BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Với x, y, z là các số thực dương sao cho $x.y.z=\dfrac{1}{6}$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{x^3+8y^3+1}+\dfrac{1}{8y^3+27z^3+1}+\dfrac{1}{27z^3+x^3+1}\le 1$.

Lời giải

Có: $x.y.z=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 6x.y.z=1$

Ta có: $x^3+(2y)^3\ge x.2y(x+2y)$

$\Leftrightarrow x^3+(2y)^3+1\ge 2xy(x+2y+3z)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3+(2y)^3+1}\le\dfrac{1}{2xy(x+2y+3z)}$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{1}{(2y)^3+(3z)^3+1}\le\dfrac{1}{6yz(x+2y+3z)}$

$$\dfrac{1}{(3z)^3+x^3+1}\le\dfrac{1}{3xz(x+2y+3z)}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^3+(2y)^3+1}+\dfrac{1}{(2y)^3+(3z)^3+1}+\dfrac{1}{(3z)^3+x^3+1}\le\dfrac{1}{(x+2y+3z)}\left(\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{1}{6yz}+\dfrac{1}{3zx}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^3+8y^3+1}+\dfrac{1}{8y^3+27z^3+1}+\dfrac{1}{27z^3+x^3+1}\le 1$.

Bài 2. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{2}{3xy}+\sqrt{\dfrac{3}{y+1}}$

Lời giải

$A=\dfrac{2}{3xy}+\sqrt{\dfrac{3}{y+1}}=\dfrac{2}{3xy}+\dfrac{3}{\sqrt{3(y+1)}}$

$\ge\dfrac{2}{3xy}+\dfrac{6}{3+y+1}=\underbrace{\dfrac{2}{3xy}+\dfrac{xy}{6}}_{\ge\frac{2}{3}}+\underbrace{\dfrac{6}{y+4}+\dfrac{y+4}{6}}_{\ge 2}-\dfrac{1}{6}(xy+y)-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow A\ge 2-\dfrac{1}{6}y.\underbrace{(x+1)}_{\le 3-y+1}$

$\ge 2-\dfrac{1}{6}y.(3-y+1)=2-\dfrac{1}{6}y.(4-y)=2+\dfrac{1}{6}(y^2-4y+4)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{6}(y-2)^2$

$\Rightarrow A\ge\dfrac{4}{3}$ với mọi x, y.

Vậy $A_{Min}=\dfrac{4}{3}$ khi $x=1; y=2$.

Bài 3. Cho các số dương a,b thoả mãn $\frac{1}{3}\left(a^3+b^3+a+b\right)+ab\le a^2+b^2+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức: $M=\frac{a^2+8}{a}+\frac{b^2+2}{b}$.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{3}\left(a^3+b^3+a+b\right)+ab\le a^2+b^2+1\Leftrightarrow\frac{1}{3}(a+b)\left(a^2+b^2-ab+1\right)\le a^2+b^2-ab+1$$

Vì $a^2+b^2-ab+1>0\quad\forall a,b\in R$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}(a+b)\le 1\Leftrightarrow a+b\le 3$$

Khi đó ta có

$$M=\frac{a^2+8}{a}+\frac{b^2+2}{b}=a+\frac{8}{a}+b+\frac{2}{b}=a+\frac{4}{a}+b+\frac{1}{b}+\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow M=\left(a+\frac{4}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Co-si cho các cặp số dương ta có:

$$\begin{cases}a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{a.\frac{4}{a}}=2\sqrt{4}=4\\ b+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{b.\frac{1}{b}}=2\sqrt{1}=2\\ \frac{4}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{(2+1)^2}{a+b}\ge\frac{9}{3}=3\end{cases}$$

GTNN của M là $4+2+3=9$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=\frac{4}{a}\\ b=\frac{1}{b}\\ a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi $a=2;b=1$.

Bài 4. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}$.

Lời giải

$\forall\ x,\ y>0$:

$$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}.$$

$(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$.

$P = x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y} = x+\dfrac{1}{2x}+y+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \ge 2\sqrt{x.\dfrac{1}{2x}}+2\sqrt{y.\dfrac{1}{2y}}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{x+y} = 2\sqrt{2}+\dfrac{2}{x+y}$

$$P \ge 2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}} = 2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2.1}} = 3\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $3\sqrt{2}$ khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5. Chứng minh rằng:

Với mọi $x>1$,ta luôn có $3\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right) < 2\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)$

Lời giải

Ta có $3\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right) < 2\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)$

$\Rightarrow 2\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right) > 0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(2x^2+\dfrac{2}{x^2}-3x-\dfrac{3}{x}+2\right) > 0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left[2x^2+2+x+2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-4x-\dfrac{4}{x}-2\right] > 0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left[x\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right)-\dfrac{1}{x}\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right)-2\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right)\right] > 0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right) > 0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{(x-1)^2}{x}\right)\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right) > 0$

Vì $x>1$ nên $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x} > 0 \\ \dfrac{(x-1)^2}{x} > 0 \\ 2x+\dfrac{2}{x}+1 > 0 \end{cases}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ac=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\dfrac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\dfrac{b^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\dfrac{c^2}{b\left(b^2+c^2\right)}$.

Lời giải

$ab+bc+ac=3abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$ (1)

Ta có $\dfrac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}=\dfrac{a^2+c^2}{c\left(c^2+a^2\right)}-\dfrac{c^2}{c\left(c^2+a^2\right)}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{ac}{a\left(c^2+a^2\right)}\overset{Cauchy}{\geq}\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2a}$.

Tương tự, $\dfrac{b^2}{a\left(a^2+b^2\right)}\geq\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2b}$, $\dfrac{c^2}{b\left(b^2+c^2\right)}\geq\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2c}$.

Khi đó $K\geq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\overset{(1)}{=}\dfrac{3}{2}$.

Vậy $\underset{a,b,c>0}{Min}\,K=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 7. điểm) Cho a, b là các số khác 0 thỏa mãn điều kiện: $(a+b)ab=(a-b)^2+ab$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+2$.

Lời giải

Theo giả thiết:

$(a+b)ab=(a-b)^2+ab$

$\Leftrightarrow a^2b+ab^2=a^2-ab+b^2$

Do $a\neq 0$; $b\neq 0$ nên chia cả hai vế cho a^2b^2 ta được: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}$.

Đặt $x=\dfrac{1}{a}$; $y=\dfrac{1}{b}$ ta được :

$x+y=x^2-xy+y^2$ (1)

$\Leftrightarrow x+y=(x+y)^2-3xy$

$\Leftrightarrow xy=\dfrac{(x+y)^2}{3}-\dfrac{x+y}{3}$

Mà $(x+y)^2\geq 4xy$ hay $xy\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}$

Suy ra $\dfrac{(x+y)^2}{3}-\dfrac{x+y}{3}\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-4(x+y)\leq 0$

$\Leftrightarrow 0\leq x+y\leq 4$

Ta có: $P=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+2=x^3+y^3+2=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2=(x+y)^2+2$ (do 1)

Mà $0\le x+y\le 4$ nên $2\le (x+y)^2+2\le 18$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 18 khi $x=y=2$ và $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 8. Cho các số thực thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$.

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Lời giải

+) Tìm GTLN của P:

Ta có $x^2+y^2-xy=4$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2xy=8 \Leftrightarrow (x^2+y^2)+(x-y)^2=8 \Leftrightarrow P+(x-y)^2=8 \Leftrightarrow P=8-(x-y)^2$$

Ta có $(x-y)^2\ge 0$ với mọi x, y

Suy ra $P\le 8$

$$\text{Max } P=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2-xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 2.$$

Vậy Max $P=8$ khi $x=y=\pm 2$.

+) Tìm GTNN của P:

Ta có $x^2+y^2-xy=4$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2xy=8$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2)-(x+y)^2=8 \Leftrightarrow 3P=8+(x+y)^2$$

Ta có $(x-y)^2\ge 0$ với mọi x, y

Suy ra $3P\ge 8 \Leftrightarrow P\ge \frac{8}{3}$

$$\text{Min } P=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 3x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y=-\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy Min $P=\frac{8}{3}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt{3}}; y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}; y=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 9. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, ta được

$$A=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}\ge\frac{2(a+b+c)}{4}$$

$$\ge\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{4}\ge\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{4}\ge\frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$ là $\dfrac{1}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 10. Cho $x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{7}$. Chứng minh: $\sqrt{8+14x}+\sqrt{8+14y}+\sqrt{8+14z}\le 3+3\sqrt{7}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x,y,z\ge\dfrac{-4}{7}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô –si cho hai số không âm $\left(8+2\sqrt{7}\right)$ và $(8+14x)$, ta có:

$$\sqrt{\left(8+2\sqrt{7}\right)(8+14x)}\le\frac{8+2\sqrt{7}+8+14x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2(8+14x)}\le 8+\sqrt{7}+7x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8+14x}\le\frac{8+\sqrt{7}+7x}{\sqrt{7}+1}.\qquad(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\sqrt{8+14y}\le\frac{8+\sqrt{7}+7y}{\sqrt{7}+1}.\qquad(2)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8+14z}\le\frac{8+\sqrt{7}+7z}{\sqrt{7}+1}\qquad(3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\sqrt{8+14x}+\sqrt{8+14y}+\sqrt{8+14z}\le\frac{24+3\sqrt{7}+7(x+y+z)}{\sqrt{7}+1}.$$

Ta có:

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

Mà: $2xy+2yx+2zx \le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Suy ra: $(x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right) = 3.\frac{3}{7} = \frac{9}{7}$.

Do đó: $x+y+z \le \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Suy ra:

$$\sqrt{8+14x}+\sqrt{8+14y}+\sqrt{8+14z} \le \frac{24+3\sqrt{7}+7.\frac{3}{\sqrt{7}}}{\sqrt{7}+1} = \frac{24+6\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1} = \frac{3\left(8+2\sqrt{7}\right)}{\sqrt{7}+1} = 3+3\sqrt{7}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Bài 11. Tìm cặp số (x ; y) với y là số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$$

Lời giải

Phương trình có nghiệm ẩn x khi và chỉ khi

$\Delta' = 4y^2 - \left(5y^2+2y-3\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow -y^2-2y+3 \ge 0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le y+1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le y \le 1$

Giá trị nhỏ nhất của y là -3 khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow x=-6$

Bài 12. Cho $3<x<5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2}{x-3}+\frac{2}{5-x}-\frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

Lời giải

Ta có $3<x<5$ nên $x-3>0; 5-x>0$

Áp dụng BĐT Cauchy: $\frac{2}{x-3}+\frac{2}{5-x} \ge 2.\sqrt{\frac{4}{(x-3)(5-x)}} = \frac{4}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

$A \ge \frac{3}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

Áp dụng BĐT Cauchy: $\sqrt{(x-3)(5-x)} \le \frac{x-3+5-x}{2} = 1$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} \ge 1$

Suy ra $A \ge 3$.

Vậy GTNN $A=3$ khi và chỉ khi $x-3=5-x \Leftrightarrow x=4$.

Bài 13. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}$.

Lời giải

Ta có: $P=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}=x+\frac{4}{x}+y+\frac{16}{y}+\frac{2}{x}+\frac{8}{y}$

$$\ge 2\sqrt{4}+2\sqrt{16}+2\frac{(1+2)^2}{x+y}\ge 4+8+2.\frac{9}{6}=15$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=15$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2; y=4$

Bài 14. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}.$$

Lời giải

Đặt $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$ (*).

Vì $a,b,c>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số không âm $a,b,c,\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{c},\frac{c^2}{a}$ ta được

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a,\quad \frac{b^2}{c}+c\ge 2\sqrt{\frac{b^2}{c}.c}=2b,\quad \frac{c^2}{a}+a\ge 2\sqrt{\frac{c^2}{a}.a}=2c$$

Suy ra $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c\Rightarrow 2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c$ (1)

Ta có $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c=\frac{a^2-ab+b^2}{b}+\frac{b^2-bc+c^2}{c}+\frac{c^2-ca+a^2}{a}+a+b+c$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số không âm $\frac{a^2-ab+b^2}{b},b,\frac{b^2-bc+c^2}{c},c,\frac{c^2-ca+a^2}{a},a$

ta được

$\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $\frac{b^2-bc+c^2}{c}+c\ge 2\sqrt{b^2-bc+c^2}$, $\frac{c^2-ca+a^2}{a}+a\ge 2\sqrt{c^2-ca+a^2}$
(3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}+2\sqrt{b^2-bc+c^2}+2\sqrt{c^2-ca+a^2}$ hay

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Do đó (*) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi dấu bằng tại (1) và (4) xảy ra. Tức là

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{b}=b,\dfrac{b^2}{c}=c,\dfrac{c^2}{a}=a\\ \dfrac{a^2-ab+b^2}{b}=b,\ \dfrac{b^2-bc+c^2}{c}=c,\ \dfrac{c^2-ca+a^2}{a}=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2,b^2=c^2,c^2=a^2\\ a^2-ab+b^2=b^2,b^2-bc+c^2=c^2,c^2-ca+a^2=a^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2,b^2=c^2,c^2=a^2\\ a(a-b)=0,b(b-c)=0,c(c-a)=0\end{cases}.$$

Vì $a,b,c>0$ nên suy ra dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 15. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}$$

Vì a,b,c là 3 cạnh của tam giác nên $\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ đều là các số dương.

