm M qua các tính chất trung gian đến *tính chất cơ bản* của điểm M rồi theo các quỹ tích cơ bản trả lời điểm M nằm trên hình nào.

Ví dụ 2: Cho góc vuông xOy, điểm A cố định trên tia Ox, điểm B di động trên tia Oy. Vẽ hình chữ nhật AOBC. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AB và OC. Tìm quỹ tích điểm M.



Hình 9.2

Giải (h.9.2)

a) Phần thuận

M là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật nên MO = MA.

Điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng OA cố định nên M nằm trên đường trung trực của OA.

Giới hạn: Khi điểm B tiến dần tới điểm O thì điểm C tiến dần đến điểm A. Khi đó điểm M tiến dần đến M_1 là trung điểm của OA. Khi điểm B ra xa vô tận thì điểm M cũng ra xa vô tận. Vậy M nằm trên tia M_1t thuộc đường trung trực của OA, tia này nằm trong góc xOy, trừ điểm M_1.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên tia M_1t. Vẽ tia AM cắt tia Oy tại B. Vẽ hình chữ nhật AOBC. Ta phải chứng minh M là giao điểm của hai đường chéo.

Thật vậy, xét ΔAOB có $M_1t // OB$ (vì cùng vuông góc với OA).

Mặt khác, $M_1O = M_1A$ nên MA= MB. Vậy M là trung điểm của AB

$\Rightarrow$ M cũng là trung điểm của OC (vì AOBC là hình chữ nhật).

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là tia M_1t thuộc đường trung trực của OA, tia này nằm trong góc xOy, trừ điểm M_1.

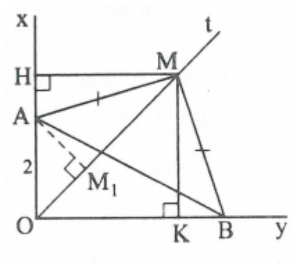
Ví dụ 3. Cho góc vuông xOy. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho OA = 2cm. Điểm B di động trên tia Oy. Vẽ tam giác ABM vuông cân tại M trong đó M và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Tìm quỹ tích của điểm M.

Giải (h.9.3)

a) Phần thuận

Vẽ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$ ta được $\widehat{HMK} = 90^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{AMB}=90^\circ$ nên $\widehat{HMK}=\widehat{KMB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).



Hình 9.3

$\Delta HMA=\Delta KMB$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $MH=MK$.

Điểm M nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc đó nên điểm M nằm trên tia phân giác Ot của góc xOy.

Giới hạn: Khi điểm B trùng với điểm O thì điểm M trùng với điểm M_1 (M_1 nằm trên tia Ot và $OM_1=\sqrt{2}$ cm). Khi điểm B ra xa vô cùng thì điểm M ra xa vô cùng. Vậy M nằm trên tia M_1t .

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên tia M_1t . Từ M vẽ một đường thẳng vuông góc với MA cắt tia Oy tại B. Ta phải chứng minh ΔABM vuông cân tại M.

Thật vậy, vẽ $MH\perp Ox, MK\perp Oy$ ta có $MH=MK$ và $\widehat{HMK}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HMA}=\widehat{KMB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Do đó $\Delta HMA=\Delta KMB$ (g.c.g) $\Rightarrow MA=MB$.

ΔABM vuông tại M có $MA=MB$ nên là tam giác vuông cân.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là tia M_1t nằm trên tia phân giác của góc xOy.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành ABCD, cạnh AB cố định, BC = 2cm. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo.

Giải (h.9.4)

a) Phần thuận

Gọi M là trung điểm của AB.

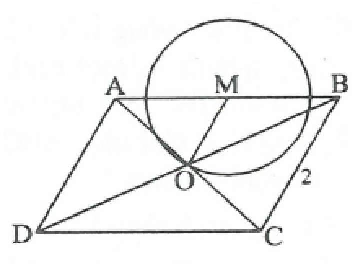
Do AB cố định nên M là điểm cố định.

O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành

$\Rightarrow OA=OC$.

Vậy OM là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow OM=\frac{1}{2}BC=1cm.$



Hình 9.4

Điểm O cách điểm M cố định một khoảng 1 cm nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M, bánh kính 1 cm.

Giới hạn: Vì ba điểm O, A, B không thẳng hàng nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M, bán kính 1cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng AB.

b) Phần đảo

Lấy điểm O bất kì trên đường tròn tâm M, bán kính 1cm thì OM = 1cm. Vẽ điểm C đối xứng với A qua O, xẽ điểm D đối xứng với B qua O. Ta phải chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành và BC = 2cm.

Thật vậy, tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

OM là đường trung bình của tam giác ABC nên $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2.1 = 2cm.$

c) Kết luận

Quỹ tích của điểm O là đường tròn tâm M bán kính 1cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng AB.

C. Bài tập vận dụng

● **Đường thẳng song song**

9.1. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau 2cm. Tìm quỹ tích những điểm M có tổng khoảng cách đến a và b là 4cm.

9.2. Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định trên tia Ox sao cho OA = a. Điểm B di động trên tia Oy. Vẽ vào trong góc vuông này tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích của điểm C.

9.3. Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác DAC và EBC vuông cân tại D và E. Gọi M là trung điểm của DE. Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm C di động giữa A và B.

9.4. Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A và B. Vẽ các tam giác đều DAC và EBC trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB. Gọi M là trung điểm của DE. Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm C di động giữa A và B.

9.5. Cho tam giác ABC cân tại A. Một điểm D di động trên đáy BC. Đường thẳng vuông góc với BC vẽ từ D cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích của điểm M.

● **Đường trung trực và đường thẳng vuông góc**

9.6. Cho góc vuông xOy và một điểm A ở trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A quay quanh A, một cạnh cắt Ox tại B, cạnh kia cắt Oy tại C. Gọi M là trung điểm của BC. Tìm quỹ tích của điểm M.

9.7. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là một điểm ở trong hình chữ nhật hoặc trên các cạnh của nó

1) Chứng minh rằng $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MC}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MD}^2$;

2) Tìm quỹ tích của điểm M nếu $MA + MC = MB + MD$.

9.8. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tia $Bx \perp BC$ và trên đó lấy một điểm D. Vẽ tam giác đều CDM (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ CD). Tìm quỹ tích của điểm M khi D di động trên tia Bx.

● **Tia phân giác**

9.9. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E di động. Trên tia đối của tia BS lấy điểm F di động sao cho DE = BF. Vẽ hình bình hành ECFM. Hỏi điểm M di động trên đường nào?

9.10. Cho ta giác ABC vuông tại A. Dọi D và E lần lượt là các điểm di động trên hai cạnh AB và BC sao cho BD = BE. Từ E vẽ một đường thẳng vuông góc với DE cắt AC tại F. Gọi M là trung điểm của DF. Tìm quỹ tích của điểm M.

9.11. Cho góc xOy có số đo bằng 60°. Một hình thoi ABCD có cạnh bằng a, $\widehat{B} = 60^\circ$, đỉnh B di động trên tia Ox, đỉnh D di động trên tia Oy, hai điểm A và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BD. Tìm quỹ tích của điểm A.

● **Đường tròn**

9.12. Cho hình vuông ABCD cạnh 4cm. Tia Dx nằm giữa hai tia DA và DC. Vẽ tia phân giác của góc ADx cắt AB tại E, tia phân giác của góc CDx cắt BC tại F. Tia Dx cắt EF tại M. Hỏi khi tia Dx quay quanh D từ vị trí DA đến vị trí DC thì điểm M di động trên đường nào?

9.13. Cho góc vuông xOy. Một đoạn thẳng AB = 2a không đổi, có $\mathrm{A} \in \mathrm{O}x$ và $b \in \mathrm{Oy}$. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB.

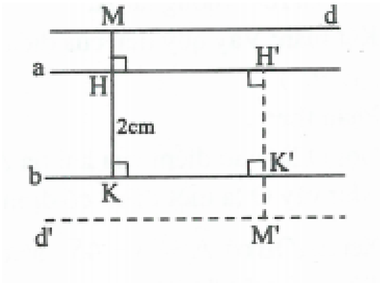
9.14. Cho hình bình hành ABCD cạnh CD cố định, AC = 2cm. Tìm quỹ tích của đỉnh B.

Hướng dẫn giải

9.1 (h.9.5)

● Xét trường hợp điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b.

a) Phần thuận



Hình 9.5

Vẽ $MH \perp a$, đường thẳng MH cắt b tại K.

Ta có: $MH + MK = 4cm;\ MK - MH = 2cm$.

Suy ra: $MH = \left(4-2\right):2 = 1cm$.

Điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b và cách a là 1cm nên điểm M nằm trên đường thẳng d song song với a và cách a là 1cm.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d. Vẽ $MH \perp a$ cắt đường thẳng d tại K.

Ta có: $MH = 1cm;\ HK = 2cm \Rightarrow MK = 3cm$. Do đó $MH + MK = 4cm$.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đường thẳng d // a và cách a là 1cm (d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b).

● Xét trường hợp điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ b không chứa a.

Cũng chứng minh tương tự như trên, ta được quỹ tích của điểm M là đường thẳng d' // b và cách b là 1cm (d' nằm trên nửa mặt phẳng bờ b không chứa a).

Kết hợp cả 2 trường hợp trên ta được: Quỹ tích của điểm M là hai đường thẳng d và d' nằm ngoài phần mặt phẳng giới hạn bởi a và b sao cho d// a và cách a là 1cm; d' // b và cách b là 1cm.

9.2 (h.9.6)

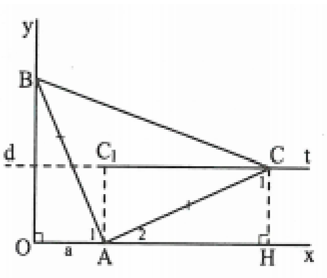
a) Phần thuận

Vẽ $CH \perp Ox$ ta được $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$).

$\Delta HAC = \Delta OBA$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow CH = OA = a$.

Điểm C cách đường thẳng Ox một khoảng bằng a nên C nằm trên đường thẳng $d//$Ox và cách Ox một khoảng a cho trước.

Giới hạn: Nếu B trùng với O thì C trùng với C_1 ($C_1 \in d$ và $C_1A \perp OA$). Nếu B ra xa vô cùng thì điểm C cũng ra xa vô cùng. Vậy điểm C nằm trên tia C_1t của đường thẳng d.



Hình 9.6

b) Phần đảo

Lấy điểm C bất kì trên tai C_1t. Vẽ đoạn thẳng AC.

Từ A vẽ $AB \perp AC (B \in Oy)$. Ta phải chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

Thật vậy, vẽ $CH \perp Ox$.

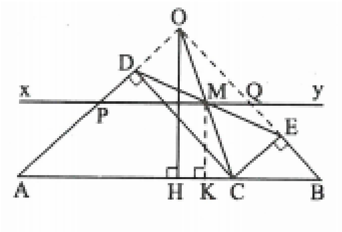
ΔHAC và ΔOBA có : $\widehat{H} = \widehat{O} = 90°; HC = OA = a; \widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$).

Dó đó $\Delta HAC = \Delta OBA$ (g.c.g) $AC = AB$.

Vậy ΔABC vuông tại A.

c) Kết luận: Vậy quỹ tích của điểm C là tia $C_1t // Ox$ và cách Ox một khoảng bằng a.

9.3. (h.9.7)



Hình 9.7

a) Phần thuận

Gọi O là giao điểm của hai tia AD và BE.

Như vậy O là một điểm cố định.

Xét ΔAOB có $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$ nên $\widehat{AOB} = 90°$.

Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Hai đường chéo DE và OC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên trung điểm M của DE cũng là trung điểm của OC.

Vẽ $OH \perp AB, MK \perp AB$ thì MK là đường trung bình của ΔOHC, suy ra $MK = \frac{1}{2}OH$.

Điểm M cách đường thẳng AB cho trước một khoảng là $\frac{OH}{2}$ nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy // AB$ và cách AB là $\frac{OH}{2}$.

Giới hạn: Khi điểm C di động dần tới A thì điểm M dần tới trung điểm P của OA. Khi điểm C di động dần tới B thì điểm M dần tới trung điểm Q của OB. Vậy điểm M chỉ di động trên đường trung bình PQ của ΔOAB (trừ hai điểm P và Q).

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng PQ (M không trùng với P, Q). Vẽ tia OM cắt AB tại C. Vẽ $CD \perp OA, CE \perp OB$. Ta phải chứng minh các $\Delta DAC, \Delta EBC$ vuông cân và M là trung điểm của DE.

Thật vậy, xét ΔOAB có $OP = PA, PQ // AB$ nên $MO = MC$.

Xét ΔDAC vuông tại D có $\widehat{A} = 45°$ nên là tam giác vuông cân tại D.

Tương tự, ΔEBC vuông cân tại E.

Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, M là trung điểm của OC nên M cũng là trung điểm của DE.

c) Kết luận

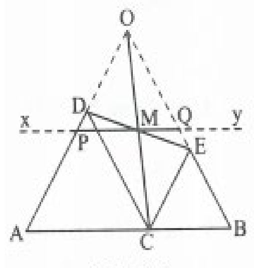
Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác OAB trừ hai điểm P và Q.

9.4 (h.9.8)

Gọi O là giao điểm của hai tia AD và BE.

Như vậy O là điểm cố định.

Giải tương tự như bài 9.3, ta được quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của ΔOAB trừ hai điểm P và Q.



Hình 9.8

9.5. (h.9.9)

a) Phần thuận

Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH // DE$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (tính chất của tam giác cân).

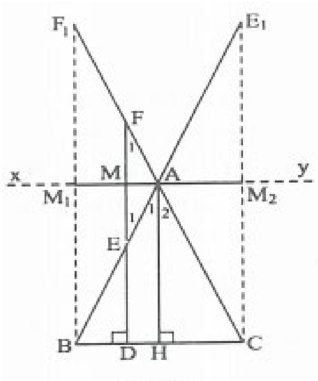
Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ (cặp góc so le trong); $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$ (cặp góc đồng vị).

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. Suy ra ΔAEF cân.

Ta có: $ME = MF \Rightarrow AM \perp EF$.

Tứ giác AHDM có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow MD = AH$ (không đổi).

Điểm M cách đường thẳng BC cho trước một khoảng bằng AH nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy // BC$ và cách BC một khoảng bằng AH.



Hình 9.9

Giới hạn: Khi điểm D trùng với B thì E trùng với B và điểm F trùng với F_1 (F_1 nằm trên tia CA và $AF_1 = AC$). Khi đó điểm M trùng với M_1 (M_1 là giao điểm của *xy* với BF_1).

Tương tự, khi điểm D trùng với C thì điểm M trùng với M_2. Vậy M chỉ nằm trên đoạn thẳng M_1M_2 của đường thẳng *xy*.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng M_1M_2. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt BC, AB, AC lần lượt tại D, E, F. Ta phải chứng minh M là trung điểm của EF.

Thật vậy, tứ giác AHDM có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành. Hình bình hành này có $\widehat{H} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{M} = 90^\circ$.

Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$, $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. Do đó ΔAEF cân.

Vì AM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow ME = MF$.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng M_1M_2 của đường thẳng *xy // BC* và cách BC một khoảng AH.

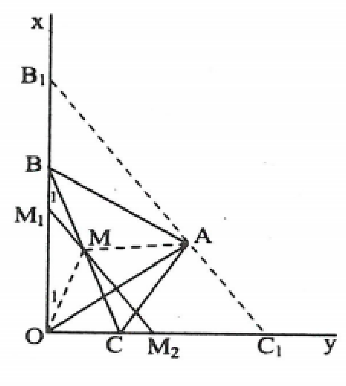
9.6. (h.9.10)

a) Phần thuận

Vẽ các đoạn thẳng MO, MA ta được:

$MO = MA = \frac{1}{2}BC$.

Điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng OA cố định nên điểm M nằm trên đường trung trực của OA.



Hình 9.10

Giới hạn: Khi điểm C di động tới điểm O thì điểm B di động tới B_1 ($AB_1 \perp AO$), khi đó điểm M di động tới M_1 là trung điểm của OB_1.

Khi B di động dần tới O thì điểm C di động tới C_1 ($AC_1 \perp AO$), khi đó điểm M di động tới M_2 là trung điểm của OC_1. Vậy điểm M chỉ di động trên đoạn thẳng M_1M_2.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng M_1M_2. Trên tia Ox lấy điểm B ($B \neq O$) sao cho $MB = MA$. Tia BM cắt Oy tại điểm C. Ta phải chứng minh ΔABC vuông tại A và M là trung điểm của BC.

Thật vậy, ta có: $MB = MA$ mà $MO = MA$ (vì M nằm trên đường trung trực của OA) nên $MB = MO$. (1)

$\Rightarrow \Delta MOB$ cân $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{O_1}$.

Xét ΔOBC vuông tại O có $\widehat{B_1} + \widehat{BCO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{BCO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{MCO}$ (vì cùng phụ với $\widehat{O_1}$) $\Rightarrow \Delta MOC$ cân $\Rightarrow MO = MC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB = MC$. Vậy M là trung điểm của BC.

Xét ΔABC có $MA = MB = MC$ nên $MA = \frac{1}{2}BC$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

c) Kết luận

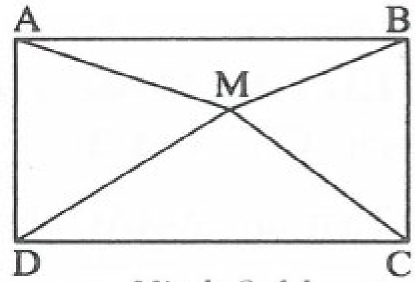
quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng M_1M_2 thuộc đường trung trực của OA.

9.7. (h.9.11)

1) Chứng minh $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. (1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với hai cặp cạnh đối của hình chữ nhật rồi dùng định lý Py-ta-go để chứng minh.

2) Tìm quỹ tích của điểm M



Hình.9.11

a) Phần thuận

Ta có: $MA + MC = MB + MD$ (2)

Suy ra $(MA + MC)^2 = (MB + MD)^2$

$\Rightarrow MA^2 + MC^2 + 2MA.MC = MB^2 + MD^2 + 2MB.MD$

$\Rightarrow 2MA.MC = 2MB.MD$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: $\Rightarrow MA^2 + MC^2 - 2MA.MC = MB^2 + MD^2 - 2MB.MD$

$\Rightarrow (MA - MC)^2 = (MB - MD)^2$

Suy ra $MA - MC = MB - MD$ (4) hoặc $MA - MC = MD - MB$ (5)

- Từ (2) và (4) ta có: $\begin{cases} MA + MC = MB + MD \\ MA - MC = MB - MD \end{cases}$

Do đó: $2MA = 2MB \Rightarrow MA = MB$.

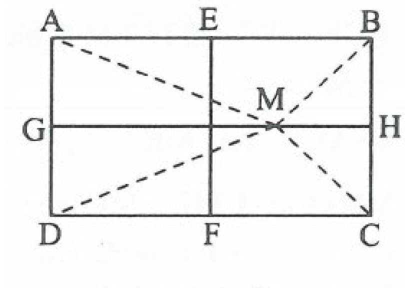
Vậy điểm M nằm trên đường trung trực của AB.

- Từ (2) và (5) ta có; $\begin{cases} MA + MC = MB + MD \\ MA - MC = MD - MB \end{cases}$.

Do đó: $2MA = 2MD \Rightarrow MA = MD$

Vậy điểm M nằm trên đường trung trực của AD.

Giới hạn: Vì M nằm trong hình chữ nhật hoặc trên các cạnh của nó nên M nằm trên hai đoạn thẳng EF và GH nối trung điểm hai cặp cạnh đối diện của hình chữ nhật.



Hình.9.12

b) Phần đảo (h.9.12)

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng GH.

Khi đó $MA = MD; MB = MC$.

Vậy $MA + MC = MB + MD$. Nếu $M \in EF$ ta cũng có kết quả trên.

c) Kết luận: Quỹ tích của điểm M là hai đoạn thẳng EF và GH nối các trung điểm của hai cặp cạnh đối diện của hình chữ nhật.

9.8. (h.9.13)

a) Phần thuận

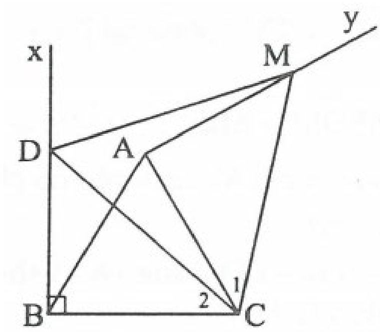
ΔMAC và ΔDBC có: $MC = DC$; $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (vì cùng cộng với ACD cho $60°$); $CA = CB$.

Vậy $\Delta MAC = \Delta DBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{DBC} = 90°$. Suy ra $MA \perp AC$ tại A.

Do đó điểm M nằm trên một đường thẳng đi qua A và vuông góc với AC.

Giới hạn: Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với A. Khi điểm D ra xa vô cùng thì điểm M cũng ra xa vô cùng. Vậy điểm M chỉ nằm trên tia Ay.



Hình.9.13

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên tia Ay. Vẽ đoạn thẳng MC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho CD = CM.

Ta phải chứng minh ΔMCD đều.

Thật vậy, ΔMAC và ΔDBC có: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°; CM = CD; CA = CB$.

Do đó $\Delta MAC = \Delta DBC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{BCA} = 60°$.

ΔMCD cân có $\widehat{MCD}=60^\circ$ nên là tam giác đều.

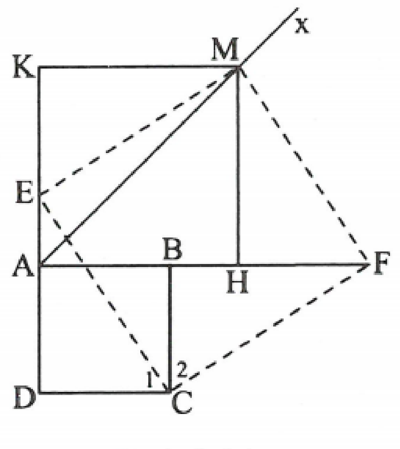
c) Kết luận.

Quỹ tích của điểm M là tia $Ay\perp AC$ (tia Ay nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B).

9.9. (h.9.14)

$\Delta DCE=\Delta BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow CE=CF$ và $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$.

Ta có: $\widehat{C_1}+\widehat{BCE}=90^\circ \Rightarrow \widehat{C_2}+\widehat{BCE}=90^\circ$.



Hình.9.14

Hình bình hành ECFM có $CE=CF$ và $\widehat{ECF}=90^\circ$ nên ECFM là hình vuông

$\Rightarrow ME=MF$.

Vẽ $MH\perp AB$, $MK\perp AD$ ta được $\widehat{MHK}=90^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{EMF}=90^\circ$ nên $\widehat{HMF}=\widehat{KME}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Suy ra $\Delta HMF=\Delta KME$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH=MK$.

Điểm M nằm trong góc vuông EAB và cách đều hai cạnh của góc này nên M nằm trên tia phân giác Ax của góc EAB.

Lưu ý: Bài toán không hỏi quỹ tích của điểm M, mà chỉ hỏi điểm M nằm trên đường nào do đó trong lời giải chỉ trình bày nội dung của phần thuận.

9.10 (h.9.15)

Xét ΔEDF vuông tại E có EM là đường trung tuyến nên $EM=\dfrac{1}{2}DF=DM$.

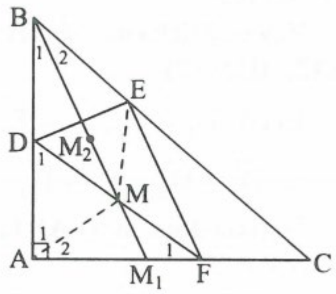
$\Delta BDM=\Delta BEM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{B_2}$.

Vậy điểm M nằm trên tia phân giác Bx của góc B.

Giới hạn:

- Khi điểm D trùng với A thì điểm M trùng với điểm M_1 (M_1 là giao điểm của tia Bx với AC)
- Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với điểm M_2 (M_2 là trung điểm của BM_1).

b) Phần đảo



Hình.9.15

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng M_1M_2.

Lấy điểm D trên cạnh AB sao cho MD = MA. (1)

Lấy điểm E trên cạnh BC sao cho BE = BD.

Tia DM cắt cạnh AC tại F.

Ta phải chứng minh M là trung điểm của DF và $EF\perp DE$

Thật vậy, $\Delta BMD = \Delta BME$ (c.g.c) $\Rightarrow MD = ME$. (2)

ΔMAD cân $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1}$.

Ta có: $\widehat{D_1} + \widehat{F_1} = 90°$; $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90°$ mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow MF = MA$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $MD = ME = MF$.

Vậy M là trung điểm của DF và ΔDEF vuông tại E $\Rightarrow EF \perp DE$.

c) Kết luận: Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng M_1M_2 của tia phân giác của góc B.

9.11. (h.9.16)

a) Phần thuận

Vẽ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$. Khi đó

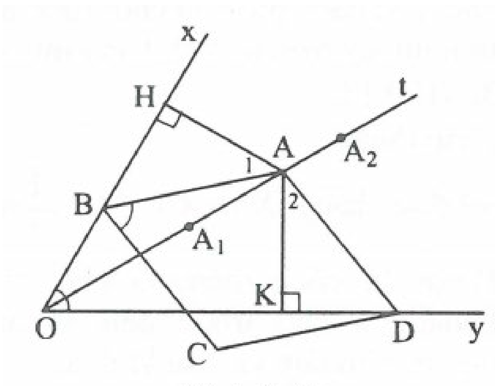
$\widehat{HAK} = 180° - 60° = 120°$

Mặt khác, $\widehat{BAD} = 180° - 60° = 120°$

Nên $\widehat{HAK} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

$\Delta HAB = \Delta KAD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow AH = AK$



Hình.9.16

Điểm A nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc xOy nên A nằm trên tia phân giác Ot của góc xOy.

Giới hạn: Khi điểm B trùng với O hoặc khi D trùng với O thì điểm A trùng với A_1 ($A_1 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_1 = a$). Khi $AB \perp Ox$ thì $AD \perp Oy$, điểm A trùng với A_2 ($A_2 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_2 = 2a$).

b) Phần đảo

Lấy điểm A bất kì trên đoạn thẳng A_1A_2. Vẽ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ thì $AH = AK$ (tính chất tia phân giác). Trên đoạn thẳng HO lấy điểm B, trên tia Ky lấy điểm D sao cho AD = AB = a. Vẽ hình bình hành ABCD, ta phải chứng minh ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{B} = 60°$.

Thật vậy, hình bình hành ABCD có AB = AD = a nên đó là hình thoi cạnh a.

$\Delta HAB = \Delta KAD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{HAK} = 180° - 60° = 120°$. Do đó $\widehat{B} = 180° - 120° = 60°$.

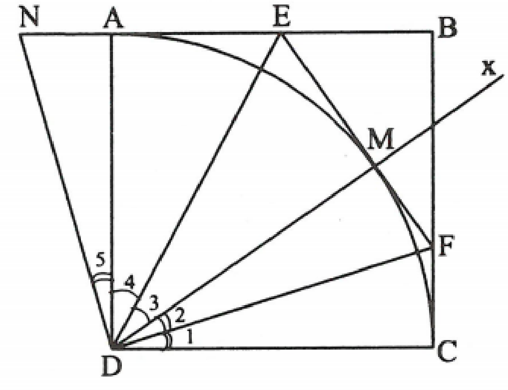
c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm A là đoạn thẳng A_1A_2 thuộc tia phân giác Ot của góc xOy.

9.12 (h.9.17)

Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}, \widehat{D_3} = \widehat{D_4}$

$\Rightarrow \widehat{D_2}+\widehat{D_3}=\widehat{D_1}+\widehat{D_4}=90°:2=45°$



Hình.9.17

Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN=CF$.

$\Delta ADN=\Delta CDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow DN=DF$ và $\widehat{D_5}=\widehat{D_1}$.

Do đó $\widehat{D_4}+\widehat{D_5}=\widehat{D_4}+\widehat{D_1}=45°$.

Suy ra $\widehat{NDE}=\widehat{FDE}=45°$.

$\Delta NDE=\Delta FDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NED}=\widehat{FED}$

Do đó $\Delta DAE=\Delta DME$ (c.g.c) $\Rightarrow DM=DA=4cm$.

Điểm M cách điểm D cho trước một khoảng không đổi là 4cm nên điểm M nằm trên đường tròn tâm D, bán kính 4cm.

9.13 (h.9.18)

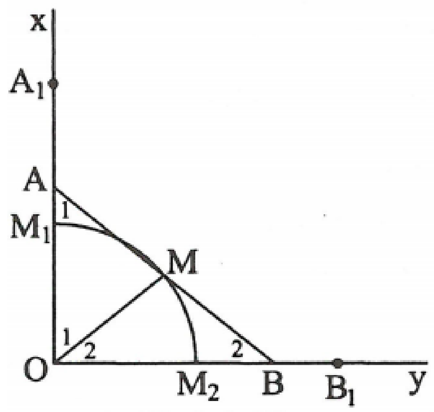
a) Phần thuận

Vẽ đoạn thẳng OM ta có: $OM=\frac{1}{2}AB=a$ (tính chất trung tuyến của tam giác vuông).

Điểm M cách điểm O cho trước một khoảng a cho trước nên M nằm trên đường tròn tâm O, bán kính a.

Giới hạn:

- Khi điểm B di động tới O thì A tới điểm $A_1\in Ox$ và $OA_1=2a$. Khi đó điểm M di động tới M_1 là trung điểm của OA_1.
- Khi điểm A di động tới O thì B tới điểm $B_1\in Oy$ và $OB_1=2a$. Khi đó điểm M di động tới M_2 là trung điểm của OB_1.



Hình.9.18

Vậy M nằm trên cung M_1M_2 của đường tròn tâm O, bán kính a.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên cung M_1M_2.

Trên tia Ox lấy điểm A sao cho MA = MO (1)

Tia AM cắt tia Oy tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB và AB = 2a.

Thật vậy, vì MA = MO nên ΔMOA nên $\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{O_1}$.

Xét ΔAOB vuông tại O có $\widehat{A_1}+\widehat{B_2}=90° \Rightarrow \widehat{O_1}+\widehat{B_2}=90°$

$\Rightarrow \widehat{O_2}=\widehat{B_2}$ (cùng phụ với $\widehat{O_1}$)

Do đó ΔMOB cân $MB = MO$. (2)

Từ (1), và (2) suy ra: $MA = MB = MO = a$. Do đó: $AB = 2a$

c) Kết luận

Quỹ tích của điểm M là cung M_1M_2 của đường tròn tâm O, bán kính a

9.14. (h.9.19)

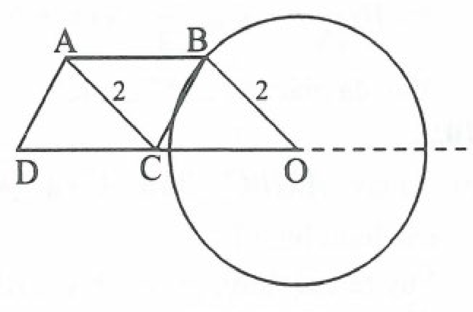
a) Phần thuận

Gọi O là điểm đối xứng với D qua C thì O là một điểm cố định.

Tứ giác ABOC có AB // OC; AB = OC (vì cùng bằng CD) nên ABOC là hình bình hành $\Rightarrow OB = AC = 2cm$.

Điểm B cách điểm O cố định một khoảng 2cm nên điểm B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 2cm.

Giới hạn: Vì B, C, D không thẳng hàng nên B nằm trên đường tròn tâm O, bán kính 2 cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD.



Hình.9.19

b) Phần ảo

Lấy điểm B bất kì trên đường tròn tâm O bán kính 2cm (trừ các giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD). Suy ra OB = 2cm. Vẽ hình bình hành ABCD. Ta phải chứng minh hình bình hành có AC = 2cm.

Thật vậy, $AB//CD$ và $AB = CD \Rightarrow AB//CO$ và $AB = CO$.

Do đó tứ giác ABOC là hình bình hành, suy ra AC = OB = 2cm.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm B là đường tròn tâm O bán kính 2cm.

Chương II

ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Chuyên đề 10

ĐA GIÁC, ĐA GIÁC ĐỀU

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

2.Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau

3.*Bổ sung*

● Tổng các góc trong của đa giác n cạnh $(n>2)$ là $(n-2).180°$

● Số đường chéo của một đa giác n cạnh $(n>2)$ là $\frac{(n-3).n}{2}$

● Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh $(n>2)$ là $360°$ (tại mỗi đỉnh chỉ chọn một góc ngoài).

●Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc kề một cạnh là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm số cạnh của một đa giác biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Giải

**** Tìm cách giải.*** Bài này biết mối liên hệ giữa số đường chéo và số cạnh nên hiển nhiên chúng ta đặt số cạnh của đa giác là n biểu thị số đường chéo là $\frac{n.(n-3)}{2}$ từ đó ta tìm được số cạnh.

**** Trình bày lời giải***

Đặt số cạnh của đa giác là $n(n \geq 3)$ thì số đường chéo là $\frac{n.(n-3)}{2}$ theo đề bài, ta có: $\frac{n.(n-3)}{2} - n = 7 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Leftrightarrow (n+2)(n-7) = 0$

Vì $n \geq 3$ nên $n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = 7$. Vậy số cạnh của đa giác là 7.

Ví dụ 2. Trong tất cả các góc trong và một góc ngoài của một đa giác có số đo là $47058,5°$. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Giải

Tìm cách giải. Nếu ta đặt n là số cạnh, α là số đo một góc ngoài của đa thì $0° < \alpha < 180°$ và $(n-2).180°$ là một số nguyên.

Do đó suy ra $(n-2).180° + \alpha = 47058,5°$, từ đó ta có α là số dư của $47058,5°$ chia cho . Bằng cách suy luận như vậy, chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác $(n \in N, n \geq 3)$

Tổng số đo góc trong của đa giác bằng $(n-2).180°$

Vì tổng các góc trong và một trong các góc ngoài của đa giác có số đo là $47058,5°$ nên ta có:

$(n-2).180° + \alpha = 47058,5°$ (α là số đo một góc ngoài của đa giác với $0° < \alpha < 180°$)

$\Rightarrow (n-2).180° + \alpha = 216.280° + 78,5°$

$\Rightarrow n - 2 = 261 \Rightarrow n = 263$

Vậy số cạnh của đa giác là 263

Ví dụ 3. Tổng số đo các góc của một đa giác n – cạnh trừ đi góc A của nó bằng $570°$. Tính số cạnh của đa giác đó và $\widehat{A}$.

Giải

Tìm cách giải. Theo công thức tính tổng các góc trong, ta có: $(n-2).180° - \widehat{A} = 570°$. Quan sát và nhìn nhận, ta có thể nhận thấy chỉ có thêm điều kiện $n \in N$, $n \geq 3$ và $0° < \widehat{A} < 180°$. Từ đó ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Ta có: $(n-2).180° - \widehat{A} = 570° \Leftrightarrow \widehat{A} = (n-2).180° - 570°$

Vì $0° < \widehat{A} < 180° \Rightarrow 0 < (n-2).180° - 570° < 180°$

$\Leftrightarrow 570° < (n-2).180° < 750°$

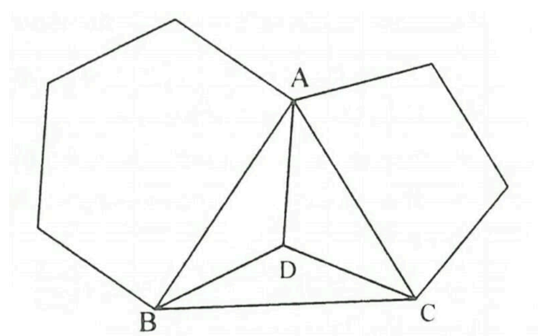
$\Leftrightarrow \frac{19}{6} < n-2 < \frac{25}{6} \Leftrightarrow 5\frac{1}{6} < n < 6\frac{1}{6}$. Vì $n \in N$ nên $n = 6$

Đa giác đó có 6 cạnh và $\widehat{A} = (6-2).180° - 570° = 150°$

Ví dụ 4. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC

Giải

Tìm cách giải. Vì AD là cạnh của lục giác đều và ngũ giác đều, nên dễ dàng nhận ra $\Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$ là các tam giác cân đỉnh D và tính được số đo các góc ở đỉnh. Do vậy ΔABC sẽ tính được số đo các góc.



Trình bày lời giải

Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$\widehat{ADB} = \frac{(6-2).180°}{6} = 120° \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 30°$$

$$\widehat{ADC} = \frac{(5-2).180°}{5} = 108° \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 36$$

Suy ra: $\widehat{BDC} = 360° - 120° - 108° = 132°$

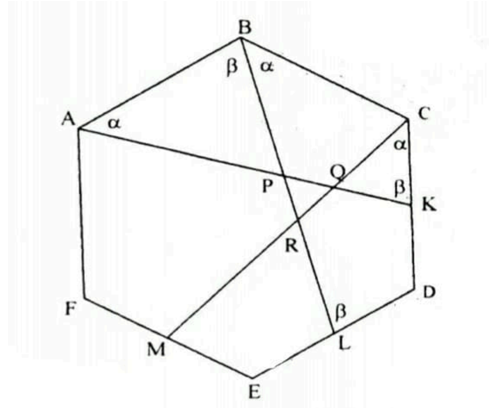
Ta có: $\Delta BDC\,(DB = DC)$ cân tại D. Do đó $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \frac{180° - 132°}{2} = 24°$

Suy ra $\widehat{BAC} = 30° + 36° = 66°$, $\widehat{ABC} = 30° + 24° = 54°$, $\widehat{BCA} = 24° + 36° = 60°$

Ví dụ 5. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M, L, K lần lượt là trung điểm EF, DE, CD. Gọi giao điểm AK với BL và CM lần lượt là P, Q. Gọi giao điểm của CM và BL là R. Chứng minh tam giác PQR là tam giác đều.

Giải

Các tứ giác ABCK, BCDL, CDEM có các cạnh và các góc đôi một bằng nhau. Các góc của lục giác đều là $120°$



Đặt $\widehat{BAK} = \alpha \Rightarrow \widehat{CBL} = \widehat{DCM} = \alpha$; $\widehat{LBA} = \beta$

$\widehat{LBA} = \beta \Rightarrow \widehat{CKA} = \widehat{EMC} = \widehat{DLB} = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 120°$

Trong tam giác CKQ có $\widehat{CQK} + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \widehat{CKQ} = 60°$

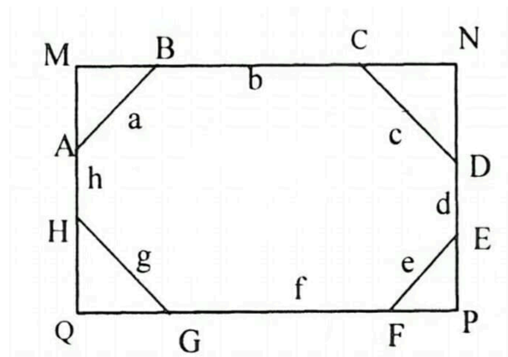
Trong tam giác PBA có $\widehat{APB} + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \widehat{APB} = 60°$

Từ đó suy ra: $\widehat{RQP} = \widehat{RPQ} = 60°$, Vậy ΔPQR đều

Ví dụ 6. Cho bát giác ABCDEFGH có tất cả các góc bằng nhau, và độ dài các cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng các cạnh đối diện của bát giác bằng nhau.

Giải

Các góc của bát giác bằng nhau, suy ra số đo của mỗi góc là $\frac{(8-2)180°}{8} = 135°$



Kéo dài cạnh AH và BC cắt nhau tại M. Ta có:

$\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 180° - 135° = 45°$ suy ra tam giác MAB là tam giác vuông cân.

Tương tự các tam giác CND, EBF,GQH cũng là cũng là các tam giác vuông cân, suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

Đặt AB = a; BC = b; CD = c; DE = d; EF = e; FG = f; GH = g; HA = h

Từ các tam giác vuông cân, theo định lý Py-ta-go, ta có:

$MB = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CN = \frac{c}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}}$

Tương tự $PQ = \frac{e}{\sqrt{2}} + f + \frac{g}{\sqrt{2}}$

Do $MN = PQ$ nên $\frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} + f + \frac{g}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a + c - e - g) = f - b$

Do f và b là số nguyên nên vế phải của đẳng thức trên là số nguyên, do đó vế trái là số nguyên. Vế trái chỉ có thể bằng 0, tức là f = b, hay BC = FG. Tương tự có AB = EF, CD = GH, DE = HA.

Nhận xét. Dựa vào tính chất số hữu tỷ, số vô tỷ chúng ta đã giải được bài toán nên trên. Cũng với kỹ thuật đó, chúng ta có thể giải được bài thi hay và khó sau: Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy E, F thuộc cạnh AB; G, H thuộc cạnh BC; I,J thuộc cạnh CD; K, M thuộc cạnh DA sao cho hình 8 – giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình 8 – giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ thì EF = IJ

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Hưng Yên, năm học 2009-2019)

C. Bài tập vận dụng

10.1. Số đường chéo của một đa giác lớn hơn 14, nhưng nhỏ hơn 27. Hỏi đa giác đó bao nhiêu cạnh?

Giải

Gọi số cạnh đa giác là n, điều kiệu $n \in N$, $n \geq 3$

Ta có: $14 < \frac{n(n-3)}{2} < 27 \Leftrightarrow 28 < n^2 - 3n < 54$

$\Leftrightarrow \left(\frac{11}{2}\right)^2 < \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{15}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{2} < n - \frac{3}{2} < \frac{15}{2}$

$\Leftrightarrow 7 < n < 9 \Leftrightarrow n = 8$

10.2. Tổng số đo các góc của một đa giác n – cạnh trừ đi góc A của nó bằng $2570°$. Tính số cạnh của đa giác đó và $\widehat{A}$.

Giải

Tổng các góc trừ đi một góc của đa giác bằng $2570°$ nên:

$(n-2).180° - \widehat{A} = 2570°$.

$\Leftrightarrow \widehat{A} = (n-2).180° - 2570°$

Vì $0° < \widehat{A} < 180° \Rightarrow 0 < (n-2).180° - 2570° < 180°$

$\Leftrightarrow 16\dfrac{5}{18} < n < 17\dfrac{5}{18}$. Vì $n \in N \Rightarrow n = 17$

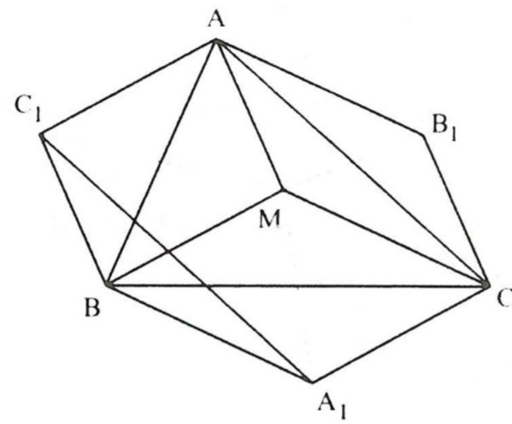
Vậy đa giác đó có 17 cạnh.

10.3. Cho ΔABC có ba góc nhọn và M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi A_1; B_1; C_1 là các điểm đối xứng với M lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh các đoạn AA_1; BB_1; CC_1 cùng đi qua một điểm.

b) Xác định vị trí điểm M để lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau.

Giải



a) Ta có: $AMBC_1$; $BMCA_1$ và $CMAB_1$ là các hình bình hành.

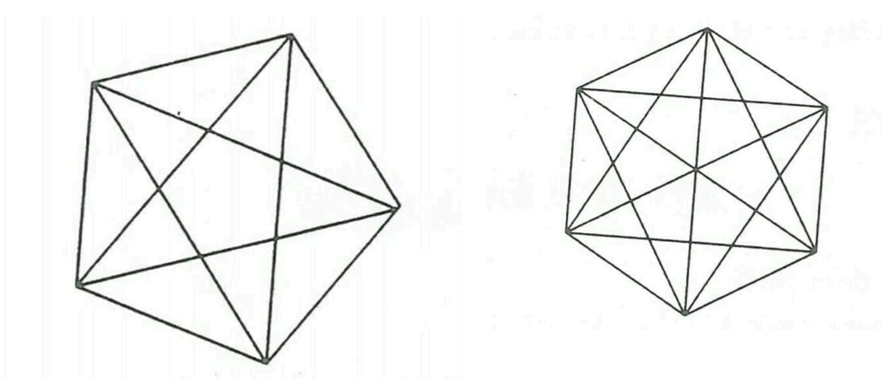
Suy ra các đường chéo AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy *(xem bài 7.7).*

b) Theo tính chất các hình bình hành, ta có:

$AC_1 = A_1C = MB$; $AB_1 = A_1B = MC$; $BC_1 = B_1C = AM$

Để hình lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau thì $MB = MC = AM$ hay M là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

10.4. Một ngũ giác đều có 5 đường chéo và nhóm 5 đường chéo này chỉ có một loại độ dài (ta gọi một loại độ dài là một nhóm các đường chéo bằng nhau). Một lục giác đều có 9 đường chéo và nhóm 9 đường chéo này có 2 loại độ dài khác nhau (hình vẽ).



Xét đa giác đều có 20 cạnh. Hỏi khi đó nhóm các đường chéo có bao nhiêu loại độ dài khác nhau?

Giải

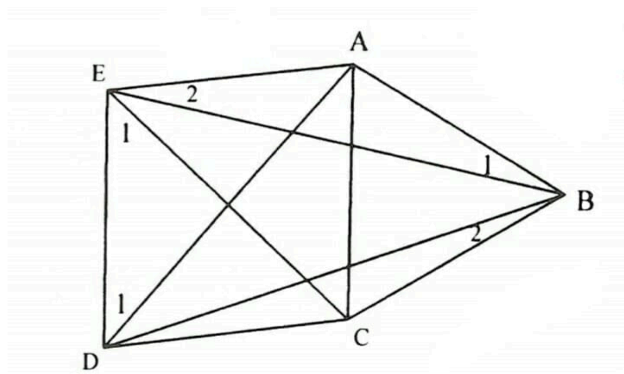
Xét các đường chéo xuất phát từ cùng một đỉnh. Ta chọn một đỉnh nào đó rồi đánh số 1, các đỉnh tiếp theo theo chiều kim đồng hồ đánh lần lượt số 2,3,….

Đường chéo ngắn nhất là đường chéo nối đỉnh 1 với đỉnh 3. Đường chéo dài nhất là đường chéo nối đỉnh 1 với đỉnh 11. Từ đó ta có 9 loại độ dài khác nhau.

10.5. Cho ngũ giác lồi ABCDE có tất cả các cạnh bằng nhau và $\widehat{ABC} = 2\widehat{DBE}$. Hãy tính $\widehat{ABC}$.

Giải

Ta có: $\widehat{DBE} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \quad (1)$



Vì $EA = AB \Rightarrow \Delta EAB$ cân

$\Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{B_1} = 90^\circ - \frac{\widehat{EAB}}{2}$

Vì $CB = CD \Rightarrow \widehat{B_2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2}$

Thay vào (1) ta được:

$$90^\circ - \frac{\widehat{EAB}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$$

$. \Rightarrow \widehat{EAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 360^\circ$

Tổng các góc của ngũ giác bằng 540°.

$\Rightarrow \widehat{CDE} + \widehat{DEA} = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

$$\widehat{D_1} + \widehat{E_1} = 90^\circ - \frac{\widehat{CDE}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{DEA}}{2} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CE$$

Mặt khác ΔEAD cân tại E, ΔCDE cân tại D mà $AD \perp CE$ nên AD và CE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Rightarrow AEDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC = DE \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$

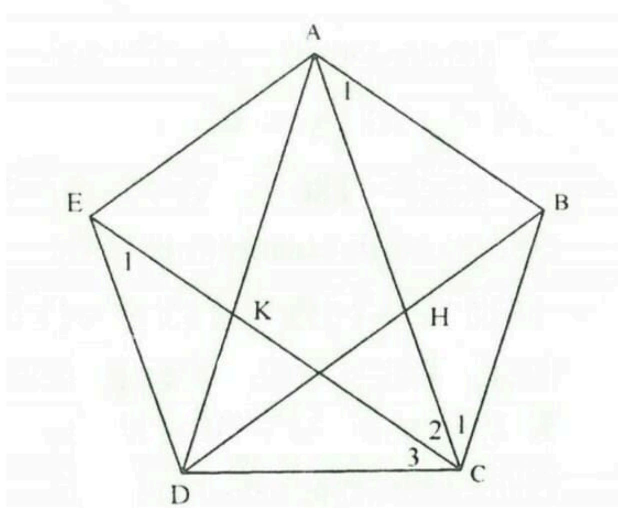
Vậy $\widehat{ABC} = 60°$

10.6. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều.

Giải



a) ΔABC và ΔBCD có $AB = BC$; $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$; $BC = CD$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BCD\left(c.g.c\right) \Rightarrow AC = BD$.

ΔABD và ΔACD có $AB = DC$; $AC = DB$; AD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDA}$

$\Rightarrow \Delta BAH = \Delta CDK \Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC //$ CD

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang cân

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có ABCE là hình thang cân.

Ta có: ΔABC cân $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$,mà $\widehat{A} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \Delta AEC = \Delta CDA\left(c.g.c\right) \Rightarrow ACDE$ là hình thang cân

(Chứng minh tương tự câu a)

Ta có:

$AB //$ CK (ABCD là hình thang cân)

BC // AK (ABCE là hình thang cân)

mà: $AB = BC$

Suy ra ABCK là hình thoi $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

ACDE là hình thang cân

$\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_3}$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDE \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CDE}$

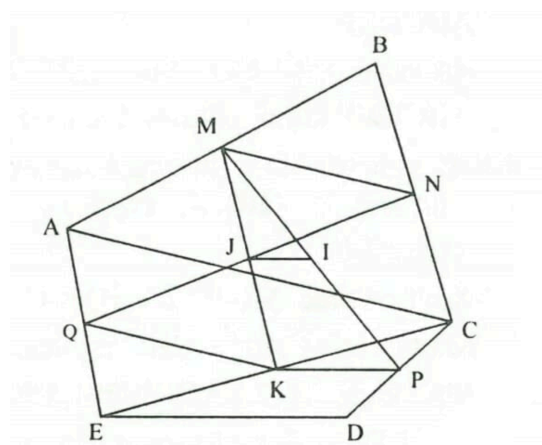
Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$

Do đó: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$ và $AB = BC = CD = DE = EA\left(gt\right)$

$\Rightarrow ABCDE$ là ngũ giác đều

10.7. Cho ngũ giác ABCDE, gọi M, N,P,Q lần lượt là trung điểm của cách cạnh AB, BC, CD, EA và I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng IJ song song với ED và $IJ = \dfrac{ED}{4}$

Giải



Nối CE, gọi K là trung điểm của CE. Ta có QK là đường trung bình của tam giác ACE suy ra QK // AC và $QK = \dfrac{1}{2}AC$

M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN//\text{AC}$ và $\text{MN}=\dfrac{1}{2}AC$. Từ đó ta có: $MN//\text{QK}$ và $\text{MN=QK} \Rightarrow \text{MNKQ}$ là hình bình hành $\Rightarrow M, J, K$ thẳng hàng và MJ=JK

Xét ΔMKP có I, J lần lượt là trung điểm của MP và MK. Ta có IJ là đường trung bình của tam giác MKP

$\Rightarrow IJ//\text{PK}$ và $\text{IJ}=\dfrac{1}{2}PK \ (1)$

Xét tam giác CDE, PK là đường trung bình $\Rightarrow PK//\text{DE}$ và $\text{PK}=\dfrac{1}{2}DE \ (2)$

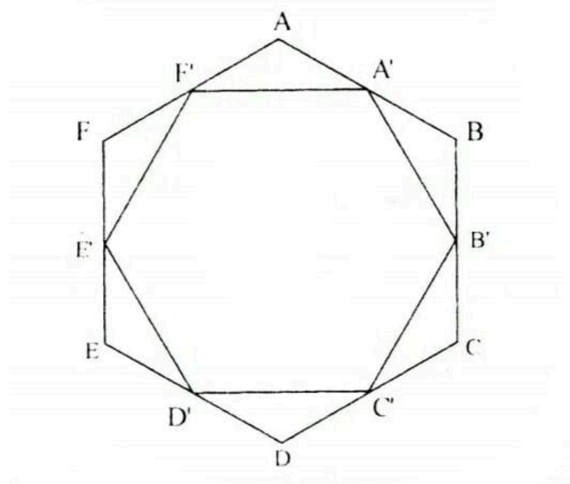
Từ (1) và (2) suy ra: $IJ//\text{DE}$ và $\text{IJ}=\dfrac{ED}{4}$

10.8. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi A', B', C', D', E', F' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là lục giác đều.

Giải

Nhận thấy $\Delta AA'F'$; $\Delta BA'B'$; $\Delta AB'C'$; $\Delta DC'D'$; $\Delta ED'E'$; $\Delta FE'F'$; bằng nhau (c.g.c).

$\Rightarrow A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A' \ (1)$



$\Delta BA'B'$ có $BA' = BB' \Rightarrow \Delta BA'B'$ cân tại B.

$\Rightarrow \widehat{BA'B'} = \widehat{BB'A'} = \dfrac{180° - \widehat{B}}{2} = 30°$

Tương tự, đối với $\Delta AA'F'$ ta có:

$\widehat{AA'F'} = \widehat{AF'A'} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{B'A'F'} = 180° - \widehat{AA'F'} - \widehat{BA'B'} = 120°$

Chứng minh tương tự ta được:

$\widehat{A'B'C'} = \widehat{B'C'D'} = \widehat{C'D'E'} = \widehat{D'E'F'} = \widehat{E'F'A'} = 120° \ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

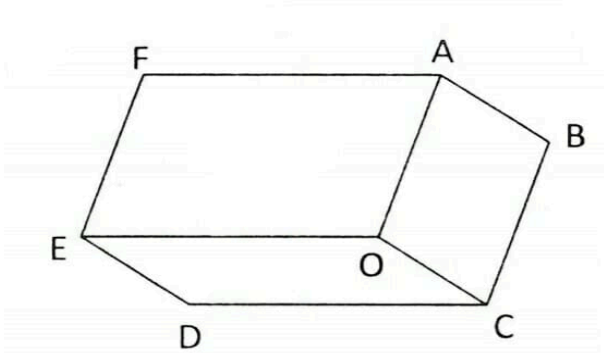
10.9. Cho lục giác lồi ABCDEF có các cặp cạnh đối AB và DE, BC và EF, CD và AE vừa song song vừa bằng nhau. Lục giác ABCDEF có nhất thiết là lục giác đều hay không?

Giải

Lục giác ABCDEF không nhất thiết phải là lục giác đều. Thật vậy:

● Trên mặt phẳng lấy điểm O tùy ý, vẽ 3 tia OA, OC, OE sao cho độ dài 3 đoạn OA, OC, OE đôi một khác nhau và độ lớn của 3 góc AOC, COE, EOA cũng đôi một khác nhau.

● Vẽ các hình bình hành OABC, OCDE, OAFE khi đó ta có được lục giác lồi ABCDEF.

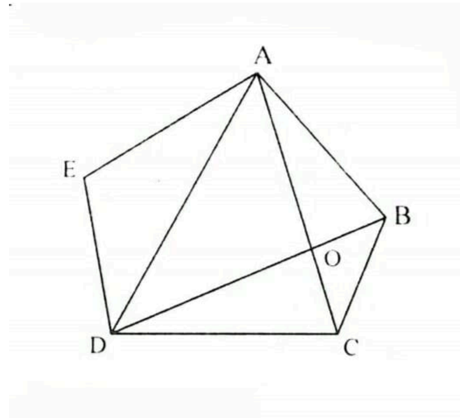


Rõ ràng $AB // CD$, AB=ED, BC//EF, $BC = EF$, $CD //$ FA, CD=FA nhưng ABCDEF không phải là lục giác đều.

10.10. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì luôn tìm được ba đường chéo có độ dài ba cạnh là một tam giác.

Giải

.



Giả sử AD là đường chéo lớn nhất của ngũ giác ABCDE. Gọi O là giao điểm AC và BD.

Xét tam giác ΔAOD có $AD < OA + OD$

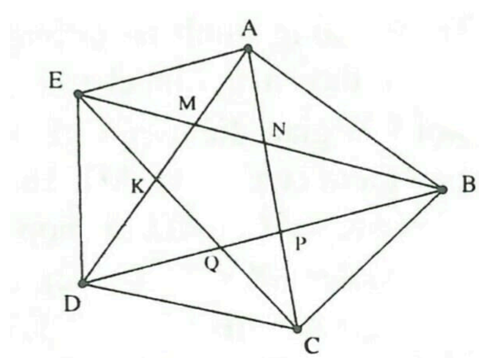
Mà $OA < AC\,; OD < BD \Rightarrow AD < AC + BD$

Mặt khác: $AC \le AD\,, BD \le AD$ nên AD, AC, BD là độ dài ba cạnh của một tam giác

10.11. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Giải

Áp dụng tính chất về quan hệ các cạnh của tam giác, ta có:



$AB + BC + CD + DE + EA < \left(AN + NB\right) + \left(BP + PC\right)$

$+\left(CQ + QD\right) + \left(DK + KE\right) + \left(EM + MA\right)\ (1)$

Mặt khác: $AN + PC < AC\,; BP + DQ < BD\,; CQ + KE < CE\,; DK + MA < DA$ $; EM + NB < EB\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Nhận xét. Những bài toán về bất đẳng thức, bạn nên đưa về bất đẳng thức tam giác.

10.12. Muốn phủ kín mặt phẳng bởi những đa giác đều bằng nhau sao cho hai đa giác kề nhau thì có chung một cạnh. Hỏi các đa giác đều này có thể nhiều nhất bao nhiêu cạnh?

Giải

Gọi đa giác đều trên có n cạnh để xếp các đa giác đều bằng nhau không có khe hở thì:

$$360^\circ \vdots \frac{(n-2).180^\circ}{n} \Leftrightarrow 360n \vdots (n-2)180^\circ \Leftrightarrow 2n \vdots n-2 \Leftrightarrow 2n-4+4 \vdots n-2$$

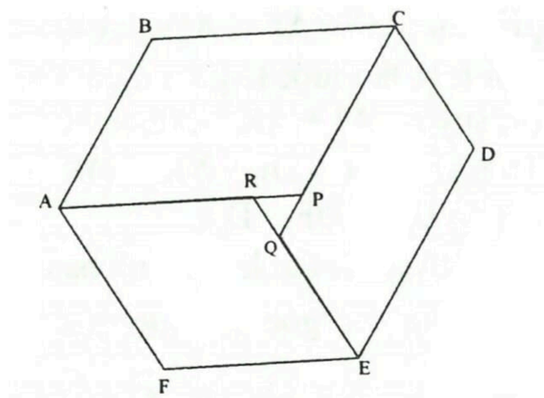
$\Leftrightarrow 4 \vdots n-2 \Leftrightarrow n \in \{3;4;6\}$

Vậy đa giác có nhiều nhất là 6 cạnh

10.13. Cho lục giác ABCDEF có tất cả các góc bằng nhau, các cạnh đối không bằng nhau. Chứng minh rằng $|BC-EF| = |DE-AB| = |AF-CD|$. Ngược lại nếu có 6 đoạn thẳng thỏa mãn điều kiện ba hiệu trên bằng nhau và khác 0 thì chúng có thể lập được một lục giác có các góc bằng nhau.

Giải

Theo giả thiết $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = \widehat{F} = \dfrac{(6-2).180^\circ}{6} = 120^\circ$



Giả sử $BC > EF, DE > AB, AF > CD$. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, qua C kẻ đường thẳng song song với DE, qua E kẻ đường thẳng song song với FA, chúng cắt nhau tạo thành tam giác PQR. Ta có ABCP là hình bình hành nên $\widehat{APC} = \widehat{B} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{QPR} = 60^\circ$

Tương tự $\widehat{PRQ} = 60^\circ$, do đó ΔPQR đều, $PR = PQ = QR$, tức là: $BC - EF = DE - AB = AF - CD$

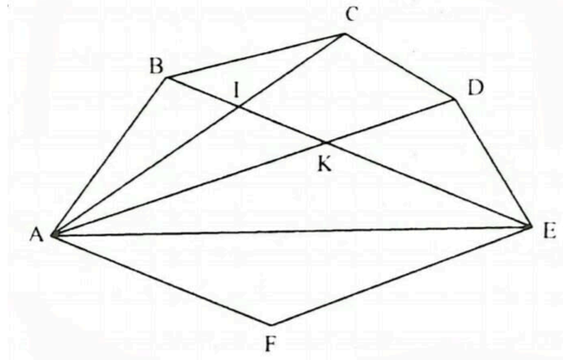
Ngược lại giả sử có 6 đoạn thẳng $AB_1, BC_1, CD_1, DE_1, EF_1, FA_1$ thỏa mãn điều kiện $|BC_1 - EF_1| = |DE_1 - AB_1| = |AF_1 - CD_1| = a$. Dựng tam giác đều PQR với cạnh bằng a. Đặt trên các tia QP, RQ, PR các đoạn thẳng tương ứng bằng đoạn thẳng lớn hơn trong các cặp AB_1 và DE_1, CD_1 và FA_1, EF_1 và BC_1. Dựng thêm các hình bình hành, từ đó ta xác định được lục giác cần tìm.

10.14. Chứng minh rằng trong một lục giác bất kì, luôn tìm được một đỉnh sao cho ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác.

Giải

Xét đường chéo dài nhất của lục giác.

Trường hợp 1. Trường hợp đường chéo dài nhất chia lục giác thành môt ngũ giác và một tam giác.



Giả sử đường chéo dài nhất của một lục giác là AE, chia lục giác thành ngũ giác và tam giác. Nếu ba đường chéo từ đỉnh A không là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $AC + AD \le AE$ (1)

Ta sẽ chứng minh ba đường chéo kẻ từ đỉnh E thỏa mãn tính chất đó.

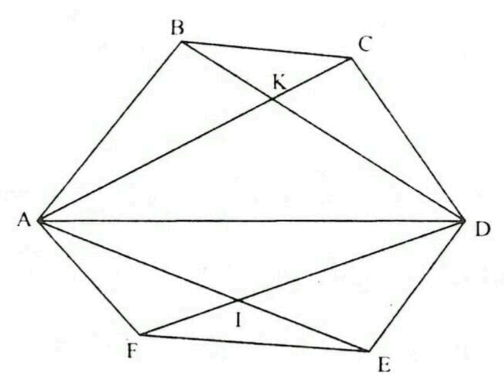
Gọi I là giao điểm của EB và AC; K là giao điểm của EC và AD. Ta có: $AI + AK < AC + AD$, kết hợp với (1) suy ra $AI + AK < AE$ (2)

Ta lại có: $AI + IE + AK + KE > 2AE$, kết hợp với (2) suy ra $IE + KE > AE$ (3)

Mặt khác, $EB + EC > EI + EK$ nên từ (3) suy ra $EB + EC > AE$. Vậy EA, EB, EC làm thành ba cạnh của một tam giác.

