Nhà giáo ưu tú - Th.s LÊ HOÀNH PHÒ

10 trọng điểm BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN Lớp 12

- Dành cho học sinh lớp 12 chương trình chuẩn và nâng cao
- Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
- Biên soạn theo nội dung và cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 10, lớp 11, lớp 12 có tư liệu đọc thêm để nâng cao trình độ, các bạn học sinh giỏi tự học bổ sung thêm kiến thức kỹ năng, các bạn học sinh chuyên Toán tự nghiên cứu thêm các chuyên đề, nhà sách **KHANG VIỆT** *hợp tác biên soạn bộ sách* BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI, BỒI DƯỠNG CHUYÊN TOÁN *gồm 3 cuốn:*

- ***TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 10***
- ***TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 11***
- ***TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 12***

Cuốn TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 12 *này có 21 chuyên đề với nội dung là tóm tắt kiến thức trọng tâm của Toán phổ thông và Toán chuyên, phần các bài toán chọn lọc có khoảng 900 bài với nhiều dạng loại và mức độ từ cơ bản đến phức tạp, bài tập tự luyện khoảng 250 bài, có hướng dẫn hay đáp số.*

Cuối sách có 3 chuyên đề nâng cao: ĐA THỨC, PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN *và* TOÁN SUY LUẬN.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những khiếm khuyết sai sót, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

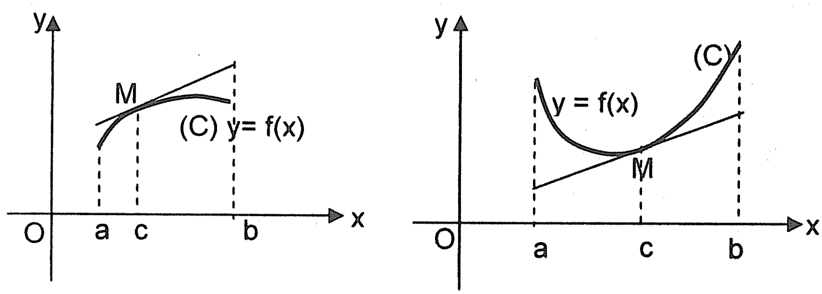
LÊ HOÀNH PHÒ

Chuyên đề 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định lí Lagrange: Cho f là một hàm liên tục trên [a, b], có đạo hàm trên (a,b). Lúc đó tồn tại $c \in (a,b)$ để:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ hay } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \quad .$$



Định lý Rolle: Cho f là một hàm liên tục trên [a,b], có đạo hàm trên (a, b) và $f(a) = f(b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a,b)$ để $f'(c) = 0$.

Định lý Cauchy: Cho f và g là hai hàm liên tục trên [a, b], có đạo hàm trên (a,b) và $g'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a,b)$.

Lúc đó tồn tại $c \in (a,b)$ để $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Tính đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

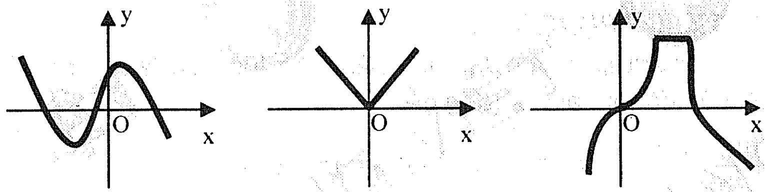
- Nếu f đồng biến trên (a; b) thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- Nếu f nghịch biến trên (a; b) thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì hàm số đồng biến trên khoảng (a; b).
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì hàm số nghịch biến trên khoảng (a; b).
- Nếu f đồng biến trên khoảng (a; b) và liên tục trên [a,b) thì đồng biến trên [a,b); và liên tục trên (a,b] thì đồng biến trên (a,b]; liên tục trên [a,b] thì đồng biến trên [a,b].
- Nếu f nghịch biến trên (a; b) và liên tục trên [a,b) thì nghịch biến trên [a,b); liên tục trên (a,b] thì nghịch biến trên (a,b]; liên tục trên [a,b] thì nghịch biến trên [a,b].
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in D$ thì hàm số f không đổi trên D.

Cực trị của hàm số

Cho hàm số f xác định trên tập hợp D và $x_o \in D$.

x_o được gọi là một điểm cực đại của f nếu tồn tại một khoảng (a; b) chứa điểm x_o sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) < f(x_o)$, $\forall x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$.

x_o được gọi là một điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một khoảng (a; b) chứa điểm x_o sao cho $(a; b) \subset D$ và $f(x) > f(x_o)$, $\forall x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$.



Bổ đề Fermat: Giả sử hàm số có đạo hàm trên (a;b). Nếu f đạt cực trị tại điểm $x_o \in (a;b)$ thì $f'(x_o) = 0$.

– Cho y = f(x) liên tục trên khoảng (a;b) chứa x_0, có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$:
  Nếu f '(x) đổi dấu từ âm sang dương thì f đạt cực tiểu tại x_0
  Nếu f '(x) đổi dấu từ dương sang âm thì f đạt cực đại tại x_0 .
– Cho y = f(x) có đạo hàm cấp hai trên khoảng (a;b) chứa x_0:
  Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0
  Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0

Ứng dụng vào phương trình

– Nếu hàm số f đơn điệu trên K thì phương trình f(x) = 0 có tối đa 1 nghiệm. Nếu f(a) = 0, a thuộc K thì x = a là nghiệm duy nhất của phương trình f(x)=0.
– Nếu f có đạo hàm cấp 2 không đổi dấu trên K thì f ' là hàm đơn điệu nên phương trình f(x) =0 có tối đa 2 nghiệm trên K. Nếu f(a) = 0 và f(b) =0 với $a \neq b$ thì phương trình f(x)=0 chỉ có 2 nghiệm là x = a và x = b .
– Nếu f là một hàm liên tục trên [a, b], có đạo hàm trên (a,b) thì phương trình $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a,b)$.
  Đặc biệt, nếu *f*(a) = *f*(b) = 0 thì phương trình *f* '(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $c \in (a, b)$ hay giữa hai nghiệm của f thì có ít nhất một nghiệm của đạo hàm f '.

Chú ý:

1) Tung độ cực trị y = f(x) tại $x = x_0$:
   Hàm đa thức: $y = q(x).\, y' + r(x) \Rightarrow y_0 = r(x_0)$
   Hàm hữu tỉ: $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y_0 = \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} = \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$
   Đặc biệt: Với hàm y = f(x) bậc 3 có CĐ, CT và nếu $y = q(x).\, y' + r(x)$ thì phương trình đường thẳng qua CĐ, CT là y = r(x).
2) Số nghiệm của phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$.
   Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x$ hay $f'(x) \leq 0, \forall x$ thì f(x) = 0 chỉ có 1 nghiệm.
   Nếu f '(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt và:

Với $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$: phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm

Với $y_{CĐ}.y_{CT} = 0$: phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép)

Với $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$: phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. 1: Chứng minh các hàm số sau là hàm không đổi

a) $f(x) = \cos^2x + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}) - \cos x\cos(x + \frac{\pi}{3})$

b) $f(x) = 2 - \sin^2x - \sin^2(a + x) - 2\cos a.\cos x.\cos(a + x)$.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = -2\cos x\sin x - 2\cos(x + \frac{\pi}{3})\sin(x + \frac{\pi}{3})$

$+ \sin x\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos x.\sin(x + \frac{\pi}{3})$

$= -\sin 2x - \sin(2x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$= -\sin 2x - 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}).\sin\frac{\pi}{6}$.

$= -\sin 2x - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$, với mọi x.

Do đó f hằng trên R nên $f(x) = f(0) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

b) Đạo hàm theo biến x (a là hằng số).

$f'(x) = -2\sin x\cos x - 2\cos(a + x)\sin(a + x)$

$+ 2\cos a[\sin x\cos(a + x) + \cos x.\sin(a + x)]$.

$= -2\sin 2x - \sin(2x + 2a) + 2\cos a.\sin(2x + a) = 0$.

Do đó f hằng trên R nên $f(x) = f(0) = 2 - \sin^2a - 2\cos^2a = \sin^2a$.

Bài toán 1. 2: Cho 2 đa thức P(x) và Q(x) thoả mãn: $P'(x) = Q'(x)$ với mọi x và $P(0) = Q(0)$. Chứng minh: $P(x) \equiv Q(x)$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = P(x) - Q(x)$, D = R.

Ta có $f'(x) = P'(x) - Q'(x) = 0$ theo giả thiết, do đó f(x) là hàm hằng nên $f(x) = f(0) = P(0) - Q(0) = 0$ với mọi x.

$\Rightarrow f(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$.

Bài toán 1. 3: Chứng minh rằng:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$

b) $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -\pi, x \le -1$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu x = 1, x = –1 thì đúng.

Nếu $-1 < x < 1$ thì xét hàm số f(x) = arcsinx + arccosx

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) = C = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Với $x \le -1$, xét $f(x) = 2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \text{ (vì } x \le -1).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = C = f(-1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

Bài toán 1. 4: Tính gọn $\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Hướng dẫn giải

Xét $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. D = $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

Với $x \in (0;+\infty)$ thì f liên tục và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \text{ nên f hằng trên } (0;+\infty).$$

$$\text{Do đó } f(x) = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Với $x \in (-\infty;0)$ thì f liên tục và có đạo hàm $f'(x) = 0$ nên f hằng trên $(-\infty;0)$.

$$\text{Do đó } f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Vậy } \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ khi } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

Bài toán 1. 5: Tìm số c trong định lý Lagrange:

a) $y = f(x) = 2x^2 + x - 4$ trên $[-1, 2]$

b) $y = f(x) = \arcsin x$ trên $[0;1]$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = f(x) = 2x^2 + x - 4$ liên tục trên $[-1, 2]$ và có đạo hàm $f'(x) = 4x + 1$, theo định lý Lagrange thì tồn tại số $c \in [-1;2]$ sao cho:

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{6+3}{3} = 4c+1 \Leftrightarrow 4c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

b) Hàm số $y = f(x) = \arcsin x$ liên tục trên $[0;1]$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

theo định lý Lagrange thì tồn tại số $c \in [0;1]$ sao cho:

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}-0}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-c^2 = \frac{4}{\pi^2} \Leftrightarrow c^2 = 1-\frac{4}{\pi^2}. \text{ Chọn } c = \sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}.$$

Bài toán 1. 6: Xét chiều biến thiên của hàm số:

a) $y = x^4 - 2x^2 - 5$ b) $y = \frac{1}{(x-4)^2}$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-4)^3}$

$y' < 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$ nên y nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

$y' > 0$ trên khoảng $(-\infty; 4)$ nên y đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

Bài toán 1. 7: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$ b) $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$.

Ta có : $y' = \dfrac{2x^2(x^2-9)}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

BBT:

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	/////	‖	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	‖	/////	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; 3)$.

b) $D = (-\infty; 1)$. Ta có $y' = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}} > 0, \forall x < 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Bài toán 1. 8: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) $y = x + \cos^2 x$ b) $y = x - \sin x$ trên $[0; 2\pi]$.

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R}$. Ta có $y' = 1 - 2\cos x\sin x = 1 - \sin 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Hàm số liên tục trên mỗi đoạn $[\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ và

$y' > 0$ trên mỗi khoảng $(\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi)$ nên đồng biến trên mỗi đoạn

$[\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi], k \in \mathbf{Z}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$.

b) $y' = 1 - \cos x$. Ta có $\forall x\ [0; 2\pi] \Rightarrow y' \geq 0$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2\pi$.

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2\pi]$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Bài toán 1. 9: Chứng minh các hàm số

a) $y = \cos 2x - 2x + 5$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$.

b) $y = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ $(a \neq b + k\pi; k \in \mathbf{Z})$ đơn điệu trên mỗi khoảng xác định.

Hướng dẫn giải

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ .Lấy hai số a, b sao cho $a < x_1 < x_2 < b$.

Ta có: $f'(x) = -2(\sin 2x + 1) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Vì $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của khoảng $(a; b)$ nên hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a; b) \Rightarrow$ đpcm.

b) Điều kiện $x \neq -b + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

$$y' = \frac{\sin(x+b)\cos(x+a) - \sin(x+a)\cos(x+b)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\sin(b-a)}{\sin^2(x+b)}$$

Vì y' liên tục tại mọi điểm $x \neq -b + k\pi$, và $a - b \neq k\pi$ nên y' giữ nguyên một dấu trong mỗi khoảng xác định $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1. 10: Tìm các giá trị của tham số để hàm số:

a) $y = (m - 3)x - (2m + 1)\cos x$ nghịch biến trên **R**.

b) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3.

Hướng dẫn giải

a) $y' = m - 3 + (2m - 1)\sin x$

Hàm số y không là hàm hằng nên y nghịch biến trên **R**:

$y' \leq 0,\ \forall x \Leftrightarrow m - 3 + (2m - 1)\sin x \leq 0,\ \forall x$

Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$ thì $m - 3 + (2m - 1)\sin x = m - 3 + (2m - 1)t = f(t)$

Điều kiện tương đương: $f(t) \leq 0,\ \forall t \in [-;1\ 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 4 \leq 0 \\ 3m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}.$$

b) $D = \mathbf{R}$, $y' = 3x^2 + 6x + m$, $\Delta' = 9 - 3m$

Xét $\Delta' \leq 0$ thì $y' \geq 0,\ \forall x$: Hàm luôn đồng biến (loại)

Xét $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 nên $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = \frac{m}{3}$

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Theo đề bài: $x_2 - x_1 = 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 9 \Leftrightarrow m = -\frac{15}{4} \text{ (thoả)}$$

Bài toán 1. 11: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = (x + 2)^2 (x - 3)^3$.

b) $y = |x|(x + 2)$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 2(x + 2)(x - 3)^3 + 3(x + 2)^2\ (x-3)^2 = 5x(x + 2)(x - 3)^2$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 3$.

BBT

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-108	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại (–2; 0) và cực tiểu (0; –108).

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên **R**.Ta có:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{khi } x < 0 \\ x(x+2) & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Với $x < 0$, $f'(x) = -2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Với $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2 > 0$.

BBT

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	||	+	
y		↗	1	↘	0	↗	

Vậy điểm CĐ(–1; 1), CT(0; 0).

Bài toán 1. 12: Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$ b) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Ta có $y' = \dfrac{x^2+8-2x(x+1)}{(x^2+8)^2} = \dfrac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	↘	-1/8	↗	1/4	↘	0

Hàm số đạt CĐ tại $x = 2$; $y_{CĐ} = \dfrac{1}{4}$, đạt CT tại $x = -4$; $y_{CT} = -\dfrac{1}{8}$.

b) Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2-6} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6} = \frac{3x^2(x^2-6)-x^4}{\sqrt{(x^2-6)^3}} = \frac{2x^2(x^2-9)}{\sqrt{(x^2-6)^3}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 3$.

BBT

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		+	0	-	||	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-9\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ||	|| $+\infty$	↘	$9\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Hàm số đạt CĐ tại $x = -3$; $y_{CĐ} = -9\sqrt{3}$, đạt CT tại $x = 3$; $y_{CT} = 9\sqrt{3}$.

Bài toán 1. 13: Tìm cực trị của hàm số

a) $y = x - \sin 2x + 2$ b) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R}$, $y' = 1 - 2\cos 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $y'' = 4\sin 2x$.

Ta có $y''(-\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin(-\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm

$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = -\frac{\pi}{6} + k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

Ta có $y''(\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại các điểm:

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $y_{CT} = \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

b) $y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \text{ hoặc } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$

Ta có $y''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4\cos 2k\pi = 2\cos k\pi + 4 > 0$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$, nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại các điểm $x = k\pi$, $y_{CT} = 2 - 2\cos k\pi$ bằng 0 khi k chẵn và bằng 4 khi k lẻ.

Ta có $y''(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 4\cos\frac{4\pi}{3} = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3 < 0$ nên hàm số

đạt cực đại tại điểm: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = \frac{9}{2}$.

Bài toán 1. 14: Chứng minh hàm số

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{khi } x < 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực trị tại điểm đó.

b) $y = f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, $a \neq c$ luôn có cực đại và cực tiểu.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ nên $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$, do đó f không có đạo hàm tại $x = 0$ và BBT trên khoảng $(-\pi; \pi)$.

x	$-\pi$		0		π
y'		+	‖	−	
y		↗	0	↘	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{CĐ} = y(0) = 0$.

b) D = **R**. $y' = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$

$= 3x^2 - 2(a + b + c) + ab + bc + ca$.

$\Delta' = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0$ với $a \neq c$.

Do đó y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt và đổi dấu 2 lần khi qua 2 nghiệm nên luôn luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Bài toán 1. 15: Tìm tham số thực sao cho hàm số

a) $f(x) = x + p + \frac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm (–2; –2).

b) $f(x) = \frac{a\sin x - \cos x - 1}{a\cos x}$ đạt cực trị tại 3 điểm thuộc $(0; \frac{9\pi}{4})$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f'(x) = 1 - \frac{q}{x+1}$, với mọi $x \neq -1$.

Nếu $q \leq 0$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$: loại.

Nếu q > 0 thì phương trình: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - q}{(x+1)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 - \sqrt{q}$ và $x_2 = -1 + \sqrt{q}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{q}$		-1		$-1+\sqrt{q}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm (2; –2) khi và chỉ khi

$\begin{cases} -1 - \sqrt{q} = -2 \\ f(-2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{q} = 1 \\ p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 1 \end{cases}$

b) Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ta có $y' = \frac{a - \sin x}{a\cos^2 x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = a$.

$$y'' = \frac{-\sin^2 x + 2a\sin x - 1}{a\cos^3 x}$$

Với sinx = a thì $y'' = \dfrac{-1}{\sin x \cos x} \neq 0$, do đó hàm số đạt cực trị tại 3 điểm thuộc khoảng $(0; \dfrac{9\pi}{4})$

$\Leftrightarrow$ sinx = a có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \dfrac{9\pi}{4}) \setminus \{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 1. 16: Tìm m để hàm số:

a) $y = \dfrac{mx^2 + (2-4m)x + 4m + 1}{x - 1}$ có 2 cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu.

b) $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị A và B. Chứng minh đường thẳng AB song song với đường thẳng $2x - y - 10 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \neq 1$.

Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2mx - 3}{(x-1)^2}$, đặt $g(x) = mx^2 - 2mx - 3$.

Đồ thị có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0, \Delta' > 0, g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 0$.

Ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -\dfrac{3}{m}$ nên $y_{CĐ}.\, y_{CT} < 0$.

$\Leftrightarrow (2mx_1 + 2 - 4m)(2mx_2 + 2 - 4m) < 0$

$\Leftrightarrow 4m^2x_1x_2 + 2m(2-4m)(x_1 + x_2) + (2-4m)^2 < 0$.

$\Leftrightarrow -12m + 2m(2-4m) + (2-4m)^2 < 0 \Leftrightarrow 4 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{5}$.

b) ĐK: $x \neq 1$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x-1)^2}$

Điều kiện có 2 cực trị A, B là $\Delta' > 0$ và $g(1) \neq 0$.

$\Leftrightarrow 3 - 2m > 0$ và $3 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{2}$. Ta có

$A(1-\sqrt{3-2m}\,; 2-2m-2\sqrt{3-2m})$ và $B(1+\sqrt{3-2m}\,; 2-2m+2\sqrt{3-2m})$.

Hệ số góc của đường thẳng AB là: $k = \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{4\sqrt{3-2m}}{2\sqrt{3-2m}} = 2$.

Và $2x - y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 10$ nên hệ số góc bằng nhau $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1. 17: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị:

a) $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3 - 3m$

b) $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 5m - 4 - m^2}{x - 2}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$, $\Delta' = 1 > 0, \forall x$ nên đồ thị luôn luôn có CĐ và CT với hoành độ x_1, x_2.

Ta có: $y(x) = \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{m}{3}\right)y'(x) - 2(x + m)$.

Do đó: $y_1 = y(x_1) = \left(\dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{m}{3}\right)y'(x_1) - 2(x_1 + m) = -2(x_1 + m)$

và $\quad y_2 = y(x_2) = \left(\dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{m}{3}\right)y'(x_2) - 2(x_2 + m) = -2(x_2 + m)$

nên đường thẳng qua CĐ, CT là $y = -2(x + m)$.

b) ĐK: $x \neq 2$. Ta có $y = x - 2(m - 1) + \dfrac{m - m^2}{x - 2}$

nên $y' = 1 - \dfrac{m - m^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{(x - 2)^2 - (m - m^2)}{(x - 2)^2}$.

Điều kiện có CĐ và CT là $m - m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ CĐ, CT thì $x_1 < 2 < x_2$. Ta có

$$y(x_1) = x_1 - 2(m - 1) + \frac{m - m^2}{(x_1 - 2)} = x_1 - 2(m - 1) + (x_1 - 2) = 2x_1 - 2m.$$

$$y(x_2) = x_2 - 2(m - 1) + \frac{m - m^2}{(x_2 - 2)} = x_2 - 2(m - 1) + (x_2 - 2) = 2x_2 - 2m.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua CĐ và CT là $y = 2x - 2m$

Bài toán 1. 18:

a) Cho đồ thị của hàm số: $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có hai điểm cực trị là $(1; -7)$, $(2; -8)$. Hãy tính tổng $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

b) Tìm a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x - 1)^3 + a + 1}{x}$ có 3 cực trị và chứng minh 3 cực trị này thuộc một parabol cố định.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $A = 3a^2 - 1$, $B = -(b^3 + 1)$, $C = 3c^2$, $D = 4d$, thì hàm số đã cho là:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ta có: $y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

Ta có: $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(1) = -7 \\ y(2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 2B + C = 0 \\ 12A + 4B + C = 0 \\ A + B + C + D = -7 \\ 8A + 4B + 2C + D = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -9 \\ C = 12 \\ D = -12 \end{cases}$

Nên được $a = \pm 1$, $b = 2$, $c = \pm 2$, $d = -3$.

Vậy $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 = 18$.

b) Ta có $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - a}{x^2}$, $x \neq 0$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2x^3 - 3x^2$, $x \neq 0$.

Bằng cách xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 3x^2$, $x \neq 0$ và lập bảng biến thiên thì điều kiện hàm số cho có 3 cực trị khi $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 là $-1 < a < 0$.

Từ tọa độ các điểm cực trị suy ra các điểm cực trị này nằm trên (P):

$$y = 3x^2 - 6x + 3 \text{ cố định.}$$

Bài toán 1. 19: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2(\sqrt{3} - 1)$

b) $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ trên **R**.

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}} - \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 3}}$$

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 3}}$ trên **R**, $g'(t) = \dfrac{3}{(t^2 + 3)\sqrt{t^2 + 3}} > 0$

nên hàm số g(t) đồng biến trên **R**, do đó:

$$x + 1 > x - 1 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}} > \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 3}} \Rightarrow f'(x) > 0$$

nên hàm số f(x) đồng biến trên **R**, do đó:

$\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) PT $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Xét hàm số: $f(t) = t + \sqrt[3]{t + 1}$ trên **R**, $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}} > 0$ nên hàm số f(t) đồng biến trên **R**, do đó:

PT: $f(2x^3 - 3x) = f(x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 1. 20: Giải các phương trình :

a) $9x^2 - 54x + 72 = \frac{1}{|2x-5|} - \frac{1}{|x-1|}$

b) $4|2x - 1|(x^2 - x + 1) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK : $x \neq 1; \frac{5}{2}$, PT: $3(2x-5)^2 - \frac{1}{|2x-5|} = 3(x-1)^2 - \frac{1}{|x-1|}$

Xét $f(t) = 3t^2 - \frac{1}{t}$ với $t > 0$. Ta có:

$f'(t) = 6t + \frac{1}{t^2} > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình: $f(|2x - 5|) = f(|x - 1|) \Leftrightarrow |2x - 5| = |x - 1|$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$ (chọn)

Vậy nghiệm $x = 2$ hoặc $x = 4$

b) PT: $|2x - 1|.[(2x - 1)^2 + 3] = (x - 2)^3 + 3x - 6$

$\Leftrightarrow |2x - 1|^3 + 3|2x - 1| = (x - 2)^3 + 3(x - 2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $D = \mathbf{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên f đồng biến trên **R**.

PT: $f(|2x - 1|) = f(x - 2) \Leftrightarrow |2x - 1| = x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$ (VN). Vậy $S = \emptyset$.

Bài toán 1. 21: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 5x^7 + 7x^5 = 5y^7 + 7y^5 \\ (8x^3 + 1)^3 + 27 = 162y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \,;\, y \geq 1 & (1) \\ (y-1)\left[(x+y)^2 - 1\right] = |x+y|(y^2 - 2y) & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(t) = 5t^7 + 7t^5$, $t \in \mathbf{R}$ thì $f'(t) = 35t^6 + 35t^4 \geq 0$, $\forall$ t nên f đồng biến trên **R**.

Do đó $5x^7 + 7x^5 = 5x^7 + 7x^5 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Nên $(8x^3 + 1)^3 + 27 = 162y \Leftrightarrow (8x^3 + 1)^3 = 162x - 27$

Đặt u = 2x, phương trình: $(u^3 + 1)^3 = 27(3u - 1) \Leftrightarrow u^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3u-1}$

Lại đặt $v = \sqrt[3]{3u-1} \Leftrightarrow v^3 + 1 = 3u$

Ta có hệ: $\begin{cases} u^3+1=3v \\ v^3+1=3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ u^3-v^3=3(v-u) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ (u-v)(u^2+vu+v^2+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ u-v=0 \end{cases}$$

Do đó $u^3 + 1 = 3u$ hay $8x^3 - 6x + 1 = 0$

Xét $x \in [-1; 1]$ nên đặt x = cost

PT: $2(4\cos^3 t - 3\cos t) = -1 \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$

Từ đó có 3 giá trị của x và cũng chính là 3 nghiệm của phương trình bậc 3:

$x = \cos\frac{2\pi}{9}$, $x = \cos\frac{8\pi}{9}$, $x = \cos\frac{14\pi}{9}$.