Áp dụng công thức Cauchy ta có: $\sqrt{3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}\le\dfrac{3a^2+2b^2+2c^2-a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$

Ta có: $\dfrac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}}\ge\dfrac{a^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Rightarrow P=\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\ge\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$$

Vậy GTNN $P=\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $a=b=c$ hay là tam giác đều.

2) Ta coi như hình vẽ thành bài toán đường tròn tâm (O) nội tiếp tam giác đều ABC vậy tâm (O) của đường tròn sẽ trùng với trọng tâm tam giác ABC vậy nên đường cao của tam giác đều là $3R$ (với R là bán kinh đường tròn (O))

Suy ra $BC=\dfrac{2.3R}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}R.$

Thể tích hình nón là: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}R\right)^2.3R=3\pi R^3$

Thể tích hình cầu là: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

Vậy tính thể tích theo R phần hình nón nằm bên ngoài quả cầu kem là

$V=3\pi R^3-\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5}{3}\pi R^3.$

Bài 16. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$.

Lời giải

Áp dụng bất đăng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$2(a+b+c)A=(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\geq (a+b+c)^2$$

Suy ra $A\geq \dfrac{a+b+c}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$b+c\geq 2\sqrt{bc}$

$c+a\geq 2\sqrt{ca}$

Suy ra $a+b+b+c+c+a\geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\geq 2.1=2$

Suy ra $2(a+b+c)\geq 2$, hay $\dfrac{a+b+c}{2}\geq \dfrac{1}{2}$

Vậy nên $A\geq \dfrac{a+b+c}{2}\geq \dfrac{1}{2}$

Khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ thì $A=\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{1}{2}$.

Bài 17. Cho $a,b>0$ thỏa mãn $2a-ab-4\geq 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{a^2+2b^2}{ab}$.

Lời giải

Ta có $2a-ab-4\geq 0\Leftrightarrow a(2-b)\geq 4$.

Kết hợp với $a>0$ ta suy ra $b\leq 2$ $\Rightarrow a\geq \dfrac{4}{2-b}$.

Ta có $T=\dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{a}=\dfrac{7a}{8b}+\dfrac{a}{8b}+\dfrac{2b}{a}\geq \dfrac{7a}{8b}+1$

$$\Rightarrow T\geq \frac{7}{8}.\frac{4}{b(2-b)}+1\geq \frac{7}{2}.\frac{1}{\left(\dfrac{2-b+b}{2}\right)^2}+1=\frac{9}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{4}{2-b} \\ 2-b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\dfrac{9}{2}$, đạt được khi $a = 4$ và $b = 1$.

Bài 18.) Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn $2 \le x \le 3; 4 \le y \le 6; 4 \le z \le 6$ và $x + y + z = 12$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

Lời giải

Ta có $P = x(yz) \le x\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}x(12-x)(12-x)$.

$$= \frac{1}{12}\left[(3x)(12-x)(12-x)\right] \le \frac{1}{12}\left(\frac{x+24}{3}\right)^3 \le \frac{1}{12}\left(\frac{3+24}{3}\right)^3 \le \frac{243}{4}.$$

Vậy $MaxP = \dfrac{243}{4}$ khi $x = 3; y = z = \dfrac{9}{2}$.

Bài 19. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy + y^2 = 3 \Rightarrow 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 6$

$\left(x^2 + y^2\right) + (x-y)^2 = 6 \Rightarrow P = 6 - (x-y)^2 \le 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{3} \\ x = y = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

GTLN của P là 6 khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{3} \\ x = y = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

+) Có

$6 = 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 3\left(x^2 + y^2\right) - (x+y)^2$

$\Rightarrow 3P - (x+y)^2 = 6 \Rightarrow 3P = 6 + (x+y)^2 \Rightarrow P = \dfrac{1}{3}(x+y)^2 + 2 \ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy GTNN của P là 2 khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 20. Cho biểu thức $M = x^2 + y^2$ với x, y là các số thực thỏa mãn $0 < y < x \le 4$ và $x + y \le 7$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M

Lời giải

Ta có $M = x^2 + y^2 = x^2 + xy - xy + y^2 = x(x-y) + y(x+y)$

Do $0 < y < x \le 4$ và $x + y \le 7$ nên $M \le 4(x-y) + 7y$

$M \le 4x + 3y$

$M \le 3(x+y) + x \le 3.7 + 4$

$M \le 25$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4; y = 3$

Vậy $Max\, M = 25$ khi và chỉ khi $x = 4; y = 3$

Bài 21. Cho $x,\ y$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y = 5$. Chứng minh rằng: $\dfrac{25}{x^2 + y^2} + \dfrac{12,5}{xy} \ge 4$.

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được với $a > 0,\ b > 0$ ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có: $\dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{2xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2} = \dfrac{4}{25} \Leftrightarrow \dfrac{25}{x^2 + y^2} + \dfrac{12,5}{xy} \ge 4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2,5$ (thỏa mãn).

Bài 22. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x \ge 7$, $x + y \ge 12$ và $x + y + z = 15$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải

Ta có: $x \ge 7$, $x + y \ge 12$ và $x + y + z = 15$

$(x-7)^2 \ge 0, \forall x \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 14x - 49$

$(y-5)^2 \ge 0, \forall y \Leftrightarrow y^2 - 10x + 25 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \ge 10y - 25$

$(z-3)^2 \ge 0, \forall z \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 \ge 0 \Leftrightarrow z^2 \ge 6x - 9$

$\Rightarrow A = x^2 + y^2 + z^2 \ge 14x + 10y + 6z - 83$

$\Rightarrow A \ge (6x + 6y + 6z) + (4x + 4y) + 4x - 83$

$\Rightarrow A \ge 6(x + y + z) + 4(x + y) + 4x - 83$

$\Rightarrow A \ge 6.15 + 4.12 + 4.7 - 83$ (vì $x \ge 7$, $x + y \ge 12$ và $x + y + z = 15$)

$A \ge 83$.

Dấu " = " xảy ra khi $x = 7$, $y = 5$, $z = 3$ (thỏa mãn)

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 83 khi $x = 7$, $y = 5$, $z = 3$

Bài 23. Cho a,b,c là các số dương thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2a+3b+3c}+\frac{1}{3a+2b+3c}+\frac{1}{3a+3b+2c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương a,b,c,d ta có :

$a+b+c+d\ge 4\sqrt[4]{abcd}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$

$\Rightarrow (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 16$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge \frac{16}{a+b+c+d}$

Ta có : $\frac{1}{2a+3b+3c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)+(b+c)+(b+c)}$

Áp dụng bất đẳng thức phía trên ta có :

$\frac{1}{(a+b)+(a+c)+(b+c)+(b+c)}\le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+c}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2a+3b+3c}\le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}\right)$

Chứng minh tương tự ta có:

$\frac{1}{3a+2b+3c}\le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{a+c}\right)$

$\frac{1}{3a+3b+2c}\le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{a+b}\right)$

$\Rightarrow P\le \frac{1}{16}.4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$

$\Rightarrow P\le \frac{1}{4}.2020=505$

Dấu ‘’=“ xảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{4040}$.

Bài 24. Cho biểu thức $M=x^2+y^2$ với x,y là các số thực thỏa mãn $0<y<x\le 4$ và $x+y\le 7$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M

Lời giải

Ta có $M=x^2+y^2=x^2+xy-xy+y^2=x(x-y)+y(x+y)$

Do $0<y<x\le 4$ và $x+y\le 7$ nên $M\le 4(x-y)+7y$

$M \le 4x+3y$

$M \le 3(x+y)+x \le 3.7+4$

$M \le 25$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=4; y=3$

Vậy $Max\,M = 25$ khi và chỉ khi $x=4; y=3$

Bài 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x+2y-\sqrt{2x-1}-5\sqrt{4y-1}+16$.

Lời giải

$A = x+2y-\sqrt{2x-1}-5\sqrt{4y-1}+16$

$\Leftrightarrow 2A = 2x+4y-2\sqrt{2x-1}-10\sqrt{4y-1}+32$

$\Leftrightarrow 2A = \left[(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1\right]+\left[(4y-1)-2\sqrt{4y-1}.5+25\right]+8$

$\Leftrightarrow 2A = \left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{4y-1}-5\right)^2+8 \ge 8$ (với mọi $x \ge \frac{1}{2}; y \ge \frac{3}{4}$).

$\Rightarrow A \ge 4$.

Min $A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x-1}-1=0\\ \sqrt{4y-1}-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x-1}-1=0\\ \sqrt{4y-1}-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=1\\ 4y-1=25\end{cases}$ (với mọi $x \ge \frac{1}{2}; y \ge \frac{3}{4}$).

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{13}{2}\end{cases}$ (nhận).

Vậy Min $A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{13}{2}\end{cases}$.

Bài 26. Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $a+2b+3c \ge 20$. Tìm GTNN của biểu thức A. Biết $A = a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$.

Lời giải

Ta có:

$$A = a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c} = \left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{1}{4}(a+2b+3c)$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số không âm, ta được

$$\frac{3a}{4}+\frac{3}{a} \ge 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}} = 3$$

$$\frac{b}{2}+\frac{9}{2b} \ge 2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}} = 3$$

$$\frac{c}{4}+\frac{4}{c} \ge 2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}} = 2$$

Do đó $A \geq 3+3+2+\frac{1}{4}(a+2b+3c) \geq 13$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=2$; $b=3$; $c=4$.

Vậy GTNN của biểu thức A bằng 13 khi $a=2$; $b=3$; $c=4$.

Bài 27. Cho hai số thực x, y thoả mãn hệ điều kiện: $\begin{cases} x^3+2y^2-4y+3=0 & (1) \\ x^2+x^2y^2-2y=0 & (2) \end{cases}$..

Tính giá trị của biểu thức: $P=x^{2020}+y^{2020}$.

Lời giải

Từ (1) ta có: $x^3=-2(y-1)^2-1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$. $\quad (3)$

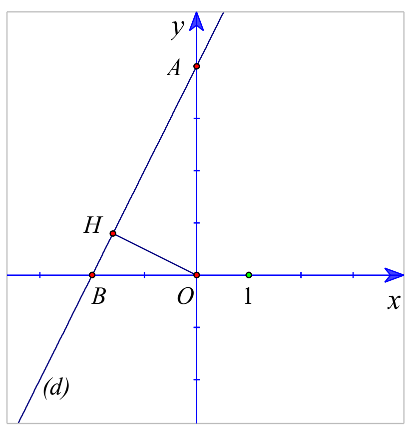
Từ (2) ta có: $x^2=\frac{2y}{y^2+1} \Rightarrow x^2 \leq \frac{2|y|}{y^2+1} \leq \frac{y^2+1}{y^2+1}=1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$. $\quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra $x=-1 \Rightarrow y=1$.

Vậy $P=2$.

Bài 28. Cho đường thẳng d: $y=(m^2+1)x+4$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d lớn nhất.

Lời giải



Vì $m^2+1 \neq 0$ với mọi m nên đường thẳng d luôn xác định.

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d với trục Oy, B là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox. Khi đó tọa độ của A và B là $A(0;4)$; $B\left(\frac{-4}{m^2+1};0\right)$.

Vẽ $OH \perp AB$, khi đó OH là khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d.

Ta có $OA=4$; $OB=\frac{4}{m^2+1}$.

Xét tam giác OAB vuông tại O, vì $OH \perp AB$ nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{16}+\frac{\left(m^2+1\right)^2}{16}=\frac{\left(m^2+1\right)^2+1}{16} \Rightarrow OH=\frac{4}{\sqrt{\left(m^2+1\right)^2+1}}$.