Trường hợp 2. Trường hợp đường chéo dài nhất của lục giác chia lục giác thành hai tứ giác.

Giả sử AD là đường chéo dài nhất của lục giác, chia lục giác thành hai tứ giác. Nếu ba đường chéo xuất phát từ đỉnh A không là ba cạnh của một tam giác thì: $AC + AE \le AD$ (4)



Gọi I, K lần lượt là giao điểm hai đường chéo của tứ giác ADEF và ABCD. Từ (4) suy ra: $AI + AK < AE + AC < AD$ (5)

Ta lại có: $AI + ID + AK + DK > 2AD$. Kết hợp với (5) suy ra $DI + DK > AD$

Do đó $DB + DF > DA$

Vậy DA, DB, DF làm thành ba cạnh của một tam giác

10.15. Cho lục giác ABCDEG có tất cả các cạnh $\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{E} = \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{G}$. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của lục giác song song với nhau.

Giải

Tổng các góc của lục giác ABCDEG là: $(6-2).180° = 4.180° = 720°$, theo giả thiết ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{G} = 360°$

Dựng góc $\widehat{EDK} = \widehat{ABC}$ và $DK = BC$

$\Rightarrow \Delta EDK = \Delta ABC\left(c.g.c\right) \Rightarrow EK = AC\ \left(1\right)$

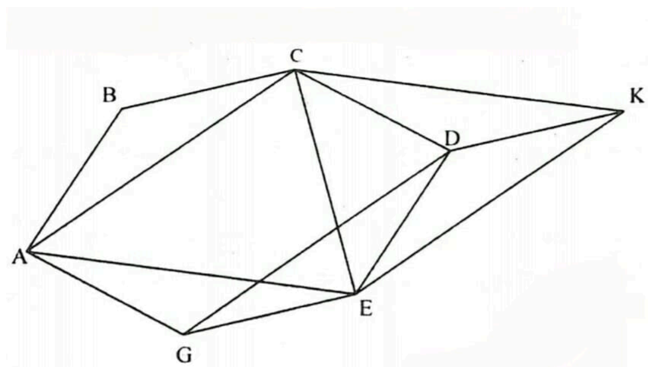
Từ $\widehat{EDK} + \widehat{CDE} + \widehat{AGE} = 360°$ suy ra $\widehat{CDK} = \widehat{AGE}$

$\Rightarrow \Delta CDK = \Delta AGE\left(c.g.c\right) \Rightarrow CK = AE\ \ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra ACKE là hình bình hành

$\widehat{ACD} + \widehat{DCK} + \widehat{CAE} = 180°$ mà $\widehat{DCK} = \widehat{GAE}$ nên $\widehat{ACD} + \widehat{GAE} + \widehat{CAE} = 180° \Rightarrow CD // \text{AG}$

Tương tự chứng minh, ta được: AB // DE và BC // EG



Chuyên đề 11

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương có các tính chất sau:

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

- Hình vuông cạnh có độ dài bằng 1 thì có diện tích là 1.

2. Các công thức tính diện tích đa giác

- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó $S = a.b$ (a,b là kích thước hình chữ nhật).

- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó $S = a^2$ (a là độ dài cạnh hình vuông).

- Diện tích hình vuông có đường chéo dài bằng d là $\frac{1}{2}d^2$.

- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông $S = \frac{1}{2}a.b$ (a,b là độ dài hai cạnh góc vuông).

- Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = \frac{1}{2}a.h$ (a,h là độ dài cạnh và đường cao tương ứng).

- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:

$S = \frac{1}{2}(a+b).h$ (a, b là độ dài hai đáy, h là độ dài đường cao).

- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó: $S = a.h$ (a, h là độ dài một cạnh và đường cao tương ứng).

- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo.

$S = \frac{1}{2}.d_1.d_2$ (d_1 ; d_2 là độ dài hai đường chéo tương ứng).

- Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo $S = \frac{1}{2}.d_1.d_2$ (d_1 ; d_2 là độ dài hai đường chéo tương ứng).

3. Bổ sung

- Hai tam giác có chung một cạnh (hoặc một cặp cạnh bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với cạnh đó.

- Hai tam giác có chung một đường cao (hoặc một cặp đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh ứng với đường cao đó.

- ABCD là hình thang $(AB//CD)$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì $S_{AOD} = S_{BOC}$.

- Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

- Hai hình chữ nhật có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

- Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12$ cm, $AD = 6,8$ cm. Gọi H, I, E K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE;

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

Giải

⁎ **Tìm cách giải.** Dễ dàng tính được diện tích hình chữ nhật ABCD. Mặt khác, đề bài xuất hiện nhiều yếu tố trung điểm nên chúng ta có thể vận dụng tính chất: hai tam giác có chung đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh đáy ứng với đường cao đó. Từ đó rút ra nhận xét: đường trung tuyến của tam giác chia tam giác ấy thành hai phần có diện tích bằng nhau.

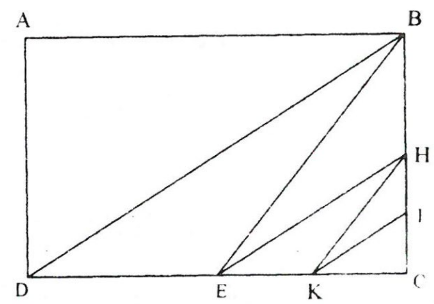
Từ nhận xét quan trọng đó, chúng ta lần lượt tính được diện tích các tam giác BCD, BCE, DBE, BEH, ECH, HKC, CKI,….

⁎ **Trình bày lời giải**

a) ABCD là hình chữ nhật nên $S_{BCD} = \frac{1}{2}.S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AB.AD = \frac{1}{2}.12.6,8 = 40,8cm^2$.

E là trung điểm của CD, suy ra: $S_{BDE} = S_{BCE} = \frac{1}{2}.S_{BCD} = 20,4cm^2$.

b) H là trung điểm BC $\Rightarrow S_{CHE} = \frac{1}{2}.S_{BCE} = \frac{1}{2}.20,4 = 10,2cm^2$.



K là trung điểm CE $\Rightarrow S_{HKC} = \frac{1}{2}.S_{CHE} = 5,1cm^2$.

I là trung điểm CH $\Rightarrow S_{CKI} = \frac{1}{2}.S_{HKC} = 2,55cm^2$.

Vậy $S_{EHIK} = S_{CHE} - S_{CIK} = 10,2 - 2,55 = 7,65cm^2$.

Ví dụ 2: Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích $24cm^2$. Lấy điểm E thuộc BC và F thuộc CD sao cho diện tích tam giác ABE và ADF lần lượt là $4cm^2$ và $9cm^2$. Tính diện tích tam giác AEF.

(Olympic Toán, Châu Á- Thái Bình Dương, năm 2001)

Giải

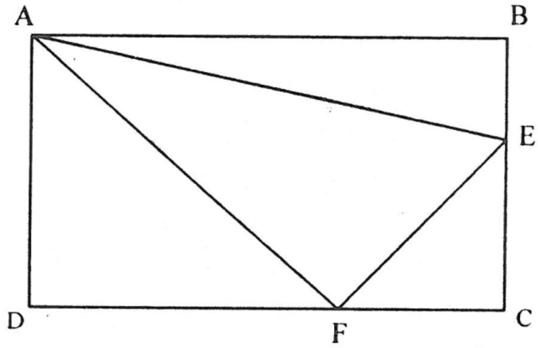
⁎ **Tìm cách giải.** Quan sát hình vẽ, suy luận rất tự nhiên: muốn tính diện tích tam giác AEF chúng ta chỉ cần tính diện tích tam giác CEF.

Nhận thấy không thể và cũng không cần tính cụ thể độ dài CE và CF. Chúng ta biết rằng $BC.CD = 24cm^2$, nên chỉ cần tìm mối quan hệ giữa CE và BC; CF và CD. Phân tích như vậy, chúng ta chỉ cần tìm mối quan hệ giữa BE và BC; DF và CD.

Mặt khác hình chữ nhật ABCD và tam giác vuông ABE có chung cạnh AB, đồng thời biết diện tích của chúng nên dễ dàng tìm được mối quan hệ giữa BE và BC. Tương tự như vậy hình chữ nhật ABCD và tam giác vuông ADF có chung cạnh AD, đồng thời biết diện tích của chúng nên dễ dàng tìm được mối quan hệ giữa DF và CD. Từ đó ta có lời giải sau:

∗ Trình bày lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = 24cm^2$ suy ra:



$S_{ABC} = S_{ACD} = \frac{1}{2} s_{ABCD} = 12cm^2$

ΔABC và ΔABE có chung đường cao AB

nên $\frac{BE}{BC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{4}{12}$

hay $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{2}{3}$.

ΔADF và ΔADC có chung đường cao AD nên $\frac{DF}{DC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{9}{12}$ hay $\frac{DF}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{1}{4}$.

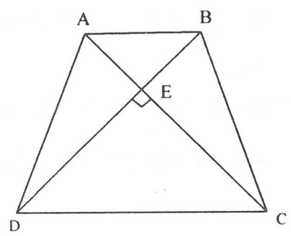
Ta có: $\frac{S_{CEF}}{S_{ABCD}} = \frac{CE.CF}{2.BC.CD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{12}.S_{ABCD} = \frac{1}{12}.24 = 2cm^2$.

Do vậy $S_{AEF} = S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ADF} - S_{CEF} \Rightarrow S_{AEF} = 24 - 4 - 9 - 2 = 9cm^2$.

Ví dụ 3. Cho hình thang cân ABCD $(AB//CD)$. Biết $BD = 7cm$; $\widehat{ABD} = 45°$. Tính diện tích hình thang ABCD.

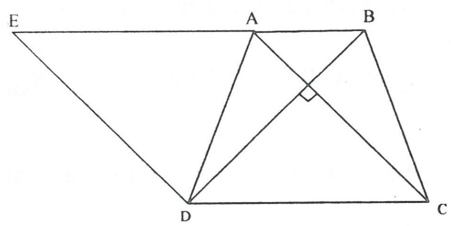
(Olympic Toán Châu Á- Thái Bình Dương 2007)

Giải



Cách 1. Nối AC cắt BD tại E. ΔABE vuông cân $\Rightarrow BE \perp AC$. Diện tích hình thang là:

$S = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{49}{2} cm^2$

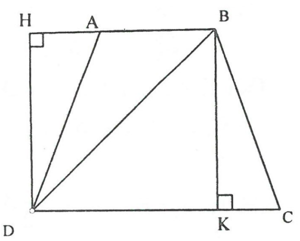


Cách 2. Kéo dài tia BA lấy điểm E sao cho $AE = CD$, ta được :

$\Delta AED = \Delta CDB$ (c.g.c) suy ra: $\widehat{AED} = \widehat{CDB} = 45°$. Từ đó suy ra: ΔBDE vuông cân tại D.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CDB} = S_{ABD} + S_{AED}$

$= S_{DBE} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{49}{2} cm^2$



Cách 3. Kẻ $DH \perp AB, BK \perp CD$. Do $AB//CD$ nên $\widehat{HDK} = 90°$ mà DB là phân giác $\widehat{HDK}$ (vì $\widehat{BDK} = 45°$)

$\Rightarrow$ HDKB là hình vuông mà $\Delta HAD = \Delta KCB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

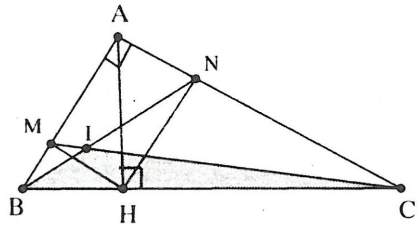
Suy ra $S_{HDA} = S_{BCK}$ nên

$$S_{ABCD} = S_{ABKD} + S_{CKB} = S_{ABKD} + S_{AHD} = S_{DHBK}$$

$$= BK^2 = \frac{BD^2}{2} = \frac{49}{2}(cm^2)$$

Ví dụ 3. Cho ΔABC vuông tại A. AH là đường cao. Gọi M, N là hình chiếu của H trên AB, AC. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh: $S_{BIC} = S_{AMIN}$

Giải



Ta có: ΔANH và ΔBNH có chung HN và đường cao hạ từ A và B bằng nhau, nên $S_{ANH} = S_{BNH} \Rightarrow S_{ANH} + S_{CNH} = S_{BNH} + S_{CNH}$

$\Rightarrow S_{ANC} = S_{BNC}$ (1)

Mặt khác $MA = HN$ nên $S_{AHC} = S_{AMC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$S_{BNC} = S_{AMC} \Rightarrow S_{BNC} - S_{NIC} = S_{AMC} - S_{NIC}$

Vậy $S_{BIC} = S_{AMIN}$

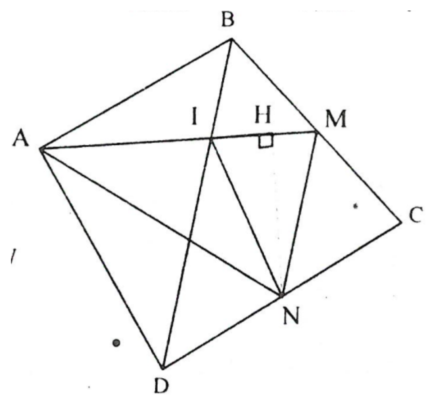
Nhận xét.

Kĩ thuật so sánh S_{BIC} với S_{AMIN} ta so sánh S_{BNC} với S_{MAC}. Mà $AM = HN$, nên ta $S_{AMC} = S_{AHC}$, do đó ta so sánh S_{BNC} với S_{AHC} từ đó dẫn đến so sánh S_{BHN} và S_{AHN}.

Ví dụ 4. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng: $S_{ABCD} < \frac{1}{2}\left(AM + AN\right)^2$.

Giải

*** Tìm cách giải.** Nhận thấy vế phải của phần kết luận có độ dài hai cạnh của tam giác AMN, mặt khác dễ thấy $S_{AMN} \le \frac{1}{2}.AM.AN \le \frac{1}{2}.\frac{\left(AM + AN\right)^2}{4}$ (vận dụng kết quả $ab \le \frac{\left(a+b\right)^2}{4}$). Do vậy chúng ta cần biến đổi S_{ABCD} theo S_{AMN}. Định hướng cuối cùng là $S_{ABCD} \le 4.S_{AMN}$.



*** Trình bày lời giải**

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2.S_{AMC} + 2.S_{ANC}$$

$$= 2\left(S_{AMC} + S_{ANC}\right) = 2S_{AMCN} = 2S_{AMN} + 2S_{CMN}$$

Gọi giao điểm AM và BD là I

$\Rightarrow S_{CMN} = S_{IMN} < S_{AMN}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} < 4.S_{AMN} = 4.\frac{1}{2}AM.NH \le 2.AM.AN \le 2.\frac{\left(AM+AN\right)^2}{4}.$$

Suy ra $S_{ABCD} < \frac{1}{2}\left(AM+AN\right)^2$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với D là điểm thuộc cạnh BC và F là điểm thuộc cạnh AB. Điểm K đối xứng với điểm B qua DF. Biết rằng K, B nằm khác phía so với AC. Cạnh AC cắt FK tại P và DK tại Q. Tổng diện tích của các tam giác AFP, PKQ và QDC là $10cm^2$. Nếu ta cộng tổng diện tích này với diện tích tứ giác DFPQ thì bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC theo cm^2.

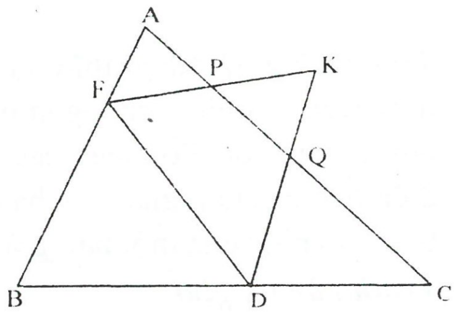
(Olympic Toán học Trẻ Quốc Tế Hàn Quốc KIMC 2014 (Malaysia đề nghị))

Giải

Ta có: $S_{DFPQ} = S_{ABC} - \left(S_{BDF} + S_{AFP} + S_{CDQ}\right) = S_{ABC} - \left(S_{DFK} + S_{AFP} + S_{CDQ}\right)$

$$= S_{ABC} - \left(S_{DFPQ} + S_{KPQ} + S_{AFP} + S_{CDQ}\right)$$

$$= S_{ABC} - \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.$$



$$\Rightarrow S_{KPQ} + S_{AFP} + S_{CDQ} = \frac{1}{3}S_{ABC}$$

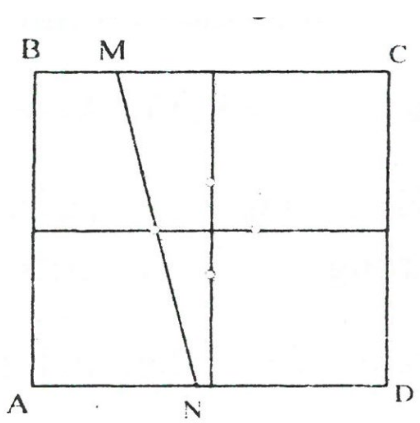
$$\Rightarrow S_{ABC} = 3.10 = 30cm^2$$

Ví dụ 6. Chín đường thẳng có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

(Thi vô địch CHLB Nga- năm 1972)

Giải

*** Tìm cách giải.** Chứng minh tồn tại ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm, mà không chỉ ra được cụ thể tường minh đó là điểm nào, chúng ta liên tưởng tới khả năng vận dụng nguyên lý Đirichle. Trong trường hợp này, chúng ta cần chỉ ra 9 đường thẳng phải đi qua ít nhất 1 trong 4 điểm cố định nào đó. Từ đó nếu mỗi điểm có nhiều nhất chỉ có 2 đường thẳng đi qua thì nhiều nhất chỉ có $4.2 = 8$ đường thẳng (nhỏ hơn 9), vô lý. Chúng ra có cách giải sau:



*** Trình bày cách giải**

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông ABCD. Bởi vì thế không thể tạo ra hai tứ giác mà là tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh BC và AD tại các điểm M và N. Các hình thang ABMN và CDNM có các đường cao bằng nhau do đó tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số các đường trung bình. Tức là MN chia đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh AB và CD theo tỉ số $\frac{2}{3}$.

Tổng số các điểm chia các đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$ là 4.

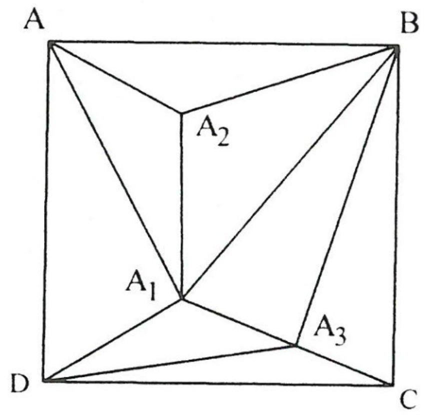
Bởi số dường thẳng đã cho là 9 và đều phải đi qua một trong số bốn điểm nói trên, nên có một điểm thuộc ít nhất 3 đường thẳng. Tức là có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 7. Bên trong hình vuông có cạnh bằng 10 có 1000 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{50}{1001}$.

Giải

*** Tìm cách giải**. Nhận thấy rằng hình vuông có diện tích $10.10 = 100$. Suy luận một cách tự nhiên, chúng ta nghĩ một cách từ 1000 điểm và 4 đỉnh nối với nhau như thế nào để tạo thành các tam giác không có điểm chung trong. Khi đó tổng diện tích các tam giác tạo thành có diện tích bằng 100. Chúng ta sẽ lập luận diện tích nhỏ nhất của một tam giác tạo thành thỏa mãn yêu cầu đề bài.

*** Trình bày cách giải**



Gọi 1000 điểm trong hình vuông cạnh bằng 10 là $A_1, A_2, ..., A_{1000}$.

Bước thứ nhất, ta nối A_1 với các đỉnh của hình vuông, ta được bốn tam giác. Xét điểm A_k với $k = 2,3,4,...,1000$. Nếu A_k nằm trong một tam giác đã tạo ra (chẳng hạn A_2 ở hình vẽ), ta nối A_2 với ba đỉnh của tam giác đó, số tam giác tăng thêm hai (từ 1 thành 3), nếu A_k thuộc một cạnh chung của hai tam giác tạo ra (chẳng hạn A_3 ở hình vẽ), ta nối A_3 với các đỉnh đối diện với cạnh chung, số tam giác cũng tăng thêm hai (từ 2 thành 4).

Như vậy, sau bước thứ nhất ta được bốn tam giác. Trong 999 bước còn lại, mỗi bước tăng thêm hai tam giác. Tổng cộng ta có:

$$4 + 2.999 = 2002 \text{ tam giác}$$

Tổng diện tích của 2002 tam giác đó bằng 100. Do đó tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{100}{2002} = \frac{50}{1001}$.

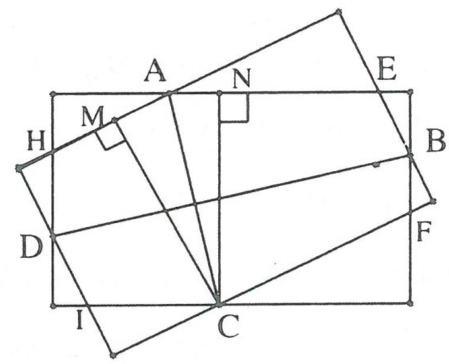
Nhận xét. Từ cách giải trên, chúng ta có thể giải được bài toàn tổng quát sau:

- Bên trong một hình vuông có cạnh là a cho n điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{a^2}{2n+2}$.

- Bên trong một đa giác lồi n cạnh có diện tích là S lấy m điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh đa giác, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{S}{2m+n-2}$.

Ví dụ 8. Chứng mình rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước $a \times b$ được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm thì diện tích phần chung lớn hơn nửa diện tích một hình chữ nhật.

Giải



Vẽ CM, CN (như hình vẽ) $\Rightarrow CM = CN$.

Suy ra CA là tia phân giác góc MAN và góc MCN. Chứng minh tương tự, ta có: BD là phân giác của $\widehat{EBF}$.

Dựa vào cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có: $\widehat{MAN} = \widehat{EBF}$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{DBF}$

Từ đó suy ra $AC \perp BD$.

Do đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$

$S_{AEBFCIDH} > S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD > \frac{1}{2} CN.BD > \frac{1}{2} a.\mathrm{b}$.

Nhận xét. Sử dụng kĩ thuật của chuyên đề tam giác đồng dạng. Các bạn có thể giải được bài toán sau: cho hai hình chữ nhật cùng kích thước $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$. Một hình chữ nhật các cạnh tô màu đỏ, một hình chữ nhật các cạnh tô màu xanh, được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm. Chứng minh rằng hình bát giác có tổng các cạnh màu đỏ bằng tổng các cạnh tô màu xanh.

C. Bài tập vận dụng

11.1. Cho hình chữ nhật ABCD có $CD = 4cm, BC = 3cm$. Gọi H là hình chiếu của C trên BD. Tính diện tích tam giác ADH.

11.2. Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy là $AB = 5cm, CD = 15cm$, độ dài hai đường chéo là $AC = 16cm$, $BD = 12cm$. Tính diện tích hình thang ABCD.

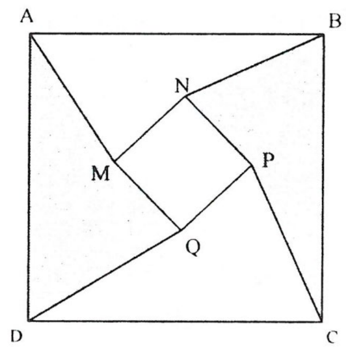
11.3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí D, E sao cho tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

11.4. Cho tam giác ABC có diện tích là S, trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 2DB$. Gọi E là trung điểm của AC và I là giao điểm CD và BE. Tính diện tích của tam giác IBC.

11.5. Cho tứ giác lồi ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD dựng đường thẳng song song với đường chéo AC, đường này cắt AD tại E. Chứng minh rằng CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau (biết E nằm giữa A và D).

11.6. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB va CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho $AM = CK$. Trên đoạn AD lấy điểm P bất kì. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F. Chứng minh rằng: $S_{PEF} = S_{BME} + S_{CKF}$

11.7. Cho tam giác ABC có các trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại O. Biết rằng $AC = b$; $BC = a$. Tính diện tích hình vuông có cạnh là a.



11.8. Đặt một hình vuông nhỏ vào bên trong một hình vuông lớn rồi nối 4 đỉnh của hình vuông lớn tương ứng theo thứ tự với 4 đỉnh hình vuông nhỏ (như hình vẽ).

Chứng minh rằng: $S_{AMNB} + S_{CDQP} = S_{ADQM} + S_{BCPN}$

11.9. Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao. Trên AB, AC lấy K, L sao cho $AK = AL = AH$. Chứng minh rằng $S_{AKI} < \frac{1}{2}.S_{ABC}$.

11.10. Cho tứ giác ABCD. Gọi M; N lần lượt là trung điểm AB; CD. Gọi P; Q lần lượt là trung điểm BM và DN. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

11.11. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$ và P là trung điểm cạnh CD. Goi O là giao điểm của ND và MP. Biết diện tích tam giác DOP lớn hơn diện tích tam giác MON là $7cm^2$. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

11.12. Cho tứ giác ABCD có $AC = 10cm$, $BD = 12cm$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết $\widehat{AOB} = 30°$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

11.13. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD; O là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh:

a) $S_{AOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}$.

b) $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

11.14. Cho một hình bình hành và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình bình hành thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{5}$. Chứng minh rằng trong 13 đường thẳng đó, có ít nhất bốn đường thẳng cùng đi qua một điểm.

11.15. Bên trong một hình vuông có cạnh bằng 1 cho 1000 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là 3 trong 1000 điểm đó, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{998}$.

11.16. Cho 37 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, nằm ở bên trong một hình vuông có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tìm được năm điểm trong 37 điểm đó thỏa mãn: các tam giác được tạo bởi trong năm điểm đó có diện tích không quá $\frac{1}{18}$.

11.17. Cho một đa giác lồi. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có diện tích không quá hai lần diện tích đa giác sao cho các đỉnh của đa giác nằm trong hoặc trên biên của hình bình hành.

11.18. Cho lục giác lồi ABCDEF có các cặp cạnh đối song song.

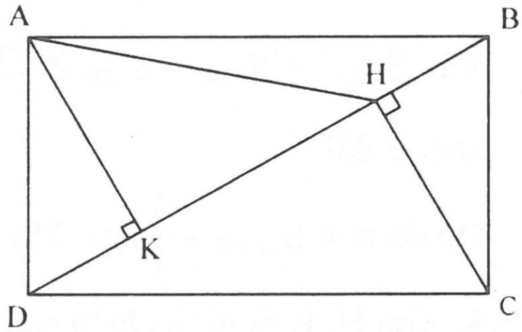
Chứng minh $S_{ACE} \ge \frac{1}{2}.S_{ABCDEF}$.

11.19. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, E, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, đường thẳng CI cắt BH và DE lần lượt tại M và N, đường thẳng AG cắt DE và BH lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng: $S_{MNPQ} = S_{IBM} + S_{CEN} + S_{DGP} + S_{AHQ}$.

11.20. Cho tam giác ABC, gọi M, N, D lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và P là điểm tùy ý nằm ngoài tam giác. Chứng mình rằng trong ba tam giác PAM, PBN, PCD luôn tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác còn lại.

Hướng dẫn giải

11.1. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông BCD, ta có:



$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ nên $BC = 5cm$.

$$CH = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{BC.CD}{BD} = \frac{3.4}{5} = 2,4(\text{cm})$$

Xét tam giác vuông CDH, ta có:

$\text{DH}^2 = CD^2 - CH^2 = 4^2 - 2,4^2$

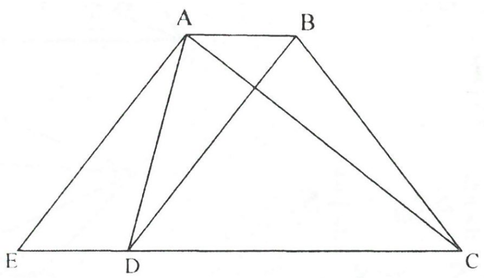
$= 10,24 = 3,2^2$

nên $DH = 3,2cm$.

Kẻ $AK \perp BD$. Ta có: $S_{ABD} = S_{CBD}$ nên $AK = CH = 2,4cm$.

Vậy $S_{ADH} = \frac{1}{2}DH.AK = \frac{1}{2}.3,2.2,4 = 3,86(\text{cm}^2)$.

11.2.



Qua A kẻ đường thẳng song song với BD, cắt đường thẳng CD tại E. Suy ra ABDE là hình bình hành.

$\Rightarrow AE = BD = 12cm; DE = AB = 5cm \Rightarrow CE = 20cm$.

Ta có: $AE^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$.

$CE^2 = 20^2 = 400$.

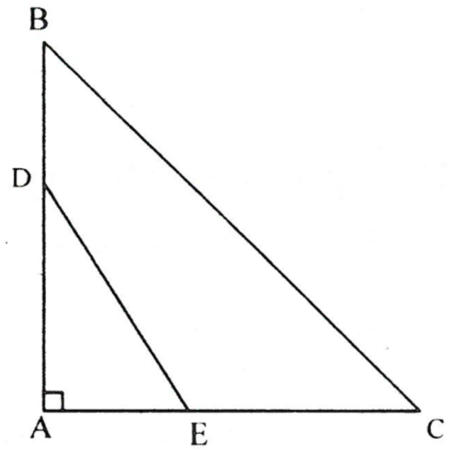
Do đó: $AE^2 + AC^2 = CE^2 \Rightarrow \Delta ACE$ vuông tại A.

$\Rightarrow S_{ACE} = \frac{1}{2}.AC.AE = \frac{1}{2}.16.12 = 96(\text{cm}^2)$.

Mặt khác: $S_{ADE}=S_{ABC}$ (vì $AB=DE$; đường cao kẻ từ A; C của hai tam giác đó bằng nhau).

$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ADE}+S_{ACD}=S_{ACE}\Rightarrow S_{ABCD}=96cm^2$.

11.3. Ta có: $S_{ADE}=\dfrac{1}{2}AD.AE=\dfrac{1}{2}AD.BD$



$\Rightarrow S_{ADE}=\dfrac{1}{2}AD\left(AB-AD\right)=\dfrac{1}{2}\left(AB.AD-AD^2\right)$

$\Rightarrow S_{ADE}=-\dfrac{1}{2}(AD^2-2\dfrac{AB}{2}.AD+\dfrac{AB^2}{4})+\dfrac{AB^2}{8}$

$\Rightarrow S_{ADE}=-\dfrac{1}{2}(AD-\dfrac{AB}{2})^2+\dfrac{AB^2}{8}\le\dfrac{AB^2}{8}$

Vậy $S_{BDEC}=S_{ABC}-S_{ADE}\ge\dfrac{AB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{8}=\dfrac{3}{8}AB^2$ không đổi.

Do đó $\min S_{BDEC}=\dfrac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC.

11.4. Gọi H, K là hình chiếu của D, C trên BE.

$S_{ABE}=S_{BCE}=\dfrac{1}{2}S_{ABC},S_{CDB}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}$;

$S_{BDE}=\dfrac{1}{3}S_{ABE}=\dfrac{1}{3}S_{CBE}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{S_{BDE}}{S_{CBE}}=\dfrac{DH}{CK}$

$\Rightarrow S_{IBC}=3S_{IBD}=\dfrac{3}{4}S_{CDB}=\dfrac{1}{4}S$.

11.5. Do $KE//CA$ nên $S_{CAE}=S_{CAK}$

Vậy: $S_{CBAE}=S_{ABC}+S_{CEA}=S_{ABC}+S_{CKA}=S_{ABCK}$

$=S_{CKB}+S_{KBA}=\dfrac{1}{2}.S_{BCD}+\dfrac{1}{2}.S_{BAD}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

11.6. Ta có ΔBCD và ΔPBC có chung cạnh BC và đường cao ứng với cạnh BC bằng nhau nên $S_{BCD}=S_{PBC}$ suy ra: $S_{PBC}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$ (1)

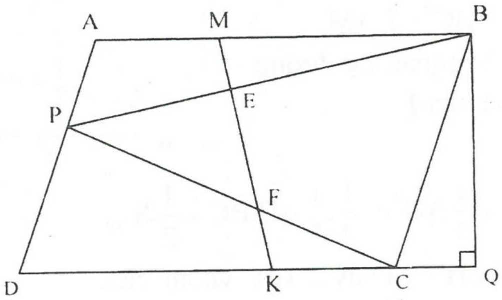
Ta có: $AM=CK.AB=CD$ suy ra $BM=DK$.

Kẻ $BQ\perp CD$, ta có:

$S_{BMKC}=\dfrac{(BM+CK)}{2}.BQ=\dfrac{(\text{DK}+\text{KC}).\text{BQ}}{2}=\dfrac{CD.BQ}{2}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

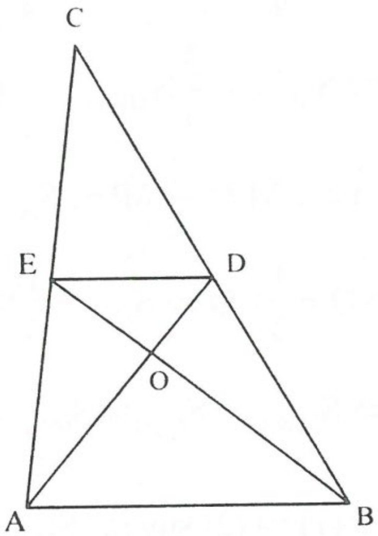
Suy ra $S_{PBC}=S_{BMKC}$ hay $S_{PEF}+S_{BEFC}=S_{BME}+S_{KFC}+S_{BEFC}$.

Vậy $S_{PEF} = S_{BME} + S_{KFC}$.



11.7. Ta có AD, BE là các đường trung tuyến nên O là trọng tâm suy ra: $OB = 2.OE; OA = 2.OD$

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:



$$OA^2 + OE^2 = AE^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$OB^2 + OD^2 = BD^2 = \frac{a^2}{4}$$

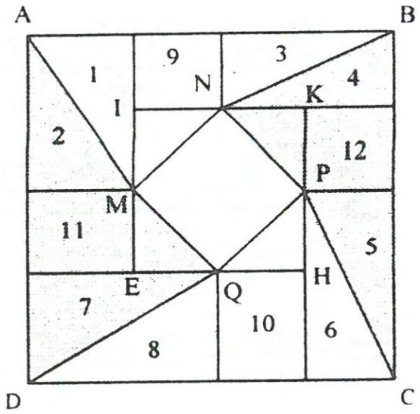
$$\Rightarrow (OA^2 + OB^2) + (OE^2 + OD^2) = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Rightarrow (OA^2 + OB^2) + \frac{OA^2 + OB^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Rightarrow AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}$$

Vậy diện tích hình vuông cạnh AB là: $\frac{a^2 + b^2}{5}$ (đvdt).

11.8. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với cạnh hình vuông ABCD (như hình vẽ). Khi đó ta được IKHE là hình vuông và các tam giác INM, KPN, HQP, EMQ bằng nhau.



Ta có:

$$S_{AMNB} + S_{CDQP} = S_1 + S_9 + S_3 + S_{IMN} + S_8 + S_6 + S_{10} + S_{HPQ}$$

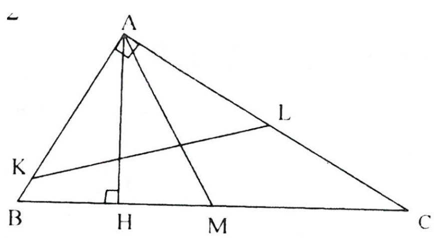
$$S_{AMQD} + S_{BNCP} = S_2 + S_{11} + S_7 + S_{EMQ} + S_4 + S_{12} + S_5 + S_{KPN}$$

Mà $S_1 = S_2; S_3 = S_4; S_5 = S_6; S_7 = S_8;$

$$S_9 + S_{10} = (AD - IE).IN; S_{11} + S_{12} = (AB - IK).ME$$

$\Rightarrow S_9 + S_{10} = S_{11} + S_{12}$. Do vậy: $S_{AMNB} + S_{CDQP} = S_{ADQM} + S_{BCPN}$.

11.9. Ta có: $S_{AKL} = \frac{1}{2} AK.AL = \frac{1}{2} AH^2; S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC$



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BM = MC = AM \Rightarrow BC = 2.AM$

Mặt khác $AH \leq AM$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow 2AH \le BC$

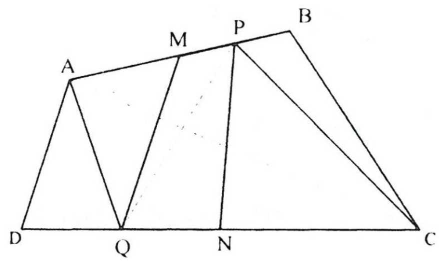
Từ đó suy ra: $S_{AKL} = \frac{1}{2}AH^2 \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.S_{ABC}$

Đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$ hay ΔABC vuông cân.

11.10. Ta có: $AP = \frac{3}{4}.AB \Rightarrow S_{ACP} = \frac{3}{4}.S_{ABC}$.

$CQ = \frac{3}{4}CD \Rightarrow S_{ACQ} = \frac{3}{4}S_{ACD} \Rightarrow S_{APCQ} = S_{ACP} + S_{ACQ} = \frac{3}{4}S_{ABC} + \frac{3}{4}S_{ACD}$

$\Rightarrow S_{APCQ} = \frac{3}{4}S_{ABCD}$ (1)



Ta có: $MP = \frac{1}{3}AP \Rightarrow S_{PQM} = \frac{1}{3}S_{APQ}$.

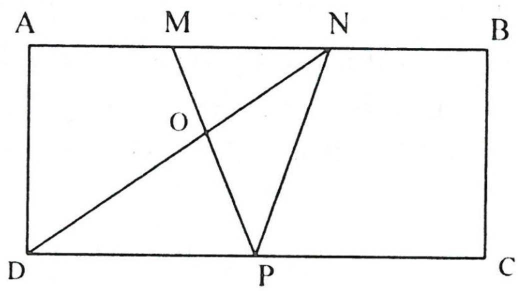
$NQ = \frac{1}{3}CQ \Rightarrow S_{PNQ} = \frac{1}{3}S_{PQC}$

$\Rightarrow S_{MPNQ} = S_{PQM} + S_{PNQ} = \frac{1}{3}S_{APQ} + \frac{1}{3}S_{PQC} \Rightarrow S_{MPNQ} = \frac{1}{3}S_{APCQ}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{MPNQ} = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

11.11. Ta có: $S_{DPN} - S_{MNP} = S_{DOP} - S_{MON} = 7cm^2$

Mà $\frac{S_{MNP}}{S_{DPN}} = \frac{MN}{DP} = \frac{1/3.AB}{1/2.AB} = \frac{2}{3}$

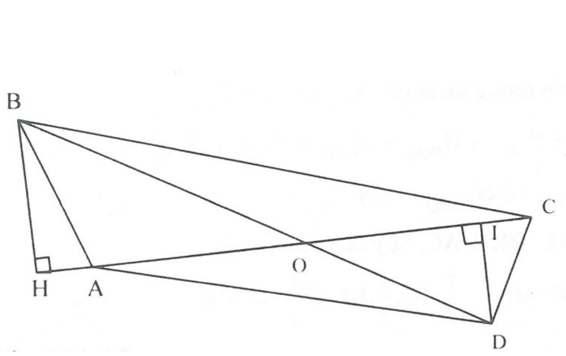


$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{DPN} - S_{MNP}} = \frac{2}{3-2}$

$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{7} = 2 \Rightarrow S_{MNP} = 14cm^2$.

Ta có: $S_{ABCD} = AB.AD = 3MN.AD = 6S_{MNP} = 6.14 = 84cm^2$.

11.12.



Kẻ $BH \perp AO; DI \perp OC$

ΔBHO có $\widehat{BHO} = 90°; \widehat{BOH} = 30° \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BO$

ΔDIO có $\widehat{DIO} = 90°; \widehat{DOI} = 30° \Rightarrow DI = \frac{1}{2}DO$

Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}.AC.BH + \frac{1}{2}.AC.DI$

$$= \frac{1}{2}.AC.(BH + DI) = \frac{1}{2}.AC.\left(\frac{1}{2}BO + \frac{1}{2}DO\right)$$

$$= \frac{1}{2}.AC.\frac{1}{2}.BD = \frac{1}{4}.AC.BD = \frac{1}{4}.10.12 = 30cm^2.$$

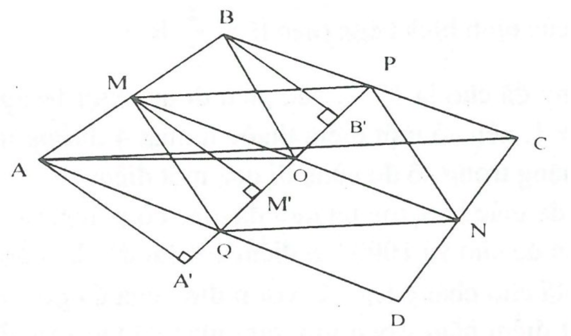
11.13. a) Vẽ AA', BB', MM' vuông góc với PQ.

Ta có: Tứ giác MPNQ là hình bình hành $\Rightarrow OQ = OP$

$S_{AOQ} = \frac{1}{2}OQ.AA'; S_{BOP} = \frac{1}{2}OP.BB'$

$S_{AOQ} + S_{BOP} = \frac{1}{2}OQ.(AA' + BB') = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.PQ.2.MM' = \frac{1}{2}.PQ.MM'$

Mà $S_{MPQ} = \frac{1}{2}PQ.MM'; \Rightarrow S_{AOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}$.



b) Chứng minh tương tự, ta có: $S_{DOQ} + S_{COP} = S_{NPQ}$.

$\Rightarrow S_{AOQ} + S_{BOP} + S_{DOQ} + S_{COP} = S_{MPQ} + S_{NPQ}$

$S_{AOD} + S_{BOC} = S_{MPNQ}$ (1)

Kẻ $MI \perp AC, BK \perp AC$. Suy ra, ta có:

$S_{MPFE} = MP.MI = \frac{1}{2}AC.\frac{1}{2}.BK = \frac{1}{4}.AC.BK$

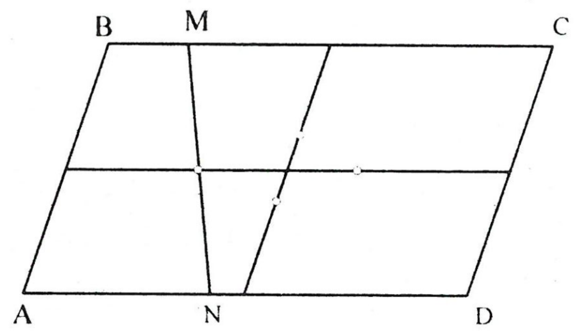
Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BK \Rightarrow S_{MPFE} = \frac{1}{2}.S_{ABC}$

Tương tự, ta có: $S_{NQEF} = \frac{1}{2}.S_{ACD}$

Do đó: $S_{MPNQ} = \frac{1}{2}.S_{ABC} + \frac{1}{2}.S_{ACD} = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

11.14. Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình bình hành ABCD. Bởi vì nếu thế không thể tạo ra hai tứ giác mà là tam giác và ngũ giác. Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh BC và AD tại các điểm M và N. Các hình thang ABMN và CDNM có các đường cao bằng nhau do đó tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số các đường trung bình. Tức là MN chia đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh AB và CD theo tỉ số $\frac{2}{5}$. Tổng số các điểm chia các đường trung bình của hình bình hành theo tỉ số $\frac{2}{5}$ là 4.



Bởi số đường thẳng đã cho là 13 và đều phải đi qua một trong số bốn điểm nói trên mà $13 = 3.4 + 1$, nên có một điểm thuộc ít nhất 4 đường thẳng. Tức là có ít nhất bốn đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

11.15. Theo bổ đề về đa giác bao, tồn tại một đa giác có n đỉnh $(n \le 1000)$ là n điểm trong số 1000 điểm đã cho và $1000 - n$ điểm còn lại đã cho nằm trong đa giác.

Ta nối một điểm đã cho chẳng hạn A_1 với n đỉnh của đa giác n cạnh, ta được n tam giác. Nối một điểm nằm trong một tam giác đã tạo ra với ba đỉnh của tam giác đó, số tam giác tăng thêm hai (từ 1 thành 3). Tổng cộng ta có:

$$n + 2.(1000 - n - 1) = 1998 - n \text{ (tam giác)}$$

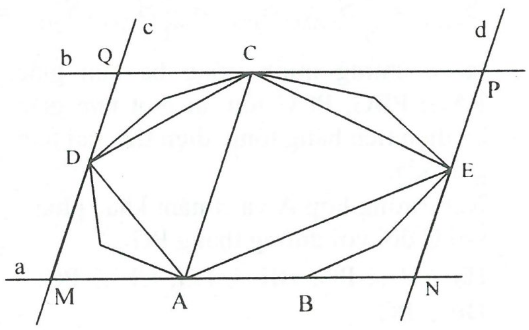
Vì $n \le 1000$ nên $1998 - n \ge 998$.

Tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{998}$ diện tích đa giác. Do đó tam giác đó có diện tích không quá $\frac{1}{998}$.

11.16. Chia hình vuông thành chín hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\frac{1}{3}$, diện tích mỗi hình vuông nhỏ là $\frac{1}{9}$.

Vì $37 = 4.9 + 1$ nên tồn tại một hình vuông nhỏ chứa năm điểm, ba điểm vào trong năm điểm ấy cùng là đỉnh của một tam giác có diện tích không quá một nửa hình vuông nhỏ. Do đó các tam giác được tạo bởi ba trong năm điểm đó có diện tích không quá $\frac{1}{18}$.

11.17.



Gọi a là đường thẳng chứa cạnh AB của đa giác.

Gọi C là đỉnh của đa giác cách xa AB nhất. Qua C kẻ đường thẳng $b // AB$.

Gọi D, E là các đỉnh của đa giác cách xa AC nhất về hai phía của AC. Qua D kẻ đường thẳng $c//AC$, qua E kẻ đường thẳng $d//AC$.

Gọi MNPQ là hình bình hành tạo bởi các đường thẳng a, b, c, d các đỉnh của đa giác nằm trong hoặc trên biên của hình bình hành.

Hiển nhiên $S_{ACD}+S_{ACE}\le S_{\text{đa giác}}$

Mà $S_{ACD}+S_{ACE}=\frac{1}{2}.S_{MNPQ}$ nên $\frac{1}{2}.S_{MNPQ}\le S_{\text{đa giác}}$

tức là $S_{MNPQ}\le 2.S_{\text{đa giác}}$

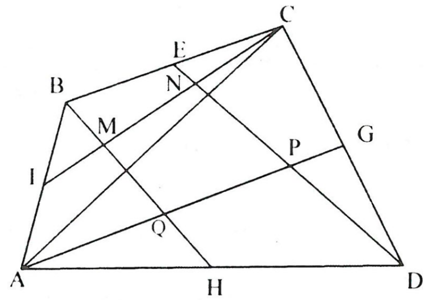
11.18. Vẽ hình bình hành ABCQ; CDER; AFEP

Ta có: $S_{ABCDREF}=2.S_{APE}+2.S_{CER}+2.S_{ACQ}+S_{POQ}$

$\Rightarrow 2.S_{AEC}=S_{ABCDEF}-S_{PQR}\ge S_{ABCDEF}$.

Vậy $S_{AEC}\ge\frac{1}{2}.S_{ABCDEF}$.

11.19. Ta có: $S_{ACG}=\frac{1}{2}S_{ACD},S_{ACI}=\frac{1}{2}S_{ACB}\Rightarrow S_{AGCI}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ (1)



Tương tự $S_{DEBH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$S_{AGCI}+S_{DEBH}=S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{IBM}+S_{CEN}+S_{DGP}+S_{AHQ}$

11.20. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có:

$S_{PAG}=\frac{2}{3}S_{PAM},S_{PBG}=\frac{2}{3}S_{PBN},S_{PCG}=\frac{2}{3}S_{PCD}$, ta sẽ chứng minh trong ba tam giác PAG, PBG, PCG tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác kia.

Xét trường hợp A và B nằm khác phía với C đối với đường thẳng PG.

Hạ $AH\perp PG,BK\perp PG,CF\perp PG,DE\perp PG$

$\Rightarrow AH//DE//CF//BK$, theo giả thiết $DA=DB$

$\Rightarrow AH+BK=2DE$, G là trọng tâm $\Rightarrow CG=2GD$

$\Rightarrow CF=2DE\Rightarrow CF=AH+BK$

$\Rightarrow S_{PCG}=S_{PAG}+S_{PBG}\Rightarrow S_{PCD}=S_{PAM}+S_{PBN}$

Tương tự với các trường hợp còn lại, trong ba tam giác PAM, PBN, PCD luôn tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác còn lại.

Chuyên đề 12

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Ta đã biết một số công thức tính diện tích của đa giác như công thức tính diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi,… Khi biết độ dài của một số yếu tố, ta có thể tính được diện tích của những hình ấy. Ngược lại nếu biết quan hệ diện tích của hai hình chẳng hạn biết hai tam giác có diện tích bằng nhau và có hai đáy bằng nhau thì suy ra được các chiều cao tương ứng bằng nhau. Như vậy các công thức tính diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng.

2. Để so sánh hai độ dài nào đó bằng phương pháp diện tích, ta có thể làm theo các bước sau:

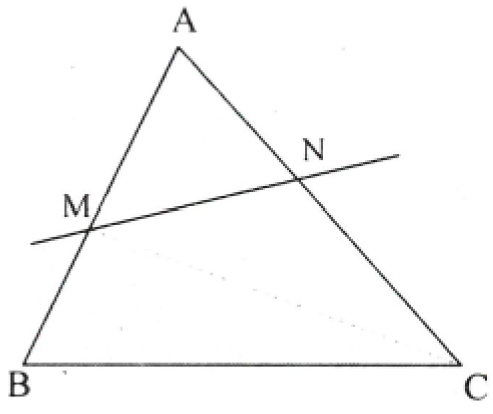
- Xác định quan hệ diện tích giữa các hình.
- Sử dụng các công thức diện tích để biểu diễn mối quan hệ đó bằng một đẳng thức có chứa các độ dài.
- Biến đổi đẳng thức vừa tìm được ta có quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng cần so sánh.

3. Một số biện pháp thực hiện:

- Sử dụng trực tiếp công thức tính diện tích tam giác.
- Sử dụng tính chất: Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số hai đáy tương ứng bằng tỉ số hai diện tích. Ngược lại, nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số hai chiều cao tương ứng bằng tỉ số hai diện tích.
- Sử dụng tính chất: Nếu một tam giác và một hình bình hành có cùng đáy và cùng chiều cao (ứng với đáy đó) thì diện tích tam giác bằng nửa diện tích hình bình hành.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{AM.AN}{AB.AC}$.



Giải

Áp dụng tính chất hai tam giác có cùng đường cao, ta có:

$\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}}=\frac{AN}{AC};\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{AM}{AB}$

Từ đó suy ra: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}}.\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{AM.AN}{AB.AC}$

(điều phải chứng minh)

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và $\Delta A'B'C'$ có $\widehat{A}=\widehat{A'}$.

Chứng minh rằng: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$

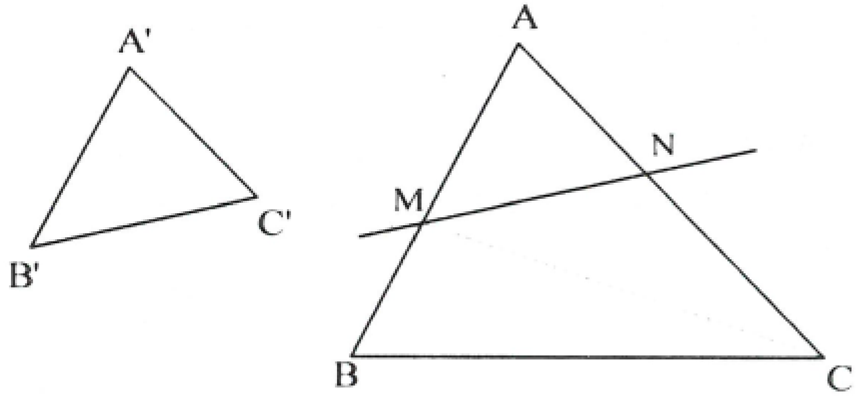
Giải

Trên đường thẳng AB, AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM=A'B',AN=A'C'$.

Từ đó suy ra: $\Delta A'B'C'=\Delta AMN\left(c.g.c\right)$.

Chứng minh tương tự ví dụ 1, ta có: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AN}{AB.AC}$.

Từ đó suy ra: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$.



Nhận xét: Ví dụ 1; 2 là một kết quả đẹp về tỉ số diện tích. Chúng được vận dụng trong nhiều bài toán về sau. Bạn nên nhớ tính chất này.

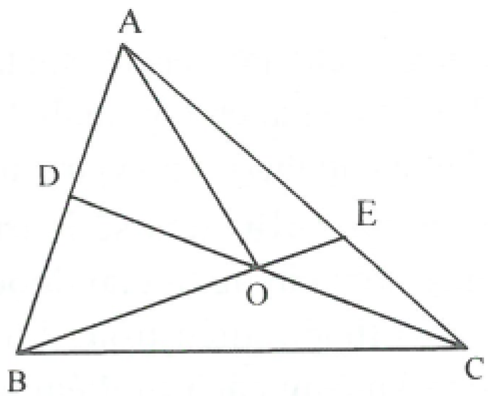
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = 2.EC$. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

a) $S_{BOC} = S_{AOC}$

b) $BO = 3.EO$

Giải

*** Tìm cách giải**



Vì D là trung điểm AB nên suy ra ngay được $S_{ACD} = S_{BCD}; S_{AOD} = S_{BOD}$ nên dễ dàng dẫn đến $S_{BOC} = S_{AOC}$

Nhận thấy rằng BO, CO là hai cạnh của tam giác BOC, COE có chung đường cao kẻ từ C.

Do đó để so sánh BO và CO, ta so sánh diện tích tam giác BOC và COE. Từ câu a, ta so sánh diện tích tam giác AOC và COE, hiển nhiên ta cần so sánh AC và EC. Từ đó ta có lời giải sau:

*** Trình bày lời giải**

a) Ta có: $AD = BD$ nên $S_{AOD} = S_{OBD}; S_{CAD} = S_{CBD}$

suy ra: $S_{CAD} - S_{AOD} = S_{CBD} - S_{OBD}$ hay $S_{AOC} = S_{BOC}$

b) Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác chung chiều cao, ta có: $\frac{S_{OEC}}{S_{OAC}} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{3}$

mà $\frac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \frac{OE}{OB} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow OB = 3.OE$.

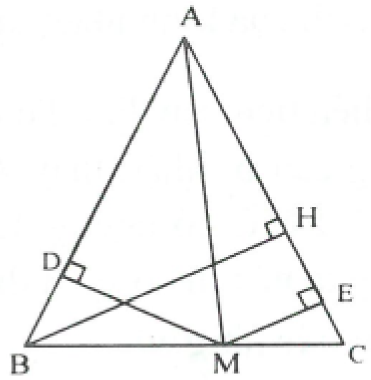
Nhận xét: Để chứng minh $OB = 3.OE$ là chúng ta chứng minh $S_{OBC} = 3.S_{OEC}$

Phương pháp diện tích là để tìm tỉ số đoạn thẳng, ta tìm tỉ số diện tích của hai tam giác nhận hai đoạn thẳng ấy làm cạnh.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Một điểm M thuộc cạnh BC, kẻ MD vuông góc với AB, ME vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng $MD + ME$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh BC.

Giải

*** Tìm cách giải** : Nhận thấy khi điểm M di động trên cạnh BC thì quan hệ MD vuông góc với AB, ME vuông góc với AC là không đổi, nên dễ dàng nhận biết được tổng diện tích hai tam giác ABM và ACM là không đổi. Do vậy chúng ta nghĩ tới phương pháp diện tích.



*** Trình bày lời giải**

Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow H$ cố định $\Rightarrow BH$ không đổi.

Ta có: $S_{ABM} + S_{AMC} = S_{ABC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.DM + \frac{1}{2}AC.ME = \frac{1}{2}AC.BH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.(MD + ME) = \frac{1}{2}AC.BH \text{ (vì } AB = AC\text{)}$$

Do đó $DM + ME = BH$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên cạnh BC.

Nhận xét:

- Ngoài cách giải trên, chúng ta còn có cách giải khác như sau: Kẻ MI vuông góc với BH. Chúng ta chứng minh được $MD = BI, ME = IH$, từ đó suy ra $DM + ME = BH$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên cạnh BC.
- Tam giác ABC đều sẽ là trường hợp đặc biệt của tam giác cân, do vậy với kỹ thuật trên chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác đều ABC. Một điểm M bất kì thuộc miền trong hoặc trên cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ điểm M đến các cạnh của tam giác ABC không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
- Nếu cho điểm M chuyển động trên tia đối của tia CB, ta có: $S_{ABM} - S_{AMC} = S_{ABC}$. Với kỹ thuật trên chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Một điểm M tùy ý trên tia đối của tia CB. Kẻ MD vuông góc với cạnh AB, ME vuông góc với AC. Chứng minh rằng hiệu $MD - ME$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
- Bản chất của cách giải là dùng diện tích, kết hợp với $AB = AC$ để chứng minh kết quả trên bằng độ dài đường cao ứng với cạnh bên. Với tư tưởng ấy chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác đều ABC. Một điểm M bất kì thuộc miền trong góc A, nhưng nằm ngoài tam giác ABC. Kẻ MD vuông góc với cạnh AB, ME vuông góc với AC, MK vuông góc với BC. Chứng minh rằng: $MD + ME - MK$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

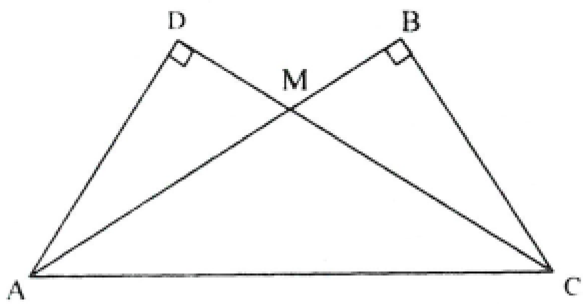
Ví dụ 5: Một hình chữ nhật bằng giấy được gấp theo đường chéo AC như hình vẽ. Diện tích của hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ của diện tích ban đầu. Biết diện tích tam giác AMC là $18cm^2$.

a) Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu.

b) Chứng tỏ độ dài AM gấp 3 lần độ dài BM.

Giải

* **Tìm cách giải** : Nhận thấy rằng khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo thì phần tờ giấy xếp chồng lên nhau chính là phần ΔAMC. Mặt khác, diện tích của hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ của diện tích ban đầu. Từ đó suy ra câu a, chỉ cần biến đổi khéo léo là giải được.



Trong câu b, nhận thấy AM, BM lần lượt là độ dài hai cạnh của hai tam giác AMC, BMC có chung đường cao kẻ từ C. Do vậy muốn so sánh AM và BM chúng ta nên đi so sánh diện tích ΔAMC và diện tích ΔBMC.

* **Trình bày lời giải**

a) Khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo thì phần tờ giấy xếp chồng lên nhau chính là phần ΔAMC. Do vậy diện tích nhận được so với diện tích hình chữ nhật ban đầu đã giảm đi đúng bằng diện tích ΔMAC. Tức là giảm đi $18cm^2$. Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu nên diện tích ΔAMC bằng: $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ (diện tích hình chữ nhật).

Do đó diện tích hình chữ nhật là: $18:\frac{3}{8}=48\left(cm^2\right)$;

b) Diện tích tam giác ABC là: $48:2=24\left(cm^2\right)$.

Diện tích tam giác MBC là: $24-18=6\left(cm^2\right)$

Hai tam giác MBC và AMC có chung đường cao BC nên:

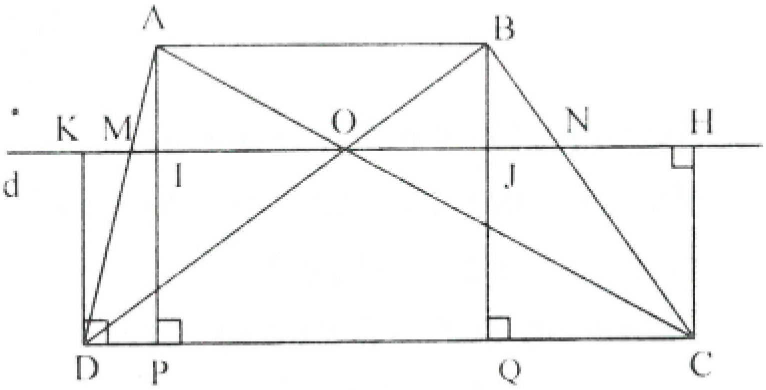
$\frac{AM}{MB}=\frac{S_{AMC}}{S_{MBC}}=\frac{18}{6}=3$ suy ra $AM=3.MB$.

Ví dụ 6: Cho hình thang $ABCD\left(AB\parallel CD\right)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Qua O kẻ đường thẳng d song song với CD. Đường thẳng d cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $OM=ON$.

Giải

* **Tìm cách giải** : Khi nói về diện tích của hình thang, thì đặc trưng là tam giác AOD; BOC là có diện tích bằng nhau. Khai thác yếu tố này, ta có: $S_{AOM}+S_{DOM}=S_{BON}+S_{CON}$. Từ nhận xét trên, muốn so sánh OM và ON chúng ta đi so sánh tổng thể các đường cao tương ứng với cạnh OM và ON.