Vậy nghiệm hệ $x = y = \cos\frac{2\pi}{9}; \cos\frac{8\pi}{9}, \cos\frac{14\pi}{9}$

b) (2) $\Leftrightarrow (y-1)[(x+y)^2 - 1] = |x+y|\,[(y-1)^2 - 1]$

Với y = 1: (3) $\Leftrightarrow$ x = –1: không thoả (1)

Với x + y = 0 (3) $\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$; không thoả (1)

Với $x + y \neq 0$, $y > 1$: (3) $\Leftrightarrow \dfrac{(x+y)^2-1}{|x+y|} = \dfrac{(y-1)^2-1}{y-1}$.

$$\Leftrightarrow |x+y| - \frac{1}{|x+y|} = y - 1 - \frac{1}{y-1}$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$, $D = (0; +\infty)$

$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$, $\forall t \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D

PT $\Leftrightarrow f(|x+y|) = f(y-1) \Leftrightarrow |x+y| = y - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 1 \\ x = -1 \quad \text{hay} \quad x = 1 - 2y \end{cases}$$

Khi x = –1 : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$. Khi x = 1 – 2y : $\begin{cases} x = \dfrac{1-2\sqrt{24}}{5} \\ y = \dfrac{2+\sqrt{24}}{5} \end{cases}$

Bài toán 1. 22: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2-2x+1=2y \\ y^2-2y+1=2z \\ z^2-2z+1=2x \end{cases}$. b) $\begin{cases} 36x^2y-60x^2+25y=0 \\ 36y^2z-60y^2+25z=0 \\ 36z^2x-60z^2+25x=0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$. Tương tự $z, x \geq 0$.

Đặt $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $t \geq 0$ thì $f'(t) = 2(t-1)$ nên f đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(0; 1)$. Đặt $g(t) = 2t$, $t \geq 0$ thì $g'(t) = 2 > 0$ nên g đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta có hệ $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$

Giả sử $x = \min\{x; y; z\}$. Xét $x \leq y \leq z$.

– Nếu $x > 1$ thì $1 < x \leq y \leq z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(z)$
$\Rightarrow g(y) \leq g(z) \leq g(x) \Rightarrow y \leq z \leq x$ nên $x = y = z$.
Ta có PT: $t^2 - 4t + 1 = 0$ chọn nghiệm: $x = y = z = 2 + \sqrt{3}$.

– Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì $f(0) \geq f(x) \geq f(1) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$.
nên $0 \leq g(y) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow f(0) \geq f(y) \geq f(1)$
$\Rightarrow 0 \leq f(y) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq g(z) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq z \leq 1$.
Do đó $x \leq y \leq z \Rightarrow f(x) \geq f(y) \geq f(z) \Rightarrow g(y) \geq g(z) \geq g(x)$
$\Rightarrow y \geq z \geq x$ nên $x = y = z$.

Ta có PT $t^2 - 4t + 1 = 0$ chọn nghiệm: $x = y = z = 2 - \sqrt{2}$.

Xét $x \leq z \leq y$ thì cùng nhận được kết quả trên.

Vậy hệ có 2 nghiệm $x = y = z = 2 + \sqrt{3}$, $x = y = z = 2 - \sqrt{3}$.

b) Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} y = \dfrac{60x^2}{36x^2+25} \\ z = \dfrac{60y^2}{36y^2+25} \\ x = \dfrac{60z^2}{36z^2+25} \end{cases}$

Từ hệ suy ra x, y, z không âm. Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0$ suy ra $(0; 0; 0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x > 0$ thì $y > 0$, $z > 0$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{60t^2}{36t^2+25}$, $t > 0$.

$f'(t) > 0, \forall t > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Hệ phương trình được viết lại $\begin{cases} y = \dfrac{60x^2}{36x^2+25} \\ z = \dfrac{60y^2}{36y^2+25} \\ x = \dfrac{60z^2}{36z^2+25} \end{cases}$.

Từ tính đồng biến của f(x) suy ra x = y = z. Thay vào hệ phương trình ta được $x(36x^2 - 60x + 25) = 0$. Chọn $x = 0; \dfrac{5}{6}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(0;0;0);\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)\right\}$

Bài toán 1. 23: Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$

b) $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$

Xét: f(x) = $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$

$$f'(x) = \frac{6(x^2+x+1)}{2\sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$$

Suy ra f(x) là hàm số đồng biến

Do đó BPT: f(x) > f(1) ⇔ x > 1. Vậy: S = (1; 4)

b) Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

BPT: $\sqrt{x^2-2x+3} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x^2-6x+11} + \sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(x-3)^2+2} + \sqrt{3-x}$

Xét hàm số y = f(t) = $\sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$, D = (0, +∞)

Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ nên f đồng biến trên (1, 3].

Do đó BPT ⇔ f(x – 1) > f(3 – x) ⇔ x – 1 > 3 – x ⇔ x > 2.

Vậy nghiệm của bất phương trình S = (2, 3].

Bài toán 1. 24: Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} < 1$

b) $4(\sqrt{x})^4 + \left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} < 7$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = x^2 - x$, BPT: $\sqrt{3+t} - \sqrt{2-t} < 1$, $-3 \le t \le 2$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3+t} - \sqrt{2-t}$, $-3 \le t \le 2$.

Với $-3 < t < 2$ thì $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+t}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2-t}} > 0$

nên f đồng biến trên $(-3; 2)$.

Ta có $f(1) = 2 - 1 = 1$ nên bất phương trình:

$f(t) < f(1) \Leftrightarrow t < 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) ĐK: $0 \le x \le \dfrac{3}{4}$. PT $\Leftrightarrow 4x^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} < 7$

Với $x = 0$ thì BPT không thỏa mãn. Với $x = \dfrac{3}{4}$ thì BPT thỏa mãn.

Với $0 < x < \dfrac{3}{4}$. Xét hàm số $g(x) = 4x^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x}$

thì $g'(x) = 8x - 8x(\dfrac{5}{2} - 2x^2) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0$

nên $g(x)$ nghịch biến trên $(0; \dfrac{3}{4})$, mà $g(\dfrac{1}{2}) = 7$ nên bất phương trình $g(x) <$

$g(\dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Vậy tập nghiệm $S = (\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}]$.

Bài toán 1. 25: Chứng minh phương trình:

$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$

Xét $x \ge 1$ thì $f(x) = x^6(x^7 - 1) + 3x^2(x^2 - 1) + 1 > 0$: vô nghiệm

Xét $0 \le x < 1$ thì $f(x) = x^{13} + (1 - x^2)^3 > 0$: vô nghiệm

Xét $x < 0$ thì: $f'(x) = 13x^{12} - 6x^5 + 12x^3 - 6x$

$= 13x^{12} - 6x(x-1)^2 > 0$ nên f đồng biến

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1

Nên f(x) = 0 có nghiệm duy nhất x < 0.

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 1. 26: Chứng minh hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y + a \\ y^2 = z^3 + z^2 + z + a \\ z^2 = x^3 + x^2 + x + a \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm $f(t) = t^3 + t^2 + t + a$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0$ do đó f(t) là hàm đồng biến. Hệ PT: $\begin{cases} x^2 = f(y) \\ y^2 = f(z) \\ z^2 = f(x) \end{cases}$

Không giảm tổng quát giả sử x lớn nhất trong 3 số.

- Xét $x \ge y \ge z \Rightarrow f(x) \ge f(y) \ge f(z)$

  $\Rightarrow z^2 \ge x^2 \ge y^2$. Nếu $z \ge 0$ thì $x \ge y \ge z \ge 0$

  $\Rightarrow x^2 \ge y^2 \ge z^2 \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \Rightarrow f(x) = f(y) = f(z) \Rightarrow x = y = z$

  Nếu $x \le 0 \Rightarrow 0 \ge x \ge y \ge z \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \Rightarrow x = y = z$

  Nếu $x > 0 > z$. Khi đó $y^2 = f(z) < f(0) = a \Rightarrow a > 0$

  Lại có $z^2 = f(x) > f(0) = a \Rightarrow z = -\sqrt{a}$

  $\Rightarrow y^2 = f(z) < f(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)^2 \le 0$: vô lí.

- Xét $x \ge z \ge y \Rightarrow z^2 \ge y^2 \ge x^2$

  Tương tự như trên nếu $y \ge 0$ hay $x \le 0$ ta suy ra $x = y = z$

  Nếu $x > 0 > y \Rightarrow x^2 = f(y) < f(0) = a$

  $z^2 = f(x) > f(0) = a$. Nếu $z > \sqrt{a}$

  thì $x \ge z > \sqrt{a} \Rightarrow x^2 \ge z^2 \Rightarrow z^2 = y^2 = z^2$

  $\Rightarrow x = y = z$ trái với $x > 0 > y$

  Nếu $z < -\sqrt{a}$ lí luận như trên ta dẫn đến mâu thuẫn.

  Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = t_0$ ở đó t_0 là nghiệm duy nhất của phương trình: $t^3 + t^2 + t + a = 0$.

Bài toán 1. 27: Chứng minh hệ $\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 \\ y^2 + x^3 = 1 \end{cases}$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Trừ 2 phương trình vế theo vế và thay thế ta được:

$x^2(1 - x) - y^2(1 - y) = 0 \Rightarrow (1 - y^3)(1 - x) - (1 - x^3)(1 - y) = 0$

$\Rightarrow (1 - x)(1 - y)[1 + y + y^2 - (1 + x + x^2)] = 0.$

$\Rightarrow (1 - x)(1 - y)(y - x)(1 + x + y) = 0.$

Xét x = 1 thì hệ có nghiệm (1; 0).Xét y = 1 thì hệ có nghiệm (0; 1)

Xét x = y thì $x^2 + y^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Đặt $f(x) = x^3 + x^2 - 1$, D = **R**. Ta có $f(1) = 1 \neq 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ hoặc } x = 0.$$

BBT

x	$-\infty$		-2/3		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-23/27	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó f(x) = 0 có 1 nghiệm duy nhất $x_o > 0$, $x_o \neq 1$ nên hệ có nghiệm $(x_o; y_o)$.

Xét $1 + x + y = 0 \Rightarrow y = -x - 1$ nên $y^2 + x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hệ có nghiệm (0; 1).

Vậy hệ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài toán 1. 28: Tìm tham số để phương trình

a) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a$ có nghiệm

b) $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$, D = **R**

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - \sqrt[3]{(1+x)^2}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}\,.\,\sqrt[3]{(1+x)^2}},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)}\right)^2 + \sqrt[3]{(x^2-1)} + \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2} = 0$$

Tương tự $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.Lập BBT thì PT có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < a \leq 2$.

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx,\ x \geq -\frac{1}{2}$

Vì x = 0 không thoả mãn nên: $\frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m,\quad x \geq -\frac{1}{2}$

Xét $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x}$, $x \ge -\dfrac{1}{2}$, $x \ne 0$ thì $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2}$

BBT:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f '		+	||	+	
f	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

Điều kiện phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ f(x) = m có 2 nghiệm phân biệt $x \ge -\dfrac{1}{2}$, $x \ne 0 \Leftrightarrow \quad m \ge \dfrac{9}{2}$

Bài toán 1. 29: Tìm m để phương trình

a) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-2}\right)\left(m^2\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)}\right) = 2$ có nghiệm

b) $3\sqrt{\tan x + 1}.(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$ có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: x > 2

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2\left(m^2.\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3.\sqrt[4]{x(x-2)}\right) = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3.\sqrt[4]{x(x-2)} = \sqrt{x} - \sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3.\sqrt[4]{x(x-2)} = (1-m^2)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - 3.\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}} = 1 - m^2$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x}}$, $0 < t < 1$.PT: $\dfrac{1}{t^2} - 3t = 1 - m^2$, $0 < t < 1$.

Xét $f(t) = \dfrac{1}{t^2} - 3t$, $t \in (0;\ 1) \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{2}{t^3} - 3 < 0$, $\forall t \in (0;\ 1)$.

Bảng biến thiên

t	0		1
f '(t)		-	
f(t)	$+\infty$	↘	-2

Vậy phương trình cho có nghiệm khi

$$1 - m^2 > -2 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

b) Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\tan x \geq -1$.

Đặt $t = \sqrt{\tan x + 1} \geq 0$, phương trình:

$$3\sqrt{\tan x + 1}\,\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x} = m\frac{\sin x + 3\cos x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2) = m(\tan x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 1 + 1) = m(\tan x + 1 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3t(t^2 + 1) = m(t^2 + 2) \Leftrightarrow m = \frac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}.$$

Xét hàm số $y = \dfrac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}$ với $t \in (1, +\infty)$,

$$y' = \frac{3t^4 + 15t^2 + 6}{(t^2 + 2)^2} > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m > y(1) \Leftrightarrow m > 2$.

Bài toán 1. 30: Tìm tham số để phương trình

a) $(4m - 3)\sqrt{x + 3} + (3m - 4)\sqrt{1 - x} + m - 1 = 0$ có nghiệm

b) $x^6 + 3x^5 + (6 - a)x^4 + (7 - 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + 3x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $-3 \leq x \leq 1$ khi đó:

$$\text{PT} \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$$

Ta có: $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 2$ nên đặt:

$$\sqrt{x+3} = 2\sin\varphi = 2\,\frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \sqrt{1-x} = 2\cos\varphi = 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Với $t = \tan\dfrac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leq t \leq 1$ nên: $m = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$

Xét $f(t) = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$, $t \in [0, 1]$

$$f'(t) = \frac{-52t^2 - 8t - 60}{(-5t^2 + 16t + 7)^2} < 0,\ \forall t \in [0, 1]$$

Vậy điều kiện phương trình có nghiệm là $f(0) \leq m \leq f(1) \Leftrightarrow \dfrac{7}{9} \leq m \leq \dfrac{2}{7}$.

b) Xét x = 0 ⇒ 1 = 0: loại.

Xét $x \neq 0$. Chia 2 vế cho x^3, phương trình:

$$x^3 + 3x^2 + (6 - a)x + (7 - 2a) + (6 - a) . \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (6 - a)(x + \frac{1}{x}) + 7 - 2a = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

và $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$ nên $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$.

Do đó phương trình: $t^3 - 3t + 3(t^2 - 2) + (6 - a)t + 7 - 2a = 0$

$$(t + 2)a = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

Khi t = –2 thì phương trình không thoả.

Khi $t \neq -2$ thì phương trình: $a = \dfrac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t + 2} = \dfrac{(t + 1)^3}{t + 2}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{(t + 1)^3}{t + 2}$, $t < -2$ hay $t \geq 2$ thì $f'(t) = \dfrac{(2t + 5)(t + 1)^2}{2(t + 2)^2}$.

Lập BBT thì $f(t) \geq \dfrac{27}{4}$ $\forall t \in D$ nên PT vô nghiệm khi $a < \dfrac{27}{4}$.

Bài toán 1. 31: Tìm tham số để bất phương trình có nghiệm

a) $\sin^3x + \cos^3x \geq m$

b) $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \sin^3x + \cos^3x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x)$

Đặt $t = \sin x + \cos x$; $|t| \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có $h(t) = t\left[1 - \dfrac{(t^2 - 1)}{2}\right] = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$ với $|t| \leq \sqrt{2}$

$$h'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Lập BBT thì bất phương trình có nghiệm khi $m \leq 1$.

b) Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = -t^4 + 2t^2$

BPT: $-t^4 + 2t^3 - t^2 + m + 3 \leq 0$; $(|t| \leq \sqrt{2})$

Xét $f(t) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + m + 3$

$$f'(t) = -2t(2t^2 - 3t + 1); \quad f'(t) = 0 \Rightarrow t = 0;\ \frac{1}{2};\ 1$$

Lập BBT suy ra điều kiện có nghiệm là: $m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3$

Bài toán 1. 32: Tìm điều kiện của m hệ bất phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 & (1) \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Xét (1) : $x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$

Ta tìm điều kiện ngược lại, tức là tìm m để :

$f(x) = x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m < 0;\ \forall x \in [-1; 4]$

$$\text{Vì } f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - m^2 - 15m;\ -1 \le x \le 0 \\ x^3 - 3x^2 - m^2 - 15m;\ 0 < x \le 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x;\ -1 \le x \le 0 \\ 3x^2 - 6x;\ 0 < x \le 4 \end{cases}$$

Khi $-1 \le x < 0 \Rightarrow f'(x) = 3x(x + 2) < 0$

$0 \le x \le 2 \Rightarrow f'(x) = 3x(x - 2) \le 0$

$2 < x \le 4 \Rightarrow f'(x) = 3x(x - 2) > 0$

Do đó $-m^2 - 15m + 16 < 0 \Leftrightarrow m < -16 \vee m > 1$

Vậy điều kiện có nghiệm là $-16 \le m \le 1$

Bài toán 1. 33: Cho 3 số a,b,c thoả mãn $abc \ne 0$ và $\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{3} = 0$.

Chứng minh phương trình : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $F(x) = \frac{a}{7}x^7 + \frac{b}{5}x^5 + \frac{c}{3}x^3$, khi đó F(x) liên tục, có đạo hàm $F'(x) = x^2.(ax^4 + bx^2 + c) = x^2.f(x)$ nên theo dụng định lí Lagrange trên [0,1] thì tồn tại $c \in (0,1)$: $\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(c)$.

Mà $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{3} = 0$ nên $F'(c) = 0$ hay $c^2.f(c) = 0$.

Vì $c \in (0,1)$ nên $c^2 \ne 0$ do đó $f(c) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1. 34: Cho hàm số f có đạo hàm trên trên [0;1] và thoả mãn: $f(0) = 0$; $f(1) = 1$. Chứng minh tồn tại 2 số phân biệt a;b thuộc (0; 1) sao cho $f'(a).f'(b) = 1$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số g(x)= f(x) +x – 1 , khi đó thì g(x) liên tục và có đạo hàm trên [0;1] .

Ta có: g(0)= – 1 < 0 và g(1)= 1 >0 nên tồn tại số c thuộc (0;1) sao cho g(c) =0.

Do đó f(c) + c –1 =0 hay f(c) = 1– c

Áp dụng định lý Lagrange cho f trên các đoạn [0;c] và [c;1] thì :

tồn tại $a \in (0;c)$ sao cho: $\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(a)$

và tồn tại $b \in (c;1)$ sao cho: $\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(b)$

nên: $f'(a).f'(b) = \frac{f(c)}{c}\frac{1-f(c)}{1-c} = \frac{(1-c)c}{c(1-c)} = 1$

Vậy tồn tại 2 số phân biệt a; b thuộc (0;1) sao cho f '(a).f '(b) = 1.

Bài toán 1. 35: Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên [0,1] và nhận giá trị dương.

Chứng minh bất phương trình: $f'(x) - f(x) \le \frac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0))$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét 2 hàm số: $g(x) = \arctan x; h(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$ trên [0,1], khi đó thì g(x),h(x) có đạo hàm trên (0;1).

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}; h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}f(x) + \frac{1}{1+x^2}f'(x)$

Theo định lý Cauchy thì tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho:

$$\frac{h(1)-h(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \text{ hay } \frac{\frac{f(1)}{2} - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = f'(c) - \frac{2c}{1+c^2}f(c)$$

nên $\frac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0)) = f'(c) - \frac{2c}{1+c^2}f(c)$.

Vì $0 < c < 1$ nên $1+c^2 \ge 2c$ và vì $f(c) > 0$ nên $f'(c) - \frac{2c}{1+c^2}f(c) \ge f'(c) - f(c)$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1. 36: Giả sử *f* là một hàm xác định trên [a, b], có đạo hàm đến cấp n + 1 trên (a,b) và $x_0 \in (a,b)$. Chứng minh tồn tại c nằm giữa x và x_0 để có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Hướng dẫn giải

Ta tìm một đa thức $P_n(x)$ có bậc không vượt quá n sao cho

$f(x_0) = P_n(x_0)$, $f'(x_0) = P'_n(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x_0)$

với: $P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n$.

Lúc đó:

$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1}$

$P''_n(x) = 2A_2 + 3.2.A_3(x - x_0) + ... + n(n - 1)A_n(x - x_0)^{n-2}$

....

$P_n^{(n)}(x) = n!A_n$.

Do đó thay $x = x_0$ vào các đẳng thức trên ta được:

$P_n(x_0) = A_0$, $P'_n(x_0) = A_1$, $P''_n(x_0) = 2A_2$, ..., $P_n^{(n)}(x_0) = n!A_n$.

Như vậy: $f(x_0) = A_0$, $A_1 = f'(x_0)$, $2A_2 = f''(x_0)$, ... , $f^{(n)}(x_0) = n!A_n$ nên:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Đặt $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ ta suy ra $R_n^{(n)}(x) = f_n^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)$

nên: $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = ... = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Đặt $F(x) = (x - x_0)^{n+1}$ thì: $F(x_0) = F'(x_0) = ... = F_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Với $x \in (a,b)$ ta viết được $\dfrac{R_n(x)}{F(x)} = \dfrac{R_n(x) - R_n(x_0)}{F(x) - F(x_0)}$.

Theo định lý Cauchy ta có $\dfrac{R_n(x)}{F(x)} = \dfrac{R'_n(\xi_1)}{F'(\xi_1)}$ với ξ_1 nằm giữa x và x_0.

Ta lại có $\dfrac{R'_n(\xi_1)}{F'(\xi_1)} = \dfrac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{F'(\xi_1) - F'(x_0)}$ và theo định lý Cauchy ta được: $\dfrac{R'_n(\xi_1)}{F'(\xi_1)} = \dfrac{R''_n(\xi_2)}{F''(\xi_2)}$ với ξ_2 nằm giữa ξ_1 và x_0.

Sau n + 1 lần áp dụng định lý Cauchy ta được $\dfrac{R_n(x)}{F(x)} = \dfrac{R_n^{(n+1)}(c)}{F^{(n+1)}(c)}$ với c nằm giữa ξ_n và x_0, và do đó c nằm giữa x và x_0.

Nhưng $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ và $F^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ nên $\dfrac{R_n(x)}{F(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

$$\text{Vậy: } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

trong đó c là một điểm nằm giữa x và x_0.

Công thức trên được gọi là công thức khai triển Taylor của hàm *f* tại điểm $x = x_0$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 1. 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$ b) $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Hướng dẫn

a) Kết quả $y' = \dfrac{-2(x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2} < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$.

b) Kết quả đồng biến trên $(-\infty; 1)$, nghịch biến $(1, +\infty)$.

Bài tập 1. 2: Tìm m để hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2 + (m + 2)x - m + 3}{x + 1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 - 2x + 9$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định $D = (-\infty; -1) \cup (-1, +\infty)$.

Tính đạo hàm y ' và lập luận $y' \geq 0$ trên D. Kết quả $m \geq 1$.

b) Kết quả $m \leq -1$.

Bài tập 1. 3: Tìm cực trị của hàm số:

a) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

Hướng dẫn

a) Hàm số lẻ. Tính đạo hàm và lập BBT.

Kết quả CĐ tại x = –3 ; $y_{CĐ} = -9\sqrt{3}$, CT tại x = 3 ; $y_{CT} = 9\sqrt{3}$.

b) Kết quả CĐ tại x = 0, $y_{CĐ} = 0$ và CT tại x = 2, $y_{CT} = -3\sqrt[3]{4}$.

Bài tập 1. 4: Tìm cực trị hàm số:

a) $y = x - \sin 2x + 2$ b) $y = \sin 2x + \cos 2x$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = R, $y' = 1 - 2\cos 2x$, $y'' = 4\sin 2x$.

Dùng dấu đạo hàm cấp 2.

Kết quả: CĐ tại $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2$; đạt CT tại $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $y_{CT} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

b) Kết quả điểm cực đại $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, điểm cực tiểu $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$.

Bài tập 1. 5:

a) Tìm m để hàm số $y = 2x^3 - 3(3m + 1)x^2 + 12(m^2 + m)x + 1$ có cực đại và cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua CĐ, CT.

b) Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 1 - 3m^2}{x - m}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = **R**. Lấy y chia y'.

Kết quả $m \neq 1$ và $y = -(m - 1)^2x + 2(m^2 + m)(3m + 1) + 1$.

b) Kết quả $-1 < m < 1$.

Bài tập 1. 6: Chứng minh hàm số

a) $y = x^3 + ax^2 - (1 + b^2)x + a + 4b - ab$ luôn luôn có cực đại và cực tiểu với mọi tham số a, b.

b) $y = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{x}$ ba điểm cực trị phân biệt A, B, C . Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) y' có $\Delta' = a^2 + 3(a + b^2) > 0, \forall a, \forall b$

b) Kết quả $S = \frac{27}{4}$.

Bài tập 1. 7: Giải các phương trình :

a) $3x^2 - 18x + 24 = \frac{1}{|2x - 5|} - \frac{1}{|x - 1|}$

b) $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$

Hướng dẫn

a) PT: $(2x - 5)^2 - (x - 1)^2 = \frac{1}{|2x - 5|} - \frac{1}{|x - 1|}$

$\Leftrightarrow |2x - 5|^2 - \frac{1}{|2x - 5|} = |x - 1|^2 - \frac{1}{|x - 1|}$

Kết quả x = 2 hoặc x = 4.

b) Kết quả $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 1. 8: Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt{x^3 - 2} - x$

b) $\sqrt{x^2-2\sqrt{3x}-2}+\sqrt{x^2-3\sqrt{3x}+4}=3$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$. Ta có:

$\sqrt{x^3-2}=x+\sqrt[3]{x^2-1}>x>1 \Rightarrow x^3 \geq 3 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{3}$.

Chia 2 vế cho $\sqrt{x^3}$ thì được phương trình:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2.\sqrt{x}}-\frac{1}{x^4\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x\sqrt{x}}}=0.$$

Kết quả nghiệm duy nhất x = 3.

b) Hàm đơn điệu . Kết quả x =3.

Bài tập 1. 9: Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=1-x^3\\(x-1)^4=y\end{cases}$ b) $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 0$. Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}-(x-1)^2+x^3-8=0 & (1)\\ y=(x-1)^4 & (2)\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t-1}-(t-1)^2+t^3-8$, với $t \geq 1$.

Kết quả x =3, y =0.

b) Kết quả $x=\frac{1}{2}$; y = 2.

Bài tập 1. 10: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+6}>20-3\sqrt{x+13}$

b) $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}<\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq -1$. BPT viết lại: $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+6}+3\sqrt{x+13} \geq 20$

Xét f(x) là hàm số vế trái, $x \geq -1$ thì:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}}+\frac{3}{2\sqrt{x+13}}>0$$ .Kết quả $x \geq 3$.

b) Kết quả $1 \leq x < 2$.

Bài tập 1. 11: Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x^7-5x^4+15x^3-x^2+2x-5=0$$

Hướng dẫn

Chứng minh hàm VT đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$, còn khi $x \leq 0$ thì vô nghiệm.