Ta có $m^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \left(m^2+1\right)^2 \geq 1$ với mọi m

$\Rightarrow \left(m^2+1\right)^2+1 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\left(m^2+1\right)^2+1} \geq \sqrt{2}$ với mọi $m \Rightarrow OH=\frac{4}{\sqrt{\left(m^2+1\right)^2+1}} \leq \frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=0$.

Vậy với $m=0$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2}$.

Bài 29. Một doanh nghiệp xuất khẩu gạo ước tính rằng , trong tháng 2/2020 , nếu doanh nghiệp xuất khẩu gạo với giá là 500 USD/tấn thì họ sẽ xuất khẩu được khoảng 860 tấn gạo. Tuy nhiên nếu hạ giá gạo và cứ mỗi lần giảm giá 25 USD/tấn thì sẽ xuất khẩu thêm được 50 tấn gạo. Hỏi doanh nghiệp cần bán gạo với giá bao nhiêu USD mỗi tấn để doanh thu xuất khẩu gạo trong tháng 2/2020 là lớn nhất?

Lời giải

Doanh thu dự kiến xuất khẩu trong tháng 2 là $860 \cdot 500 = 430\,000$ (USD)

Gọi số lần giảm giá là x (lần), điều kiện $x \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x \leq 20$

Giá gạo sau khi giảm giá là $500-25x$ (USD/tấn)

Số gạo xuất khẩu được sau khi giảm giá là $860+50x$ (tấn)

Doanh thu sau khi giảm giá gạo là $P=(500-25x)(860+50x)$ (USD)

Để doanh thu xuất khẩu gạo trong tháng 2/2020 là lớn nhất thì P phải lớn hơn $430\,000$

$P-430000>0 \Leftrightarrow (500-25x)(860+50x)-430000>0 \Leftrightarrow -1250x^2+3500x>0$

$\Leftrightarrow 50x(70-25x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2,8$.

Vì $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \{1;2\}$.

Với $x=1 \Rightarrow P=432\,250$.

Với $x=2 \Rightarrow P=432\,000$.

Vậy doanh nghiệp bán gạo với giá 475 USD/tấn để doanh thu trong tháng 2/2020 lớn nhất .

Bài 30. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x^2+y^2\le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=x\sqrt{2y(x+5y)}+y\sqrt{2x(y+5x)}$.

Lời giải

Với mọi a, b ta có $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow (a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Áp dụng kết quả trên ta được

$$A=x\sqrt{2y(x+5y)}+y\sqrt{2x(y+5x)}\le\sqrt{2\left(2x^2(xy+5y^2)+2y^2(xy+5x^2)\right)}$$
$$=\sqrt{2\left(2xy(x^2+y^2)+20(xy)^2\right)}$$
$$\le\sqrt{2\left(8xy+20(xy)^2\right)}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cô-si với hai số không âm x, y ta có $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$ nên ta có $xy\le\dfrac{4}{2}=2$.

Vậy nên $A\le\sqrt{2\left(8xy+20(xy)^2\right)}\le\sqrt{2\left(8.2+20.2^2\right)}=8\sqrt{3}$.

Khi $x=y=\sqrt{2}$ thì $A=8\sqrt{3}$, do đó giá trị lớn nhất của A là $8\sqrt{3}$.

Bài 31. Giải phương trình $\sqrt{2x-5}+\sqrt{7-2x}=3x^2-18x+29$

Lời giải

Đặt $a=2x-5,\ b=7-2x$

Ta có: $\begin{cases}a,b\ge 0\\ a+b=2\end{cases}$

Phương trình có dạng: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=3.\dfrac{ab+35}{-4}+29\Leftrightarrow -4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=3ab-11$

Bình phương hai vế phương trình ta có:

$16\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)=9a^2b^2-66ab+121\Rightarrow 16\left(2+2\sqrt{ab}\right)=9a^2b^2-66ab+121$

$\Leftrightarrow 9a^2b^2-66ab-32\sqrt{ab}+89=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}-1\right)\left[9\left(\sqrt{ab}\right)^3+9ab-57\sqrt{ab}-89\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{ab}=1\\ 9\left(\sqrt{ab}\right)^3+9ab-57\sqrt{ab}-89=0\end{array}\right.$

+) Với $\sqrt{ab}=1\Rightarrow ab=1$ thế $b=2-a$ vào ta có

$a(2-a)=1\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow x=3$

+) Với $9\left(\sqrt{ab}\right)^3+9ab-57\sqrt{ab}-89=0$

Do $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}=1$ nên $9\left(\sqrt{ab}\right)^3+9ab-57\sqrt{ab}-89\le 9+9-0-89=-71$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 32. Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

$$\text{Chứng minh: } \sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{3}{2}.$$

Lời giải

Sử dụng giả thiết $x+y+z=1$ và bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$LHS=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x(x+y+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+y(x+y+z)}}$$

$$=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+y)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z+x}+\frac{y}{y+z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{z+x}+\frac{z}{z+x}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{y+z}\right)+\left(\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}\right)\right]=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 33. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a\ge3,b\ge7,c\ge7$ và $a^2+b^2+c^2=122$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=8a+15b+17c$.

Lời giải

Có $a^2=122-b^2-c^2\le122-7^2-7^2=24\Rightarrow a<5$

$\Rightarrow 3\le a<5\Rightarrow(a-3)(a-5)\le0\Rightarrow 8a\ge a^2+15(1)$

$b^2=122-a^2-c^2\le122-3^2-7^2=64\Rightarrow b\le8$

$\Rightarrow 7\le b\le8\Rightarrow(b-7)(b-8)\le0\Rightarrow 15b\ge b^2+56(2)$

$c^2=122-a^2-b^2\le122-3^2-7^2=64\Rightarrow c\le8<10$

$\Rightarrow 7\le c<10\Rightarrow(c-7)(c-10)\le0\Rightarrow 17c\ge c^2+70(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $8a+15b+17c\ge a^2+b^2+c^2+15+56+70=122+141=263$

Xảy ra dấu "=" khi $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=122\\8a+15b+17c=263\\3\le a<5;7\le b\le8;7\le c\le8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=8\\c=7\end{cases}$

GTNN $P=263\Leftrightarrow a=3$, $b=8$, $c=7$.

Bài 34. Một doanh nghiệp xuất khẩu gạo ước tính rằng , trong tháng $2/2020$, nếu doanh nghiệp xuất khẩu gạo với giá là 500 USD/tấn thì họ sẽ xuất khẩu được khoảng 860 tấn gạo. Tuy nhiên nếu hạ giá gạo và cứ mỗi lần giảm giá 25 USD/tấn thì sẽ xuất khẩu thêm được 50 tấn gạo. Hỏi doanh nghiệp cần bán gạo với giá bao nhiêu USD mỗi tấn để doanh thu xuất khẩu gạo trong tháng 2/2020 là lớn nhất?

Lời giải

Doanh thu dự kiến xuất khẩu trong tháng 2 là $860\cdot 500 = 430\,000$ (USD)

Gọi số lần giảm giá là x (lần), điều kiện $x\in\mathbb{N}^*, 0\le x\le 20$

Giá gạo sau khi giảm giá là $500-25x$ (USD/tấn)

Số gạo xuất khẩu được sau khi giảm giá là $860+50x$ (tấn)

Doanh thu sau khi giảm giá gạo là $P=(500-25x)(860+50x)$ (USD)

Để doanh thu xuất khẩu gạo trong tháng 2/2020 là lớn nhất thì P phải lớn hơn $430\,000$

$P-430000>0 \Leftrightarrow (500-25x)(860+50x)-430000>0 \Leftrightarrow -1250x^2+3500x>0$

$\Leftrightarrow 50x(70-25x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2{,}8$.

Vì $x\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x\in\{1;2\}$.

Với $x=1 \Rightarrow P=432\,250$.

Với $x=2 \Rightarrow P=432\,000$.

Vậy doanh nghiệp bán gạo với giá 475 USD/tấn để doanh thu trong tháng $2/2020$ lớn nhất .

Bài 35. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2}{xy}+\sqrt{\dfrac{3}{y+1}}$.

Lời giải

$$A\ge \frac{2}{3y(3-y)}+\frac{3}{\sqrt{3(y+1)}}\ge \frac{2}{3y(3-y)}+\frac{6}{3+y+1}$$

$$\frac{2}{3y(3-y)}+\frac{6}{3+y+1}=\frac{4}{6y(3-y)}+\frac{36}{6(y+4)}\ge \frac{(2+6)^2}{18y-6y^2+6y+24}$$

$$\frac{(2+6)^2}{18y-6y^2+6y+24}=\frac{64}{48-6(y-2)^2}\ge \frac{64}{48}=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ GTNN của $A=\dfrac{4}{3}$ khi $x=1$, $y=2$

Bài 36 Cho ba số a , b , c dương.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}$

Lời giải

+ Vì $a,b,c>0$ nên theo BĐT Cô si ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ b+c\ge 2\sqrt{bc} \\ c+a\ge 2\sqrt{ac} \end{array}\right\}\Rightarrow a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

+ Vì $a,b,c>0$ nên ta có:

$$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2a\sqrt{bc}}$$

$$\Rightarrow\frac{abc}{a^2+bc}\le\frac{\sqrt{bc}}{2}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{abc}{b^2+ac}\le\frac{\sqrt{ac}}{2}$$

$$\frac{abc}{c^2+ab}\le\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{abc}{a^2+bc}+\frac{abc}{b^2+ac}+\frac{abc}{c^2+ab}\le\frac{\sqrt{bc}}{2}+\frac{\sqrt{ac}}{2}+\frac{\sqrt{ab}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)\le\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}$$

Bài 37. Cho a,b,c là hai số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}.$$

Lời giải

Vì $\forall x,y\ge 0:\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y}\le x+y$ và $a+b+c=1$ nên ta có:

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2=2(a+b+c)+2\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}+2\sqrt{b+c}\sqrt{c+a}+2\sqrt{c+a}\sqrt{a+b}$$

$$\le 2(a+b+c)+(a+b+b+c)+(b+c+c+a)+(c+a+a+b)=6(a+b+c)=6$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2-2xy+y^2-3x+\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x-2}+2020.$

Lời giải:

ĐK: $x\ge 2$. Ta có: $P=x^2-2xy+y^2+x^2-4x+4+x+\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x-2}+2016$

$P=(x-y)^2+(x-2)^2+2\sqrt{x-2}+x+\dfrac{1}{x}+2016.$

Theo BĐT Cô-si và $x\ge 2$ thì $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4}x\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{x}}+\dfrac{3}{4}.2=\dfrac{5}{2}.$

Vậy $P\ge 2016+\dfrac{5}{2}=\dfrac{4037}{2}$. Dấu "=" khi $x=y=2$. Kết luận: $\min P=\dfrac{4037}{2}$.

Bài 39. Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge 3$.

Lời giải

Ta có $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$

$\Rightarrow \dfrac{a+b+c+ab+bc+ca}{abc}=6$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=6$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta được :

$$\left(\frac{1}{a^2}+1\right)+\left(\frac{1}{b^2}+1\right)+\left(\frac{1}{c^2}+1\right)\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ (1)$$

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\ge 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 40. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\ge 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b+c$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$4a+ab\ge 4a\sqrt{b}\Rightarrow a\sqrt{b}\le \dfrac{4a+ab}{4}.$

$4b+bc\ge 4b\sqrt{c}\Rightarrow b\sqrt{c}\le \dfrac{4b+bc}{4}.$

$4c+ca\ge 4c\sqrt{a}\Rightarrow c\sqrt{a}\le \dfrac{4c+ca}{4}.$

Do đó:

$$24 \le a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \le \frac{4a+ab}{4}+\frac{4b+bc}{4}+\frac{4c+ca}{4}=a+b+c+\frac{ab+bc+ca}{4} \quad (1)$$

Mà $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2 \ge 0 \ \forall a,b,c$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(a+b+c)+\frac{(a+b+c)^2}{12} \ge 24 \Leftrightarrow (a+b+c)^2+12(a+b+c)-288 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-12)(a+b+c+24) \ge 0$$

Mà $(a+b+c+24)>0$ với $\forall a,b,c>0$

$$\Rightarrow a+b+c-12 \ge 0 \Rightarrow a+b+c \ge 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b+c$ là 12 khi $a=b=c=4$

Bài 41. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$.

Lời giải

Ta có $2a^2+ab+2b^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{3a^2+3b^2}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{3(a^2+b^2)}{2}$

Mà $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{3(a^2+b^2)}{2} \ge \frac{3}{2}\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{3(a+b)^2}{4}$.

Suy ra $2a^2+ab+2b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}+\frac{3(a+b)^2}{4}=\frac{5(a+b)^2}{4}$

Suy ra $\sqrt{2a^2+ab+2b^2} \ge \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$.