*** Trình bày lời giải**



Kẻ AP vuông góc CD và cắt MN tại I; BQ vuông góc CD và cắt MN tại J; DK vuông góc MN tại K; CH vuông góc MN tại H;

Ta có:

$S_{ACD} = \frac{1}{2}.CD.AP; S_{BCD} = \frac{1}{2}.CD.BQ$

Mà $AP = BQ$, nên $S_{ACD} = S_{BCD} \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$

Mặt khác,

$$S_{AOD} = S_{AOM} + S_{DOM} = \frac{1}{2}.OM.AI + \frac{1}{2}.OM.DK = \frac{1}{2}.OM.\left(AI + DK\right) = \frac{1}{2}.OM.AP$$

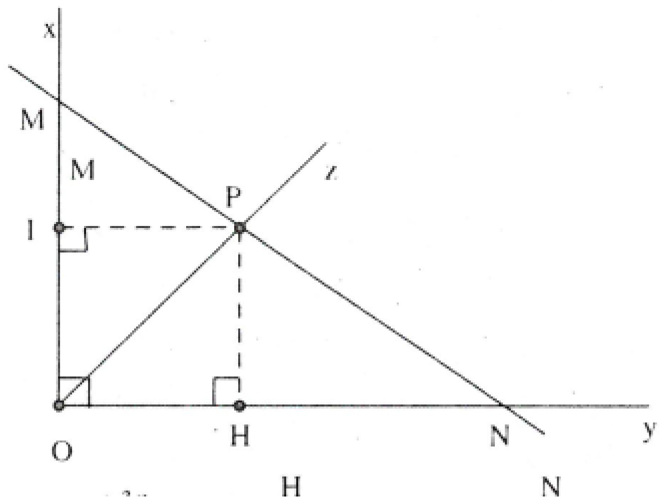
$$S_{BOC} = S_{BON} + S_{CON} = \frac{1}{2}.ON.BJ + \frac{1}{2}.ON.CH = \frac{1}{2}.OM.\left(BJ + CH\right) = \frac{1}{2}.ON.BQ$$

Suy ra: $\frac{1}{2}.OM.AP = \frac{1}{2}.ON.BQ \Rightarrow OM = ON$

Ví dụ 7: Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ có tia Oz là phân giác. Lấy điểm P cố định thuộc $Oz\left(P \neq O\right)$. Qua P kẻ đường thẳng d bất kì cắt Ox, Oy tại M, N. Chứng minh khi d thay đổi thì $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không đổi.

Giải

Kẻ $PI \perp Ox, PH \perp Oy$, ta có $PI = PH$ và không đổi.



Ta có: $S_{OPM} + S_{OPN} = S_{OMN}$, nên:

$\frac{1}{2}OM.PI + \frac{1}{2}ON.PH = \frac{1}{2}OM.ON$

Chia hai vế cho $\frac{1}{2}OM.ON$

Ta có: $\frac{PI}{ON} + \frac{PH}{OM} = 1$

Do $PI = PH$, nên ta có: $\frac{1}{ON} + \frac{1}{OM} = \frac{1}{PI}$ không đổi.

Ví dụ 8: Trong tam giác ABC nhọn gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao ứng với cạnh BC, CA, AB. Gọi x, y, z là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong tam giác đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\min\left(h_a, h_b, h_c\right) \leq x + y + z \leq \max\left(h_a, h_b, h_c\right)$$

Giải

Giả sử $h_a \leq h_b \leq h_c$ thì $c \leq b \leq a$

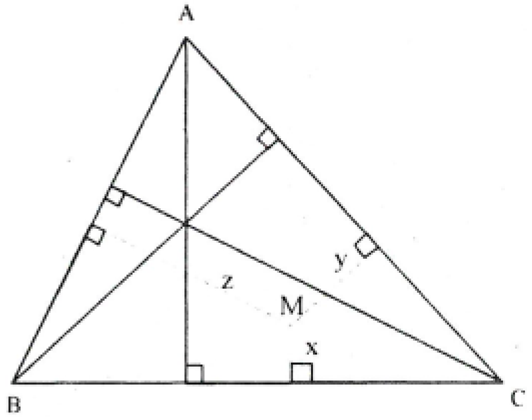
Mà $2.S = ax + by + cz \le ax + ay + az$

$\Rightarrow x + y + z \ge \qquad = h_a (1)$

$2.S = ax + by + cz \ge cx + cy + cz$

$\Rightarrow x + y + z \le \qquad = h_c (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh



C. Bài tập vận dụng

12.1. Cho hình vuông ABCD và E là điểm trên cạnh AD sao cho $S_{ABCD} = 144cm^2$ và $S_{ABE} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Tính độ dài đoạn AE.

(Olympic Toán Tuổi Thơ toàn quốc, năm 2014)

12.2. Cho hình thang $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E, MN ở I, BC ở F. Chứng minh $IE = IF$.

12.3. Cho tam giác ABC. Qua điểm O tùy ý nằm trong tam giác ta kẻ các đường thẳng AO; BO; CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, và P. Chứng minh rằng:

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$$

12.4. Cho ΔABC trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với BC, cắt cạnh AB, AC và AM tại D, E, F. Chứng minh $FD = FE$.

12.5. Cho hình bình hành ABCD. Trên BC lấy điểm I và trên AB lấy điểm K sao cho $AI = CK$. Gọi O là giao điểm của AI và CK. Chứng minh OD là tia phân giác của góc AOC.

12.6. Cho hình thang $ABCD\left(AB \parallel CD\right), AB < CD$. Lấy điểm M trên CD sao cho BM chia ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi N là trung điểm AD. Chứng minh $MN \parallel BC$.

12.7. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng BC, CA, AB. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng NP, PM, MN. Biết rằng YZ; ZX; XY theo thứ tự song song với BC, CA, AB. Chứng minh $\frac{XP}{XN} = \frac{MB}{MC}$.

12.8. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = 3DA$, trên CB lấy điểm E sao cho $BE = 4.EC$. Gọi F là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng $FD = FC$.

12.9. Cho tứ giác lồi ABCD. Trên hai cạnh AB và CD ta lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$.

Chứng minh rằng nếu đường chéo AC đi qua trung điểm I của đoạn thẳng EF thì AC chia đôi diện tích của tứ giác ABCD.

12.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và hai đường phân giác BD và CE. Lấy điểm I bất kì trên đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng : $\frac{S_{IBC}}{S_{IAB} + S_{IAC}} = \sqrt{2}$.

12.11. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài h_a, h_b, h_c . Gọi r là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác đến một cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

12.12. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $\frac{AI^2}{AB.AC}+\frac{BI^2}{BA.BC}+\frac{CI^2}{CA.CB}=1$.

12.13. Hai đường chéo của tứ giác ABCD cắt nhau tại O, chia tứ giác thành bốn tam giác có đỉnh O là OAB, OBC, OCD, OAD. Biết số đo diện tích của các tam giác này là các số nguyên. Chứng minh rằng tích các số đo diện tích của các tam giác đó là một số chính phương.

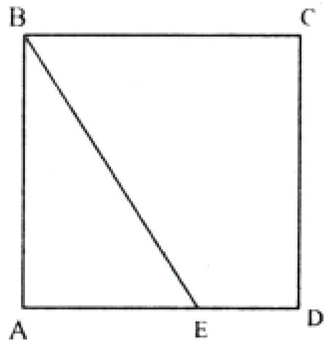
12.14. Cho lục giác ABCDEF, mỗi đường chéo AD, BE, CF chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

12.15. Cho lục giác ABCDEF. Gọi các trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là L, M,N,P,Q,R. Biết mỗi đoạn LP, MQ, NR đều chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng LP, MQ, NR đồng quy.

12.16. Cho tứ giác ABCD có E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AB, CD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $MA.NC = MB.ND$

Hướng dẫn giải

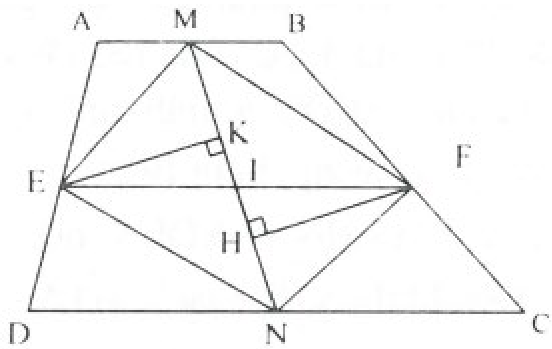
12.1. Ta có: $S_{ABCD} = AD^2 = 144\left(cm^2\right)$ nên $AD = 12cm$



Mặt khác: $S_{ABE} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$ nên $\frac{1}{2}AB.AE = \frac{1}{3}AB.AD$

$\Rightarrow AE = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}.12 = 8\left(cm\right)$

12.2. Ta có: $AM = MB; DN = CN$, mà AMND và BCNM là hình thang có chung đường cao, nên $S_{AMND} = S_{BCNM}$.



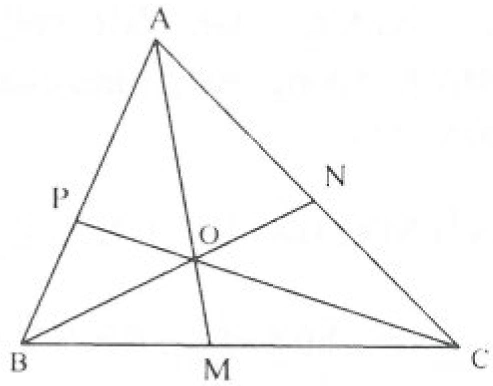
Ta có: $S_{AMI} = S_{BMF}$ vì $AM = BM$ và đường cao hạ từ E; F bằng nhau.

Ta có: $S_{DEN} = S_{FCN}$ vì $ND = NC$ và đường cao hạ từ E; F bằng nhau $\Rightarrow S_{EMN} = S_{FMN}$

Kẻ $EK \perp MN; FH \perp MN$ nên $EK = FH$.

Suy ra $\Delta EKI = \Delta FHI$ nên $EI = FI$.

12.3. Đặt diện tích $\Delta OBC, \Delta OAC, \Delta OAB, \Delta ABC$ lần lượt là $S_1; S_2; S_3$ và S.



Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung đường cao và tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

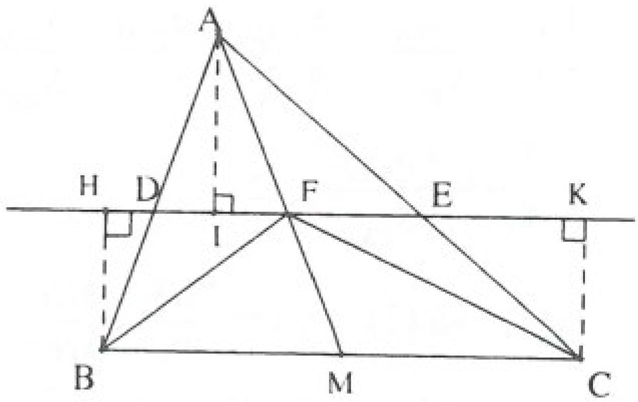
$$\frac{OM}{AM} = \frac{S_{OBM}}{S_{ABM}} = \frac{S_{OCM}}{S_{ACM}} = \frac{S_{OBM} + S_{OCM}}{S_{ABM} + S_{ACM}} = \frac{S_1}{S}.$$

$$\frac{ON}{AN} = \frac{S_{OAN}}{S_{ABN}} = \frac{S_{OCN}}{S_{BCN}} = \frac{S_{OAN} + S_{OCN}}{S_{ABN} + S_{BCN}} = \frac{S_2}{S}$$

$$\frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{OBP}}{S_{CBP}} = \frac{S_{OAP} + S_{OBP}}{S_{ACP} + S_{CBP}} = \frac{S_3}{S}.$$

Mà $S_1 + S_2 + S_3 = S$. Từ đó suy ra: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1$.

12.4. Vẽ $AI \perp EF, BH \perp EF, CK \perp EF$.



Ta có: $MB = MC$ nên

$S_{ABM} = S_{ACM}; S_{FBM} = S_{FCM}$

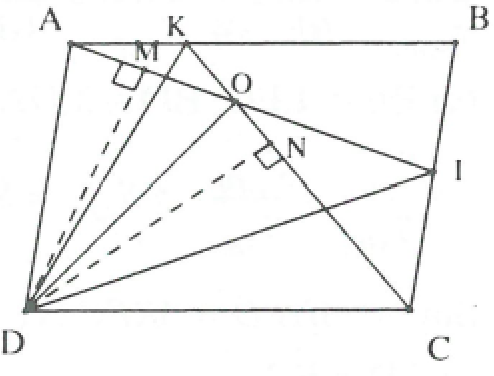
Suy ra $S_{ABF} = S_{ACF}$

$\Leftrightarrow S_{ADF} + S_{BDF} = S_{AEF} + S_{CEF}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} DF.(BH + AI) = \frac{1}{2} EF.(AI + CK)$

Mà $BD = CK$ suy ra $DF = EF$.

12.5. Vẽ $DM \perp AI; DN \perp CK \left(M \in AI, N \in CK\right)$



Ta có: $S_{DCK} = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$

$S_{ADI} = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$.

nên $S_{DCK} = S_{ADI} \Rightarrow \frac{1}{2} AI.DM = \frac{1}{2}.CK.DN$

Mặt khác $AI = CK$, suy ra $DM = DN \Rightarrow D$ cách đều hai cạnh của góc $\widehat{AOC}$.

Vậy OD là tia phân giác của góc AOC.

12.6. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = AB$

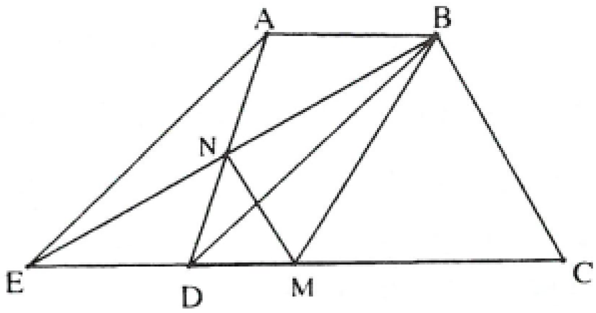
Tứ giác ABDE là hình bình hành, mà N là trung điểm AD

$\Rightarrow N$ là trung điểm BE.

Ta có: $\Delta ABN = \Delta DEN$, nên $S_{ABN} = S_{DNE} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{BCE}$.

Điểm M thuộc CD sao cho BM chia ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau:

$\Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{BCE}$



$\Rightarrow CM = \frac{1}{2}CE \Rightarrow CM = ME$

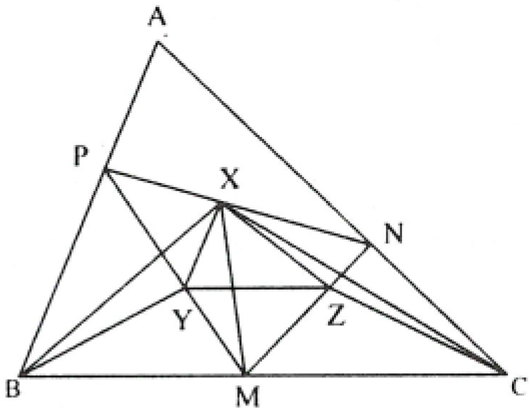
ΔBCE có $MC = ME, NB = NE$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔBCE .

$\Rightarrow MN \parallel BC$.

12.7. Nối $MX; BX; BY; CX; CZ$. Ta có: $\frac{XP}{XN} = \frac{S_{MXP}}{S_{MXN}} = \frac{S_{MXY} + S_{PXY}}{S_{MXZ} + S_{NXZ}}$

Từ đó, với chú ý rằng: $BP \parallel YZ$ thì $S_{PXY} = S_{BXY}$



và $CN \parallel ZX$ thì $S_{NXZ} = S_{CXZ}$. Ta có:

$\frac{XP}{XN} = \frac{S_{MXY} + S_{BXY}}{S_{MXZ} + S_{CXZ}}$ (1)

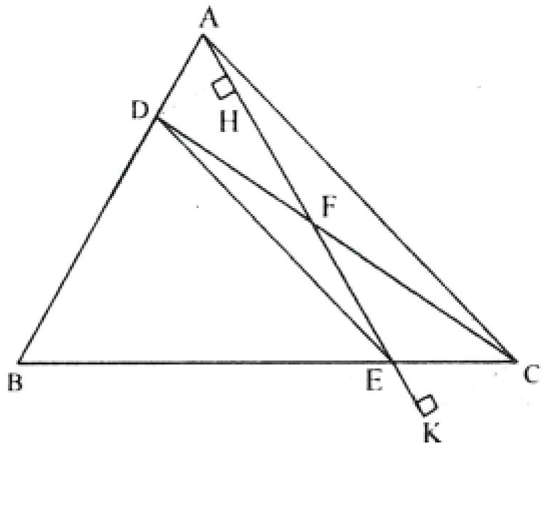
Mặt khác vì $YZ \parallel BC$ nên ta có:

$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{XMB}}{S_{XMC}} = \frac{S_{YMB}}{S_{ZMC}} = \frac{S_{XMB} - S_{YMB}}{S_{XMC} - S_{ZMC}}$

$= \frac{S_{MXY} + S_{BXY}}{S_{MXZ} + S_{CXZ}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{XP}{XN} = \frac{MB}{MC}$.

12.8. Kẻ $DH \perp AE; CK \perp AE$. Ta có:



$\frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{4}; \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$

(vì $BE = 4.EC; BD = 3.DA$)

$\Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} \Rightarrow S_{AEC} = S_{ADE} \Rightarrow CK = DH$

Suy ra $\Delta HFD = \Delta KFC$

(vì $\widehat{H} = \widehat{K} = 90°; \widehat{FHD} = \widehat{FCK}; CK = AH$)

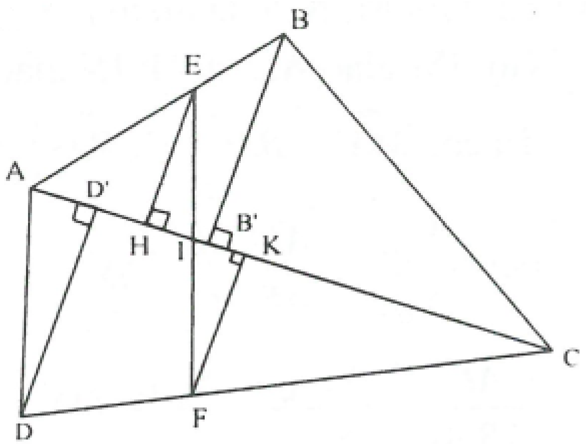
$\Rightarrow FD = FC$

12.9. Kẻ DD', BB', EH, FK cùng vuông góc với AC.

Do $EH \parallel BB' \Rightarrow \frac{EH}{BB'} = \frac{AE}{AB}$

$FK \parallel DD' \Rightarrow \frac{FK}{DD'} = \frac{CF}{CD}$

mà $\frac{AE}{AB}=\frac{CF}{CD}(gt)$ suy ra $\frac{EH}{BB'}=\frac{FK}{DD'}$.



Ta có: $\Delta HIE=\Delta KIF$ (vì $IE=IF$,

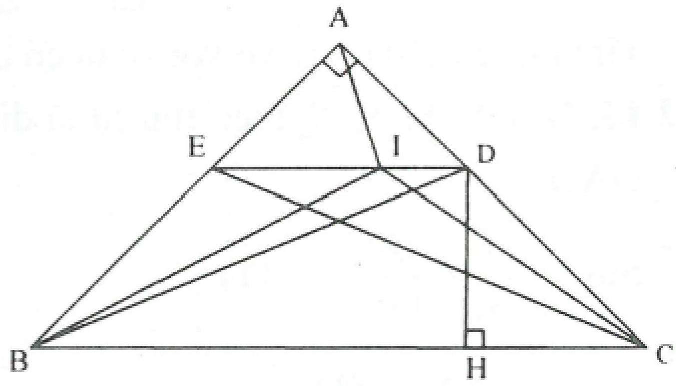
$\widehat{HIE}=\widehat{KIF}) \Rightarrow HE=FK$ vậy $BB'=DD'$.

Suy ra: $S_{ACD}=S_{ABC}$.

Vậy AC chia đôi diện tích tứ giác ABCD.

12.10. Ta thấy $\Delta ABD=\Delta ACE(g.c.g)$ nên $AD=AE$

Vậy tam giác ADE vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{AED}=45°$



Do đó $DE \parallel BC$ nên $S_{IBC}=S_{DBC}$ (1)

Dựng $DH \perp BC(H \in BC)$. Ta thấy

$\Delta DBH=\Delta DBA$ (cạnh huyền –góc nhọn)

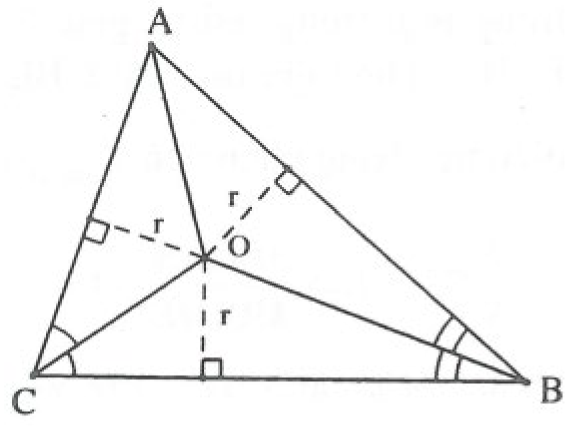
nên $DH=DA$

Suy ra: $\frac{S_{DBC}}{S_{DBA}}=\frac{\frac{1}{2}BC.DH}{\frac{1}{2}AB.DA}=\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}$

hay $\frac{S_{DBC}}{S_{ABC}-S_{DBC}}=\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}-S_{IBC}}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{S_{IBC}}{S_{IAB}+S_{IAC}}=\sqrt{2}$

12.11. Vận dụng hai tam giác có chung một cạnh thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với cạnh đó là:



$\frac{r}{h_a}=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}};\frac{r}{h_b}=\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}};\frac{r}{h_c}=\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=\frac{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}}{S_{ABC}}=1$

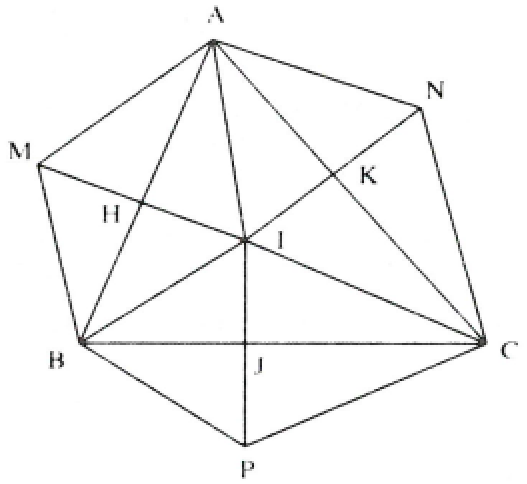
Vậy $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

12.12. Gọi M; N; P là điểm đối xứng của I qua AB, AC, BC.

Gọi IM giao AB tại H; IN giao AC tại K; IP giao BC tại J.

Ta có: $\widehat{MAI}=\widehat{BAC}\left(=2.\widehat{BAI}\right)$

nên: $\frac{S_{AMI}}{S_{ABC}}=\frac{AM.AI}{AB.AC}$ hay



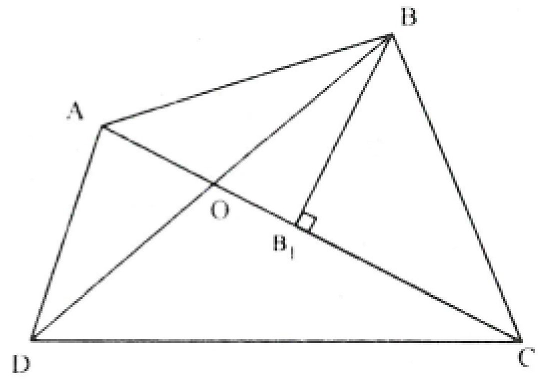
$$\frac{AI^2}{AB.AC} = \frac{S_{AHM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AHIK}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Tương tự, ta có: $\frac{BI^2}{AB.AC} = \frac{S_{BPI}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BHIJ}}{S_{ABC}}$ (2)

$$\frac{CI^2}{AB.AC} = \frac{S_{CNI}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKIJ}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

12.13. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 theo thứ tự là diện tích của các tam giác OAB, OBC, OCD, OAD



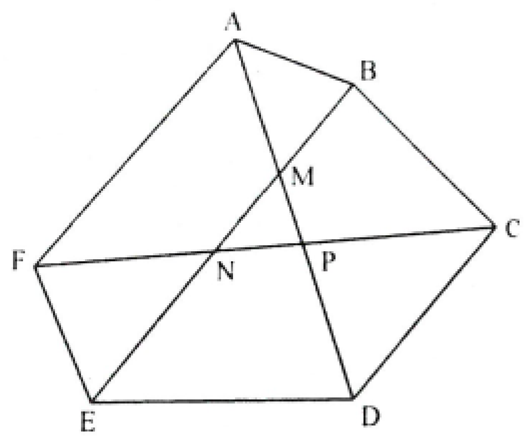
Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OA}{OC}$ (1)

Tương tự $\frac{S_3}{S_4} = \frac{OA}{OC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$

Suy ra $S_1S_3 = S_2S_4$ nên $S_1S_2S_3S_4 = \left(S_1S_3\right)^2$ là một số chính phương.

12.14. Giả sử AD, BE, CF không đồng quy, gọi giao điểm các cặp đường chéo AD và BE là M, BE và CF là N, CF và AD là P. Do M không thuộc CF nên M nằm trong một trong hai tứ giác FABC hoặc CDEF, giả sử M nằm trong tứ giác FABC. Theo giả thiết AD, BE cùng chia đa giác ABCDEF thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_{ABCD} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{MAB} = S_{MDE}$



$$\Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MDE}} = 1 \Rightarrow \frac{MA.MB}{MD.ME} = 1$$

$\Rightarrow MA.MB = MD.ME > PD.NE$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có:

$S_{CDEF} = S_{DEFA} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{PCD} = S_{PFA}$

$\Rightarrow PC.PD = PF.PA > NF.MA$ (2)

$S_{EFAB} = S_{FABC} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{NEF} = S_{NBC}$

$\Rightarrow NE.NF = NB.NC > MB.PC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $MA.MB.PC.PD.NE.NF > MA.MB.PC.PD.NE.NF$ vô lí.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

12.15. Gọi giao điểm của LP và MQ là O, ta có: $S_{OLA} = S_{OLB}$

Đặt $S_1 = S_{OLA} = S_{OLB}$,

Tương tự $S_2 = S_{OMB} = S_{OMC}$,

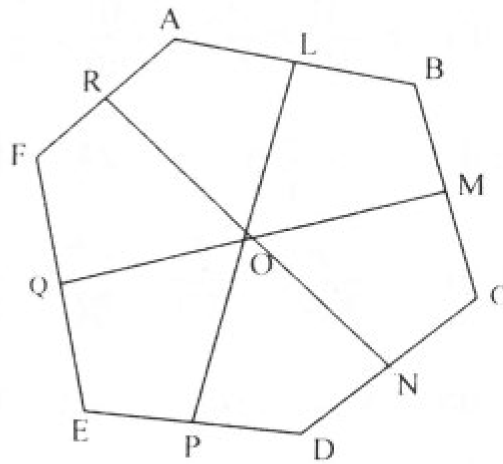
$S_3 = S_{ONC} = S_{OND}, S_4 = S_{OPD} = S_{OPE}$,

$S_5 = S_{OQE} = S_{OQF}, S_6 = S_{ORF} = S_{ORA}$,

$S_{ABCDEF} = S, S_{LBCDP} = S_{MCDEQ} = \frac{1}{2}S$,

$\Rightarrow S_{OLBM} = S_{OPEQ}$

$\Rightarrow S_1 + S_2 = S_4 + S_5 \Rightarrow S_{OABC} = S_{ODEF}$



Cộng hai vế với $S_3 + S_6$ được:

$S_{RABCNO} = S_{NDEFRO} = \frac{1}{2}S$, mà NR chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau nên O phải thuộc NR. Vậy LP, MQ, NR đồng quy.

12.16. Ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{S_{EAM}}{S_{EBM}} = \frac{S_{FAM}}{S_{FBM}} = \frac{S_{EAM} - S_{FAM}}{S_{EBM} - S_{FBM}} = \frac{S_{FAE}}{S_{EBF}} \quad (1)$$

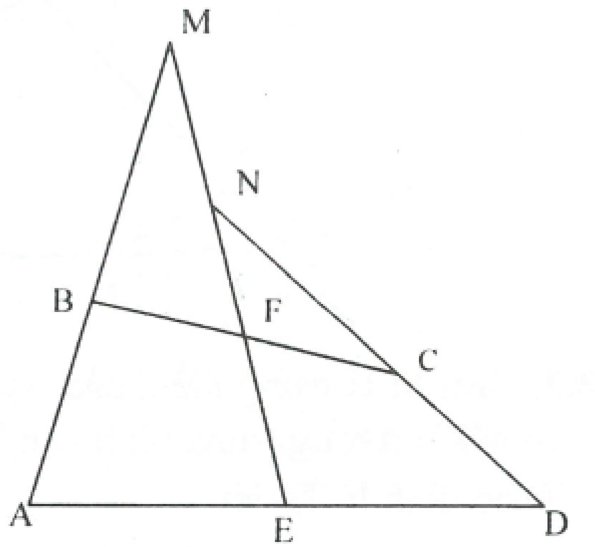
$$\frac{ND}{NC} = \frac{S_{EDN}}{S_{ECN}} = \frac{S_{FDN}}{S_{FCN}} = \frac{S_{EDN} - S_{FDN}}{S_{ECN} - S_{FCN}} = \frac{S_{FDE}}{S_{ECF}} \quad (2)$$

Vì E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC nên ta có:

$S_{FAE} = S_{FDE}, S_{EBF} = S_{ECF} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} \Rightarrow MA.NC = MB.ND$$



Chương III.

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

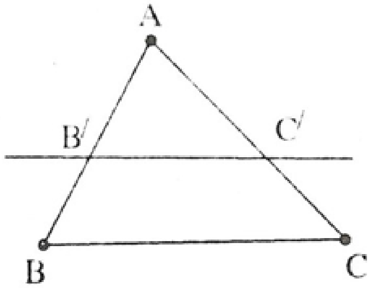
Chuyên đề 13.

ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

- **Tỉ số của hai đoạn thẳng.** Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
- **Đoạn thẳng tỉ lệ.** Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B và C'D nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$$

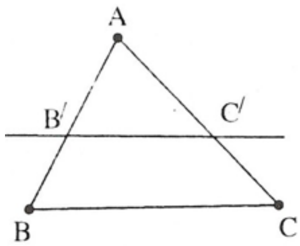


- **Định lý Ta-let trong tam giác.** Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình bên

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ B'C'//BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC};\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C};\frac{B'B}{AB}=\frac{C'C}{AC}$$

1. Định lý Ta-lét đảo. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.



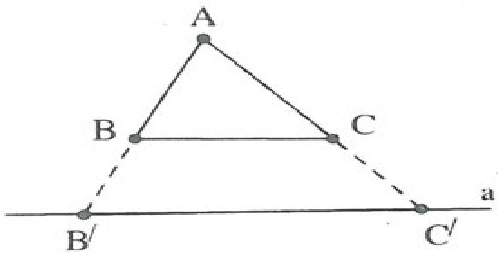
Trong hình bên $\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ \dfrac{AB'}{B'B}=\dfrac{AC'}{C'C}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B'C'//BC$

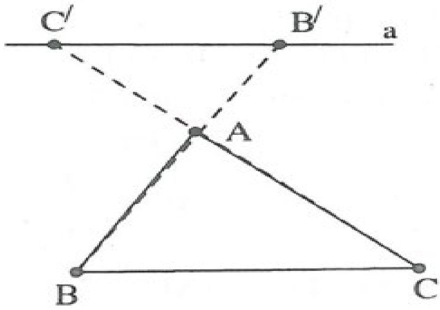
2. Hệ quả của định lý Ta-lét. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Trong hình bên: $\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ B'C'//BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

Chú ý. Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$





B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Từ một điểm E trên cạnh BC ta kẻ đường thẳng Ex song song với AM và cắt tia CA, BA lần lượt tại F và G.

Chứng minh: $EF + EG = 2.AM$.

Giải

*** Tìm cách giải.**

- Để chứng minh $EF + EG = 2.AM$, suy luận thông thường là dựng đoạn thẳng trên tia EF, EG bằng đoạn thẳng AM, rồi biến đổi cộng trừ đoạn thẳng. Chẳng hạn trong ví dụ này, qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt EF tại I. Dễ dàng nhận thấy EI = AM, do vậy chỉ cần chứng minh GI = IF là xong. Tuy nhiên để chứng minh GI = IF bằng cách ghép vào hai tam giác bằng nhau là khó khăn, chính vì vậy chúng ta chứng minh tỉ số bằng nhau có cùng mẫu số. Quan sát kỹ nhận thấy GI và IF có thể đặt trên mẫu số là IE! Từ đó vận dụng định lý và hệ quả Ta-let để chứng minh $\frac{FI}{IE} = \frac{IG}{IE}$ là xong.

Ngoài cách trên, chúng ta có thể biến đổi kết luận thành tổng tỉ số và chứng minh $\frac{FF}{AM} + \frac{EG}{AM} = 2$ là xong. Do đó vận dụng định lý Ta-lét và biến đổi linh hoạt tỷ lệ thức là yêu cầu tất yếu trong dạng toán này.

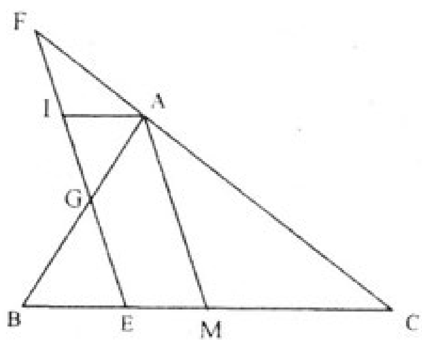
**** Trình bày lời giải***

Cách 1. Giả sử E thuộc đoạn BM.

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại I. Ta có AMEI là hình bình hành, suy ra EI = AM.

Áp dụng định lý Ta-lét, xét ΔEFC có AI // CE,

AM//EF $\Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{FA}{AC} = \frac{EM}{MC} (1)$



Xét ΔGEB có AI // BE, AM // GE

$\Rightarrow \frac{IG}{IE} = \frac{AG}{AB} = \frac{EM}{BM} (2)$

Từ (1) và (2), kết hợp với BM = MC

Suy ra IG = IF.

Ta có: $EF + EG = EI + IF + EI - IG = 2.EI = 2.AM$

Cách 2. Giả sử E thuộc đoạn BM.

Theo hệ quả định lý Ta-lét:

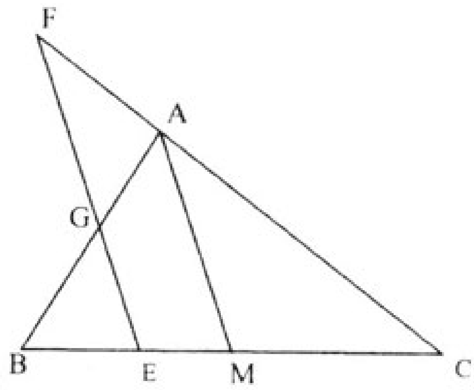
Xét ΔEFC có $EF//AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{EC}{CM} \quad (3)$

Xét ΔABM có $EG//AM \Rightarrow \frac{EG}{AM} = \frac{BE}{BM} \quad (4)$

Cộng vế theo vế (3) và (4) ta có:

$\frac{EF}{AM} + \frac{EG}{AM} = \frac{EC}{CM} + \frac{BE}{BM}$ hay $\frac{EF + EG}{AM} = \frac{BC}{BM} = 2.$

Suy ra $EF + EG = 2.AM$.



Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD (AB//CD). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = CD. Gọi giao điểm của AC với DB và DE theo thứ tự là I và K. Chứng minh hệ thức $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$.

Giải

**** Tìm cách giải.*** Nhận thấy rằng: chúng ta không thể chứng minh trực tiếp $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$, do vậy nên sử dụng tỉ số trung gian. Khai thác BE = CD và AB//CD rất tự nhiên chúng ta vận dụng hệ quả định lý Ta-lét.

**** Trình bày lời giải***

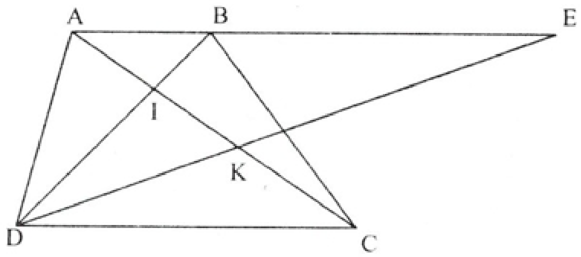
Đặt AB = a, BE = CD = b. Theo hệ quả định lý Ta-lét

Ta có: $AE//CD \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AE}{CD} = \frac{a+b}{b} \quad (1)$

$AB//CD \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{AI + CI}{CI} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{AC}{CI} = \frac{a+b}{b} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

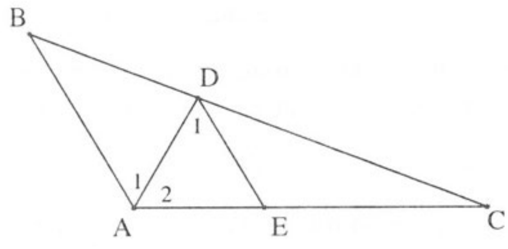
Giải

Kẻ DE // AB, ta có:

$\widehat{D_1} = \widehat{A_1} = 60°; \widehat{A_2} = 60°$ nên tam giác ADE đều. Suy ra AD = AE = DE.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{AC}$.

Mặt khác $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC}$ nên $\frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC} = \frac{CE}{AC} + \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$



Suy ra $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$.

Nhận xét. Những bài toán chứng minh đẳng thức có nghịch đảo độ dài đoạn thẳng, bạn nên biến đổi và chứng minh hệ thức tương đương có tỉ số của hai đoạn thẳng.

Ví dụ 4. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3;$ b) $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1.$

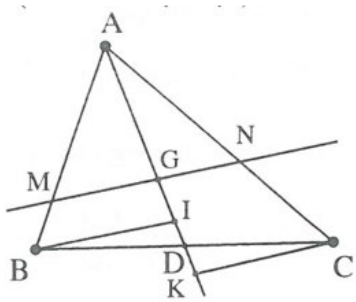
Giải

*** Tìm cách giải.*** Để tạo ra tỉ số $\frac{AB}{AM};\frac{AC}{AN}$ chúng ta cần vận dụng định lý Ta-let, mà hình vẽ chưa có yếu tố song song do vậy chúng ta cần kẻ thêm yếu tố song song. Kẻ đường thẳng song song với MN từ B và C vừa khai thác được yếu tố trọng tâm, vừa tạo ra được tỉ số yêu cầu.

*** Trình bày lời giải**

Trường hợp 1. Nếu MN // BC, thì lời giải giản đơn (dành cho bạn đọc).

Trường hợp 2. Xét MN không song song với BC.



a) Gọi giao điểm của AG và BC là D $\Rightarrow BD=CD$.

Kẻ BI // CK // MN $\left(I,K\in AD\right)$

Xét ΔBDI và ΔCDK có $BD=CD;\widehat{IBD}=\widehat{KCD};\widehat{IDB}=\widehat{KDC}$ nên $\Delta BDI=\Delta CDK\left(g.cg\right)$

$\Rightarrow DI=DK$.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có $\frac{AB}{AM}=\frac{AI}{AG}$ (vì MG // BI);

$\frac{AC}{AN}=\frac{AK}{AG}$ (vì GN // CK).

Suy ra $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{2.AD}{AG}=3$ (1) (vì $AD=\frac{3}{2}.AG$).

b) Xét $\frac{BM}{AM}=\frac{GI}{AG};\frac{CN}{AN}=\frac{KG}{AG}$

hay $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=\frac{GI+GK}{AG}=\frac{2.GD}{AG}=1,$ suy ra $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1.$

Nhận xét. Từ kết quả (1), chúng ta thấy rằng bởi G là trọng tâm nên $\frac{2AD}{AG}=3$. Vậy nếu G không phải là trọng tâm thì ta có bài toán sau:

- Một đường bất kỳ cắt cạnh AB, AC và đường trung tuyến AD của tam giác ABC lần lượt tại M, N và G. Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=2.\frac{AD}{AG}$.

- Nếu thay yếu tố trung tuyến bằng hình bình hành, ta có bài toán sau: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng bất kỳ cắt AB, AD và AC lần lượt tại M, N và G. Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AC}{AG}$.

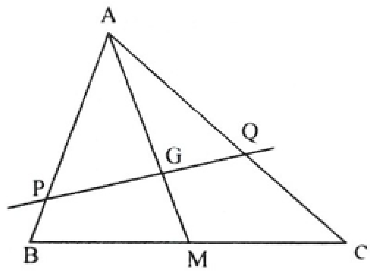
Ví dụ 5. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng: $\frac{PB}{PA}.\frac{QC}{QA}\le\frac{1}{4}$

(*Olympic Toán, Tây Ban Nha, năm 1995*)

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Vẽ hình xong và quan sát, chúng ta nhận thấy tỉ số $\frac{PB}{PA};\frac{QC}{QA}$ đã có ở câu b, ví dụ 4 và có kết quả là $\frac{PB}{PA}+\frac{QC}{QA}=1$. Do vậy khai thác yếu tố này, kết hợp với bất đẳng thức đại số cho lời giải đẹp.

* ***Trình bày lời giải***



Dựa vào ví dụ 4, ta có: $\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=1$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2\ge 4xy;$

Ta có: $1=\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right)^2\ge 4.\frac{BP}{PA}.\frac{QC}{QA}$ hay $\frac{BP}{PA}.\frac{QC}{QA}\le\frac{1}{4}$..

Ví dụ 6. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Gọi M, N là trung điểm BO; AO. Lấy F trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

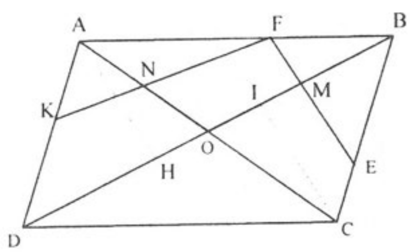
a) $\frac{BA}{BF}+\frac{BC}{BE}=4;$ b) $BE+AK\ge BC.$

Giải

* ***Tìm cách giải.***

Với phân tích và suy luận như câu a, ví dụ 4 thì câu a, ví dụ này không quá khó.

Tương tự câu a, chúng ta có kết quả: $\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}=4$ và suy ra $\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}+\frac{AB}{BF}+\frac{BC}{BE}=8$ để liên kết được BE + AK với nhau, mà với suy luận trên thì BE, AK cùng nằm ở mẫu số, do đó chúng ta liên tưởng tới



bất đẳng thức đại số $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ sẽ cho chúng ta yêu cầu. Với suy luận đó, chúng ta có lời giải sau:

*** Trình bày lời giải**

a) Kẻ CI //AH // EF (với $I,H\in BD$)

Xét ΔAOH và ΔCOI có $\widehat{AOH}=\widehat{COI}$ (đối đỉnh); OA = OB; $\widehat{HAO}=\widehat{ICO}$ (so le trong)

$\Rightarrow\Delta AOH=\Delta COI$ (c.g.c) $\Rightarrow IO=OH$. Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{BA}{BF}+\frac{BC}{BE}=\frac{BH}{BM}+\frac{BI}{BM}=\frac{BH+BI}{BM}=\frac{BO+OH+BO-OI}{BM}=\frac{2.BO}{BM}=4.$$

b) Tương tự ta có:

$$\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}=4\Rightarrow\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}+\frac{AB}{BF}+\frac{BC}{BE}=8$$

$$\Rightarrow BC.\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)+AB\left(\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\right)=8 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x;y>0$)

Ta có: $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\ge\frac{4}{AF+BF}=\frac{4}{AB}\Rightarrow AB\left(\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\right)\ge 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC.\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)\le 4$

Mà $\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\ge\frac{4}{AK+BE}\Rightarrow BC\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)\ge\frac{4BC}{AK+BE}$

$$\Rightarrow\frac{4BC}{AK+BE}\le 4\Rightarrow AK+BE\ge BC.$$

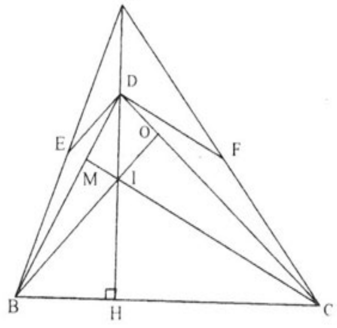
Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Trên AH, AB, AC lần lượt lấy điểm D, E, F sao cho $\widehat{EDC}=\widehat{FDB}=90°$. Chứng minh rằng: $EF//BC$.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2011-2012)

Giải

*** Tìm cách giải.** Để chứng minh $EF//BC$, suy luận một cách tự nhiên chúng ta cần vận dụng định lý

Ta-let đảo. Do vậy cần chứng minh tỉ lệ thức $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$. Nhận thấy để định hướng tỉ lệ thức ấy cũng như khai thác được $\widehat{EDC}=\widehat{FDB}=90°$ chúng ta cần kẻ $BO\perp CD;CM\perp DB$, để có các đường thẳng song song rồi vận dụng định lý Ta-let. Từ đó chúng ta có lời giải sau:



*** Trình bày lời giải.**

Kẻ $BO \perp CD; CM \perp DB$, BO và CM cắt nhau tại I $\Rightarrow$ D là trực tâm của ΔBIC

$\Rightarrow DI \perp BC \Rightarrow$ I, D, A thẳng hàng.

$DE//BI \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AB}{AE}$.

$IC//FD \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AC}{AF}$ suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow EF//BC$

(Định lý Ta-let đảo).

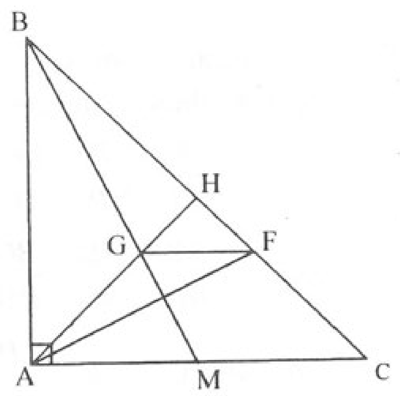
Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có BM là đường trung tuyến. Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $FB=2.FC$. Chứng minh $AF \perp BM$.

Giải

**** Tìm cách giải.*** Nhận thấy từ $FB=2.FC$ suy ra: $\frac{BF}{CF} = 2$ mang tính chất trọng tâm tam giác. Do vậy nếu gọi G là trọng tâm tam giác, AH là đường trung tuyến thì dễ dàng nhận được GF // AC và $AH \perp BC$ nên G là trực tâm tam giác ABF. Do đó ta có lời giải sau:

**** Trình bày lời giải.***

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và AG kéo dài cắt BC tại H $\Rightarrow$ AH là đường trung tuyến của tam giác ABC.



Mặt khác, ΔABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$

Ta có: $\frac{BG}{GM} = 2$ (vì G là trọng tâm);

Và $\frac{BF}{FC} = 2$ (giả thiết)

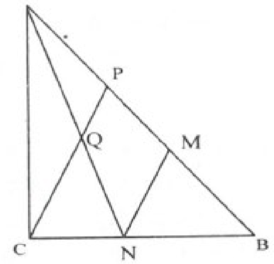
$\Rightarrow \frac{BG}{GM} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow FG//AC$ (theo định lý Ta-let đảo)

$\Rightarrow FG \perp AB$ nên G là trực tâm $\Delta ABF \Rightarrow BG \perp AF$ hay $BM \perp AF$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Biết tồn tại điểm M, N lần lượt trên cạnh AB, BC sao cho $2.\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$ và $\widehat{BNM} = \widehat{ANC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Giải

Cách 1. Gọi P là trung điểm của AM, Q là giao điểm của AN với CP



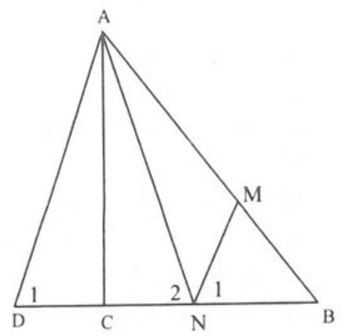
Ta có: $\frac{BM}{PM} = 2.\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow MN//CP$ (định lý Ta-let đảo).

$\Rightarrow \widehat{QCN} = \widehat{MNB} = \widehat{ANC} \Rightarrow \Delta QCN$ cân tại Q.

Mặt khác $PA = PM, PQ//MN \Rightarrow QA = QN$ nên $QA = QC = QN$

ΔCAN vuông tại C $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Cách 2. Dựng D là điểm đối xứng của N qua C $\Rightarrow ND = CN + CD = 2.CN$



Ta có: $2\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BN}{CN} \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BN}{2.CN} = \dfrac{BN}{DN}$

$\Rightarrow MN//AD$ (định lý Ta-let đảo).

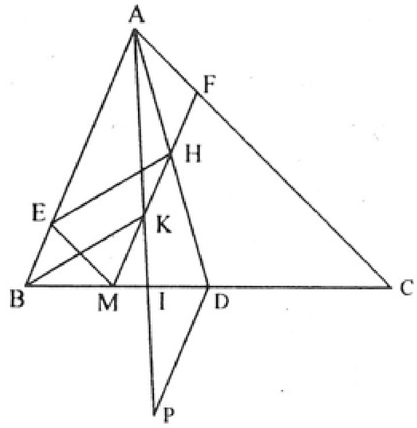
$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{N_1} = \widehat{N_2} \Rightarrow \Delta AND$ cân. Do đó đường trung tuyến AC cũng là đường cao.

Vậy $AC \perp CB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là điểm tùy ý thuộc khoảng BD. Lấy E thuộc AB và F thuộc AC sao cho ME // AC; MF // AB. Gọi H là giao điểm MF và AD. Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K. Đường thẳng AK cắt BC tại I. Tính tỉ số $\dfrac{IB}{ID}$?

Giải

Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt tia AI tại P. Áp dụng định lý Ta-let, cho các đoạn thẳng song song ta có:



$DP//AB \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{AB}{DP} = \dfrac{AB}{HK}.\dfrac{HK}{DP}$ (1).

$ME//AC \Rightarrow \dfrac{AB}{HK} = \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BC}{BM}$ (2).

$HK//DP$ và $MH//AB \Rightarrow \dfrac{HK}{DP} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{BM}{BD}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

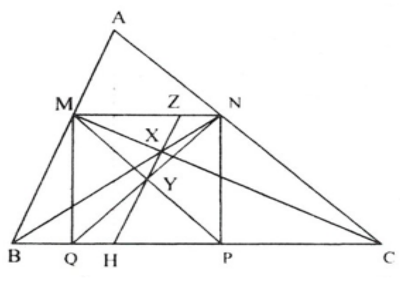
$\dfrac{IB}{ID} = \dfrac{BC}{BM}.\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BC}{BD} = 2$. Vậy $\dfrac{IB}{ID} = 2.$

Ví dụ 11. Cho ΔABC nhọn. Hình chữ nhật MNPQ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi giao điểm của BN với CM là X của QN với PM là Y. Gọi H là giao điểm của XY với BC. Chứng minh rằng đường thẳng AH vuông góc với BC.

Giải

*** Tìm cách giải.** Bài toán có nhiều yếu tố song song, do vậy để chứng minh đường thẳng AH vuông góc với BC, chúng ta nên chứng minh AH song song với NP hoặc MQ. Với định hướng ấy chúng ta tìm cách vận dụng định lý Ta-let đảo. Chẳng hạn nếu chứng minh AH song song với NP, chúng ta cần chứng minh $\dfrac{HP}{HC} = \dfrac{AN}{AC}$. Bằng cách vận dụng định lý Ta-lét cùng hệ quả và biến đổi khéo léo các dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta sẽ có lời giải đẹp.

*** *Trình bày lời giải.***



Gọi Z là giao điểm của XY với MN vì tứ giác MNPQ là hình chữ nhật, HP = ZM và MN // BC nên: $\frac{HP}{HC}=\frac{ZM}{HC}=\frac{XM}{XC}=\frac{MN}{CB}=\frac{AN}{AC}$

Do đó AH // NP (định lý Ta-let đảo) mà $NP\perp BC$ nên $AH\perp BC$.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành ABCD có I; E là trung điểm của BC; AD. Qua điểm M tùy ý trên AB kẻ đường thẳng MI cắt đường thẳng AC tại K. Đường thẳng KE cắt CD tại N. Chứng minh rằng: AD = MN.

Giải

Gọi P là giao điểm của đường thẳng MI và CD

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng KN và AB.

Nhận thấy: $\Delta IBM=\Delta ICP$ (g.c.g) nên BM = CP.

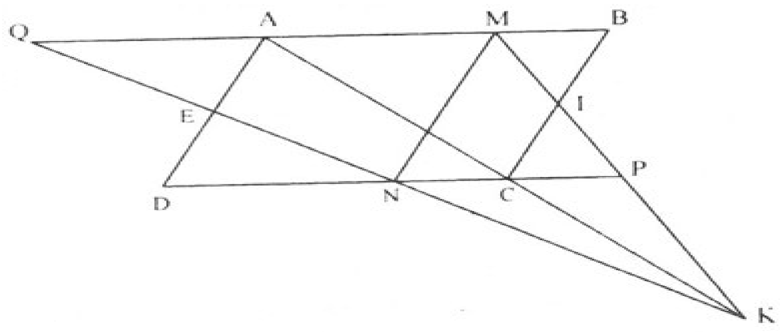
Ta có theo định lý Ta-lét AM//CP nên $\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{CP}=\frac{KA}{KC}$ (1)

Nhận thấy $\Delta EAQ=\Delta EDN$ (g.c.g) nên DN = AQ.

Theo định lý Ta-lét, ta có: AQ // CN nên $\frac{DN}{NC}=\frac{AQ}{NC}=\frac{KA}{KC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{DN}{DN+NC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DC}$

Suy ra AM = DN.



Do đó ADNM là hình bình hành suy ra AD = MN.

C. Bài tập vận dụng

13.1. Cho hình bình hành ABCD có AC = 24 cm . Điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AE=\frac{1}{2}EB$. Điểm F là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của AC với DE, DF. Tính các độ dài AI, IK, KC.

13.2. Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho BD =BA; CE = CA . Đường thẳng qua D song song với AB cắt AC tại M. Đường thẳng qua E song song với AC cắt AB tại N. Chứng minh AM = AN.

(*Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 - 2014*)

13.3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BI tại D. Chứng minh DA = DC.

13.4. Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo AC lấy một điểm I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N. Chứng minh rằng:

a) $\frac{AM}{AB}=\frac{DM}{DN}=\frac{CB}{CN}$;

b) $ID^2 = IM.IN$.

13.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài hai tam giác ABD và ACE vuông cân tại B và E. Gọi H là giao điểm của AB và CD; K là giao điểm của AC và BE. Chứng minh rằng:

a) AH = AK;

b) $AH^2 = BH.CK$.

13.6. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Gọi F là giao điểm của AE và CD, G là giao điểm của DE và BF.

a) Gọi I và K theo thứ tự là giao điểm của AB và CG và DG. Chứng minh rằng IE song song với BD.

b) Chứng minh rằng AE vuông góc với CG.

13.7. Cho tam giác ABC và D là một điểm tùy ý trên AC. Gọi G là trọng tâm ΔABD. Gọi E là giao điểm của CG và BD. Tính $\frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}$.

13.8. Cho hình bình hành ABCD, điểm E thuộc cạnh AB, điểm F thuộc cạnh BC. Gọi I là giao điểm của CE và AD, gọi K là giao điểm của AF và DC. Chứng minh rằng EF song song với IK.

13.9. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC kéo dài về phái C lấy điểm M. Một đường thẳng Δ đi qua M cắt các cạnh CA, AB lần lượt tại N và P. Chứng minh rằng $\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}$ không đổi khi M và Δ thay đổi.

(*Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh An Giang, năm học 2009 - 2010*)

13.10. Giả sử O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C và O đến AD. Chứng minh rằng: $AD.BE.CF \le AC.BD.OH$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

13.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các tứ giác MNPQ và AXYZ là các hình vuông sao cho $M \in AB; Q, P \in BC; N \in AC;$ X, Y, Z tương ứng thuộc AB, BC, AC. Chứng minh $MN < AX$.

13.12. Gọi M là điểm bất kì trên đường trung tuyến trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC. Gọi P là giao điểm của BM và AC, gọi Q là giao điểm của CM và AB. Chứng minh PQ // BC.

13.13. Cho tam giác ABC có $AB<BC$, đường phân giác BE và đường trung tuyến BD (E;D thuộc AC). Đường thẳng vuông góc với BE qua C cắt BE, BD lần lượt tại F, G. Chứng minh rằng đường thẳng DF chia đôi đoạn thẳng GE.

13.14. Cho tam giác ABC. Lấy điểm O nằm trong tam giác, các tia BO và CO cắt AC và AB lần lượt tại M và N. Vẽ hình bình hành BOCF. Qua N kẻ đường thẳng song song với BM cắt AF tại E. Chứng minh rằng:

a) MONE là hình bình hành;

b) $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AM.AN}{AB.AC}=\dfrac{OM.ON}{OB.OC}$.

13.15. Cho hình thang ABCD có đáy lớn CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD tại K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC tại P. Chứng minh rằng: MP//DC.

13.16. Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM. Đường thẳng d cắt AC, BC lần lượt tại P, R. Chứng minh rằng nếu QA.QB = QP.QR thì tam giác ABC vuông tại C.

13.17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một điểm P thuộc cạnh BC. Các đường thẳng qua P theo thứ tự song song với CG và BG cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi giao điểm của BG và CG với EF lần lượt là I, J. Chứng minh rằng:

a) EI = IJ = JF;

b) PG đi qua trung điểm của EF.

13.18. Cho hình thang ABCD ($AD<CD,AB//CD$) có đường chéo AC bằng cạnh bên AD. Một đường thẳng d đi qua trung điểm E của CD cắt BD và BC tại M; N. Gọi P; Q là giao điểm của AM; AN với CD. Chứng minh $\widehat{MAD}=\widehat{QAC}$.

13.19. Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc BC. Chứng minh rằng:

$$MA.MB<MC.AB+MB.AC.$$

13.20. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A}=45^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Đường vuông góc với AB tại B cắt AC ở I. Đường vuông góc với AC tại C cắt AB ở K. Gọi F là giao điểm của BI và CK, G là giao điểm của FH và EI. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác AIK.

13.21. Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P. Chứng minh rằng:

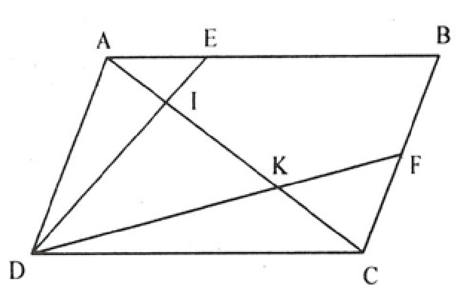
$$\frac{AB^2}{AM.BM}+\frac{AC^2}{AN.CN}-\frac{BC^2}{BP.CP}=9$$

13.22. Cho tam giác ABC với điểm M thuộc miền trong tam giác. Gọi I, J, K thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại E,F. Chứng minh: ME = MF.

Hướng dẫn giải

13.1. Ta có: $\dfrac{AI}{IC}=\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$.

Do đó: $AI=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{1}{4}.24=6\left(cm\right)$.



Ta lại có: $\frac{CK}{KA}=\frac{CF}{AD}=\frac{CF}{BC}=\frac{1}{2}$.

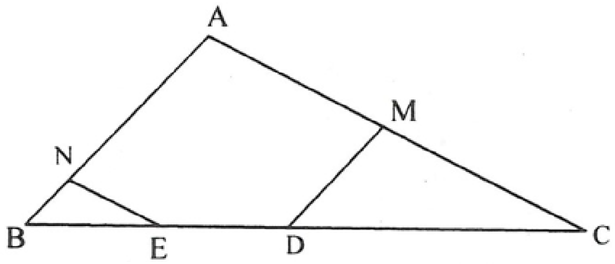
Do đó: $CK=\frac{1}{3}AC=\frac{1}{3}.24=8\left(cm\right)$.

Suy ra $IK=24-6-8=10\left(cm\right)$.

13.2. Từ $DM//AB\Rightarrow\frac{AM}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow AM=\frac{AC.BD}{BC}=\frac{AC.AB}{BC}$

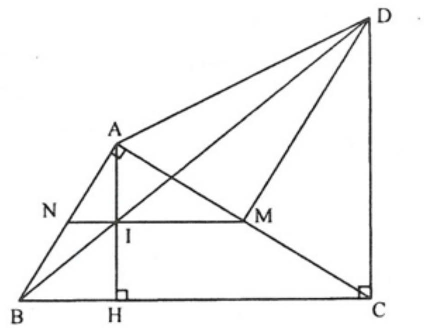
$EN//AC\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow AN=\frac{AB.CE}{CB}=\frac{AB.AC}{BC}$

Do đó AM = AN.



13.3. Gọi M là trung điểm của AC, N là giao điểm của MI và AB. Tam giác AHC có MI là đường trung bình nên MI // HC, tức là MN // BC.

Theo định lý Ta-lét:



Do AH // CD nên $\frac{IB}{ID}=\frac{HB}{HC}\quad(1)$

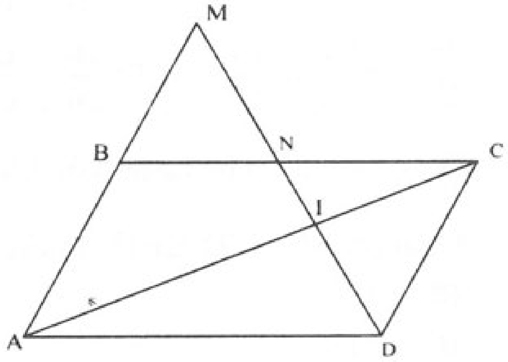
Do MN // BC nên $\frac{IN}{HB}=\frac{AI}{AH}=\frac{IM}{HC}$,

Tức là $\frac{IN}{IM}=\frac{HB}{HC}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{IB}{ID}=\frac{IN}{IM}$, do đó BN // DM (định lý Ta-let đảo).

Ta lại có: $BN\perp AC$ nên $DM\perp AC$. Vậy DM là đường trung trực của AC, suy ra DA = DC.

13.4. a) Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác BMN với BM // CD, ta có:



$\frac{MN}{ND}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow\frac{MN+ND}{ND}=\frac{BN+NC}{NC}$ (tính chất tỉ lệ thức)

$\Rightarrow\frac{MD}{ND}=\frac{BC}{NC}(1)$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác MAD với BN // AD

ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{DM}{DN}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DM}{DN}=\dfrac{CB}{CN}$.

b) Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác ADI với AD // NC, ta có:

$\dfrac{ID}{IN}=\dfrac{IA}{IC}\qquad(3)$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác DIC với DC // AM, ta có:

$\dfrac{IM}{ID}=\dfrac{IA}{IC}\qquad(4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{ID}{IN}=\dfrac{IM}{ID}$ hay $ID^2=IM.IN$.