Chuyên đề 2: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

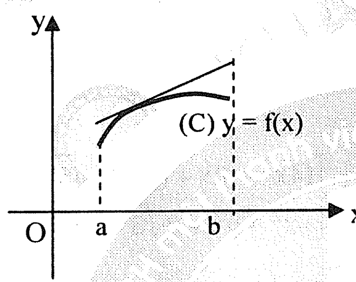
1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

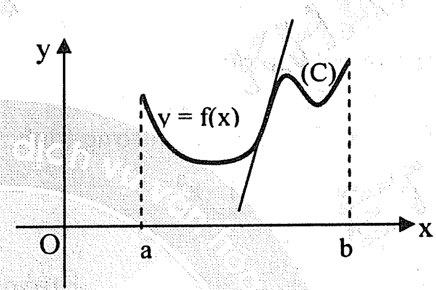
Tính lồi lõm của đồ thị:

Hàm số f xác định trên K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

f gọi là lõm trên K nếu $\forall\alpha,\beta,\alpha+\beta=1: f(\alpha x+\beta y)\le\alpha f(x)+\beta f(y), \forall x,y\ge 0$

f gọi là lồi trên K nếu $\forall\alpha,\beta,\alpha+\beta=1: f(\alpha x+\beta y)\ge\alpha f(x)+\beta f(y), \forall x,y\ge 0$





Cho hàm số y = f(x) liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên K

f lõm trên K $\Leftrightarrow$ $f''(x)\ge 0, \forall x\in K$

f lồi trên K $\Leftrightarrow$ $f''(x)\le 0, \forall x\in K$.

Điểm uốn của đồ thị :

Điểm $U(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đường cong (C): y = f(x) nếu tồn tại một khoảng (a;b) chứa điểm x_0 sao cho một trong 2 khoảng (a,x_0), (x_0,b) thì tiếp tuyến tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn ở khoảng kia thì tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp 2 một khoảng (a;b) chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0;f(x_0))$ là điểm uốn của đường cong (C): y = f(x) .

Chú ý:

1) Nếu $y = p(x).y'' + r(x)$ thì tung độ điểm uốn tại x_0 là $y_0 = r(x_0)$

2) Nếu f lồi trên đoạn [a,b] thì GTLN = max{f(a); f(b)}

3) Nếu f lõm trên đoạn [a,b] thì GTNN = min{f(a); f(b)}

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm đa thức: gồm 3 bước:

Bước1: Tập xác định

– Tập xác định D = **R**
– Xét tính chẵn, lẻ nếu có.

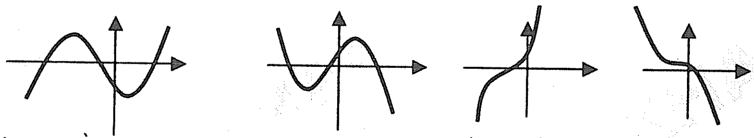
Bước 2: Sự biến thiên

– Tính các giới hạn.
– Tính đạo hàm cấp một, xét dấu
– Lập bảng biến thiên rồi chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến và cực đại, cực tiểu.

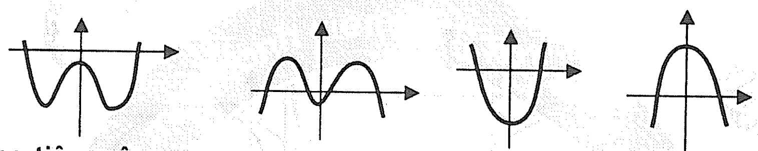
Bước 3: Vẽ đồ thị

- Tính đạo hàm cấp hai, xét dấu để chỉ ra điểm uốn của hàm đa thức.
- Cho vài giá trị đặc biệt, giao điểm với hai trục toạ độ.
- Vẽ đúng đồ thị.

Bốn dạng đồ thị hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ có tâm đối xứng là điểm uốn.



Bốn dạng đồ thị hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$



Đường tiệm cận

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.
- Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Chú ý:

1) Nếu chia tách được $y = f(x) = ax + b + r(x)$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$ thì tiệm cận xiên:

$y = ax + b$

2) Biểu thức tiệm cận khi $x \to \pm\infty$: $\sqrt{x^2 + bx + c} \approx \left|x + \dfrac{b}{2}\right|$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm hữu tỉ: gồm 3 bước:

Bước1: Tập xác định

- Tìm tập xác định
- Xét tính chẵn, lẻ nếu có.

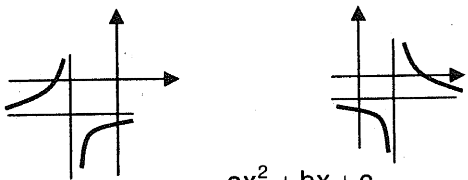
Bước 2: Chiều biến thiên

- Tính các giới hạn , tìm các tiệm cận
- Tính đạo hàm cấp một, xét dấu
- Lập bảng biến thiên rồi chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến và cực đại, cực tiểu.

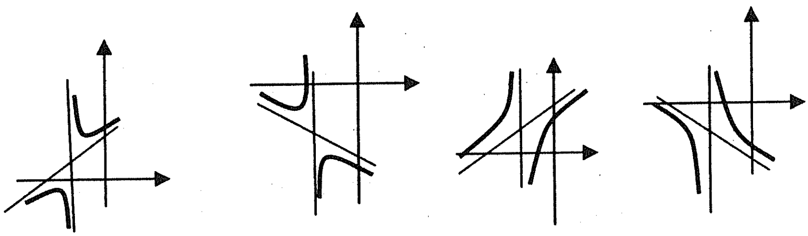
Bước 3: Vẽ đồ thị

- Cho vài giá trị đặc biệt, giao điểm với hai trục toạ độ.
- Vẽ đúng đồ thị, lưu ý tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận.

Hai dạng đồ thị hàm hữu tỉ bậc 1/1: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$



Bốn dạng đồ thị hàm hữu tỉ :$y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $(a \neq 0,\ a' \neq 0)$



Chú ý:

1) Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ suy ra các đồ thị:

$y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành.

$y = f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục tung.

$y = -f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua gốc.

$y = |f(x)|$ bằng cách lấy phần đồ thị ở phía trên trục hoành, còn phần phía dưới trục hoành thì đối xứng qua trục hoành.

$y = f(|x|)$ là hàm số chẵn, bằng cách lấy phần đồ thị ở phía bên phải trục tung, rồi lấy đối xứng phần đó qua trục tung.

2) Bài toán về biện luận số nghiệm phương trình dạng $g(x,m) = 0$

Đưa phương trình về dạng $f(x) = h(m)$ trong đó vế trái là hàm số đang xét, đã vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$. Số nghiệm là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = h(m)$.

3) Điểm đặc biệt của họ đồ thị: (C_m): $y = f(x,m)$

- Điểm cố định của họ là điểm mà mọi đồ thị đều đi qua:

  $M_0(x_0, y_0) \in (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m), \forall m$

- Điểm mà họ không đi qua là điểm mà không có đồ thị nào của họ đi qua với mọi tham số: $M_0(x_0, y_0) \notin (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 \neq f(x_0, m)\ \forall m$

  Nhóm theo tham số và áp dụng các mệnh đề sau:

  $Am + B = 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0$

  $Am^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0, C = 0$

  $Am + B \neq 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B \neq 0$

$Am^2 + Bm + C \neq 0, \forall m \Leftrightarrow A = 0, B = 0, C \neq 0$

hoặc $A \neq 0, \Delta = B^2 - 4AC < 0$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 2. 1: Tìm điểm uốn và các khoảng lồi lõm của đồ thị:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ b) $y = x^4 + 8x^2 + 9$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R** . Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$, $y'' = 6x - 4$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$; $y'' > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$; $y'' < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$

Vậy điểm uốn $I(\frac{2}{3} ; \frac{29}{27})$, hàm số lồi trên khoảng $(-\infty; \frac{2}{3})$ và lõm trên khoảng $(\frac{2}{3} ; +\infty)$.

b) D = **R**. Ta có $y' = 4x^3 + 16x$, $y'' = 12x^2 + 16 > 0 \ \forall x$

Vậy đồ thị không có điểm uốn và hàm số lõm trên **R**.

Bài toán 2. 2: Tìm điểm uốn và các khoảng lồi lõm của đồ thị:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 5}$

Hướng dẫn giải

a) D = **R** \ {–1}. Ta có $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} = x - 3 + \dfrac{6}{x + 1}$

Nên $y' = 1 - \dfrac{6}{(x + 1)^2}$, $y'' = \dfrac{12}{(x + 1)^3} \neq 0, \ \forall x \neq -1$

$y'' > 0 \Leftrightarrow x > -1$; $y'' < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Vậy đồ thị không có điểm uốn, hàm số lồi trên khoảng $(-\infty;-1)$ và lõm trên khoảng $(-1; +\infty)$.

b) D = **R** \ {5}. Ta có $y' = \dfrac{-11}{(x - 5)^2}$, $y'' = \dfrac{22}{(x - 5)^3} \neq 0, \forall x \neq 5$

$y'' > 0 \Leftrightarrow x > 5$; $y'' < 0 \Leftrightarrow x < 5$

Vậy đồ thị không có điểm uốn, hàm số lồi trên khoảng $(-\infty;5)$ và lõm trên khoảng $(5; +\infty)$.

Bài toán 2. 3: Chứng minh rằng với mọi a, đồ thị hàm số $y = \dfrac{x + a}{x^2 + x + 1}$ luôn có ba điểm uốn thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \dfrac{(x^2 + x + 1) - (x + a)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = -\dfrac{x^2 + 2ax + a - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

$$y'' = \frac{2(x^3 + 3ax^2 + 3(a-1)x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3(a-1)x - 1 = 0$

Đặt $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a-1)x - 1, x \in \mathbf{R}$

Ta có: $f(0) = -1 < 0, f(-1) = 1 > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ và đồng thời hàm số này liên tục tên tập số thực nên phương trình f(x) = 0 có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0), (0; +\infty)$

Giả sử hoành độ của một trong các điểm uốn là x_0 nên

$$x_0^3 + 3ax_0^2 + 3(a-1)x_0 - 1 = 0$$

Ta có: $x_0^3 + 3ax_0^2 + 3ax_0 + 3a - 1 = 3x_0 + 3a$

$\Leftrightarrow (x_0 + 3a - 1)(x_0^2 + x_0 + 1) = 3(x_0 + a)$

Suy ra $y_0 = \dfrac{x_0 + a}{x_0^2 + x_0 + 1} = \dfrac{(x_0 + 3a - 1)(x_0^2 + x_0 + 1)}{3(x_0^2 + x_0 + 1)} = \dfrac{x_0 + 3a - 1}{3}$

Vậy các điểm uốn của đồ thị thuộc đường thẳng $y = \dfrac{x + 3a - 1}{3}$ nên chúng thẳng hàng

Bài toán 2. 4: Cho hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 3mx - m + 2$, m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 3

b) Tìm m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu A và B mà khoảng cách $AB = 4\sqrt{65}$.

Hướng dẫn giải

a) Khi m = 3 hàm số trở thành $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

- Tập xác định D = **R**
- Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 12x + 9$

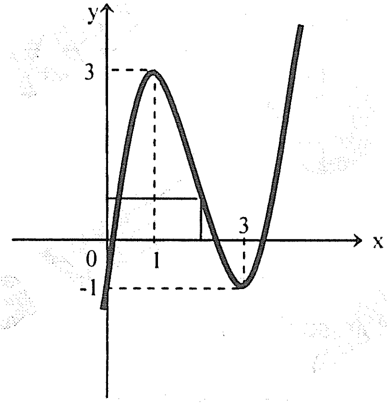
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	–1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên (1;3). Hàm số đạt cực đại khi x = 1, $y_{CĐ} = 3$ và đạt cực tiểu tại x = 3 $y_{CT} = -1$.

- Đồ thị:



$y'' = 6x - 12$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

nên tâm đối xứng là điểm uốn I(2; 1).

Cho x = 0 thì y = –1.

b) Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 3m$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9m > 0$

$\Leftrightarrow m < 4$

Gọi các điểm cực trị là $A(x_1; y_1)$. $B(x_2; y_2)$.

Theo định lí Viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$.

Ta có $y_1 = (2m - 8)x_1 + m + 2$, $y_2 = (2m - 8)x_2 + m + 2$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2m - 8)^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + (2m - 8)^2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]}$$

$$= \sqrt{(4m^2 - 32m + 65)(16 - 4m)}$$

nên $AB = 4\sqrt{65} \Leftrightarrow (4m^2 - 32m + 65)(16 - 4m) = 1040$

$\Leftrightarrow 4m^3 - 48m^2 + 193m = 0 \Leftrightarrow m(4m^2 - 48m + 193) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn) .Vậy m = 0.

Bài toán 2. 5: Cho hàm số: $y = -\frac{2}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (3m - 2)x - \frac{5}{3}$ có đồ thị (C_m) với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

b) Tìm m để trên đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt có hoành độ cùng dấu và tiếp tuyến của (C_m) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng d: $x - 3y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Khi m = 2 hàm số trở thành $y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x - \frac{5}{3}$.

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên: $y' = -2x^2 + 2x + 4$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$.

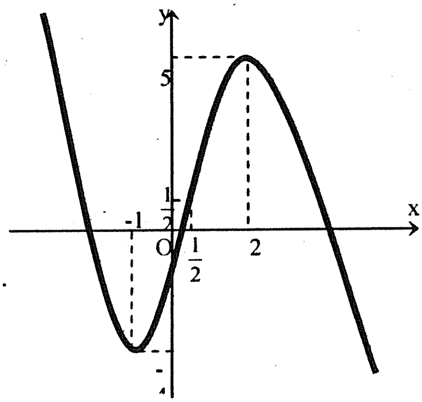
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = -4$, đạt cực đại tại $x = 2$ và $y_{CĐ} = 5$.

• Đồ thị:



Đồ thị cắt Oy tại $(0; -\frac{5}{3})$,

$y'' = -4x + 2$;

$y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ nên đồ thị nhận

điểm uốn $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ làm tâm đối xứng.

b) $y' = -2x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2$

Hệ số góc của d: $x - 3y + 1 = 0$ là $k = \frac{1}{3}$

Tiếp tuyến của (C_m) tại mỗi điểm vuông góc với đường thẳng d: $x - 3y + 1 = 0$ khi $y' = -3$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2 = -3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(m-1)x - 3m - 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, thỏa mãn $x_1 . x_2 > 0$

$$\begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + 2(3m+1) > 0 \\ \dfrac{-3m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 3 > 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ -1 < m < -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $m < -3$ hay $-1 < m < -\frac{1}{3}$.

Bài toán 2. 6: Cho hàm số: $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$. Tìm m để hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) có tung độ m và gốc O tạo thành tam giác OAB cân tại O.

Hướng dẫn giải

Hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) có tung độ m nên thuộc đường thẳng d : $y = m$.

Hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C) là nghiệm của phương trình $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=m$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+12-6m=0$ (1)

Đường thẳng d cắt (C) tại A, B thỏa mãn tam giác OAB cân tại O khi $\begin{cases}-\frac{5}{2}\le m\frac{17}{6}\\ m\ne 0\end{cases}$ và phương trình (1) có nghiệm x_1, $-x_1$, x_2 (trong đó x_1, $-x_1$ là hoành độ của A, B)

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(x^2-x_1^2)(x-x_2)=0$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3-x_2x^2-x_1^2x+x_1^2x_2=0$ (2)

Đồng nhất các hệ số của (1) và (2): $\left[\begin{array}{l}x_2=3\\ x_1^2=9\\ x_1^2x_2=12-6m\end{array}\right.$.

Suy ra $12-6m=27 \Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$.

Bài toán 2. 7: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y=-x^3+3x^2-4x+2$ b) $y=x^3-3x^2+3x+1$.

Hướng dẫn giải

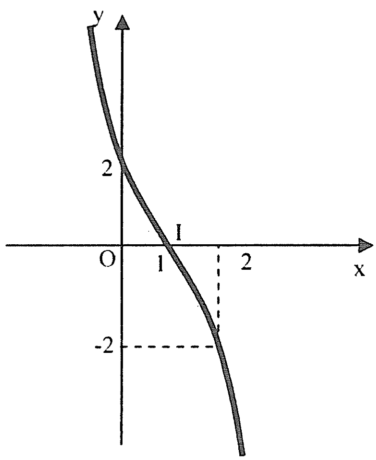
a) $y=-x^3+3x^2-4x+2$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- Sự biến thiên $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

Ta có $y'=-3x^2+6x-4<0$, $\forall x$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
y'	$-$
y	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$



- Đồ thị: $y''=-6x+6$, $y''=0$

$\Leftrightarrow x=1$ nên đồ thị có điểm uốn I(1; 0).

Cho $x=0 \Rightarrow y=2$. Cho $y=0$

$\Leftrightarrow -x^3+3x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$.

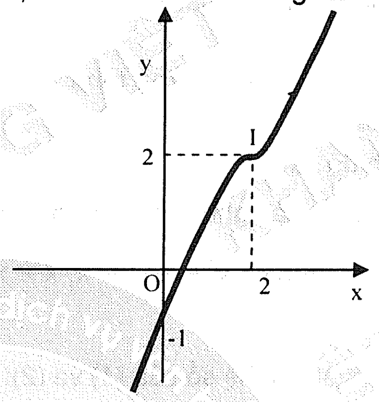
b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

- Tập xác định D = **R**.
- Sự biến thiên: $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$, $\forall x$ nên hàm số đồng biến trên **R**, hàm số không có cực trị.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗			$+\infty$



- Đồ thị: $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ nên đồ thị có điểm uốn I(1; 2).

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Bài toán 2. 8: Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m-3)x^2 + 3(m^2 - 3m + 5)x + 1$, m là tham số. Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2 - x_1x_2| < 7$.

Hướng dẫn giải

D = **R**,

$y' = 3x^2 - 6(m-3)x + 3(m^2 - 3m + 5)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m-3)x + 3(m^2 - 3m + 5) = 0$

Hàm số cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = -3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{4}{3}$

Ta có $x_1 + x_2 = 2(m-3)$; $x_1x_2 = m^2 - 3m + 5$.

Do đó $|x_1 + x_2 - x_1x_2| < 7 \Leftrightarrow |2(m-3)^2 + 3m - 5| < 7$

$\Leftrightarrow |m^2 - 5m + 11| < 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 11 < 7 \\ m^2 - 5m + 11 > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 4 < 0 \\ m^2 - 5m + 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 4$$

Kết hợp thì chọn: $1 < m < \dfrac{4}{3}$.

Bài toán 2. 9: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = 3.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

a) Khi m = 3, hàm số trở thành $y = x^4 - 6x^2 + 5$

- Tập xác định D = **R**, hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{3}$$

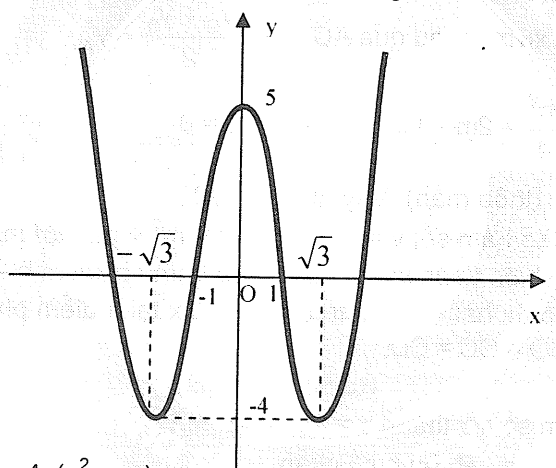
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$.

Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = 5$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{3}$, $y_{CT} = -4$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận Oy tại trục đối xứng.



b) Ta có D = **R**. $y' = 4x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x^2 = m$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ m > 0

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1),\ B(0; 2m - 1),\ C(\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$$

Vì hàm số chẵn nên tam giác ABC cân tại B $\in$ Oy, A và C đối xứng nhau qua Oy.

ABC là tam giác vuông $\Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông cân tại B

$\Leftrightarrow AC = AB.\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 = \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 0$.

Vậy chọn m = 1.

Bài toán 2. 10: Cho hàm số: $y = x^4 - mx^2 + 2m - 1$, với m là tham số . Tìm m để đồ thị hàm số cho có 3 điểm cực trị sao cho 3 điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là 4 đỉnh của một hình thoi.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 4x^3 - 2mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ m > 0.

Khi đó các điểm cực trị:

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}+2m-1\right), B(0;2m-1), C\left(\sqrt{\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}+2m-1\right)$$

Vì tam giác ABC cân tại B, AC song song Ox nên O, A, B, C là 4 đỉnh hình thoi khi và chỉ khi OABC là hình thoi

$\Leftrightarrow$ O và B đối xứng nhau qua AC $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_O + y_B}{2} = y_A$

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{2} = -\dfrac{m^2}{4} + 2m - 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m = 2 \pm \sqrt{2}$.

Bài toán 2. 11: Cho hàm số: $y = -x^4 - 2mx^2 + m^2 + m$, với m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = –2.

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB = BO = OC = CD.

Hướng dẫn giải

a) Khi m = –2 hàm số trở thành $y = -x^4 + 4x^2 + 2$

- Tập xác định D = **R,** hàm số chẵn
- Sự biến thiên: $y' = = -4x^3 + 8x = -4x(x^2 - 2)$

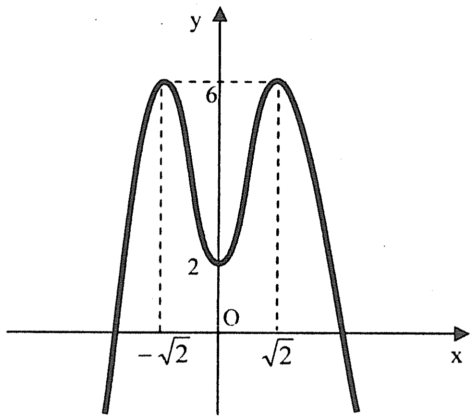
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$; hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm\sqrt{2}$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 6$

• Đồ thị: nhận Oy là trục đối xứng



b) Cho $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 - 2mx^2 + m^2 + m = 0$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ thì PT : $-t^2 + 2mt - m^2 - m = 0$

Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi phương trình bậc 2 có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + m^2 + m > 0 \\ S = -2m > 0 \\ P = -m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m > 0 \\ m < 0 \\ m^2 + m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \vee m < -\frac{1}{2} \\ m < 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

Vì đồ thị đối xứng qua trục tung nên 4 giao điểm A, B, C, D thỏa mãn AB = BO = OC = CD khi và chỉ khi $\sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 4t_1$.

Theo định lí Viet ta có $t_1 + t_2 = -2m$, $t_1t_2 = -m^2 - m$.

Do đó $\begin{cases} 5t_1 = -2m \\ 4t_1^2 = -m^2 - m \end{cases} \Rightarrow 4.4m^2 = 25(-m^2 - m)$

$\Leftrightarrow 42m^2 + 25m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = -\frac{25}{41}$.

Ta chọn $m = -\frac{25}{41}$.

Bài toán 2. 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

b) Tìm m để phương trình $|x^4 - 8x^2 + 6| = m$ có 8 nghiệm phân biệt

Hướng dẫn giải

a) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

- Tập xác định D = **R.** Hàm số chẵn.
- Sự biến thiên: $y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

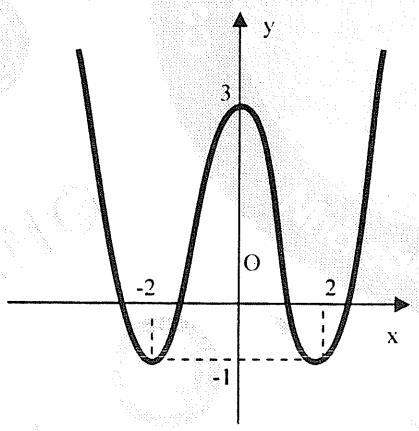
  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$

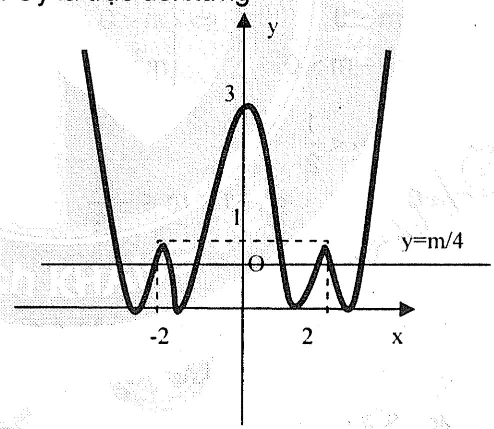
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng (–2; 0), (2; +∞), hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng (–∞; –2), (0; 2). Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$, $y_{CT} = -1$.

- Đồ thị: Đồ thị (C) hàm số nhận Oy là trục đối xứng





b) Ta có phương trình

$$|x^4 - 8x^2 + 12| = m \Leftrightarrow \left|\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3\right| = \frac{m}{4}.$$

Đồ thị (C') của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3\right|$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách giữ nguyên phần nằm phía trên Ox, còn phần nằm phía dưới Ox thì lấy đối xứng qua Ox.

Số nghiệm của phương trình $\left|\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3\right| = \frac{m}{4}$ là giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $y = \frac{m}{4}$.

Dựa vào đồ thị, phương trình có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$0 < \frac{m}{4} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Bài toán 2. 13: Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m + 1)x^2 + 2(m + 1)$, với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

Hướng dẫn giải

$y' = x^3 - 2(3m + 1)x = x[x^2 - 2(3m + 1)]$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2(3m + 1)$

Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 3m + 1 > 0$t $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị là: $A(0; 2m + 2)$,

$B(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1)$ và $C(\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1)$

Vì hàm số chẵn nên tam giác ABC cân tại A thuộc trục Oy, B, C đối xứng nhau qua Oy.

O là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow y_A + y_B + y_C = 0$

$\Leftrightarrow 2m + 2 + 2(-9m^2 - 4m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \\ m = \frac{1}{3} \end{array}\right.$. Chọn giá trị $m = \frac{1}{3}$.

Bài toán 2. 14: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = -x^4 - 2x^2 + 5$ b) $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

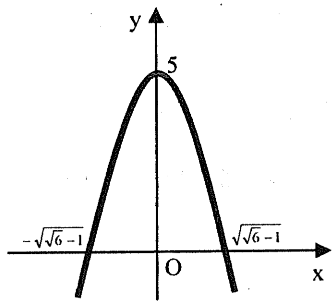
a) $y = -x^4 - 2x^2 + 5$.