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{2b^2+bc+2c^2} \ge \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)$; $\sqrt{2c^2+ca+2a^2} \ge \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$.

Cộng vế theo vế ta có $P \ge \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b+b+c+a)=2019\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=2019 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=673$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2019\sqrt{5}$, đạt được khi $a=b=c=673$.

Bài 42. a) Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$.

b) Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$VT=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{z}$$

$=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 3+2+2+2=9$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$. (đpcm)

b) Áp dụng bất đẳng thức ở phần a) ta có:

$$\frac{9ab}{a+3b+2c}=\frac{9ab}{(a+c)+(b+c)+2b}\leq\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{a}{2};$$

Tương tự $\frac{9bc}{b+3c+2a}\leq\frac{bc}{a+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{b}{2}$; $\frac{9ca}{c+3a+2b}\leq\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}+\frac{c}{2}$

Cộng theo các vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$9A\leq\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{a}{2}+\frac{bc}{a+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{b}{2}+\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}+\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9A\leq\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+c}\right)+\left(\frac{ab}{c+b}+\frac{ca}{b+c}\right)+\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{b+a}\right)+\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9A\leq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$\Leftrightarrow A\leq 1$ dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$. Suy ra GTLN của A bằng 1.

Bài 43. Gọi m là giá trị nhỏ nhất trong ba số $(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2$ với x,y,z là ba số thực bất kì. Chứng minh $m\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Lời giải

Vì x, y, z là ba số thực bất kì nên giải sử $x\geq y\geq z$.

Mà m là giá trị nhỏ nhất trong ba số $(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2$.

$\Rightarrow\sqrt{m}$ là số nhỏ nhất trong ba số $|x-y|,|y-z|,|z-x|$.

Ta có:

$|z-x|=x-z=(x-y)+(y-z)=|x-y|+|y-z|\geq 2\sqrt{m}$.

Do đó $(z-x)^2\geq 4m$.

mà $(y-z)^2\geq m$

$(x-y)^2\geq m$

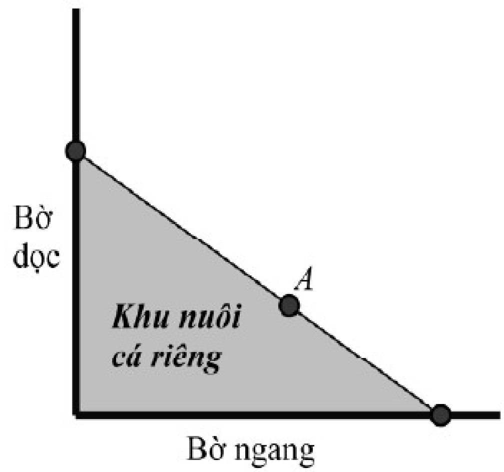
$(x+y+z)^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\geq 0$

$\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 6m$

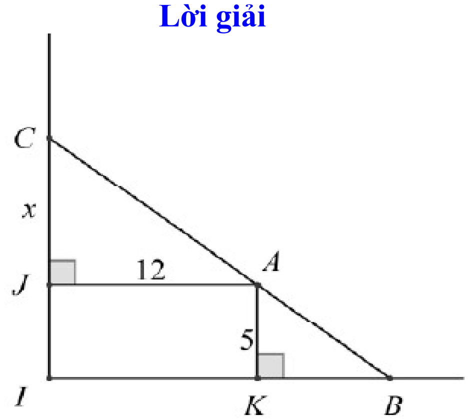
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2m$ hay $m\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Bài 44.

Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Lời giải



Đặt tên các điểm như hình vẽ. Đặt $CJ = x, (x > 0)$.

Vì hai tam giác AJC và BKA là hai tam giác đồng dạng nên:

$$\frac{CJ}{AK} = \frac{JA}{KB} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{KB} \Leftrightarrow KB = \frac{60}{x}.$$

Diện tích của khu nuôi cá là: $S = \frac{1}{2}(x+5).\left(\frac{60}{x}+12\right).$

$$\Leftrightarrow S(x) = \frac{1}{2}\left(60 + 12x + \frac{300}{x} + 60\right) \Leftrightarrow S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$6x + \frac{150}{x} \geq 2\sqrt{6x.\frac{150}{x}} = 60$$

Dấu bằng xảy ra khi $6x = \frac{150}{x} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$.

Nên $S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 60 + 60 = 120$

Suy ra diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120(m^2)$, đạt được khi $x = 5m$.

Bài 45. Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+xz\le 3xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+yz+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+zx+x^2}}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 3$.

Ta có $\sqrt{2x^2+xy+y^2}=\frac{\sqrt{(5x+3y)^2+7(x-y)^2}}{4}\ge\frac{5x+3y}{4}\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}\le\frac{4}{5x+3y}$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{2y^2+yz+z^2}}\le\frac{4}{5y+3z};\frac{1}{\sqrt{2z^2+zx+x^2}}\le\frac{4}{5z+3x}$

$$16P\le\frac{64}{4x+(x+3y)}+\frac{64}{4y+(y+3z)}+\frac{64}{4z+(z+3x)}$$

$$16P\le\frac{16}{4x}+\frac{16}{4y}+\frac{16}{4z}+\frac{16}{x+3y}+\frac{16}{y+3z}+\frac{16}{z+3x}$$

$$\le\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)+\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{2y}\right)+\left(\frac{4}{y+z}+\frac{4}{2z}\right)+\left(\frac{4}{z+x}+\frac{4}{2x}\right)$$

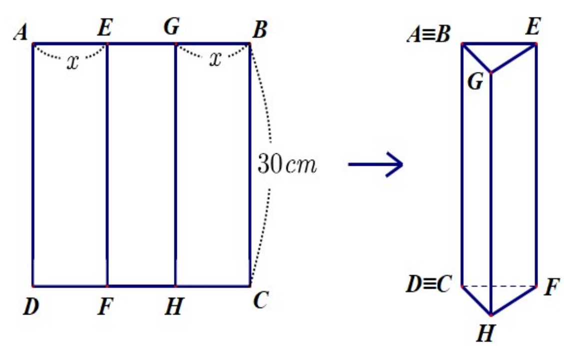
$$\le 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le 24$$

$$\Rightarrow P\le\frac{3}{2}.$$

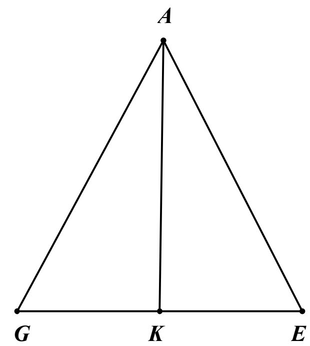
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy max $P=\frac{3}{2}$.

Bài 46. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $30\,cm$. Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $AE=GB=x(cm)$ và điểm E nằm giữa điểm A và điểm G. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại F; qua G kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại H. Người ta gập hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng cạnh BC như hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



Lời giải



Ta có $AE = GB = x\ (0 < x < 15) \Rightarrow EG = 30 - 2x$.

Kẻ đường cao AK của ΔAGE.

Vì ΔAGE cân tại A nên $KE = \dfrac{EG}{2} = \dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$ (cm).

ΔAKE vuông tại $K \Rightarrow AE > KE \Rightarrow x > \dfrac{15}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AKE ta có

$AK^2 + KE^2 = AE^2$

$\Leftrightarrow AK^2 = AE^2 - KE^2$

$\Leftrightarrow AK = \sqrt{AE^2 - KE^2}$

$\Leftrightarrow AK = \sqrt{x^2 - (15-x)^2}$

$\Leftrightarrow AK = \sqrt{30x - 225}$.

Diện tích đáy AGE là

$S_{AGE} = \dfrac{1}{2}AK.GE = \dfrac{1}{2}\sqrt{30x-225}.(30-2x) = \sqrt{30x-225}.(15-x)\ (cm^2)$.

Thể tích lăng trụ là $V = 30.\sqrt{30x-225}.(15-x)\ (cm^3)$.

$V = 30.\sqrt{30x-225}.(15-x) = 30.\sqrt{15.(2x-15)}.\sqrt{15-x}.\sqrt{15-x}$

$= 10.\sqrt{15}.3.\sqrt{2x-15}.\sqrt{15-x}.\sqrt{15-x}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $2x-15$, $15-x$, $15-x$ ta được

$3.\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \le (2x-15)+(15-x)+(15-x)$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \le 5$

$\Leftrightarrow (2x-15)(15-x)(15-x) \le 5^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)} \le \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$

$\Rightarrow V \le 10.\sqrt{15}.3.5\sqrt{5} \Rightarrow V \le 750\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x - 15 = 15 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy $x = 10$ thì thể tích lăng trụ lớn nhất.

Bài 47. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{3+x^2}\right)\left(y+\sqrt{3+y^2}\right) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$.

Lời giải

$$\left(x+\sqrt{3+y^2}\right)\left(y+\sqrt{3+x^2}\right)=9 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3+y^2}-x}.\frac{3}{\sqrt{3+x^2}-y}=9 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3+y^2}-x\right)\left(\sqrt{3+x^2}-y\right)=1$$

Ta có: $\begin{cases} xy+x\sqrt{3+x^2}+y\sqrt{3+y^2}+\sqrt{\left(3+y^2\right)\left(3+x^2\right)}=9 \\ xy-x\sqrt{3+x^2}-y\sqrt{3+y^2}+\sqrt{\left(3+y^2\right)\left(3+x^2\right)}=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow xy+\sqrt{\left(3+y^2\right)\left(3+x^2\right)}=5$$

Do $\sqrt{\left(3+y^2\right)\left(3+x^2\right)} \le \frac{6+x^2+y^2}{2} \Rightarrow xy+\sqrt{\left(3+y^2\right)\left(3+x^2\right)} \le xy+\frac{6+x^2+y^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2xy+6+x^2+y^2}{2} \ge 5 \Leftrightarrow 2xy+x^2+y^2 \ge 4 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4.$$

Ta có: $2P=2\left(x^2+y^2+xy\right)=\left(x^2+y^2+2xy\right)+\left(x^2+y^2\right) \ge (x+y)^2+\frac{(x+y)^2}{2} \ge 4+2=6$

$\Rightarrow 2P \ge 6 \Rightarrow P \ge 3 \Rightarrow \min P=7$ đạt được khi $x=y=1$.

Bài 48. Cho các số $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}.$$

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$

$$A \ge \frac{(x+y)^2}{2xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$A \ge \frac{(x+y)^2}{8xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{3(x+y)^2}{8xy}$$

$$A \ge 2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{8xy}.\frac{\sqrt{xy}}{x+y}}+\frac{3(x+y)^2}{8xy}$$

$$A \ge \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}}+\frac{3.4xy}{8xy}$$

$$A \ge \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}}+\frac{3}{2}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Vậy : $A_{\min}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=y$

Bài 49. Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc=2ac$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}$$

Lời giải

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc=2ac\Rightarrow b\left(a+c\right)=2ac\Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$

$$\Rightarrow P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{\frac{a^2+ac+2ac}{a+c}}{\frac{2a^2+2ac-2ac}{a+c}}+\frac{\frac{ac+c^2+2ac}{a+c}}{\frac{2ac+2c^2-2ac}{a+c}}$$

$$\Rightarrow P=\frac{a^2+3ac}{2a^2}+\frac{c^2+3ac}{2c^2}=\frac{1}{2}+\frac{3c}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2\Rightarrow P\geq 1+\frac{3}{2}\cdot 2=4$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases}a,b,c>0\\ \frac{c}{a}=\frac{a}{c}\\ b=\frac{2ac}{a+c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a,b,c>0\\ a=c\\ b=\frac{2a^2}{2a}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4 khi $a=b=c$

Bài 50. Cho $xy+yz+zx=1$. Tờm giỏ trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=3\left(x^2+y^2\right)+z^2$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\left.\begin{aligned}&2\left(x^2+y^2\right)\geq 4xy\\ &z^2+4x^2\geq 4xz\\ &z^2+4y^2\geq 4yz\end{aligned}\right\}\Rightarrow 6x^2+6y^2+2z^2\geq 4xy+4xz+4yz$$

$\Leftrightarrow 2\left(3x^2+3y^2+z^2\right)\geq 4\left(xy+xz+yz\right)$

$\Rightarrow 2\left(3x^2+3y^2+z^2\right)\geq 4$ (do $xy+yz+zx=1$) $\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+z^2\geq 2$

$\Rightarrow S\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^2\\ z=2x\\ z=2y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{z}{2}$. Mà