13.5. a) $BD//AC(\perp AB)$

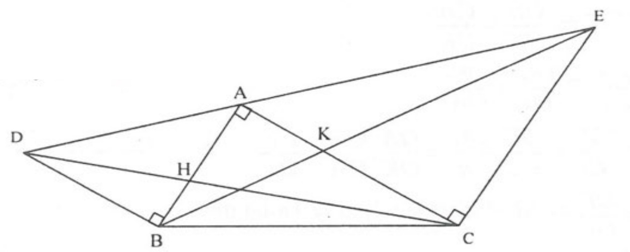
$$\Rightarrow\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{BD}\Rightarrow\frac{AH}{AH+BH}=\frac{AC}{BD+AC}\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BD+AC}$$

Mà BD = AB nên $AH=\dfrac{AB.AC}{AB+AC}\qquad(1)$

$AB//CE(\perp AC)$

$$\Rightarrow\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{CE}\Rightarrow\frac{AK}{AK+KC}=\frac{AB}{BD+EC}\Rightarrow\frac{AK}{AC}=\frac{AB}{BD+EC}$$

Mà CE = AC nên $AK=\dfrac{AB.AC}{AB+AC}\qquad(2)$



Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK.

b) $BD//AC\Rightarrow\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{AC}{BD}\quad(3);CE//AB\Rightarrow\dfrac{CK}{AK}=\dfrac{CE}{AB}\quad(4)$

Mà AC = CE, BD = AB.

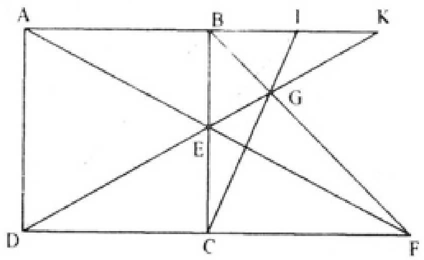
Kết hợp với (3) và (4) ta có $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{CK}{AK}$, suy ra $AH^2=BH.CK$.

13.6. a) Ta sẽ chứng minh $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{KE}{ED}$. Do BK // DF nên theo định lý Ta-lét, ta có: $\dfrac{IK}{CD}=\dfrac{IG}{GC}=\dfrac{IB}{CF}$

suy ra $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{CD}{CF}\quad(1)$

Cũng theo định lý Ta-lét với AK // DF, ta có:

$$\frac{KE}{ED}=\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CF} \quad (2)$$



Ta lại có: AB = CD nên từ (1) và (2) suy ra: $\frac{IK}{IB}=\frac{KE}{ED}$.

Theo định lý đảo Ta-lét ta có: IE // BD.

b) Ta có: $BD\perp AC$ và IE // BD nên $IE\perp AC$.

Tam giác ACI có $CB\perp AI, IE\perp AC$ nên E là trực tâm của tam giác ACI. Suy ra $AE\perp CG$.

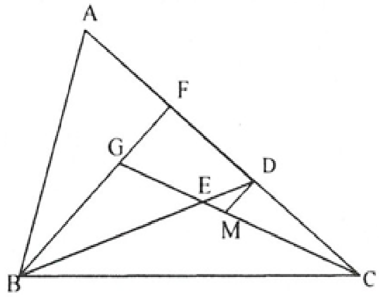
Lưu ý: Câu a) là câu gợi ý để giải câu b).

13.7. Gọi F là giao điểm BG với AC thì AF = FD.

Lấy M thuộc CG sao cho DM // BG.

Ta có: $CA+CD=CF+FA+CF-FD$ hay

$CA+CD=2.CF\Rightarrow CA=2.CF\Rightarrow CA=2.CF-CD$



Vì G là trọng tâm ΔABD nên $GB=2.GF$

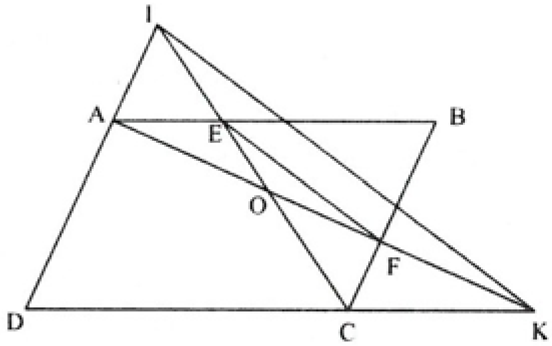
Vì $MD//BG\Rightarrow \frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}=\frac{GB}{MD}-\frac{2.CF-CD}{CD}=\frac{2.GF}{MD}-\frac{2.CF}{CD}+1 \ (1)$

Mà GF // MD nên $\frac{GF}{MD}=\frac{CF}{CD}$ do vậy, từ (1) suy ra: $\frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}=1.$

13.8. Gọi O là giao điểm của AF và CE.

Theo định lý Ta-let:

$AE//CK\Rightarrow \frac{OE}{OC}=\frac{OA}{OK}.$



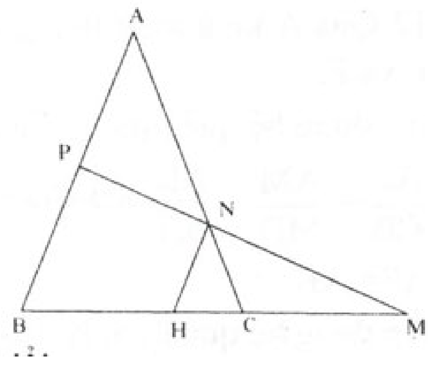
$DI//CF\Rightarrow \frac{OC}{OI}=\frac{OF}{OA}.$

Ta có: $\frac{OE}{OI}=\frac{OE}{OC}.\frac{OC}{OI}=\frac{OA}{OK}.\frac{OF}{OA}=\frac{OF}{OK}.$

$\frac{OE}{OI}=\frac{OF}{OK}\Rightarrow EF//IK$ (theo định lý Ta-let đảo).

13.9. Kẻ NH // AB (Với $H\in BC$) suy ra:

$\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{NH}-\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{CN}-\frac{CM}{CN}=\frac{CH}{CN}$

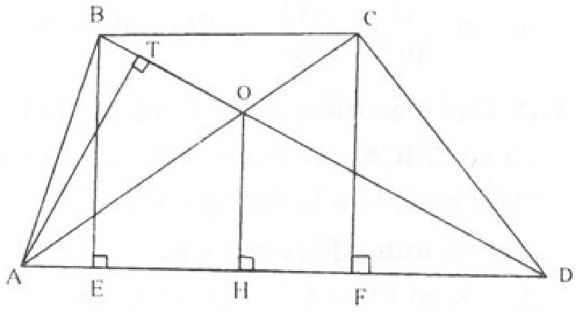


Mặt khác NH //AB

$\Rightarrow \frac{CH}{BC}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow \frac{CH}{CN}=\frac{BC}{AC}.$

Vậy $\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}=\frac{BC}{AC}$ không đổi khi M và Δ thay đổi.

13.10. Kẻ $AT \perp BD\left(T \in BD\right)$, thì $AT \le AO$



Nên $AD.BE = BD.AT\left(= 2.S_{ABD}\right)$

Suy ra $AD.BE \le BD.AO$

$\Rightarrow AD.BE \le AC.BD\dfrac{AO}{AC} \quad (1)$

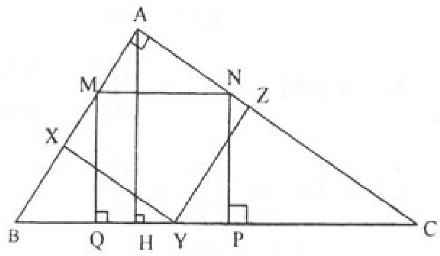
Mặt khác, OH // CF nên $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{OH}{CF}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $AD.BE \le AC.BD.\dfrac{OH}{CF} \Leftrightarrow AD.BE.CF \le AC.BD.OH$.

Đẳng thức xảy ra khi T trùng với O hay AC vuông góc với BD.

13.11. Đặt x; y là cạnh hình vuông MNPQ; AXYZ; và a, b, c là độ dài BC, AC, AB. Kẻ $AH \perp BC$; đặt AH=h. Từ đó suy ra: $a.h = b.c\left(= 2.S_{ABC}\right)$ và $a^2 = b^2 + c^2$.

Ta có $\left(a+h\right)^2 = a^2 + h^2 + 2ah > b^2 + c^2 + 2bc = \left(b+c\right)^2$



$\Rightarrow a + h > b + c$

$\Rightarrow \dfrac{a+h}{ah} > \dfrac{b+c}{bc} \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h} > \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \quad (1)$

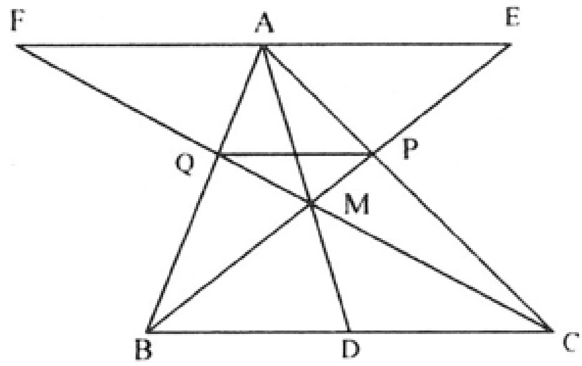
Theo định lý Ta-let, ta có:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{h} = \dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MQ}{AH} = \dfrac{AM}{AB} + \dfrac{MB}{AB} = 1$

$\dfrac{y}{b} + \dfrac{y}{c} = \dfrac{XY}{AC} + \dfrac{ZY}{AB} = \dfrac{BY}{BC} + \dfrac{CY}{BC} = 1 \Rightarrow x\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h}\right) = y\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x < y$ hay $MN < AX$.

13.12. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, lần lượt cắt BP và CQ kéo dài tại E và F.



Áp dụng hệ quả định lý Ta-let, ta có: $\dfrac{AF}{CD} = \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AE}{BD}$

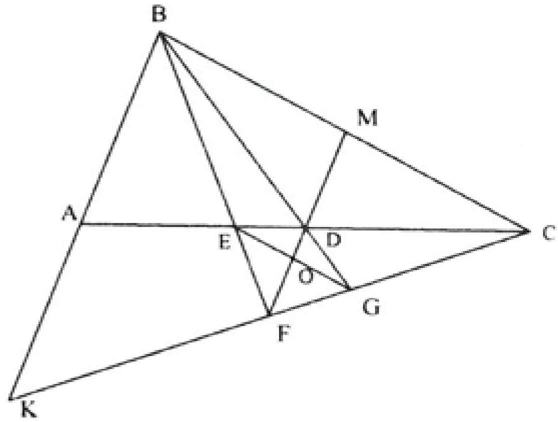
Mà CD = BD nên AF = AE.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-let, ta có: $\dfrac{AF}{BC} = \dfrac{AQ}{QB}; \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AP}{PC}$

Suy ra: $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB} \Rightarrow PQ//BC$ (định lý đảo Ta-let).

13.13. Gọi giao điểm của CG và AB là K và giao điểm của DF và BC là M.

Ta có ΔBCK cân (vì có BF vừa là đường phân giác, vừa là đường cao)



$\Rightarrow$ F là trung điểm của CK.

ΔACK có FK = FC, AD = CD suy ra DF là đường trung bình $\Rightarrow FD//AK$.

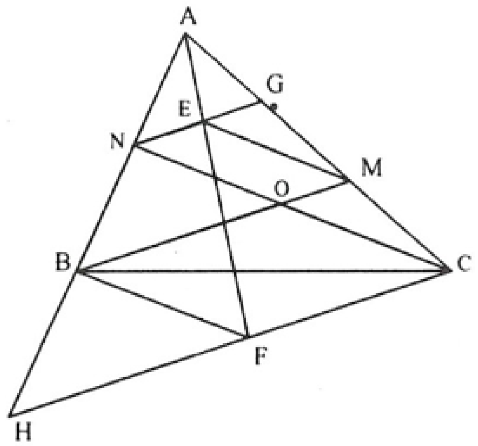
ΔBCK có FK = FC, FM // BK suy ra M là trung điểm của BC.

Xét tam giác DBC có trung tuyến DM, theo bài toán 13.12. thì GE//BC, suy ra $\dfrac{OE}{BM}=\dfrac{OG}{MC}$. Mà BM = MC, do đó OE = OF hay DF chia đôi đoạn thẳng GE.

13.14. a) Gọi G là giao điểm của NE và AC, H là giao điểm CF và AB.

Theo định lý Ta-let, ta có:

$$NE//CH \Rightarrow \frac{GE}{EN}=\frac{CF}{FH}$$



$$NE//BM//CH \Rightarrow \frac{GM}{MC}=\frac{NB}{BH}\left(=\frac{NO}{OC}\right).$$

$$CN//BF \Rightarrow \frac{CF}{FH}=\frac{BN}{BH}.$$

Suy ra $\dfrac{GE}{EN}=\dfrac{GM}{MC}\Rightarrow ME//NC$

$\Rightarrow MONE$ là hình bình hành.

b) Ta có BM // HC và NE // HF, theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{AM.AN}{AB.AC}=\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AH}.\frac{AN}{AB}=\frac{AN}{AH}=\frac{AE}{AF} \quad (1)$$

Ta có: OM // NG; OB // CH. Theo định lý Ta-lét, ta có: $\dfrac{OM.ON}{OB.OC}=\dfrac{OM}{OC}.\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{NG}{NC}.\dfrac{NC}{HC}=\dfrac{NG}{HC}//HC$

Mà $NG//HC \Rightarrow \dfrac{NG}{HC}=\dfrac{AN}{AH}$

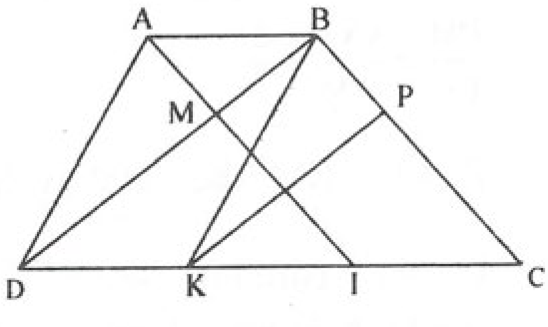
$$NE//HF \Rightarrow \frac{AN}{AH}=\frac{AE}{AF}\Rightarrow \frac{OM.ON}{OB.OC}=\frac{AE}{AF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

13.15. Tứ giác ABKD có AB // DK; BK //AD nên ABKD là hình bình hành, suy ra: DK = AB (1)

Tứ giác ABCI có AB // CI, AI // BC nên ABCI là hình bình hành, suy ra: CI=AB (2)

Từ (1) và (2) ta có: $DK = CI \Rightarrow DI = KC$



Áp dụng định lý Ta-lét vào ΔABM với AB // DI, ta có: $\frac{BM}{MD}=\frac{AB}{DI}$.

Áp dụng định lý Ta-lét vào ΔCBD với KP // BD, ta có: $\frac{BP}{PC}=\frac{DK}{KC}$ hay $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{KC}$.

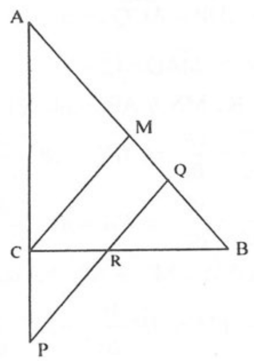
Mà $DI=KC\Rightarrow \frac{AB}{DI}=\frac{AB}{KC}\Rightarrow \frac{BM}{MD}=\frac{BP}{PC}$, do đó MP //CD (định lý Ta-lét đảo).

13.16. Trong tam giác BQR có CM//QR

Nên $\frac{CM}{QR}=\frac{MB}{QB}$ (hệ quả định lý Ta-let) $\Rightarrow CM=\frac{QR}{QB}.MB=\frac{QA}{QP}.MB$

(do $QA.QB=QP.QR\Rightarrow \frac{QR}{QB}=\frac{QA}{QP}$).

Mặt khác, trong tam giác ACM có PQ // CM



Nên: $\frac{QA}{QP}=\frac{AM}{CM}$

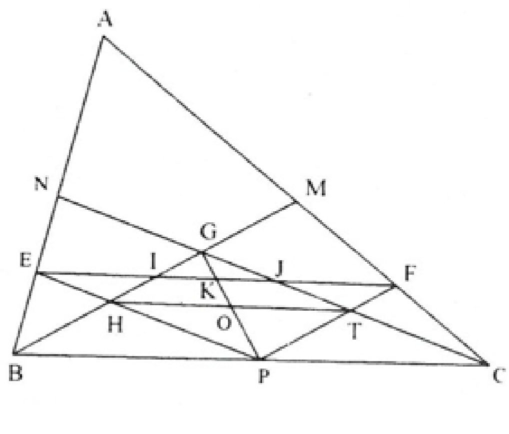
Vì $CM=\frac{QA}{QP}.MB$ nên $CM=\frac{AM}{CM}.MB$

$\Rightarrow CM^2=MA.MB=AM^2$ (vì MA = MB)

$\Rightarrow CM=AM=BM$.

Vậy ΔABC vuông tại C.

13.17. a) Gọi BM và CN là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Gọi giao điểm của BG và EP là H, của CG và FP là T.



Từ HI // PF, EP // CN, theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{EI}{EF}=\frac{EH}{EP}=\frac{NG}{NC}=\frac{1}{3}$

Suy ra $EI=\frac{1}{3}EF$

Tương tự ta có: $FJ=\frac{1}{3}EF$.

Do đó: $EI=IJ=FJ=\frac{1}{3}EF$.

b) Từ PE // CN, theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{PH}{PE}=\frac{CG}{CN}=\frac{2}{3}$.

Từ PF // BM, theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{PT}{PF}=\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{PH}{PE}=\frac{PT}{PF}$, do đó TH // EF (định lý Ta-let đảo).

Gọi O, K là giao điểm của PG với HT và EF. Ta có PHGT là hình bình hành $\Rightarrow OH=OT$.

Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\frac{HO}{EK}=\frac{PO}{PK}=\frac{OT}{KF}$. Từ đó suy ra KE = KF, điều phải chứng minh.

13.18. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và AB.

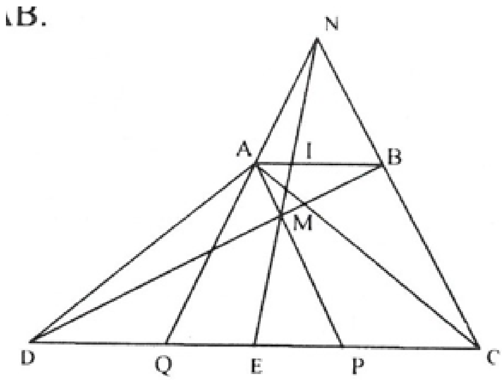
Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$AB//CD \Rightarrow \frac{DP}{AB}=\frac{DE}{BI}=\frac{EC}{AI}=\frac{NC}{NB}=\frac{QC}{AB}$

Do đó DP = QC theo giả thiết AC = AD $\Rightarrow \Delta ADC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADP}=\widehat{ACQ} \Rightarrow \Delta ADP=\Delta ACQ$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{MAD}=\widehat{QAC}$



13.19. Kẻ MN // AB (hình vẽ). Ta có:

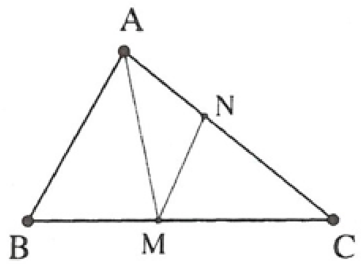
$\frac{MN}{AB}=\frac{MC}{BC} \Rightarrow MN = AB.\frac{MC}{BC}$.

$\frac{NA}{AC}=\frac{MB}{BC} \Rightarrow NA = AC.\frac{MB}{BC}$.

Mà $AM < MN + NA$ (bất đẳng thức tam giác),

Hay $AM < AB.\frac{MC}{BC}+AC.\frac{MB}{BC}$

Vậy $AM.BC < MC.AB + MB.AC$.



13.20. Tam giác vuông ACK có $\widehat{A}=45°$ nên là tam giác vuông cân, CE là đường cao nên AE = EK, IE là đường trung tuyến của ΔAIK.

Ta sẽ chứng minh IG = 2.GE (bằng cách chứng minh FI = 2EH).

Ta có:

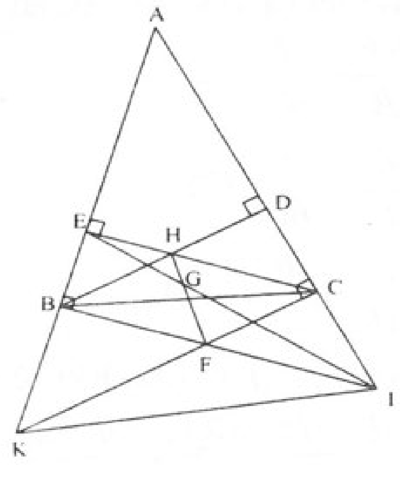
$FI = CF\sqrt{2}$ (vì ΔCIF vuông cân),

CF = BH (vì BFCH là hình bình hành).

$BH = EH\sqrt{2}$ (vì ΔBEH vuông cân) nên FI = 2EH. Do EH // FI nên theo định lý Ta-let, ta có:

$\frac{IG}{GE}=\frac{FI}{EH}=2$ suy ra IG = 2GE.

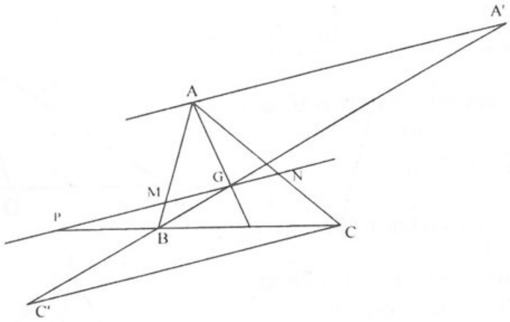
Vậy G là trọng tâm của ΔAIK.



13.21. Qua A và C kẻ đường thẳng song song với đường thẳng d, cắt đường thẳng BG lần lượt tại A' và C'.

Áp dụng *ví dụ 4,* ta có: $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3; \frac{AC}{CN}+\frac{BC}{CP}=3$ (1)

Vì MN cắt tia CB tại P nên tương tự cách chứng minh *ví dụ 4*, ta có:



$$\frac{BA}{BM}=\frac{BA'}{BG};\frac{BA}{BP}=\frac{BC'}{BG}\Rightarrow\frac{BA}{BM}-\frac{BC}{BP}=3\qquad(2).$$

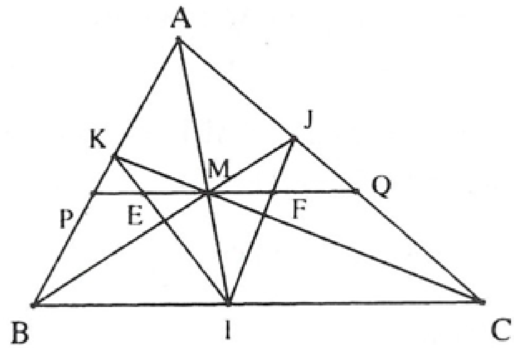
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}+\frac{AC}{CN}+\frac{BC}{CP}+\frac{AB}{BM}-\frac{BC}{BP}=9$

$$\frac{AB\left(AM+MB\right)}{AM.BM}+\frac{AC\left(AN+NC\right)}{AN.CN}-\frac{BC\left(CP-BP\right)}{BP.CP}=9$$

$\Leftrightarrow\frac{AB^2}{AM.BM}+\frac{AC^2}{AN.CN}-\frac{BC^2}{BP.CP}=9$ (điều phải chứng minh).

Nhận xét. Dựa trên bài toán trên, chúng ta giải được bài toán sau: Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác đều ABC, cạnh a, cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM.BM}+\frac{1}{AN.CN}-\frac{1}{BP.CP}=\frac{9}{a^2}$.

13.22. Gọi EF cắt AB, AC tại P, Q. Theo định lý Ta-lét, ta có:



$\frac{MP}{MQ}=\frac{IB}{IC}\quad(1)$

$\frac{ME}{MP}=\frac{IC}{BC}\quad(2)$

$\frac{MQ}{MF}=\frac{BC}{BI}\quad(3)$

Từ (1), (2) và (3) nhân vế với vế ta được:

$$\frac{MP}{MQ}.\frac{ME}{MP}.\frac{MQ}{MF}=\frac{IB}{IC}.\frac{IC}{BC}.\frac{BC}{IB}$$

$\Rightarrow\frac{ME}{MF}=1$ hay ME = MF.

Chương

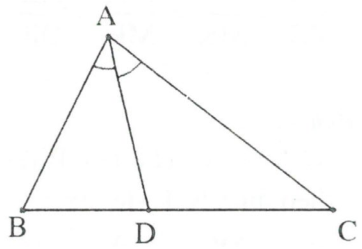
Chuyên đề

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lý

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

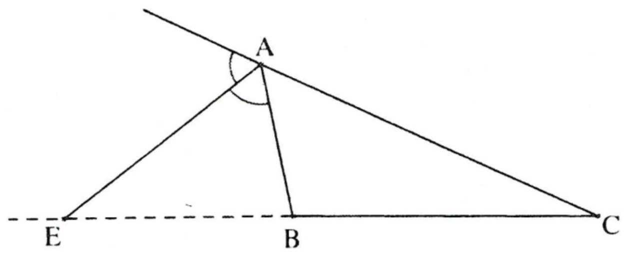


$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\\ \widehat{BAD}=\widehat{CAD}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

2. Chú ý

* Định lý vẫn đúng với đối với đường phân giác góc ngoài của tam giác.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\left(AB\ne AC\right)\\ \widehat{BAE}=\widehat{CAE}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$



* Các định lý trên có định lý đảo

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AD$ là đường phân giác trong của tam giác.

$\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AE$ là đường phân giác ngoài của tam giác.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, trung tuyến BM cắt phân giác CD tại P. Chứng minh rằng: $\frac{PC}{PD}-\frac{AC}{BC}=1$.

Giải

Dựa vào định ý Ta-lét: $\frac{PC}{PD}-\frac{AC}{BC}=1\Leftrightarrow \frac{PC}{PD}=\frac{AC}{BC}+1$.

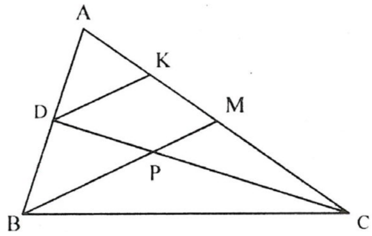
CD là phân giác của ΔABC nên $\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow \frac{DA}{DB}+1=\frac{AC}{BC}+1$

$\Leftrightarrow \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{BC}+1$. Vì vậy chỉ cần chứng minh: $\frac{PC}{PD}=\frac{AB}{DB}$.

Cách 1.

Vẽ $DK // BM$ (K thuộc AM), theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MK} = \frac{MA}{MK} = \frac{AB}{DB}.$$

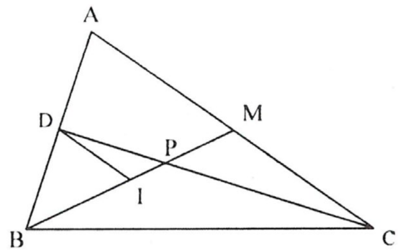


Cách 2.

Vẽ $DI // AC$ (I thuộc BM),

Theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{DI} = \frac{MA}{DI} = \frac{AB}{DB}.$$



Cách 3.

Vẽ $AN // BM$ (N thuộc tia CD)

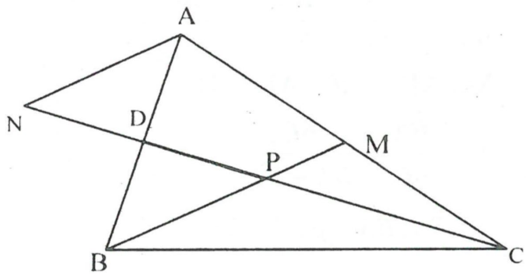
Do $MA = MC$ suy ra $PC = PN$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{PN}{PD}$$

Mặt khác $\frac{ND}{PD} = \frac{DA}{DB}$ (do $AN // BP$),

Suy ra $\frac{PN}{PD} = \frac{ND}{PD} + 1 = \frac{DA}{DB} + 1 = \frac{AB}{DB}$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$$



Cách 4.

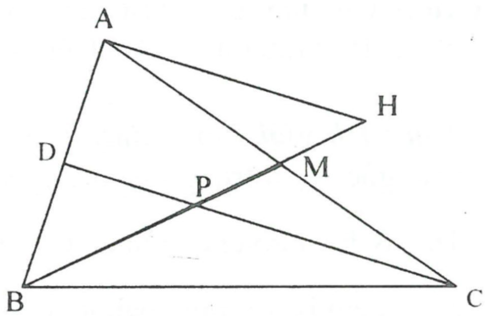
Vẽ $AH // CD$ (H thuộc tia BM),

Ta có: $\Delta AMH = \Delta CMP(c.g.c)$

Suy ra $PC = AH \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AH}{PD}$.

Mặt khác, do $PD // AH$ nên theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{AH}{PD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}.$$

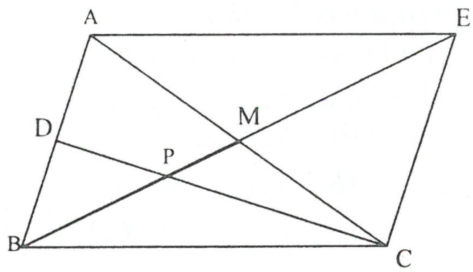


Cách 5.

Trên tia đối của tia MB, lấy điểm E sao cho $MB = ME$. Suy ra $ABCE$ là hình bình hành. Suy ra $AB // CE$ và $AB = CE$.

Theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có:

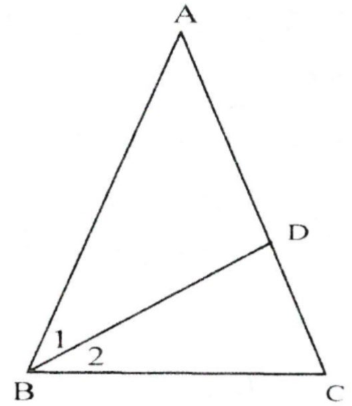
$$\frac{PC}{PD} = \frac{CE}{BP} = \frac{AB}{DB}.$$



Ví dụ 2: Cho ΔABC cân tại $\widehat{A}$ và $\widehat{A}=36^\circ$. Chứng minh rằng: $AB^2=AB.BC+BC^2$

Giải

*** Tìm cách giải.** Phân tích đề bài, chúng ta thu được $\widehat{B}=\widehat{C}=72^\circ$, nhận thấy $72^\circ=2.36^\circ$ do đó chúng ta nên kẻ phân giác góc B (hoặc góc C) là suy luận tự nhiên. Từ đó vận dụng tính chất dường phân giác trong tam giác và biến đổi linh hoạt tỉ lệ thức ta được lời giải hay.



*** Trình bày lời giải.**

Kẻ phân giác BD của $\widehat{ABC}\left(D\in AC\right)$, khi đó $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}=36^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại D và ΔBCD cân tại $B \Rightarrow AD=BC=BD.$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow\frac{BA}{BC}=\frac{BC}{AC-AD}$$

Mà $AB=AC; AD=BC$

nên $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BC}{BA-BC}$

$\Leftrightarrow BA\left(BA-BC\right)=BC^2$

$\Leftrightarrow BA^2-BA.BC=BC^2 \Leftrightarrow AB^2=AB.BC+BC^2.$

Nhận xét. Tương tự chúng ta giải được bày toán sau: Cho ΔABC cân tại A và $\widehat{A}=108^\circ$. Chứng minh rằng: $AB^2=BC^2-AB.BC$..

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Biết rằng $IG\,//\,BC$. Chứng minh rằng: $AB+AC=2.BC.$

Giải

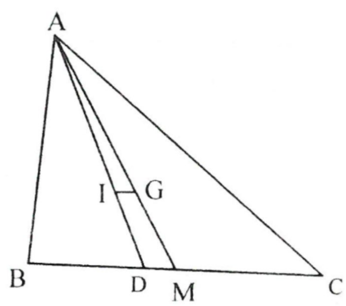
*** Tìm cách giải.** Nhận thấy để khai thác $IG\,//\,BC$ chúng ta nên kẻ đường phân giác góc A và trung tuyến ứng với cạnh BC thì sẽ vận dụng được giả thiết đó.

Từ suy luận đó chúng ta có kết quả $\dfrac{AI}{ID}=2$. Mặt khác, tỉ số $\dfrac{AI}{ID}$, kết hợp với I là giao điểm của ba đường phân giác trong cho phép chúng ta liên tưởng tới khả năng vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

*** Trình bày lời giải**

Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD, ta có:



$$\frac{IA}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{CA}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB+AC}{BC}$$

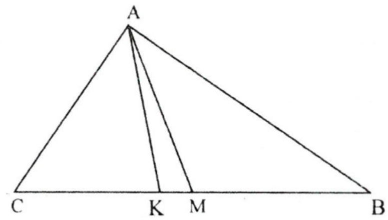
$$IG\,//\,BC\Rightarrow\frac{IA}{ID}=\frac{GA}{GM}=2\Rightarrow\frac{AB+AC}{BC}=2$$

Hay $AB + AC = 2BC$.

Nhận xét. Với kỹ thuật và lối tư duy trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và I là giao điểm ba đường phân giác trong. Biết rằng $AB + AC = 2.BC$. Chứng minh rằng: $IG \,//\, BC$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có tỉ số giữa hai cạnh chung đỉnh A là 3:2. Vẽ đường trung tuyến AM và đường phân giác AK. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác AKM và AKB.

Giải

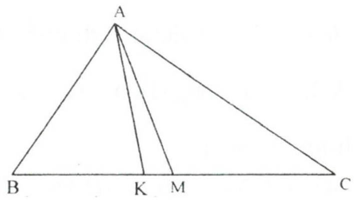


Trường hợp 1. Xét $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{2}$.

Chú ý rằng: $KM = \dfrac{KB - KC}{2}$ và $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ta có:

$$\frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KB - KC}{2KB} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{KC}{KB}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{AC}{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$



Trường hợp 2. Xét $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{2}$.

Chú ý rằng $KM = \dfrac{KC - KB}{2}$ và $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ta có:

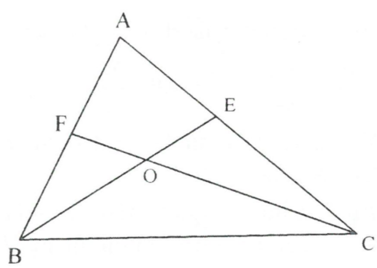
$$\frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KC - KB}{2KB} = \frac{1}{2}\left(\frac{KC}{KB} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AB} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

Nhận xét. Bài này dễ bỏ sót trường hợp.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có BE và CF là hai đường phân giác cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu $OB.OC = \dfrac{1}{2}BE.CF$ thì ΔABC vuông tại A.

Giải

*** Tìm cách giải.** Với giả thiết $OB.OC = \dfrac{1}{2}BE.CF$ và chứng minh ΔABC vuông tại A, dễ dàng nhận thấy từ mối quan hệ về độ dài mà chứng minh tam giác vuông, tất yếu chúng ta nghĩ tới định lý Py-ta-go đảo. Do đó chúng ta cần biểu diễn $OB.OC = \dfrac{1}{2}BE.CF$ thông qua các cạnh của tam giác ABC. Định hướng cuối cùng là $a^2 = b^2 + c^2$.



*** Trình bày lời giải.**

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c.$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BF}{BF + FA} = \frac{BC}{BC + AC}$$

$\Rightarrow \frac{BF}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow BF = \frac{ac}{a+b}.$

$\frac{OF}{OC} = \frac{BF}{BC} = \frac{c}{a+b} \Rightarrow \frac{OF+OC}{OC} = \frac{a+b+c}{a+b} \Rightarrow \frac{CF}{OC} = \frac{a+b+c}{a+b}.$

Tương tự, ta có: $\frac{BE}{OB} = \frac{a+b+c}{a+c}.$

Từ giả thiết $OB.OC = \frac{1}{2}BE.CF \Rightarrow \frac{BE.CF}{OB.OC} = 2 \Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(a+b)} = 2$

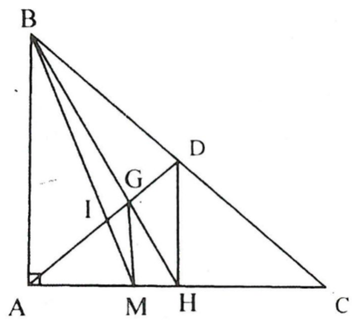
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2$, suy ra ΔABC vuông tại A.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, BM là đường phân giác. Biết rằng $GM \perp AC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với trung tuyến AD.

Giải

Cách 1. (Không dùng tính chất đường phân giác). Gọi I là giao điểm của BM và AD, H là trung điểm $AC \Rightarrow DH \,//\, AB$ và $DH = \frac{1}{2}AB$ (vì DH là đường trung bình ΔABC).



Lại có $GM \,//\, AB$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow GM \,//\, DH$. Áp dụng hệ quả định lý ta-lét:

Xét ΔADH có $\Rightarrow GM \,//\, DH$

$\Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{2}{3}.$

Xét ΔABI có $GM \,//\, AB \Rightarrow \frac{GI}{AI} = \frac{GM}{AB} = \frac{GH}{BH} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{GI+AI}{AI} = \frac{A+3}{3} \Rightarrow AI = \frac{3}{4}.AG = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.AD \Rightarrow AI = \frac{AD}{2}$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AD.

ΔABD có BI vừa là đường phân giác, vừa là đường trung tuyến, suy ra ΔABD cân tại B nên BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác. Do đó $BM \perp AD$.

Cách 2. ΔADH có $GM \,//\, DH \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3.AM = 2.AH = AC = AM + MC$

hay $MC = 2.AM$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong ΔABC, ta có:

$\frac{BC}{AB} = \frac{MC}{MA} = 2 \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = BD.$

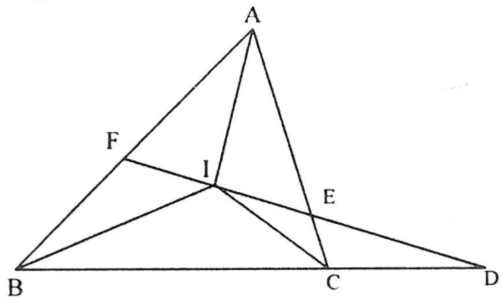
Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao.

Do đó $BM \perp AD$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho D, E nằm cùng phía đối với điểm I. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{ID}+\frac{AC}{IE}=\frac{AB}{IF}$.

Giải

Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác, ta có:



$\frac{BD}{ID}=\frac{BF}{IF};\frac{CE}{IE}=\frac{CD}{ID};\frac{AF}{IF}=\frac{AE}{IE}$

Ta có: $\frac{BC}{ID}=\frac{BD}{ID}-\frac{CD}{ID}=\frac{BF}{IF}-\frac{CE}{IE}$ (1)

Ta có: $\frac{AC}{IE}=\frac{AE}{IE}+\frac{CE}{IE}=\frac{AF}{IF}+\frac{CE}{IE}$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

$\frac{BC}{ID}+\frac{AC}{IE}=\frac{BF}{IF}+\frac{AF}{IF}=\frac{AB}{IF}$.

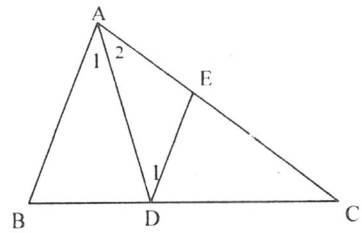
Ví dụ 8. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Đặt $AC=b, AB=c$. Chứng minh rằng $AD<\frac{2bc}{b+c}$.

Giải

Cách 1. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E.

Ta có : $\widehat{D_1}=\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $AE=DE$. Ta tính DE theo b và c.

Do $DE\,//\,AB$ nên theo định lý Ta-lét thì $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}$ (1).



Theo tính chất đường phân giác $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$

Nên $\frac{DC}{DC+DB}=\frac{b}{b+c}$

tức là: $\frac{DC}{BC}=\frac{b}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{DE}{c}=\frac{b}{b+c}$.

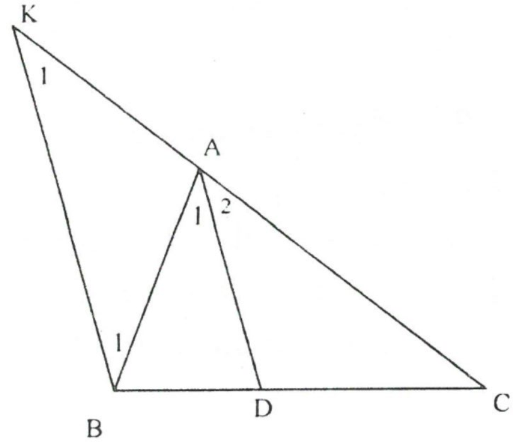
Do đó $DE=\frac{bc}{b+c}$.

Tam giác ADE có $AD<AE+DE=2DE=\frac{2bc}{b+c}$.

Cách 2. (không dùng tính chất đường phân giác).

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường thẳng AC ở K.

Ta có: $\widehat{K_1} = \widehat{A_2}; \widehat{B_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{B_1}$



$\Rightarrow \Delta ABK$ cân tại K, nên $AK = AB = c.$

Do $BK \,//\, AD$ nên theo định lý Ta-lét thì

$\dfrac{AD}{BK} = \dfrac{AC}{KC} = \dfrac{b}{b+c} \Rightarrow AD = \dfrac{b}{b+c}.BK$ (1)

Tam giác ABK có $BK < AB + AK = 2c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AD < \dfrac{2bc}{b+c}.$

Nhận xét. Từ kết luận bài toán, suy ra: $\dfrac{1}{AD} > \dfrac{b+c}{2bc} \Rightarrow \dfrac{1}{AD} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right).$

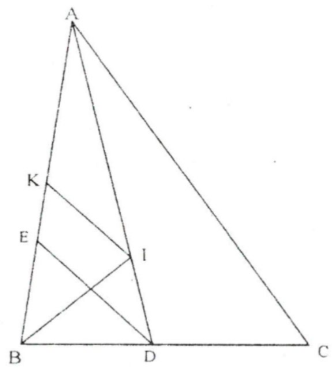
Tương tự như vậy đối với đường phân giác góc B và góc C, thì chúng ta giải được bài toán hay và khó sau: Cho tam giác ABC . Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác góc A, B, C. Đặt $BC = a, AC = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ví dụ 9. Cho ΔABC có AD là đường phân giác, I là giao điểm của ba đường phân giác và K là trung điểm của AB. Biết rằng $\widehat{KIB} = 90°$. Chứng minh rằng: $AB + AC = 3BC.$

Giải

Trên BA lấy điểm E sao cho $BE = BD$



Ta có: ΔBDE cân tại B có BI là đường phân giác nên $BI \perp BE$

do đó $DE \,//\, KI\left(\perp BI\right) \Rightarrow \dfrac{KE}{KA} = \dfrac{DI}{AI}$ (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong $\Delta ABD, \Delta ACD$

ta có : $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{CD}{CA}$ (2)

Do đó $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BC}{BA + CA}$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{KE}{KA} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BE}{2.KA}$

Hay $2KE = BE$

$\Rightarrow BE = \dfrac{2}{3}BK \Rightarrow BD = \dfrac{1}{3}BA \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{1}{3}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{BC}{BA + CA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AB + AC = 3.BC.$

C. Bài tập vận dụng

14.1. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Biết rằng $BC = 10cm$ và $2.AB = 3.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BD và CD.

14.2. Gọi AI là đường phân giác của tam giác $ABC; IM, IN$ thứ tự là các đường phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

14.3. Cho tam giác ABC có chu vi bằng $18cm$. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M, đường phân giác của góc C cắt AB tại N. Biết rằng: $\frac{MA}{MC} = \frac{1}{2}; \frac{NA}{NC} = \frac{3}{4}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

14.4. Cho ΔABC vuông cân tại A. Đường cao AH và đường phân giác BE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $CE = 2.HI$

14.5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm AD, N là trung điểm BC. Trên tia đối của tia DC lấy điểm P, đường thẳng PM cắt AC tại Q và cắt BC tại S. Đường thẳng QN cắt DC tại R. Chứng minh rằng:

a) ΔNPR là tam giác cân.

b) $\frac{MQ}{MP} = \frac{SQ}{SP}$.

14.6. Cho ΔABC có $AM.BN.CP$ là các đường phân giác. Đặt $BC = a; AC = b; AB = c$. Chứng minh rằng: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

14.7. Cho ΔABC có $AB = 4cm; BC = 6cm; CA = 8cm$. Gọi I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC và G là trọng tâm. Tính độ dài đoạn thẳng IG.

14.8. Cho hình bình hành $ABCD(AD < AB)$ các điểm M, N lần lượt thuộc AB, AD sao cho $BM = DN$. Gọi O là giao điểm của BN và DM. Đường thẳng CO cắt đường thẳng AB và AD theo thứ tự là I và K. Chứng minh rằng: $CD = DK; BI = BC$

14.9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Có đường cao AH, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD đồng quy tại O. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}$.

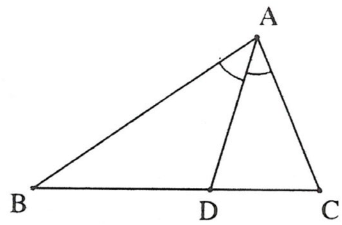
14.10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau ở O. Biết số đo diện tích tam giác BOC bằng a. Tính tích $BD.CE$ theo a.

14.11. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 3\widehat{ACB}$. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, MC cắt AE tại L; gọi K là giao điểm ME và AD. Chứng minh rằng $KL // BC.$

14.12. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến CM. Điểm D thuộc đoạn BM sao cho $BD = 2.MD$. Biết rằng $\widehat{MCD} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng: ΔACD là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

14.1. Ta có: $2AB = 3AC$ suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{2}.$

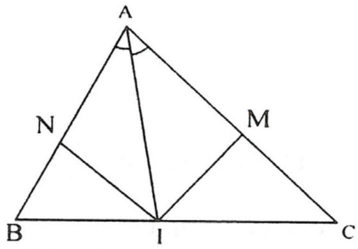


AD là đường phân giác của góc BAC nên

$$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{3}{3+2} \Rightarrow \frac{BD}{10} = \frac{3}{5}.$$

Suy ra $BD = \dfrac{3.10}{5} = 6(cm); CD = 4(cm).$

14.2. Áp dụng tính chất đường phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

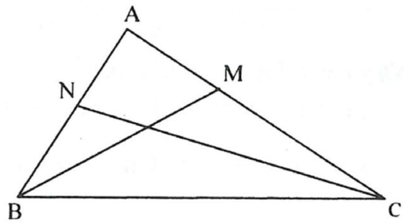


$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC} =; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\frac{BI}{IC}.\frac{AN}{NB}.\frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC}.\frac{AI}{BI}.\frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC}.\frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI.AN.CM = BN.IC.AM$$

14.3. Xét ΔABC có BC là đường phân giác của ΔABC nên:



$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC.$$

Gọi CN là đường phân giác của ΔACB, suy ra:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4}.BC$$

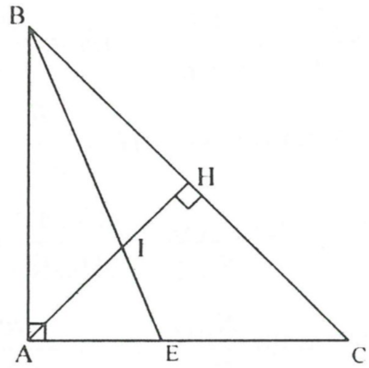
Ta có: $AB + BC + AC = 18 \Leftrightarrow \dfrac{BC}{2} + BC + \dfrac{3}{4}BC = 18$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}.BC = 18 \Rightarrow BC = 8(cm)$$

Từ đó ta tính được $AB = 4(cm); AC = 6(cm)$

14.4. Ta có:

$$\widehat{AIE} = \widehat{BAH} + \widehat{ABI} = \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = 45° + \frac{1}{2}\widehat{B} = 45° + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{AEI}$$



Suy ra ΔAIE cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (1).

Áp dụng tính chất đường phân giác của ΔABH và ΔBAC, ta có:

$$\frac{IH}{IA} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{BH}{IH} \quad (2);$$

$$\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $\dfrac{BH}{IH} = \dfrac{BC}{EC}$ (4)

Vì ΔABC vuông cân tại v nên $BC = 2.BH$.

Từ đó kết hợp với (4), suy ra $EC = 2.IH$.

14.5.

a) Ta có: $CN \,//\, DM; CN = DM$ và $\widehat{NCD} = 90^\circ$ nên $CDMN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN \,//\, CD$

Gọi O là giao điểm của AC và MN .

ΔAOM và ΔCON có: $AM = CN; \widehat{AMO} = \widehat{CNO} = 90^\circ; \widehat{MAO} = \widehat{NCO}$

$\Rightarrow \Delta AMO = \Delta CNO(c.g.c) \Rightarrow MO = ON.$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$MO \,//\, CP \Rightarrow \dfrac{MO}{CP} = \dfrac{QO}{QC}, NO \,//\, CR \Rightarrow \dfrac{NO}{CR} = \dfrac{QO}{QC}$

Suy ra $\dfrac{NO}{CR} = \dfrac{MO}{CP}$ mà $MO = NO$ suy ra $CR = CP$.

ΔNRP có $NC \perp PR, CR = CP$.

nên ΔNRP cân.

b) $MN \,//\, RP$ nên $\widehat{QNM} = \widehat{NRP}, \widehat{MNP} = \widehat{NPR}$

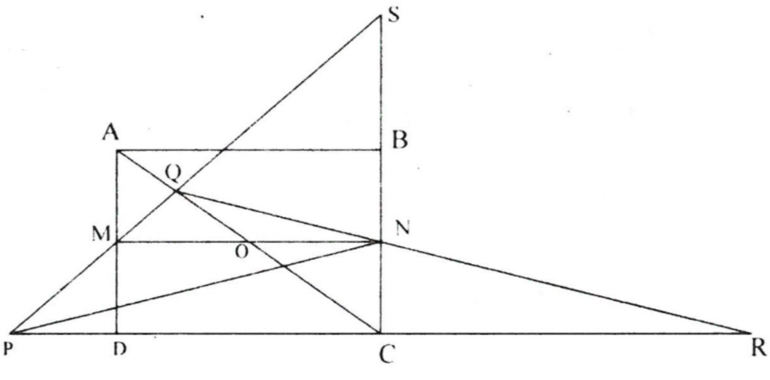
mà $\widehat{NRP} = \widehat{NPR} \Rightarrow \widehat{QNM} = \widehat{MNP} \Rightarrow NM$ là tia phân giác QNP .

Ta có: $NS \perp MN$ nên NS là tia phân giác góc ngoài đỉnh N của ΔPNQ .

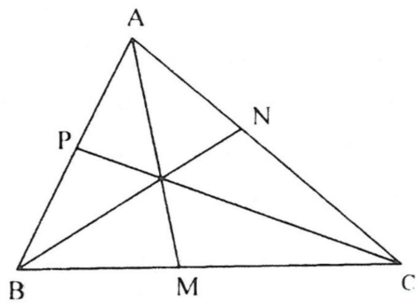
Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của ΔNPQ, ta có:

$\dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{NQ}{NP}; \dfrac{SQ}{SP} = \dfrac{NQ}{NP}$

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{SQ}{SP}.$



14.6. Theo tính chất đường phân giác của ΔABC, ta có:



$\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AN}{NC + AN} = \dfrac{AB}{BC + AB}$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{b} = \dfrac{c}{c+a} \Rightarrow AN = \dfrac{bc}{c+a}.$

Tương tự, ta có: $AP = \dfrac{bc}{b+a}.$

Mặt khác: $\dfrac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \dfrac{AN.AP}{AB.AC} = \dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \dfrac{ac}{(a+b)(b+c)}$ (2)

và $\dfrac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{ab}{(a+c)(b+c)}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}}$$

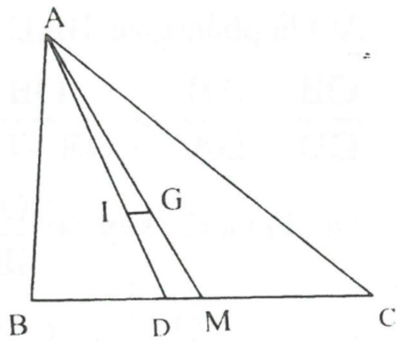
$$= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{(a+b)(a+c)(b+c) - bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

14.7. Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ta có:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD+CD} = \frac{AB}{AB+AC}.$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{6} = \frac{4}{4+8} \Rightarrow BD = \frac{6.4}{12} = 2cm.$$

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{GM}{AG} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{GM}{GA}\left(=\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow IG \,//\, DM$ (theo định lý Ta-lét đảo)

$$\Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} \Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2}{3}DM.$$

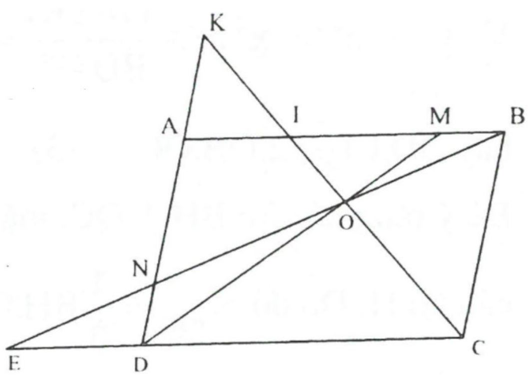
$$\Rightarrow IG = \frac{2}{3}.(BM - BD) = \frac{2}{3}.(3-2) = \frac{2}{3}cm.$$

14.8. Gọi E là giao điểm của đường thẳng BN và CD

$BM \,//\, DE$ nên $\dfrac{BM}{ED} = \dfrac{BO}{OE}$

mà $BM = DN$ nên $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{DN}{ED}$ (1)

Ta có $DN \,//\, BC$ nên $\dfrac{DN}{ED} = \dfrac{BC}{CE}$ (2)

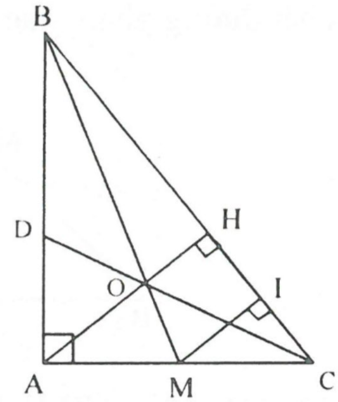


Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BO}{OE}=\dfrac{BC}{CE}$

$\Rightarrow CO$ là đường phân giác $\widehat{BCD}$

$\Rightarrow \widehat{DKC}=\widehat{DCK}\left(=\widehat{BCK}\right)\Rightarrow \Delta CDK$ cân tại $D\Rightarrow CD=DK$

$\Rightarrow \widehat{BIC}=\widehat{DCI}\left(=\widehat{ICD}\right)\Rightarrow \Delta BCI$ cân tại $B\Rightarrow BI=BC$.



14.9. Kẻ $MI\perp HC$ vì $AH\perp HC$ nên $MI\ //\ AH$.

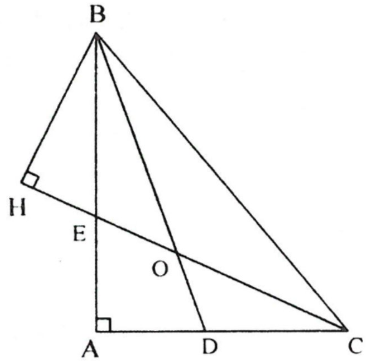
Mặt khác $MA=MC$ nên $HI=CI\Rightarrow 2.HI=CH$.

Áp dụng tính chất đường phân giác và định lý ta-lét, ta có:

$\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{BH}{2.HI}=\dfrac{BO}{2.OM}=\dfrac{BC}{2.CM}=\dfrac{BC}{AC}$.

(lời giải khác, các bạn có thể xem ở chuyên đề định lý Cê-va)

14.10. Đặt $BC=x;CA=y;AB=z$.



Theo tính chất đường phân giác của ΔABC, ta có:

$\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{z}{x}\Rightarrow \dfrac{DA}{DA+DC}=\dfrac{z}{z+x}\Rightarrow DA=\dfrac{yz}{z+x}$ (1)

AO là phân giác $\widehat{BAD}$ nên

$\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{DA}\Rightarrow \dfrac{OB}{OB+OD}=\dfrac{AB}{AB+DA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{OB}{BD}=\dfrac{x+z}{x+y+z}$

Tương tự $\dfrac{OC}{CE}=\dfrac{x+y}{x+y+z}$. Từ đó

$\dfrac{OB.OC}{BD.CE}=\dfrac{(x+y)(x+z)}{(x+y+z)^2}\Rightarrow \dfrac{OB.OC}{BD.CE}=\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{2\left(x^2+xy+yz+zx\right)}=\dfrac{1}{2}$

Vì $y^2+z^2=x^2$ nên $\dfrac{OB.OC}{BD.CE}=\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{2\left(x^2+xy+yz+zx\right)}=\dfrac{1}{2}$

hay $BD.CE=2.OB.OC$ (3)

Để ý rằng nếu kẻ $BH\perp OC$, mặt khác dễ thấy $\widehat{BOC}=135^\circ$, nên ΔBHO vuông cân tại H.

Do đó $S_{BOC}=\dfrac{1}{2}BH.OC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}OB.OC$, suy ra $OB.OC=2a\sqrt{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: . $BD.CE=4a\sqrt{2}$

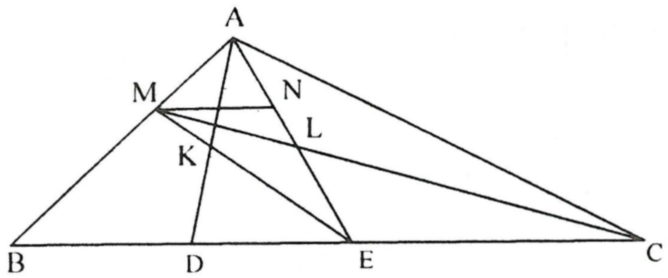
14.11. Trên AE lấy điểm N sao cho $MN\ //\ BC$.

Từ giả thiết $\widehat{EAC}=\widehat{ECA}\Rightarrow \Delta EAC$ cân tại $E\Rightarrow AE=EC$ (1)

Cũng theo giả thiết $\widehat{AEB}=\widehat{EAC}+\widehat{ECA}=2.\widehat{ECA}=\widehat{EAB}\Rightarrow \Delta BAE$ cân tại $B\Rightarrow \Delta MAN$ cân tại M (vì $MN\ //\ BE$)$\Rightarrow AM=NM$ (2)

Vậy ta có $\dfrac{LM}{LC}=\dfrac{NM}{EC}$ (vì $MN\ //\ EC$) $=\dfrac{AM}{AE}$ (theo (1) và (2)) $=\dfrac{KM}{KE}$ (theo tính chất đường phân giác)

Suy ra $KL\ //\ BC$ (định lý Ta-lét đảo)



14.12. ΔBCM có CD là đường phân giác nên $\dfrac{BC}{CM}=\dfrac{BD}{MD}=2\Rightarrow BC=2.CM$

Trên tia đối của tia MC lấy điểm P sao cho $MC=MP$ suy ra $CP=2.CM$

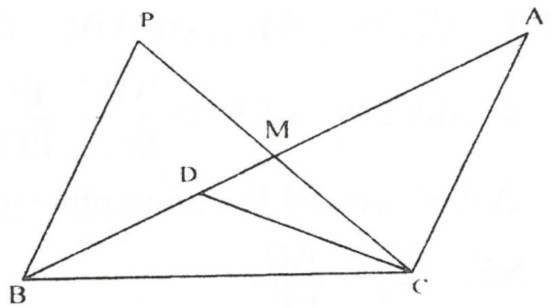
$\Rightarrow CP=BC\Rightarrow \Delta CBP$ cân tại C,

mà CD là phân giác nên $CD\perp BP$ (1)

Mặt khác: $\Delta CMA=\Delta PMB\left(c.\text{g}.\text{c}\right)$.

Do đó $\widehat{CAM}=\widehat{PBM}$ suy ra $AC\ //\ BP$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CD\perp AC$ hay ΔACD vuông tại C.



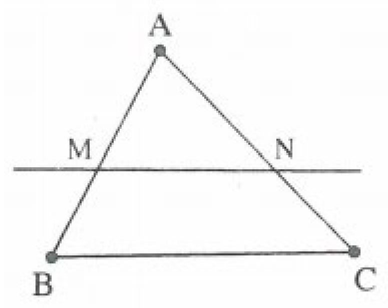
Chuyên đề 15.

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM TÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

a. Định nghĩa



$\Delta A'B'C'$ được gọi là đồng dạng với ΔABC nếu:

$\widehat{A'} = \widehat{A}$; $\widehat{B'} = \widehat{B}$; $\widehat{C'} = \widehat{C}$;

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

b. Tính chất

- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.
- Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.
- Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

c. Định lí

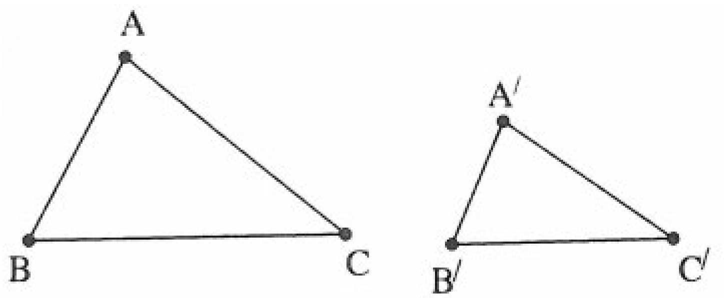
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ MN // BC\end{matrix}\right\} \Rightarrow AMN \backsim \Delta ABC.$$

Chú ý. Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

2. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

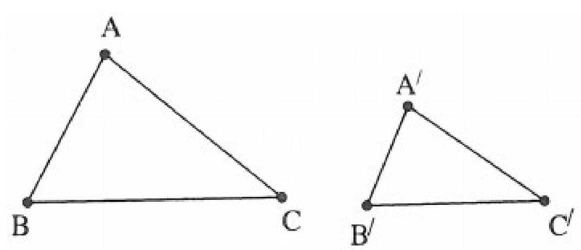


Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

3. Trường hợp đồng dạng thứ hai



Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đồng dạng.

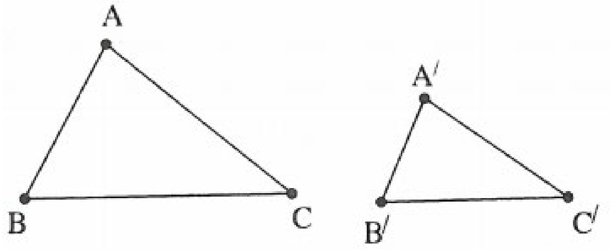
Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ và $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

4. Trường hợp đồng dạng thứ ba

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có: $\widehat{A'} = \widehat{A}$; $\widehat{B'} = \widehat{B}$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$. Hai tia AD và BC cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $AB.DE = BC.CE$.