- Tập xác định D = R. Hàm số chẵn
- Sự biến thiên $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \to +\infty} y = -\infty$

$y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$ ↗	5	↘ $-\infty$



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 0: $y_{CĐ} = 5$.

• Đồ thị: $y'' = -12x^2 - 4 < 0, \forall x$ nên đồ thị không có điểm uốn.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{6}-1}$

b) $y = \dfrac{x^4}{2} + x^2 - \dfrac{3}{2}$.

• Tập xác định D = **R**: Hàm số chẵn.

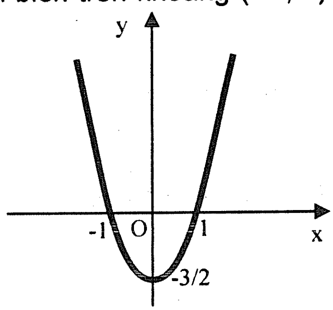
• Sự biến thiên: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

$y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ ↘	-3/2	↗ $+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đạt cực tiểu tại $(0; -\dfrac{3}{2})$.



• Đồ thị: $y'' = 6x^2 + 2 > 0, \forall x$ nên đồ thị không có điểm uốn.

Giao điểm với trục tung $(0; -\dfrac{3}{2})$, giao điểm với trục hoành $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.

Bài toán 2. 15: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3}$

Hướng dẫn giải

a) D = **R** \ {0; 2} suy ra 2 TCĐ: x = 0 và x = 2.

Ta có $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-2x} = x + 2 + \dfrac{4x+2}{x^2-2x}$ nên TCX: y = x + 2.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1; \frac{3}{5}\}$ suy ra 2 TCĐ: x = −1 và $x = \frac{3}{5}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\dfrac{1}{5}$ nên TCN: $y = -\dfrac{1}{5}$.

Bài toán 2. 16: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ b $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

Hướng dẫn giải

a) D = (0; +∞). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ nên TCĐ: x = 0 (khi $x \to 0^+$)

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ nên TCX: y = x (khi x → +∞).

b) D = (−∞: 1] ∪ [3; +∞). Đồ thị không có TCĐ.

Gọi y = ax + b là TCN, TCX thì:

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = -2$$

Vậy tiệm cận xiên: y = x − 2 (khi x → +∞).

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4+\dfrac{3}{x}}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Vậy tiệm cận xiên: $y = -x + 2$ (khi $x \to -\infty$)

Cách khác: $y = \sqrt{x^2-4x+3} = |x-2| + \left(\sqrt{x^2-4x+3} - |x-2|\right)$

và vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3} - |x-2|\right) = 0$ suy ra TCX.

Bài toán 2. 17: Tuỳ theo m, tìm các tiệm cận của đồ thị:

a) $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{mx^3-1}{x^2-3x+2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x-1} = x + m + 1 + \dfrac{m+2}{x-1}$, $x \neq 1$

– Khi $m \neq -2$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - (x+m+1)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{m+2}{x-1} = 0$ nên $y = x + m + 1$ là tiệm cận xiên. Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+mx+1}{x-1} = +\infty$

Khi $m > -2$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+mx+1}{x-1} = -\infty$ khi $m < -2$ nên TCĐ $x = 1$.

– Khi $m = -2$ thì $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}$ (với $x \neq 1$), đồ thị là đường thẳng (trừ điểm (1; 0)) nên nó trùng với tiệm cận xiên.

b) Ta có: $y = \dfrac{mx^3-1}{x^2-3x+2} = mx + 3m + \dfrac{7mx-1-6m}{x^2-3x+2}$

Khi $m = 1$ thì $y\ \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$

Khi $m = \dfrac{1}{8}$ thì $y = \dfrac{x^3-8}{8(x^2-3x+2)} = \dfrac{x^2+2x+4}{8(x-1)}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$.

Từ đó suy ra: Với $m = 1$ thì $x = 2$ là tiệm cận đứng

Với $m = \dfrac{1}{8}$ thì $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Với $m \neq 1$ và $m \neq \dfrac{1}{8}$ thì đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-(mx+3m)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7mx-1-6m}{x^2-3x+2} = 0$ nên đồ thị có TCN, TCX: y = mx + 3m.

Bài toán 2. 18: Cho đường cong (C_m): $y = \dfrac{2x^2+(m+1)x-3}{x+m}$.

a) Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua A(1; 1)

b) Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận nằm trên (P): $y = x^2 + 3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+(m+1)x-3}{x(x+m)} = 2$

$$\lim_{x\to\infty}(y-2x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+(m+1)x-3}{x(x+m)} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+(m+1)x-3-2x^2-2mx}{x+m} = 1-m$$

Suy ra phương trình tiệm cận xiên là y = 2x + 1 – m.

TCX đi qua A(1; 1) khi và chỉ khi: $1 = 2.1 + 1 - m \Leftrightarrow m = 2$.

b) Đồ thị có tiệm cận đứng là x = –m. Từ đó suy ra giao điểm của hai tiệm cận là I(–m; 1–3m).

Giao điểm này nằm trên đường cong $y = x^2 + 3$ khi

$$1-3m = (-m)^2 + 3 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = -2$$

Bài toán 2. 19: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+(1-m)x-2}{x+1}$ (C_m). Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với các trục toạ độ thành một tam giác có diện tích bằng 18.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = x - m + \dfrac{m-2}{x+1}$, $D = R \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-(x-m)) = 0$ nên tiệm cận xiên d của (C_m) có phương trình y = x – m. Giao điểm của d với Ox: A(m; 0), giao điểm của d với Oy: B(0; –m)

Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2}m^2$.

Điều kiện $S = 18 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m^2 = 18 \Leftrightarrow m = \pm 6$.

Bài toán 2. 20: Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Suy ra đồ thị $y = \dfrac{2x-1}{|x-1|}$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

- Tập xác định D = **R** \ {1}
- Sự biến thiên: Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$

Do đó đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 2$ nên đường thẳng y = 2 là tiệm cận ngang của đồ thị .

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \neq 1$

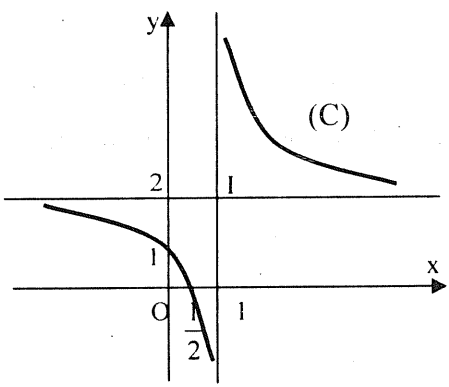
Bảng biến thiên

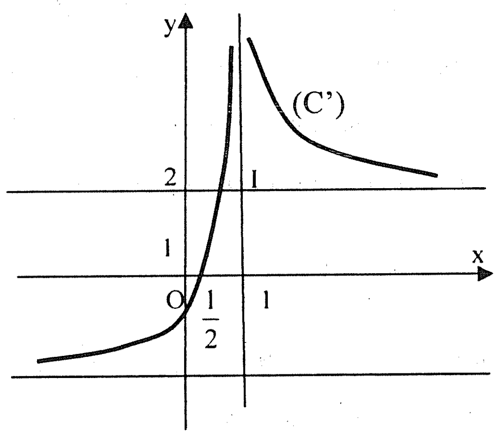
x	-∞	-1	+∞
y'	-	‖	-
y	2 ↘ -∞	‖	+∞ ↘ 2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị (C) cắt Ox tại $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ cắt Oy tại (0;1).

(C) nhận giao điểm I(0;2) hai tiệm cận làm tâm đối xứng.





b) Ta có $y = \dfrac{2x-1}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ nên đồ thị (C') giữ nguyên phần bên phải tiệm cận đứng x = 1 của đồ thị (C), còn phần bên trái tiệm cận đứng x = 1 của đồ thị (C) thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Bài toán 2. 21: Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến cắt đường tiệm cận đứng tại A, cắt đường tiệm cận ngang tại B mà OB = 2OA.

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Sự biến thiên: Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$

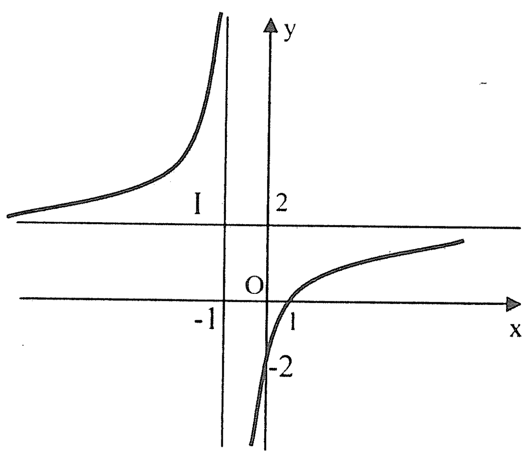
Do đó đường thẳng x = –1 là tiệm cận đứng

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ nên đường thẳng y = 2 là tiệm cận ngang

$$y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ $(-1; +\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị (C) cắt Ox tại (1; 0), cắt Oy tại (0; –2), và nhận giao điểm I(–1; 2) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C)$, $x_0 \neq -1$

$$d: y = \frac{4}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 2}{x_0 + 1}$$

Giao điểm của d với tiệm cận đứng x = –1 là $A\left(-1; \frac{2x_0 - 6}{x_0 + 1}\right)$;

Giao điểm của d với tiệm cận ngang y = 2 là $B(2x_0 + 1; 2)$.

Do đó OB = 2OA $\Leftrightarrow \sqrt{4 + (2x_0+1)^2} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{2x_0 - 6}{x_0 + 1}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow (2x_0 + 1)^2 = 4\left(\frac{2x_0 - 6}{x_0 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0 + 1 = \frac{4x_0 - 12}{x_0 + 1} \\ 2x_0 + 1 = -\frac{4x_0 - 12}{x_0 + 1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 - x_0 + 13 = 0 \ \text{(VN)} \\ 2x_0^2 + 7x_0 - 11 = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{-7 \pm \sqrt{137}}{4}$. Thế vào d thì có tiếp tuyến cần tìm.

Bài toán 2. 22: Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$|x - 2| = (x - 1)(m - 5).$$

Hướng dẫn giải

a) $y = \frac{x-2}{x-1}$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Sự biến thiên: Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$

Do đó đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ nên đường thẳng y = 1 là tiệm cận ngang.

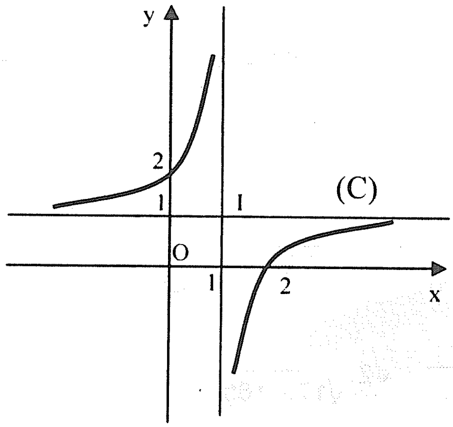
Ta có $y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

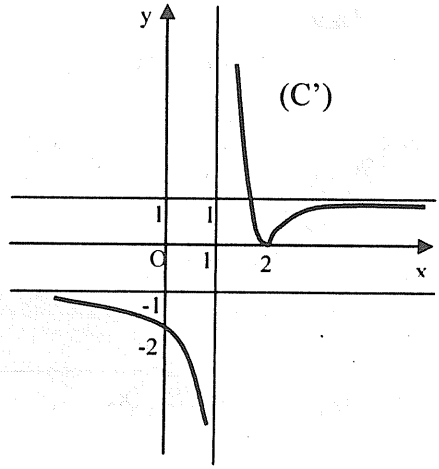
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	‖	+
y	1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

• Đồ thị: Đồ thị (C) cắt Ox tại (2; 0), cắt Oy tại (0; 2), (C) nhận giao điểm I(1; 1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.





b) Vì x = 1 không là nghiệm nên phương trình

$|x-2| = (x-1)(m-5) \Leftrightarrow \dfrac{|x-2|}{x-1} = m-5$

Ta có: $y = \dfrac{|x-2|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ -\dfrac{x-2}{x-1} & \text{khi } 1 \neq x < 2 \end{cases}$

Suy ra đồ thị (C') của $y = \dfrac{|x-2|}{x-1}$ gồm phần của (C) ứng với $x \geq 2$ và đối xứng phần (C) ứng với $x < 2$ qua trục hoành.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $y = m - 5$:

Xét $m - 5 \geq 1$ hay $m - 5 = 0$ hay $m - 5 < -1$

$\Leftrightarrow m \geq 6$ hay $m = 5$ hay $m < 4$ thì phương trình có 1 nghiệm.

Xét $0 < m - 5 < 1 \Leftrightarrow 5 < m < 6$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Xét $-1 \leq m - 5 < 0 \Leftrightarrow 4 < m < 5$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài toán 2. 23: Cho hàm số: $y = \dfrac{m-x}{x+2}$, với m là tham số. Tìm m để đường thẳng d: $2x + 2y - 1 = 0$ cắt đồ thị tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là $S = \dfrac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x+m}{x+2} = -x + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 2(m-1) = 0,\ x \neq -2$

Ycbt là phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 16m > 0 \\ 2(-2)^2 - 2 + 2(m-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{17}{16} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases}$ nên AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m}$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}.AB.h. = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}.\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17-16m}}{8}$$

Nên $S_{OAB} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{17-16m}}{8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Bài toán 2. 24: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x-2}$. Tìm trên (H) các điểm A, B sao cho độ dài AB = 4 và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x.

Hướng dẫn giải

Vì đường thẳng AB vuông góc với y = x nên phương trình của AB là:

$$y = -x + m.$$

Hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình $\frac{-x+1}{x-2} = -x + m$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0,\ x \neq 2$.

Điều kiện phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và khác 2:

$$\begin{cases} \Delta = (m+3)^2 - 4(2m+1) = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \\ 4 - (m+3).2 + 2m + 1 = -1 \neq 0, \forall m \end{cases}$$

luôn thỏa mãn. Ta có $x_1 + x_2 = m + 3$; $x_1.x_2 = 2m + 1$

Nên $AB^2 = 16 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (-x_2 + m + x_1 - m)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 8$

$\Leftrightarrow (m+3)^2 - 4(2m+1) = 8$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -1$

Với m = 3 thì phương trình: $x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$

Nên A, B có tọa độ $(3 + \sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(3 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$

Với m = –1, tương tự hai điểm A, B có tọa độ:

$(1 + \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2})$, $(3 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$.

Bài toán 2. 25: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt:

$$x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1).$$

Hướng dẫn giải

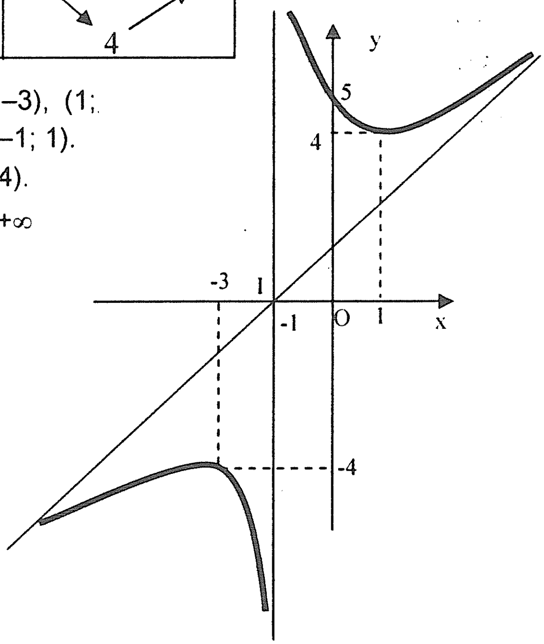
a) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = x + 1 + \dfrac{4}{x + 1}$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên: $y' = 1 - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -3$.

Bảng biến thiên

x	-∞		-3		-1		1		+∞
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	-∞	↗	-4	↘ -∞	‖	+∞ ↘	4	↗	+∞



Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-3; -1)$, $(-1; 1)$.

Hàm số đạt CĐ $(-3; -4)$, CT$(1; 4)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = +\infty$

nên TCĐ: x = 2

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - (x + 1)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x + 1} = 0$

nên TCX: y = x + 1.

• Đồ thị:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 5$

Tâm đối xứng là

giao điểm 2 tiệm cận I(–1; 0).

b) Vì x = –1 không là nghiệm nên phương trình đã cho tương đương với:

$\dfrac{x^2+2x+5}{x+1} = m^2 + 2m + 5$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm

của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ với đường thẳng $y = m^2 + 2m + 5$.

Phương trình có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

$$4 < m^2 + 2m + 5 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -2 < m < 0 \end{cases}$$

Bài toán 2. 26: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các điểm trên (C) có toạ độ là số nguyên và chứng minh đồ thị (C) có tâm đối xứng.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = x - \dfrac{3}{x-2}$

- Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Sự biến thiên : $\lim\limits_{x\to2^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^+} y = -\infty$ nên TCĐ: x = 2.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x-2} = 0$ nên TCX: y = x.

$y' = 1 + \dfrac{3}{(x-2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

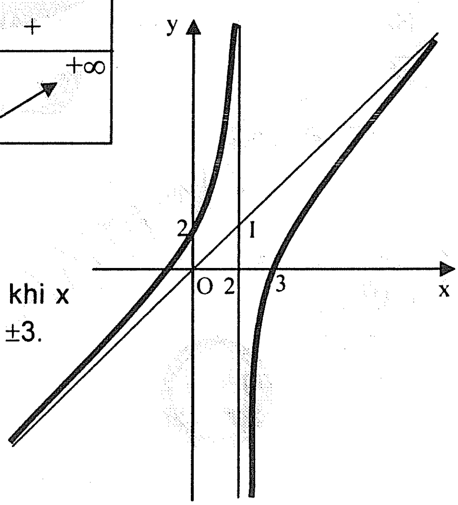
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	||	+
y	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

- Đồ thị:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$

$y = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$.



b) Điểm M(x; y) ∈ (C) có toạ độ nguyên khi x – 2 là ước số của của 3 nên x – 2 = ±1, ±3. Do đó (C) có 4 điểm có toạ độ nguyên:(1; 4), (3; 0), (–1; 0) và (5; 4). Giao điểm 2 tiệm cận I(2; 2) chuyển trục bằng phép tịnh tiến vectơ

$\overrightarrow{OI}: \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

Đồ thị (C): $Y + 2 = (X + 2) - \dfrac{3}{(X+2)-2} \Leftrightarrow Y = X - \dfrac{3}{X}$

Vì $Y = F(X)$: $X - \dfrac{3}{X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị (C) nhận gốc I(2; 2) làm tâm đối xứng.

Bài toán 2. 27: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Tính góc giữa 2 tiệm cận.

b) Biện luận theo m số nghiệm của PT: $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{m^2+1}{m}$

Hướng dẫn giải

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số lẻ.
- Sự biến thiên : $y' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ nên TCĐ: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ nên TCX: $y = x$.

Bảng biến thiên

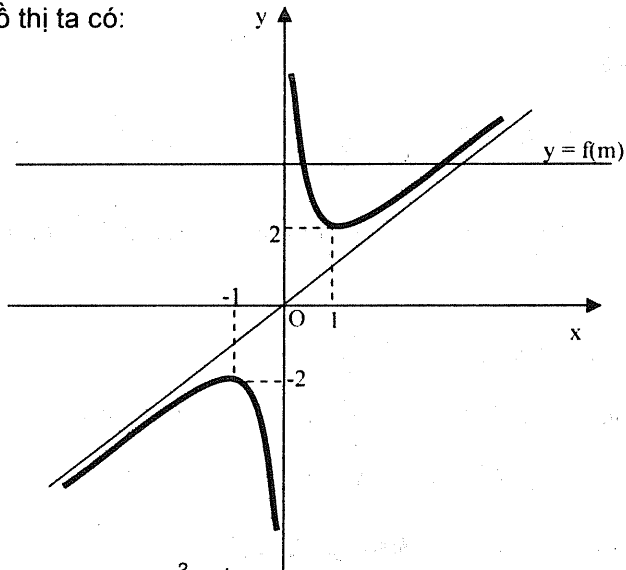
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

- Đồ thị: Đối xứng nhau qua gốc O.

TCĐ: $x = 0$, TCX: $y = x$ nên hai tiệm cận hợp nhau góc 45^o.

b) Số nghiệm phương trình $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{m^2+1}{m}$ là số giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = \dfrac{m^2+1}{m} = f(m)$.

Dựa vào đồ thị ta có:



Nếu $\frac{m^2+1}{m} < -2$ hoặc $\frac{m^2+1}{m} > 2 \Leftrightarrow m \neq 0,\ m \neq \pm 1$, thì PT có 2 nghiệm

Nếu $\frac{m^2+1}{m} = -2$ hoặc $\frac{m^2+1}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 1$ thì PT có 1 nghiệm.

Còn khi $m = 0$ thì PT vô nghiệm.

Bài toán 2. 28: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + 1}{x-1}$ (1)

a) Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số (1).

b) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi m = 1. Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - |x| + 1}{|x| - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của đồ thị (1):

$$y_o = \frac{mx_o^2 - mx_o + 1}{x_o - 1},\ \forall m \Leftrightarrow y_o = \frac{m(x_o^2 - x_o) + 1}{x_o - 1},\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 - x_o = 0,\ x_o - 1 \neq 0 \\ y_o = \frac{1}{x_o - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = -1 \end{cases},$$

Vậy các đồ thị luôn luôn qua $M(0; -1)$.

b) Khi m = 1 thì $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x-1}$

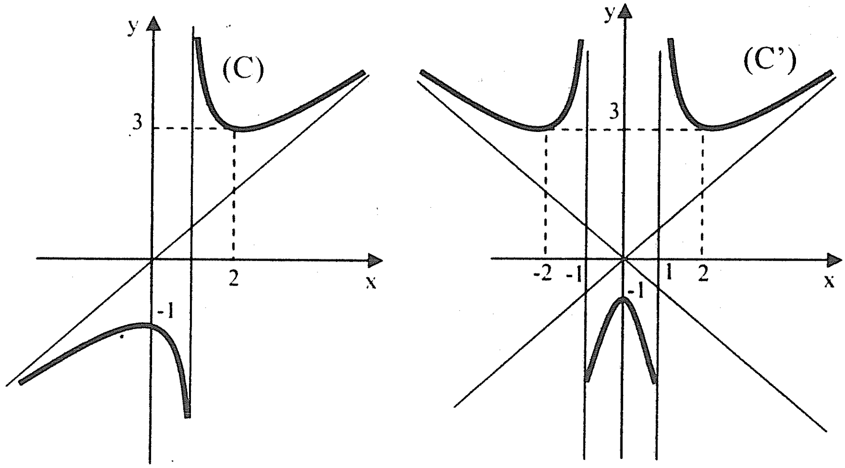
- Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$

- Sự biến thiên $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- Đồ thị



Ta có $y = \dfrac{x^2 - |x| + 1}{|x| - 1}$ là hàm số chẵn nên đồ thị (C') đối xứng nhau qua Oy.

Khi $x \geq 0$ thì lấy phần đồ thị (C), sau đó lấy đối xứng phần đó qua Oy thì được đồ thị (C').

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 2. 1: Tìm khoảng lồi , lõm và điểm uốn của đồ thị :

a) $y = \sqrt[3]{1-x}$ b) $y = \sqrt{5+x^2}$

Hướng dẫn

a) $y' = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; $y'' = \dfrac{-2}{9(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2}} \neq 0$

Kết quả đồ thị lồi trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$, lõm trên khoảng $(\ 1\ ;\ +\infty\ )$ và không có điểm uốn.

b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{5+x^2}}$; $y'' = \dfrac{5}{(5+x^2)\sqrt{5+x^2}} > 0, \forall x$

Kết quả đồ thị lõm trên **R**.

Bài tập 2. 2: Tìm tham số để đồ thị :

a) $y = f(x) = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận I(1,1) làm điểm uốn.

b) $y = f(x) = x^4 - mx^2 + 3$ có 2 điểm uốn.

Hướng dẫn

a) $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$; $f''(x) = 6x - 2a$. Kết quả $a = 3$ và $b = 2$

b) Kết quả $m > 0$

Bài tập 2. 3: Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số .

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

Hướng dẫn

a) Khi m = 1 thì $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

b) Kết quả $-3 \le m < -1 - \sqrt{3}$ và $-1 + \sqrt{3} < m \le 1$.

Bài tập 2. 4: Cho hàm số: $y = 2x^3 - 3(m - 1)x^2 + m$, với m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2

b) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị sao cho điểm I (3; 1) nằm trên đường thẳng đi qua 2 cực trị .

Hướng dẫn

a) Khi m = 2 thì $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

b) Lấy y chia y'. Kết quả $m = \dfrac{4}{3}$.

Bài tập 2. 5: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm số m dương để đường thẳng y = m cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = **R**. $y' = 4x^3 - 4x$; $y'' = 12x^2 - 4$.

b) Kết quả a = 2.

Bài tập 2. 6: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1}$ b) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$,

Hướng dẫn

a) Chia tử cho mẫu thức để tách bậc nhất.

Kết quả TCĐ: $x = -1$ và $x = 1$; TCX: $y = x$.

b) Kết quả TCX : $y = 2x$ (khi $x \to +\infty$) ; TCN: $y = 0$ (khi $x \to -\infty$).

Bài tập 2. 7: Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị :

a) $y = \dfrac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$ qua H (1,1)

b) $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ tạo với 2 trục tọa độ thành tam giác có S = 1.

Hướng dẫn

a) Tìm TCX rồi thế tọa độ H(1;1) vào TCX. Kết quả m = 2

b) Kết quả $m = -1 \pm \sqrt{2}$

Bài tập 2. 8: Cho hàm số: $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho .

b) Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đường thẳng Δ_1: $2x + y - 4 = 0$ và Δ_2 : $x + 2y - 2 = 0$ là nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = R \ { 1}. $y' = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$.

b) Kết quả $M(1 + \sqrt{2}\,; 1 + \sqrt{2})$, $M(1 - \sqrt{2}\,; 1 - \sqrt{2})$

Bài tập 2. 9: Cho hàm số: $y = \dfrac{x - 3}{x + 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến bằng $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = R \ { –1}. $y' = \dfrac{4}{(x + 1)^2}$.

b) Kết quả $y = x - 2$; $y = x + 6$.

Bài tập 2. 10: Cho hàm số: $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Với giá trị nào của m, đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = R \ { 1}. $y' = \dfrac{-3}{(x - 1)^2}$.

b) Kết quả m = 0 hay m = 6.