$xy+yz+zx=1\Rightarrow x=y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5};z=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Vậy $S_{\min}=2$, đạt được tại $x=y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5};z=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 51. Với các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn $a\ge 1$; $b\ge 1$; $0\le c\le 1$ và $a+b+c=3$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=\frac{9-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=\frac{9}{ab+bc+ca}-2$$

Lại có: $\begin{cases}a^2+b^2\ge 2ab\\ b^2+c^2\ge 2bc\\ c^2+a^2\ge 2ca\end{cases}\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2\ge 2ab+2bc+2ca\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ge 3ab+3bc+3ca\Rightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$ (do $a+b+c=3$) $\Rightarrow P=\dfrac{9}{ab+bc+ca}-2\ge\dfrac{9}{3}-2=1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Mặt khác: $a\ge 1$; $b\ge 1\Rightarrow (a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab-a-b+1\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1$

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge a+b-1+bc+ca\Rightarrow ab+bc+ca\ge a+b-1+c(a+b)$

Mà $a+b+c=3\Rightarrow a+b=3-c\Rightarrow ab+bc+ca\ge 3-c-1+c(3-c)$

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2-c+3c-c^2\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2+2c-c^2\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2+c(2-c)$

Do $0\le c\le 1\Rightarrow c(2-c)\ge 0\Rightarrow 2+c(2-c)\ge 2\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2$

$\Rightarrow P=\dfrac{9}{ab+bc+ca}-2\le\dfrac{9}{2}-2=\dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ c(2-c)=0\\ a+b+c=3\\ a\ge 1;\ b\ge 1; 0\le c\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1;b=2;c=0\\ a=2;b=1;c=0\end{array}\right.$

Vậy $MinP=1$ khi $a=b=c=1$; $MaxP=\dfrac{5}{2}$ khi $\left[\begin{array}{l}a=1;\ b=2;\ c=0\\ a=2;\ b=1;\ c=0\end{array}\right.$

Bài 52. Cho x, y là hai số thực dương sao cho $x+2y\ge\dfrac{3y^2}{x}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x-y}{x+y}$.

Lời giải

Với x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x+2y\ge\dfrac{3y^2}{x}\Rightarrow x^2+2xy\ge 3y^2$

$\Rightarrow x^2+2xy+y^2\ge 4y^2\Rightarrow (x+y)^2\ge 4y^2\Rightarrow\sqrt{(x+y)^2}\ge\sqrt{4y^2}\Rightarrow x+y\ge 2y\Rightarrow x\ge y$.

Mà $x\ge y\Rightarrow\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+x\ge x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+x-y\ge x\\ 2x\ge x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y\ge x\\ x+y\le 2x\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{2x-y}{x+y}\ge\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y>0$.

Vậy $MinP=\dfrac{1}{2}$ khi $x=y>0$.

Bài 53. Với a,b là các số thực $a>1,b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$

Lời Giải

Vì $a>1$ Suy ra $a-1>0$, $b>1$ suy ra $b-1>0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a^2}{b-1}+4(b-1)\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}.4.(b-1)}=4a$$

$$\frac{b^2}{a-1}+4(a-1)\ge 2\sqrt{\frac{b^2}{a-1}.4.(a-1)}=4b$$

Suy ra $P+4b-4+4a-4\ge 4a+4b\Rightarrow P\ge 8$

Dấu " = "xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{a^2}{b-1}=4(b-1)\\ \frac{b^2}{a-1}=4(a-1)\\ a>,b>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-2\\ b=2a-2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=2(TM)$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của $P=8$ khi và chỉ khi $a=b=2$

Bài 54. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2y^2+y+1}+\sqrt{2z^2+z+1}$

Lời giải

Ta có $x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=1$ suy ra $0\le x,y,z\le 1$

$$\Rightarrow x(1-x)\ge 0\Leftrightarrow x-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le x.$$

Với $x^2\le x$ ta có $x^2\le x\Leftrightarrow x^2+x^2+x+1\le x+x^2+x+1$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1\le x^2+2x+1\Leftrightarrow 2x^2+x+1\le (x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+1}\le x+1$$

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{2y^2+y+1}\le y+1$ và $\sqrt{2z^2+z+1}\le z+1$.

Từ đó suy ra

$$\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2y^2+y+1}+\sqrt{2z^2+z+1}\le x+1+y+1+z+1=x+y+z+3=4$$

$$\Leftrightarrow Q\le 4.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-x)=0\\ y(1-y)=0\\ z(1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow (x.y.z)\in\{(0,0,1);(0,1,0);(1,0,0)\}$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là 4 tại $(x.y.z)\in\{(0,0,1);(0,1,0);(1,0,0)\}$.

Bài 55. Cho a, b, c > 0 thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}$$

Lời giải

Ta chứng minh bổ đề sau :

Cho $a,b>0$, chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Thực hiện xét hiệu ta được :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0,\forall a,b>0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$$

Dấu "=" xảy ra khi : $a=b$

Ta có thể viết dưới dạng : $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức bổ đề ta có:

$$\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{ab+1+a+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab+abc}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$$

Tương tự ta có :

$$\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$$

$$\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức ta có :

$$VT\le\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{a+1}+\frac{b+1}{b+1}+\frac{c+1}{c+1}\right)=\frac{1}{4}.3=\frac{3}{4}\Rightarrow M_{max}=\frac{3}{4}$$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 56. Cho $\begin{cases}a;b;c\ge 0\\ a+b+c=1\end{cases}$ Tìm Min $S=\sqrt{7a+9}+\sqrt{7b+9}+\sqrt{7c+9}$

Lời giải

Có: $\begin{cases}a;b;c\ge 0\\ a+b+c=1\end{cases}\Rightarrow 0\le a\le 1;0\le b\le 1;0\le c\le 1\ \Rightarrow\begin{cases}a\ge 0;b\ge 0;c\ge 0;\\ 1-a\ge 0;1-b\ge 0;1-c\ge 0\end{cases}$

$$\Rightarrow\ a(1-a)\ge 0\Leftrightarrow a\ge a^2\Leftrightarrow 7a+9\ge a^2+6a+9\Leftrightarrow\sqrt{7a+9}\ge a+3$$

Tương tự $\sqrt{7b+9}\ge b+3$

$\sqrt{7c+9}\ge c+3$

$$\Rightarrow\sqrt{7a+9}+\sqrt{7b+9}+\sqrt{7c+9}\ge(a+b+c)+9\Leftrightarrow S\ge 10$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $S=10$

Dấu bằng xảy ra khi $(a;b;c)=(1;0;0)$ và các hoán vị.

Bài 57. Cho $x,y,z>0$ và $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b,\sqrt{z}=c\ \ (a,b,c>0)$

Khi đó $ab+bc+ca=3$

Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=9\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Ta có $P=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c\ge 3$

$\Rightarrow P_{\min}=3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 58. Gọi m là giá trị nhỏ nhất trong ba số $(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2$ với x, y, z là ba số thực bất kì. Chứng minh $m\le\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Lời giải

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên giả sử $x\ge y\ge z$.

Vì m là số nhỏ nhất trong ba số $(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2$.

Nên $\sqrt{m}$ là số nhỏ nhất trong ba số $|x-y|,|y-z|,\ |z-x|$.

Ta có: $|z-x|=x-z=(x-y)+(y-z)=|x-y|+|y-z|\ge 2\sqrt{m}$.

Nên $(x-z)^2\ge 4m$

Mà $(y-z)^2\ge m;(x-y)^2\ge m$.

$\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\ge (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 6m$

$\Rightarrow m\le\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Bài 59. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x\ge 2$ và $x+y\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}$

Lời giải

Dễ thấy điểm rơi đạt tại $x=2;y=1$

Khi đó $P=(x-2)^2+(y-1)^2+4x+2y+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}-5$

$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+2\left(x+y-6+\frac{9}{x+y}\right)+2\left(x-4-\frac{4}{x}\right)-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15$

$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+\frac{2(x+y-3)^2}{x+y}+\frac{2(x-2)^2}{x}-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15$

$\Rightarrow P\ge-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)\ge-\left(\frac{7}{2}+\frac{17}{3}\right)+15=\frac{35}{6}$

Vậy $Min_P=\frac{35}{6}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2;y=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 60. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+\sqrt{2020x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{2020y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{2020z+xy}}.$$

Lời giải

Bổ đề: Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh $\sqrt{(a+b)(a+c)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$ (1)

BĐT (1)$\Leftrightarrow a^2+ac+ab+bc\ge ab+ac+2\sqrt{a^2bc}\Leftrightarrow a^2+bc\ge 2\sqrt{a^2bc}$ (luôn đúng)

Vậy bổ đề được chứng minh.

Áp dụng

Ta có $\sqrt{2020x+yz}=\sqrt{x(x+y+z)+yz}=\sqrt{x^2+xy+xz+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$

Áp dụng bổ đề (1) ta có: $\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge\sqrt{xy}+\sqrt{xz}$

$$x+\sqrt{2020x+yz}\ge\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\Rightarrow\frac{x}{x+\sqrt{2020x+yz}}\le\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{y}{y+\sqrt{2020y+zx}}\le\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}};\ \frac{z}{z+\sqrt{2020z+xy}}\le\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Suy ra: $P\le\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=1\Rightarrow P_{\max}=1\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2020}{3}$

Bài 60. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ thỏa mãn $2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$

Lời giải

Ta có:

$2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)\Leftrightarrow 2b^2+2bc+2c^2=9-3a^2\Leftrightarrow 2b^2+2bc+2c^2+3a^2=9$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)+\left(a^2+b^2-2ab\right)+\left(a^2+c^2-2ac\right)=9$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2=9\Leftrightarrow(a+b+c)^2\le 9\Rightarrow 0<a+b+c\le 3$

Ta đi chứng minh bất đẳng thức phụ:

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$

Ta có:

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9\Leftrightarrow 1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1\ge 9$

$\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\ge 6$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có:

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\ge 2$

$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$

Cộng vế theo vế ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\ge 6$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Áp dụng cô-si cho 2 số dương theo từng cặp:

$\mathrm{a}+\frac{1}{\mathrm{a}}\ge 2\ (2)$

$\mathrm{b}+\frac{1}{\mathrm{b}}\ge 2\ (3)$

$\mathrm{c}+\frac{1}{\mathrm{c}}\ge 2\ (4)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}+\frac{1}{\mathrm{c}}\ge\frac{9}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\ (5)$

Cộng vế với vế của các bất đăng thức $(2),(3),(4),(5)$ ta được

$\mathrm{T}=\mathrm{a}+\frac{1}{\mathrm{a}}+\mathrm{b}+\frac{1}{\mathrm{b}}+\mathrm{c}+\frac{1}{\mathrm{c}}+\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}+\frac{1}{\mathrm{c}}\ge 2+2+2+\frac{9}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng: 9 khi và chỉ khi $\mathrm{a}=\mathrm{b}=\mathrm{c}=1$.

Bài 61. Cho hai số $x>0$, $y>0$ và $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$

Lời giải

1) Với hai số $x>0$, $y>0$ và $x+y=1$ ta có:

$$M=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{\left(x^2-1\right)}{x^2}\cdot\frac{\left(y^2-1\right)}{y^2}=\frac{(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{(-y)(x+1)(-x)(y+1)}{x^2y^2}=\frac{xy+(x+y)+1}{xy}=1+\frac{2}{xy}.$$

Ta có: $x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\frac{1}{(x+y)^2}\le\frac{1}{4xy}\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{4xy}\Leftrightarrow 8\le\frac{2}{xy}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{xy}\ge 9\Leftrightarrow M\ge 9$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 9 khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 62. Cho bốn số dương $a,\ b,\ c,\ d$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)+a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da+2004$$

Lời giải:

$$A=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)+a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da+2004$$

Chứng minh được $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)\ge 16$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$

Chứng minh được $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da\ge 0$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$

Từ (1) và (2) => $A\ge 2020$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2020 khi $a=b=c=d>0$.

Bài 63. Cho các số thực dương *a*, *b* thay đổi luôn thỏa mãn $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}=4.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

Lời giải

Ta chứng minh $\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+3}-3$ với mọi $x>0$.

Thật vậy, $\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+3}-3\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}\ge\sqrt{x}+3\Leftrightarrow 3(\sqrt{x}-1)^2\ge 0$.

Áp dụng : $\sqrt{a}\le 2\sqrt{a+3}-3;\sqrt{b}\le 2\sqrt{b+3}-3\ \Rightarrow P\le 2(\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3})-6\Rightarrow P\le 2.4-6$.