Giải

**** Tìm cách giải.*** Để chứng minh đẳng thức tích, thông thường chúng ta biến đổi chúng dưới dạng tỉ lệ thức và chứng minh tỉ lệ thức ấy. Vậy để chứng minh $AB.DE = BC.CE$ chúng ta cần chứng minh $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE}$. Nhận thấy tỉ số $\frac{AB}{BC}$ có thể vận dụng được tính chất đường phân giác và ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$. Do vậy chúng ta cần chứng minh $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE}$. Từ đó chúng ta tìm cách chứng minh $\Delta CDE \backsim \Delta ACE$, vậy chỉ cần chứng minh $\widehat{ECD} = \widehat{BAC}$ là xong.

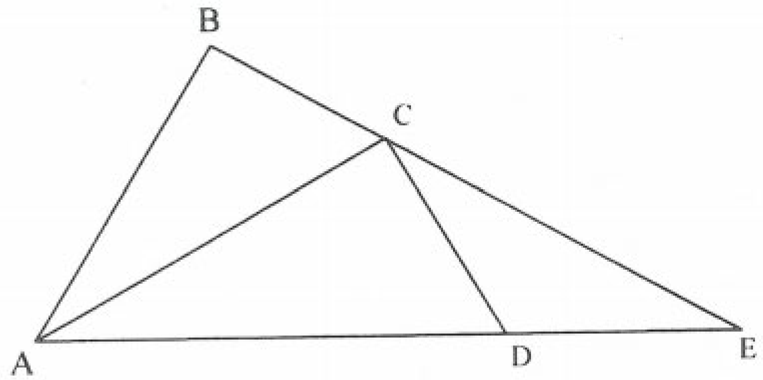
**** Trình bày lời giải***

Vì $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} = \widehat{ECA}$ (góc ngoài tam giác) và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{ECD} = \widehat{BAC}$

do đó $\Delta CDE \backsim \Delta ACE\left(g.g\right)$, suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ (1)

Trong ΔABE có AC là đường phân giác suy ra $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow AB.DE = BC.CE$



Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có điểm D nằm giữa A và C. Qua C dựng CE vuông góc với đường thẳng BD tại E. Chứng minh:

a) $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$

b) $AB.CE + AE.BC = AC.\text{BE}$

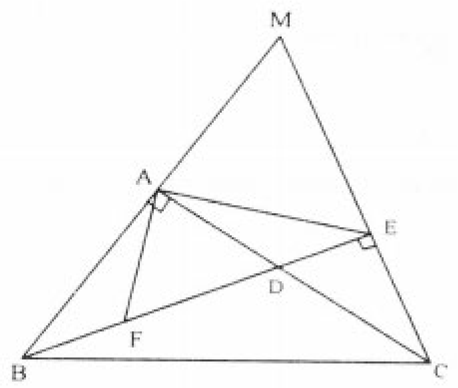
Giải

**** Tìm cách giải.***

ΔADE và ΔBDC có $\widehat{ADE}=\widehat{BDC}$; để tìm một cặp góc nữa bằng nhau thật khó khăn. Do đó chúng ta tìm cách chứng minh cặp góc trên tỉ lệ thông qua hai tam giác khác. Chẳng hạn cần có $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DE}{DC}$ chúng ta nên chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta ECD$

- Để chứng minh $AB.CE+AE.BC=AC.\text{BE}$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải ta cần tách thành một tổng: $AC.\text{BE}=AC.x+AC.y$ với $x+y=BE$. Do vậy ta chọn điểm F thuộc BD khi đó $x=BF$, $y=FE$ và chứng minh $AB.CD=AC.BF$, $AD.BC=AC.FE$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm F sao cho $\Delta ABF \backsim \Delta ACE$, $\Delta AFE \backsim \Delta ABC$ là xong.

**** Trình bày lời giải***



a) Xét ΔABD và ΔECD có $\widehat{ADB}=\widehat{EDC}$; $\widehat{BAD}=\widehat{CED}=90^\circ$ (gt)

$\Delta ABD \backsim \Delta ECD(g.\text{g}) \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DE}{DC}$

ΔADE và ΔBDC có $\widehat{ADE}=\widehat{BDC}$; $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DE}{DC}$

suy ra $\Delta ADE \backsim \Delta BDC\left(c.g.c\right)$

b) ***Cách 1.*** Gọi M là giao điểm AB và CE.

Xét ΔMBE và ΔMCA, ta có $\widehat{M}$ chung; $\widehat{MEB}=\widehat{MAC}\left(=90^\circ\right) \Rightarrow \Delta MBE \backsim \Delta MCA(g.g) \Rightarrow \dfrac{MB}{ME}=\dfrac{MC}{MA}$

Xét ΔMAE và ΔMCB có $\dfrac{MB}{ME}=\dfrac{MC}{MA}$, $\widehat{M}$ chung $\Rightarrow \Delta MAE \backsim \Delta MCB\left(c.g.\text{c}\right) \Rightarrow \widehat{MEA}=\widehat{MBC}$

Lấy $F \in BE$ sao cho $AF \perp AE$. Xét ΔABF và ΔACE có:

$\widehat{BAF}=\widehat{CAE}\left(=90^\circ-\widehat{DAF}\right)$; $\widehat{ABF}=\widehat{ACE}\left(90^\circ-\widehat{M}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta ACE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE=AC.BF$ (1)

Xét ΔAFE và ΔABC có

$\widehat{EAF}=\widehat{BAC}\left(=90^\circ\right)$; $\widehat{AEF}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

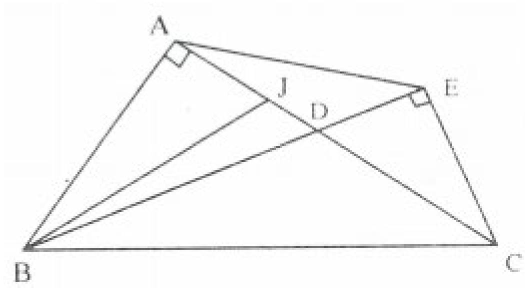
$\Rightarrow \Delta AFE \backsim \Delta ABC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{BC} \Rightarrow AE.BC=AC.EF$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế:

$AB.CE+AE.BC=AC\left(BF+EF\right)=AC.BE$

Cách 2. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABJ}=\widehat{EBC}$.

Xét ΔABJ và ΔEBC có: $\widehat{BAC} = \widehat{BEC}\left(= 90°\right)$; $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$



$\Rightarrow \Delta ABJ \backsim \Delta EBC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AJ}{CE} \Rightarrow AB.CE = BE.AJ$ (3)

Xét ΔABE và ΔJBC có: $\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$; $\widehat{AEB} = \widehat{JCB}$

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta JBC \Rightarrow \dfrac{AE}{JC} = \dfrac{BE}{BC}$

$\Rightarrow AE.BC = BE.JC$ (4)

Từ (3) và (4) cộng vế với vế: $AB.CE + AE.BC = BE\left(AJ + JC\right) = BE.AC$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $AB = 2\,\text{cm}$; $AC = 3\,\text{cm}$; $BC = 4\,\text{cm}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$

Giải

*** Tìm cách giải.** Về mặt suy luận, muốn chứng minh một góc $\widehat{BAC}$ thành tổng các góc như đề bài. Ta có hai cách suy nghĩ:

Cách 1: trong góc $\widehat{BAC}$ dựng một góc $\widehat{BAD}$ hoặc $\widehat{DAC}$ bằng góc $\widehat{ABC}$ và chứng minh phần còn lại bằng $2.\widehat{ACB}$. Tuy nhiên cách này vẫn gặp khó khăn bởi còn hệ số 2.

Cách 2: trong góc $\widehat{BAC}$ dựng một góc $\widehat{BAD}$ bằng góc $\widehat{ACB}$ và chứng minh phần còn lại bằng $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$. Cách này có tính khả thi. Thật vậy, ta viết $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{ACB}$ nên nếu lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$, thì dễ dàng nhận thấy $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$ nên chúng ta chỉ cần chứng minh tam giác ACD cân tại C là xong.

Với suy luận như trên, chúng ta có hai cách trình bày sau:

*** Trình bày lời giải**

Cách 1. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta CBA\left(g.g\right)$. Suy ra

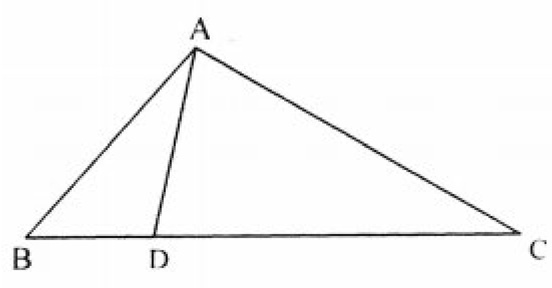
$\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{AB}{CB} \Rightarrow \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow BD = 1\ \text{cm} \Rightarrow CD = BC - BD = 3\ \text{cm}$

$\Rightarrow CD = AC$ nên ΔACD cân tại C, do vậy $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} + 2.\widehat{ACB}$.



Cách 2. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD = 1\,\text{cm}$

$\Rightarrow CD = BC - BD = 3$ cm $\Rightarrow CD = AC$ nên ΔACD cân tại C

Do vậy $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$ (1)

ΔABD và ΔCBA có $\widehat{ABD}$ chung và $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta CBA\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

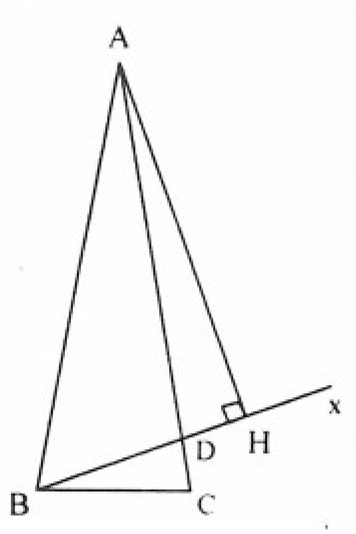
$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC ($AB = AC$) có góc ở đỉnh bằng 20°; cạnh đáy $BC = a$; cạnh bên $AB = b$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Giải

Cách 1.



Dựng tia Bx ở nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A sao cho $\widehat{CBx} = 20°$; tia Bx cắt AC ở D; kẻ $AH \perp Bx$. Tam giác ABC cân tại A, ta có:

$\widehat{A} = 20° \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 80° \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{CBx} = 80° - 20° = 60°$

Suy ra ΔABH có $\widehat{ABH} = 60°$; $\widehat{AHB} = 90° \Rightarrow BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{b}{2}$.

Ta có: $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (định lý Pi-ta-go)

$\Rightarrow AH^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{3b^2}{4}$

ΔBDC có $\widehat{BCD} = 80°$; $\widehat{CBD} = 20° \Rightarrow \widehat{BDC} = 80°$

$\Rightarrow \Delta\, BCD$ cân tại B $\Rightarrow BD = BC = a$,

Do đó $DH = BH - BD = \dfrac{b}{2} - a$.

Nhận thấy: $\Delta ABC \backsim \Delta BDC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{BC}$

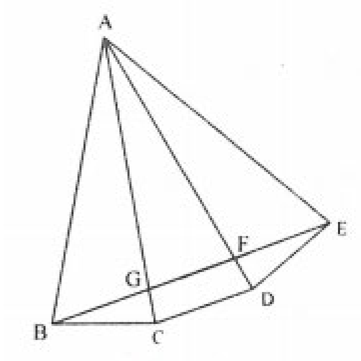
$\Rightarrow CD = \dfrac{BC^2}{AC} = \dfrac{a^2}{b}$, mà $AD = AC - CD = b - \dfrac{a^2}{b}$

Và $AD^2 = AH^2 + DH^2 = \frac{3b^2}{4} + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = b^2 - ab + a^2$.

Vậy $\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 - ab + a^2 \Leftrightarrow b^4 + a^4 - 2a^2b^2 = b^4 - ab^3 + a^2b^2$

$\Leftrightarrow a\left(a^3 + b^3\right) = 3a^2b^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Cách 2.



Dựng tam giác ABE đều sao cho E và C nằm cùng phía so với AB.

Dựng ΔACD cân tại A sao cho D; E nằm cùng phía với AC và $\widehat{CAD} = 20° \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ACD = \Delta ADE\left(c.g.c\right)$.

Gọi F và G là giao điểm của BE với AD AC. Khi đó $BG = EF = a$. Vì $\widehat{ABE} = 60°$ nên $\widehat{CBG} = \widehat{BAC} = \widehat{CBE} = 20°$ và ΔCBG cân tại B.

$\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta CBG\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CG}{BG} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{CG}{a} \Rightarrow CG = \frac{a^2}{b}$.

Ta có: $AG = AC - CG = b - \frac{a^2}{b}$

Ta có: $FG//CD$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{GF}{CD} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow \frac{GF}{a} = \frac{b - \frac{a^2}{b}}{b} \Rightarrow GF = \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$

Mà $BE = BG + GF + FE$

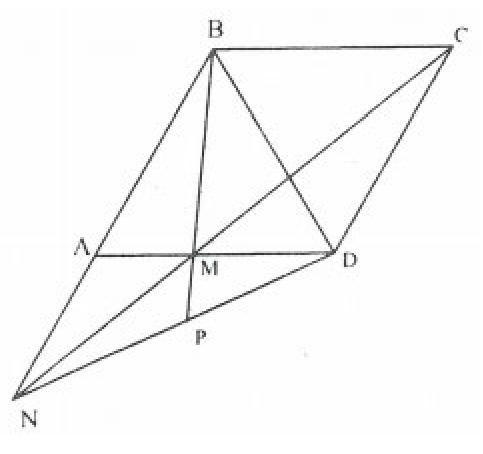
$\Rightarrow b = 2a + \frac{ab^2 - a^3}{b^2} \Leftrightarrow b^3 = 2ab^2 + ab^2 - a^3$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Ví dụ 5. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60°$. Gọi M là một cạnh thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

a) Chứng minh $AB^2 = DM.BN$;

b) BM cắt DN tại P. Tính góc $\widehat{BPD}$.



Giải

a) Ta có: $AM//BC$ (do $AD//BC$), suy ra: $\Delta NAM \backsim \Delta NBC \Rightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{NB}{BC}$

hay $\frac{NA}{AM} = \frac{NB}{AB}$ (1) (vì $BC = AB$).

Ta có: $NA//\mathrm{DC}$ (do $\mathrm{AB}//\mathrm{DC}$), suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{NA}{AM}=\dfrac{CD}{DM}$

Hay $\dfrac{NA}{AM}=\dfrac{AB}{DM}$ (2) (vì $CD=AB$).

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{NA}{AB}=\dfrac{AB}{DM}$ hay $AB^2=DM.BN$.

b) Từ $\dfrac{NB}{AB}=\dfrac{AB}{DM}\Rightarrow\dfrac{NB}{BD}=\dfrac{BD}{DM}$

Xét ΔBND và ΔDBM có $\dfrac{NB}{BD}=\dfrac{BD}{DM}$ và $\widehat{NBD}=\widehat{BDM}=60°$

Suy ra $\Delta BND \backsim \Delta DBM\,(c.g.c)\Rightarrow\widehat{MBD}=\widehat{BND}$

$\Rightarrow\widehat{MBD}+\widehat{MBN}=\widehat{BND}+\widehat{MBN}=60°$

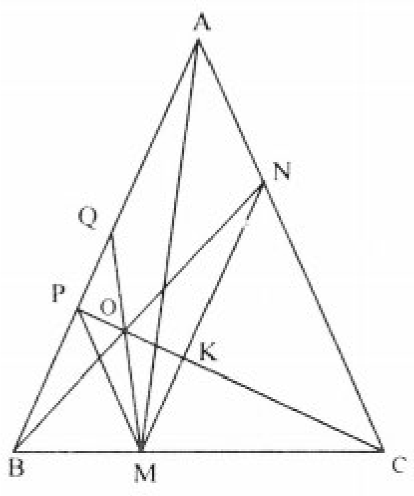
Mà $\widehat{BPD}=\widehat{BND}+\widehat{MBN}$ nên $\widehat{BPD}=60°$

Nhận xét. Với kỹ thuật như trên, bạn có thể giải bài toán sau. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A}=60°$ vẽ đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA tại M và cắt tia đối của tia DA tại N. Gọi K là giao điểm của DM và BN. Tính số đo $\widehat{MKB}$.

Ví dụ 6. Cho ΔABC cân tại A. Lấy M tùy ý thuộc BC, kẻ MN song song với AB (với $N\in AC$), kẻ MP song song với AC (với $P\in AB$). Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{OMP}=\widehat{AMN}$.

Giải

**** Tìm cách giải.*** Nhận thấy $\widehat{BPM}=\widehat{MNC}\Rightarrow\widehat{QPM}=\widehat{ANM}$



Do đó $\widehat{OMP}=\widehat{AMN}\Leftrightarrow\Delta QPM\backsim\Delta ANM$. Mặt khác chúng ta thấy $\Delta\,QPM$ và $\Delta\,ANM$ khó có thể tìm thêm được một cặp góc nữa bằng nhau. Do vậy chúng ta nên tìm cách biến đổi thêm hai cặp cạnh kề với hai góc $\widehat{OMP}$; $\widehat{AMN}$ tỉ lệ là xong.

**** Trình bày lời giải***

Giả sử $MB\le MC$. Gọi Q là giao điểm MO và AB; K là giao điểm CP và MN.

Vì MNAP là hình bình hành nên $\widehat{QPM}=\widehat{ANM}$ (1)

Vì ΔABC cân tại A nên suy ra ΔPBM cân tại P và ΔNCM cân tại N.

Do đó $PB=PM=AN$ và $NC=NM=AP$ kết hợp với $MN//AP$, suy ra:

$\dfrac{PQ}{PM}=\dfrac{PQ}{PB}=\dfrac{KM}{KN}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{NA}{NM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta QPM\backsim\Delta ANM\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{QMP} = \widehat{AMN}$ hay $\widehat{OMP} = \widehat{AMN}$.

Điều phải chứng minh.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$, $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài cạnh BC?

Giải

**** Tìm cách giải.*** Khai thác giả thiết, từ $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$ chúng ta cần dựng thêm yếu tố phụ để vận dụng điều này được. Chúng ta có hai hướng giải:

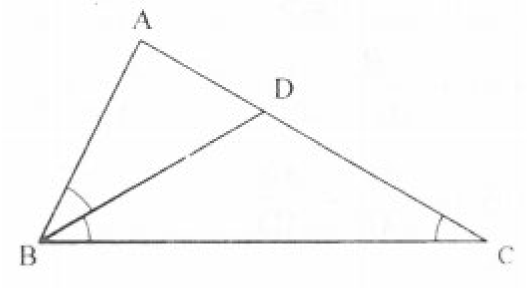
- *Cách 1.* Kẻ đường phân giác BD của góc B để khai thác được góc bằng nhau.

- *Cách 2.* Từ đỉnh C dựng thêm một góc bằng góc B.

Với hai hướng đó chúng ta có hai lời giải sau:

**** Trình bày lời giải***

Cách 1. Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC.



Xét ΔABC và ΔADB có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}\left(= \dfrac{\widehat{ABC}}{2}\right)$

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ADB\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{4^2}{8} = 2$ (cm)

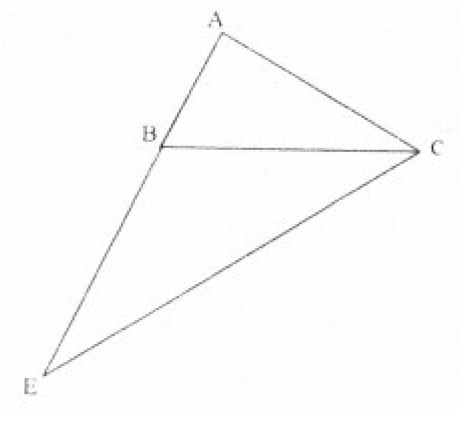
$\Rightarrow CD = 6$ (cm)

ΔABC có BD là đường phân giác nên $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{CD}{AD} \Rightarrow BC = \dfrac{AB.CD}{AD} = \dfrac{4.6}{2} = 12$ (cm)

Cách 2. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A dựng tia Cx sao cho

$\widehat{BCx} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

Gọi E là giao điểm của Cx với đường thẳng AB.



Xét ΔABC và ΔACE có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ABC} = \widehat{ACE}\left(= 2.\widehat{ACB}\right)$

suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ACE\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE = \dfrac{AC^2}{AB} = \dfrac{8^2}{4} = 16$ (cm)

$\Rightarrow BE = 12$ (cm)

Từ $\widehat{ABC} = 2.\widehat{ACB} = 2.\widehat{BCE}$

Suy ra ΔBCE cân tại B, do đó $BC = BE = 12$ (cm)

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 2,5$ cm. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$.

Giải

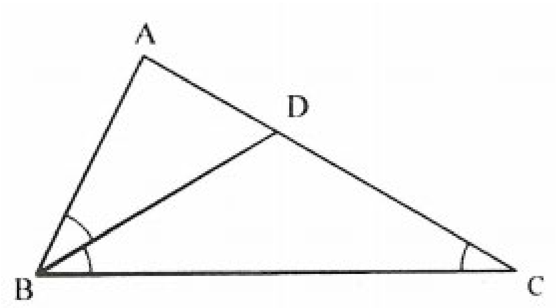
**** Tìm cách giải.*** Bài toán này có nét đảo của *ví dụ 7,* do đó hoàn toàn tự nhiên chúng ta cũng nghĩ tới việc kẻ thêm yếu tố phụ. Để chứng minh $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$, chúng ta cũng có hai hướng sau:

- Cách 1. Dựng phân giác BD và chứng tỏ $\widehat{ABD} = \widehat{C}$.
- Cách 2. Từ đỉnh C dựng thêm một góc bằng góc B và chứng minh cặp góc bằng nhau.

Vì bài toán biết khá nhiều độ dài đoạn thẳng nên chúng ta chứng minh cặp góc bằng nhau bằng cách chứng minh hai tam giác đồng dạng theo trường hợp cạnh-góc-cạnh.

**** Trình bày lời giải***

Cách 1. Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC.



suy ra $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AD + DC} = \dfrac{AB}{AB + BC}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{3} = \dfrac{2}{2 + 2,5} \Rightarrow AD = \dfrac{4}{3}$ (cm).

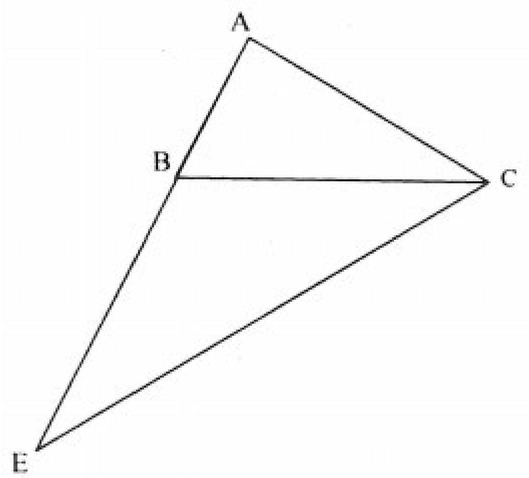
Ta có: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{2}{4/3} = \dfrac{3}{2}, \ \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{2}$

suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$.

Xét ΔABC và ΔADB có $\widehat{A}$ chung, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$ suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ADB\left(c.g.c\right)$

Do đó: $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$, vậy $\widehat{ABC} = 2.\widehat{C}$.

Cách 2. Trên tia đối tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$



suy ra:

$\widehat{ABC} = 2.\widehat{BEC} = 2.\widehat{BCE}$

Ta có $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}; \ \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{3}{2 + 2,5} = \dfrac{2}{3}$

suy ra $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$.

Xét ΔABC và ΔACE có $\widehat{A}$ chung, $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra

$\Delta ABC \backsim \Delta ACE\left(c.g.\text{c}\right)$

do đó $\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{ACE} = 2.\widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BCE}$

Hay $\widehat{ABC} = 2.\widehat{ACB}$.

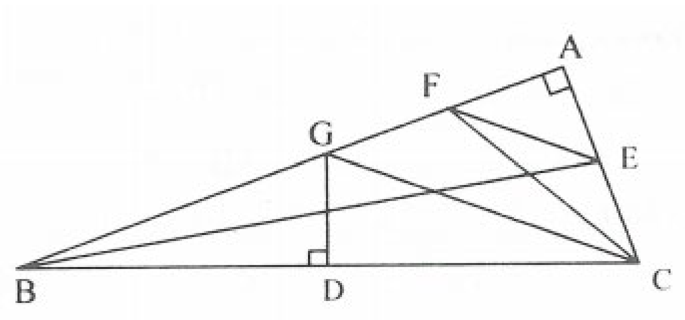
Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$ và $\widehat{B} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC và AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính $\widehat{CFE}$.

(Thi Olympic Toán quốc tế Đài Loan TAIMC, năm 2012)

Giải

*** Tìm cách giải.** Những bài toán tính số đo góc thường khó, trước hết chúng ta nên vẽ hình chính xác, sau đó phân tích giả thiết để dự đoán kỹ thuật kẻ thêm yếu tố phụ. Trong giả thiết chúng ta nhận thấy $\widehat{ACF} = 30° \Rightarrow FC = 2.AF$. Từ $\widehat{B} = 20° \Rightarrow \widehat{C} = 70°$, khi đó $\widehat{BCF} = 40°$, chúng ta có liên tưởng gì góc 40° này với góc 20° và 30° ở đề bài không? Với suy nghĩ ấy, chúng ta lấy điểm G trên AB sao cho $\widehat{BCG} = 20°$ khi đó bài toán tạo nên những yếu tố mới: CF là phân giác góc ACG, tam giác BCG cân tại G. Với hình vẽ chính xác, chúng ta hoàn toàn có thể dự đoán được CG song song với FE. Từ đó định hướng để chứng minh dự đoán ấy bằng định lý Ta-lét đảo.

*** Trình bày lời giải**



Xét ΔABC có $\widehat{A} = 90°$ và $\widehat{B} = 20° \Rightarrow \widehat{C} = 70°$

ΔACF có $\widehat{A} = 90°$ và $\widehat{ACF} = 30°$

$\Rightarrow FC = 2.AF$.

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho GD vuông góc với BC.

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DBG$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC}$; $\widehat{GCB} = \widehat{GBC} = 20° \Rightarrow \widehat{GCF} = 20°$

Mặt khác CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên

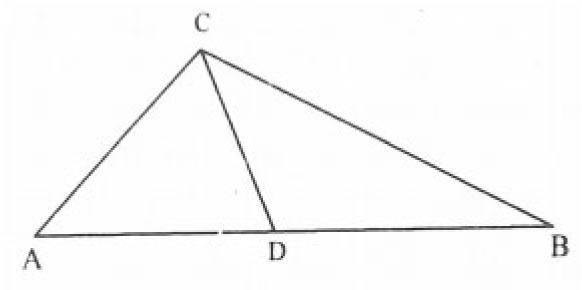
$\dfrac{FC}{FG} = \dfrac{BC}{BG}$; $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC}$

Do đó: $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \dfrac{AF}{FG} = \dfrac{AE}{EC}$

Từ đó ta có: $CD//EF$ (định lý Ta-lét đảo) $\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{GCF} = 20°$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180°$. Tính số đo các cạnh của tam giác biết số đo ấy là ba số tự nhiên liên tiếp.

Giải



Vì $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180° = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 2.\widehat{A} + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A}$ và $\widehat{C} > \widehat{B}$ $\Rightarrow AB > BC$ và $AB > AC$

Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = AC \Rightarrow$ D nằm giữa A và B.

Ta có: ΔACD cân tại A nên $\widehat{ADC} = \dfrac{180° - \widehat{A}}{2}$

Mà $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180° \Rightarrow 180° - \widehat{A} = 2\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \dfrac{2\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)}{2} = \widehat{A} + \widehat{B}$

$\Rightarrow \widehat{CDB} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{C}$

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta CBD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB.BD = AB\left(AB - AC\right)$ (*)

Do AB, BC, AC là ba số nguyên liên tiếp và $AB = \max\left\{AB, BC, \text{AC}\right\}$ nên $AB = BC + 1$ hoặc $AB = BC + 2$.

Trường hợp 1. Nếu $AB = BC + 1$ thì $AC = BC - 1$ thay vào (*), ta có:

$BC^2 - 2.BC - 2 = 0$, không tồn tại BC là số nguyên.

Trường hợp 2. Nếu $AB = BC + 2$ thì $AC = BC + 1$ thay vào (*), ta có:

$BC^2 - BC - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(BC - 2\right)\left(BC + 1\right) = 0 \Leftrightarrow BC = 2$ (vì $BC > 0$).

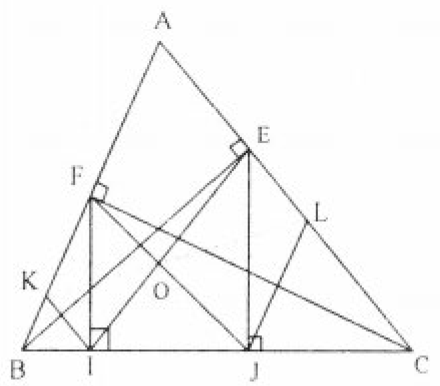
Vậy $BC = 2$; $AC = 3$ và $AB = 4$.

Nhận xét. Vận dụng kỹ thuật trên, bạn có thể làm được bài toán đảo:

Cho tam giác MNP thỏa mãn $PN^2 + MP.MN - MN^2 = 0$. Chứng minh rằng: $3.\widehat{M} + 2.\widehat{N} = 180°$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF. Kẻ FI và EJ cùng vuông góc với BC (I; J thuộc BC). Các điểm K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho $KI//AC$, $LJ//AB$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EI, FJ và KL đồng quy.

Giải



Gọi O là giao điểm của EI và FJ. Ta có:

$\widehat{KFI} = \widehat{FCB}$ (cùng phụ với góc IFC) $= 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{LJC} = \widehat{EJL}$ (1)

Lại có: $\widehat{IKF} = \widehat{ELJ}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta KFI \backsim \Delta LJE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KF}{LJ} = \dfrac{FI}{EJ}$ (3)

Xét ΔFOI và ΔJOE có $\widehat{IFO} = \widehat{EJO}$ (so le trong)

$\widehat{FOI} = \widehat{JOE}$ (đối đỉnh) nên $\Delta FOI \backsim \Delta JOE\left(g.g\right)$ suy ra $\dfrac{FO}{OJ} = \dfrac{FI}{JE}$ (4)

Lại có: $\widehat{KFO} = \widehat{LJO}$ (so le trong) (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\Delta KFO \backsim \Delta LJO\left(c.g.c\right)$. Do đó $\widehat{FOK} = \widehat{JOL}$, mà hai góc ở vị trí đối đỉnh. Suy ra K, O, L thẳng hàng, tức là FJ, EI, KL đồng quy.

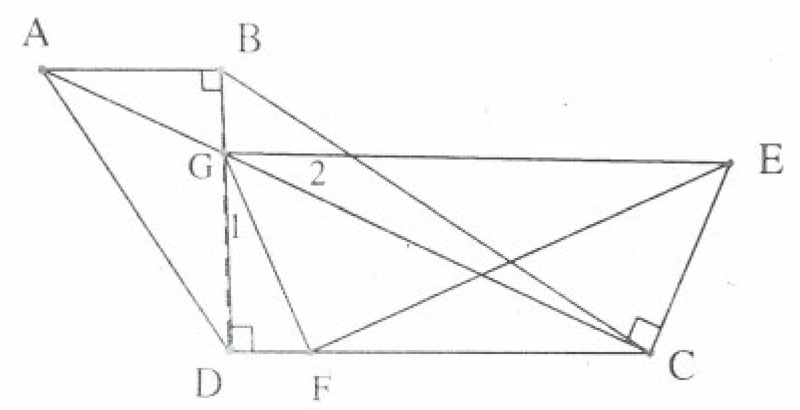
Ví dụ 12. Cho hình thang ABCD $\left(CD > AB\right)$ với $AB//CD$ và $AB \perp BD$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD. Trên đoạn thẳng DC lấy điểm F sao cho $DF = GB$.

a) Chứng minh ΔFDG đồng dạng với ΔECG.

b) Chứng minh $GF \perp EF$.

(Thi tuyển học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Quảng Nam, Năm học 2008-2009)

Giải



a) Ta có: $AB//CD \Rightarrow \dfrac{BG}{AG} = \dfrac{GD}{GC}$. Mà $AG = CE$; $BG = DF \Rightarrow \dfrac{DF}{CE} = \dfrac{GD}{GC}$.

Xét ΔFDG và ΔECG có: $\dfrac{DF}{CE} = \dfrac{GD}{CG}$; $\widehat{GDF} = \widehat{GCE}$ nên $\Delta FDG \backsim \Delta ECG\left(c.g.c\right)$

b) $\Delta FDG \backsim \Delta ECG \Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{G_2}$; $\dfrac{GD}{GF} = \dfrac{GC}{GE}$

Xét ΔGDC và ΔGFE có $\dfrac{GD}{GF} = \dfrac{GC}{GE}$; $\widehat{DGC} = \widehat{FGE}$ (vì $\widehat{G_1} = \widehat{G_2}$)

$\Delta GDC \backsim \Delta GFE\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{GFE} = \widehat{GDC} = 90°$. Do đó $GF \perp FE$.

C. Bài tập vận dụng

15.1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $AE.AC = AF.AB$;

b) Chứng minh rằng: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$;

c) Chứng minh rằng H là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔDEF.

15.2. Cho hình hình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn DB. Gọi H, K là hình chiếu của C trên đường thẳng AB, AD. Chứng minh rằng $\Delta CHK \backsim \Delta BCA$.

15.3. Cho tam giác ABC vuông góc tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I. Chứng minh $AD.BD = BI.DC$.

15.4. Cho tam giác ABC, đường phân giác CD. Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$.

15.5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia BA lấy điểm E (A nằm giữa B và E). Gọi D là điểm đối xứng với E qua đường thẳng BC. Gọi F là giao điểm của đường thẳng CD và AB. Chứng minh rằng $\frac{1}{BC} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BF}$.

15.6. Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Từ A, vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CD cắt CD, BC tương ứng tại E và F. Đường thẳng qua A vuông góc với BD, cắt EF tại M. Chứng minh $ME = MF$.

15.7. Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60^o quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM; EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED;

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

15.8. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DM. Gọi HN vuông góc với DH (N thuộc BC).

a) Chứng minh rằng tam giác DHC đồng dạng với tam giác NHB;

b) Chứng minh rằng $AM.NB = NC.MB$

15.9. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB = 2.AC$ và $\widehat{A} = 2.\widehat{B}$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.

15.10. Cho ΔABC nhọn có AH là đường cao lấy điểm M thuộc đoạn BC, kẻ MK vuông góc với AB và ML vuông góc với AC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt MK, ML tại E và F. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với CE cắt AH tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AIB \backsim \Delta MCE$

b) $\frac{EM}{FM} = \frac{ML}{KM}$ và $\frac{BM}{FM} = \frac{AI}{AC}$;

c) AH, BF, CE đồng qui.

15.11. Cho tam giác ABC có các trung tuyến AD, BE thỏa mãn điều kiện $\widehat{CAD} = \widehat{CBE} = 30°$. Chứng minh ABC là tam giác đều.

15.12. Cho ΔABC. Gọi P là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Một đường thẳng đi qua P vuông góc với CP, cắt AC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2$;

b) $\frac{AM}{AC}+\frac{BN}{BC}+\frac{CP^2}{AC.BC}=1$.

15.13. Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AC>AB\right)$, đường cao AH $\left(H\in BC\right)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD=HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m=AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của góc AHM

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$.

15.14. Trong tam giác ABC, các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho: $\widehat{AFE}=\widehat{BFD}$, $\widehat{BDF}=\widehat{CDE}$, $\widehat{CED}=\widehat{AEF}$.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BDF}=\widehat{BAC}$

b) Cho $AB=5$, $BC=8$, $CA=7$. Tính độ dài đoạn BD.

15.15. Cho ABCD là hình bình hành. Giả sử $\widehat{MAB}=\widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $\widehat{MBC}=\widehat{MDC}$.

15.16. Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}+90^\circ$ và $AC.DB=AD.BC$. Chứng minh $\frac{AB.CD}{AD.BC}=\sqrt{2}$.

15.17. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ điểm M thuộc cạnh BC vẽ $MB\perp AB$; $MQ\perp AC$; $\left(P\in AB;Q\in AC\right)$. Vẽ $PE\perp PQ$; $QE\perp PQ\left(E;F\in BC\right)$. Chứng minh rằng: $BE=CF$

15.18. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BE, CF. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q.

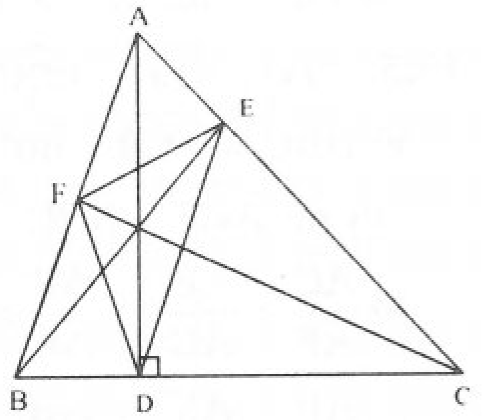
Chứng minh rằng: PQ vuông góc với trung tuyến AM.

15.19. Cho tam giác BAC cân tại A có góc $BAC=20^\circ$. Dựng tam giác đều BDC sao cho D, A cùng phía so với BC. Dựng tam giác DEB cân tại D có góc $EDB=80^\circ$ và C, E khác phía so với DB. Chứng minh tam giác AEC cân tại E.

15.20. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=90^\circ$. Lấy điểm D thuộc đoạn thẳng AC sao cho $CD=2.AD$. Gọi E là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $\widehat{CED}=\widehat{ABC}$. Gọi F là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng $\widehat{DEF}=2.\widehat{ABC}$.

Hướng dẫn giải

15.1.



a) Xét ΔABE và ΔACF có $\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90°$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACF\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AF}\Rightarrow AE.AC=AF.AB$

b) Từ $AE.\mathrm{AC}=\mathrm{AF}.\mathrm{AB}\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$.

Xét ΔAEF và ΔABC có $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\left(c.g.c\right)$

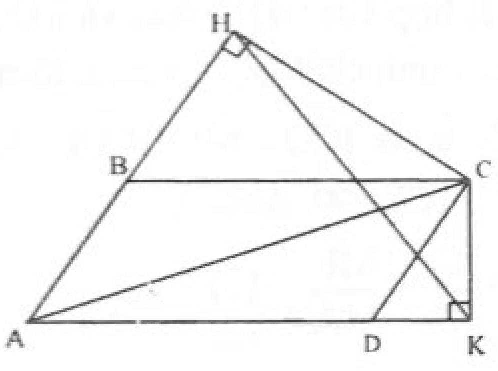
c) Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\Rightarrow \Delta CAB \backsim \Delta CDE\left(g.g\right) \Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{CED}$

Từ đó suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{CED}\Rightarrow$ EB là tia phân giác $\widehat{DEF}$.

Chứng minh tương tự, ta có DA là tia phân giác $\widehat{EDF}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

15.2.



ΔCBH và ΔCDK có:

$\widehat{CHB}=\widehat{CKD}\left(=90°\right).\widehat{HBC}=\widehat{KDC}\left(=\widehat{BCD}\right)$

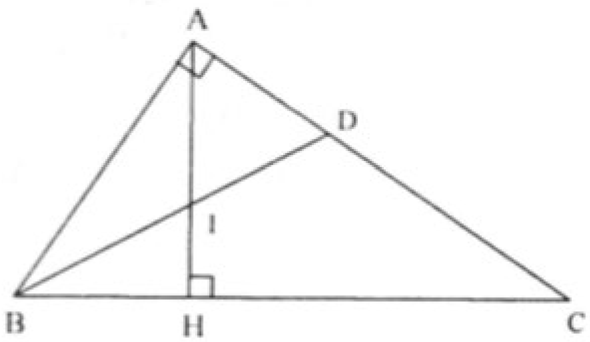
$\Rightarrow \Delta CBH \backsim \Delta CDK\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$

Mà $CD = AB$ nên $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$.

ΔCHK và ΔBCA có $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$

Và $\widehat{ABC} = \widehat{HCK}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$) suy ra $\Delta CHK \backsim \Delta BCA\left(c.g.c\right)$.

15.3.



ΔIAB và ΔDCB có $\widehat{ABI} = \widehat{CBD}$; $\widehat{IAB} = \widehat{DCB}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

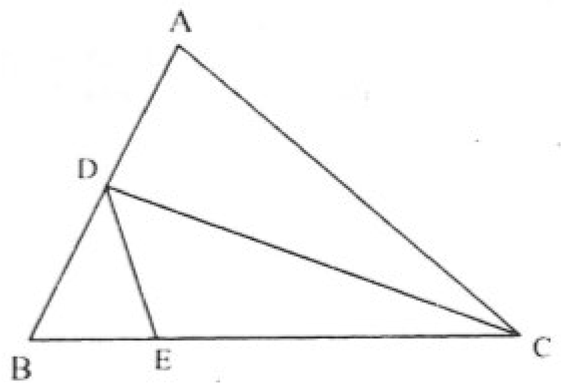
$\Rightarrow \Delta IAB \backsim \Delta DCB \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BI}{BD}$.

ΔABC có BD là đường phân giác

Nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$.

Do đó: $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow AD.BD = BI.DC$.

15.4.



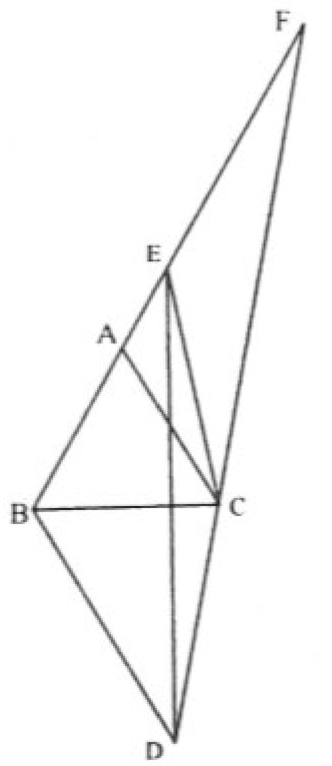
Ta có $\widehat{CDB} > \widehat{A}$ (tính chất góc ngoài), do đó trên cạnh BC lấy E sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{A}$.

ΔACD và ΔDCE có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$; $\widehat{A} = \widehat{CDE}$

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta DCE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CD}{CE}$

$\Rightarrow CD^2 = AC.CE < AC.BC$

15.5.



Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{EBC} = 60°$

Vì $\widehat{DBC} = \widehat{ACB} = 60°$ nên $AC // \text{BD}$.

Suy ra: $\widehat{ACF} = \widehat{BDC} = \widehat{AEC} \Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta ACF\left(g.g\right)$

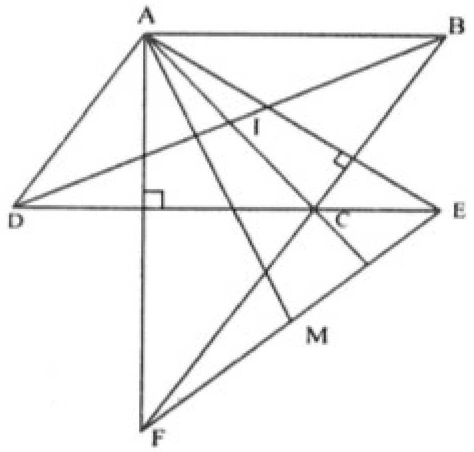
$$\Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AB + AF} = \frac{AE}{AB + AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{AB}{BF} = 1 - \frac{AB}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF} + \frac{AB}{BE} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BF} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{AB}$$

$\Rightarrow \frac{1}{BD} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{BC}$. Điều phải chứng minh.

15.6.



Từ giả thiết suy ra C là trực tâm ΔAEF nên $AC \perp EF$.

Kết hợp với $BD \perp AM$ và $ED \perp AF$

theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có: $\widehat{ICD} = \widehat{MFA}$; $\widehat{CDI} = \widehat{MAF}$

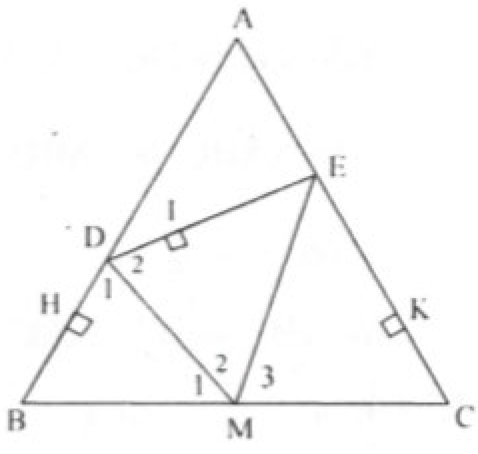
$\Rightarrow \Delta ICD \backsim \Delta MFA$

$\Rightarrow \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MF}{MA}$ (1)

Tương tự $\Delta ICB \backsim \Delta MEA\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{ME}{MA}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với giả thiết $IB = ID$ suy ra $ME = MF$.

15.7.



a) Trong tam giác BDM ta có $\widehat{D_1} = 120° = \widehat{M_1}$

Vì $\widehat{M_2} = 60°$ nên ta có: $\widehat{M_3} = 120° - \widehat{M_1}$

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{M_3}$ mà $\widehat{B} = \widehat{C} = 60°$

Do đó $\Delta BMD \backsim \Delta CEM$ (1)

Suy ra $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{CM}{CE}$, từ đó: $BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$ mà $BM = CM$ nên ta có: $\frac{BD}{BM} = \frac{MD}{EM}$

Do đó $\Delta BMD \backsim \Delta MED$.

Từ đó suy ra: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, do đó DM là tia phân giác của góc BDE.

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của góc CED.

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC.

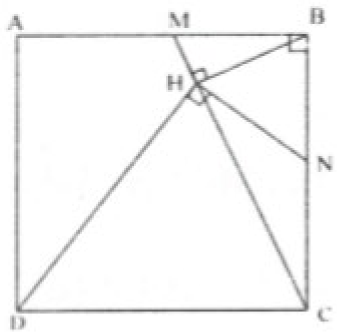
Theo tính chất đường phân giác, ta có: $DH = DI, EI = EK \Rightarrow AH = AK$.

Từ đó suy ra chu vi tam giác ADE bằng:

$AD + DE + EA = AD + DH + EK + EA = 2AH$. Vậy chu vi tam giác ADE không đổi.

15.8.

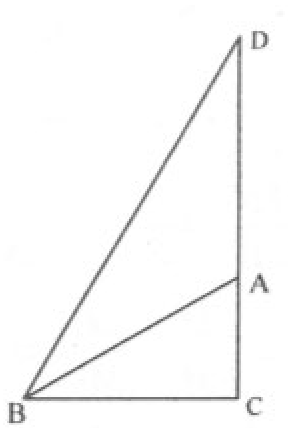
a)



Xét ΔDHC và ΔNHB có: $\widehat{DHC} = \widehat{NHB}\left(= 90° - \widehat{CHN}\right)$; $\widehat{HCD} = \widehat{HBC}\left(= 90° - \widehat{BCH}\right)$

Suy ra: $\Delta DHC \backsim \Delta NHB\left(g.g\right)$

b)



Xét ΔMBH và ΔBCH có: $\widehat{MHB} = \widehat{BHC}\left(= 90°\right)$; $\widehat{MBH} = \widehat{HCB}\left(= 90° - \widehat{CBH}\right)$

Suy ra $\Delta MBH \backsim \Delta BCH\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{HB}{HC}$ (1)

Mà $\Delta DHC \backsim \Delta NHB\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{NB}{DC}=\dfrac{HB}{HC}$ (2) và $BC=CD$

nên từ (1) và (2), suy ra: $MB=NB \Rightarrow AM=CN$, suy ra $AM.NB=NC.MB$.

15.9. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD=AB$.

Từ đó suy ra $DC=3.AC$ và $\widehat{BAC}=2\widehat{BDA}$ nên $\widehat{BDC}=\widehat{ABC}$.

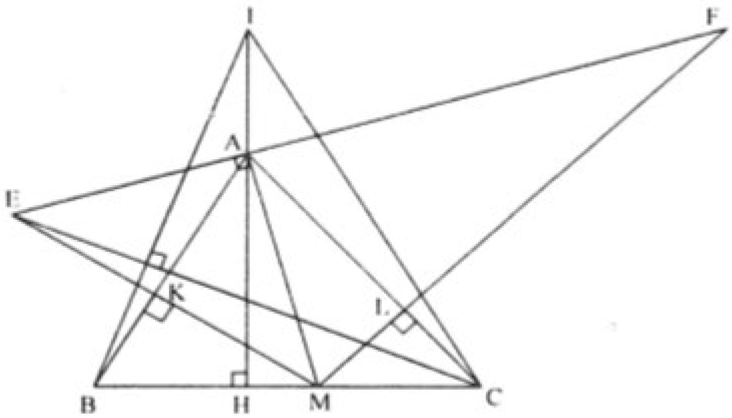
Từ đó $\Delta ABC \backsim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC}{DC} \Rightarrow BC^2=DC.AC$

$\Rightarrow BC^2=3.AC^2 \Rightarrow BC^2+AC^2=4.\mathrm{AC}^2$

nên $AB^2=BC^2+AC$. Vậy ΔABC là tam giác vuông tại C.

15.10.

a)



Ta có: $\widehat{BIA}=\widehat{MCE}\left(=90°-\widehat{IBH}\right)$ (1).

Lại có: $\widehat{IAB}+\widehat{BAH}=180°; \widehat{CME}+\widehat{EMB}=180°$; và

$\widehat{BAH}=\widehat{EMB}\left(=90°-\widehat{ABC}\right) \Rightarrow \widehat{IAB}=\widehat{CME}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta IAB \backsim \Delta MCE\left(g.g\right)$

b) ΔMAK và ΔMEA có $\widehat{MKA}=\widehat{MAE}\left(=90°\right), \widehat{AME}$ chung

$\Rightarrow \Delta MAK \backsim \Delta MEA\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{MA}{ME}=\dfrac{MK}{MA} \Rightarrow MA^2=ME.MK$ (3).

Tương tự: $\Delta MAL \backsim \Delta\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{MA}{MF}=\dfrac{ML}{MA} \Rightarrow MA^2=MF.ML$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $ME.MK=MF.ML \Rightarrow \dfrac{EM}{FM}=\dfrac{ML}{KM}$.

Ta có: $\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\dfrac{AB.MK}{AC.ML}$

Mặt khác $\dfrac{EM}{FM}=\dfrac{ML}{MK} \Rightarrow \dfrac{MK}{ML}=\dfrac{MF}{ME}$

Suy ra $\frac{MB}{MC}=\frac{AB.MF}{AC.ME}\Rightarrow\frac{MB}{MF}=\frac{AB.MC}{AC.ME}$ (5)

Mặt khác $\Delta AIB\backsim\Delta MCE$, suy ra $\frac{MC}{ME}=\frac{AI}{AB}$ (6)

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{MB}{MF}=\frac{AB.AI}{AC.AB}=\frac{AI}{AC}$

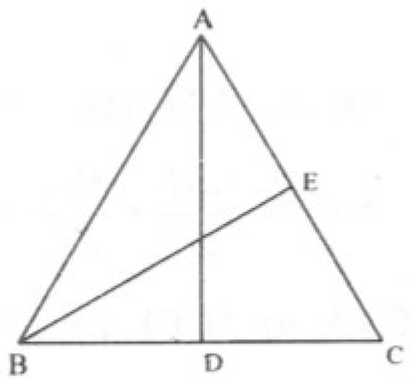
c) ΔMBF và ΔAIC có $\frac{MB}{AI}=\frac{MF}{AC}$

và $\widehat{IAC}=\widehat{BMF}\Rightarrow\Delta MBF\backsim\Delta AIC\left(c.g.c\right)\Rightarrow\widehat{AIC}=\widehat{MBF}$

mà $\widehat{AIC}+\widehat{ICB}=90°\left(AI\perp BC\right)\Rightarrow\widehat{MBF}+\widehat{ICB}=90°$ hay BF vuông góc với CI.

Tam giác IBC có IH, BF, CE là đường cao, suy ra điều phải chứng minh.

15.11.



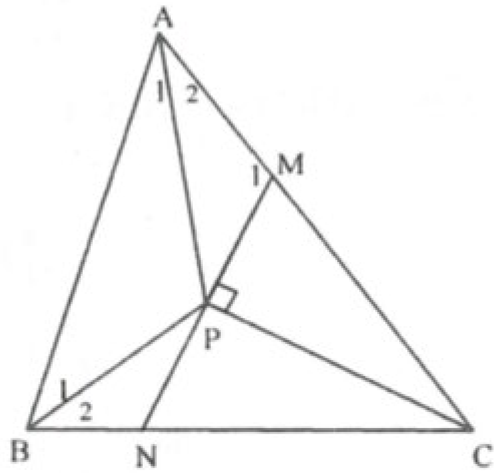
Ta có: $\Delta ADC\backsim\Delta BEC\left(g.g\right)$,

suy ra $\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CE}=\frac{\frac{1}{2}CB}{\frac{1}{2}CA}=\frac{CB}{CA}\Rightarrow CA^2=CB^2\Rightarrow CA=CB$ (1)

$\Rightarrow CA=2.CD$. Mặt khác $\widehat{DAC}=30°\Rightarrow\widehat{C}=60°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ABC là tam giác đều

15.12.



a) Ta có: $\widehat{APB} = 180° - \widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 180° - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}$

$= \frac{360° - \widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \frac{180° + \widehat{C}}{2} = \frac{180° + \widehat{C}}{2} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Xét ΔCMP có $\widehat{M_1} = \widehat{MPC} + \widehat{MCP} \Rightarrow M_1 = 90° + \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{M_1}$.

ΔAPB và ΔAMP có $\widehat{APB} = \widehat{M_1}; \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \Delta APB \backsim \Delta AMP$.

$\Rightarrow \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AM.AB = AP^2$. (1)

Tương tự, ta có: $\Delta APB \backsim \Delta PNB (g.g) \Rightarrow \frac{BN}{BP} = \frac{BP}{AB}$

$\Rightarrow BN.AB = BP^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2$, điều phải chứng minh.

b) Xét $\Delta AMP \backsim \Delta APB$ (chứng minh trên); $\Delta APB \backsim \Delta PNB$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta AMP \backsim \Delta PNB \Rightarrow \frac{AM}{PN} = \frac{MP}{BN} \Rightarrow AM.BN = PN.MP$

hay $AM.BN = MP^2$

ΔCMN có CP là phân giác, CP là đường cao nên ΔCMN cân tại C

$\Rightarrow CM = CN; MP = PN$.

Xét $AM.BC + BN.AC + CP^2 = AM.BC + BN.AC + CM^2 - MP^2$

$= AM.BC + BN.AC + CM^2 - AM.BN$

$= AM.(BC - BN) + BN.AC + CM^2$

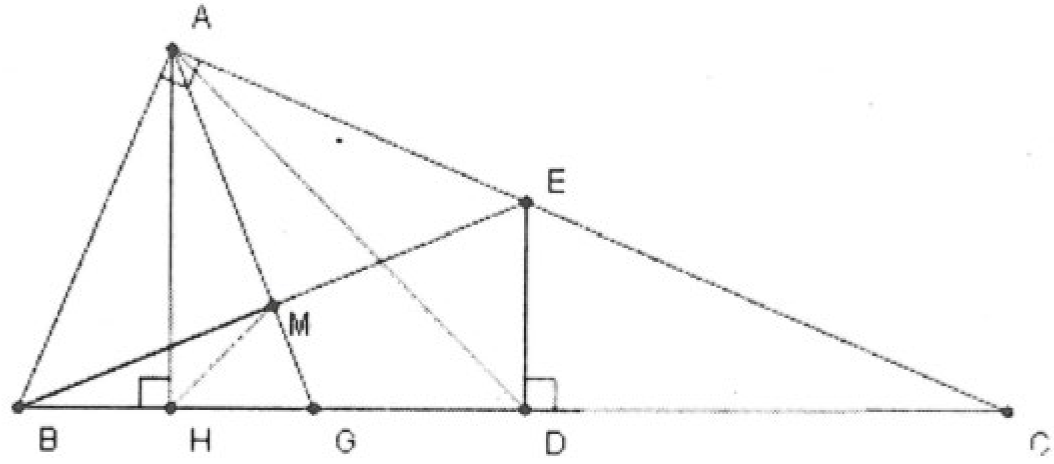
$= CM.(AM + CM) + BN.AC$

$= CM.AC + BN.AC = AC.(CM + BN) = AC.BC$

Do đó: $AM.BC + BN.AC + CP^2 = AC.BC$.

Suy ra $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{CP^2}{AC.BC} = 1$, điều phải chứng minh.

15.13.



a) ΔCDE và ΔCAB có: $\widehat{CDE} = \widehat{CAB} = 90°$, $\widehat{DCE}$ chung,

suy ra $\Delta CDE \backsim \Delta CAB(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$

Xét ΔADC và ΔBEC có: $\widehat{ACB}$ chung, $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta BEC(c.g.c)$

Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135°$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết).

Nên $\widehat{AEB} = 45°$ do đó tam giác ABE vuông cân tại A.

Suy ra: $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

b) Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}.\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}.\frac{AD}{AC}$ (do $\Delta BEC \backsim \Delta ADC$)

mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}.\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}.\frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE}$ (do $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$).

Xét ΔBHM và ΔBEC có $\frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE}$ và $\widehat{CBE}$ chung

Do đó $\Delta BHM \backsim \Delta BEC(c.g.c)$, suy ra:

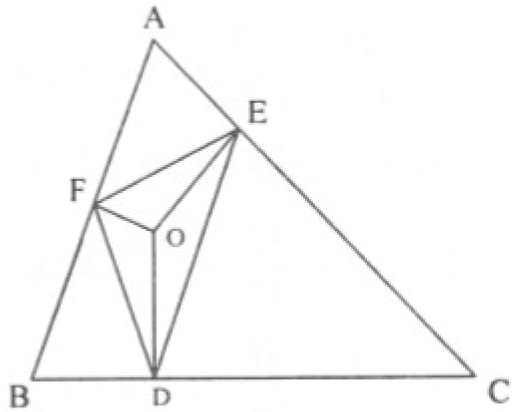
$\widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135° \Rightarrow \widehat{AHM} = 45°$.

c) Ta có AG còn là phân giác góc $BAC \Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$.

$\Delta ABC \backsim \Delta DEC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HD}(ED // AH) = \frac{HD}{HC}$

$$\Rightarrow \frac{GB}{GC}=\frac{HD}{HC}\Rightarrow \frac{GB}{GB+GC}=\frac{HD}{HD+HC}\Rightarrow \frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}.$$

15.14.



a) Đặt $\widehat{AFE}=\widehat{BFD}=\omega, \widehat{BDF}=\widehat{CDE}=\alpha, \widehat{CED}=\widehat{AEF}=\beta$.

Ta có: $\widehat{BAC}+\beta+\omega=180^\circ$ (*)

Gọi O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF. Suy ra OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

$\Rightarrow \widehat{OFD}+\widehat{OED}+\widehat{ODF}=90^\circ$ (1)

Ta có: $\widehat{OFD}+\omega+\widehat{OED}+\beta+\widehat{ODF}+\alpha=270^\circ$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \alpha+\beta+\omega=180^\circ$ (**)

(*) và (**) $\Rightarrow \widehat{BAC}=\alpha=\widehat{BDF}$.

b) Chứng minh tương tự câu a), ta có:

$\widehat{B}=\beta, \widehat{C}=\omega \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta DBF \backsim \Delta DEC \backsim \Delta ABC$

Suy ra

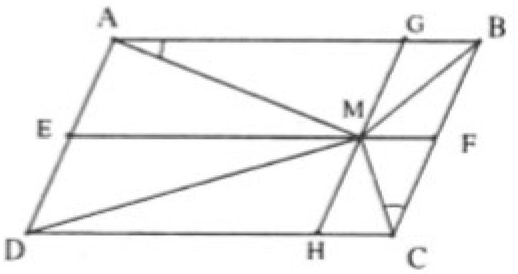
$$\begin{cases} \dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{CD}{CE}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{7}{8} \\ \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7AE=5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7(7-CE)=5(5-BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD=\dfrac{5BF}{8} \\ CD=\dfrac{7CE}{8} \\ 7CE-5BF=24 \end{cases}$$

$\Rightarrow CD-BD=3$ (3)

Ta lại có: $CD+BD=8$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow BD=2,5$.

15.15.



Kẻ từ M các đường thẳng song song với các cạnh AB, BC cắt các cạnh tại E, F, G, H (hình vẽ)

Ta có: $\widehat{AGM} = \widehat{CFM}\left(= \widehat{ABC}\right)$

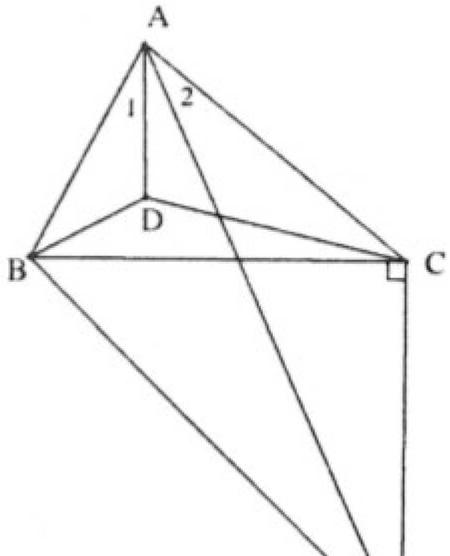
Mặt khác $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ do đó $\Delta AGM \backsim \Delta CFM$

$\Rightarrow \dfrac{AG}{CF} = \dfrac{MG}{MF}$. Mặt khác, $AG = DH; CF = MH;$ MG = FB nên $\dfrac{DH}{MH} = \dfrac{BF}{MF}$ (1)

Ta lại có: $\widehat{DHM} = \widehat{BFM}\left(= \widehat{BCD}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta DHM \backsim \Delta BFM \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MBC}$

15.16.