Bài tập 2. 11: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm m sao cho đường thẳng $y = m(x - 2) + 4$ cắt đường cong (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó.

Hướng dẫn

a) Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $y = \dfrac{x^2+4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$.

b) Điều kiện phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm khác dấu.
Kết quả $m > 1$

Bài tập 2. 12: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+(m-1)x+2}{1-x}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên khi m = 2.

b) Xác định m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 = -3$.

Hướng dẫn

a) Khi m = 2 thì $y = \dfrac{x^2+x+2}{1-x}$

b) Dùng định lý Viet. Kết quả m = 2.

Chuyên đề 3: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐỒ THỊ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Sự tương giao: Cho 2 đồ thị của hàm số: $y = f(x)$, $y = g(x)$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ là một phương trình đại số, tuỳ theo số nghiệm mà có quan hệ tương giao. Vô nghiệm: không có điểm chung, 1 nghiệm (đơn): cắt nhau, 1 nghiệm kép: tiếp xúc, 2 nghiệm phân biệt: 2 giao điểm,....

Chú ý:

1) Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

Nếu có nghiệm $x = x_0$ thì phân tích:$(x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0$

Nếu đặt hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì điều kiện:có 1 nghiệm: đồ thị không có cực trị hoặc $y_{CĐ} . y_{CT} > 0$, có 2 nghiệm: $y_{CĐ} . y_{CT} = 0$, có 3 nghiệm phân biệt: $y_{CĐ} . y_{CT} < 0$.

Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm dương khi: $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} < 0 \\ x_{CD}, x_{CT} > 0 \\ a.f(0) < 0 \end{cases}$

2) Hai điểm trên 2 nhánh đồ thị $y = \dfrac{g(x)}{x-k}$, ta thường lấy hai hoành độ $k - a$ và $k + b$ với $a, b > 0$.

Góc và khoảng cách:

- Góc giữa 2 vectơ: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$
- Góc giữa 2 đường thẳng: $\cos\alpha = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}}$
- Khoảng cách $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0)$ đến (Δ): $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Đồ thị hàm bậc 3: $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm A, B, C theo thứ tự có khoảng cách AB = BC tức là 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập cấp số cộng thì điểm uốn thuộc trục hoành.
- Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập cấp số cộng khi $0 < t_1 < t_2$, $t_2 = 9t_1$.

Tiếp tuyến và tiếp xúc:

– Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ của đồ thị (C): $y = f(x)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ hệ số góc: } f'(x) = k = \tan(0x,t)$$

– Điều kiện 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc là hệ phương trình:

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

– Tiếp tuyến đi qua điểm K(a; b) : Lập phương trình tiếp tuyến tại x_0 bất kỳ rồi cho tiếp tuyến đi qua điểm K(a; b) thì tìm ra x_0.

Chú ý: Với hai đường thẳng d: $y = ax + b$, d′: $y = a'x + b'$ thì có: $d \equiv d'$ khi $a = a'$, $b = b'$; $d \,//\, d'$ khi $a = a'$, $b \neq b'$; $d \perp d'$ khi $a.\,a' = -1$

Yếu tố đối xứng:

– Hàm số chẵn: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng nhau qua trục tung.

– Hàm số lẻ: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$

Đồ thị hàm số lẻ đối xứng nhau qua gốc O.

– Công thức chuyển hệ trục bằng phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$.

$$(Oxy) \rightarrow (IXY) \text{ với } I(x_0, y_0): \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

– Điều kiện (C) nhận $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng.

$y_0 = \dfrac{f(x_0 - x) + f(x_0 + x)}{2}$, $\forall x_0 - x, x_0 + x \in D$, hoặc chuyển trục bằng phép tịnh tiến đến gốc I nói trên là hàm số lẻ.

– Điều kiện (C) nhận d: $x = a$ làm trục đối xứng;

$f(a - x) = f(a + x)$, $\forall a-x, a + x \in D$,hoặc chuyển trục bằng phép tịnh tiến đến S(a,0) là hàm số chẵn.

Quỹ tích điểm M:

Tìm toạ độ x, y của M, khử tham số giữa x và y.

Giới hạn: Chuyển điều kiện nếu có của tham số về điều kiện của x (hay y).

Đặc biệt: Nếu $M(x, y) \in (V)$ thì chỉ cần tìm x rồi rút tham số để thế, khử tham số.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. 1: Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ luôn cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại đúng hai điểm phân biệt với mọi giá trị m.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^4 + 2m^2x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x(x^3 + 2m^2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x^3 + 2m^2x - 1 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2m^2x - 1$. Ta có $f(0) = -1 \neq 0$ và

$f'(x) = 3x^2 + 2m^2 \geq 0$ nên hàm số này đồng biến trên R.

Vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 2m^2x - 1) = -\infty$

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + 2m^2x - 1) = +\infty$

nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm duy nhất $x \neq 0$: đpcm.

Bài toán 3. 2: Tìm m để đồ thị hàm số sau cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt:

a) $y = x^3 + (2m + 1)x^2 + (3m + 2)x + m + 2$.

b) $y = x^3 - 3mx + m + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + (2m + 1)x^2 + (3m + 2)x + m + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$.

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $f(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ (1)

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác – 1.

$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ -m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 2$, $m \neq 3$.

b) D = R. Ta có $y' = 3x^2 - 3m$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Điều kiện (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt là đồ thị có CĐ, CT và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

$\Leftrightarrow m > 0$ và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \Leftrightarrow f(-\sqrt{m}).f(\sqrt{m}) < 0$.

$\Leftrightarrow (m + 1 - 2m.\sqrt{m})(m + 1 + 2m\sqrt{m}) < 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4m^3 < 0$.

$\Leftrightarrow -4m^3 + m^2 + 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(4m^2 + 3m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

(vì $\Delta = 9 - 16 < 0$ nên $4m^2 + 3m + 1 > 0, \forall m$).

Bài toán 3. 3: Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d_m) đi qua điểm A(–2; 2) và có hệ số góc m cắt đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

a) Tại hai điểm phân biệt?

b) Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị?

Hướng dẫn giải

Phương trình của (d_m): $y = m(x + 2) + 2 = mx + 2m + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_m) và đường cong :

$mx + 2m + 2 = \dfrac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow (mx + 2m + 2)(x + 1) = 2x - 1, x \neq -1$

$\Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0, x \neq -1$ (1)

a) Đường thẳng (d_m) cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác –1.

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 12$.

b) Hai nhánh của đường cong đã cho nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x = -1$ của đồ thị. Đường thẳng (d_m) cắt đường cong đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < -1 < x_2$.

Đặt $x = t - 1$ thì $x_1 < -1 < x_2 \Rightarrow t_1 < 0 < t_2$.

Phương trình trở thành: $m(t-1)^2 + 3m(t-1) + 2m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 + mt + 3 = 0$ (2).

ĐK phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài toán 3. 4: Tìm tham số để đường thẳng

a) $y = m$, $m > 0$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

b) $y = 3x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0$.

Với mọi $m > 0$ thì đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; m)$ và $B(x_B; m)$ đối xứng qua Oy, $x_A < x_B$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A.x_B + m^2 = 0$

Mà $x_A + x_B = 0$ nên $x_A = -m$, $x_B = m$

Do đó $m^4 - 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m^3 + 2m^2 + m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ (vì $m > 0$).

b)Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{x^2}{x-1} = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m = 0, x \neq 1$.

Điều kiện có 2 nghiệm phân biệt khác 1:

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 9 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$: Đúng $\forall m$

Ta có: $|x_1 - x_2| = \left|\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 9}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(m+1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất khi $m = -1$.

Bài toán 3. 5 Tìm các giá trị của m sao cho

a) Đồ thị của hàm số $y = x^4 - (m + 1)x^2 + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

b) Đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ tại hai điểm A, B mà $AB = \sqrt{10}$.

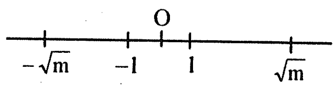
Hướng dẫn giải

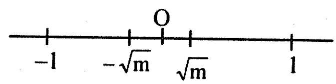
a) Hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là nghiệm phương trình:

$x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = m$.

Điều kiện $m > 0$ và $m \neq 1$. Khi đó, phương trình có 4 nghiệm

$x = -1,\ x = 1,\ x = -\sqrt{m}\ ,\ x = \sqrt{m}$





Đường cong cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau khi: $\sqrt{m} = 3$ hoặc $\sqrt{m} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = 9$ hoặc $m = \dfrac{1}{9}$ (chọn).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x-1}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt khi phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ 1 - (m-1) + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0, \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$$

Khi đó $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$ và $x_1 + x_2 = m - 1$; $x_1.x_2 = m - 1$

Ta có $AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - 4(m - 1) - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 = -1 \\ m - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy m= 0 hay m = 6.

Bài toán 3. 6: Chứng minh các đường thẳng d: $y = m - x$ luôn cắt đồ thị (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$ tại 2 điểm M, N và cắt 2 tiệm cận của (C) tại P, Q đồng thời hai đoạn MN, PQ có cùng trung điểm.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm d và (C):

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 1} = m - x \Leftrightarrow 2x^2 - (m + 4)x + m = 0,\ x \neq 1.$$

Ta có x = 1 không là nghiệm và $\Delta = m^2 + 16 > 0$, $\forall m$ nên d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N.

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = x - 2 - \frac{2}{x - 1}$ nên TCĐ: x = 1, TCX: y = x – 2.

Do đó $x_P = 1$, hoành độ giao điểm Q của d với TCX: m – x = x – 2

$\Rightarrow x_Q = \frac{m+2}{2}$. Do đó $\frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{m+4}{2} = \frac{x_M + x_N}{2}$: đpcm.

Bài toán 3. 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = \sqrt{x+2}$ biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ song song với d: $y = \frac{3}{4}x + 9$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Vì $y_0 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ nên $f'(x_0) = \frac{1}{4}$.

Thế vào : $y = \frac{1}{4}(x - 2) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

b) $y' = -x^2 - 4x - 3$. Đường thẳng d có hệ số góc $k = \frac{3}{4}$.

Tiếp tuyến song song với nên $y' = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -x^2 - 4x - 3 = \frac{3}{4}$.

$\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 15 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{2}$ hoặc $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Với $x_0 = -\frac{5}{2}$ thì $f(x_0) = \frac{29}{24}$ nên có tiếp tuyến $y = \frac{3}{4}x + \frac{37}{12}$

Với $x_0 = -\frac{3}{2}$ thì $f(x_0) = -\frac{5}{4}$ nên có tiếp tuyến $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ và $y = \frac{3}{4}x + \frac{37}{12}$.

Bài toán 3. 8: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị:

a) $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ và có hệ số góc bé nhất.

b) y = f(x) thỏa mãn $f^2(1 + 2x) = x - f^3(1 - x)$ tại x = 1 .

Hướng dẫn giải

a) Ta có hệ số góc của tiếp tuyến là đạo hàm tại đó.

$y' = 6x^2 - 12x = -6 + 6(x-1)^2 \geq -6$, dấu = khi $x_o = 1$

nên max $y' = -6$, do đó tiếp tuyến tại $A(1; -1)$ là $y = -6x + 5$.

b) Lấy đạo hàm 2 vế, ta có:

$4f(1 + 2x) \,.\, f'(1 + 2x) = 1 + 3f^2(1 - x) \,.\, f'(1 - x)$.

Thế $x = 0$: $4f(1) \,.f'(1) = 1 + 3f^2(x) \,.\, f'(1)$ (*)

Thế $x = 0$ vào $f^2(1 + 2x) = x - f^3(1 - x) \Rightarrow f^2(1) = -f^3(1)$.

$\Rightarrow f^2(1)(1 + f(1)) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = -1$.

Với $f(1) = 0$ thì (*): $0 = 1$ (loại)

Với $f(1) = 1$ thì (*): $-4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = \dfrac{-1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{1}{7}(x - 1)$

Bài toán 3. 9: Viết phương trình tiếp tuyến của (C) hàm số:

a) $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến bằng $2\sqrt{2}$.

b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ biết rằng tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm phân biệt A, B sao cho OB = 9OA.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = \dfrac{4}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

Phương trình tiếp tuyến d tại $M(x_0; y_0) \in (C)$, $x_0 \neq -1$

$$y = \frac{4}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 3}{x_0 + 1}$$

$\Leftrightarrow 4x - (x_0 + 1)^2 y + (x_0^2 - 6x_0 - 3) = 0$ nên

$$d(I, \Delta) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|-4 - (x_0+1)^2 + (x_0^2 - 6x_0 - 3)\right|}{\sqrt{16 + (x_0+1)^4}} = 2\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^4 - 8(x_0 + 1)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow [(x_0 + 1)^2 - 4]^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = x - 2$

Với $x_0 = -3$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = x + 6$.

b) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm phân biệt A, B sao cho OB = 9OA nên hệ số góc của tiếp tuyến d là:

$k = \tan OAB = \pm\dfrac{OB}{OA} = \pm 9$

Do đó $y' = \pm 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = \pm 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 1$, phương trình của d là $y = 9x + 7$

Với $x_0 = 3$, phương trình của d là $y = 9x - 25$.

Bài toán 3. 10: Viết phương trình tiếp tuyến của (C) hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại điểm M có hoành độ âm, biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ thành tam giác có diện tích $S = \dfrac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}, x \neq 2$

Tiếp tuyến d với (C) tại $M(x_0; y_0)$, $x_0 < 0$

$$d: y = \frac{-3}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-2}$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy.

$A\left(\dfrac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{3}; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{(x_0-2)^2}\right)$. Ta có

$$S = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{3}\right| . \left|\frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{(x_0-2)^2}\right| = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} {x_0}^2 + x_0 = 0 \\ {x_0}^2 + 3x_0 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \vee x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \vee x_0 = 1 \end{array}\right.$$

Chọn $x_0 < 0$ nên có hai tiếp tuyến là:

$$d_1: y = -\frac{1}{3}(x + 1);\ d_2:\ y = -\frac{1}{12}x + \frac{1}{6}.$$

Bài toán 3. 11: Viết phương trình tiếp tuyến của (C) hàm số:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 2$ và đi qua A(0; 2).

b) $y = \dfrac{(1-m)x + 2 - m}{mx + m - 1}$, $m \neq 0$ và đi qua M(–1; –1)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = 3x^2 - 10x$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o; y_o)$

$y = f'(x_o).(x - x_o) + y_o$

$y = (3x_o^3 - 10x_o)(x - x_o) + (x_o^3 - 5x_o^2 + 2)$.

Cho tiếp tuyến qua A(0; 2): $2 = (3x_o^2 - 10x_o)(0 - x_o) + (x_o^3 - 5x_o^2 + 2)$

$\Leftrightarrow 2x_o^3 - 5x_o^2 = 0 \Leftrightarrow x_o^2(2x_o - 5) = 0 \Leftrightarrow x_o = 0$ hoặc $x_o = \dfrac{5}{2}$.

Với $x_o = 0$ thì có tiếp tuyến $y = 2$.

Với $x_o = \dfrac{5}{2}$ thì có tiếp tuyến $y = -\dfrac{25}{4}x + 2$.

b) Ta có $y' = \dfrac{-1}{(mx + m - 1)^2}$, $x \neq \dfrac{1 - m}{m}$

Gọi d là tiếp tuyến với (C_m) tại điểm $T(x_0; y_0)$ bất kỳ.

d: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$y = \frac{-1}{(mx_0 + m - 1)^2}(x - x_0) + \frac{(1 - m)x_0 + 2 - m}{mx_0 + m - 1}$$

Tiếp tuyến d đi qua M(–1; –1) nên ta có:

$$-1 = \frac{x_0 + 1}{(mx_0 + m - 1)^2} + \frac{(1 - m)x_0 + 2 - m}{mx_0 + m - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 + 1}{(mx_0 + m - 1)^2} + \frac{x_0 + 1}{mx_0 + m - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(x_0 + 1)^2}{(mx_0 + m - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ (vì } m \neq 0)$$

Vậy phương trình tiếp tuyến d: $y = -x - 2$.

Bài toán 3. 12: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đồ thị:

(P_1): $y = x^2 - 5x + 6$ và (P_2): $y = -x^2 + 5x - 11$.

Hướng dẫn giải

(P_1): $y = f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$.

(P_2): $y = g(x) = -x^2 + 5x - 11 \Rightarrow g'(x) = -2x + 5$.

Gọi tiếp tuyến chung là $y = ax + b$ và $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; g(x_2))$ là 2 tiếp điểm tương ứng. Ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b \\ f'(x_1) = a \\ g(x_2) = ax_2 + b \\ g'(x_2) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 5x_1 + 6 = ax_1 + b \\ 2x_1 - 5 = a \\ -x_2^2 + 5x_2 - 11 = ax_2 + b \\ -2x_2 + 5 = a \end{cases}$$

Do đó $2(x_1 + x_2) - 10 = 0$ nên $x_2 = 5 - x_1$

và $x_1^2 - 5x_1 + 6 - (-x_2^2 + 5x_2 - 11) = (2x_1 - 5)(x_1 - x_2)$.

nên: $x_1^2 - 5x_1 + 17 + (5 - x_1)^2 - 5(5 - x_1) - (2x_1 - 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 - 10x_1 + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ hoặc $x_1 = 4$.

Với $x_1 = 1$ thì $a = -3$, $b = 5$. Với $x_1 = 4$ thì $a = 3$, $b = -10$.

Vậy có 2 tiếp tuyến chung: $y = 3x - 10$ và $y = -3x + 5$.

Bài toán 3. 13: Tìm điểm M trên đồ thị (C) hàm số: $y = \dfrac{2x-2}{x-2}$ sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai đường tiệm cận của A, B với $AB = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (C)$, $x_0 \neq 2$

$$d: y = \frac{-2}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}$$

Giao điểm của d với tiệm cận đứng $x = 2$ là $A\left(2; \dfrac{2x_0}{x_0 - 2}\right)$;

Giao điểm của d với tiệm cận ngang $y = 2$ là $B(2x_0 - 2; 2)$

$$AB = \sqrt{(2x_0 - 4)^2 + \left(2 - \frac{2x_0}{x_0 - 2}\right)^2} = 2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \frac{4}{(x_0 - 2)^2}}$$

Ta có $AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 + \dfrac{4}{(x_0 - 2)^2} = 5$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^4 - 5(x_0 - 2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_0 - 2)^2 = 1\\ (x_0 - 2)^2 = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0 = 1, x_0 = 3\\ x_0 = 0, x_0 = 4\end{array}\right.$$

Vậy M(0; 1), M(1; 0), M(3; 4), M(4; 3).

Bài toán 3. 14: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị (C) lấy điểm phân biệt là A và B có hoành độ lần lượt là a, b. Tìm điều kiện của a, b để tiếp tuyến của (C) tại các điểm A và B song song với nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Gọi a, b lần lượt là hoành độ của A và B, $a \neq b$,. Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là:

$k_A = f'(a) = 4a^3 - 4a$, $\quad k_B = f'(b) = 4b^3 - 4b$

Tiếp tuyến tại A và B lần lượt có phương trình là

$y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)x + f(a) - af'(a)$

$y = f'(b)(x - b) + f(b) = f'b(x) + f(b) - bf'(b)$

Hai tiếp tuyến này song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi:

$k_A = k_B \Leftrightarrow 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + ab + b^2 = 1$

Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B trùng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1,\ a \neq b \\ f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1, a \neq b \\ -3a^4 + 2a^2 = -3b^4 + 2b^2 \end{cases}$$

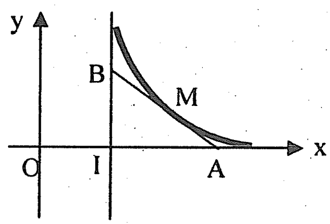
Giải hệ này, ta được nghiệm là (a; b) = (–1; 1), (1; –1)

Vậy điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau là $a^2 + ab + b^2 = 1$, $a \neq \pm 1$, $a \neq b$.

Bài toán 3. 15: Tiếp tuyến (T) của (H): $y = \dfrac{1}{x - 2}$ tại điểm M có hoành độ $x = a \neq 2$, cắt trục hoành Ox tại A và cắt đường thẳng d: x = 2 tại B. Chứng minh M là trung điểm của AB và diện tích tam giác giới hạn bởi tiếp tuyến, Ox và d không đổi.

Hướng dẫn giải

$y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$. Phương trình tiếp tuyến (T) tại x = a:



$$y = \frac{-1}{(a-2)^2}(x - a) + \frac{1}{a-2}.$$

Giao điểm A với trục hoành

Cho $y_A = 0$ thì $\dfrac{x-a}{(a-2)^2} = \dfrac{1}{a-2} \Rightarrow x_A = 2a - 2$.

Giao điểm B với đường thẳng d: x = 2.

Cho $x_B = 2$ thì $y_B = \dfrac{-(2-a)}{(a-2)^2} + \dfrac{1}{a-2} = \dfrac{2}{a-2}$.

Vì: $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2a - 2 + 2}{2} = a = x_M$, $\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1}{a-2} = y_M$

nên tiếp điểm M là trung điểm của AB.

Gọi I là giao điểm của Ox và d thì I(2; 0). Tam giác cần xác định là tam giác ABI vuông tại I có diện tích:

$$S = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}\,|2a - 2 - 2|\,\left|\frac{2}{a-2} - 0\right| = 2\text{: không đổi.}$$

Bài toán 3. 16: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. Chứng minh rằng qua điểm M(3; –1) vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng qua M(3; –1) hệ số góc a là y = a(x – 3) – 1, đường thẳng là tiếp tuyến với đồ thị khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = a(x - 3) - 1 & (1) \\ \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = a & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) và rút gọn ta được: $x^2 - x - 1 = 0$.

PT có 2 nghiệm thoả mãn: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1.x_2 = -1$.

Ta có: $y'(x_1).y'(x_2) = \dfrac{x_1^2 - 2x_1}{(x_1 - 1)^2}.\dfrac{x_2^2 - 2x_2}{(x_2 - 1)^2}$

$= \dfrac{(x_1x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2}{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)^2} = \dfrac{1 + 2 - 4}{(-1 - 1 + 1)^2} = -1$

Vậy 2 tiếp tuyến qua M vuông góc với nhau.

Bài toán 3. 17: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C). Tìm trên (C) những điểm mà qua đó chỉ kẻ được một tiếp tuyến với (C).

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một điểm trên (C). Giả sử tiếp tuyến (t) kẻ từ M đến (C) tiếp xúc với (C) tại $N(x_1; y_1)$. Khi đó phương trình của (t) có dạng: $y - y_1 = \left(-3x_1^2 + 6x_1\right)\left(x - x_1\right)$

Vì (t) đi qua M nên ta có: $y_0 - y_1 = \left(-3x_1^2 + 6x_1\right)\left(x_0 - x_1\right)$

Và N thuộc (C) nên ta có: $y_1 = x_1^3 + 3x_1^2 - 2$

Suy ra $2x_1^3 - 3(x_0 + 1)x_1^2 + 6x_0x_1 - 2 - y_0 = 0$

nên $2x_1^3 - 3x_0x_1^2 + x_0^3 - 3x_1^2 + 6x_0x_1 - 3x_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2(2x_1 + x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0$ hay $x_1 = \dfrac{3 - x_0}{2}$

Điều kiện có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$\dfrac{3 - x_0}{2} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Từ đó tính được $y_0 = 0$.

Vậy M(1; 0) là điểm duy nhất trên (C) mà qua đó có thể kẻ đúng một tiếp tuyến với (C).

Bài toán 3. 18: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ đi qua giao điểm của 2 tiệm cận.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = x + 1 + \dfrac{1}{x + 1}$, $x \neq -1$ nên có TCĐ: $x = -1$, TCX: y = x + 1, giao điểm 2 tiệm cận I(–1; 0)

Phương trình đường thẳng (d) qua I với hệ số góc k là y = k(x + 1).

Giả sử d là tiếp tuyến của (C) thì hệ sau có nghiệm.

$$\begin{cases} k(x+1) = x+1+\dfrac{1}{x+1} \\ k = 1-\dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow (x+1)\left(1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}(x \neq -1) \Rightarrow \frac{2}{x+1} = 0 : \text{vô lý}$$

Vậy không một tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.

Bài toán 3. 19: Chứng minh tiếp tuyến tại A(–1; 0) của đồ thị (C): $y = -x^4 + 2x^2 + x$ cũng là tiếp tuyến của đồ thị này tại một điểm B khác A nữa.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = -4x^3 + 4x + 1$.

Với $x_o = -1$, $y_o = 0$ thì $f'(x_o) = 1$ nên tiếp tuyến tại A(–1; 0) là y = x + 1. Đặt $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$; $y = g(x) = x + 1$.

Để tiếp tuyến tại A cũng là tiếp tuyến tại B khác A thì hệ sau có nghiệm $x_o \neq -1$:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + x = x + 1 \\ -4x^3 + 4x + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \\ -4x^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \\ 4x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Chọn nghiệm $x_o = 1 \neq -1$ nên B(1; 2): đpcm.

Chú ý: Đây là tiếp tuyến đi qua 2 tiếp điểm.

Bài toán 3. 20: Chứng minh hai đồ thị sau tiếp xúc nhau: $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x$ và $y = g(x) = \dfrac{3x}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} \\ \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x\right)' = \left(\dfrac{3x}{x+2}\right)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} & (1) \\ x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{(x+2)^2} & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{3}{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+5x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Suy ra hệ phương trình có một nghiệm duy nhất x = 0. Vậy hai đường cong tiếp xúc với nhau tại gốc toạ độ O.

Ta có $y'(0) = \dfrac{3}{2}$ nên phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm chung là $y = \dfrac{3}{2}x$.

Bài toán 3. 21: Tìm tham số để đồ thị hàm số

a) (C) : $y = x^3 - 1 - k(x-1)$ tiếp xúc với trục hoành.

b) (C) : $y = \dfrac{x^2+(m+2)x+2m+2}{x+2}$ có tiệm cận tiếp xúc với đường cong : $y = x^3 - 3x^2 - 8x$.