$\Rightarrow P_{\max}=2$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{a}=1\\ \sqrt{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Bài 64. Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$$

Lời giải

Với $a,b>0$ ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\ge 1\Leftrightarrow\frac{a+b}{2ab}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Viết lại

$c+ab=c.1+ab=c(a+b+c)+ab=ca+cb+c^2+ab=c(c+a)+b(c+a)=(c+b)(c+a)$

Tương tự $a+bc=(a+b)(a+c)$ và $b+ca=(b+c)(b+a)$

Xét $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

$$\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}\right)$$

Cộng vế với vế ta được

$$A=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow A\le\frac{1}{2}\left(\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}\right)$$

$$A\le\frac{1}{2}(a+b+c)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow A\le\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 65. Cho ba số a, b, c dương. Chứng minh $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{2}{a^2+bc}\le\frac{1}{a\sqrt{bc}}=\sqrt{\frac{1}{ab}.\frac{1}{ac}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)\quad(1).$$

Tương tự có: $\frac{2}{b^2+ac}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{bc}\right)\quad(2)$.

$$\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right)\quad(3).$$

Cộng vế với vế của $(1)\,(2)\,(3)$ ta được:

$$\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ac}+\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{bc}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ac}+\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}\text{ (điều phải chứng minh).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Bài 66. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2020}{xy+yz+zx}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$, ta có :

$$\left[(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)\right]\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\ge 9.$$

$$\Leftrightarrow(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\ge 9.$$

Hay $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{xy+yz+zx}\ge 9$.

Ta có : $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$

$\Rightarrow (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \ge 3(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow xy+yz+zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Từ đó suy ra:

$P = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} + \dfrac{2}{xy+yz+zx} + \dfrac{2018}{xy+yz+zx} \ge 9+6054 = 6063$

$\Leftrightarrow P \ge 6063$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của $P = 6063 \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 67. Cho các số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \dfrac{a+b+c}{5}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(3a^2+12ab)+(2ab+8b^2)} = \sqrt{3a(a+4b)+2b(a+4b)}$

$= \sqrt{(a+4b)(3a+2b)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+4b$ và $3a+2b$ ta có

$\sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \le \dfrac{a+4b+3a+2b}{2} = \dfrac{4a+6b}{2} = 2a+3b$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}} \ge \dfrac{a^2}{2a+3b}$ hay $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \dfrac{a^2}{2a+3b}$

Tương tự ta cũng có :

$\dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \ge \dfrac{b^2}{2b+3c}$ và $\dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \dfrac{c^2}{2c+3a}$

Khi đó

$\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \dfrac{a^2}{2a+3b} + \dfrac{b^2}{2b+3c} + \dfrac{c^2}{2c+3a}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{a^2}{2a+3b}$ và $\dfrac{2a+3b}{25}$ ta có:

$\dfrac{a^2}{2a+3b} + \dfrac{2a+3b}{25} \ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2a+3b}.\dfrac{2a+3b}{25}} = \dfrac{2a}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{2a+3b} \ge \dfrac{2a}{5} - \dfrac{2a+3b}{25} = \dfrac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta cũng có

$\dfrac{b^2}{2b+3c}\ge\dfrac{8b-3c}{25}$ và $\dfrac{c^2}{2c+3a}\ge\dfrac{8c-3a}{25}$

$\Rightarrow\dfrac{a^2}{2a+3b}+\dfrac{b^2}{2b+3c}+\dfrac{c^2}{2c+3a}\ge\dfrac{8a-3b}{25}+\dfrac{8b-3c}{25}+\dfrac{8c-3a}{25}=\dfrac{a+b+c}{5}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Bài 68. Cho a,b,c là các số dương và $a+b+c\le\sqrt{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+1}}$

Lời giải

Vì $a,b,c>0$, ta có :

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left[2.\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$

$\Rightarrow(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow 3\ge(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 1\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+1\ge a^2+ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+1\ge(a+b)(a+c)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^2+1}\le\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\le\sqrt{\dfrac{a}{(a+b)}.\dfrac{a}{(a+c)}}\quad(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương: $\dfrac{a}{(a+b)};\dfrac{a}{(a+c)}$

$\dfrac{a}{(a+b)}+\dfrac{a}{(a+c)}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{(a+b)}.\dfrac{a}{(a+c)}}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a}{(a+b)}.\dfrac{a}{(a+c)}}\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{(a+b)}+\dfrac{a}{(a+c)}\right]\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right]\quad(*)$

Chứng minh tương tự, ta có

$\Rightarrow\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right]\quad(**)$

$\Rightarrow\dfrac{c}{\sqrt{c^2+1}}\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{b+c}\right]\quad(***)$

Cộng vế với vế của (*), (**),(***), ta có

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right]$$

$$\Rightarrow P \le \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra: $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\max P=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 69. Cho $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất $M=9x^2-5x+\frac{1}{9x}+2021$.

Lời giải

$$M=9x^2-5x+\frac{1}{9x}+2021=(9x^2-6x+1)+\left(x+\frac{1}{9x}\right)+2020=(3x-1)^2+\left(x+\frac{1}{9x}\right)+2020$$

Ta có: $(3x-1)^2 \ge 0$.

Vì $x>0$ nên $\frac{1}{9x} \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số x và $\frac{1}{9x}$ ta được $x+\frac{1}{9x} \ge 2\sqrt{x.\frac{1}{9x}}=2.\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Do đó $M \ge 0+\frac{2}{3}+2020=\frac{2}{3}+2020=\frac{6062}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3x-1=0 \\ x=\frac{1}{9x} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $M=\frac{6062}{3}$ khi $x=\frac{1}{3}$.

Bài 70. Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $xy+yz+xz=4xyz$.

Chứng minh: $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \le 1$

Lời giải

Ta có $xy+yz+xz=4xyz \Rightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz}=4 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$

Áp dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Ta có $\frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right] \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\right)$ (1)

Chứng minh tương tự có

$$\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)\quad(2)$$

và $\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{z}\right)\quad(3)$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Chú ý: $P=\sum_{cyc}\dfrac{1}{(x+y)+(z+x)}\le\dfrac{1}{16}\sum_{cyc}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$

Bài 71. Cho hai số dương x và y. Chứng minh rằng $\left(x+\dfrac{2}{y}\right).\left(\dfrac{y}{x}+2\right)\ge 8$

Lời giải:

Có $x,y>0$

$$\left(x+\frac{2}{y}\right).\left(\frac{y}{x}+2\right)\ge 8\Leftrightarrow\left(\frac{xy+2}{y}\right)\left(\frac{y+2x}{x}\right)\ge 8$$

$$\Leftrightarrow\frac{(xy+2)(y+2x)}{xy}\ge 8$$

$$\Leftrightarrow(xy+2)(y+2x)\ge 8xy\quad(\text{vì } x,y>0)$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x\ge 8xy$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x-8xy\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x-4xy-4xy\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(xy^2-4xy+4x\right)+\left(2x^2y-4xy+2y\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(y^2-4y+4\right)+2y\left(x^2-2x+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2)^2+2y(x-1)^2\ge 0\quad(\text{luôn đúng với } x,y>0)$$

Vậy $\left(x+\dfrac{2}{y}\right).\left(\dfrac{y}{x}+2\right)\ge 8$ với $x,y>0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}y-2=0\\x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=1\end{cases}$

Bài 72. Cho biểu thức : $B=(1+x)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Với $x>0$, $y>0$ và $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

Lời giải

$$B=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)=2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$=2+x+y+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$=2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$x+\frac{1}{2x}\geq 2.\sqrt{x.\frac{1}{2x}}=\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$y+\frac{1}{2y}\geq 2.\sqrt{y.\frac{1}{2y}}=\sqrt{2} \qquad (2)$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2.\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}=2 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{x.y}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Rightarrow\sqrt{xy}\leq\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq\sqrt{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta được:

$$2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4+3\sqrt{2}.$$

Vậy $MinB=4+3\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức đồng thời xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}x=y\\ x=\dfrac{1}{2x}\\ y=\dfrac{1}{2y}\\ x^2+y^2=1;x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Bài 73. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn xy + yz + xz = 4xyz.

Chứng minh: $P=\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\leq 1$

Lời giải:

- Ta có $xy+yz+xz=4xyz\Rightarrow\dfrac{xy+yz+xz}{xyz}=4\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$

- Áp dụng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{1}{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+b}\leq(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})\dfrac{1}{4}$

Ta có $\dfrac{1}{2x+\left(y+z\right)}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y+z})\le\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})\right]\le\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{2z})$ (1)

- Chứng minh tương tự có: $\dfrac{1}{x+2y+z}\le\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2z})$ (2)

và $\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{z})$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $P=\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})=1$ (đpcm)

Bài 74. Cho $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$$

Lời giải

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\ge\dfrac{4}{A+B}$ (với $\left(A;B>0\right)$) Có $x\ ;\ y\ ;\ z>0\ \Rightarrow\begin{cases}2x>0\\ y+z>0\end{cases}$

Có $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y+z}\ge\dfrac{4}{2x+y+z}\ \Leftrightarrow\dfrac{1}{2x+y+z}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y+z}\right)$

Có $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{4}{y+z}\ \Leftrightarrow\dfrac{1}{y+z}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ \Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y+z}\right)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{4z}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2x+y+z}\le\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{4z}\right)$ (1)

Tương tự cm : $\dfrac{1}{2y+x+z}\le\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4z}\right)$ (2) ; $\dfrac{1}{2z+x+y}\le\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}\right)$ (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le 1$.

Dấu « = » xảy ra $\Leftrightarrow\ x=y=z=\dfrac{3}{4}$

Bài 75. Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

Lời giải

Ta có : $M = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x}\right) - \dfrac{3y}{x}$.

Vì $x, y > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{x}{y}; \dfrac{4y}{x}$

Ta có: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}.\dfrac{4y}{x}} = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{4y}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y$.

Vì $x \ge 2y \Rightarrow \dfrac{y}{x} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{-3y}{x} \ge \dfrac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Suy ra, $M \ge 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Vậy GTNN của M là $\dfrac{5}{2}$ khi $x = 2y$.

Bài 76. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2 => \dfrac{a+b}{ab} = 2 \Rightarrow 2ab = a + b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \begin{cases} ab \ge 1 \\ a + b \ge 2 \end{cases}$

Áp dụng BĐT cô si với 2 số dương ta có

$a^4 + b^2 \ge 2\sqrt{a^4b^2} \Rightarrow a^4 + b^2 + 2ab^2 \ge 2a^2b + 2ab^2$

$b^4 + a^2 \ge 2\sqrt{b^4a^2} \Rightarrow b^4 + a^2 + 2a^2b \ge 2ab^2 + 2a^2b$

$\Rightarrow P = \dfrac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \dfrac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2} \le \dfrac{1}{2a^2b + 2ab^2} + \dfrac{1}{2ab^2 + 2a^2b} \le \dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{2}$ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Bài 77. Cho a,b là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2\le 2$.

Chứng minh rằng: $a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 6$.

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$. Khi đó $3a=a+2b,\ 3b=b+2a$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp cho biểu thức trong dấu căn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$, dễ thấy

$a\sqrt{3a(a+2b)}\le a\frac{3a+a+2b}{2}=2a^2+ab$, $b\sqrt{3b(b+2a)}\le b\frac{3b+b+2a}{2}=2b^2+ab$.

Cộng hai bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$M=a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 2(a^2+b^2)+2ab=4+2ab$.

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết, ta có: $4+2ab\le 4+a^2+b^2=6$. Từ đó ta có ngay $M\le 6$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

Bài 78. Với a, b, c là các số dương thoả mãn có $ab+bc=2ac$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}$.

Lời giải

Với a, b, c là các số dương ta có:

$ab+bc=2ac\Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$, thay vào P ta được

$$P=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}$$

$$=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}+\frac{c(a+c)+2ac}{2c(a+c)-2ac}$$

$$=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}$$

$$=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 1+\frac{3}{2}\cdot 2=4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $a=b=c$.

Bài 79. Cho $x+y=1$. Chứng minh $x^4+y^4\ge\frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\qquad(1)$ với mọi x, y.

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow 2x^2+2y^2\ge x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ luôn đúng với mọi giá trị của x, y.

Áp dụng (1) ta có:

$x^4+y^4=\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2\geq\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}$ và $x^2+y^2\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}$.

Theo giả thiết ta có $x+y=1$ nên $x^2+y^2\geq\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $x^4+y^4\geq\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 80. Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỉ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam $30-4$. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour là bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất.