Về phía ngoài ΔABC vẽ ΔBCE vuông cân tại C

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACE}\left(= \widehat{ACB} + 90°\right)$

Mà $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ (vì $AC.BD = AD.BC$)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{CE}$ do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE\left(c.g.c\right)$ (1)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAC}$

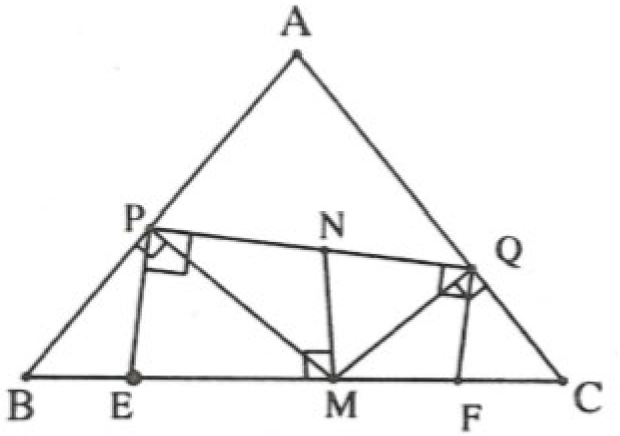
Từ (1) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$ do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ADC\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{DC}\Rightarrow AB.CD=AD.BE$.

Mặt khác, ΔABE vuông cân nên $\text{BE}=\sqrt{2}.BC$.

Do đó $AB.CD=\sqrt{2}.AD.BC$ hay $\dfrac{AB.CD}{AD.BC}=\sqrt{2}$.

15.17.



Lấy N trên PQ sao cho $MN\perp BC$.

Ta có: $\widehat{PBE}=\widehat{PMN}$ (cùng phụ với $\widehat{PMB}$)

$\widehat{BPE}=\widehat{MPN}$ (cùng phụ với $\widehat{EPM}$)

nên $\Delta PBE \backsim \Delta PMN\left(g.g\right)$

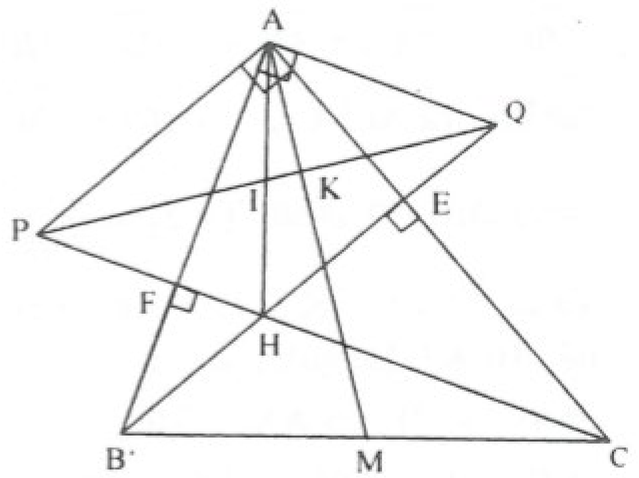
$\Rightarrow \dfrac{BE}{MN}=\dfrac{BP}{MP}\Rightarrow BE=MN.\dfrac{BP}{MP}$ (1)

Tương tự, ta có: $CF=MN.\dfrac{CQ}{MQ}$ (2)

Mặt khác $\Delta BPM \backsim \Delta CQM\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{BP}{MP}=\dfrac{CQ}{MQ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $BE=CF$.

15.18.



Gọi H là giao điểm của BE và CF. Gọi I là giao điểm của AH và PQ.

Ta có: $\widehat{ABQ} = \widehat{ACP}\left(= 90° - \widehat{BAC}\right); \widehat{BAQ} = \widehat{PAC}$

suy ra $\Delta ABQ \backsim \Delta ACP\left(g.g\right)$

$\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AP}{AC}$.

Mặt khác APHQ là hình bình hành nên $AP = HQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{HQ}{AC}$.

Ta lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{AQH}\left(= 180° - \widehat{PAQ}\right)$ suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta QHA\left(c.g.c\right)$

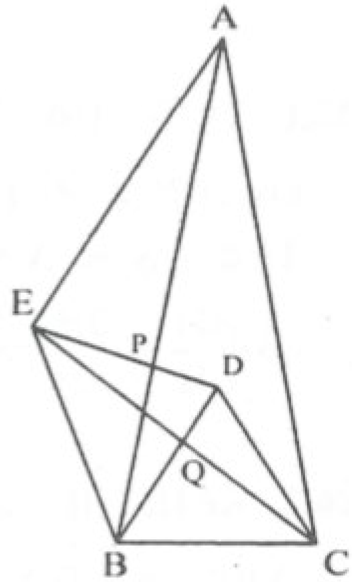
$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{QAH}; \dfrac{AB}{QA} = \dfrac{BC}{AH} = \dfrac{BM}{AI}$

(vì $BC = 2.BM.AH = 2.AI$).

Do đó: $\Delta ABM \backsim \Delta QAI\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{AQI}$

$\Rightarrow \widehat{QAM} + \widehat{AQI} = 180° \Rightarrow AM \perp PQ$

15.19.



Gọi P là giao điểm của AB và DE; Q là giao điểm của BD và CE.

ΔDEC có $DC = DE\left(= DB\right)$ và $\widehat{EDC} = 60° + 80° = 140°$

nên $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = \dfrac{1}{2}\left(180° - \widehat{EDC}\right) = 20°$.

Ta có: $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABD} = 20°$.

ΔBDP và ΔEDQ có $\widehat{DEQ} = \widehat{DBP} = 20°; BD = ED; \widehat{EDB}$ chung

$\Rightarrow \Delta BDP = \Delta EDQ\left(c.g.c\right) \Rightarrow EQ = BP; PD = DQ$.

ΔBPD và ΔABC có:

$\widehat{PDB} = \widehat{ABC} = 80°; \widehat{DBA} = \widehat{BAC} = 20° \Rightarrow \Delta BPD \backsim \Delta ABC\left(g.g\right)$

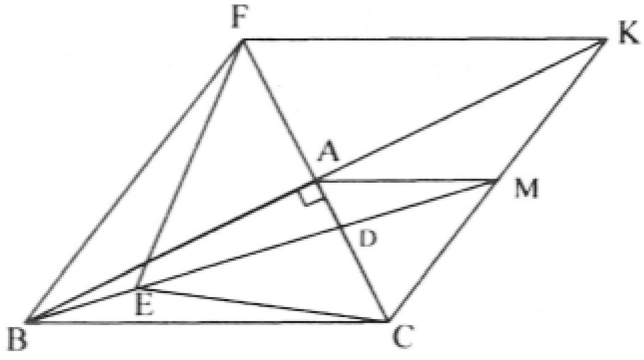
$\Rightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{BC}{PD} = \dfrac{BD}{PD} = \dfrac{ED}{PD}$ hay $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{ED}{PD} \Rightarrow AE//BD$ (định lý Pa-lét đảo)

$\Rightarrow \widehat{EAP} = \widehat{PBD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{EAP} = 20° \Rightarrow \widehat{EAC} = 40°$.

Mặt khác $\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 40° \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACE}$

$\Rightarrow \Delta ACE$ cân tại E.

15.20.



Gọi K là điểm đối xứng với B qua A. Gọi M là giao điểm của BD và CK.

ΔBCK có CA là đường trung tuyến $\left(AB = AK\right)$, mà $CD = 2.AD$ nên D là trọng tâm tam giác

$\Rightarrow MC = MK$. ΔBCK có $AK = AB, MC = MK$ nên AM là đường trung bình

$\Rightarrow AM // BC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{EBC}$ mà

$\widehat{ABC} = \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = \widehat{DEC} - \widehat{EBC} = \widehat{ECB}$

ΔAMB và ΔEBC có $\widehat{AMB} = \widehat{EBC}, \widehat{ABM} = \widehat{ECB}$

$\Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta EBC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{BE}{AM}$.

Ta có: $AB = AK, AC = AF$ và $BK \perp CF$ nên BCKF là hình thoi

$\Rightarrow BC = CK \Rightarrow AM = MC$.

$\dfrac{BF}{MB} = \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{BE}{AM} = \dfrac{BE}{MC} \Rightarrow \dfrac{BF}{MB} = \dfrac{BE}{MC}$

mà $\widehat{EBF} = \widehat{CMB} \Rightarrow \Delta EBF \backsim \Delta CMB\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{MCB}$

kết hợp với BCKF là hình thoi nên:

$\widehat{DEF} = 180° - \widehat{BEF} = 180° - \widehat{MCB} = \widehat{FBC} = 2.\widehat{ABC}$ hay $\widehat{DEF} = 2.\widehat{ABC}$.

Chương

Chuyên đề 16

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Hai tam giác vuông đồng dạng nếu:*

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia;

- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia;

- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

2. *Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác vuông đồng dạng.*

- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số động dạng.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác ACE và CBF tương ứng vuông góc tại E; F và thỏa mãn $\widehat{ACE} = \widehat{CBA}$; $\widehat{BCF} = \widehat{CAB}$. Chứng minh rằng: $CK^2 = AE.BF$.

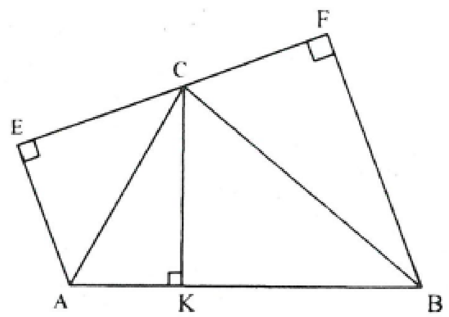
Giải

*** Tìm cách giải.** Để chứng minh $CK^2 = AE.BF$ chúng ta không thể vận dụng định lý Ta-lét hay xét một cặp tam giác đồng dạng là xong ngay được. Do vậy, chúng ta suy luận để tạo ra CK^2, chúng ta cần ghép CK vào hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi cặp tam giác đồng dạng đó đều biểu thị CK dưới dạng biểu thức (chứa AE hoặc BF). Dễ dạng nhận thấy có hai cặp tam giác đồng dạng thỏa mãn điều kiện trên.

*** Trình bày lời giải**

ΔACK và ΔCBF có : $\widehat{CKA} = \widehat{BFC} = 90°$; $\widehat{CAK} = \widehat{BCF}$

$\Rightarrow$ ΔACK # ΔCBF (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CK}{CA} = \dfrac{BF}{BC}$ (1).



Tương tự, ta có: ΔBCK # ΔCAE (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{AE}{AC}$ (2)

Nhân từng vế của (1) và (2) ta được:

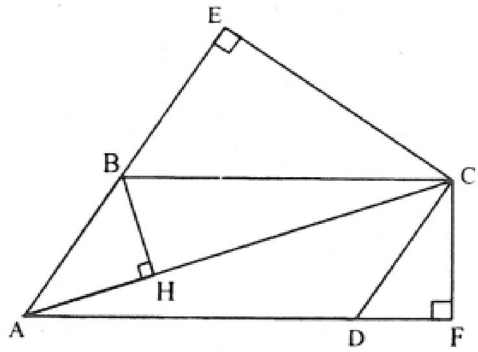
$\dfrac{CK}{CA}.\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{BF}{BC}.\dfrac{AE}{AC} \Rightarrow CK^2 = AE.BF$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABDC (AC > BD) vẽ CE vuông góc với AB tại E, vẽ CF vuông góc với AD tại F. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Giải

***Tìm cách giải.** Để chứng minh $AB.AE + AD.\text{A}F = AC^2$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải cần tách ra một tổng: $AB.AE + AD.EF = AC.x + \text{AC}.\text{y}$ với $x + y = AC$. Do vậy ta chọn điểm H thuộc AC khi đó $x = AH, y = HC$ và chứng minh $AB.AE = AC.AH,\ AD.EF = AC.CH$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm H sao cho ΔABH # ΔACE là xong. Nhận thấy tam giác ACE vuông tại E, nên tất yếu cần kẻ BH vuông góc với AC.

*** Trình bày lời giải**



Vẽ $BH \perp AC\left(H \in AC\right)$

Xét ΔABH và ΔACE có

$\widehat{ABH} = \widehat{AEC} = 90°; \widehat{BAC}$ chung.

Suy ra $\Delta ABH \# \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AH$. (1)

Xét ΔCHB và ΔCAF có $\widehat{BCH} = \widehat{CAF}$ (so le trong); $\widehat{CHB} = \widehat{CFA}\left(= 90°\right)$

Suy ra $\Delta CHB \# \Delta CAF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CH}{AF} \Rightarrow BC.\text{A}F = AC.CH$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.\text{A}F = AC.AH + AC.CH \Rightarrow AB.AE + AD.\text{A}F = AC\left(AH + CH\right) = AC^2$.

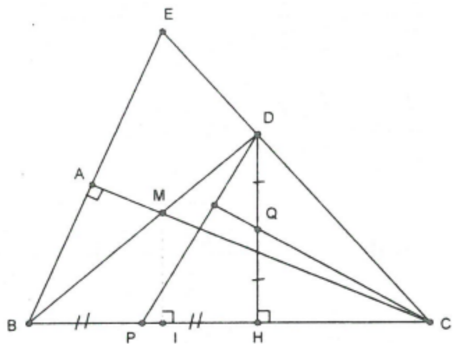
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BS tại E.

a) Chứng minh: $EA.EB = ED.EC$.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

c) Kẻ $DH \perp BC, \left(H \in BC\right)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, DH. Chứng minh $CQ \perp PD$.

Giải



a) Chứng minh $EA.EB = ED.EC$

Xét ΔEBD và ΔECA có:

$\widehat{ADB} = \widehat{EAC} = 90°, \widehat{BEC}$ chung nên

$\Delta EBD \# \Delta ECA$ (g-g)

Từ đó suy ra

$\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{ED}{EA} \Rightarrow EA.EB = ED.EC$

b) Kẻ MI vuông góc với BC $\left(I \in BC\right)$.

Ta có: ΔBIM và ΔBDC có $\widehat{BIM} = \widehat{BDC} = 90^\circ$, $\widehat{MBC}$ chung, nên:

$\Delta BIM \# \Delta BDC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM.BD = BC.BI$. (1)

Tương tự: $\Delta ACB \# \Delta ICM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CI$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

$BM.BD + CM.CA = BC.BI + BC.CI = BC\left(BI + CI\right) = BC^2$ (không đổi)

c) Xét $\Delta BHD \# \Delta DHC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{2.HP}{2.HQ} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{HP}{HQ} = \frac{HD}{HC}$

$\Rightarrow \Delta HPD \# \Delta HQC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PDH} = \widehat{QCH}$

Mà $\widehat{HDP} + \widehat{DPC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HCQ} + \widehat{DPC} = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho BEFP là hình bình hành. Biết rằng diện tích ΔAEF và CFP lần lượt là $16cm^2$; $25cm^2$. Tính diện tích ΔABC .

Giải

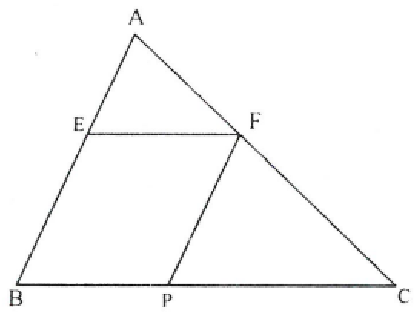
*** Tìm cách giải.** Khi vẽ hình xong, chúng ta có hai hướng suy luận:

Vì tam giác AEF, FPC cùng đồng dạng với tam giác ABC nên chúng ta tìm mối liên hệ giữa tỷ số hai tam giác đồng dạng.

Hướng thứ hai, để tính diện tích tam giác ABC, chúng ra tìm cách tính diện tích hình bình hành. Nhận thấy tam giác BEF và BPF có diện tích bằng nhau, mặt khác tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F; tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F. sử dụng tính chất đó, kết hợp với định lý Ta-lét, chúng ta có lời giải hay.

*** Trình bày lời giải**

Cách 1. Ta có: $\Delta AEF \# \Delta ABC$; $\Delta FPC \# \Delta ABC$ nên:



$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{AEF}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC}$

$\frac{S_{FPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CP}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{CP}{BC}$

Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC} + \frac{CP}{BC} = 1$

Hay $\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}} = 4 + 5 \Rightarrow S_{ABC} = 9^2 = 81cm^2$.

Cách 2. Đặt $S_{BFE} = S_{BFP} = x \ cm^2$.

Tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F, suy ra:

$\frac{S_{FEA}}{S_{FEB}} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{AE}{BE}$;

Tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F, suy ra:

$\frac{S_{FBP}}{S_{FPC}} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{BP}{CP}$.

Áp dụng định lý Ta-let, ta có: $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{25}{x} \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$.

Vậy $S_{ABC} = 16 + 20 + 20 + 25 = 81\ cm^2$.

Nhận xét. Từ kết quả

$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}} \Rightarrow S_{ABC} = (a+b)^2 \Rightarrow S_{BEFP} = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$

Từ đó ta có thể giải được bài toán sau:

Cho tam giác ABC. Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho BEFP là hình bình hành. Đặt $S_{AEF} = a^2; S_{CFP} = b^2$ (với $a;b > 0$).

a) Tính diện tích hình bình hành BEFP.

b) Xác định vị trí điểm E, F, P trên AB, AC, BC để diện tích hình bình hành BEFP đại giá trị lớn nhất.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ MN //BC, PQ // AB, IK // AC. ($I, M \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, K \in BC$). Biết rằng:

$S_{IMF} = 9cm^2; S_{PFN} = 16cm^2; S_{FQK} = 25cm^2$. Tính diện tích ΔABC.

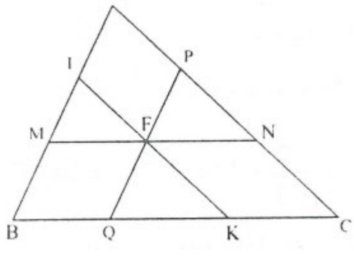
Giải

*** Tìm cách giải.** Với lối tư duy như ví dụ trên, chúng ta hoàn toàn nghĩ tới hai cách giải. Song trong ví dụ này sẽ trình bày một cách giải, mà bản chất của bài toán là vận dụng kết quả $\frac{MF}{BC} + \frac{QK}{BC} + \frac{FN}{BC} = 1$ kết hợp với tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng,

*** Trình bày lời giải**

Nhận thấy BMFQ, CNFK là các hình bình hành.

Ta có: ΔFQK # ΔABC; ΔIMF # ΔABC; ΔPFN # ΔABC



Thì $\frac{\sqrt{S_{IMF}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{MF}{BC}$;

$\frac{\sqrt{S_{PQK}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{QK}{BC}$;

Và $\dfrac{\sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\dfrac{FN}{BC}$;

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{PQK}}+\sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\dfrac{MF+QK+FN}{BC}=1$

$\Rightarrow \sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{PQK}}+\sqrt{S_{PFN}}=3+5+4=12$

$\Rightarrow S_{ABC}=144\,cm^2$.

Nhận xét: Như vậy, với các giải trên, chúng ta hoàn toàn làm được bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ $MN//BC; PQ//AB; IK//AC$ $\left(I,M\in AB;N,P\in AC;Q,K\in BC\right)$.

Đặt $S_{IMF}=a^2;S_{PFN}=b^2;\ S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Chứng minh rằng: $S_{ABC}=\left(a+b+c\right)^2$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ MN // BC, PQ // AB, IK // AC ($I,M\in AB$, $N,P\in AC$; $Q,K\in BC$). Đặt diện tích tam giác ABC là S. Tìm vị trí điểm F để tổng $\mathrm{T}=\mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}$ đạt giá trị lớn nhất.

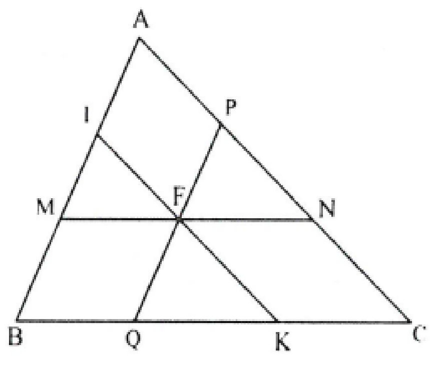
Giải

*** Tìm cách giải.** Tương tự ví dụ trên, chúng ta đặt:

$S_{IMF}=a^2;S_{PFN}=b^2;\ S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Chúng ta hoàn toàn biểu thị tổng $\mathrm{T}=\mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}$ theo a, b, c. Vậy hiển nhiên để tìm giá trị lớn nhất chúng ta dùng cực trị đại số với chú ý rằng $ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2$.

*** Trình bày lời giải**



Đặt $S_{IMF}=a^2;S_{PFN}=b^2;\ S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Ta có: $\Rightarrow\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{FQK}}+\sqrt{S_{PFN}}$

Hay $S_{ABC}=\left(a+b+c\right)^2$.

$\Rightarrow \mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}=S_{ABC}-\left(S_{IMF}+S_{PFN}+S_{FQK}\right)$

$\Rightarrow T=\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$T=2\left(ab+bc+ca\right)\le\dfrac{2}{3}\left(a+b+c\right)^2=\dfrac{2}{3}S$

Vậy $T=\frac{2}{3}S$ khi $a=b=c$ hay F là trọng tâm của tam giác ABC

Ví dụ 7. Cho tấm bìa hình thang ABCD có $\widehat{A}=\widehat{D}=90°$, $AD=4cm;\ AB=32cm,\ CD=64cm$. Gấp tấm bìa lại để cho hai điểm C và B trùng nhau. Tính độ dài của nếp gấp.

Giải

*** Tìm cách giải.** Trước hết chúng ta hãy vẽ và xác định đường nếp gấp: Gọi M là trung điểm của BC, qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt CD tại N. Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn thẳng MN. Từ đề bài $\widehat{A}=\widehat{D}=90°;AD=4cm;\ AB=32cm,\ CD=64cm$, dễ dàng tính được độ dài BC bằng định lý Py-ta-go. Từ đó tính được độ dài CM. Do vậy để tính được CM trong tam giác vuông CMN, chúng ta chỉ cần tính được độ dài hai cạnh của một tam giác vuông đồng dạng với tam giác vuông CMN là xong. Từ đó, chúng ta có hai cách vẽ thêm đường phụ:

Cách 1. Vì $\widehat{A}=\widehat{D}=90°$ nên chỉ cần gọi giao điểm DA và CB là E. Sau đó tính độ dài cạnh của tam giác vuông CDE.

Cách 2. Kẻ BF vuông góc với CD, khi đó ΔMCN # ΔFCB. Bài toán cũng được giải.

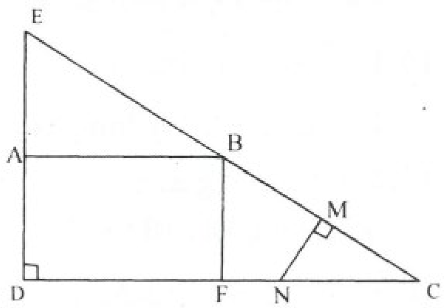
*** Trình bày lời giải**

Gọi M là trung điểm của BC, qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt CD tại N. Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn thẳng MN.

Cách 1. Gọi E là giao điểm của AD và BC; F là chân đường vuông góc kẻ từ B tới CD. Dễ thấy F là trung điểm của CD, từ đó:

$BC^2=BF^2+FC^2=24^2+32^2=1600$

Suy ra $BC=40cm\Rightarrow MC=20\left(cm\right)$



Cũng từ F là trung điểm của CD,

Suy ra B và A lần lượt là trung điểm của CE và DE,

Suy ra $DE=2AD=48cm$.

Ta nhận thấy ΔMCN # ΔDCE

Nên $\frac{MC}{DC}=\frac{MN}{DE}\Rightarrow\frac{20}{64}=\frac{MN}{48}\Rightarrow MN=15cm$

Vậy độ dài nếp gấp là 15cm.

Cách 2. Ta có ΔMCN # ΔFCB suy ra:

$\frac{MC}{CF}=\frac{MN}{BF}\Rightarrow\frac{20}{32}=\frac{MN}{32}\Rightarrow MN=15cm$

Vậy độ dài nếp gấp là 15cm.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên AB lấy điểm D và trên BC lấy điểm E sao cho hình chiếu của DE lên BC bằng $\frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng đường vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi M, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và A trên BC. Giả sử đường thẳng qua E vuông góc với DE cắt đường thẳng AH tại N.

Ta có: $BH = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM = HE$.

Mặt khác ta có: $\widehat{HNE} = \widehat{MED}$ (cùng phụ với $\widehat{HEN}$);

$\widehat{DME} = \widehat{NHE}$, nên ΔHNE # ΔMED

$\Rightarrow \frac{HN}{ME} = \frac{HE}{DM} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{HE}{DM} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{BM}{DM}$

Mặt khác $\frac{BM}{DM} = \frac{BH}{HA} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{BH}{HA} \Rightarrow HN = \frac{BH.BC}{2.HA}$

Vậy N là điểm cố định

Nhận xét: Điểm mấu chốt của bài là khai thác điều kiện "Hình chiếu của DE bằng $\frac{1}{2}BC$" để từ đó xác định việc kẻ thêm đường phụ.

C. Bài tập vận dụng

16.1. Cho tam giác ABC có hai góc B và C thỏa mãn điều kiện $\widehat{B} - \widehat{C} = 90^\circ$. Kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng: $AH^2 = BH.CH$

16.2. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BH.BD + CH.CE = BC^2$.

16.3. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} < 90^\circ\right)$, đường cao AD, trực tâm H. Chứng minh hệ thức $CD^2 = DH.DA$

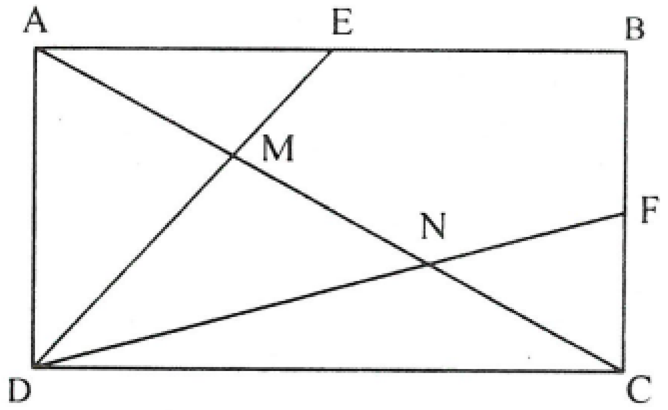
16.4. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của B, C trên cạnh AD. Gọi M là giao điểm của CI và BK, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $OM \perp AD$.

16.5. Cho ΔABC cố định có các góc B, C nhọn và hình chữ nhật MNPG thay đổi nhưng luôn có M, N trên cạnh BC còn P, Q lần lượt trên cạnh AC và AB. Xác định vị trí của các điểm P, Q sao cho hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất.

16.6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật MNPQ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi giao điểm của BN với MQ là K, của CM và NQ là L. Chứng minh rằng $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$.

16.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Một hình vuông nối tiếp tam giác ABC với D thuộc cạnh AB, E thuộc AC và F, G thuộc cạnh BC. Gọi H là giao điểm của BE và DG, I là giao điểm của CD và EF. Chứng minh rằng IE = HG.

16.8. Cho hình vuông ABCD, F là trung điểm của AD và E là trung điểm của FD, Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G. Tính tỉ số diện tích của tam giác EFG với diện tích hình vuông ABCD.



16.9. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích $150cm^2$ (như hình vẽ). Gọi E, F là trung điểm của AB và BC. Gọi M, N là giao điểm của DE. DF với AC. Tính tổng diện tích phần tô đậm.

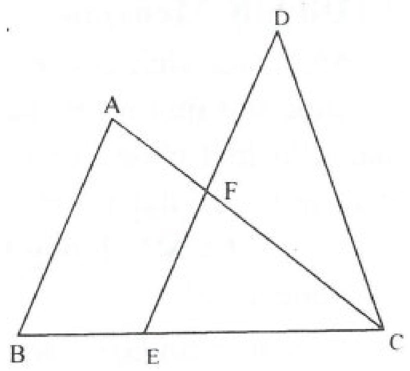
16.10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$. Tính tỉ số $\frac{HB}{HC}$

16.11. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là đường cao cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng: $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=1$.

16.12. Trong hình vẽ dưới đây các tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau và F là giao điểm của CA và DE. Biết AB song song với DE. AB=9cm và EF=6cm. Tính độ dài theo cm của DE

(*Olympic Toán học trẻ quốc tế Bulgaria (BICMC), năm 2013 – Philippines đề nghị)*



16.13. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q, E lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi M là giao điểm của DE và CQ; gọi I là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng AM = 4.MI.

16.14. Giả sử AD, BE và CF là các đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi diện tích tam giác DEF bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013 – 2014)

16.15. Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A}=90^\circ$. CM là trung tuyến. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H. Tính tỉ số: $\frac{BH}{HC}$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHKHTN Hà Nội, năm học 2013 – 2014)

16.16. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết rằng chu vi tam giác ABH, ACH lần lượt là 30cm, 40cm. tính chu vi tam giác ABC.

16.17. Cho $\Delta A'B'C' \# \Delta ABC$ có chu vi lần lượt là 50 cm và 60 cm. Diện tích ΔABC lớn hơn $\Delta A'B'C'$ là $33cm^2$. Tính diện tích mỗi tam giác.

16.18. Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của điểm M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

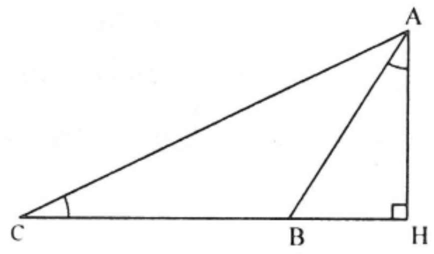
Hướng dẫn giải

16.1. Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{BAH} + \widehat{AHB} = \widehat{BAH} + 90^\circ$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} + 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BAH}$

Từ đó suy ra: ΔABH # ΔCAH (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$.

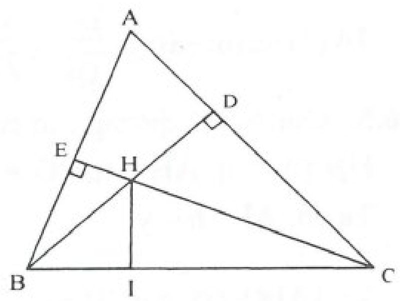


16.2 Kẻ $HI \perp BC$ tại I.

ΔBIH và ΔDBC có $\widehat{BIH} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ mà $\widehat{DBC}$ chung do đó:

ΔBIH # ΔBDC (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BI}{BD} \Rightarrow BH.BD = BI.BC$. (1)



Tương tự ta có: ΔCIH # ΔCEB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CI}{CE} \Rightarrow CH.CE = BC.CI$ (2)

Từ (1) và (2) cộng từng vế ta có:

$BH.BD + CH.CE = BI.BC + BC.CI = BC\left(BI + CI\right) = BC^2$

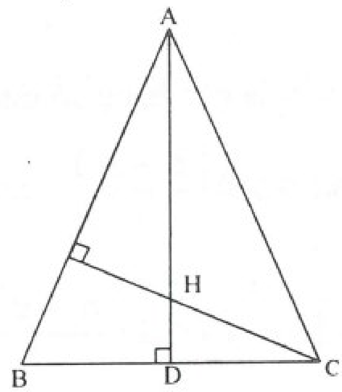
16.3. Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{BCH}\left(= 90^\circ - \widehat{ABC}\right)$

Và $\widehat{CDH} = \widehat{ADB}\left(= 90^\circ\right)$.

Suy ra: ΔCDH # ΔADB (g.g)

Nên $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{DH}{DB}$.

Ta lại có: $CD = DB$ nên $CD^2 = DA.DH$.

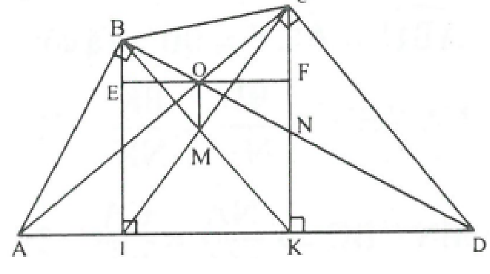


16.4. Qua O kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường thẳng BI, CK lần lượt tại E, F $OE \perp BI, OF \perp CK$.

Xét ΔBEO và ΔAIB có: $\widehat{BEO} = \widehat{AIB}$;

$\widehat{ABI} = \widehat{BOE}\left(= 90^\circ - \widehat{OBI}\right)$

ΔBEO # ΔAIB (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{EO}{IB}$ (1)



Chứng minh tương tự, ta có:

ΔCFO # ΔDKC (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CO}{CD} = \dfrac{OF}{CK}$ (2)

Xét ΔAOB và ΔDOC có:

$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$; $\widehat{ABO} = \widehat{DCO}$

$\Rightarrow$ ΔAOB # ΔDOC(g.g) $\Rightarrow \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{OC}{CD}$ (3)

Từ 91), (2), và (3) suy ra: $\dfrac{EO}{IB} = \dfrac{OF}{CK} \Rightarrow \dfrac{OE}{OF} = \dfrac{IB}{CK}$ (4)

Ta có: $BI//CK$ nên $\dfrac{IB}{CK} = \dfrac{BM}{MK}$. (5)

Ta có: ΔBEO # ΔNFO (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OE}{OF} = \dfrac{BO}{ON}$ (5)

Từ (5) và (6) suy ra $\dfrac{BM}{MK} = \dfrac{BO}{ON}$, do đó $OM//NK$ (định lý Ta-lét đảo) hay $OM \perp AD$.

16.5. Gọi AH là đường cao của ABC, AH cắt PQ tại I.

Đặt $BA = a$; $AH = h$; $PQ = x$; $MQ = y$

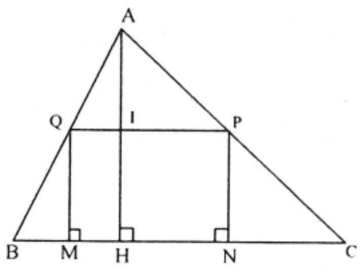
Ta có: $AI = h - y$

Vì ΔAPQ # ΔACB nên $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AI}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{h-y}{h} \Rightarrow x = \dfrac{a(h-y)}{h}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h}(h-y)y$$

Vì a, h là các hằng số dương nên S lớn nhất khi $(h-y)y$ lớn nhất. Áp dụng hệ thức: $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, ta có:

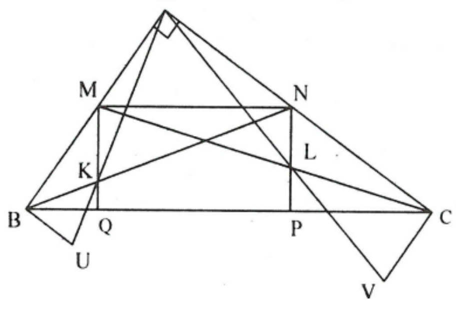
Mà $(h-y)y \le \left(\dfrac{h-y+y}{2}\right)^2 = \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \le \dfrac{a}{h}.\dfrac{h^2}{4} = \dfrac{ah}{4}$.



Vậy giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{ah}{4}$

Khi $h - y = y \Leftrightarrow y = \dfrac{h}{2}$ tức P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB.

16.6. Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho $\widehat{ABU} = \widehat{ACV} = 90^\circ$, Ta có:



$NA//BU \Rightarrow \dfrac{BU}{NA} = \dfrac{BK}{NK}$ (1)

$MN//BC \Rightarrow \dfrac{NA}{MA} = \dfrac{BK}{NK}$ (2)

$MA//VC \Rightarrow \dfrac{MA}{CV} = \dfrac{ML}{CL}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$\dfrac{BU}{NA}.\dfrac{NA}{MA}.\dfrac{MA}{CV} = \dfrac{BK}{NK}.\dfrac{BK}{NK}.\dfrac{ML}{CL}$

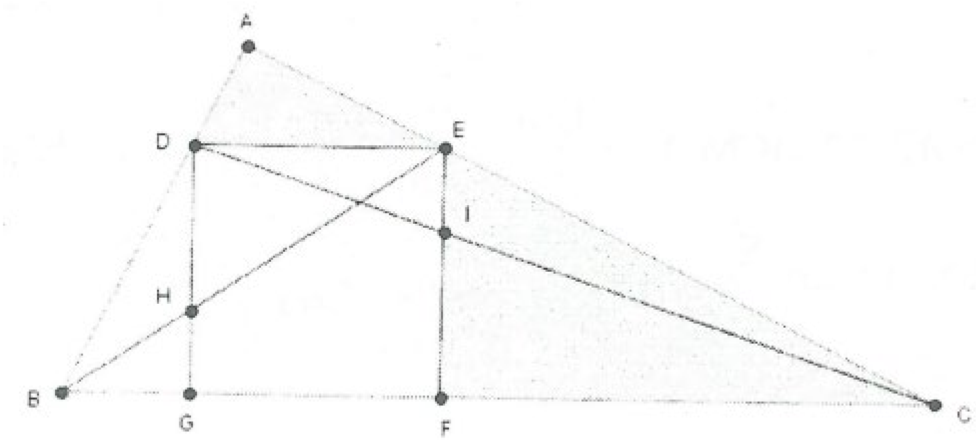
$\Rightarrow \dfrac{BU}{CV} = \dfrac{BQ}{NM}.\dfrac{CA}{BA}.\dfrac{MN}{CP} = \dfrac{BQ.CA}{BA.CP} = \dfrac{BQ}{MQ}.\dfrac{CA}{BA}.\dfrac{NP}{CP}$ (vì $MQ = NP$)

$\Rightarrow \dfrac{BU}{CV} = \dfrac{BA}{CA}.\dfrac{CA}{BA}.\dfrac{BA}{CA}$ (Vì ΔBMQ # ΔBCA; ΔCNP # ΔCBA)

Hay $\dfrac{BU}{CV} = \dfrac{AB}{AC}$ và $\widehat{ABU} = \widehat{ACV}\left(= 90^\circ\right)$ do đó ΔABU # ΔACV (c.g.c)

Vậy $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$

16.7.



Ta có: $\widehat{ADE} + \widehat{EDG} + \widehat{BDG} = 180^\circ$, mà $\widehat{EDG} = 90^\circ$

Nên $\widehat{ADE} + \widehat{BDG} = 90^\circ$.

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADE} + \widehat{AED} = 90^\circ$ nên $\widehat{BDG} = \widehat{AED}$.

$\Rightarrow$ ΔBGD # ΔDAE (g.g) (1)

Chứng minh tương tự, ta có ΔEFC # ΔDAE (g.g) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔBGD # ΔEFC $\Rightarrow \dfrac{BG}{DG} = \dfrac{EF}{FC}$ (3)

Sử dụng định lý Ta-lét trong ΔBHG, ta có: $DE//BG \Rightarrow \dfrac{HG}{HD} = \dfrac{BG}{DE}$

Mà $DE = DG$ (tính chất hình vuông) nên $\dfrac{HG}{HD} = \dfrac{BG}{DG}$ (4)

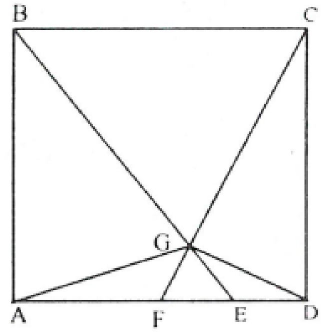
Tườn tự, ta có: $\dfrac{IE}{EF} = \dfrac{DE}{FC} = \dfrac{EF}{FC}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta có: $\dfrac{HG}{HD}=\dfrac{IE}{IF}$, suy ra: $\dfrac{HG}{HG+HD}=\dfrac{IE}{IE+IF}$

Hay $\dfrac{HG}{DG}=\dfrac{IE}{EF}$. Mà $DG=EF$ nên ta có $HG=IE$.

16.8. Vì $ED=EF$ nên $S_{GED}=S_{EFG}$ mà $AF=2.\mathrm{E}F$ nên $S_{GAF}=2.\mathrm{S}_{EFG}$.

Ta lại có $\Delta GBC\#\Delta GEF$ nên $\dfrac{S_{GBC}}{S_{EFG}}=\left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2\Rightarrow S_{GBC}=16S_{EFG}$



Do đó $S_{EFG}+S_{GED}+S_{GBC}=\left(1+1+2+16\right).S_{EFG}=20.S_{EFG}$

Mà $S_{EFG}+S_{GED}+S_{GAF}+S_{GBC}=\dfrac{1}{2}.\mathrm{S}_{ABCD}$

Vậy $S_{EFG}=\dfrac{1}{40}.\mathrm{S}_{ABCD}\Rightarrow\dfrac{S_{EFG}}{S_{ABCD}}=\dfrac{1}{40}$

16.9. Ta có: ΔAME # ΔCMD$\Rightarrow\dfrac{EM}{DM}=\dfrac{AE}{DC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DM=2.EM$

Đặt $S_{AEM}=x$. Ta có: $\dfrac{S_{AEM}}{S_{ADM}}=\dfrac{EM}{DM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow S_{ADM}=2x$.

Ta có:

$S_{AEM}+S_{ADM}=S_{ADE}=\dfrac{1}{2}S_{ABD}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}\Rightarrow x+2x=37,5cm^2$

$\Rightarrow x=12,5cm^2\Rightarrow S_{AMD}=25cm^2$.

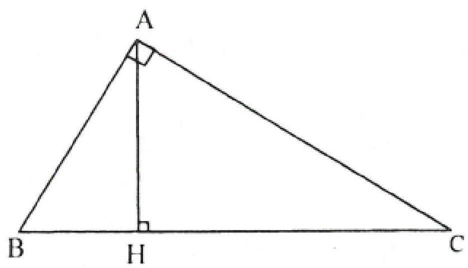
Tương tự, ta có: $S_{CNE}=12,5cm^2$; $S_{CND}=25cm^2$.

$\Rightarrow S_{DMN}=S_{ACD}-S_{AMD}-S_{CND}=75-25-25=25cm^2$

$\Rightarrow$ diện tích phần tô đậm là: $12,5+12,5+25=50cm^2$

16.10. Các tam giác AHB và CHA có chung chiều cao kẻ từ A

Nên $\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{S_{AHB}}{S_{CHA}}$ (1)



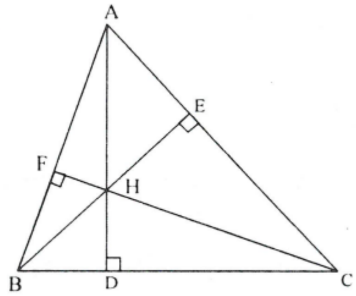
Ta lại có: ΔAHB # ΔCHA (g.g)

Nên $\dfrac{S_{AHB}}{S_{CHA}}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{4}{9}$.

16.11. Dễ thấy ΔCHE # ΔCAF (g.g)$\Rightarrow\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{CE}{CF}$.

Do đó: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC}=\dfrac{\frac{1}{2}HB.CE}{\frac{1}{2}AB.CF}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$



Tương tự ta có: $\dfrac{HC.HA}{BC.BA}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}};\ \dfrac{HA.HB}{CA.CB}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC}+\dfrac{HC.HA}{BC.BA}+\dfrac{HB.HA}{CA.CB}=\dfrac{S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HBC}}{S_{ABC}}=1$

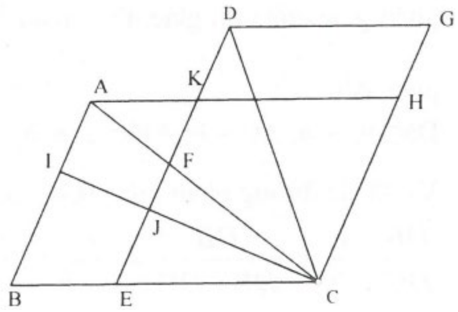
16.12. ***Cách 1***. Vẽ hai hình bình hành DECG và ABCH, do đó điểm H thuộc đoạn GC. Gọi K là giao điểm của AH và DF. Ta có: $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$ và $CE=2.BE$.

Vì hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên hai hình bình hành ABCH và DECG có diện tích bằng nhau.

Do đó $CH=2.HG$. Suy ra:

$DE=GC=9+4,5=13,5cm$ và

$DF=DE-EF=13,5-6=7,5cm$



Cách 2. Kẻ đường cao CI của ΔABC, CI cắt EF tại J. Ta có:

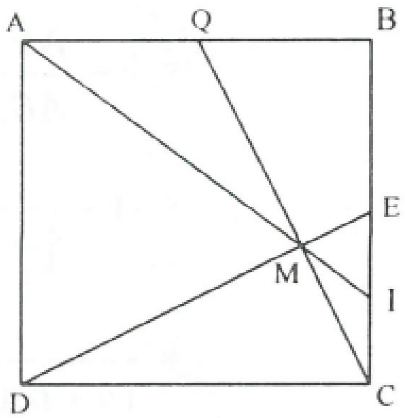
$\dfrac{CJ}{CI}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

Hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên $AB.CI=DE.CJ$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CJ}{CI}\Rightarrow \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow DE=\dfrac{2}{3}.AB=\dfrac{3}{2}.9=13,5cm$

Suy ra: $DF=DE-EF=13,5-6=7,5cm$

16.13. Ta có $\Delta CBQ=\Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCQ}=\widehat{CDE}$



Mà $\widehat{CDE}+\widehat{CED}=90^\circ$ nên $\widehat{BCQ}+\widehat{CED}=90^\circ$

Do đó: $\widehat{EMC}=90^\circ$

Vậy tam giác vuông DCE, DMC, CME đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{DC}{CE}=\dfrac{DM}{MC}=\dfrac{MC}{ME}$ mà $DC=2.CE$

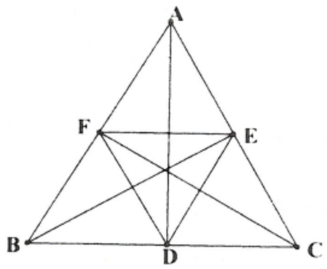
$\Rightarrow DM=2.MC;\ MC=2.ME\Rightarrow DM=4.ME$

Mà $EI//AD$ nên $\dfrac{AM}{MI}=\dfrac{DM}{ME}=4\Rightarrow AM=4.MI$

16.14.

**** Chứng minh điều kiện cần.*** Cho tam giác ABC đều, AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC ta cần chứng minh:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



Do tam giác ABC đều và AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác nên ta có:

$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ ΔDEF # ΔABC

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

**** Chứng minh điều kiện đủ.*** Cho tam giác ABC, AD, BE và CF là các đường phân giác của tam giác, thỏa mãn $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$, ta cần chứng minh : ΔABC là tam giác đều.

Đặt BC = a, AC = b; AB = c (a, b, c >0)

Vì AD là đường phân giác $\widehat{BAC}$ nên ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DB}{DB+DC} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow \frac{DB}{a} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow DB = \frac{ac}{c+b}$$

$$\Rightarrow DC = a - DB = a - \frac{ac}{c+b} = \frac{ab}{c+b}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$EC = \frac{ab}{a+c};\ EA = \frac{bc}{a+c};\ FA = \frac{bc}{a+b}; FB = \frac{ca}{a+b}.$$

Ta có: $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}}$

$$= 1 - \frac{AF.AE}{AB.AC} - \frac{BF.BD}{BA.BC} - \frac{CE.CD}{CA.CB}$$

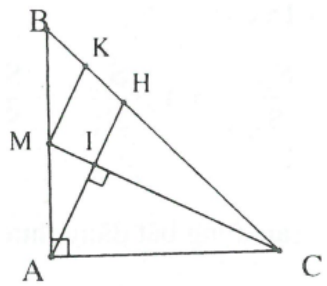
$$= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 8abc \Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(b-a)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.



16.15. Gọi giao điểm của AH và CM là I. Gọi K là trung điểm của BH, thì ta có MK // AH.

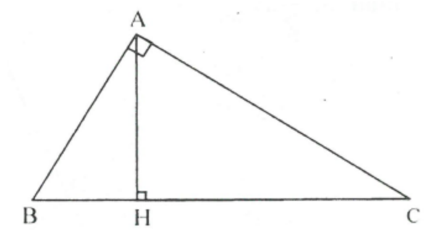
Dễ thấy ba tam giác vuông AMC, IAC và IMA đồng dạng mà AC = 2.AM

Nên IC = 2.IA = 4.IM.

Suy ra $\dfrac{HK}{HC}=\dfrac{IM}{IC}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{2.HK}{HC}=\dfrac{1}{2}$

16.16.. Ta có: $\Delta ABH\sim\Delta CAH$ nên tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra:

$\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{30}{40}\Rightarrow\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{AH}{3}=\dfrac{HC}{4}$.



Đặt $\dfrac{AH}{3}=\dfrac{HC}{4}=k\ \ (k>0)$

$\Rightarrow AH=3k,\ HC=4k$

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AH^2+HC^2=AC^2\Rightarrow AC=5k$.

Mà chu vi ΔCAH là 40 (cm) nên $3k+4k+5k=40\Rightarrow k=\dfrac{10}{3}\,(cm)$.

Suy ra $AH=10\,(cm),\ HC=\dfrac{40}{3}\,(cm),\ AC=\dfrac{50}{3}(cm)$.

Ta có ΔABC # ΔHAC nên tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra:

$\dfrac{C_{ABC}}{C_{HAC}}=\dfrac{AC}{HC}=\dfrac{50/3}{40/3}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow C_{ABC}=\dfrac{5}{4}.40=50(cm)$

16.17. Nhận xét rằng tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên:

$\Delta A'B'C'$ # $\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{50}{60}\right)^2\Rightarrow\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\dfrac{25}{36}$

$\Rightarrow\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}-S_{A'B'C'}}=\dfrac{25}{36-25}\Rightarrow\dfrac{S_{A'B'C'}}{33}=\dfrac{25}{11}\Rightarrow S_{A'B'C'}=75\ (cm^2)$

$\Rightarrow S_{ABC}=33+75=108(cm^2)$

16.18. Qua điểm M trên cạnh BC vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E, vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D.

Ta có ΔDBM # ΔABC # ΔEMC

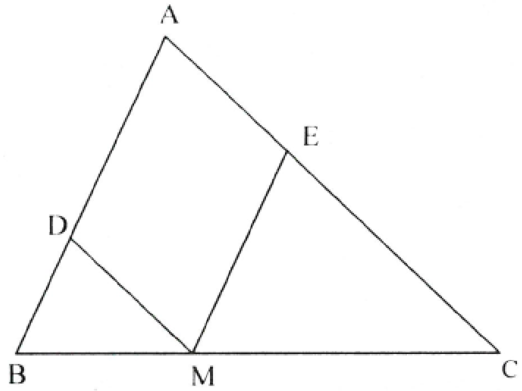
$\Rightarrow\dfrac{S_{DBM}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2;\ \dfrac{S_{EMC}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2$

Ta có:

$$\dfrac{S_{MDAE}}{S_{ABC}}=1-\dfrac{S_{DBM}}{S_{ABC}}-\dfrac{S_{EMC}}{S_{ABC}}=1-\left[\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2+\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2\right]\le1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2+\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2=\dfrac{1}{2}$$

(áp dụng bất đẳng thức đại số: $x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}$) $\Rightarrow S_{MDAE}\le\dfrac{1}{2}.S_{ABC}$

Vậy khi M là trung điểm của BC thì hình bình hành AEMD có diện tích lớn nhất là: $\frac{1}{2}.S_{ABC}$



Chương 3

Chuyên đề 17. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE-VA, ĐỊNH LÝ VAN-OBEN

A. Kiến thức cần nhớ

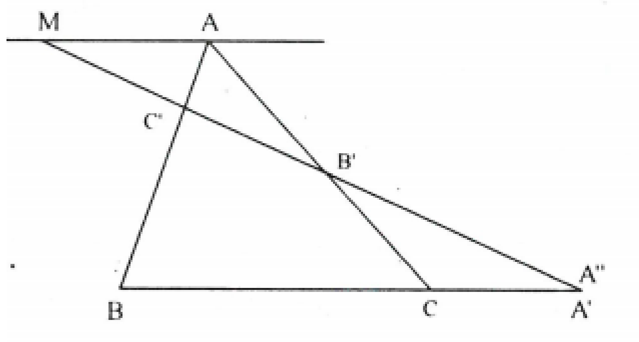
1. Định lý Menelaus

Menelaus sinh ra khoảng năm 70 và mất khoảng năm 130, những gì được biết về cuộc đời ông rất ít, thông qua một số tác phẩm khoa học của những người sau. Chỉ biết chung chung rằng ông có một thời là sinh viên trường đại học Alexandrie cổ đại, rồi làm cán bộ giảng dạy cũng ở đó và về sau thành nhà thiên văn học ở La Mã. Trong hình học ông có một định lý nổi tiếng mang tên ông: định lý Menelaus.

- *Định lý:* Cho tam giác ABC và ba điểm A',B',C' (không trùng với các đỉnh của tam giác) lần lượt trên các đường thẳng BC,CA và AB sao cho cả ba điểm A',B',C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài một cạnh và hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để A',B',C' thẳng hàng là: $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$.

Giải

Trường hợp 1. Nếu trong ba điểm A',B',C' có đúng hai điểm thuộc cạnh của tam giác ABC, chẳng hạn là điểm B' và C'.



- Nếu A',B',C' thẳng hàng.

  Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt $B'C'$ tại M, ta có:

  $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B'};\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}$. Vậy:

  $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}\frac{A'B}{A'C}=1$.

- Ngược lại, nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$.

  Gọi A'' là giao điểm của $B'C'$ với BC.

  Theo phần thuận: $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$. Suy ra: $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$.

  Do B',C' lần lượt thuộc cạnh CA,AB nên A'' nằm ngoài cạnh BC.

  Vậy $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$ và A'',A' cùng nằm ngoài đoạn BC.

  Suy ra $A''\equiv A'$.

  Vậy ba điểm A',B',C' thẳng hàng.

Trường hợp 2. Trong ba điểm A',B',C' không có điểm nào thuộc cạnh của tam giác được chứng minh tương tự.

2. Định lý Ce-va.

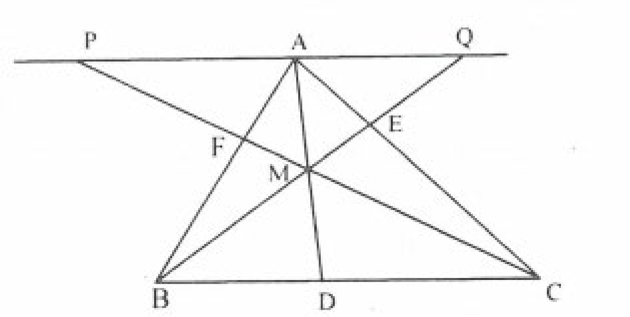
- Ce-va là kỹ sư người Ý, nhưng yêu thích Toán học. Ông sinh năm 1648, mất năm 1734. Thời thanh niên Ce-va theo học ở Đại học Pise rồi giúp việc cho Quận công vùng Mantoue. Công trình nghiên cứu của ông là về Cơ học và Hình học. Đời sau biết đến ông thông qua một định lý hình học mang tên ông: định lý Ce-va.

- *Định lý:* Cho ba điểm D,E,F nằm trên ba cạnh tương ứng BC,CA,AB của tam giác ABC (không trùng với ba đỉnh của tam giác) khi đó ba đường thẳng AD,BE,CF đồng quy khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$.

Giải

- Xét đường thẳng AD,BE,CF đồng quy

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng BE,CF lần lượt tại Q và P.



Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{FA}{FB}=\frac{AP}{BC};\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AQ}$

$\frac{AP}{CD}=\frac{AQ}{BD}\left(=\frac{AM}{MD}\right)\Rightarrow\frac{AP}{AQ}=\frac{CD}{BD}$.

Từ đó suy ra: $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AQ}{AP}.\frac{BC}{AQ}.\frac{AP}{BC}=1$.

Ngược lại, nếu $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$.

Gọi M là giao điểm của BE và CF. Gọi D' là giao điểm của AM và BC.

Theo phần thuận, ta có:

$\frac{D'B}{D'C}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\Rightarrow\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow\frac{D'B}{D'B+D'C}=\frac{DB}{DB+DC}$

$\Rightarrow\frac{D'B}{BC}=\frac{DB}{BC}\Rightarrow BD'=BD\Rightarrow D\equiv D'$.

Vậy AD,BE,CF đồng quy.

3. Định lý Van Oben.

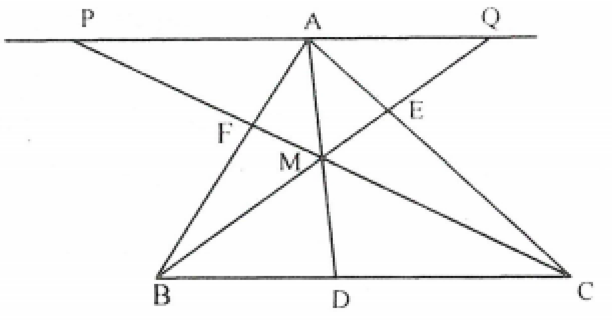
- Van Oben (Van Aubel) sinh ngày $20.11.1830$ tại Maastricht (Hà Lan), mất ngày $03.02.1906$ tại Anlwerpen (Bỉ). Ông nghiên cứu và dạy Toán cho các lớp dự bị đại học ở Atheneum, Maastricht (Hà Lan) và đại học Gent (Bỉ). Trong quá trình nghiên cứu, ông công bố nhiều tính chất, định lý hình học đặc sắc mang tên ông

- *Định lý*: Cho M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D,E,F thứ tự là giao điểm của AM,BM,CM với các cạnh BC,AC,AB. Khi đó thì: $\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$.

Giải

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng CM và BM lần lượt tại P và Q

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:



$AQ//BC \Rightarrow \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AQ}{BC}$.

$AP//BC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AP}{BC}$.

$\Rightarrow \dfrac{AF}{FB}+\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AQ+AP}{BC}=\dfrac{PQ}{BC}$.

Mặt khác $PQ//BC \Rightarrow \dfrac{PQ}{BC}=\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{AM}{MD}$ từ đó suy ra $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AF}{FB}+\dfrac{AE}{EC}$.

Cách 2. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABD và ba điểm F,M,C thẳng hàng ta có:

$\dfrac{AF}{FB}.\dfrac{BC}{CD}.\dfrac{MD}{AM}=1 \Rightarrow \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AM}{MD} \qquad (1)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACD và ba điểm E,M,B thẳng hàng ta có:

$\dfrac{AE}{EC}.\dfrac{BC}{BD}.\dfrac{MD}{AM}=1 \Rightarrow \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BD}{BC}.\dfrac{MA}{MD} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AF}{FB}+\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AM}{MD}.\left(\dfrac{CD}{BC}+\dfrac{BD}{BC}\right)=\dfrac{AM}{MD}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *(Mở rộng Van-Oben)* Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K, trên tia đối của tia CA lấy điểm N. Gọi E là giao điểm CK và BN; gọi M là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng: $\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}$.

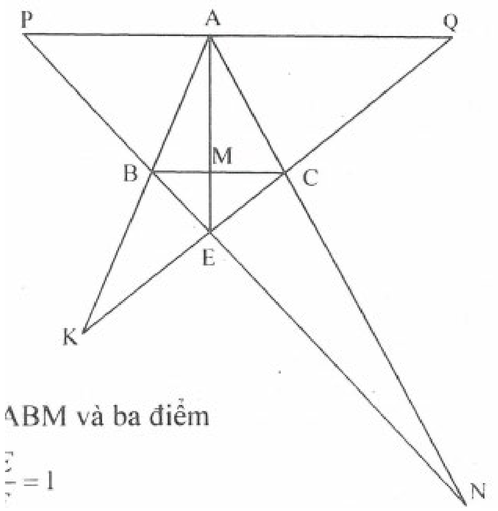
Giải

*** Tìm cách giải**. Với cách suy luận như định lý Van-Oben, chúng ta cũng có thể chứng minh bằng hai cách.

*** Trình bày lời giải**

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BN và BK lần lượt tại P và Q.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:



$AQ//\mathrm{BC} \Rightarrow \dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AQ}{BC}$.

$AP//BC \Rightarrow \dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AP}{BC}$.

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AQ+AP}{BC}=\dfrac{PQ}{BC}$.

Mặt khác $PQ//BC$

$\Rightarrow \dfrac{PQ}{BC}=\dfrac{PE}{BE}=\dfrac{AE}{ME}$ từ đó suy ra: $\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}$.

Cách 2. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM và ba điểm K,E,C thẳng hàng ta có: $\dfrac{AK}{KB}.\dfrac{BC}{CM}.\dfrac{ME}{AE}=1$

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KB}=\dfrac{CM}{BC}.\dfrac{AE}{ME}\quad (1)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACM và ba điểm E,N,B thẳng hàng, ta có:

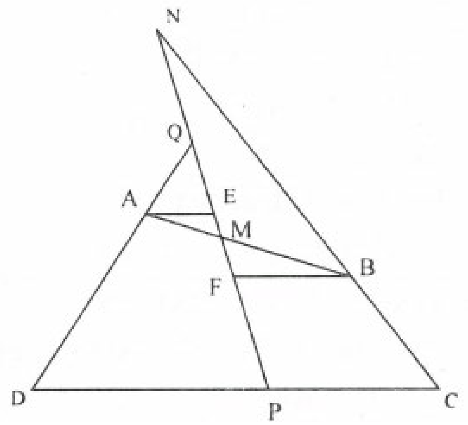
$\dfrac{AN}{NC}.\dfrac{BC}{BM}.\dfrac{ME}{EA}=1\Rightarrow \dfrac{AN}{NC}=\dfrac{BM}{BC}.\dfrac{EA}{ME}\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AE}{ME}.\left(\dfrac{CM}{BC}+\dfrac{BM}{BC}\right)=\dfrac{AE}{ME}$.

Ví dụ 2. ***(Định lý Menelaus trong tứ giác)*** Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng d cắt AB,BC,CD,DA tại M,N,P,Q. Chứng minh rằng $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PD}.\dfrac{QD}{QA}=1$.

Giải

*** Tìm cách giải**. Tương tự như chúng ta chứng minh định lý Menelaus trong tam giác, chúng ta có nhiều cách chứng minh. Sau đây là một cách.



*** Trình bày lời giải**

Từ A,B vẽ $AE//BF//CD\ (E;F\in d)$

Theo hệ quả của định lý Ta-lét:

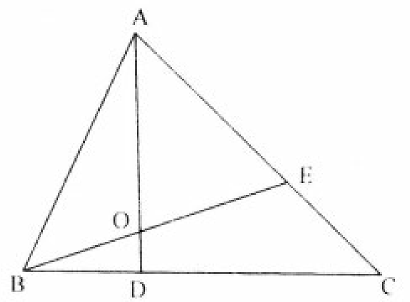
$\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{AE}{BF};\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{BE}{CP};\dfrac{QD}{QA}=\dfrac{DP}{AE}$

Suy ra: $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PD}.\dfrac{QD}{QA}=\dfrac{AE}{BF}.\dfrac{BE}{CP}.\dfrac{PC}{PD}.\dfrac{DP}{AE}=1$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lần lượt lấy điểm D sao cho $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AD sao cho $\dfrac{AO}{OD}=4$. Gọi E là giao của hai đường thẳng AC và BO. Tính tỷ số $\dfrac{AE}{EC}$.