Hướng dẫn giải

a) Đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành ứng với k sao cho:

$$\begin{cases} y=0 \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-1-k(x-1)=0 \\ 3x^2-k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

b) Ta có $y = \dfrac{(x+2)(x+m)+2}{x+2} = x+m+\dfrac{2}{x+2}$ nên tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là y = x + m. Đường thẳng này tiếp xúc với $y = x^3 - 3x^2 - 8x$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+m=x^3-3x^2-8x \\ 1=3x^2-6x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=x^3-3x^2-9x \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=x^3-3x^2-9x \\ x=-1 \vee x=3 \end{cases}$$

Với x = –1, ta có m = 5 và với x = 3 thì m = –27

Vậy có hai giá trị m cần tìm là m = 5, m = –27.

Bài toán 3. 22: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Xét 3 điểm A, B, C thẳng hàng và thuộc (C). Gọi A', B', C' là giao điểm của (C) với tiếp tuyến của (C) tại A, B, C. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(x_A; y_A)$ có dạng :

$y = (3x_A^2 - 3)(x - x_A) + y_A$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến có dạng:

$$(3x_A^2 - 3)(x - x_A) + y_A = x^3 - 3x + 2$$

$\Leftrightarrow \quad (3x_A^2 - 3)(x - x_A) + x_A^3 - 3x_A + 2 = x^3 - 3x + 2$

$\Leftrightarrow \quad (x - x_A)^2(x + 2x_A) = 0$

Do đó tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại 2 điểm có hoành độ x_A chính là A và điểm có hoành độ $-2x_A$ là điểm A', tức là $x_{A'} = -2x_A$.

Tương tự $x_{B'} = -2x_{B'}$, $\quad x_{C'} = -2x_C$.

Ta chứng minh nhận xét: A, B, C thuộc (C) thẳng hàng khi và chỉ khi $x_A + x_B + x_C = 0$.

Thậy vậy, giả sử A, B, C nằm trên đường thẳng có phương trình y = ax + b.

Khi đó x_A, x_B, x_C là nghiệm của phương trình.

$x^3 - 3x + 2 = ax + b \Leftrightarrow x^3 - (3 + a)x + (2 - b) = 0$

Áp dụng định lí Viet, ta suy ra $x_A + x_B + x_C = 0$

Ngược lại, giả sử $x_A + x_B + x_C = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, B cắt C' thì theo phần thuận ta có $x_A + x_B + x_{C'} = 0$ suy ra $x_{C'} = x_C$ suy ra C' trùng với C và có nghĩa là A, B, C thẳng hàng. Nhận xét được chứng minh.

Áp dụng do A, B, C thẳng hàng nên ta có $x_A + x_B + x_C = 0$.

Mà $x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} = -2(x_A + x_B + x_C) = 0$ nên suy ra A', B', C' thẳng hàng (đpcm).

Bài toán 3. 23: Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$. Tìm m để góc giữa 2 tiệm cận bằng 45^0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = mx - 2 + \dfrac{6m - 2}{x + 3m}, m \neq \dfrac{1}{3}$

Khi m = 0 thì đồ thị có TCĐ và TCN vuông góc : loại

Khi $m \neq 0$ thì đồ thị có tiệm cận đứng: $x = -3m$ và tiệm cận xiên: $y = mx - 2$. Hai tiệm cận hợp nhau góc 45^0 khi tiệm cận xiên hợp với trục hoành một góc $45^0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Bài toán 3. 24: Tìm m để đường thẳng y = 2m cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt M và N sao cho OM vuông góc với ON.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng y = 2m cắt đồ thị hàm số tại hai điểm M và N khi phương trình hoành độ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1:

$$\frac{x^2 + 2mx - 1}{x - 1} = 2m \Leftrightarrow x^2 - 1 + 2m = 0. \text{ Do đó: } m < \frac{1}{2}, m \neq 0.$$

Ta có $y' = \dfrac{(2x + 2m)(x - 1) - (x^2 + 2mx - 1)}{(x - 1)^2} \Rightarrow y'(x_i) = \dfrac{2m}{x_i}$

Điều kiện OM ⊥ ON ⇔ $\frac{2m}{x_1}.\frac{2m}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{x_1x_2} = -1$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ (chọn).

Bài toán 3. 25: Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc đồ thị (C) : $y = \frac{4x^2 + 5x - 4}{x + 2}$ đến 2 tiệm cận là một hằng số.

Hướng dẫn giải

$y = \frac{4x^2 + 5x - 4}{x + 2} = 4x - 3 + \frac{2}{x + 2}$ nên TCĐ Δ: x = –2,

TCX Δ': y = 4x – 3 ⇔ 4x – y – 3 = 0.

Với $M(x;\ 4x - 3 + \frac{2}{x + 2}) \in (C)$, khoảng cách đến 2 tiệm cận:

$d(M;\Delta).d(M,\Delta') = |x+2|.\frac{2}{\sqrt{16+1}.|x+2|} = \frac{2}{\sqrt{17}}$: không đổi.

Bài toán 3. 26: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có cực đại, cực tiểu và hai điểm đó cách đều đường thẳng d: y = –2x.

Hướng dẫn giải

D = **R**. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Điều kiện có CĐ và CT là Δ' = 9 – 3m > 0 ⇔ m < 3.

Ta có $y = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{3})y' + 2(\frac{1}{3}m - 1)x + \frac{1}{3}m + 1$ nên đường thẳng qua 2 điểm CĐ, CT là d': $y = 2(\frac{1}{3}m - 1)x + \frac{1}{3}m + 1$.

Điều kiện CĐ, CT cách đều d: y = –2x là d' hoặc song song với d hoặc d đi qua trung điểm I(1; m – 1) của đoạn nối CĐ, CT.

$2(\frac{1}{3}m - 1) = -2,\ \frac{1}{3}m + 1 \neq 0$ hoặc $m - 1 = -2$

⇔ m = 0 hoặc m = –1 (chọn).

Bài toán 3. 27: Chứng minh tiếp tuyến tại điểm M bất kỳ thuộc đồ thị (C): $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$ cắt trục tung Oy tại một điểm A cách đều gốc O và tiếp điểm M.

Hướng dẫn giải

Với điều kiện $x - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$ thì: $y' = \frac{1 - 8x}{4\sqrt{x - 4x^2}}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_o;\ y_o)$ là :

$$y = \frac{1-8x_o}{4\sqrt{x_o - 4x_o^2}}(x - x_o) + \frac{1}{2}\sqrt{x_o - 4x_o^2}.$$

Tiếp tuyến cắt Oy tại A(0; $\frac{x_o}{4\sqrt{x_o - 4x_o^2}}$).

Ta có: $AM = \sqrt{(x_o - 0)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x_o - 4x_o^2} - \frac{x_o}{4\sqrt{x_o - 4x_o^2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{x_o^2}{16(x_o - 4x_o^2)}} = AO$: đpcm

Bài toán 3. 28: Tìm các điểm M thuộc (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm hai đường tiệm cận của (C) ngắn nhất.

Hướng dẫn giải

Đồ thị (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ có TCĐ: x = 1, TCN: y = 1 nên giao điểm 2 tiệm cận là I(1; 1). Ta có M(x; $\frac{x+1}{x-1}$) $\in$ (C) nên khoảng cách:

$$IM = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{4}{(x-1)^2}} \geq 4$$

Dấu = xảy ra khi $(x-1)^2 = \frac{4}{(x-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Vậy $M_1(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, $M_2(1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

Bài toán 3. 29: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đường thẳng Δ_1: 2x + y – 4 = 0 và Δ_2: x + 2y – 2 = 0 là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$, $x_0 \neq 1$.Tổng khoảng cách là:

$$d = \frac{\left|2x_0 + \frac{2}{x_0-1} - 3\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + \frac{4}{x_0-1}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left|2x_0 + \frac{2}{x_0 - 1} - 3\right| + \left|x_0 + \frac{4}{x_0 - 1}\right|\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left|2x_0 + \frac{2}{x_0 - 1} - 3 + x_0 + \frac{4}{x_0 - 1}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}\left|x_0 - 1 + \frac{2}{x_0 - 1}\right|$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\left(|x_0 - 1| + \left|\frac{2}{x_0 - 1}\right|\right) \geq \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |x_0 - 1|^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 + \sqrt{2} \\ x_0 = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy điểm M thỏa mãn: $M(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, $M(1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

Bài toán 3. 30: Tìm điểm M thuộc đồ thị (C): $y = \frac{4x - 3}{x - 3}$ có tổng các khoảng cách đến 2 tiệm cận bé nhất.

Hướng dẫn giải

Đồ thị $y = \frac{4x - 3}{x - 3}$ có TCĐ Δ: $x = 3$, TCN Δ': $y = 4$.

Gọi $M(x; \frac{4x - 3}{x - 3}) \in (C)$, ta có $d(M; \Delta) + d(M; \Delta')$

$$= |x - 3| + \left|\frac{4x - 3}{x - 3} - 4\right| = |x - 3| + \left|\frac{9}{x - 3}\right| \geq 2\sqrt{9} = 6$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $|x - 3| = \frac{9}{|x - 3|} \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 9$, do đó có 2 điểm $M(6; 7)$ và $M'(0; 1)$.

Bài toán 3. 31: Tìm điểm M thuộc đồ thị (C): $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ có tổng khoảng cách đến 2 trục bé nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; \frac{x - 1}{x + 1}) \in (C)$, tổng khoảng cách đến 2 trục là $d = |x| + \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|$, $x \neq -1$.

Xét điểm $A(0; 1) \in (C)$ thì $d = 1$ nên min $d \leq 1$, chỉ xét các điểm có: $|x| \leq 1$, $\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| \leq 1$ nên $0 < x < 1$, khi đó:

$$d = x + \frac{x - 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1} = -2 + (x + 1) + \frac{2}{x + 1} \geq -2 + 2\sqrt{2}.$$

Dấu = xảy ra khi $x + 1 = \dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Vậy có 2 điểm $M(-1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, $M'(-1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$

Bài toán 3. 32: Tìm điểm M thuộc đồ thị (C): $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$ có tổng khoảng cách đến 2 trục bé nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x; \dfrac{x^2-3}{x-2}\right) \in (C)$ thì tổng khoảng cách đến 2 trục $d = |x| + \left|\dfrac{x^2-3}{x-2}\right|$, $x \neq 2$.

Xét điểm $A\left(0; \dfrac{3}{2}\right) \in (C)$ thì $d = \dfrac{3}{2}$, do đó min $d \leq \dfrac{3}{2}$ nên chỉ xét các điểm có hoành độ $|x| \leq \dfrac{3}{2}$.

Khi đó $\dfrac{x^2-3}{x-2} > 0$ nên $d = |x| + \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

Nếu $0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ thì $d = f(x) = x + \dfrac{x^2-3}{x-2}$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 7}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lập BBT thì min $d = f(0) = \dfrac{3}{2}$.

Nếu $-\dfrac{3}{2} \leq x < 0$ thì $d = g(x) = -x + \dfrac{x^2-3}{x-2}$, $g'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$

Do đó g nghịch biến trên $\left[-\dfrac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow g(x) > g(0) = \dfrac{3}{2}$.

So sánh thì min $d = \dfrac{3}{2}$ tại $M \equiv A\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Bài toán 3. 33: Tìm hai điểm trên 2 nhánh đồ thị (C):

$y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có khoảng cách bé nhất.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$, $x \neq 2$.

Gọi $A(2 + a; 3 + a + \frac{1}{a})$, $B(2 - b; 3 - b - \frac{1}{b})$ là 2 điểm thuộc 2 nhánh với $a, b > 0$. Ta có:

$$BA^2 = (a+b)^2 + \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2\left[1 + \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2\right]$$

$$= (a+b)^2\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \ge 4ab\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$

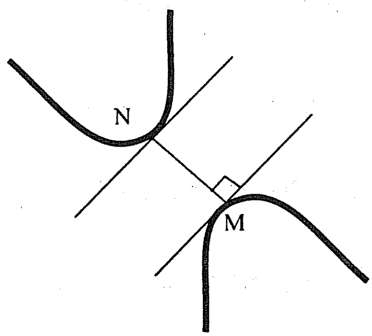
$$= 8 + 4\left(2ab + \frac{1}{ab}\right) \ge 8 + 4.2\sqrt{2}.$$

Dấu = xảy ra khi $a = b$ và $2ab = \frac{1}{ab} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $A(2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 3 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ và $B(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 3 - \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$

Bài toán 3. 34: Tìm điểm M thuộc (P): $y = f(x) = -3x^2 + 8x - 9$ và N thuộc (P'): $y = g(x) = x^2 + 8x + 13$ sao cho MN bé nhất.

Hướng dẫn giải



Ta có khoảng cách MN bé nhất khi 2 tiếp tuyến tại M và N song song với nhau và chúng vuông góc với đoạn MN.

Gọi $M(x; f(x))$; $N(x_1, g(x_1))$ thì

$f'(x) = g'(x_1)$

$\Leftrightarrow -6x + 8 = 2x_1 + 8$

$\Leftrightarrow x_1 = -3x$.

Do đó $MN^2 = 4(36x^4 - 192x^3 + 392x^2 - 352x + 121) = h(x)$.

Ta có $h'(x) = 64(9x^3 - 36x^2 + 49x - 22)$

$= 64(x - 1)^2(9x^2 - 27x + 22)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\min h(x) = h(1) = 5$.

Khi đó $M(1; 4)$, $N(-3; -2)$, kiểm tra MN vuông góc với 2 tiếp tuyến tại M, N: đúng. Vậy $M(1; 4)$, $N(-3; -2)$.

Bài toán 3. 35: Chứng minh đồ thị (C):

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ có tâm đối xứng

b) $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$ có trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = x + 1 + \frac{5}{x-3}$ nên (C) có TCĐ: x = 3 và TCX: y = x + 1, do đó giao điểm 2 tiệm cận I(3; 4). Chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}: \begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 4 \end{cases}$. Thế vào (C) thì được:

$$Y + 4 = X + 3 + 1 + \frac{5}{X+3-3} \Leftrightarrow Y = X + \frac{5}{X}$$

Vì $Y = F(X) = X + \frac{5}{X}$ là hàm số lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

b) $y' = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(x^2 + 3x + 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 0$.

Xét điểm I(–1; 1). Chuyển hệ trục bằng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$: $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$. Thế vào hàm số: $Y + 1 = (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 4(X-1)^2$

$\Leftrightarrow Y = X^4 - 2X^2$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 3. 36: Tìm hai điểm E, F thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ đối xứng nhau qua điểm $I(0; \frac{5}{2})$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = x + 2 + \frac{4}{x-1}$. Gọi $E(x_1; y_1)$, $F(x_2; y_2)$ theo đề bài:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4 + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x_2 - 1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = -9 \end{cases}$$

Do đó $x_1 = -x_2$, $x_1^2 = -9$ nên E(–3; –2) và F(3; 7).

Bài toán 3. 37: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ đối xứng nhau qua đường thẳng d: y = x + 3.

Hướng dẫn giải

Xét đường thẳng d' vuông góc với d thì d': y = –x + b.

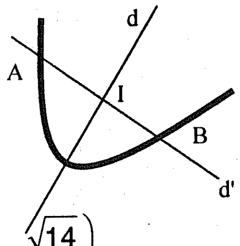
PT hoành độ giao điểm của d' và (C): $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -x + b$, $x \neq 1$.

$\Leftrightarrow 2x^2 - (b + 3)x + 2 + b = 0$.

Điều kiện $\Delta = (b + 3)^2 - 8(2 + b) = b^2 - 2b - 7 > 0$.

Hoành độ giao điểm I của d và d':

$x + 3 = -x + b \Rightarrow x_I = \dfrac{b-3}{2}$



I là trung điểm đoạn AB: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{b-3}{2} = \dfrac{b+3}{4} \Leftrightarrow b = 9$ (chọn).

Vậy $A\left(3 - \dfrac{\sqrt{14}}{2};\ 6 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $B\left(3 + \dfrac{\sqrt{14}}{2};\ 6 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$,

Bài toán 3. 38: Tìm m để đường thẳng $y = -x - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1}$ tại hai điểm đối xứng nhau qua $y = x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện PT hoành độ giao điểm có 2 nghiệm phân biệt khác -1:

$\dfrac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1} = -x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + (m + 7)x + 4 - m = 0$ (1).

ĐK: $\begin{cases} 2(-1)^2 - (m+7) + 4 - m \neq 0 \\ \Delta = (m+7)^2 - 8(4-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\dfrac{1}{2} \\ m < -11 - \sqrt{104} \text{ hay } m > -11 + \sqrt{104} \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm, ta có x_1, x_2 là nghiệm của (1) theo định lí Viet: $x_1 + x_2 = -\dfrac{m+7}{2}$.

Hai giao điểm đối xứng qua đường thẳng $y = x$ vuông góc với đường thẳng $y = -x - 4$ nên tung độ của hai giao điểm lần lượt là x_2, x_1.

Do đó $x_2 = -x_1 - 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow m + 7 = 8 \Leftrightarrow m = 1$ (thoả mãn).

Bài toán 3. 39: Tìm những cặp điểm nguyên trên (C) : $y = x^3 - 4x - 1$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ và không nằm trên đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi A(x, y) thì điểm đối xứng của A qua đường thẳng $y = x$ có tọa độ là (y; x) . Vì thế yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm nghiệm nguyên (x; y) với $x \neq y$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x - 1 \\ x = y^3 - 4y - 1 \end{cases}$$

nên $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 3$.

Phương trình $x^2 + xy + y^2 = 3$ có nghiệm nguyên $x \neq y$ là (2; –1), (–1; 2), (–2; 1), (1; –2).

Thử lại vào hệ, ta chọn 2 nghiệm (2; –1), (–1; 2)

Vậy cặp điểm nguyên duy nhất đối xứng với nhau qua đường thẳng y = x và không nằm trên đường thẳng đó là (2; –1) và (–1; 2).

Bài toán 3. 40: Cho f(x) là hàm đa thức bậc 4. Chứng minh đồ thị của f(x) có trục đối xứng x = a khi và chỉ khi: f '(a) = 0 và f '''(a) = 0

Hướng dẫn giải

Ta khai triển f(x) theo x – a:

$f(x) = a_4(x-a)^4 + a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0$

trong đó: $a_i = \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}$ nên đồ thị của đa thức f(x) có trục đối xứng x = a khi và chỉ khi g(x) = f(x – a) là hàm số chẵn:

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f^{(3)}(a)}{3!} = 0 \\ \dfrac{f^{(1)}(a)}{1!} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'''(a) = 0 \end{cases}$$

• Mở rộng cho các đa thức bậc chẵn 2m mà đồ thị có trục đối xứng x = a khi và chỉ khi f '(a) = f '''(a) = ... = $f^{(2m-1)}(a) = 0$.

Bài toán 3. 41: Tìm điểm cố định của:

a) Các đồ thị $y = \dfrac{x^2 - 2(m+2)x + 6m + 5}{x-2}$

b) Các đường thẳng qua CĐ, CT của đồ thị: $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $M(x_o; y_o)$ là toạ độ điểm mà đồ thị đi qua ∀m.

Ta có $y_o = \quad - x_o - m$, ∀m

$\Leftrightarrow (x_0^2 - 1)m - y_o + x_o^2 - x_o = 0$, ∀m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 = 1 \\ y_o = x_o^2 - x_o \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 1,\ \ y_o = 0 \\ x_o = -1,\ y_o = 0 \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị có hai điểm cố định M(1; 0) và M'(–1; 0).

b) $y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$, $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 1$.

Ta có $y = \dfrac{x-1}{3}y' + \dfrac{2-2m}{3}x + \dfrac{10-m}{3}$ nên đường thẳng qua CĐ, CT là:

$$y = \frac{2-2m}{3}x + \frac{10-m}{3} = -\frac{m}{3}(2x+1) + \frac{2x-10}{3}.$$

Suy ra đường thẳng đi qua CĐ, CT qua điểm cố định $A(-\frac{1}{2}; 3)$.

Bài toán 3. 42: Tìm những điểm M mà mọi đồ thị sau không đi qua

a) $y = \dfrac{mx+9}{x-9}$.

b) $y = x^3 - 3mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 - 5m + 1$ với M thuộc d: x = 1.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $M(x_o; y_o)$ là các điểm mà mọi đồ thị không đi qua:

$$y_o \neq \frac{mx_o+9}{x_o-9}, \forall m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 9 \\ x_o \neq 9,\ mx_o + 9 \neq y_o(x_o - 9), \forall m \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 9 \\ x_o \neq 0,\ y_o \neq -1 \end{array}\right.$. Vậy tập hợp các điểm cần tìm là 2 đường thẳng: x = 9 và x = 0, bỏ điểm A(0; –1).

b) Gọi $M(1; y) \in d$ là điểm cần tìm:

$y \neq 1 - 3m + 2m^2 - 1 + m^2 - 5m + 1, \forall m$.

$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + (1 - y) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 3(1 - y) < 0 \Leftrightarrow y < -\dfrac{13}{3}$

Vậy các điểm cần tìm là M(1; y) với $y < -\dfrac{13}{3}$.

Bài toán 3. 43: Chứng minh các đồ thị $y = (1 + m)x^3 + 3(1 + m)x^2 - 4mx - m$ luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của các đồ thị:

$y_o = (1 + m)x_o^3 + 3(1 + m)x_o^2 - 4mx_o - m, \forall m$.

$\Leftrightarrow y_o = (x_o^3 + 3x_o^2 - 4x_o - 1)m + x_o^3 + 3x_o^2, \forall m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^3 + 3x_o^2 - 4x_o - 1 = 0 & (1) \\ y_o = x_o^3 + 3x_o^2 & (2) \end{cases}$$

Ta chứng minh (1) có 3 nghiệm phân biệt. Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ thì f liên tục trên R, ta có $f(-6) = -85 < 0$, $f(-1) = 5 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 11 > 0$ nên (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc 3 khoảng (–6 –1), (–1; 0), (0; 2).

Từ (1) $\Rightarrow x_o^3 + 3x_o^2 = 4x_o + 1$ nên (2) $\Rightarrow y_o = 4x_o + 1$.

Vậy 3 điểm cố định thẳng hàng trên đường thẳng y = 4x + 1.

Bài toán 3. 44: Chứng minh các đồ thị hàm số $y = \dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$, $m \neq 0$ luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định: $y_o = \dfrac{(m-1)x_o + m}{x_o - m}$, $\forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow (m-1)x_o + m = y_o(x_o - m)$, $x_o \neq m$, $\forall m \neq 0$.

$\Leftrightarrow (x_o + 1 + y_o)m - x_o(1 + y_o) = 0$, $x_o \neq m$, $\forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow x_o = 0$, $y_o = -1$. Ta có $y' = \dfrac{-m^2}{(x-m)^2}$, $x \neq m \Rightarrow y'(0) = -1$.

Vậy các đồ thị luôn luôn tiếp xúc nhau tại điểm cố định $M(0; -1)$, có tiếp tuyến chung $y = -x - 1$.

Bài toán 3. 45: Trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có những cặp điểm mà tại đó 2 tiếp tuyến cùng có hệ số góc p, chứng minh trung điểm của các đoạn thẳng nối từng cặp điểm đó là điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Tiếp tuyến với (C) có hệ số góc p, hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình:

$y' = p \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = p \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + p = 0$ (1)

$\Delta' = 9 - 3p > 0 \Leftrightarrow p < 3$.

Với $p < 3$ thì (C) có 2 tiếp tuyến song song với hệ số góc p.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), với 2 tiếp điểm M_1, M_2 thì trung điểm M_1M_2 có hoành độ: $x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow y_I = 0$

Vậy trung điểm M_1M_2 là điểm cố định $I(1; 0)$.

Bài toán 3. 46: Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng hai đường của họ (C_m): $y = \dfrac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$ đi qua.

Hướng dẫn giải

Giả sử $(x_0; y_0)$ là một điểm trong mặt phẳng mà có đúng hai đường cong (C_m) đi qua. Khi đó phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$y_0 = \dfrac{-x_0^2 + mx_0 - m^2}{x_0 - m} \Leftrightarrow m^2 - (x_0 + y_0)m + x_0(x_0 + y_0) = 0$

Điều kiện $\Delta > 0 \Leftrightarrow (x_0 + y_0)(y_0 - 3x_0) > 0$.

Vậy các điểm cần tìm có tọa độ $(x_0; y_0)$ thỏa mãn quan hệ

$$(x_0 + y_0)(y_0 - 3x_0) > 0.$$

Bài toán 3. 47: Tìm quỹ tích các tâm đối xứng của các đồ thị (C_m):

a) $y = \dfrac{(m+1)x + m}{x + m}$ b) $y = mx - 6m + 1 + \dfrac{5}{x - m}$

Hướng dẫn giải

a) D = **R** \ {–m}. Ta có $\lim\limits_{x\to(-m)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-m)^+} y = -\infty$ nên TCĐ: x = –m với m ≠ 0.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(m+1)x+m}{x+m} = m + 1$ nên TCN: y = m + 1

Giao điểm 2 tiệm cận I(–m; m+1), chuyển hệ trục theo phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$:

$\begin{cases} x = X - m \\ y = Y + m + 1 \end{cases}$. Thế vào (C_m) thì được:

$$Y + m + 1 = \frac{(m+1)(X-m)+m}{(X-m)+m} \Leftrightarrow Y = \frac{m^2}{X}$$

Ta có $Y = F(X) = \dfrac{m^2}{X}$ là hàm số lẻ nên (C) có tâm đối xứng I có toạ độ x = –m, y = m + 1. Khử tham số m thì quỹ tích các tâm đối xứng là đường thẳng d: y = –x + 1, x ≠ 0.

b) Đồ thị (C_m): $y = mx - 6m + 1 + \dfrac{5}{x-m}$, x ≠ m có TCĐ:

x = m và TCX: y = mx–6m + 1 nên giao điểm $I(m; m^2 - 6m+1)$.

Chuyển hệ trục bằng phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$ thì được tâm đối xứng I có toạ độ: x = m, $y = m^2 - 6m + 1$.

Khử tham số m thì quỹ tích các tâm đối xứng là parabol (P): $y = x^2 - 6x + 1$.

Bài toán 3. 48: Tìm quỹ tích của điểm:

a) Cực đại của đồ thị $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m - 5}{x-1}$

b) Cực tiểu của đồ thị $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3 - 3m$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R** \ {1}, $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m - 5}{x-1}$, Δ' = m – 4.

Điều kiện có 2 cực trị là Δ > 0, 1 – 2 – m + 5 ≠ 0 ⇔ m > 4, hoành độ cực trị là $x = 1 \pm \sqrt{m-4}$.