Lời giải

Gọi x là giá tour (triệu đồng; $0<x<2$)

Giá đã giảm so với ban đầu là $2-x$ (triệu đồng)

Vì mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia nên số người tham gia tăng thêm khi giảm $2-x$ triệu đồng là $(2-x):0,1.20=400-200x$ (người)

Tổng số người tham gia là: $150+400-200x=550-200x$ (người)

Tổng doanh thu là :

$L=x(550-200x)$ (triệu đồng)

Tìm x để doanh thu L lớn nhất với $0<x<2$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, chúng ta có:

$L=x(550-200x)=\dfrac{1}{200}\left[200x(550-200x)\right]\leq\dfrac{1}{200}\left(\dfrac{200x+550-200x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{200}\left(\dfrac{550}{2}\right)^2=\dfrac{3025}{8}$ Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow$ $200x=550-200x\Leftrightarrow 400x=550$ $\Leftrightarrow x=1,375$

Vậy giá tour là 1,375000 triệu đồng.

Bài 81. Cho $x>0;y>0$ thỏa mãn $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

Chứng minh các bất đẳng thức phụ:

Ta có: với $a,b>0$

$(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)-a^2-b^2-2ab\geq 0$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\geq a^2+b^2+2ab\Rightarrow a^2+b^2\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}$ $\qquad(1)$

Lại có: với $a,b>0$

$(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\geq 4ab$

$\Leftrightarrow ab+a^2+b^2+ab\geq 4ab\Leftrightarrow a(a+b)+b(a+b)\geq 4ab$ $\quad(*)$.

Vì $a,b>0 \Rightarrow ab>0; a+b>0$

Do đó ta được:

$$(*) \Rightarrow \frac{a(a+b)}{ab(a+b)}+\frac{b(a+b)}{ab(a+b)} \geq \frac{4ab}{ab(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) cho M ta được:

$$\Rightarrow M \geq \frac{1}{2}\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(x+y+\frac{4}{x+y}\right)^2 \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}\left[\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+\frac{3}{x+y}\right]^2$$

$\Rightarrow M \geq \frac{1}{2}\left[2+\frac{3}{x+y}\right]^2$ (Áp dụng bđt thức Cauchy cho cặp số $\left\{(x+y);\frac{1}{x+y}\right\}$

$\Rightarrow M \geq \frac{1}{2}.(2+3)^2=\frac{25}{2}$ (Vì $x+y\leq 1$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{25}{2}$

Bài 82. Cho hai số dương x,y, có $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$

Lời giải

$$B=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{(x-1)(y-1)(x+1)(y+1)}{x^2y^2}=\frac{(xy-x-y+1)(xy+x+y+1)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{(xy-1+1)(xy+1+1)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{x^2y^2+2xy}{x^2y^2}=1+\frac{2}{xy}$$

$$xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{xy}\geq 8$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{xy}\geq 9 \Rightarrow B\geq 9$$

Xảy ra dấu "=" khi $x=y=\frac{1}{2}(TM)$

Vậy GTNN $B=9$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 83. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=7$ và $ab+bc+ca=15$

Chứng minh rằng: $a\le\frac{11}{3}$

Lời giải

Vì $a+b+c=7\Rightarrow b+c=7-a$

$ab+bc+ca=15\Rightarrow bc=15-a(b+c)=15-a(7-a)=a^2-7a+15$

Áp dụng định lí Vi-ét đảo có b và c là nghiệm của phương trình:

$x^2-(7-a)x+a^2-7a+15=0$ (ẩn x)

Ta có: $\Delta=(7-a)^2-4(a^2-7a+15)=-3a^2+14a-11=(3a-11)(1-a)$

Để tồn tại hai số b, c thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow(3a-11)(1-a)\ge 0\Leftrightarrow 1\le a\le\frac{11}{3}$

Vậy $a\le\frac{11}{3}$

Bài 84. Cho ba số thực không âm a ; b ; c thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$M=\sqrt{2019a^2-4026ab+2019b^2}+\sqrt{2019b^2-4028bc+2019c^2}+\sqrt{2020a^2-4030ac+2020c^2}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{2019a^2-4026ab+2019b^2}\ge\sqrt{3}(a+b)$.

Thật vậy: $2019a^2-4026ab+2019b^2\ge 3(a+b)^2$.

$\Leftrightarrow 2019a^2-4026ab+2019b^2\ge 3a^2+6ab+3b^2\Leftrightarrow 2016a^2-4032ab+2016b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 2016(a^2-2ab+b^2)\ge 0\ \Leftrightarrow 2016(a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Ta có $\sqrt{2020b^2-4028bc+2020c^2}\ge\sqrt{3}(b+c)$.

Thật vậy: $2020a^2-4028ab+2020b^2\ge 3(a+b)^2$.

$\Leftrightarrow 2020b^2-4028bc+2020c^2\ge 3b^2+6bc+3c^2\Leftrightarrow 2017b^2-4034bc+2017c^2\ge 0$.

$\Leftrightarrow 2017(b^2-2bc+c^2)\ge 0\ \Leftrightarrow 2017(b-c)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Ta có $\sqrt{2021a^2-4030ac+2021c^2}\ge\sqrt{3}(a+c)$.

Thật vậy: $2021a^2-4030ac+2021c^2\ge 3(a+c)^2$.

$\Leftrightarrow 2021a^2-4030ac+2021c^2\ge 3a^2+6ac+3c^2\Leftrightarrow 2018a^2-4036ac+2018c^2\ge 0$.

$\Leftrightarrow 2018\left(a^2-2ac+c^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow 2018\left(a-c\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

$\Rightarrow M\ge 2\sqrt{3}\left(a+b+c\right)$.

Ta có $a+b+c\ge \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3}$.

Thật vậy: $a+b+c\ge \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3} \Leftrightarrow 2a+2b+2c\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$.

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng)

$\Rightarrow M\ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.9 \Rightarrow M\ge 6\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $M=6\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 85. Cho a,b là các số thực sao cho $a^2-ab+b^2=a+b$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=505a+505b$.

Lời giải

Tìm Min:

$a^2-ab+b^2=a+b\Rightarrow a+b=\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\ge 0$

$\Rightarrow P=505a+505b=505.\left(a+b\right)\ge 0\Rightarrow MinP=0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=0$.

Tìm Max:

$a^2-ab+b^2=a+b\Rightarrow \left(a+b\right)^2-3ab=a+b$.

Do $ab\le \dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}$

$\Rightarrow a+b\ge \left(a+b\right)^2-\dfrac{3\left(a+b\right)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\ge \dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\le 4$ (do $a+b\ge 0$)

$\Rightarrow P\le 505.4=2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=2$.

$\Rightarrow MaxP=2020$ tại $a=b=2$

Bài 86. Với các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-\dfrac{1}{2}abc.$

Lời giải

Ta có $P = ab + bc + ca - \frac{1}{2}abc = \frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2} - \frac{1}{2}abc = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}Q$

Với $Q = a^2 + b^2 + c^2 + abc$. Ta tìm gtln gtnn của biểu thức Q.

Giả sử $c = \min\{a,b,c\} \Rightarrow 3 = a+b+c \ge 3c \Rightarrow 0 \le c \le 1$.

Ta có:

$Q = \left(a^2+2ab+b^2\right) + c^2 - 2ab + abc = (3-c)^2 + c^2 - ab(2-c)$.

Từ giả thiết có $ab(2-c) \ge 0$ và $0 \le ab \le \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(3-c)^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(c^3 - 3c + 18\right) \le Q \le (3-c)^2 + c^2$

Ta có:

$\frac{1}{4}\left(c^3-3c+18\right) = \frac{1}{4}\left[(c-1)^2(c+2)+16\right] \ge \frac{16}{4} = 4$

Dấu bằng xay ra khi $a=b=c=1$.

Do $0 \le c \le 1 \Rightarrow c(c-1) \le 0 \Rightarrow (3-c)^2 + c^2 = 2c^2 - 6c + 9 = 2c(c-1) - 4c + 9 \le 9$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $c=0, ab=0, a+b+c=3$ hay $c=0, a=3, b=0$ hoặc $c=0, a=0, b=3$

$\Rightarrow GTNN$ của Q là 4 khi $a=b=c=1$.

Và $GTLN$ của Q là 9 khi $c=0, a=3, b=0$ và các hoán vị của nó.

Vậy $GTLN$ của P là $\frac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$

GTNN của P là 0 khi $c=0, a=3, b=0$ và các hoán vị của nó.

Bài 87. Cho $xy+yz+xz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 3\left(x^2+y^2\right)+z^2$.

Ta có: $a^2+b^2 \ge 2ab$ với mọi $a,b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \ge 2xz$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được $\frac{1}{2}z^2 + 2y^2 \ge 2yz$ (2)

$x^2 + y^2 \ge 2xy$ (3)

Từ (1); (2); (3) ta suy ra

$M \ge 2(xy+yz+zx) = 2$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $\begin{cases} x = y = \frac{1}{2}z \\ xy+yz+xz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ z=\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=y=\frac{-1}{\sqrt{5}} \\ z=\frac{-2}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Bài 88. Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}.$$

Ta có $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(b+c)(a+c)}}\le ab.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)$

Tương tự

$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\le bc.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)$; $\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le ca.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)$

Suy ra

$A\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{c+a}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{c+b}+\frac{bc}{a+b}+\frac{ac}{a+b}\right)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 89 Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y^2+1}+\frac{y}{z^2+1}+\frac{z}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x}{y^2+1}=x-\frac{xy^2}{y^2+1}$. Do $y^2+1\ge 2y\Rightarrow\frac{xy^2}{y^2+1}\le\frac{xy^2}{2y}=\frac{xy}{2}$ $(x,y,z>0)$

$\Rightarrow\frac{x}{y^2+1}\ge x-\frac{xy}{2}$

Tương tự: $\frac{y}{z^2+1}\ge y-\frac{yz}{2}$; $\frac{z}{x^2+1}\ge z-\frac{zx}{2}$

Suy ra $P\ge x+y+z-\frac{xy+yz+zx}{2}$

Lại có $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}=3$

$\Rightarrow P\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow P_{\min}=\frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 90. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn điều kiện: $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le\frac{4}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P, biết rằng $P=x+y+z$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$(1.x+1.y+1.z)^2\le(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow(x+y+z)^2\le3(x^2+y^2+z^2)$

Mà $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le\frac{4}{3}\Rightarrow(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)\le\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le\frac{4}{3}+(x+y+z)\Rightarrow3(x^2+y^2+z^2)\le4+3(x+y+z)$

$\Rightarrow(x+y+z)^2\le4+3(x+y+z)\Rightarrow(x+y+z)^2-3(x+y+z)-4\le0$

$\Rightarrow-1\le P=x+y+z\le4\Rightarrow P\le4$.

$P=4\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{4}{3}$.

Vậy $\text{Max}P=4$ khi $x=y=z=\frac{4}{3}$.

Bài 91. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x+y=15$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}$

Lời giải

Với các số thực dương x, y thì $A>0$, giá trị của biểu thức A được xác định.

$A=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{y+2}$ điều kiện: $x\ge-1; y\ge-2$

Chứng minh công thức:

$(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned}A^2=\left(1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{y+2}\right)^2&\le\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{y+2}\right)^2\right).(1^2+1^2)\\&\le(x+1+y+2).(1+1)\\&\le(x+y+3).2\\&\le(15+3).2=36\end{aligned}$$

Suy ra $A\le6$ (vì $A>0$)

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x+1}=\sqrt{y+2}\Leftrightarrow x+1=y+2\Leftrightarrow x-y=1$

Mà $x+y=15$

Nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=15\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(15+1):2\\y=(15-1):2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=7\end{cases}$(Thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 6 khi $x=8;\ y=7$

Bài 92. Cho các số thực dương x, y là những số thực thỏa mãn: $x+y+xy=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2+(y-2)^2+2(x-y)^2\ge 0$ với mọi x,y

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+2x^2-4xy+2y^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2)\ge 4(x+y+xy)-8=24\Rightarrow x^2+y^2\ge 8$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=2$

Vậy $MinP=8$ khi $x=y=2$.

Bài 93. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x+y+xy=\frac{7}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+4y^2+4xy$.

Lời giải

Do $x+y+xy=\frac{7}{2}\Rightarrow xy=\frac{7}{2}-(x+y)$

Thay $xy=\frac{7}{2}-(x+y)$ vào $P=x^2+4y^2+4xy$, ta có: $P=x^2+4y^2+4\left[\frac{7}{2}-(x+y)\right]$

$P=x^2+4y^2+14-4x-4y=(x^2-4x+4)+(4y^2-4y+1)+9=(x-2)^2+(2y-1)^2+9$.