Giải

Từ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{BC}{BD}=3$.



Áp dụng định lý Menelaus cho ΔADC với ba điểm B,O,E thẳng hàng, ta có:

$\dfrac{AE}{EC}.\dfrac{BC}{BD}.\dfrac{OD}{OA}=1\Rightarrow \dfrac{AE}{EC}.3.\dfrac{1}{4}=1\Rightarrow \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{4}{3}$.

Nhận xét. Ngoài cách vận dụng định lý, chúng ta có thể kẻ thêm đường thẳng song song để vận dụng định lý ta-lét.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn có $BD;CE$ là đường cao, H là trực tâm. Qua H kẻ đường thẳng cắt cạnh AB,AC tại M,N. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{HM}{HN}\right)^2=\frac{BM.EM}{DN.CN}.$$

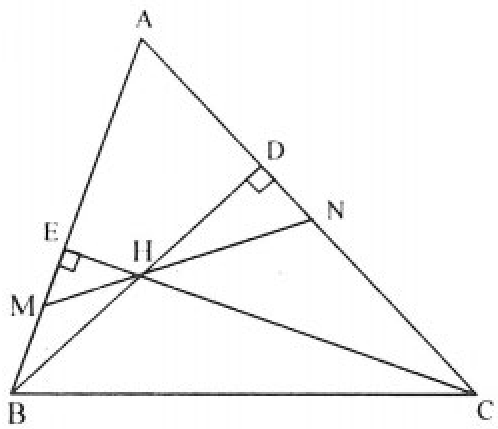
Giải

Áp dụng định lý Menelaus cho B,H,D thẳng hàng đối với ΔAMN, ta có:

$\frac{HM}{HN}.\frac{DN}{DA}.\frac{AB}{BM}=1 \quad (1)$

Áp dụng định lý Menelaus cho C,H,E thẳng hàng đối với ΔAMN, ta có:

$\frac{HM}{HN}.\frac{CN}{CA}.\frac{AE}{EM}=1 \quad (2)$



Từ (1), (2) nhân vế ta có:

$\frac{HM^2}{HN^2}.\frac{DN}{DA}.\frac{CN}{CA}.\frac{AB}{BM}.\frac{AE}{EM}=1 \quad (3)$

Mặt khác $\Delta AEC\sim\Delta ADB\ (g.g)$

$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AB.AE=AC.AD$.

Thay vào (3) suy ra: $\frac{HM^2}{HN^2}.\frac{DN.CN}{BM.EM}=1$ hay $\left(\frac{HM}{HN}\right)^2=\frac{BM.EM}{DN.CN}$ (điều phải chứng minh).

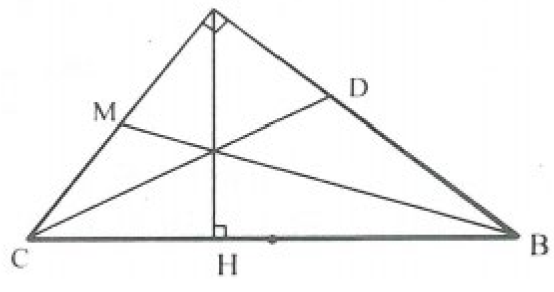
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại điểm O. Chứng minh rằng $BH=AC$

Giải

*** Tìm cách giải**. Để chứng minh $BH=AC$ bằng cách ghép vào hai tam giác là không khả thi bởi không khai thác được tính đồng quy của giả thiết. Để khai thác được tính đồng quy của giả thiết này, chúng ta liên tưởng tới định lý Ce-va. Vận dụng định lý Ce-va, chúng ta suy ra được $\frac{BH}{HC}.\frac{DA}{DB}=1$. Đã xuất hiện BH song chưa có AC. Để xuất hiện AC, chúng ta vận dụng tiếp yếu tố giả thiết CD là phân giác. Từ đó chúng ta suy ra được: $BH.AC=HC.BC$. Để có $BH=AC$, phần cuối cùng là chứng minh $HC.BC=AC^2$.

*** Trình bày lời giải**

Theo định lý Ce-va ta có:



$\frac{BH}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{DA}{DB}=1$

mà $MA=MC$ nên $\frac{BH}{HC}.\frac{DA}{DB}=1 \quad (1)$

Vì CD là phân giác nên $\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{BH}{HC}.\frac{AC}{BC}=1\Rightarrow BH.AC=HC.BC$ (3)

Nhận thấy $\Delta ABC\sim\Delta HAC\ (g.g)\Rightarrow\frac{HC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AC^2=HC.BC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BH.AC=AC^2$ hay $BH=AC$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của DF và BM. Gọi K là giao điểm của CM và DE. Chứng minh AD, BK, CH đồng quy.

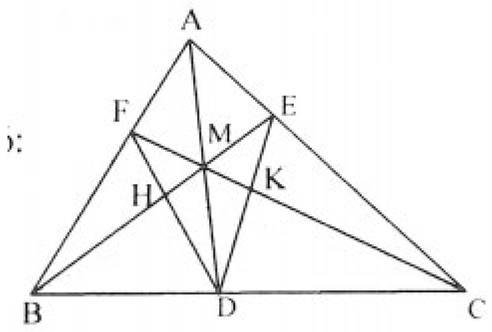
Giải

*** Tìm cách giải**. Để chứng minh AD, BK, CH đồng quy, dễ dàng nghĩ tới việc vận dụng định lý Ce-va đảo trong tam giác MBC. Để vận dụng định lý Ce-va, chúng ta cần chứng minh $\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=1$.

Muốn xuất hiện tỉ số $\frac{KM}{KC};\frac{BH}{HM};\frac{CD}{BD}$ chúng ta cần linh hoạt trong các tam giac để vận dụng định lý Menelaus hoặc Ce-va.

*** Trình bày lời giải**

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác $AMC; AMB$



Ta có: $\frac{KM}{KC}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DM}=1;\ \frac{BH}{HM}.\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}=1$

Suy ra $\frac{KM}{KC}=\frac{EA}{EC}.\frac{DM}{DA};\ \frac{BH}{HM}=\frac{FB}{FA}.\frac{DA}{DM}$ (1)

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ABC, ta có:

$\frac{CD}{BD}.\frac{BF}{FA}.\frac{AE}{EC}=1\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{EC}{AE}.\frac{FA}{BF}$ (2)

Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được:

$$\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=\frac{EA}{EC}.\frac{DM}{DA}.\frac{FB}{FA}.\frac{DA}{DM}.\frac{EC}{AE}.\frac{FA}{BF}\Rightarrow\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=1.$$

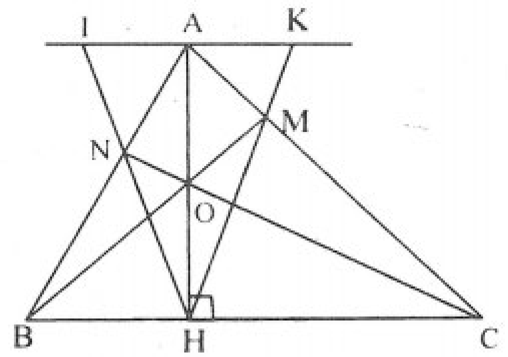
Theo định lý Ce-va đảo ta có AD, BK, CH đồng qui.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Lấy điểm O tùy ý thuộc đoạn AH (O khác $A; H$). Các tia BO và CO cắt $AC; AB$ tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng HA là tia phân giác của $\widehat{MHN}$.

Giải

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC. Gọi $I; K$ lần lượt là giao điểm của các tia $HN; HM$ với đường thẳng xy.

Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\frac{AI}{BH}=\frac{AN}{BN};\frac{AK}{CH}=\frac{AM}{MC}$.



Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ΔABC đối với ba đường thẳng đồng qui AH, BM, CN ta có:

$\frac{AN}{BN}.\frac{BH}{CH}.\frac{CM}{MA}=1 \Rightarrow \frac{AI}{BH}.\frac{BH}{CH}.\frac{CH}{AK}=1$

$\Rightarrow \frac{AI}{AK}=1 \Leftrightarrow AI = AK$.

Xét ΔHKI có $HA \perp IK; AI = AK$

$\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại $H \Rightarrow HA$ là đường phân giác $\widehat{MHN}$.

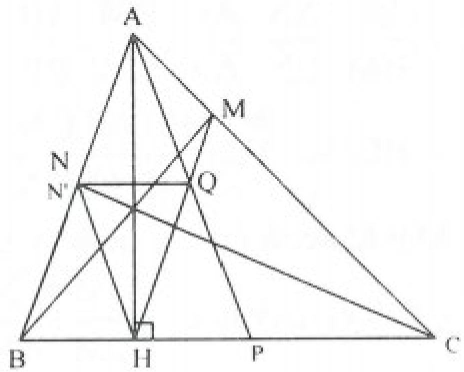
Cách 2. Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC > AB\right)$.

Dựng ΔABP cân tại A có AH là đường cao. AP cắt HM tại Q. Gọi N' là điểm đối xứng với Q qua AH. Vì A,Q,P thẳng hàng suy ra A,N',B thẳng hàng. Khi đó HA là đường phân giác của $\widehat{QHN'}$ và $\frac{QA}{QP}=\frac{N'A}{N'B}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACP với ba điểm thẳng hàng H,Q,M ta có:

$\frac{HP}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{QA}{QP}=1 \Rightarrow \frac{HB}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{N'A}{N'B}=1$, theo định lý đảo của Ce-va thì AH, BM, CN' đồng quy.

Theo giả thiết AH, BM, CN đồng quy



$\Rightarrow N \equiv N'$. Vậy HA là đường phân giác $\widehat{MHN}$

Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC < AB\right)$.

Chứng minh tương tự như trên.

Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC = AB\right)$.

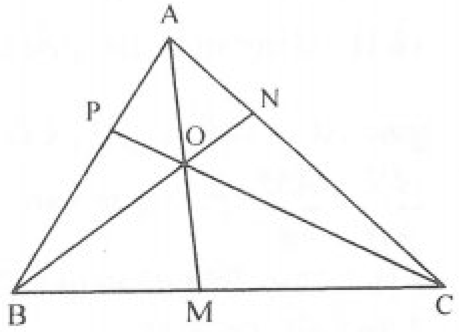
Dễ chứng minh, nhường cho bạn đọc.

Ví dụ 8. Giả sử O là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC các tia AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng: $\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Giải

*** Tìm cách giải**. Nhận thấy phần kết luận của chúng ta là một tích các tỉ số nên chúng ta liên tưởng tới hai định lý có thể dùng là Menelaus hoặc Ce-va. Nhận thấy nếu muốn có $\frac{AO.AP}{OP}$ thì $\frac{AO}{OP}$ hay $\frac{AP}{OP}$ không thể xuất hiện được nếu vận dụng định lý trên (bởi cả hai định lý đều không xuất hiện tỉ số trên). Song nếu đảo mẫu số, tức là $\frac{AO.AP}{OM}$ thì tỉ số $\frac{AO}{OM}$ có thể xuất hiện được nhờ vận dụng định lý Menelaus trong tam giác AMC hoặc AMB. Nhận thấy ý tưởng đó khả thi. Tiếp tục biểu diễn các tỉ số $\frac{BO}{ON}$; $\frac{CO}{OP}$ một cách tương tự, chúng ta có một lời giải hay.

*** Trình bày lời giải.**



Áp dụng định lý Menelaus trong:

ΔAMC với ba điểm B,O,N thẳng hàng ta có:

$$\frac{AO}{OM}.\frac{BM}{BC}.\frac{CN}{NA}=1 \Rightarrow \frac{AO}{OM}=\frac{BC}{BM}.\frac{AN}{CN} \quad (1)$$

ΔBCN với ba điểm A,O,M thẳng hàng, ta có:

$$\frac{BO}{ON}.\frac{AN}{AC}.\frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{BO}{ON}=\frac{AC}{AN}.\frac{BM}{CM} \quad (2)$$

Xét ΔACP với ba điểm B,O,N thẳng hàng ta có:

$$\frac{CO}{OP}.\frac{BP}{BA}.\frac{AN}{NC}=1 \Rightarrow \frac{CO}{OP}=\frac{AB}{BP}.\frac{NC}{AN} \quad (3)$$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có:

$$\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}=\frac{AO}{OM}.\frac{BO}{ON}.\frac{CO}{OP}.AP.BM.CN$$

$$=\frac{BC}{BM}.\frac{AN}{CN}.\frac{AC}{AN}.\frac{BM}{CM}.\frac{AB}{BP}.\frac{CN}{AN}.AP.BM.CN$$

$$=BC.AC.AB.\frac{BM.AP.CN}{CM.BP.NA} \quad (4)$$

Mặt khác, áp dụng định lý Ce-va đối với ΔABC có ba đường thẳng AM,BN,CP đồng quy ta có:

$$\frac{BM}{CM}.\frac{CN}{AN}.\frac{AP}{BP}=1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}=BC.AC.AB$.

Không phụ thuộc vào vị trí điểm O

Ví dụ 9. Trên ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H,M,N sao cho AH,BM,CN đồng quy tại G. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM; HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3.\left(\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}\right)$

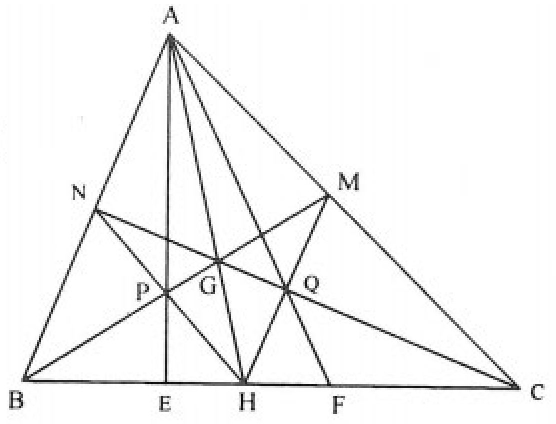
Giải

*** Tìm cách giải**. Định hướng và sự lựa chọn định lý để vận dụng vấn đề quan trọng, nó quyết định sự thành công của bài toán. Trong bài toán này, nhận thấy có nhiều đường đồng quy, mặt khác phần kết luận lại xuất hiện tổng các tỉ số nên việc vận dụng định lý Van-Oben là điều chúng ta nên nghĩ tới. Để xuất hiện $\dfrac{AP}{PE}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABH đối với AE,BG và HN đồng quy. Để xuất hiện $\dfrac{AQ}{QF}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ACH đối với AF,CG và HM đồng quy. Sau đó, vì vế phải chỉ xuất hiện $\dfrac{AN}{NB}+\dfrac{AM}{MC}$, chúng ta nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABC đối với AH,CN và BM đồng quy. Từ đó chúng ta có lời giải hay.

*** Trình bày lời giải.**

Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABH với AE,BG,HN đồng quy tại P, ta có:

$$\frac{AP}{PE}=\frac{AN}{NB}+\frac{AG}{GH} \quad (1)$$



Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔACH với AF,CG,HM đồng quy tại Q, ta có:

$$\frac{AQ}{QF}=\frac{AM}{MC}+\frac{AG}{GH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, ta được:

$$\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}+2.\frac{AG}{GH} \quad (3)$$

Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABC đối với AH,BM,CN đồng quy tại G, ta có:

$$\frac{AG}{GH}=\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{AP}{PE}+\dfrac{AQ}{QF}=3.\left(\dfrac{AN}{NB}+\dfrac{AM}{MC}\right)$ (Điều phải chứng minh).

Nhận xét. Từ kết luận của bài toán, chúng ta nhận thấy:

- Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABC đối với AH,BM,CN đồng quy tại G, ta có $\dfrac{AN}{NB}+\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AG}{GH}$ do đó chúng ta giải được bài toán: Trên ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H,M,N sao cho AH,BM,CN đồng quy tại G. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM;HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\dfrac{AP}{PE}+\dfrac{AQ}{QF}=3.\left(\dfrac{AG}{GH}\right)$.

- Trường hợp H là trung điểm của BC thì $MN//BC$. Ta có kết quả sau: $\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{AM}{MC}$ do đó ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H,M,N sao cho AH,BM,CN đồng quy tại G. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM;HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\dfrac{AP}{PE}+\dfrac{AQ}{QF}=6.\left(\dfrac{AN}{NB}\right)$.

- Trường hợp G là trung điểm của AH thì $\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}=1$. Do đó ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H,M,N sao cho AH,BM,CN đồng quy tại G. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM;HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3$.

C. Bài tập vận dụng

17.1. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC,CA lần lượt lấy điểm D và E thỏa mãn $\frac{BD}{DC}=\frac{CA}{EA}=\frac{1}{2}$. Gọi O là giao điểm của AD và BE. Tính tỷ số $\frac{AO}{OD}$ và $\frac{BO}{OE}$.

17.2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Có đường cao AH, đường trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy tại O. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{AC}=\frac{BH}{CH}$

17.3. Cho tam giác ABC có đường cao AH, đường trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy. Đặt a,b,c lần lượt là độ dài ba cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng: $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2a^2b$.

17.4. Cho tam giác $ABC(AB<AC)$, M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua M và song song với đường phân giác AD của góc BAC cắt AC,AB lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng $CE=BF$.

17.5. Cho tam giác ABC lấy điểm E thuộc cạnh AB và điểm F thuộc cạnh AC. Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để EF song song với BC là AM,BF và CE đồng qui.

17.6. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD. Trên AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{KD}=3$. Hỏi đường thẳng BK chia tam giác ABC theo tỉ số nào?

17.7. Cho tứ giác $ABCD$. Cạnh AB cắt CD kéo dài tại E, cạnh BC cắt AD kéo dài tại I. Đường chéo AC cắt BD và EI lần lượt tại M,N. Chứng minh rằng $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}$.

17.8. Cho tam giác ABC. Lấy K thuộc cạnh AB và T thuộc tia đối tia BC. Gọi F là giao điểm của TK với $AC;O$ là giao điểm của BF và CK. Gọi E là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng: $\frac{TB}{TC}=\frac{EB}{EC}$.

17.9. Cho tam giác ABC có D là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Lấy điểm M tùy ý thuộc AD. Gọi giao điểm của BM và AC là E; gọi giao điểm CM và AB là F. Các tia DE và CM giao nhau tại K; các tia DF và BM tại H. Chứng minh rằng $CH;AD;BK$ đồng quy.

17.10. Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BM, CN cắt nhau tại H. Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD}+\frac{HM}{BM}+\frac{HN}{CN}=\frac{DB}{DC}.\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}$.

17.11. Từ điểm I thuộc miền trong tam giác ABC, kẻ AI cắt BC tại D. Qua I kẻ MN, PQ và RS lần lượt song song với BC, AB, AC (M, S thuộc $AB; Q, R$ thuộc $BC; N, P$ thuộc AC) Chứng minh rằng:

a) $\frac{IM}{IN}=\frac{DB}{DC}$;

b) $\frac{IM}{IN}.\frac{IP}{IQ}.\frac{IR}{IS}=1$.

17.12. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CK. Vẽ đường phân giác CE của tam giác ACK. Đường thẳng qua B song song với CE cắt đường thẳng CK tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF chia đoạn thẳng AC thành hai phần bằng nhau.

17.13. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm K. Qua K kẻ đường thẳng song song với AD. Trên đường thẳng đó lấy điểm L bên trong hình bình hành, trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = KL$. Chứng minh rằng ba đường thẳng CL, DK và BM đồng quy.

17.14. Cho ΔABC không cân có CD là đường phân giác. Lấy điểm O thuộc đường thẳng CD (O khác C và D). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AO, BO với BC và AC. Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và AB. Chứng minh rằng CD vuông góc với CP.

17.15. Cho tam giác ABC có điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC, cắt DF, DE lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $OM = ON$.

17.16. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác. Gọi D, E, F thứ tự là giao điểm của đường thẳng AM, BM, CM với các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{AM}{MD};\frac{BM}{ME};\frac{CM}{MF}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.

(Thi vô địch Toán Quốc tế, IMO – năm 1961)

17.17. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Lấy M thuộc tia đối của tia CA. Tia MI cắt đường thẳng AB tại N. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E, tia EN cắt tia AC tại P. Tia PI cắt đường thẳng AB tại Q. Gọi F là giao điểm của QM và IC. Chứng minh $IE = IF$.

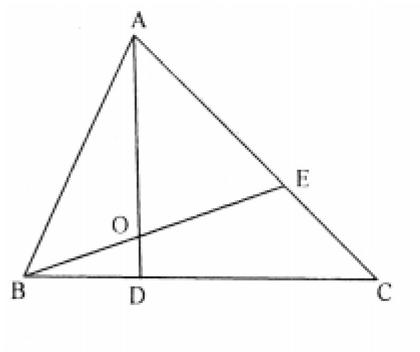
17.18. Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của $A'C'$ và $BB'; A'B'$ và CC'. Tia AM, tia AN lần lượt cắt BC tại E, F. Chứng minh rằng:

a) EN, FM, AA' đồng quy tại I

b) $IA.KA' = 3.IA'.KA$.

Hướng dẫn giải

17.1. Từ $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3};\ \frac{CD}{DB}=2;\ \frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.



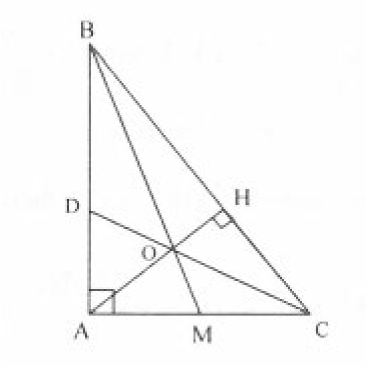
Áp dụng định lý Menelaus trong ΔADC với ba điểm B,O,E thẳng hàng, ta có:

$\frac{AO}{OD}.\frac{BD}{BC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{AO}{OD}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{AO}{OD}=6$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBEC với ba điểm A,O,D thẳng hàng, ta có:

$\frac{BO}{OE}.\frac{AE}{AC}.\frac{CD}{DB}=1\Rightarrow\frac{BO}{OE}.\frac{2}{3}.\frac{2}{1}=1\Rightarrow\frac{BO}{OE}=\frac{3}{4}$.

17.2. Trong tam giác ABC có AH,CD,BM đồng quy tại O.



Theo định lý Ce-va, ta có: $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{DB}=1$

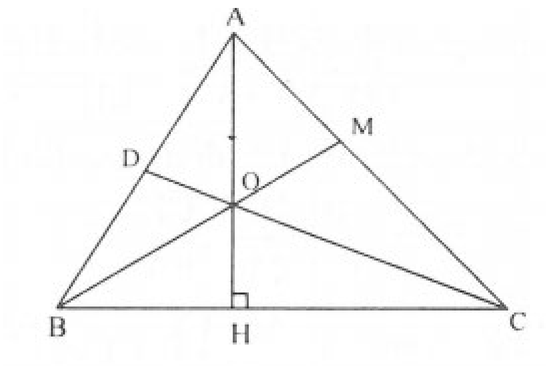
mà $\frac{CM}{MA}=1$ và $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$

(Tính chất đường phân giác)

suy ra $\frac{BH}{HC}.1.\frac{AC}{BC}=1\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{BH}{CH}$.

(cách giải khác, bạn đọc xem ở chuyên đề đường phân giác)

17.3. Áp dụng định lý Ce-va cho ba đường thẳng đồng quy AH,BM,CD, ta có:



$\frac{AD}{BD}.\frac{BH}{CH}.\frac{CM}{AM}=1$ mà $AM=CM$

nên $\frac{AD}{BD}.\frac{BH}{CH}=1\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{CH}{BH}$.

Mặt khác, CD là đường phân giác nên

$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$ suy ra $\frac{CH}{BH}=\frac{b}{a}$

hay $a.CH=b.BH\quad(1)$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông, ta có:

$a^2=BC^2=HB^2+HC^2+2.HB.HC$

$b^2=AC^2=HA^2+HC^2$

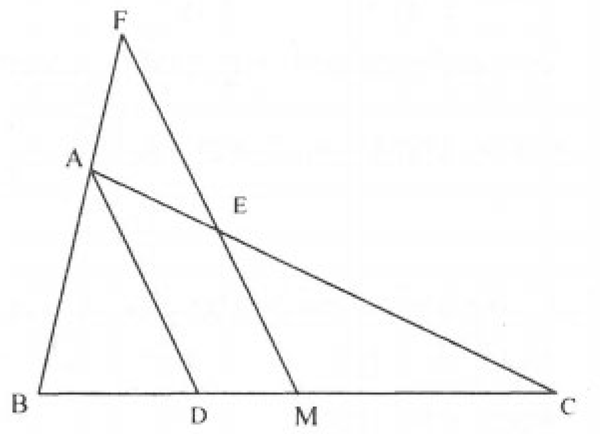
$c^2=AB^2=HA^2+HB^2$

Từ đó: $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=(a+b)(2a.CH)=2a.(a.HC+b.HC)$

$=2a.(b.BH+b.HC)$ (theo (1))

$= 2a.ab = 2a^2b$.

17.4. Cách 1. *(không dùng Menelaus)*



Ta giải vắn tắt như sau:

Từ $AD//FM$ và $ME//AD$

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{BA}{BD} = \frac{BF}{BM}$ (1) và $\frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}$ (2)

Mặt khác, theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra: $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$. Do đó $BF = CE$ (do $BM = CM$).

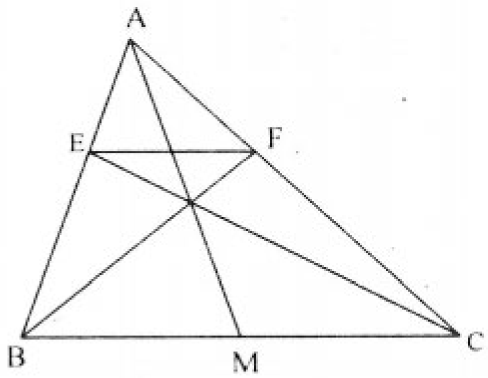
Cách 2. *(dùng Menelaus)*

Xét tam giác ABC với ba điểm F, E, M thẳng hàng, ta có: $\frac{EA}{EC}.\frac{MC}{MB}.\frac{FB}{FA} = 1$ (4)

Do $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên ΔAEF cân ở A. Suy ra $AE = AF$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $BF = CE$. Điều phải chứng minh.

17.5. Xét $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA} = \frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA}$ (1)



- Nếu AM, BF, CE đồng qui thì theo định lý Ce-va: $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA} = 1$.

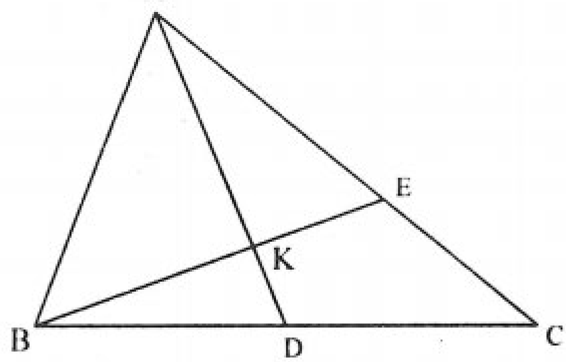
  Từ (1) suy ra: $\frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{CF}$

  $\Rightarrow EF//BC$ (định lý Ta-lét đảo).

- Nếu $EF//BC \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$. Từ (1) suy ra: $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA} = \frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA} = 1$

  $\Rightarrow AM, BF, CE$ đồng qui (theo đinh lý Ce-va đảo).

17.6. Gọi E là giao điểm của đường thẳng BK và AC. Áp dụng định lý Menelaus trong ΔACD đối với ba điểm B, K, E thẳng hàng, ta có: $\frac{AK}{KD}.\frac{BD}{BC}.\frac{CE}{EA} = 1$

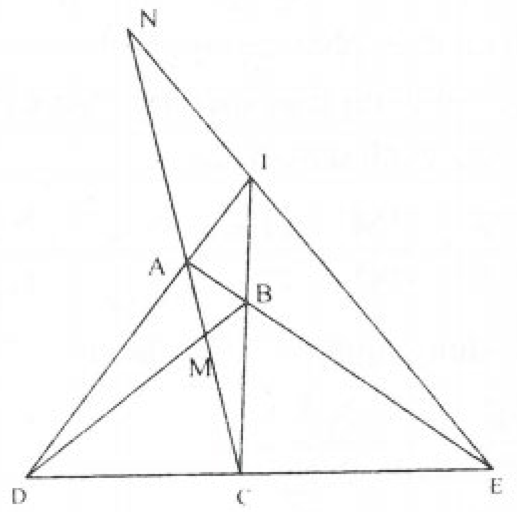


$\Rightarrow 3.\frac{1}{2}.\frac{CE}{EA} \Leftrightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác ΔABE và ΔBCE có chung đường cao kẻ từ B, suy ra: $\dfrac{S_{ABE}}{S_{BCE}}=\dfrac{AE}{CE}\Rightarrow\dfrac{S_{ABE}}{S_{BCE}}=\dfrac{3}{2}$.

17.7. Áp dụng định lý Menelaus trong ΔAEC với ba điểm M,D,B thẳng hàng, ta có: $\dfrac{MA}{MC}.\dfrac{DC}{DE}.\dfrac{BE}{BA}=1$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm N,I,E thẳng hàng, ta có: $\dfrac{NA}{NC}.\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{EB}{EA}=1$



Suy ra $\dfrac{MA}{MC}.\dfrac{DC}{DE}.\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{NA}{NC}.\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{EB}{EA}$

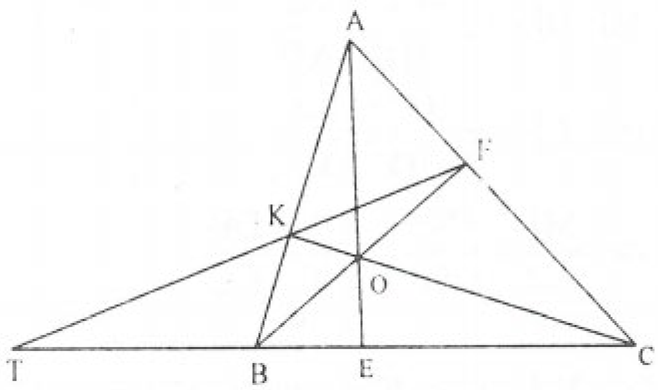
do đó $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{NA}{NC}.\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{DE}{DC}.\dfrac{AB}{AE}\quad(1)$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBEC với ba điểm I,D,A thẳng hàng, nên

$\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{AB}{AE}.\dfrac{DE}{DC}=1\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{NA}{NC}$.

17.8. Áp dụng định lý Ce-va trong ΔABC với 3 đường thẳng đồng quy AE,BF,CK, ta có:



$\dfrac{EB}{EC}.\dfrac{FC}{FA}.\dfrac{KA}{KB}=1\quad(1)$

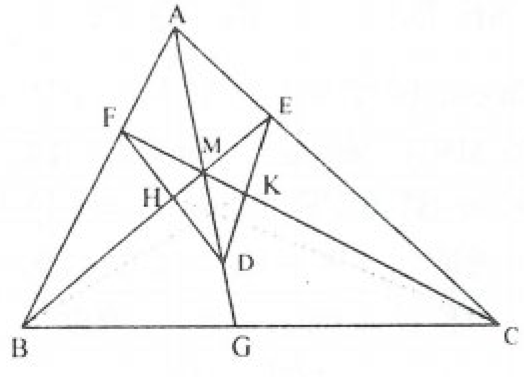
Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm T,K,F thẳng hàng, ta có:

$\dfrac{TC}{TB}.\dfrac{KB}{KA}.\dfrac{FA}{FC}=1\quad(2)$

Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được: $\dfrac{TB}{TC}=\dfrac{EB}{EC}$.

17.9. Gọi BC giao với AD tại G.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\Delta ABM,\Delta AMC$ ta được:



$\dfrac{DM}{DA}.\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{HB}{HM}=1\quad(1)$

$\dfrac{DM}{DA}.\dfrac{EA}{EC}.\dfrac{KC}{KM}=1\quad(2)$

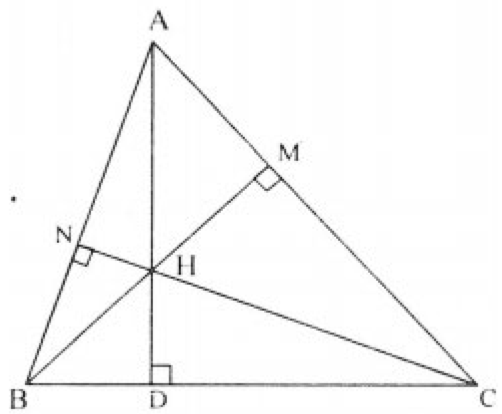
Chia (1) cho (2), ta được:

$\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{KC}{KM}.\dfrac{HM}{HB}\quad(3)$

Vì AG, BE, CF đồng quy $\Rightarrow \frac{GB}{GC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1 \Rightarrow \frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{GC}{GA}$ (4)

Từ (3) và (4): $\frac{GC}{GB}=\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB} \Rightarrow \frac{GB}{GC}.\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}=1$

Ta có điều phải chứng minh.



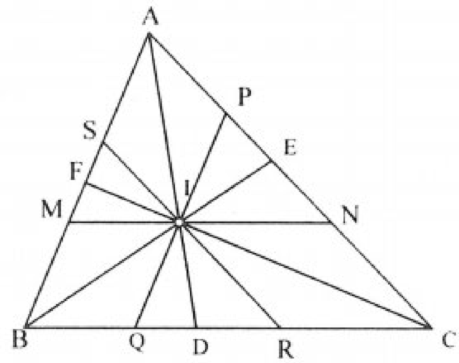
17.10. Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung cạnh đáy, ta có:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HM}{BM}+\frac{HN}{CN}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1.$$

Áp dụng định lý Ce-va, ta có:

$$\frac{DB}{DC}.\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



17.11. a) Áp dụng hệ quả định lý ta-lét, ta có:

$$MI // BD \Rightarrow \frac{MI}{BD}=\frac{AI}{AD}$$

$$IN // CD \Rightarrow \frac{IN}{CD}=\frac{AI}{AD}$$

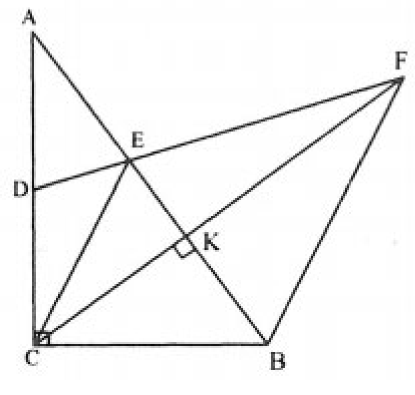
$$\Rightarrow \frac{MI}{BD}=\frac{IN}{CD} \Rightarrow \frac{MI}{NI}=\frac{DB}{DC}.$$

b) Gọi E là giao điểm của giao điểm của đường thẳng BI và $AC; F$ là giao điểm của đường thẳng CI và AB.

Chứng minh tương tự câu a, ta có: $\frac{IP}{IQ}=\frac{AF}{BF};\frac{IR}{IS}=\frac{CE}{AE}$.

Áp dụng định lý Ce-va trong ΔABC đối với AD, BE, CF đồng quy, ta có:

$\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}.\frac{AF}{BF}=1 \Rightarrow \frac{IM}{IN}.\frac{IP}{IQ}.\frac{IR}{IS}=1$. Điều phải chứng minh.



17.12. Ta có: $\widehat{BEC}=\widehat{A}+\widehat{ACE}=\widehat{KCB}+\widehat{KCE}=\widehat{BCE}$

Do đó ΔBCE cân tại B nên $BE=BC$.

Mặt khác $BF // CE$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{CK}{FK}=\frac{EK}{BK} \Rightarrow \frac{CK+FK}{FK}=\frac{EK+BK}{BK} \Rightarrow \frac{CF}{FK}=\frac{BE}{BK}$$

mà $BC=BE$ nên $\frac{CF}{FK}=\frac{BC}{BK}$ (1)

Vì CE là đường phân giác của góc $\widehat{ACK}$

nên: $\frac{AE}{KE}=\frac{AC}{CK}$ (2)

$\Delta ABC \sim \Delta CBK\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{AE}{CK} \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $\dfrac{CF}{FK} = \dfrac{AE}{KE} \quad (4)$

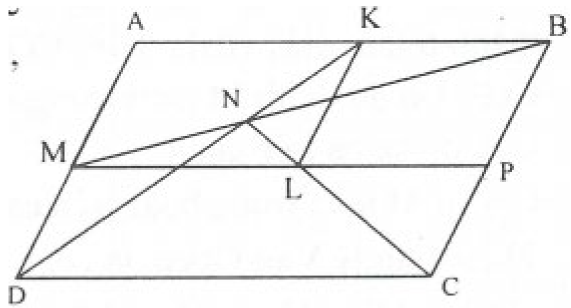
Giả sử đường thẳng EF cắt AC tại D. Áp dụng định lý Mennenlaus vào tam giác ACK bị cát tuyến DEF cắt các cạnh, ta có: $\dfrac{AD}{CD}.\dfrac{CF}{KF}.\dfrac{KE}{AE} = 1 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra: $\dfrac{AD}{CD} = 1$ hay ta có: $AD = CD$.

17.13. Gọi N là giao điểm cảu hai đường thẳng BM và CL. Tứ giác $MLKA$ là hình bình hành. Giả sử đường thẳng ML cắt cạnh BC tại P. Khi đó, ta có: $LP = KP; MD = CP$. Ta sẽ chứng minh D, N, K thẳng hàng.

Áp dụng định lý Mennenlaus vào tam giác BMP bị cắt bởi cát tuyến CLN cắt các cạnh, ta có:

$\dfrac{BN}{NM}.\dfrac{ML}{LP}.\dfrac{PC}{CB} = 1 \Rightarrow \dfrac{BN}{NM}.\dfrac{AK}{KB}.\dfrac{MD}{AD} = 1$



Suy ra ba điểm K, N, D thẳng hàng

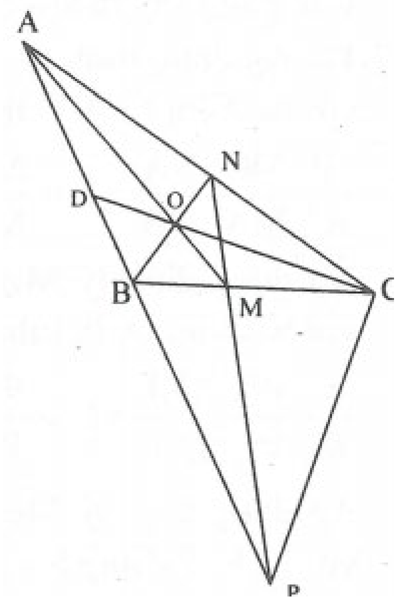
(theo định lý Menelaus đảo vào ΔABM)

Vậy ba đường thẳng CL, DK và BM đồng quy.

17.14. Áp dụng định lý Ce-va vào tam giác ABC, ta có: $\dfrac{CN}{NA}.\dfrac{AD}{DB}.\dfrac{BM}{MC} = 1 \quad (1)$

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ABC với ba điểm N, M, P thẳng hàng, ta có:

$\dfrac{CN}{NA}.\dfrac{AP}{PB}.\dfrac{BM}{MC} = 1 \quad (2)$



Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{CN}{NA}.\dfrac{AD}{DB}.\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}.\dfrac{AP}{PB}.\dfrac{BM}{MC}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AP}{PB} \quad (3)$

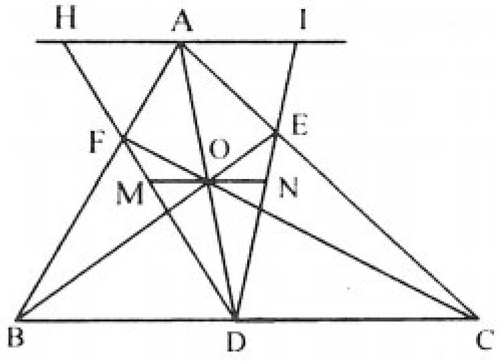
Từ giả thiết CD là đường phân giác của ΔABC

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CA}{CD} \Rightarrow CP$ là đường phân giác ngoài của tam giác ABC.

Từ đó suy ra $CD \perp CP$.

17.15. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC cắt DM, DN lần lượt tại H và I.

Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có:



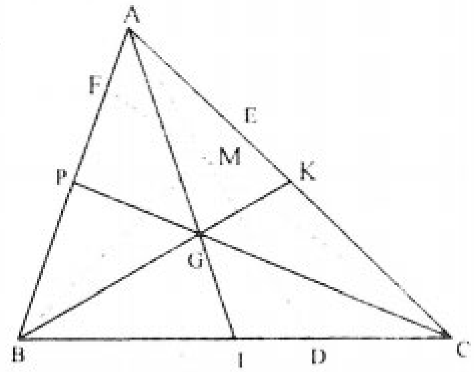
$\frac{AH}{BD} = \frac{AF}{BF}; \quad \frac{AI}{CD} = \frac{AE}{EC}$

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ABC với ba đường AD, BE, CF đồng quy tại O, ta có:

$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AH}{BD} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CD}{AI} = 1 \Rightarrow \frac{AH}{AI} = 1$ hay $AH = AI$

$MN // HI$ theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\frac{OM}{AH} = \frac{DO}{DA} = \frac{ON}{AI}$

Mà $AH = AI$ nên $OM = ON$



17.16. Kẻ ba đường trung tuyến AI, BK, CP của tam giác ABC có trọng tâm G chia tam giác thành 6 tam giác $BGI, BGP, CGK, AGK, AGP, CGI$. Do đó điểm M nằm trong một trong 6 tam giác đó kể cả trên cạnh.

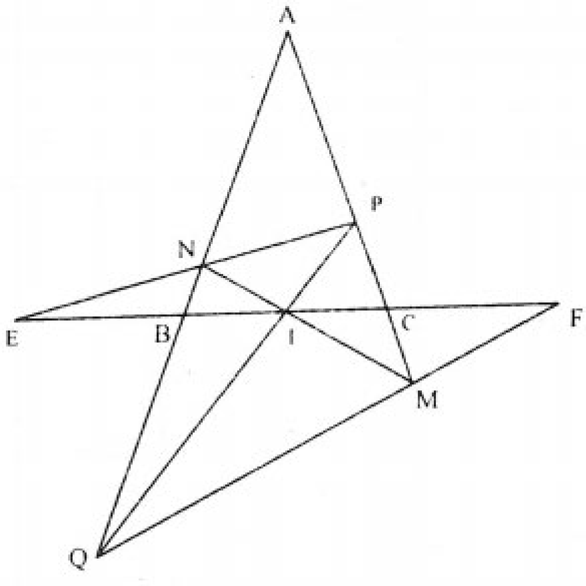
Giải sử M nằm trong hoặc trên cạnh của ΔAGK.

Theo định lý Van-Oben, ta có:

$\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} \le \frac{AF}{PB} + \frac{AE}{KC} \le 2$.

Mặt khác $\frac{BM}{ME} = \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} \ge \frac{BF}{PA} + \frac{BD}{IC} \ge 2$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với G. Suy ra điều phải chứng minh.



17.17. Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm M, N, I thẳng hàng, ta có:

$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \quad (1)$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm Q, P, I thẳng hàng, ta có:

$\frac{IC}{IB} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PC} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \quad (2)$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm N, E, P thẳng hàng, ta có:

$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \quad (3)$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm Q, M, F thẳng hàng, ta có:

$\dfrac{FC}{FB}.\dfrac{QB}{QA}.\dfrac{MA}{MC}=1 \quad (4)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{QB}{QA}.\dfrac{PA}{PC}$ do đó $\dfrac{PC}{PA}.\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{QB}{QA}.\dfrac{MA}{MC}$.

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{EB}{EC}.\dfrac{PC}{PA}.\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{FC}{FB}.\dfrac{QB}{QA}.\dfrac{MA}{MC}$

Từ đó suy ra: $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{FC}{FB}\Rightarrow\dfrac{EB}{EB+EC}=\dfrac{FC}{FB+FC}$

$\Rightarrow\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{FC}{BC}\Rightarrow BE=FC\Rightarrow IE=IF$.

17.18. a) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABE với 3 điểm thẳng hàng A',M,C', ta có: $\dfrac{AM}{ME}.\dfrac{EA'}{A'B}.\dfrac{BC'}{C'A}=1$

$\Rightarrow\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{C'A}{BC'}.\dfrac{A'B}{EA'}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFC với 3 điểm thẳng hàng A',N,B', ta có: $\dfrac{FN}{NA}.\dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{CA'}{A'F}=1$

$\Rightarrow\dfrac{FN}{NA}=\dfrac{A'F}{CA'}.\dfrac{B'C}{AB'}$

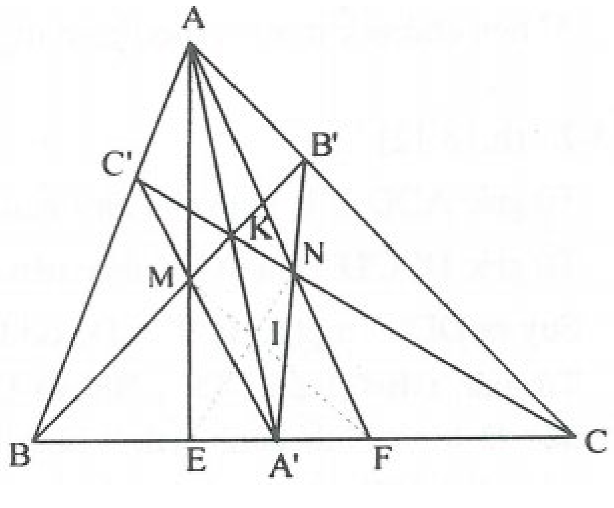
Xét $\dfrac{AM}{ME}.\dfrac{EA'}{A'F}.\dfrac{FN}{NA}=\left(\dfrac{C'A}{BC'}.\dfrac{A'B}{EA'}\right).\dfrac{EA'}{A'F}\left(\dfrac{A'F}{CA'}.\dfrac{B'C}{AB'}\right)$

$=\dfrac{C'A}{BC'}.\dfrac{A'B}{CA'}.\dfrac{B'C}{AB'}=1$

(Do AA',BB',CC' đồng quy tại K - định lý Ce-va)

Cũng theo định lý Ce-va ta có AA',EN và FM đồng quy tại I.

b) Áp dụng định lý Van-Oben cho tam giác $ABA';ACA';AEF$, ta có:



$\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{AK}{KA'}+\dfrac{AC'}{C'B} \quad (1)$

$\dfrac{AN}{NF}=\dfrac{AK}{KA'}+\dfrac{AB'}{B'C} \quad (2)$

$\dfrac{AM}{ME}+\dfrac{AN}{NF}=\dfrac{AI}{IA'} \quad (3)$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được:

$2.\dfrac{AK}{KA'}+\dfrac{AC'}{C'B}+\dfrac{AB'}{B'C}=\dfrac{AI}{IA'} \quad (4)$

Áp dụng định lý Van- Oben cho tam giác ABC, ta có: $\dfrac{AC'}{C'B}+\dfrac{AB'}{B'C}=\dfrac{AK}{KA'}$

Thay vào (4), ta được: $3.\dfrac{AK}{KA'}=\dfrac{AI}{IA'}\Rightarrow 3.IA'.AK=KA'.AI$.

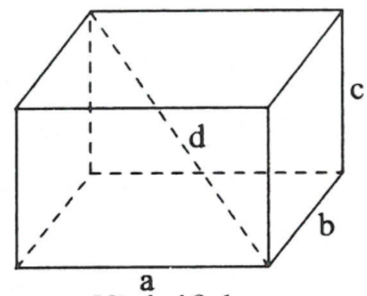
Chương IV: HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

Chuyên đề 18. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hình hộp chữ nhật

- Hình 18.1 cho ta hình ảnh của một hình hộp chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hình lập phương có 6 mặt là những hình vuông.



Hình 18.1

2. Diện tích xung quanh và thể tích của hình hộp chữ nhật

• Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$\boxed{S_{xq} = 2(a+b).c}$$

• Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$$\boxed{S_{tp} = 2(ab+bc+ca)}$$

• Thể tích của hình hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước.

$$\boxed{V = abc}$$

• Đặc biệt, đối với hình lập phương thì:

$$\boxed{S_{xq} = 4a^2} \qquad \boxed{S_{tp} = 6a^2} \qquad \boxed{V = a^3}$$

3. Tính chất đường chéo của hình hộp chữ nhật

• Bốn đường chéo của hình hộp chữ nhật cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

• Bình phương của mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước.

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

4. Quan hệ vị trí của hai đường thẳng phân biệt trong không gian (h.18.2)

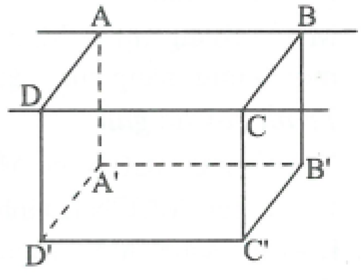
• Cắt nhau: Nếu hai đường thẳng có một điểm chung.

Ví dụ: AB và BC.

• Song song: Nếu hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Ví dụ: AB và CD.

• Chéo nhau: Nếu hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.



Hình 18.2

Ví dụ: AB và CC'

Nhận xét. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song.

5. Quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng (h.18.2)

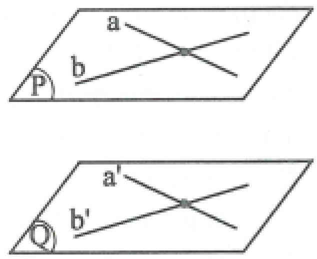
• Đường thẳng song song với mặt phẳng khi chúng không có điểm chung.

Ví dụ: $AB // mp(A'B'C'D')$.

• Nếu $AB \not\subset mp(P); A'B' \subset mp(P)$ và $AB // A'B'$ thì $AB // mp(P)$.

Nhận xét. Nếu $A, B \in mp(P)$ thì đường thẳng AB nằm trọn trong mp(P).

6. Quan hệ song song của hai mặt phẳng (h.18.3)



Hình 18.3

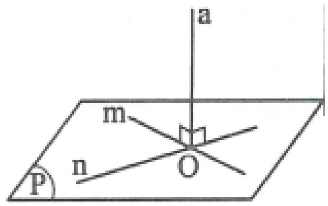
• Hai mặt phẳng song song khi chúng không có điểm chung.

• Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b; mp(Q) chứa hai đường thẳng cắt nhau a' và b' trong đó $a // a'$ và $b // b'$ thì $mp(P) // mp(Q)$.

• Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b mà $a // mp(Q)$ và $b // mp(Q)$ thì $mp(P) // mp(Q)$.

Nhận xét. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng đi qua điểm chung ấy, gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

7. Quan hệ vuông góc (h.18.4)



Hình 18.4

• Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng thì ta nói đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

• Nếu đường thẳng $a \perp mp(P)$ tại điểm O thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng qua O và nằm trong mp(P).

• Nếu $a \in mp(P)$ và $a \perp mp(Q)$ thì $mp(P) \perp mp(Q)$.

B. Một số ví dụ

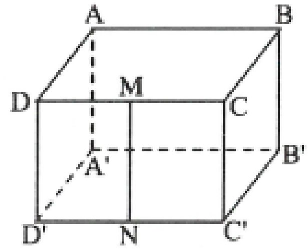
Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và $C'D'$. Chứng minh rằng $MN // mp(BCC'B')$.

Giải (h.18.5)

****Tìm cách giải***

Muốn chứng minh $MN // mp(BCC'B')$ ta phải chứng minh MN song song với một đường thẳng của mặt phẳng $(BCC'B')$.

****Trình bày lời giải***



Hình 18.5

Xét tứ giác $MCC'N'$ có $MC // NC'$ và $MC = NC'$.

Vậy tứ giác $MCC'N$ là hình bình hành, suy ra $MN // CC'$.

Đường thẳng MN không nằm trong mặt phẳng $(BCC'B')$ còn đường thẳng CC' nằm trong mặt phẳng $(BCC'B')$ mà $MN // CC'$ nên $MN // mp(BCC'B')$.

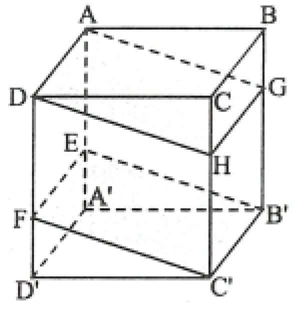
Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', DD', BB', CC' lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = DF = \frac{2}{3}DD'; BG = CH = \frac{1}{3}CC'$. Chứng minh rằng $mp(ADHG) // mp(EFC'B')$.

Giải (h.18.6)

Tìm cách giải

Để chứng minh $mp(ADHG) // mp(EFC'B')$ ta tìm cách chứng minh hai đường thẳng cắt nhau của mp(ADHG) tương ứng song song với hai đường thẳng cắt nhau của $mp(EFC'B')$.

Trình bày lời giải



Hình 18.6

Tứ giác BCHG có $BG = CH; BG // CH$ nên là hình bình hành, suy ra $HG // BC$.

Mặt khác $BC // B'C'$ nên $HG // B'C'$.

Tứ giác $DHC'F$ có $DF // HC'$ và $DF = HC'$ nên là hình hình hành, suy ra $DH = FC'$.

Xét mp(ADHG) có HG và DH cắt nhau tại H.

Xét $mp(EFC'B')$ có $B'C'$ và FC' cắt nhau tại C'.

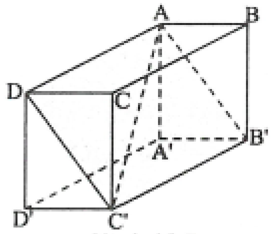
Từ đó suy ra $mp(ADHG) // mp(EFC'B')$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích của hình chữ nhật $ADC'B'$ biết: $AB = 12, AC' = 29, DD' = 16$.

Giải (h.18.7)



Hình 18.7

a) Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật, suy ra $AD // A'D'$ và $AD = A'D'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, suy ra $B'C' // A'D'$ và $B'C' = A'D'$.

Do đó $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$.

Vậy tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành.

Ta có: $AD \perp DD'$ và $AD \perp DC$ nên $AD \perp mp(DCC'D')$. Suy ra $AD \perp DC'$.

Do đó hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\Delta DD'C'$ vuông tại D' có $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Xét $\Delta ADC'$ vuông tại D có $AD = \sqrt{AC'^2 - DC'^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$.

Vậy diện tích hình chữ nhật $ADC'B'$ là $S = DC'.AD = 20.21 = 420$ (đvdt).

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

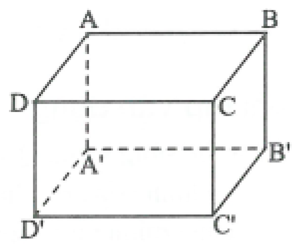
a) Chứng minh rằng $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$.

b) Trong số sáu mặt của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp mặt phẳng vuông góc với nhau?

Giải (h.18.8)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $mp(DCC'D')$ vuông góc với $mp(CBB'C')$ ta cần chứng minh một đường thẳng của $mp(DCC'D')$ vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của $mp(CBB'C')$.



Hình 18.8

*** Trình bày lời giải**

a) Vì $DD'C'C$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp CC'$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp B'C'$.

Vậy $D'C'$ vuông góc với hai đường giao nhau của $mp(CBB'C')$ do đó $D'C' \perp mp(CBB'C')$.

Mặt khác, $D'C' \subset mp(DCC'D')$ nên $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta được các cặp mặt có chung một cạnh thì vuông góc với nhau. Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh nên có 12 cặp mặt vuông góc với nhau.

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Diện tích các mặt $ABCD, BCC'B'$ và $DCC'D'$ lần lượt là $108cm^2, 72cm^2$ và $96cm^2$.

a) Tính thể tích của hình hộp.

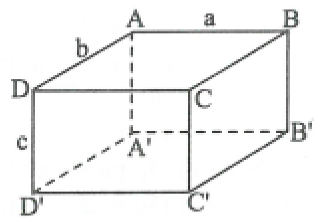
b) Tính độ dài đường chéo của hình hộp.

Giải (h.18.9)

*** Tìm cách giải**

Diện tích các mặt đã cho là tích của hai kích thước.

Thể tích của hình hộp là tích của ba kích thước. Vì vậy ta cần sử dụng các tích của từng cặp hai kích thước để đưa về tích của ba kích thước.



Hình 18.9

*** Trình bày lời giải**

a) Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CC' lần lượt là a, b, c.

Ta có: $ab = 108$ (1); $bc = 72$ (2); $ca = 96$ (3)

Suy ra: $ab.bc.ca = 108.72.96$ hay $(abc)^2 = 746496$.

Do đó $abc = \sqrt{746496} = 864(cm^3)$.

Vậy thể tích của hình hộp là $V = 864(cm^3)$. (4)

b) Từ (4) và (1) ta có: $c = \dfrac{abc}{ab} = \dfrac{864}{108} = 8(cm)$.

Từ (4) và (2) ta có: $a = \dfrac{abc}{bc} = \dfrac{864}{72} = 12(cm)$.

Từ (4) và (3) ta có: $b = \dfrac{abc}{ac} = \dfrac{864}{96} = 9(cm)$.

Vậy đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài là:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = 17(cm).$$

C. Bài tập vận dụng

- **Quan hệ song song. Quan hệ vuông góc**

18.1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $mp(ACD') /// //mp(A'C'B)$.

b) Chứng minh rằng $mp(CDB')$ và $mp(BCD')$ cắt nhau. Tìm giao tuyến của chúng.

18.2. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình vuông. Chứng minh rằng $mp(DBB'D')$ vuông góc với $mp(ACC'A')$.

18.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm giao tuyến m của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(DBB'D')$.

b) Chứng minh giao tuyến $m \perp mp(A'B'C'D')$.

c) Chứng minh $mp(BDD'B') \perp mp(A'B'C'D')$.

- **Các mặt – Các đỉnh của hình hộp chữ nhật**

18.4. Người ta ghép 480 hình lập phương nhỏ cạnh 1cm thành một hình hộp chữ nhật kích thước $8 \times 12 \times 5cm$ rồi sơn tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật này. Hỏi:

a) Có bao nhiêu hình lập phương nhỏ cạnh 1cm không được sơn mặt nào?

b) Có bao nhiêu hình lập phương nhỏ cạnh 1cm có ít nhất một mặt được sơn?

18.5. Một hình lập phương cạnh n đơn vị $(n \in \mathrm{N}; n \geq 2)$), cả 6 mặt đều được sơn màu xanh. Người ta chia hình lập phương này thành n^3 hình lập phương cạnh 1 (đơn vị). Cho biết số hình lập phương nhỏ cạnh 1 (đơn vị) không được sơn mặt nào là 27. Tính:

a) Giá trị của n;

b) Số hình lập phương nhỏ được sơn ba mặt;

c) Số hình lập phương nhỏ được sơn hai mặt;

d) Số hình lập phương nhỏ được sơn đúng một mặt.

18.6. Một chiếc hộp hình lập phương cạnh 6cm được đặt trên mặt bàn. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến phải bò trên mặt hộp từ trung điểm M của $C'D'$ đến đỉnh A.

18.7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu của nó là hai đỉnh của hình hộp chữ nhật?

b) Chứng tỏ rằng trong các đoạn thẳng nói trên, chỉ có tối đa 7 giá trị khác nhau về độ dài.

18.8. Người ta ghi vào sáu mặt của một hình lập phương các số tự nhiên từ 1 đến 6. Sau đó cứ mỗi lượt, ta cộng thêm cùng một số tự nhiên vào hai mặt của hình lập phương đó. Hỏi sau một số lượt, có thể xảy ra sáu số bằng nhau ở sáu mặt của hình lập phương được không?

- **Tính độ dài – Diện tích – Thể tích**

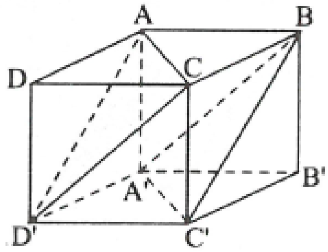
18.9. Một hình hộp chữ nhật có các kích thước bằng 8, 9, 12. Tính độ dài lớn nhất của một đoạn thẳng có thể đặt trong hình hộp chữ nhật đó.

18.10. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước bằng 61cm và đường chéo bằng 37cm. Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

18.11. Đường chéo của một hình lập phương dài hơn đường chéo mỗi mặt của nó là 1cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.

Hướng dẫn giải

18.1. (h.18.10)



Hình 18.10

a) Xét hình bình hành $ACC'A'$ có $AC /// A'C'$

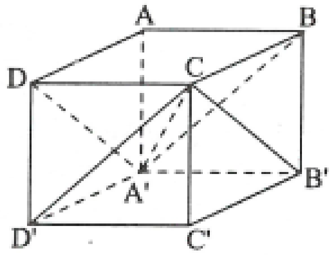
$\Rightarrow AC /// mp(BA'C')$.

Xét hình bình hành $ABC'D'$ có $AD' /// BC'$

$\Rightarrow AD' // mp(BA'C')$.

Vì AC và AD' cắt nhau tại A nên $mp(ACD') /// mp(BA'C')$.

b) (h.18.11)



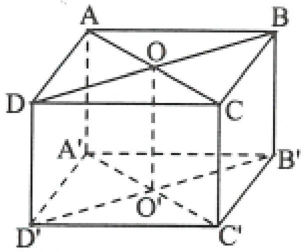
Hình 18.11

Mặt phẳng (CDB') cũng là mặt phẳng $(CDA'B')$.

Mặt phẳng (BCD') cũng là mặt phẳng $(BCD'A')$.

Hai mặt phẳng này có hai điểm chung là C và A' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến CA'.

18.2. (h.18.12)



Hình 18.12

Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật nên $DD' \perp D'A'$.

Tứ giác $DCC'D'$ là hình chữ nhật nên $DD' \perp D'C'$.

Suy ra $DD' \perp mp(A'B'C'D')$. Do đó $DD' \perp D'B'$.

Tứ giác $DBB'D'$ có $DD' // BB'$ và $DD' = BB'$ nên là hình bình hành. Hình bình hành này có $DD' \perp D'B'$ nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Ta có OO' là đường trung bình của hình chữ nhật $DBB'D'$ nên $OO' \perp DB$.

Ta lại có $AC \perp BD$ (tính chất đường chéo hình vuông) suy ra $BD \perp mp(ACC'A')$.

Mặt phẳng $(DBB'D')$ chứa BD nên $mp(DBB'D') \perp mp(ACC'A')$.

18.3. (h.18.12)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Ta có: $O \in AC$ mà $AC \subset mp(ACC'A')$ nên $O \in mp(ACC'A')$.

$O \in BD$ mà $BD \subset mp(BDD'B')$ nên $O \in mp(BDD'B')$.