Lập BBT thì điểm cực đại A: $x = 1 - \sqrt{m-4}$, y = f(x).

Ta có $x = 1 - \sqrt{m-4} \Rightarrow m = 4 + (1 - x)^2$ thế vào y thì được quỹ tích các điểm cực đại thuộc (P): $y = -2x^2 + 6x - 10$, vì $x = 1 - \sqrt{m-4} < 1$ nên giới hạn là x < 1.

b) D = **R**, $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$.

Vì Δ' = 9 > 0, ∀m nên đồ thị luôn có CĐ, CT có hoành độ x = –m ±1.

Lập BBT thì điểm cực tiểu là B: x = 1 – m, y = f(1 – m) = –2.

Vậy quỹ tích của điểm cực tiểu là đường thẳng d: y = –2.

Bài toán 3. 49: Với các giá trị nào của m đường thẳng y = m – x cắt đồ thị $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó, tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn AB.

Hướng dẫn giải

PT hoành độ giao điểm: $\frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = m - x \Leftrightarrow 3x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0, x \neq 1.$

Vì x = 1 không phải là nghiệm nên đường thẳng cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$\Delta = (m + 2)^2 - 12(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 8 > 0$

$\Leftrightarrow m < 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > 4 + 2\sqrt{6}$. Hoành độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+2}{6}$.

Vì điểm M nằm trên đường thẳng y = m – x nên $y_M = m - x_M$.

Khử m, ta có $m = 6x_M - 2$ nên $y_M = 6x_M - 2 - x_M = 5x_M - 2$.

Vậy tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng y = 5x – 2.

Giới hạn: $m < 4 - 2\sqrt{6} \Rightarrow 6x - 2 < 4 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $m > 4 + 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow 6x - 2 > 4 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x > 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài toán 3. 50: Tìm quỹ tích các điểm thuộc trục tung mà từ đó vẽ ít nhất một tiếp tuyến với đồ thị $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có D = R \ {1}, $y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến tại điểm M có hoành độ $x_o \neq 1$.

$$y = \frac{x_o(x_o - 2)}{(x_o - 1)^2}(x - x_o) + \frac{x_o^2 - x_o + 1}{x_o - 1}.$$

Cho x = 0 thì $y = \frac{2x_o - 1}{(x_o - 1)^2}$

Xét $f(x) = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$ thì $f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$

Cho $f'(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	0	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Do đó $y \geq -1$, nên quỹ tích của điểm thuộc trục tung cần tìm là B(0; y) với $y \geq 1$.

Bài toán 3. 51: Tìm quỹ tích các điểm mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến đến (C): $y = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$ mà 2 tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi M(a; b), phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k: $y = k(x - a) + b$.

Điều kiện d tiếp xúc (C) là hệ sau có có nghiệm $x \neq 1$

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x-1} = k(x-a)+b \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x-1} = k(x-a)+b \\ x-1-\dfrac{1}{x-1} = k(x-1) \end{cases}$$

Do đó $\dfrac{2}{x-1} = k(1-a)+b \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{4}(k(1-a)+b)^2 = k$.

Ta có phương trình bậc 2 theo hệ số góc k:

$g(k) = (a-1)^2k^2 + 2((1-a)b+2)k + b^2 - 4 = 0,\ k \neq 1$.

Yêu cầu bài toán: $a \neq 1$, $k_1k_2 = -1$, $g(1) \neq 0$.

$\Leftrightarrow a \neq 1,\ b^2 - 4 = -(a-1)^2,\ (a-1)^2 + 2((1-a)b+2) + b^2 - 4 \neq 0$.

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 4,\ a \neq 1,\ a \neq b + 1$.

Vậy quỹ tích các điểm cần tìm là đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 4$ bỏ đi 4 điểm A(1; 2), B(1; –2), C($1+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) và D($1-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 3. 1: Tìm m để đường thẳng

a) $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

b) $y = m$ cắt đồ thị $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn

a) Phương trình hoành độ giao điểm $3x^2 + (1-m)x - 1 = 0$ $(x \neq 0)$.

Vì a, c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m.Hoành độ trung điểm I của AB: $x_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{m-1}{6}$.

Kết quả m = 1.

b) Kết quả $m = \dfrac{41}{25}$.

Bài tập 3. 2: Tìm m sao cho đường thẳng

a) $y = m(x-2) + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+4}{x}$ (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó.

b) $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 4.

Hướng dẫn

a) Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm cùng dấu.

Kết quả m > 1

b) Kết quả $m = \pm 2\sqrt{6}$.

Bài tập 3. 3: Cho hàm số $y = \dfrac{x}{4(x-3)}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và diện tích tam giác OAB là $\dfrac{3}{8}$.

Hướng dẫn

Các tiếp điểm $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $x_0 = \dfrac{3}{4}(1 \pm \sqrt{5})$

Bài tập 3. 4: Cho hàm số $y = f(x) = \cos^2 x + m\sin x$. Tìm m để hai tiếp tuyến tại $x = -\dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

Hướng dẫn

Điều kiện $f'(-\dfrac{\pi}{4}) = f'(\dfrac{\pi}{3})$. Kết quả $m = \dfrac{-(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{2}-1}$

Bài tập 3. 5: Tìm m để đồ thị $y = \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ luôn tiếp xúc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Hướng dẫn

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$.

Điều kiện 2 đồ thị y = f(x) và y = g(x) tiếp xúc là hệ phương trình:

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm. Kết quả $m \neq 1$.

Bài tập 3. 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

a) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$ tại điểm uốn

b) $y = -x^3 + 3x^2$ và có hệ số góc lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $y' = -4x^3 + 4x$, $y'' = -12x^2 + 4$.

Kết quả $y = -\dfrac{8}{3\sqrt{3}}x - \dfrac{7}{3}$ và $y = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}x - \dfrac{7}{3}$.

b) Kết quả $y = 3x - 1$.

Bài tập 3. 7: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc O.

Hướng dẫn

Điều kiện $f(-x) = -f(x)$ có nghiệm $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

Kết quả $m < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $m > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $m \neq \pm 1$.

Bài tập 3. 8: Tìm hai điểm trên 2 nhánh đồ thị (C): $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$ có khoảng cách bé nhất.

Hướng dẫn

Kết quả $A(1 + \sqrt[4]{5}; 2 + \sqrt[4]{5})$, $B(1 - \sqrt[4]{5}; 2 + \sqrt[4]{5})$.

Bài tập 3. 9: Tìm những điểm mà mọi đồ thị không đi qua:

$$y = x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 - 3m)x + (5 + 2m - m^2)$$

Hướng dẫn

Kết quả đường thẳng x = 1, bỏ điểm A(1; 7) và các điểm M(x; y) sao cho $(x - 1)[(x-1)(x-2)^2 - 4(x^3 + x^2 + 5 - y)] < 0$.

Bài tập 3. 10: Tìm điểm M trên đồ thị (H) : $y = \dfrac{4x - 3}{x - 3}$ có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận bé nhất.

Hướng dẫn

Kết quả M(0;1) hoặc M(6;7)

Bài tập 3. 11: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = x^3 + mx + m + 1$, tại giao điểm với trục Oy, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Hướng dẫn

Kết quả m = 1 hay $m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Chuyên đề 4: HÀM SỐ MŨ VÀ LÔGARIT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Luỹ thừa và căn thức:

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (với $a \neq 0$ và $n \in \mathbf{N}^*$)

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (với $a > 0$ và $r = \dfrac{m}{n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$)

$a^\alpha = \lim a^{r_n}$ (với $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $r_n \in \mathbf{Q}$ và $\lim r_n = \alpha$).

Khi n lẻ, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$ (với mọi a)

Khi n chẵn, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ (với $a \geq 0$).

- Biến đổi luỹ thừa: Với các số $a > 0$, $b > 0$, α và β tuỳ ý, ta có:
  $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
  $(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$; $(a : b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$
- So sánh: Nếu $0 < a < b$ thì: $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$, ; $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$.

Lôgarit:

- Lôgarit cơ số a: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($0 < a \neq 1$ và $b > 0$)
- Lôgarit cơ số 10: $\log_{10} b = \lg b$ hay $\log b$
- Lôgarit cơ số e: $\log_e b = \ln b$ ($e \approx 2{,}7183$)
- Tính chất: $\log_a 1 = 0$ và $\log_a a^b = b$ với $a > 0$, $a \neq 1$.
  $a^{\log_a b} = b$ với $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.
- Biến đổi lôgarit trong điều kiện xác định:
  $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$
  $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a\left(\dfrac{1}{c}\right) = -\log_a c$
  $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$ (với mọi α), $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ ($n \in \mathbf{N}^*$)
- Đổi cơ số trong điều kiện xác định:
  $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ hay $\log_a b . \log_b x = \log_a x$
  $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b a = 1$; $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

Hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$:

Liên tục trên tập xác định của nó

Đạo hàm $(x^{\alpha})' = ax^{\alpha-1}$, $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ (x > 0),\ \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}},\ \text{với } u = u(x) > 0.$$

Hàm số $y = x^{\alpha}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

Hàm số mũ:

Liên tục trên tập xác định **R**, nhận mọi giá trị thuộc $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases};\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đạo hàm: $(a^x)' = a^x\ln a$; $(e^x)' = e^x$;

$(a^u)' = a^u u'\ln a$; $(e^u)' = e^u u'$ với $u = u(x)$.

Đồng biến trên **R** nếu $a > 1$, nghịch biến trên **R** nếu $0 < a < 1$.

Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

Liên tục trên tập xác định $(0; +\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc **R**.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ -\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases};\ \lim_{x\to+0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đạo hàm $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$; $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$ với $u = u(x)$.

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a < 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

Giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 4. 1: Thực hiện phép tính

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}};\ B = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$$

Hướng dẫn giải

$$A = \left((3)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}}$$

$$= (3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{27} + 5 - 8 = \frac{1}{27} - 3 = -\frac{80}{27}.$$

$$B = \left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}.\left(2^{6}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(2^{3}\right)^{-\frac{4}{3}} + 1 = 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = 7 - \frac{1}{16} = \frac{111}{16}.$$

Bài toán 4. 2: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$P = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}}.\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}} + 1 \ ; \ Q = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$$

Hướng dẫn giải

$$P = \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+1)}.\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)}.\sqrt[4]{a} + 1 = \sqrt{a} - 1 + 1 = \sqrt{a}$$

$$Q = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)} = (1 + a) - (1 - a) = 2a.$$

Bài toán 4. 3: Trục căn ở mẫu

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{9} - 2} = \dfrac{(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})(3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4)}{1}$

b) Vì $5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}} = 5 - \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2$

nên $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}} = \dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1).\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}}}{2}.$

Bài toán 4. 4: Không dùng máy, tính giá trị đúng:

a) $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}$ b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $(3\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3})^2 = 18 + 12 \pm 12\sqrt{6} = 30 \pm 12\sqrt{6}$

nên $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6$

Cách khác: Đặt $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = x,\ x > 0$.

Ta có $x^2 = 30 + 2\sqrt{225 - 216} = 36$ nên chọn $x = 6$.

b) Ta có: $7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$

Tương tự $7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$

Do đó $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Cách khác: Đặt $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Ta có:

$x^3 = 7+5\sqrt{2} - (7-5\sqrt{2}) - 3(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}).(\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})})$

$= 10\sqrt{2} + 3(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}) = 10\sqrt{2} + 3x$.

Ta có phương trình:

$x^3 - 3x - 10\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 4. 5: Tính gọn

a) $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$.

b) $\sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{25+10\sqrt{24}+24} = \sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2}$

$= \sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

Tương tự: $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ (do $\sqrt{3} > \sqrt{2}$).

Suy ra $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

b) Đặt $M = \sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$, $N = \sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$

Ta có: $MN = \sqrt[4]{(2+\sqrt{5})^2 - 4(2+\sqrt{5})} = 1$

$M^4 + N^4 = 4 + 2\sqrt{5} \Rightarrow M^4 + N^2 + 2M^2N^2 = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$

$\Rightarrow M^2 + N^2 = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow M^2 + N^2 + 2MN = \sqrt{5} + 3 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2$

Vậy $\sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}} = M + N = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$.

Bài toán 4. 6:

a) Cho $x = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}} - 1\right)$. Tính $A = x^3 + x^2 + 1$

b) Tính $B = \dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{2k+\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}} + \ldots + \dfrac{200+\sqrt{9999}}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $a = \sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}}$,$b = \sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}}$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = \dfrac{23}{2}$, ab = 1 và 3x + 1 = a + b

Vì $(3x + 1)^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

$= 27(x^3 + x^2 + 1) + 3(3x + 1) - 29$ nên

$$A = \frac{(3x+1)^3 - 3(3x+1) + 29}{27} = \frac{(a+b)^3 - 3(a+b) + 29}{27}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - 3(a+b) + 29}{27} = \frac{\dfrac{23}{2} + 29}{27} = \frac{3}{2}$$

b) Với mọi k ≥ 2 thì

$$\frac{2k + \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} = \frac{\left[(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{k+1})^2 + \sqrt{(k-1)(k+1)}\right](\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})}{(\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})}$$

$$= \frac{\sqrt{(k+1)^3} - \sqrt{(k-1)^3}}{2}. \text{ Do đó}$$

$$B = \frac{1}{2}\Big[\ \sqrt{3^3} - \sqrt{1^3} + \sqrt{4^3} - \sqrt{2^3} + \sqrt{5^3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{6^3}$$

$$-\sqrt{4^3} + \ldots + \sqrt{101^3} - \sqrt{99^3}\ \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1 - \sqrt{2^3} + \sqrt{101^3} + \sqrt{100^3}\right] = \frac{999 + \sqrt{101^3} - \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{999 + 101\sqrt{101} - 2\sqrt{2}}{2}.$$

Bài toán 4. 7: Cho $sh(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$; $ch(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$; $th(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ với

a > 0, a ≠ 1. Chứng minh $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $th(2x) = \dfrac{2th(x)}{1 + th^2(x)}$

Hướng dẫn giải

Ta có $ch^2(x) - sh^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2 - a^{2x} - a^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Ta có: $1 + th^2(x) = 1 + \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}\right)^2 = \dfrac{2(a^{2x} + a^{-2x})}{a^{2x} + a^{-2x} + 2}$

nên $\dfrac{2th(x)}{1 + th^2(x)} = 2\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} . \dfrac{a^{2x} + a^{-2x} + 2}{2(a^{2x} + a^{-2x})}$

$= \dfrac{2(a^x - a^{-x})(a^x - a^{-x})^2}{2(a^x + a^{-x})(a^{2x} - a^{-2x})} = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}} = th(2x)$.

Bài toán 4. 8: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

a) Nếu $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a + b + c}$ thì $\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{c^n} = \dfrac{1}{a^n + b^n + c^n}$

b) Nếu $ax^n = by^n = cz^n$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ thì :

$\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a + b + c} - \dfrac{1}{c}$

$\Rightarrow$ (a + b).(a + b + c)c = abc – ab(a + b + c)$\Rightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) = 0

$\Rightarrow$ có 2 số đối nhau mà ta có n lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

b) VT = $\sqrt[n]{\dfrac{ax^n}{x} + \dfrac{by^n}{y} + \dfrac{cz^n}{z}} = \sqrt[n]{ax^n\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)} = \sqrt[n]{ax^n} = x\sqrt[n]{a} = y\sqrt[n]{b} = z\sqrt[n]{c}$

$\Rightarrow$ VT $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 9: Tính:

a) $3^{\log_3 18}; 3^{5\log_3 2}; \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\log_2 5}; \left(\dfrac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}$

b) $\dfrac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$

Hướng dẫn giải

a) $3^{\log_3 18} = 18$; $3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$

$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = (2^{-3})^{\log_2 5} = 2^{(-3)\log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-3}} = 5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

$\left(\dfrac{1.}{32}\right)^{\log_{0,5} 2} = \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2^5} = 2^5 = 32$.

b) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21} = \log 7\left(\frac{6}{14.21}\right) = \log_7 7^{-2} = -2$.

Bài toán 4. 10: Rút gọn các biểu thức:

a) A = $\log_3 2 . \log_4 3 . \log_6 5 . \log_7 6 . \log_8 7$

b) B = $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

Hướng dẫn giải

a) A = $\log_3 2.\log_4 3 . \log_5 4 . \log_6 5 . \log_7 6 . \log_8 7$

$$= \frac{\log 2}{\log 3}.\frac{\log 3}{\log 4}.\frac{\log 4}{\log 5}.\frac{\log 5}{\log 6}.\frac{\log 6}{\log 7}.\frac{\log 7}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 8} = \log_8 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}$$

b) Đặt $x = \sqrt{\log_a b} \Rightarrow \log_a b = x^2 \Rightarrow b = a^{x^2}$

Mặt khác $\log_b a = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\log_b a} = \frac{1}{x}$.

Do đó: $B = a^x - a^{x^2.\frac{1}{x}} = 0$.

Bài toán 4. 11:

a) Cho $\log_6 15 = x$, $\log_{12} 18 = y$, tính $\log_{25} 24$ theo x, y.

b) Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$, tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x = \frac{\log_2 3.5}{\log_2 2.3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$ và $y = \frac{\log_2 2.3^2}{\log_2 2^2.3} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$

Suy ra $\log_2 3 = \frac{2y-1}{2-y}$; $\log_2 5 = \frac{x+1-2y+xy}{2-y}$

Do đó $\log_{25} 24 = \frac{\log_2 2^3.3}{\log_2 5^2} = \frac{5-y}{2(x+1-2y+xy)}$.

b) $\log_{140} 63 = \log_{140}(3^2.7) = 2\log_{140} 3 + \log_{140} 7$

$$= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3(2^2.5.7)} + \frac{1}{\log_7(2^2.5.7)}$$

$$= \frac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1}$$

Ta có $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}$, $\log_7 5 = \log_7 2.\log_2 3.\log_3 5 = cab$;

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2.\log_2 3} = \frac{1}{ca}$$

Vậy $\log_{140}63 = \dfrac{2}{\dfrac{2}{a}+b+\dfrac{1}{ca}} + \dfrac{1}{2c+cab+1} = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Bài toán 4. 12: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn :

$$a^{\log_3 7} = 27,\ b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$$

Tính T = $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$T = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$$

$$= 27^{\log_3 7} + 49^{\log_7 11} + \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = 7^3 + 11^2 + 25^{\frac{1}{2}} = 469.$$

Bài toán 4. 13: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

b) $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} b} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$

Hướng dẫn giải

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_b a^{\log_c b}} = b^{\log_c b.\log_b a} = b^{\log_c a}$

b) VT = $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{2}{\log_a b} + \dfrac{3}{\log_a b} + \ldots + \dfrac{n}{\log_a b}$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) . \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$.

Bài toán 4. 14: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + c^2 = b^2$ thì $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$.

b) Nếu a, b, c lập cấp số nhân thì $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết: $a^2 = (b - c)(b + c)$. Xét a = 1: đúng.

Xét $a \neq 1$ thì $\log_a(b-c) + \log_a(b+c) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{b-c} a} + \dfrac{1}{\log_{b+c} a} = 2$

nên $\log_{b+c}a + \log_{b-c}a = 2\log_{b+c}a.\log_{b-c}a$

b) Ta có $\log_a d - \log_b d = \dfrac{1}{\log_d a} - \dfrac{1}{\log_d b} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{b}\right)}{(\log_d a)(\log_d b)}$

Tương tự: $\log_b d - \log_c d = \dfrac{1}{\log_d b} - \dfrac{1}{\log_d c} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{a}\right)}{(\log_d b)(\log_d c)}$

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \log_d\left(\dfrac{c}{b}\right) = \log_d\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Do đó $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_d c}{\log_d a} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Bài toán 4. 15: Cho x, y, z, a là các số thực dương đôi một khác nhau và khác 1. Chứng minh:

a) Nếu $\log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z$, $\log_a y = 1 + \log_a y.\log_a x$ thì :

$A = \log_{\frac{a}{x}} x.\log_{\frac{a}{y}} y.\log_{\frac{a}{z}} z.\log_x a.\log_y a.\log_z a = 1.$

b) Nếu $\dfrac{x(y+z-x)}{\log x} = \dfrac{y(z+x-y)}{\log y} = \dfrac{z(x+y-z)}{\log z}$ thì $x^y.y^x = y^z.z^y = z^x.x^z$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết, ta có : $\log_a x = 1 + \log_a x.\log_a z$

$\Rightarrow \log_a x = \dfrac{1}{1-\log_a z} = \dfrac{1}{\log_a \dfrac{a}{z}} = \log_{\frac{a}{z}} z$

Do đó: $\log_x a \log_{\frac{a}{z}} z = 1$. Tương tự $\log_y a \log_{\frac{a}{x}} x = 1$

Mà $\log_a y = 1 + \log_a y.\log_a z$, nên $\log_a y = 1 + \dfrac{\log_a y}{1-\log_a z} \Rightarrow 1 - \log_a z = \dfrac{\log_a y}{\log_a y - 1}$

$\Rightarrow \log_a z = 1 + \log_a y \cdot \log_a z$

Tương tự trên, ta cũng có $\log_z a \log_{\frac{a}{y}} y = 1$. Do đó

$A = \left(\log_{\frac{a}{x}} x.\log_y a\right).\left(\log_{\frac{a}{y}} y.\log_z a\right).\left(\log_{\frac{a}{z}} z.\log_x a\right) = 1$

b) Nếu một trong các số x + y – z, y + z – x, z + x – y bằng 0 thì cả ba số đều bằng 0 và dẫn đến x = y = z = 0, mâu thuẫn.

Do đó x + y – z, y + z – x, z + x – y khác 0.

Từ giả thiết thì: $\begin{cases} x(\log y).(y+z-x) = y(\log x).(z+x-y) \\ y(\log z).(z+x-y) = z(\log y).(x+y-z) \\ z(\log x).(x+y-z) = x(\log z).(y+z-x) \end{cases}$

Ta có: $x(\log y).(y+z-x) = y(\log x)(z+x-y)$

$\Rightarrow x\log y = y(\log x).\dfrac{z+x-y}{y+z-x}$

$\Rightarrow x\log y + y\log x = y(\log x).\left(\dfrac{z+x-y}{y+z-x}+1\right)$

$\Rightarrow x\log y + y\log x = y(\log x).\dfrac{2z}{z+x-y}$

Tương tự $y\log z + z\log y = z(\log y).\dfrac{2x}{z+x-y}$

Do đó: $x^y . y^x = y^z . z^y \Leftrightarrow x\log y + y\log x = y\log z + z\log y$

$\Leftrightarrow y\log x . .\dfrac{2z}{y+z-x} = z\log y.\dfrac{2x}{z+x-y}$.

$\Leftrightarrow y(\log x) . (z+x-y) = x(\log y)(y+z-x)$: đúng

Chứng minh tương tự: $y^z . z^y = z^x . x^z$

Bài toán 4. 16: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < c$. Chứng minh rằng: $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$.

Hướng dẫn giải

Vì $1 < a < b$ nên $\log_a b > 1 \Rightarrow \log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b) > 0$

Ta có $1 < a < c$ nên $\log_c a < 1$.

Suy ra $0 > \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$

Do đó $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a)$

$> \log_b(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_b(\log_c a)$

$= \log_b(\log_a b.\log_b c.\log_c a) = \log_b(1) = 0$

Bài toán 4. 17: Trong khai triển nhị thức $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$, $x > 0$.

a) Tìm hệ số của x^{13} b) Tìm số hạng không chứa x.

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát của $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x}\right)^{13}$ là:

$T_{k+1} = C_{13}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{13-k} \left(x\sqrt{x}\right)^k = C_{13}^k . x^{\frac{13k-52}{6}}$

a) Hệ số của x^{13} ứng với $\frac{13k-52}{16} = 13 \Leftrightarrow k = 10$ là:

$T_{11} = C_{13}^{10} = 286$.

b) Số hạng không chứa x ứng với $13k - 52 = 0 \Leftrightarrow k = 4$ là $T_5 = C_{13}^{4} = 715$.

Bài toán 4. 18: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, biết số hạng thứ tư bằng 200. Tìm x?

Hướng dẫn giải

ĐK: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{10}$. Ta có:

$$\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2(\lg x+1)}} + x^{\frac{1}{12}}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^{\frac{6-k}{2(\lg x+1)}}.x^{\frac{k}{12}}$$

Số hạng thứ 4 ứng với k = 3, theo giả thiết bằng 200 nên:

$$C_6^3 x^{\frac{3}{2(\lg x+1)}+\frac{1}{4}} = 200 \Leftrightarrow x^{\frac{7+\lg x}{4\lg x+4}} = 10 \Leftrightarrow \frac{7+\lg x}{4\lg x+4}\lg x = 1$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = 1\\ \lg x = -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10\\ x = 10^{-4}\end{array}\right. \text{ (Chọn)}.$$

Bài toán 4. 19: Chứng minh các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x} = \frac{a}{n}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.\ln a = \ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a e\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+ax+1}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+1)}=\frac{a}{n}$$

Bài toán 4. 20: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}-\dfrac{e^{5x}-1}{x}\right)=2-5=-3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+5^x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}}{\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}}=\dfrac{\ln 2+\ln 5}{\ln 3+\ln 5}=\dfrac{\ln 10}{\ln 15}$

Bài toán 4. 21: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{2\sin^2 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{3\ln(1+3x^2)}{3x^2}:\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]=\frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{\ln(1+6x)-\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right):\left(\dfrac{\ln(1+6x)}{x}-\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\right)$

$$=(\ln 6-\ln 3):(6-3)=\frac{1}{3}\ln 2.$$

Bài toán 4. 22: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\right]^{\frac{x}{x-3}}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=e^2$

Bài toán 4. 23: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ với $0<a, b\neq1$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-2x^2}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(-2\dfrac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\right):\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=-\dfrac{7}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{a^x+b^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}}\right]^{\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{a^x-1}{2x}+\frac{b^x-1}{2x}}=e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$

Vậy $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$

Bài toán 4. 24: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\cot x}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(x\ln x + x - 1)'} = \lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to0}(\cot x\ln(1+x)) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\tan x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln(1+x))'}{(\tan x)'} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\tan^2 x + 1} = 1$

nên $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to0} e^{\cot x\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x\to0}(\cot x\ln(1+x))} = e$

Bài toán 4. 25: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{\frac{5}{x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln(\cos x))'}{(2x^2)'} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\tan x}{4x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(-\tan x)'}{(4x)'}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-(\tan^2 x + 1)}{4} = -\frac{1}{4}$$

Nên $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}} = e^{-\frac{1}{4}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\ln(\cos 3x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(5\ln(\cos 3x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{15\sin 3x}{\cos 3x}}{1} = 0$

Nên $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{5\ln(\cos 3x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{5\ln(\cos 3x)}{x}} = e^0 = 1$

Bài toán 4. 26: Tính giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(\pi^{x-\pi})}{x-\pi}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{x}}=1$

Vậy: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{x-\pi}\ln(\pi^{x-\pi})=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{x-\pi}\ln\dfrac{\pi^x}{\pi^\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\pi^x-\ln\pi^\pi}{x-\pi}$

Đặt $g(x)=\ln\pi^x$ thì $g(\pi)=\ln\pi$ và $g'(x)=\ln\pi$

Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\pi^{x-\pi}}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)=\ln\pi$

Bài toán 4. 27: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y=x^2\sqrt{e^{4x}+1}$ b) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ c) $y=x^5-5^x+x^x$.