Vì $\begin{cases}(x-2)^2\ge 0\\(2y-1)^2\ge 0\end{cases}$ với mọi $x;y\Rightarrow P\ge 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(x-2)^2=0\\(2y-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=0\\2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 9 tại $x=2$ và $y=\frac{1}{2}$.

Bài 94. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

+ Điều kiện: $-2\le x\le 2$

+ Đặt $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ge 0$ và $t^2=\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2=4+2\sqrt{4-x^2}$ $\quad(*)$

$\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=\frac{t^2-4}{2}\Rightarrow P=t-\frac{t^2-4}{2}\Rightarrow 2P=-(t-1)^2+5$

Xét biểu thức $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ge 0$

$t^2=4+2\sqrt{4-x^2}$

Với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định thì

$\sqrt{4-x^2}\ge 0\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}\ge 4\Leftrightarrow t^2\ge 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 2\\t\le -2\end{array}\right.$

Mà $t\ge 0$ nên $t\ge 2$

$t=2\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 2\ (tm)$

Với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định thì $\begin{cases}2+x\ge 0\\2-x\ge 0\end{cases}$

Áp dụng BĐT Cô – si ta có:

$2\sqrt{(2+x)(2-x)}\le 2+x+2-x=4$

$\Rightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}\le 8$

$\Leftrightarrow t^2\le 8$

$\Leftrightarrow t\le 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2=x=2-x\Leftrightarrow x=0$(thỏa mãn)

+Vì $t\ge 2$ nên

$(t-1)^2\ge(2-1)^2$

$\Leftrightarrow -(t-1)^2\le -1$

$\Leftrightarrow -(t-1)^2+5\le -1+5$

$\Leftrightarrow 2P\le 4$

$\Leftrightarrow P\le 2$

Suy ra $P_{\max}=2\ khi\ t=2\Leftrightarrow x=\pm 2$

+ Vì $t\le 2\sqrt{2}$ nên

$\Rightarrow(t-1)^2\le\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$

$\Rightarrow -(t-1)^2\ge -\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$

$\Rightarrow -(t-1)^2+5\ge -\left(2\sqrt{2}-1\right)^2+5=4\sqrt{2}-4$

$\Rightarrow 2P\ge 4\sqrt{2}-4$

$\Rightarrow P\ge 2\sqrt{2}-2$

$\Rightarrow P_{\min}=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow t=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=0$

Vậy $P_{\max}=2\ khi\ x=\pm 2$ và $P_{\min}=2\sqrt{2}-2\ khi\ x=0$

Bài 95. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3+x^3}{z^2+x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{(x+y).(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2}$

$$=x+y-\frac{xy.(x+y)}{x^2+y^2}\ge x+y-\frac{xy.(x+y)}{2xy}=\frac{x+y}{2}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{y^3+z^3}{y^2+z^2}\ge\dfrac{y+z}{2}$; $\dfrac{z^3+x^3}{z^2+x^2}\ge\dfrac{z+x}{2}$

Khi đó ta có: $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3+x^3}{z^2+x^2}\ge\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y+z}{2}+\dfrac{z+x}{2}$

$\Leftrightarrow P\ge x+y+z\ge 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$.

Vậy $\text{Min}P=6$ khi $x=y=z=2$.

Bài 96. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=2020$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{\sqrt{2020z+xy}}+\dfrac{yz}{\sqrt{2020x+yz}}+\dfrac{zx}{\sqrt{2020y+zx}}$.

Lời giải

Thay $x+y+z=2020$ vào biểu thức P ta được :

$$P=\frac{xy}{\sqrt{(x+y+z)z+xy}}+\frac{yz}{\sqrt{(x+y+z)x+yz}}+\frac{zx}{\sqrt{(x+y+z)y+zx}}$$

$$=\frac{xy}{\sqrt{xz+yz+z^2+xy}}+\frac{yz}{\sqrt{x^2+xy+xz+yz}}+\frac{zx}{\sqrt{xy+y^2+yz+zx}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{xy}{\sqrt{xz+yz+z^2+xy}}=\frac{xy}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}=\sqrt{\frac{xy}{x+z}.\frac{xy}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{xy}{x+z}\right)\quad(1)$$

$$\frac{yz}{\sqrt{x^2+xy+xz+yz}}=\frac{yz}{\sqrt{(x+z)(x+y)}}=\sqrt{\frac{yz}{x+z}.\frac{yz}{x+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+z}+\frac{yz}{x+y}\right)\quad(2)$$

$$\frac{zx}{\sqrt{xy+y^2+yz+zx}}=\frac{zx}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}=\sqrt{\frac{zx}{x+y}.\frac{zx}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{x+y}+\frac{zx}{y+z}\right)\quad(3)$$

Cộng 2 vế (1), (2), (3) ta được :

$$\frac{xy}{\sqrt{xz+yz+z^2+xy}}+\frac{yz}{\sqrt{x^2+xy+xz+yz}}+\frac{zx}{\sqrt{xy+y^2+yz+zx}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{xy}{x+z}+\frac{yz}{x+z}+\frac{yz}{x+y}+\frac{zx}{x+y}+\frac{zx}{y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{zx}{y+z}+\frac{xy}{x+z}+\frac{yz}{x+z}+\frac{yz}{x+y}+\frac{zx}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x(y+z)}{y+z}+\frac{y(x+z)}{x+z}+\frac{z(x+y)}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{2020}{2}=1010$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=2020 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2020}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=1010$ khi $x=y=z=\dfrac{2020}{3}$.

Bài 97. Cho $x>0$, $y>0$, $z>0$ và $x+2y+3z\ge 20$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$

Lời giải

$$P=\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}+\left(\frac{3}{x}+\frac{3x}{4}\right)+\left(\frac{9}{2y}+\frac{y}{2}\right)+\left(\frac{4}{z}+\frac{z}{4}\right)$$

Ta có : $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}=\frac{x+2y+3z}{4}\ge 5$

Ta có : $\frac{3}{x}+\frac{3x}{4}\ge 2\sqrt{\frac{3}{x}.\frac{3x}{4}}=3$

Ta có : $\frac{9}{2y}+\frac{y}{2}\ge 2\sqrt{\frac{9}{2y}.\frac{y}{2}}=3$

Ta có : $\frac{4}{z}+\frac{z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{4}{z}.\frac{z}{4}}=2\ \Rightarrow P\ge 13$

Vậy giá trị nhỏ nhất $P=13$ dấu bằng xảy ra khi $x=2$; $y=3$; $z=4$

Bài 98 Với $x,y\ge 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+\frac{16}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{(x+1)(y+1)}\le\frac{x+y+2}{2}\Rightarrow\frac{16}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}\ge\frac{32}{x+y+2}$

$x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$

Khi đó $2P\ge(x+y)^2+\frac{64}{x+y+2}$

Lại có $(x+y)^2+4\ge 4(x+y)\Rightarrow(x+y)^2+12\ge 4(x+y+2)$

$\Rightarrow 2P+12\ge 4(x+y+2)+\frac{64}{x+y+2}\ge 2\sqrt{4(x+y+2).\frac{64}{x+y+2}}=32$

$\Rightarrow 2P\ge 20\Rightarrow P\ge 10\Rightarrow P_{\min}=10$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$.

Bài 99. Cho ba số $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Tìm giá trị lớn nhấ tcủa biểu thức $S=\frac{x}{\sqrt{yz(1+x^2)}}+\frac{y}{\sqrt{xz(1+y^2)}}+\frac{z}{\sqrt{xy(1+z^2)}}$.

Lờigiải

$$S=\frac{x}{\sqrt{yz(1+x^2)}}+\frac{y}{\sqrt{xz(1+y^2)}}+\frac{z}{\sqrt{xy(1+z^2)}}=\frac{x}{\sqrt{yz+xyz.x}}+\frac{y}{\sqrt{xz+xyz.y}}+\frac{z}{\sqrt{xy+xyz.z}}.$$

Mà theo đề bài, $x+y+z=xyz$ nên ta có:

$$S=\frac{x}{\sqrt{yz+(x+y+z).x}}+\frac{y}{\sqrt{xz+(x+y+z).y}}+\frac{z}{\sqrt{xy+(x+y+z).z}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{yz+xz+x(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{xz+yz+y(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{xy+zy+z(x+z)}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{z(x+y)+x(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{z(x+y)+y(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{y(x+z)+z(x+z)}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\ (1).$$

Tacó $x,y,z>0$ nên suy ra $\frac{x}{z+x},\frac{x}{x+y},\frac{y}{z+y},\frac{y}{x+y},\frac{z}{y+z},\frac{z}{x+z}$ đều là số dương.

Với $x,y,z>0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta được

$$\frac{x}{z+x}+\frac{x}{x+y}\ge 2\sqrt{\frac{x}{z+x}.\frac{x}{x+y}}=2.\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}\ (2).$$
$$\frac{y}{z+y}+\frac{y}{x+y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{z+y}.\frac{y}{x+y}}=2.\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}\ (3).$$
$$\frac{z}{y+z}+\frac{z}{x+z}\ge 2\sqrt{\frac{z}{y+z}.\frac{z}{x+z}}=2.\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\ (4).$$

Dấu "=" của $(2),(3),(4)$ đồng thời xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z>0$.

Cộng vế với vế của $(2),(3),(4)$ ta được

$$\frac{x}{z+x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{z+y}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{z}{x+z}\ge 2.\left(\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+z}{z+x}+\frac{x+y}{x+y}+\frac{y+z}{z+y}\ge 2.\left(\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\ge 2.\left(\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ge\frac{x}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+y)(x+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}}\ (5).$$

Từ (1) và (5) suy ra $S\le\frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ

khi $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=xyz\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\3x=x^3\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\3=x^2\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\x=\sqrt{3}\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $S\le\frac{3}{2}$ đạt được khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Bài 100. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4xy+\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{xy}$

Lời giải

Cho các số thực dương x, y ta có: $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$

Thật vậy $x+y\ge 2\sqrt{xy}$; $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$ $\Rightarrow (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 4 \Leftrightarrow (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 4$.

Ta có $x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow 1\ge 2\sqrt{xy}$ $\Leftrightarrow xy\le\dfrac{1}{4}$.

$A=4xy+\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{xy}=4xy+\dfrac{1}{4xy}+\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{5}{4xy}$.

Ta có

$4xy+\dfrac{1}{4xy}\ge 2$.

$\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge 4$.

$\dfrac{5}{4xy}\ge\dfrac{5}{(x+y)^2}\ge 5$.

$\Rightarrow A\ge 11$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $A=11$ dấu bằng xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 101. a) Cho $x,\ y,\ z$ là ba số dương. Chứng minh $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9\cdot$

b) Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\cdot$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$ cho hai số $x>0; y>0$ ta chứng minh được

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9$

Áp dụng bất đẳng thức ở phần a) ta có:

$\dfrac{9ab}{a+3b+2c}\le\dfrac{ab}{c+a}+\dfrac{ab}{c+b}+\dfrac{a}{2}$; $\dfrac{9bc}{b+3c+2a}\le\dfrac{bc}{a+c}+\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{b}{2}$;

$$\frac{9ca}{c+3a+2b} \le \frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c} + \frac{c}{2}$$

Cộng theo các vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$9A \le \frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} + \frac{a}{2} + \frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{a+b} + \frac{b}{2} + \frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c} + \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9A \le \left(\frac{ab}{c+a} + \frac{bc}{a+c}\right) + \left(\frac{ab}{c+b} + \frac{ca}{b+c}\right) + \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+a}\right) + \frac{a+b+c}{2}$$

Bài 102. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a+b+3ab=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{12ab}{a+b} - a^2 - b^2$.

Ta có: $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab;\ a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$

Từ giả thiết $a+b+3ab=1 \Rightarrow a+b = 1-3ab \ge 1-\frac{3}{4}(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 + 4(a+b) - 4 \ge 0 \Leftrightarrow [a+b+2][3(a+b)-2] \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge \frac{2}{3}.$$

$$\frac{3ab}{a+b} = \frac{1-(a+b)}{a+b} = \frac{1}{a+b} - 1 \le \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \ge \frac{2}{9} \Rightarrow -(a^2+b^2) \le -\frac{2}{9}.$$

$$P = \frac{12ab}{a+b} - a^2 - b^2 = 4.\frac{3ab}{a+b} - (a^2+b^2) \le 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}.$$

Giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{16}{9}$ khi $\begin{cases} a=b \\ a+b+3ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{3}$.