Vậy O là điểm chung của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.

Chứng minh tương tự, O' là điểm chung của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.

Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có hai điểm chung là O và O' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến m là đường thẳng OO'.

b) Trong mặt chéo $(DBB'D')$ có OO' là đường trung bình nên $OO' \perp B'D'$ (tại O').

Chứng minh tương tự, ta được $OO' \perp A'C'$ (tại O').

Đường thẳng OO' vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của $mp(A'B'C'D')$ nên $OO' \perp mp(A'B'C'D')$.

c) Ta có: $OO' \perp mp(A'B'C'D')$ mà $OO' \subset mp(BDD'B')$ nên $mp(BDD'B') \perp mp(A'B'C'D')$.

18.4. a) Các hình lập phương nhỏ không được sơn mặt nào là các hình lập phương ở bên trong. Chúng tạo thành một hình hộp chữ nhật có độ dài các cạnh là:

$8-2=6(cm); 12-2=10(cm); 5-2=3(cm)$.

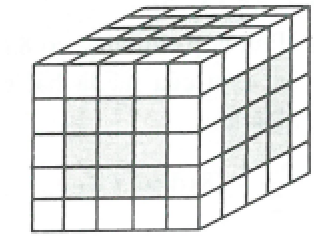
Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là: $6.10.3=180(cm^3)$.

Vậy có tất cả 180 hình lập phương nhỏ không được sơn mặt nào.

b) Có tất cả 480 hình lập phương nhỏ, trong đó có 180 hình không được sơn mặt nào. Vậy số hình lập phương nhỏ có ít nhất một mặt được sơn là:

$480-180=300$ (hình)

18.5. (h.18.13)



Hình 18.13

a) Các hình lập phương đơn vị không được sơn mặt nào ở bên trong hình lập phương đã cho, chúng tạo thành một hình lập phương có cạnh dài $\sqrt{27}=3$ (đơn vị).

Do đó cạnh của hình lập phương đã cho dài là:

$n=3+2=5$ (đơn vị dài).

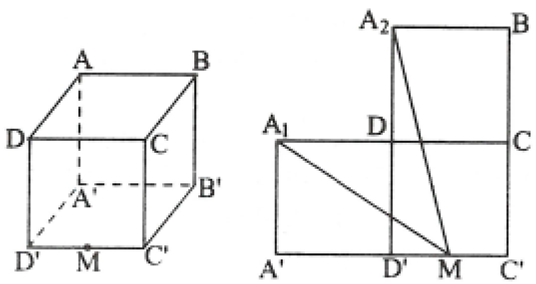
b) Ở mỗi đỉnh có một hình lập phương được sơn ba mặt. Có tất cả 8 đỉnh nên có 8 hình lập phương đơn vị được sơn ba mặt.

c) Ở mỗi cạnh có ba hình lập phương đơn vị được sơn hai mặt. Có tất cả 12 cạnh nên có $3.12=36$ hình lập phương đơn vị được sơn hai mặt.

d) Ở mỗi mặt có 9 hình lập phương đơn vị được sơn một mặt. Có tất cả 6 mặt nên có $9.6=54$ hình lập phương đơn vị được sơn một mặt.

18.6. (h.18.14)

Khai triển hình lập phương rồi trải phẳng ba mặt $(ABCD), (CDD'C')$ và $(ADD'A')$ ta được hình dưới.



Hình 18.14

• Xét trường hợp kiến bò qua cạnh DD' để tới đỉnh A: Đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò từ M đến A là:

$MA_1 = \sqrt{(6+3)^2 + 6^2} = \sqrt{117} \approx 10,8(cm)$.

• Xét trường hợp kiến bò qua cạnh DC để tới đỉnh A: Đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò từ M đến A là:

$MA_2 = \sqrt{(6+6)^2 + 3^2} = \sqrt{153} \approx 12,4(cm)$

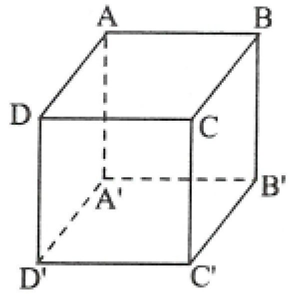
• Xét trường hợp kiến bò qua cạnh CC' để tới đỉnh A: Dễ thấy đoạn đường mà kiến phải bò từ M đến A dài hơn nhiều so với hai trường hợp trên.

Kết luận: Vậy đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò là 10,8cm.

18.7. (h.18.15)

a) Hình hộp chữ nhật có 8 đỉnh. Số đoạn thẳng mà hai đầu của nó là hai đỉnh của hình hộp chữ nhật là:

$\frac{8.7}{2} = 28$ (đoạn thẳng).



Hình 18.15

b) 28 đoạn thẳng này chia làm 7 nhóm, mỗi nhóm 4 đoạn thẳng dài bằng nhau (chẳng hạn $AB = CD = C'D' = A'B'$).

Từ đó suy ra trong 28 đoạn thẳng này chỉ có tối đa 7 giá trị khác nhau về độ dài.

18.8. Lúc đầu tổng 6 số ở 6 mặt là $1+2+3+4+5+6=21$. Đó là một số lẻ.

Sau mỗi lượt, tổng này tăng thêm một số chẵn nên tổng các số ở 6 mặt luôn là một số lẻ, không chia hết cho 6. Do đó không thể xảy ra cả 6 số bằng nhau.

18.9. Áp dụng công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 289$.

Suy ra $d = \sqrt{289} = 17$.

Vậy độ dài lớn nhất của một đoạn thẳng có thể đặt trong hình hộp chữ nhật là 17.

18.10. Gọi ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c. Ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=61 & (1) \\ a^2+b^2+c^2=37 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $(a+b+c)^2 = 61^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 3721$.

Do đó $2(ab+bc+ca) = 3721 - 1369 = 2352(cm^2)$.

Vậy diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là $2352(cm^2)$.

18.11. Gọi a là độ dài mỗi cạnh của hình lập phương và d là độ dài đường chéo của hình lập phương đó.

Ta có: $d^2 = 3a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}(cm)$.

Độ dài đường chéo mỗi mặt của hình lập phương đó là $a\sqrt{2}$.

Ta có: $a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}+\sqrt{2}(cm)$.

Diện tích toàn phần của hình lập phương là:

$S=6a^2=6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\approx 59,39(cm^2)$.

Thể tích của hình lập phương là: $V=a^3=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3\approx 31,14(cm^3)$.

Chương

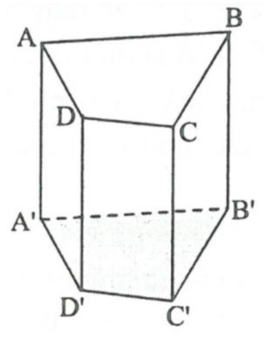
Chuyên đề 19.

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Mô tả hình dạnh lăng trụ đứng

Hình 19.1 cho ta hình ảnh của một hình lăng trụ đứng.



Hình 19.1

* Các mặt bên là những hình chữ nhật.

* Các cạnh bên song song và bằng nhau.

* Hai đáy là hai đa giác nằm trong hai mặt phẳng song song.

* Các cạnh bên cũng như các mặt bên đều vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

2. Diện tích xung quanh – Thể tích của hình lăng trụ đứng.

* Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = 2p.h$$

(p là nửa chu vi đáy; h là chiều cao)

$$\mathrm{S_{tp}} = \mathrm{S_{xq}} + 2\mathrm{S}_{đáy}$$

* Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao

$$V = S.h$$

(S là diện tích đáy; h là chiều cao)

B. Một số ví dụ

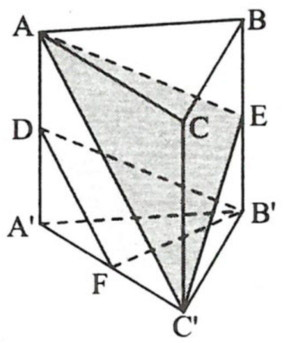
Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của $AA', BB', A'C'$.

Chứng minh rằng $mp\left(AEC'\right) // mp\left(DB'F\right)$

Giải (h.19.2)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $mp\left(AEC'\right) // mp\left(DB'F\right)$ ta chứng minh hai đường thẳng giao nhau của $mp\left(AEC'\right)$ tương ứng song song với hai đường thẳng giao nhau của $mp\left(DB'F\right)$.



Hình 19.2

*** Trình bày lời giải**

Ta có: $AD // EB'$ và $AD = EB'$ nên tứ giác $AEB'D$ là hình bình hành.

Suy ra $AE // DB'$ (1)

Xét $\Delta AC'A'$ có DF là đường trung bình nên $DF // AC'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $mp\left(AEC'\right) // mp\left(DB'F\right)$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A.

a) Chứng minh rằng $mp\left(ABB'A'\right) \perp mp\left(ACC'A'\right)$.

b) Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh $B'C'$. Chứng minh rằng $mp(AA'M) \perp mp(A'B'C')$.

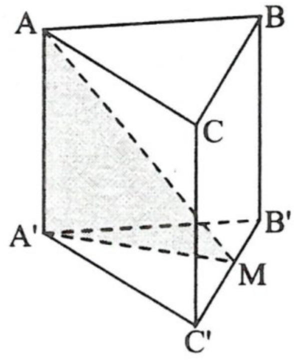
c) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh $B'C'$ để độ dài AM nhỏ nhất.

Giải (h.19.3)

*** Tìm hướng giải**

Muốn chứng minh $mp(ABB'A') \perp mp(ACC'A')$ ta chứng minh một đường thẳng của mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.

*** Trình bày lời giải**



Hình 19.3

a) ta có: $AB \perp AA'$ và $AB \perp AC$ nên $AB \perp mp(ACC'A')$.

Mặt khác $AB \subset mp(ABB'A')$ nên $mp(ABB'A') \perp mp(ACC'A')$

b) Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA' \perp mp(A'B'C')$.

Mặt khác, $AA' \subset mp(AA'M)$ nên $mp(AA'M) \perp mp(A'B'C')$.

c) Xét $\Delta AA'M$ vuông tại A', ta có:

$AM^2 = AA'^2 + A'M^2$ trong đó AA' không đổi.

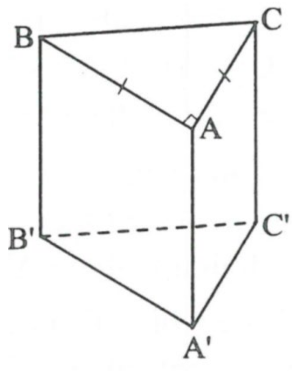
Vậy AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow A'M$ nhỏ nhất.

Xét $mp(A'B'C')$ ta có $A'M$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A'M \perp B'C'$

Vậy để độ dài AM nhỏ nhất thì M phải là hình chiếu của A trên $B'C'$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết hình trụ này có chiều cao là $4m$ và thể tích là $18m^3$. Tính diện tích toàn phần của nó.

Giải (h.19.4)



Hình 19.4

Ta có: $V = S.h \Rightarrow S = \dfrac{V}{h}$.

Vậy diện tích đáy của hình lăng trụ này là:

$S = \dfrac{18}{4} = 4.5(m^2)$.

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $S = \dfrac{1}{2}AB^2$

Do đó $\dfrac{1}{2}AB^2 = 4.5 \Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3(m)$.

Suy ra $BC = 3\sqrt{2}(m)$.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là:

$$S_{xq} = 2ph = \left(3+3+3\sqrt{2}\right).4 = 24 + 12\sqrt{2}\left(m^2\right)$$

Diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 24 + 12\sqrt{2} + 9 = 33 + 12\sqrt{2} \approx 50\left(m^2\right)$

Ví dụ 4. Một hình lăng trụ đều (tức là lăng trụ có đáy là đa giác đều) có tất cả 18 cạnh, mỗi cạnh dài $4\sqrt{3}cm$. Tính thể tích của hình lăng trụ đó.

Giải

*** Tìm cách giải**

Để tìm được thể tích lăng trụ đứng khi đã biết chiều cao, ta cần tính diện tích đáy.

Đáy là một đa giác đều, đã biết độ dài mỗi cạnh nên cần biết số cạnh đáy là xong.

*** Trình bày lời giải**

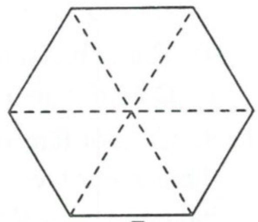
Gọi số cạnh của một đáy là n. Khi đó số cạnh bên là n.

Suy ra tổng số cạnh của hình lăng trụ đứng là $n+n+n=3n$.

Theo đề bài ta có: $3n=18 \Rightarrow n=6.$

Vậy hình lăng trụ đứng đã cho là hình lăng trụ lục giác đều.

Có thể coi diện tích đáy là tổng diện tích của 6 tam giác đều, mỗi cạnh bằng $4\sqrt{3}cm$. (h.19.5)



Hình 19.5

Do đó diện tích đáy là: $S=\dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.6=72\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

Thể tích hình lăng trụ là: $V=S.h=72\sqrt{3}.4\sqrt{3}=864\left(cm^3\right)$.

C. Bài tập vận dụng

*** Chứng minh song song, vuông góc. Tính chiều cao.**

19.1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi E và G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABB' và ACC'. Trong mặt bên $ABB'A'$ vẽ $EM\ //\ BB'\left(M\in AB\right)$. Trong mặt bên $ACC'A'$ vẽ $GN\ //\ CC'\left(N\in AC\right)$.

Chứng minh rằng $mp\left(MNGE\right)\ //\ mp\left(BCC'B'\right)$.

19.2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.AB'C'$ có cạnh đáy $AB=AC=10cm$ và $BC=12cm$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

a) Chứng minh rằng $B'C'\perp mp\left(AA'M\right)$.

b) Cho biết $AM=17cm$, tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

19.3. Một hình lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 26. Biết thể tích của hình lăng trụ là $540cm^3$, diện tích xung quanh là $360cm^2$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đó.

19.4. Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc nhọn $30°$. Cho biết diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng hai lần diện tích xung quanh của nó. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

*** Tinh diện tích, tính thể tích.**

19.5. Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5cm, AC = 12cm$ và chiều cao $AA' = 10cm$. Biết diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $300cm^2$, tính thể tích của nó.

19.6. Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi với các đường chéo bằng $16cm$ và $30cm$. Diện tích toàn phần của hình lăng trụ này là $2680cm^2$, tính thể tích của nó.

19.7. Hình lăng trụ ngũ giác đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$ có cạnh đáy bằng a. Biết hiệu giữa các diện tích xung quanh của hai hình lăng trụ đứng $ABCE.A'B'C'E'$ và $CDE.C'D'E'$ là $4a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

19.8. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = AD = a, \widehat{BCD} = 45°$ và $AC' = 3a$. Tính:

a) Thể tích của hình lăng trụ đứng;

b) Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng.

19.9. Có một tấm bạt hình chữ nhật kích thước $a \times b\left(a > b\right)$. Dùng tấm bạt này để dựng một chiếc lều trại có dạng hình lăng trụ đứng, hai đáy (tức là hai cửa) là hai tam giác vuông cân. Cả tấm bạt thành hai mái lều che sát mặt đất.

a) Chứng minh rằng dù căng tấm bạt theo chiều dài hay chiều rộng thì diện tích của mặt đất bên trong lều là như nhau.

b) Trong hai trường hợp trên, trường hợp nào thể tích không khí bên trong lều lớn hơn?

19.10. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích của nó là $1280cm^3$ và chiều cao là $20cm$. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

19.11. Một chiếc đèn lồng có dạng hình lăng trụ đứng, chiều cao $40cm$ và đáy là lục giác đều cạnh $18cm$

a) Tính diện tích giấy bóng kính để làm mặt xung quanh của đèn.

b) Tính thể tích của đèn.

c) Nếu giữ nguyên chiều cao của đèn thì phải giảm độ dài cạnh đáy bao nhiêu lần để thể tích của đèn giảm đi hai lần.

Hướng dẫn giải

19.1. (h.19.6)

Gọi F là giao điểm của AB' và BA'.

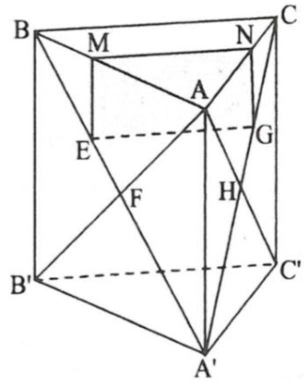
Gọi H là giao điểm của AC' và CA'.

Vì E là trong tâm của $\Delta ABB'$ nên

$$BE = \frac{2}{3}BF = \frac{1}{3}BA'.$$

Vì G là trọng tâm của $\Delta ACC'$ nên

$$CG = \frac{2}{3}CH = \frac{1}{3}CA'.$$



Hình 19.6

Ta có: $EM \,//\, BB' \Rightarrow EM \,//\, AA'$;

$GN \,//\, CC' \Rightarrow GN \,//\, AA'$.

Xét $\Delta BAA'$ có $EM \,//\, AA'$ nên $\frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BA'} = \frac{1}{3}$. (1)

Xét $\Delta CAA'$ có $GN \,//\, AA'$ nên $\frac{CN}{CA} = \frac{CG}{CA'} = \frac{1}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA}\left(=\frac{1}{3}\right)$. Do đó $MN \,//\, BC$

Mặt khác, $ME \,//\, BB'$ nên $mp(MNGE) \,//\, mp(BCC'B')$.

19.2. (h.19.7)

a) Các mặt $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là những hình chữ nhật có cùng kích thước nên đường chéo của chúng phải bằng nhau: $AB' = AC'$.

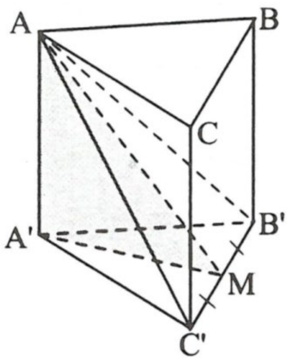
Xét $\Delta AB'C'$ cân tại A, có AM là đường trung tuyến nên $AM \perp B'C'$. (1)

Xét $\Delta A'B'C'$ cân tại A', có $A'M$ là đường trung tuyến nên $A'M \perp B'C'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $B'C' \perp mp(AA'M)$.

b) Xét $\Delta A'B'M$ vuông tại M, ta có: $A'M = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(cm)$.

Xét $\Delta AA'M$ vuông tại A', ta có: $AA' = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15(cm)$.



Hình 19.7

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là:

$S_{xq} = 2p.h = (10+10+12).15 = 480\left(cm^2\right)$.

Diện tích đáy của hình lăng trụ là : $S = \frac{1}{2}B'C'.A'M = \frac{1}{2}.12.8 = 48\left(cm^2\right)$.

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là: $S_{tp} = 480 + 48.2 = 576\left(cm^2\right)$.

19.3. Gọi số cạnh của một đáy là n. Khi đó tổng số cạnh của hình lăng trụ là $3n$; tổng số đỉnh là $2n$ và tổng số mặt là $n+2$. Theo đề bài, ta có:

$(n+2)+2n+3n=26 \Rightarrow n=4.$

Vậy hình lăng trụ đều này có đáy là hình vuông.

Ta có: $V=S.h=540\left(cm^3\right);S_{xq}=2p.h=360\left(cm^2\right).$

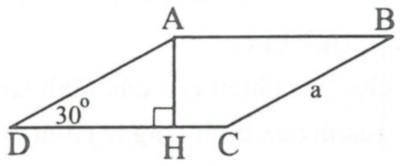
Suy ra $\dfrac{V}{S_{xq}}=\dfrac{540}{360}$ hay $\dfrac{S.h}{2p.h}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{S}{2p}=\dfrac{3}{2}$. Do đó $\dfrac{a^2}{4a}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=6(cm)$.

Chiều cao của hình lăng trụ là: $h=\dfrac{V}{S_{đáy}}=\dfrac{540}{36}=15(cm)$

19.4. Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên diện tích hai đáy bằng diện tích xung quanh. (1)

Xét đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc nhọn $30°$ (h.19.8)

Vẽ $AH\perp CD$, ta có: $AH=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$.



Hình 19.8

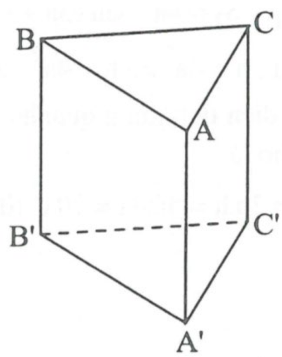
Diện tích $ABCD$ là: $S_{đáy}=a.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$ (2)

Ta có $S_{xq}=2ph=4a.h.$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta được: $2.\dfrac{a^2}{2}=4ah\Rightarrow h=\dfrac{a}{4}.$

19.5. (h.19.9)

Từ công thức $S_{xq}=2p.h$ suy ra $2p=\dfrac{S_{xq}}{h}.$



Hình 19.9

Vậy chu vi của hình lăng trụ đứng là:

$2p=\dfrac{300}{10}=30(cm).$

Suy ra $BC=30-(5+12)=13(cm).$

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2$ (vì $13^2=5^2+12^2$).

Do đó ΔABC vuông tại A.

Diện tích đáy của hình lăng trụ là:

$S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}5.12=30\left(cm^2\right).$

Thể tích của lăng trụ là: $V=S.h=30.10=300\left(cm^3\right).$

19.6. (h.19.10)

Diện tích đáy của hình lăng trụ là:

$S=\dfrac{1}{2}.16.30=240\left(cm^2\right).$

Diện tích xung quanh là:

$S_{xq} = 2860 - 240.2 = 2380\left(cm^2\right)$.

Độ dài cạnh đáy là:

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17\left(cm\right)$.

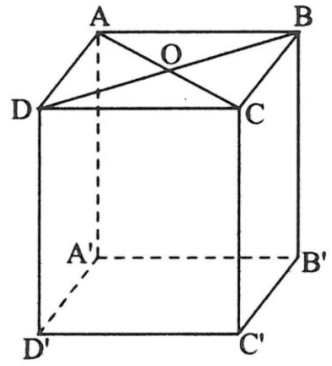
Chu vi đáy là: $17.4 = 68\left(cm\right)$.

Chiều cao của hình lăng trụ là:

$h = \dfrac{S_{xq}}{2p} = \dfrac{2380}{68} = 35\left(cm\right)$.

Thể tích của hình lăng trụ là: $V = S.h = 240.35 = 8400\left(cm^3\right)$.

Vậy thể tích của cốc là $54cm^3$



Hình 19.10

19.7. (h.19.11)

Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng $ABCE.A'B'C'E'$ là:

$S_1 = \left(AB + BC + CE + EA\right).h = \left(3a + CE\right).h.$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng $CDE.C'D'E'$ là:

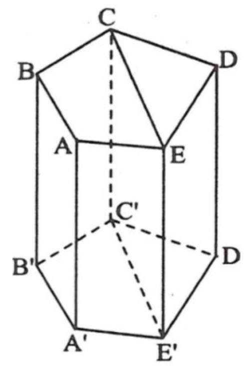
$S_2 = \left(CD + DE + EC\right).h = \left(2a + CE\right).\text{h}$

Vì $S_1 - S_2 = 4a^2$ nên $\left(3a + CE - 2a - CE\right).h = 4a^2$

Hay $a.h = 4a^2 \Rightarrow h = 4a^2 : a = 4a.$

Vậy diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng đã cho là:

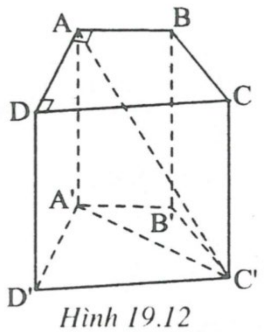
$S_{xq} = 2p.h = 5a.4a = 20a^2$ (đvdt).



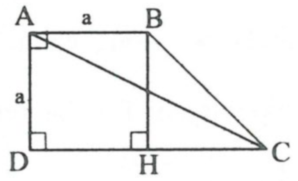
Hình 19.11

19.8. (h.19.12)

a) Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Vẽ $BH \perp CD$ (h.19.13)



Hình 19.12



Hình 19.13

Tứ giác $ABHD$ là hình vuông và ΔHBC vuông cân tại H.

Suy ra $DH = AB = AD = BH = CH = a; CD = 2a; BC = a\sqrt{2}.$

Xét ΔDAC vuông tại D có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + \left(2a\right)^2 = 5a^2$.

Suy ra $A'C'^2 = 5a^2$..

Trong hình lăng trụ đứng, cạnh bên vuông góc với đáy nên

$AA' \perp mp\left(A'B'C'D'\right) \Rightarrow AA' \perp A'C'.$

Xét $\Delta AA'C$ vuông tại A', ta có:

$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{9a^2 - 5a^2} = 2a.$

Diện tích đáy hình lẳng trụ là: $S = \dfrac{\left(AB + CD\right).AD}{2} = \dfrac{\left(a + 2a\right)a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}.$

Thể tích hình lăng trụ là: $V = S.h = \dfrac{3a^2}{2}.2a = 3a^3.$

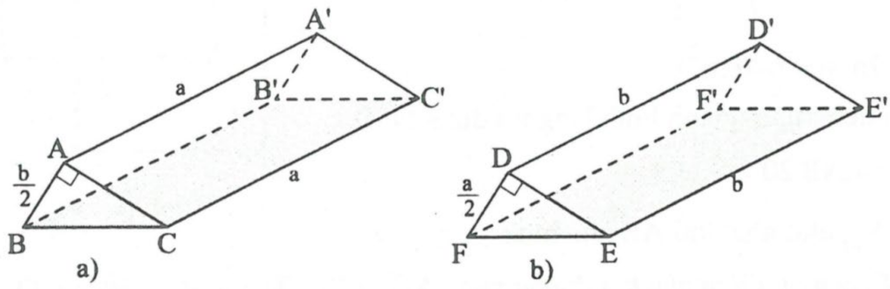
b) Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

$S_{xq} = \left(a + a + 2a + a\sqrt{2}\right).2a = 8a^2 + 2\sqrt{2}a^2.$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ đứng là:

$S_{tp} = 8a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + \dfrac{3a^2}{2}.2 = 11a^2 + 2\sqrt{2}a^2.$

19.9. (h.19.14)



Hình 19.14

a) Xét trường hợp thứ nhất: Tấm bạt được căng theo chiều dài (h.a).

Ta có: $BC = AB\sqrt{2} = \dfrac{b}{2}\sqrt{2}.$

Diện tích mặt đất bên trong lều là: $S_1 = BC.CC' = \dfrac{b}{2}\sqrt{2}a = \dfrac{ab\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

Xét trường hợp thứ hai: Tấm bạt được căng theo chiều rộng (h.b).

Ta có: $EF = DE\sqrt{2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}.$

Diện tích mặt đất bên trong lều là: $S_2 = EF.FF' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.b = \dfrac{ab\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

So sánh hai kết quả ta thấy $S_1 = S_2.$

b) Xét trường hợp thứ nhất: Thể tích không khí bên trong lều là:

$V_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{2}\right)^2.\text{a} = \dfrac{1}{8}ab^2$ (đvdt).

Xét trường hợp thứ hai: Thể tích không khí bên trong lều là:

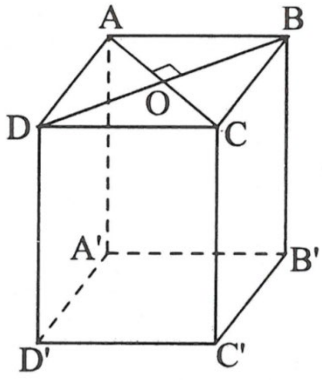
$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2.\text{b} = \frac{1}{8}a^2b$ (đvdt).

Ta có: $V_2 - V_1 = \frac{1}{8}a^2b - \frac{1}{8}ab^2 = \frac{1}{8}ab(a-b) > 0$ (vì $a > b$). Suy ra: $V_2 > V_1$.

Vậy nếu căng tám bạt theo chiều rộng thì thể tích không khí bên trong lều sẽ lớn hơn.

19.10. (h.19.15)

Ta đặt $AC = 2m; BD = 2n$.



Hình 19.15

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S = \frac{1}{2}.2m.2n = 2mn.$

Mặt khác: $S = \frac{V}{h} = \frac{1280}{20} = 64\left(cm^2\right)$

Vậy $2m.n = 64\left(cm^2\right)$.

Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

$S_{xq} = 4.AB.20 = 80AB.$

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có $AC \perp BD$ tại O.

Xét ΔAOB vuông tại O, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = m^2 + n^2.$

Mặt khác $m^2 + n^2 \geq 2mn$. Do đó $AB^2 \geq 64 \Rightarrow AB \geq 8(cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $8cm$ khi $m = n$ tức là khi $ABCD$ là hình vuông.

Giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh là $4.8.20 = 640\left(cm^2\right)$.

19.11. (h.19.16)

a) Chi vi đáy của đèn là: $18 \times 6 = 108(cm)$.

Diện tích xung quanh của đèn là: $S_{xq} = 2p.h = 108 \times 40 = 4320\left(cm^2\right)$.

Vậy diện tích giấy bóng kính để làm mặt xung quanh của đèn là $4320\left(cm^2\right)$.

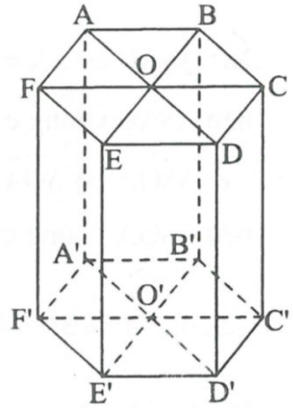
b) Diện tích đáy đèn là:

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.6 = \frac{18^2\sqrt{3}}{4}.6 = 486\sqrt{3}\left(cm^2\right).$

Thể tích của đèn lồng là:

$V = S.h = 486\sqrt{3}.40 = 19440\sqrt{3}\left(cm^3\right) \approx 33671\left(cm^3\right).$

c) Gọi a và b lần lượt là độ dài cạnh đáy đèn lồng trước và sau khi giảm thể tích. Gọi S_1 và S_2 là các diện tích đáy tương ứng. Khi đó:



Hình 19.16

$V_1 = S_1.h; V_2 = S_2.h.$

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{S_1.h}{S_2.h} = 2 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}.6}{4} : \frac{b^2\sqrt{3}.6}{4} = 2.$

$\Leftrightarrow a^2 : \mathrm{b}^2 = 2 \Leftrightarrow a : \mathrm{b} = \sqrt{2}$

Vậy độ dài cạnh đáy phải giảm đi $\sqrt{2}$ lần.

Chuyên đề 20

HÌNH CHÓP ĐỀU

A. Kiến thức cần nhớ

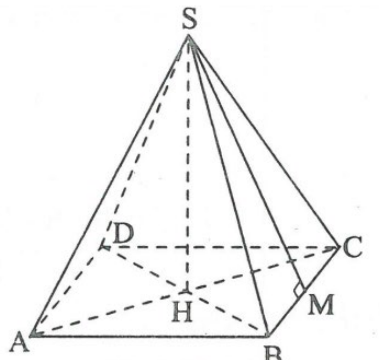
1. Mô tả hình chóp - hình chóp đều

• Hình chóp có đáy là một đa giác.

Các mặt bên là những tam giác chung đỉnh.

Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao của hình chóp.

• Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau (h.20.1).



Hình 20.1

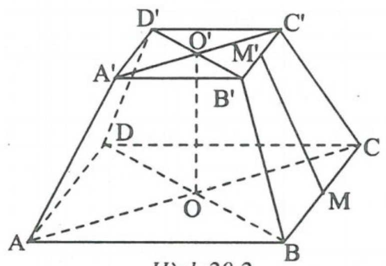
• Trong hình chóp đều, chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy, ví dụ SH. Đường cao của mỗi mặt bên vẽ từ đỉnh *S* gọi là trung đoạn của hình chóp, ví dụ *SM*.

2. Hình chóp cụt đều

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy.

Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy gọi là hình chóp cụt đều (h.20.2).

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.



Hình 20.2

3. Diện tích xung quanh của hình chóp đều

• Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn.

$$\boxed{S_{xq} = p.d}$$

(p là nửa chu vi đáy; d là trung đoạn).

• Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều bằng:

- Diên tích một mặt bên nhân với số mặt bên;
- Diện tích xung quanh của hình chóp đều lớn trừ đi diện tích xung quanh của hình chóp đều nhỏ; hoặc:

$$\boxed{S_{xq} = (p + p').d}$$

(Trong đó: - p, p' là nửa chu vi đáy lớn, đáy nhỏ.

- d là trung đoạn của mặt bên.)

4. Thể tích của hình chóp đều

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S.h}$$

(S là diện tích đáy; h là chiều cao).

• Thể tích của hình chóp cụt đều bằng:

- Thể tích của hình chóp đều lớn trừ đi thể tích của hình chóp đều nhỏ; hoặc:

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right).h}$$

(Trong đó: S_1, S_2 là diện tích hai đáy; h là chiều cao.)

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC*, đường cao *SH*. Trên các cạnh *SA, SB, SC* lần lượt lấy các điểm *A', B', C'* sao cho *SA' = SB' = SC'*. Chứng minh rằng:

a) $mp\left(A'B'C'\right)//mp\left(ABC\right)$;

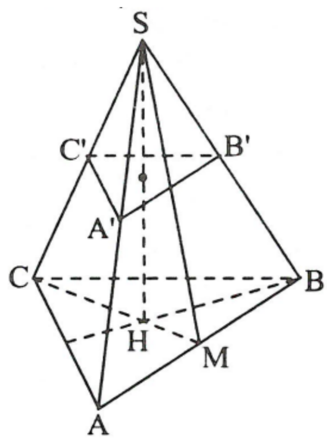
b) $mp\left(SCH\right)\perp mp\left(SAB\right)$.

Giải (h.20.3)

*** Tìm hướng giải**

Muốn chứng minh $mp\left(A'B'C'\right)//mp\left(ABC\right)$ ta chứng minh hai cạnh của $\Delta A'B'C'$ tương ứng song song với hai cạnh của ΔABC.

*** Trình bày lời giải**



Hình 20.3

a) Xét ΔSAC có $SA=SC; SA'=SC'$ nên $\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}$

$\Rightarrow A'C'//AC.$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $A'B'//AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'B'C'//mp\left(ABC\right)$.

b) Xét ΔABC có *H* là giao điểm của ba đường trung tuyến. Gọi *M* là trung điểm của *AB*, ta có:

$CM\perp AB;\mathrm{SM}\perp AB$. Vậy $AB\perp mp\left(SCM\right)$.

Mặt khác $AB\subset mp\left(SAB\right)$ nên $mp\left(SAB\right)\perp mp\left(SCM\right)$ hay $mp\left(SAB\right)\perp mp\left(SCH\right)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều và *SA* là đường cao của hình chóp. Gọi *M* là trung điểm của *BC*.

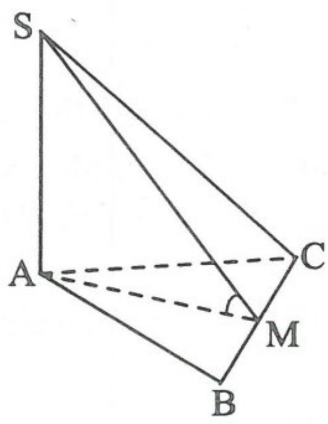
a) Chứng minh rằng $mp\left(SAM\right)\perp mp\left(SBC\right)$.

b) Cho biết $SMA=30^o$ chứng minh rằng diện tích tam giác *BCS* bằng tổng diện tích của các tam giác *ABS* và *ACS*.

Giải (h.20.4)

*** Tìm cách giải**

Vì $BC \subset mp(SBC)$ nên muốn chứng minh $mp(SBC) \perp mp(SAM)$ ta chỉ cần chứng minh BC vuông góc với AM và SM.



Hình 20.4

*** Trình bày lời giải**

a) $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow SA \perp AB; SA \perp AC.$

$\Delta SAB = \Delta SAC\,(c.g.c) \Rightarrow SB \Rightarrow SC.$

Xét ΔSBC cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$;

Xét ΔABC đều $\Rightarrow AM \perp BC$. Suy ra $BC \perp mp(SAM)$..

Mặt khác $BC \subset mp(SBC)$ nên $mp(SBC) \perp mp(SAM)$.

b) Xét ΔSAM vuông tại A, $\widehat{SMA} = 30^o$ nên $SA = \dfrac{1}{2}SM$ hay $SM = 2SA$

Diện tích ΔBCS là: $\dfrac{1}{2}BC.SM = \dfrac{1}{2}BC.2SA = BC.SA.$ (1)

Tổng diện tích các ΔABS và ΔACS là:

$\dfrac{1}{2}AB.SA + \dfrac{1}{2}AC.SA = \dfrac{1}{2}SA(BC + BC) = SA.BC$ (2)

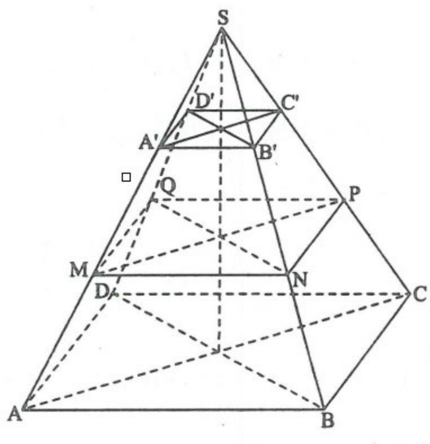
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 3: Cho hình chóp cụt tứ giác đều *ABCD.A'B'C'D'*. Một mặt phẳng song song với đáy của hình chóp cụt cắt các cạnh *A A' B B' C C', DD'* lần lượt tại *M, N, P, Q*. Chứng minh rằng tứ giác *MNPQ* là hình vuông.

Giải (h.20.5)

Gọi S là đỉnh của hình chóp sinh ra hình chóp cụt.

Vì $mp(MNPQ)//mp(ABCD)$ nên hình chóp cụt *ABCD.MNPQ* là hình chóp cụt đều. Các mặt bên của nó đều là hình thang cân.



Hình 20.5

Suy ra: $NP//BC$; $MQ//AD$.

Mặt khác $BC//AD$ nên $NP//MQ$

Chứng minh tương tự ta được $MN//PQ$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Xét ΔSBC có $NP//BC$ nên $\dfrac{BC}{NP} = \dfrac{SB}{SN}$. (1)

Xét ΔSAB có $MN//AB$ nên $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{SB}{SN}$ (2)

Từ (l) và (2) $\Rightarrow \frac{BC}{NP}=\frac{AB}{MN}$ mà $BC = AB$ nên $NP = MN$.

Hình bình hành *MNPQ* có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Hai đường thẳng *MP* và *AC* cùng nằm trong mặt phẳng (*SAC*) và hai đường thẳng này không có điểm chung (vì nằm trong hai mặt phẳng song song) nên $MP // AC$.

Chứng minh tương tự, ta được $NQ // BD$.

Ta có: $\frac{AC}{MP}=\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SN}=\frac{BD}{NQ}$. Vì $AC = BD$ nên $MP = NQ$.

Hình thoi *MNPQ* có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có độ dài cạnh đáy là 12cm, độ dài cạnh bên là 8cm. Hãy tính:

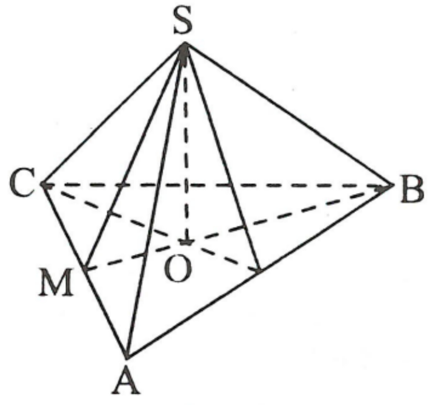
a) Thể tích của hình chóp;

b) Diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải (h.20.6)

*** Tìm hướng giải**

Để tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp đều khi đã biết độ dài của cạnh đáy và cạnh bên, ta cần tính chiều cao và trung đoạn của hình chóp.



Hình 20.6

*** Trình bày lời giải**

a) Gọi *M* là trung điểm của *AC* và *O* là giao điểm của ba đường trung tuyến của ΔABC.

Ta có *BM* là đường cao của tam giác đều nên

$BM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ cm

$BO=\frac{2}{3}BM=4\sqrt{3}$ cm

ΔSBO vuông tại *O* nên ta có:

$SO^2=SB^2-OB^2=8-\left(4\sqrt{3}\right)^2=16$

$\Rightarrow SO=4\,(\text{cm})$

Diện tích ΔABC là $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{144\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$ (cm^2).

Thể tích của hình chóp là: $V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}.36\sqrt{3}.4=48\sqrt{3}$ (cm^3).

b) Tam giác *SMA* vuông tại *M* nên $SM^2=SA^2-MA^2=8^2-6^2$

$\Rightarrow SM=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ (cm)

Diện tích xung quanh của hình chóp là:

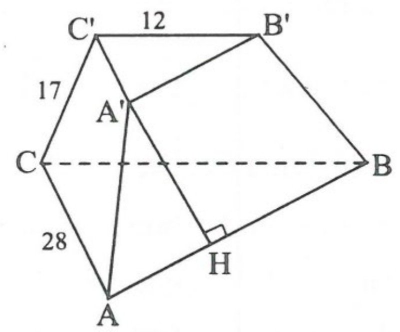
$$S_{xq} = p.d = \frac{12.3}{2}.2\sqrt{7} = 36\sqrt{7}\ (\text{cm}^2)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp là:

$$S_{tp} = 36\sqrt{7} + 36\sqrt{3} = 36\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right) \approx 157,6\ (\text{cm}^2).$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng 17cm, cạnh đáy lớn bằng 28cm, cạnh đáy nhỏ bằng 12cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt.

Giải (h.20.7)



Hình 20.7

*** Tìm hướng giải**

Để tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều khi đã biết độ dài của cạnh đáy lớn, độ dài cạnh đáy nhỏ còn phải tính chiều cao của mặt bên.

*** Trình bày lời giải**

Trong mặt bên $A'B'BA$ vẽ $A'H \perp AB$ ta được:

$$AH = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{28-12}{2} = 8\ (\text{cm}).$$

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại H, ta có:

$$A'H^2 = AA'^2 - \text{AH}^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow A'H = 15\ (\text{cm}).$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt là: $S_{xq} = \dfrac{(12+28)15}{2}.3 = 900\ (\text{cm}^2)$

C. Bài tập vân dụng

• Chứng minh song song, vuông góc. Tính chiều cao

20.1. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*. Trên các cạnh *SA, SB, SC, SD* lần lượt lấy các điểm *A', B', C', D'* sao cho $SA' = SB' = SC' = SD'$. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm *A', B', C, D'* cùng thuộc một mặt phẳng. Có nhận xét gì về mặt phẳng (*A'B'C'D'*) và *mp*(*ABCD*).

b) $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

20.2. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*. Cho biết $SA \perp SC$.Chứng minh rằng các mặt bên là những tam giác đều.

20.3. Cho hình chóp *S.ABC*, cả bốn mặt là những tam giác đều có cạnh bằng *a*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *SC, SB, AB, AC*. Chứng minh rằng tứ giác *MNPQ* là hình vuông.

20.4. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC*, các mặt bên là những tam giác vuông cân tại *S*.

a) Chứng minh rằng mỗi mặt bên vuông góc với hai mặt bên còn lại.

b) Gọi độ dài của mỗi cạnh đáy là *a*, Tính chiều cao của hình chóp.

20.5. Một hình chóp cụt tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy. Biết cạnh đáy lớn bằng 6cm, cạnh đáy nhỏ bằng 4cm. Tính chiều cao của hình chóp cụt đều.

20.6. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB = a, A_1B_1 = b\left(a > b\right)$. Một mặt phẳng song song với hai đáy của hình chóp cụt cắt các cạnh AA_1, BB_1, CC_1 và CC_1 lần lượt tại A_2, B_2, C_2, D_2 và chia hình chóp cụt lớn thành hai hình chóp cụt nhỏ có diện tích xung quanh bằng nhau. Gọi c là cạnh hình vuông $A_2B_2C_2D_2$. Chứng minh rằng: $c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

• Tính diện tích, tính thể tích

20.7. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{10}$. Tính thể tích hình chóp.

20.8. Cho hình chóp lục giác đều *S.ABCDEF* có *AD* = 2*a* và diện tích tam giác *SAD* là a^2. Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

20.9. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có các cạnh bên đều bằng *a*. Chứng minh rằng khi các cạnh bên vuông góc với nhau từng đôi một thi diện tích xung quanh sẽ lớn nhất.

20.10. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh bên dài 5cm và diện tích xung quanh bằng 48cm^2. Tính thể tích của hình chóp đó.

20.11. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh bên bằng 17cm và chiều cao bằng 15cm. Gọi *A', B', C'* lần lượt là trung điểm của *SA, SB, SC*. Tính thể tích của hình chóp cụt *A'B'C'.ABC*.

20.12. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'CD'* cạnh *a*. Từ hình lập phương này cắt ra hình chóp *C.BD*C'. Chứng minh rằng:

a) Hình chóp *C.BDC'* là hình chóp đều.

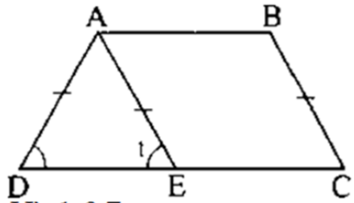
b) Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình chóp là $\sqrt{3}$

c) Tỉ số giữa thể tích hình chóp và thể tích hình lập phương là $\dfrac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

20.1. (h.20.8)

a) Xét ΔSAB có $SA = SB; SA' = SB'$ nên $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} \Rightarrow A'B'//AB$



Hình 8.7

Chứng minh tương tự, ta được: $CD'//CD$.

Mặt khác $AB//CD$ nên $A'B'//C'D'$.

Từ đó suy ra bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có: $A'B'//AB; B'C'//BC$ mà $A'B'$ và $B'C'$ cắt nhau tại B'; AB và BC cắt nhau tại B.

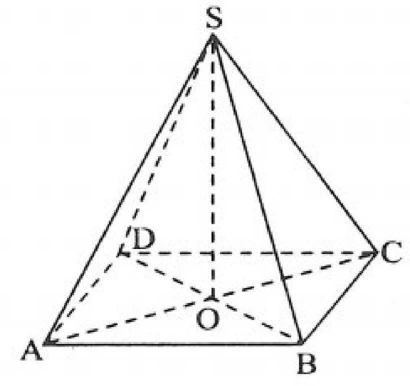
Từ đó suy ra: $mp(A'B'C'D')//mp(ABCD)$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $AO \perp SO$; $AO \perp DO \Rightarrow AO \perp mp(SOD)$.

Vì $AO \subset mp(SAC)$ nên $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

20.2. (h.20.9)



Hình 20.9

Ta đặt

$AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSAC có $SA = SC; \widehat{ASC} = 90^o$

nên ΔSAC vuông cân $\Rightarrow \widehat{SAO} = 45^o$

Xét ΔSOA có $\Rightarrow \widehat{SOA} = 90^o, \widehat{SAO} = 45^o$

nên ΔSOA vuông cân $\Rightarrow SO = OA$

Ta có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$

Do đó $SA = a$.

Xét mặt bên SAB có $SA = SB = AB = a$ nên là tam giác đều. Do đó các mặt bên là những tam giác đều.

20.3. (h.20.10)

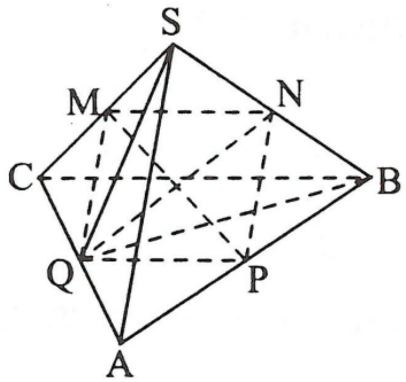
Xét ΔSBC có MN là đường trung bình nên $MN//BC$ $MN = \frac{BC}{2}$ (1)

Xét ΔABC có PQ là đường trung bình nên $PQ//BC$ và $MN = \frac{BC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN//PQ$ và $MN = PQ$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Ta có:

$MN=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}; MQ=\frac{SA}{2}=\frac{a}{2}.$



Hình 20.10

Vậy $MN=MQ$, suy ra hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi.

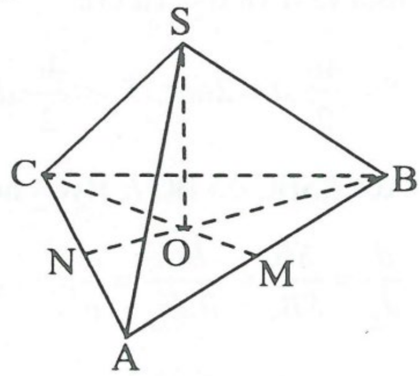
Xét QBS có $QB=QS=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên ΔQBS cân $\Rightarrow NQ\perp SB$.

Xét ΔQNS vuông tại N có:

$$QN^2=QS^2-NS^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow QN=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta được: $MP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ do đó $QN=MP$

Hình thoi $MNPQ$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.



Hình 20.11

20.4. (h.20.11)

a) Ta có $SC\perp SA;\ SC\perp SB\Rightarrow SC\perp mp(SAB)$.

Mặt khác $SC\subset mp(SAC)$ nên $mp(SAC)\perp mp(SAB)$.

$SC\subset mp(SBC)$ nên $mp(SBC)\perp mp(SAB)$.

Do đó mặt bên (SAB) vuông góc với các mặt bên (SAC) và (SBC). Chứng minh tương tự ta được mỗi mặt bên (SBC), (SCA) đều vuông góc với hai mặt bên còn lại.

b) Xét tam giác đều ABC. Gọi O là giao điểm của các đường trung tuyến CM và BN . Khi đó

$$BO=\frac{2}{3}BN=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét ΔSAB vuông cân tại S có $AB=a$ nên $SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSOB vuông tại O, ta có:

$$SO^2=SB^2-OB^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{a^2}{6}$$

$$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

20.5. (h.20.12)

Xét hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$.

Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Ta có $OM//AB; O'M'//A'B'$ mà $A'B'//AB$ nên $O'M'//OM$.

Trong hình thang $O'M'MO$ ta vẽ $M'H\perp OM$.

Ta được $M'H \perp OO'; OH = O'M'$

Ta

có

$OM = 6:3 = 3\ (cm); O'M' = 4:2 = 2\ (cm); HM = 3 - 2 = 1\ (cm)$.

Tổng diện tích hai đáy là: $S_1 + S_2 = 6^2 + 4^2 = 52\,(\text{cm}^2)$.

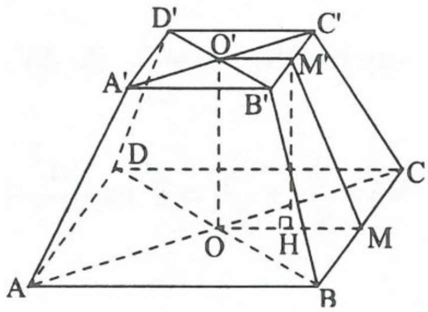
Diện tích xung quanh là: $S_{xq} = \dfrac{(6+4).MM'}{2}.4 = 20MM'(\text{cm}^2)$.

Theo đề bài ta có: $20MM' = 52 \Rightarrow MM' = 2,6\,(\text{cm})$.

Xét $\Delta M'HM$ vuông tại H, ta có:

$M'H = \sqrt{M'M^2 - HM^2} = \sqrt{(2.6)^2 - 1^2} = 2,4$ (cm).

Do đó chiều cao của hình chóp cụt đều là 2,4cm.



Hình 20.12

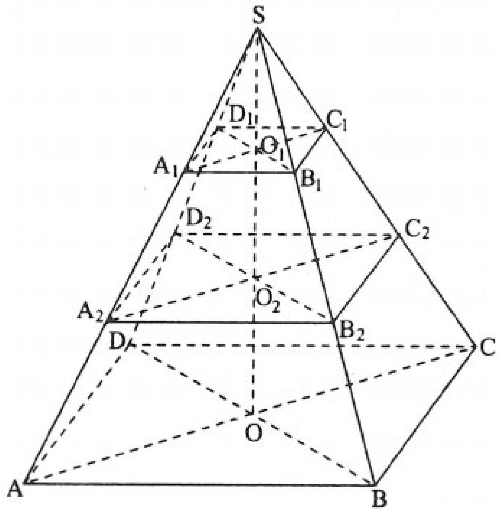
20.6. (h.20.13)

Gọi S là đỉnh hình chóp sinh ra hình chóp cụt.

Gọi diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$ và hình chóp $S.A_2B_2C_2D_2$ lần lượt là S và S_2.

Gọi các độ dài trung đoạn của hình chóp $S.ABCD$ và hình chóp $S.A_2B_2C_2D_2$ lần lượt là d và d_2. Ta có:

$S = \dfrac{4a}{2}.d = 2ad; S_2 = \dfrac{4c}{2}.d_2 = 2cd_2$.



Hình 20.13

Xét ΔSBC có $BC // B_2C_2$ nên:

$\dfrac{d}{d_2} = \dfrac{SB}{SB_2} = \dfrac{BC}{B_2C_2} = \dfrac{a}{c}$.

Do đó $\dfrac{S}{S_2} = \dfrac{2ad}{2cd_2} = \dfrac{a}{c}.\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2}{c^2}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{b^2}{c^2}$

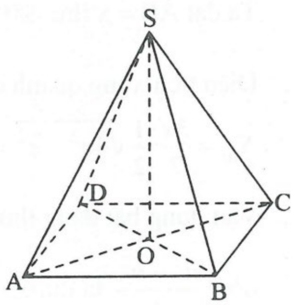
Theo đề bài ra ta có: $S - S_2 = S_2 - S_1$

Suy ra: $2S_2 = S + S_1$, do đó $\dfrac{S + S_1}{S_2} = 2$.

Vậy $\dfrac{S}{S_2} + \dfrac{S_1}{S_2} = 2$ hay $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

20.7. (h.20.14)

*** Tìm cách giải**



Hình 20.14

Để tìm thể tích của hình chóp đều khi đã biết cạnh đáy ta cần tính chiều cao của hình chóp. Có thể vận dụng định lý Py-ta-go để tính.

*** Trình bày lời giải**

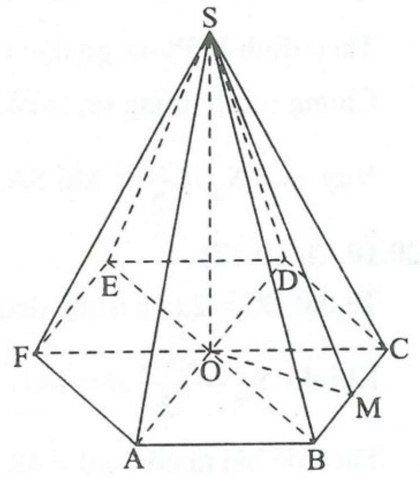
ABCD là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $BD = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow OB = a$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp mp\left(ABCD\right) \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.

Ta có: $SO^2 = SB^2 - OB^2 = \left(a\sqrt{10}\right)^2 - a^2 = 9a^2 \Rightarrow SO = 3a$.

Thể tích của hình chóp là: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\left(a\sqrt{2}\right)^2.3\text{a} = 2\text{a}^3$.

20.8. (h.20.15)



Hình 20.15

Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$.

Ta có: $SO \perp AD$.

Diện tích tam giác ADS là:

$\frac{1}{2}AD.SO = \frac{1}{2}2a.SO = a.SO$

Theo đề bài ta có: $a.SO = a^2 \Rightarrow SO = a$.

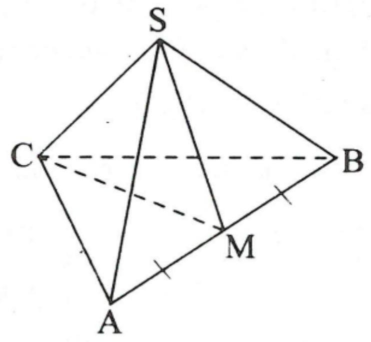
Gọi SM là một trung đoạn của hình chóp, khi đó $OM \perp BC$.

Xét ΔOBC đều, cạnh a, đường cao $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSOM vuông tại O, ta có: $SM^2 = SO^2 + OM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp là: $S_{xq} = \frac{6a}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{2}$

20.9. (h.20.16)



Hình 20.16

Gọi M là trung điểm của AB.

Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp.

Ta đặt $AB = x$ thì:

$SM^2 = SB^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp là:

$S_{xq} = \frac{3x}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{3x}{4}\sqrt{4a^2 - x^2}$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ hay

$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta được: $x.\sqrt{4a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 4a^2 - x^2}{2} = 2a^2$.

Do đó $S_{xq} \le \frac{3}{4}.2a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{4a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2a^2$.

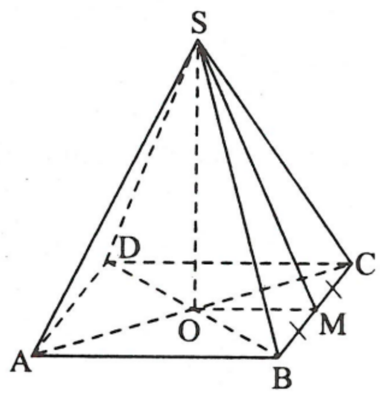
Khi đó $SA^2 + SB^2 = AB^2$ (vì $a^2 + a^2 = 2a^2$).

Theo định lý Py-ta-go đảo thì ΔSAB vuông $\Rightarrow SA \perp SB$..

Chứng minh tương tự, ta có: $SB \perp SC; SC \perp SA$.

Vậy $\max S_{xq} = \frac{3}{2}a^2$ khi SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một.

20.10. (h.20.17)



Hình 20.17

Ta đặt $BC = 2a$ và trung đoạn $SM = d(a < d)$.

Khi đó $S_{xq} = \frac{2a.4}{2}.d = 4ad$.

Theo đề bài ta có: $4ad = 48 \Rightarrow ad = 12$ (1)

Xét ΔSMC vuông tại M, ta có: $MC^2 + SM^2 = SC^2$.

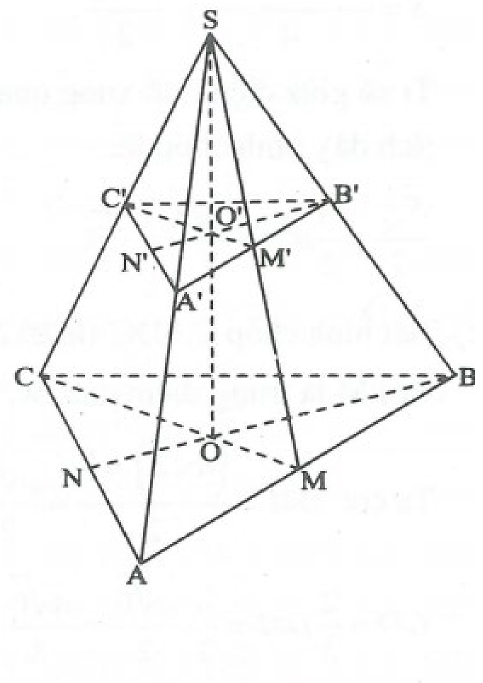
Do đó $a^2 + d^2 = 25$. Suy ra $a^2 + d^2 + 2ad = 25 + 24$

$\Rightarrow (a+d)^2 = 49 \Rightarrow a + d = 7$.(2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases} a+d=7 \\ ad=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4; d=3 \text{ (loại)} \\ a=3; d=4 \text{ (Thỏa mãn)}. \end{array}\right.$

Khi đó $SO^2 = SM^2 - OM^2 = d^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow h = SO = \sqrt{7}$ (cm). Vậy thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.6^2.\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$ (cm^3).

20.11. (h.20.18)



Hình 20.18

Xét ΔSOC vuông tại O, ta có:

$OC^2 = SC^2 - SO^2 = 17^2 - 15^2 = 64 \Rightarrow OC = 8(cm) \Rightarrow CM = 12(cm)$

Gọi độ dài cạnh đáy là a.

Ta có: $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}}$ (cm)

Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là:

$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$ (cm^2)

Thể tích của hình chóp $S.ABC$ là:

$V_1 = \frac{1}{3}.S_1.h_1 = \frac{1}{3}.48.\sqrt{3}.15 = 240\sqrt{3}$ (cm^3)

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có $A'B'//AB; A'C'//AC$; suy ra $mp(A'B'C')//mp(ABC)$.

Do đó hình chóp cụt $A'B'C'.ABC$ là hình chóp cụt đều.

Xét ΔSOC có $\frac{SO'}{SO}=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}\Rightarrow SO=7,5$ cm.

Ta có: $A'C'=\frac{1}{2}AC=\frac{12}{\sqrt{3}}$ (cm). Do đó diện tích tam giác $A'B'C$ là:

$$S_2=\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

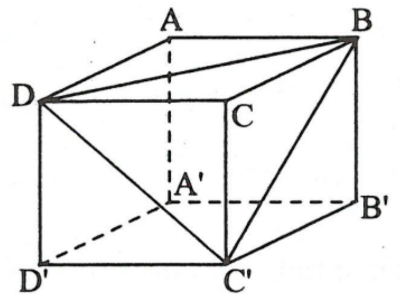
Thể tích hình chóp $S.A'B'C'$ là: $V_2=\frac{1}{3}.S_2.h_2=\frac{1}{3}.12.\sqrt{3}.7,5=30\sqrt{3}$ (cm^3).

Thể tích hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ là:

$V=V_1-V_2=240\sqrt{3}-30\sqrt{3}=210\sqrt{3}$ (cm^3).

20.12. (h.20.19)

a) Hình chóp $C.BDC'$ có đáy là tam giác đều, mỗi cạnh dài bằng $a\sqrt{2}$. Ba mặt bên là những tam giác vuông cân bằng nhau, mỗi tam giác có cạnh bên bằng a và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Do đó hình chóp $C.BDC'$ là hình chóp đều.



Hình 20.19

b) Diện tích xung quanh cụa hình chóp là:

$$S_{xq}=\frac{a^2}{2}.3=\frac{3}{2}a^2$$

Diện tích đáy hình chóp là: $S=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy hình chóp là:

$$\frac{S_{xq}}{S}=\frac{3}{2}a^2:\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

c) Xét hình chóp $C.BDC'$ (h.20.20) có: $CB=CD=CC'=a; BD=BC'=DC'=a\sqrt{2}$

Gọi M là trung điểm của $BC', CO\perp DM$.

Ta có: $DM=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$;

$$OD=\frac{2}{3}DM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Xét ΔCOD vuông tại O có:

$$CO^2=CD^2-DO^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{a^2}{3}\Rightarrow CO=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích hình lập phương là: $V_1=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{6}$.

Thể tích hình lập phương là: $V_2 = a^3$.

Vậy $\frac{V^1}{V^2} = \frac{a^3}{6} : a^3 = \frac{1}{6.}$