Hướng dẫn giải

a) $y'=2x\sqrt{e^{4x}+1}+\dfrac{2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}=\dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}$

b) $y'=\dfrac{(2^x\ln2+2^{-x}\ln2)(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x\ln2-2^{-x}\ln2)}{(2^x+2^{-x})^2}$

$=\dfrac{(2^x+2^{-x})^2-(2^x-2^{-x})^2}{(2^x+2^{-x})^2}\ln^2 2=\dfrac{4\ln^2 2}{(2^x+2^{-x})^2}$

c) Ta có $y=x^5-5^x+x^x=x^5-5^x+e^{x\ln x}$ nên

$y'=5x^4-5^x\ln5+e^{x\ln x}(\ln x+1)=5x^4-5^x\ln5+x^x(\ln x+1)$.

Bài toán 4. 28: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

b) $y=\log_{\sqrt3}(-x^2+5x+6)$ c) $y=\cos x.e^{2\tan x}$

Hướng dẫn giải

a) $y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

b) $y'=\dfrac{-2x+5}{(-x^2+5x+6)\ln\sqrt3}=\dfrac{-4x+10}{(-x^2+5x+6)\ln3}$

c) $y' = -\sin x.e^{2\tan x} + \frac{2}{\cos x}.e^{2\tan x} = e^{2\tan x}\left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right)$

Bài toán 4. 29: Chứng minh:

a) Nếu $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thì: $y''' - 13y' - 12y = 0$

b) Nếu $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ thì: $2y = xy' + \ln y'$

Hướng dẫn giải

a) $y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$, $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$, $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$ nên :

$y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0.$

b) $y' = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2(x+\sqrt{x^2+1})}$

$= x + \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = x + \sqrt{x^2+1}$

Do đó, ta có: $2y = x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$xy' = x^2 + x\sqrt{x^2+1}$ và $\ln y' = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$\Rightarrow 2y = xy' + \ln y'$: đpcm

Bài toán 4. 30: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số

a) $y = 5^{kx}$ b) $y = \ln(6x^2 - x - 1)$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = (k\ln5).5^{kx}$, $y'' = (k\ln5)^2.5^{kx}$

Ta chứng minh quy nạp: $y^{(n)} = (k\ln5)^n . 5^{kx}$

b) Với $x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > \frac{1}{2}$:

$y = \ln((2x-1)(3x+1)) = \ln|2x-1| + \ln|3x+1|$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3x+1}$.

Ta chứng minh quy nạp $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m m!a^m}{(ax+b)^{m+1}}$

Suy ra $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^{n-1}}{(2x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^{n-1}}{(3x+1)^n}$.

Bài toán 4. 31: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \frac{e^x}{x}$ b) $y = x^2.e^{-x}$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, đạt CT$(1; e)$

b) $D = \mathbb{R}$, $y' = (2x - x^2)e^x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đạt CĐ$(2; 4e^{-2})$, CT$(0; 0)$.

Bài toán 4. 32: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ b) $y = x - \ln(1 + x)$

Hướng dẫn giải

a) $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

Khi $x < -1$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

Khi $x > 1$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

b) $D = (-1; +\infty)$, $y' = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$y' < 0, \forall x \in (-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Ta có $y'' = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

Bài toán 4. 33: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh hàm số

$$f(x) = \frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{c^x + a^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x}$$ đồng biến với mọi x dương.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left(\dfrac{a^x}{b^x+c^x}\right)' = \dfrac{a^x.\ln a(b^x+c^x)-a^x(b^x.\ln b+c^x.\ln c)}{(b^x+c^x)^2}$

$= \dfrac{a^xb^x(\ln a-\ln b)+a^xc^x(\ln a-\ln c)}{(b^x+c^x)^2}$

Do đó $f'(x) = \sum\limits_{sym}\left(\dfrac{a^x}{b^x+c^x}\right)' = \sum\limits_{sym}\left(\dfrac{a^xb^x(\ln a-\ln b)+a^xc^x(\ln a-\ln c)}{(b^x+c^x)^2}\right)$

$= \sum\limits_{sym}\left(\dfrac{a^xb^x(\ln a-\ln b)}{(b^x+c^x)^2}-\dfrac{a^xb^x(\ln a-\ln b)}{(a^x+c^x)^2}\right)'$

$= \sum\limits_{sym} a^xb^x(\ln a-\ln b)\dfrac{(a^x-b^x)(a^x+b^x+2c^x)}{(a^x+c^x)^2(b^x+c^x)^2} > 0$

Bài toán 4. 34: So sánh các số:

a) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$ b) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ và $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293}$; $\sqrt[5]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841}$

Ta có 371293 > 279841 nên $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

b) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15} < 2+4 = 3+3 < \sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$

Bài toán 4. 35: So sánh các số:

a) 3^{600} và 5^{400} b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $3^{600} = \left(3^3\right)^{200} = 27^{200}$ và

$5^{400} = \left(5^2\right)^{200} = 25^{200}$. Vậy $3^{600} > 5^{400}$

b) Ta có $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$.

Ta có $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{2})^2 < \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 18 < 20$: đúng

Vì cơ số $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ nên $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} < 3^{-3\sqrt{2}}$.

Bài toán 4. 36: Hãy so sánh các số:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$ b) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\log_3 4 > 1$ và $\log_4 \frac{1}{3} < 0$, suy ra $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$

b) Ta có $\log_6 1,1 > 0$ nên $3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$) và $\log_6 0,99 < 0$ nên $7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$).

Suy ra $3^{\log_6 1,1} > 7\log_6 0,99$.

Bài toán 4. 37: Hãy so sánh các số:

a) $\log_8 27 > \log_9 25$ b) $\log_4 9 > \log_9 25$.

Hướng dẫn giải

a) $\log_8 27 > \log_8 25 > \log_9 25$

b) $\log_4 9 = \log_2 3 = \log_8 27 > \log_9 25$.

Bài toán 4. 38:

a) So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^{2^2}}}$

b) Chứng minh với n số 2, $n \geq 6$ thì $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} > 222\ldots2^{222\ldots2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta thấy rằng $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$

Mà $2^{10} = 1024 > 1000$, $2^6 = 64$

$\Rightarrow 2^{16} = 2^{10}.2^6 > 64000$ nên $2^{2^{2^{2^2}}} > 2^{64000}$

Mặt khác: $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000} < 1000.1000^{1000} = 1000^{1001}$

$< (2^{10})^{1001} = 2^{10010} < 2^{64000}$

Từ đó suy ra $2^{2^{2^{2^2}}} > 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$

b) Ta chứng minh quy nạp $2^{n-2} > n$, $\forall n \geq 6$

Với n số 2, đặt $a_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, $b_n = 222\ldots2^{222\ldots2}$

Ta có $222\ldots2 < 10^n < 2^{4n}$ nên

$b_n < \left(2^{4n}\right)^{2^{4n}} = 2^{4n.2^{4n}} < 2^{2^{5n}}$

Và mặt khác $a_{n-2} - 5n > 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 8.2^{n-2} > 2^{2^{n-2}} - 2^{n+1} > 0$

Nên $a_n = 2^{2^{a_{n-2}}} > 2^{2^{5n}} > b_n$. Ta có đpcm.

Bài toán 4. 39: Chứng minh:

a) $\log_n(n + 1) > \log_{n+1}(n + 2)$ với mọi số nguyên $n > 1$.

b) $a^m + b^m < c^m$, nếu $m > 1$, $a + b = c$ với $a > 0$, $b > 0$.

Hướng dẫn giải

a) $A = \log_n(n + 1) = \log_n n(1 + \frac{1}{n}) = 1 + \log_n(1 + \frac{1}{n})$

$B = \log_{n+1}(n + 2) = \log_{n+1}(n + 1)(1 + \frac{1}{n+1}) = 1 + \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$

Ta có $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \log_n(1 + \frac{1}{n}) > \log_n(1 + \frac{1}{n+1})$

và $\log_n(1 + \frac{1}{n+1}) > \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$

$\Rightarrow \log_n(1 + \frac{1}{n}) > \log_{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$. Do đó $A > B$.

b) Ta có $a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1$

Mà $a + b = c$, $a > 0$, $b > 0$ nên $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$

Suy ra với $m > 1$ thì $\left(\frac{a}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^1$; $\left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{b}{c}\right)^1$

Từ đó ta có : $\left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$.

Bài toán 4. 40:

a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $a^a.b^b.c^c \geq a^b.b^c.c^a$.

b) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn. Chứng minh

$$(b^2 + b^{\frac{2}{3}}) + (c^2 + c^{\frac{2}{3}}) > a^2 + a^{\frac{2}{3}}.$$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

– Xét $a \geq b \geq c$: BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b}.b^{b-c} \geq c^{a-c}$

Vì $a \geq b \geq c > 0$ nên $a^{a-b}.b^{b-c} \geq c^{a-b}.b^{b-c} = c^{a-c}$

– Xét $a \geq c \geq b$: BĐT $\Leftrightarrow a^{a-b} \geq b^{c-b}.c^{a-c}$

Vì $a \geq c \geq b > 0$ nên $b^{c-b}.c^{a-c} \leq a^{c-b}.a^{a-c} = a^{a-b}$

b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là cạnh lớn nhất trong các cạnh của tam giác. Khi đó, ta có $a^2 > b^2 > c^2$, $a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$ nên:

$$(a^2 + a^{\frac{2}{3}}) + (b^2 + b^{\frac{2}{3}}) > c^2 + c^{\frac{2}{3}} \text{ và } (a^2 + a^{\frac{2}{3}}) + (c^2 + c^{\frac{2}{3}}) > b^2 + b^{\frac{2}{3}}$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn nên $b^2 + c^2 > a^2$

$x = a^{\frac{1}{3}}$; $y = b^{\frac{1}{3}}$; $z = c^{\frac{1}{3}}$ thì $y^3 + z^3 > x^3$

Ta có: $(y^2 + z^2)^3 = y^6 + z^6 + 3y^2z^2(y^2 + z^2)$

$> y^6 + z^6 + 2y^3z^3 = (y^3 + z^3)^2 > (x^3)^2 = x^6$

Suy ra $y^2 + z^2 > x^2$ hay $b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 4. 41:

a) Cho a, b, c > 0. Chứng minh $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a.b^b.c^c$

b) Cho 4 số x, y, z, t $\in (\frac{1}{4}; 1)$. Chứng minh:

$$\log_x\left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y\left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z\left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t\left(x - \frac{1}{4}\right) \ge 8.$$

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow \log(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le \log(a^a.b^b.c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)\log(abc) \le 3(\log a^a + \log b^b + \log c^c)$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(\log a + \log b + \log c) \le 3(a\log a + b\log b + c\log c)$

$\Leftrightarrow (a-b)(\log a-\log b) + (b-c)(\log b-\log c) + (c-a)(\log c-\log a) \ge 0.$

BĐT này đúng vì cơ số 10 > 1 nên $x \ge y > 0 \Rightarrow \log x \ge \log y$ hoặc

$0 < x \le y \Rightarrow \log x \le \log y$ nên $(x - y)(\log x - \log y) \ge 0, \forall x > 0, \forall y > 0.$

b)Ta có: $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a - \frac{1}{4} \le a^2$ với mọi a.

Và vì $\frac{1}{4} < x, y, z, t < 1$ nên hàm nghịch biến, do đó:

$VT \ge \log_x y^2 + \log_y z^2 + \log_z t^2 + \log_t x^2$

$= 2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x)$

$\ge 8.\sqrt[4]{\log_x y.\log_y z.\log_z t.\log_t x} = 8\sqrt[4]{1} = 8$

Bài toán 4. 42: Chứng minh:

a) $n^{n+1} > (n + 1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$

b) $\sqrt[n]{x^n + y^n} \ge \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$ với n nguyên, $n \ge 2$ và $x, y \ge 0$.

Hướng dẫn giải

a)Với $n \in \mathbb{N}, n > 3$, bất đẳng thức tương đương

$(n + 1)\ln n > n\ln(n + 1) \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{\ln(n+1)} > \dfrac{n}{\ln n}$

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ trên $(3; +\infty)$ thì $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$.

Do đó f đồng biến trên $(3; +\infty)$ nên: $n + 1 > n > 3 \Rightarrow f(n + 1) > f(n)$ (đpcm)

b) Với x = 0 hoặc y = 0, bất đẳng thức đúng.

Với xy > 0, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}}$. Xét $f(t) = \dfrac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\,\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
f'(t)	0	+	0	–	
f(t)	1	↗		↘	1

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 43: Chứng minh các bất đẳng thức sau với mọi x > 0.

a) $e^x > x + 1$　　　　b) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

c) $\ln(1 + x) > x - \dfrac{x^2}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 > 0$, $\forall x > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Xét $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - x - 1$, $x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - x - 1$.

Theo câu a) thì $f'(x) > 0$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

c) BĐT: $\ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0$, $\forall x > 0$

Xét $f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$, $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$

và f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm

Bài toán 4. 44: Chứng minh:

a) $4^{\sin x} + 2^{\tan x} > \sqrt{2^{3x+2}}$, $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

b) $e^x > \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ với mọi x

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$4^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{4^{\sin x}.2^{\tan x}} = \sqrt{2^{2\sin x + \tan x + 2}}$

Ta cần chứng minh: $2^{2\sin x + \tan x + 2} > 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2\sin x + \tan x > 3x$

Xét $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 2\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3 > 0$

nên f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm

b) Nếu $x \leq 0$ thì BĐT đúng. Nếu $x > 0$, vì $x^2 - 2x + 2 > 0$, $\forall x$ nên

BĐT $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > \frac{x}{e^x}$. Xét $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x > 0$

$f'(x) = 2x - 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lập BBT thì $\min f(x) = f(1) = 1$

Xét $g(x) = \frac{x}{e^x}$, $x > 0$, $g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Lập BBT thì $\max g(x) = g(x) = \frac{1}{e}$. Vì $\min f(x) > \max g(x) \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 4. 45: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}$, $\forall x$

b) $e^x - e^{-x} \geq 2\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\forall x \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2}$, D = R.

$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$, $\forall x$ nên $f'(x)$ đồng biến trên R, ta có:

$f'(x) < f'(0) = 0$, $\forall x < 0$; $f'(x) > f'(0) = 0$, $\forall x > 0$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	$-$	0	+
f(x)	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vậy $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0, \forall x$

b) Xét hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, D = [0; +∞)

$f'(x) = e^x + e^{-x} - \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vì $e^x + e^{-x} > 2$ và $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}} < 2$ nên $f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Do đó f(x) đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 46: Cho $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4$$

Hướng dẫn giải

Do $x \neq y$, không giảm tổng quát, giả sử $y > x$. Xét hàm số

$f(t) = \dfrac{t}{1-t} - 4t$, với $0 < t < 1 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{(2t-1)^2}{t(1-t))} \geq 0$

Vậy f(t) là hàm đồng biến trên (0; 1) mà $y > x$ nên ta có $f(y) > f(x)$ hay

$\ln\dfrac{y}{1-y} - 4y > \ln\dfrac{x}{1-x} - 4x$ và do $y - x > 0$ nên suy ra :

$\dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x}\right) > 4 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 47: Cho $a > b > 0$. Chứng minh $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$

Hướng dẫn giải

Với $a > b > 0$, bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{4^a+1}{2^a}\right)^b \leq \left(\frac{4^b+1}{2^b}\right)^b \leq (4^a+1)^b \leq (4^b+1)^a$$

$\Leftrightarrow b.\ln(4^a + 1) \leq a.\ln(4^b + 1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \dfrac{\ln(1+4^b)}{b}$

Xét $f(x) = \dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{4^x \ln 4}{1+4^x}.x - \ln(1+4^x)\right) = \frac{1}{x^2}(4^x.\ln 4^x - (1+4^x).\ln(1+4^x)) < 0$$

nên f nghịch biến: $a > b > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$: đpcm

Bài toán 4. 48: Cho $p > 1$, $q > 1$ thoả $p + q = pq$ và $a, b > 0$.

Chứng minh $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$ với $a > 0$.

$$f'(a) = a^{p-1} - b,\ f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^{p-1} = b \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}}$$

Mà $p + q = pq \Rightarrow (p-1)(q-1) = 1$ nên $a = b^{q-1}$

Lập BBT thì $\min f = f(b^{q-1}) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 49: Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$e^{ax+by} \le a.e^x + b.e^y,\ \forall x,\ \forall y.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $b = 1 - a$ do đó $0 < a < 1$ nên BĐT:

$e^{ax+(1-a)y} \le a.e^x + (1-a)e^y$

$\Leftrightarrow e^y . e^{a(x-y)} \le e^y + a(e^{x-y} - 1)$ $e^{a(x-y)} - a.e^{x-y} + a - 1 \le 0.$

Xét $f(t) = e^{at} - a.e^t + a - 1$, $t \in \mathbb{R}$. $f'(t) = a(e^{at} - e^t)$, $f'(t) \Leftrightarrow t = 0$.

BBT

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	0	↘	

Suy ra $f(t) \le 0$, $\forall t \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4. 50: Cho a, b, c > 0. Chứng minh

a) $a^b + b^a > 1$

b) $(a + b)^c + (b + c)^a + (c\ \ a)^b > 2.$

Hướng dẫn giải

a) Nếu $a \ge 1$ hoặc $b \ge 1$ thì $a^b + b^a > 1$

Nếu $0 < a$, $b < 1$. Xét $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(\frac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} - 1\right) < 0.$$

nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow (1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$ (*)

Áp dụng $a = \frac{1}{1+x}, x > 0 \Rightarrow a^b > \frac{1}{1+xb} = \frac{a+1}{a+b+ab}$.

Tương tự: $b^a > \frac{1}{1+ya} = \frac{b+1}{a+b+ab} \Rightarrow a^b + b^a > 1$.

b) Trong 3 số a + b, b + c, c + a nếu có một số, chẳng hạn $a + b \geq 1$ thì $(a+b)^c \geq 1$ và $(b+c)^a + (c+a)^b > b^a + a^b > 1$ suy ra đpcm. Còn nếu cả 3 số đó bé hơn 1 thì dùng bất đẳng thức (*).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 4. 1: Thực hiện phép tính

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} \qquad B = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$$

Hướng dẫn

Dùng 5 quy tắc về mũ. Kết quả A = 12, B = 10.

Bài tập 4. 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2} . \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{a}{x}}$ với a>0, x>0, a ≠x.

b) $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, với a, b > 0, $a^2 \geq b$.

Hướng dẫn

a) Kết quả $R = \sqrt{ax}\left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}}\right) = \sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})$

b) Kết quả $S = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Bài tập 4. 3: Tính gọn

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$

Hướng dẫn

a) Viết bình phương đủ trong căn thức hay đặt ẩn phụ VT rồi bình phương. Kết quả $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

b) Viết lập phương đủ trong căn thức hay đặt ẩn phụ VT rồi lập phương. Kết quả $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Bài tập 4. 4: Trong khai triển nhị thức: $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21}$, tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

Hướng dẫn

Dùng nhị thức Niutơn: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Kết quả $C_{21}^9 = \frac{21!}{9!12!} = 293\ 930$.

Bài tập 4. 5:

a) Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$.

b) Tính ln6,25 theo c = ln2, d = ln5.

Hướng dẫn

a) Đưa về cơ số 3. Kết quả 2a + 2b – 2.

b) Đưa về cơ số e. Kết quả 2d – 2c.

Bài tập 4. 6: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$

b) Nếu $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$, thì $ab + 5(a - b) = 1$.

Hướng dẫn

a) $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a + b)^2 = 9ab$ hoặc biến đổi tương đương điều cần chứng minh.

b) Đưa về cơ số 2: $\log_2 3 = \frac{2a-1}{2-a}$ và $\log_2 3 = \frac{3b-1}{3-b}$.

Bài tập 4. 7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{e^{2x} - 7^x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}}{\tan x}$

Hướng dẫn

a) Chia tử và mẫu thức cho x. Kết quả $\frac{4}{3 - \ln 7}$

b) Thêm bớt 1 trên tử thức rồi chia tử và mẫu thức cho x. Kết quả $\frac{5}{12}$

Bài tập 4. 8: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2+1}.\log_3 x^2$ b) $y = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

Hướng dẫn

a) Kết quả $y' = \frac{x\log_3 x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x}\ln 3$

b) Kết quả $y' = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

Bài tập 4. 9: Cho f liên tục trên **R**: $\begin{cases} f(x) \ge 1+x \\ f(x+y) \ge f(x).f(y) \end{cases}$, $\forall x,y \in$ **R.** Tính f '(x).

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa và kẹp giới hạn. Kết quả f '(x) = e^x.

Bài tập 4. 10: So sánh các số:

a) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$ b) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{7}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$

Hướng dẫn

a) So trung gian. Kết quả $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 1 + \sqrt[3]{27} = 4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{63}$

b) Kết quả $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} < \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$

Bài tập 4. 11:

a) Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

$\log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$

b) Cho 3 số không âm x, y, z thoả mãn x + y + z = 3. Tìm GTNN của

$$K = \frac{1}{4+2\ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2\ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2\ln(1+z)-x}$$

Hướng dẫn

a) Đặt a = $\log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ và b = $\dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$

Suy ra $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^a$ và $\sqrt{5\sqrt{7}} = 10^b$.

Kết quả $\log\dfrac{5+\sqrt{7}}{2} > \dfrac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

b) Dùng bất đẳng thức AM–GM.

Chuyên đề 5: PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương pháp chung:

– Đưa về cùng một cơ số, đặt ẩn phụ, biến đổi tích,...

– Lôgarit hoá, mũ hoá

– Sử dụng bất đẳng thức, tính đơn điệu của hàm số, định lý Lagrange,...

Phương trình mũ và lôgarit

– Dạng: $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm

Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

– Dạng: $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$

Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

• $a^{f(x)} = a^{g(x)}\ (a > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a \neq 1,\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

• $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a>0, a\neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ hay } g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Bất phương trình mũ và lôgarit

$a^x < m \Leftrightarrow x < \log_a m$ (với $m > 0$ và $a > 1$)

$a^x < m \Leftrightarrow x > \log_a m$ (với $m > 0$ và $0 < a < 1$)

$\log_a x < m \Leftrightarrow 0 < x < a^m$ (với $a > 1$)

$\log_a x < m \Leftrightarrow x > a^m$ (với $0 < a < 1$).

Nếu $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Nếu $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Nếu $a > 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

Hệ phương trình mũ và lôgarit

Việc giải hệ phương trình mũ và lôgarit về cơ bản cũng giống như giải các hệ phương trình đại số như rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ, biến đổi tích, đánh giá, tính chất đơn điệu của hàm số,....phối hợp với các biến đổi về biểu thức mũ và lôgarit, mũ hoá, lôgrarit hoá.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 5. 1: Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29 = 0$ b) $27^x + 12^x = 2.8^x$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = 3^x$, $t > 0$ thì PT: $3t + \dfrac{18}{t} = 29$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 9$ hoặc $t = \dfrac{2}{3}$

Giải ra nghiệm $x = 2$ hoặc $c = \log_3 2 - 1$.

b) Chia 2 vế cho $8^x > 0$ thì PT: $\left(\dfrac{27}{8}\right)^x + \left(\dfrac{12}{8}\right)^x = 2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$.

PT: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Bài toán 5. 2: Giải các phương trình sau:

a) $3^{4^x} = 4^{3^x}$ b) $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$.

Hướng dẫn giải

a) Hai vế đều dương, lôgarit hoá theo cơ số 10:

$4^x\log 3 = 3^x\log 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{\log 4}{\log 3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)$

b) PT: $3^x . 2^{\frac{3x}{x+1}} = 3^2 . 2^2 \Leftrightarrow 3^{x-2} . 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$

$\Leftrightarrow \left(3.2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ hoặc $3.2^{\frac{1}{x+1}} = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $2^{\frac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -1 - \log_3 2$.

Bài toán 5. 3: Giải các phương trình sau:

a) $(\cos 72^o)^x + (\cos 36^o)^x = 3.2^{-x}$ b) $e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \tan x$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình: $(2\cos 72^o)^x + (2\cos 36^o)^x = 3$

Vì: $2\cos 72^o . 2\cos 36^o = \dfrac{2\sin 36^o.\cos 36^o.\cos 72^o}{\sin 36^o} = 1$

Đặt $t = (2\cos72^o)^x$, $t > 0$ thì PT: $t + \frac{1}{t} = 3$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right)^2$$

Ta có: $2\cos72^o = 2\sin18^o = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ suy ra nghiệm $x = \pm 2$.

b) Điều kiện $\cos x \neq 0$, vì $\sin x = 0$ không thoả mãn nên PT:

$$e^{\frac{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\sqrt{2}\sin x}{2}}}{\sin x} = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}\cos x}{2}}}{\cos x}$$

Đặt $u = \sin x$, $v = \cos x$, $u, v \in (-1; 1)$, $u.v > 0$

PT: $\frac{e^{\frac{\sqrt{2}u}{2}}}{u} = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}v}{2}}}{v}$. Xét $y = f(t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{t}$, với $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

$y' = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}t}{2} - 1\right)e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{t^2} = \frac{(\sqrt{2}t - 2)e^{\frac{\sqrt{2}t}{2}}}{2t^2} < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Vì u, v cùng dấu nên u, v cùng thuộc một khoảng $(-1; 0)$ hoặc $(0; 1)$ do đó PT:

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (chọn)}.$$

Bài toán 5. 4: Giải các phương trình sau:

a) $x.2^x = x(3 - x) + 2(2^x - 1)$ b) $2^x = x + 1$.

Hướng dẫn giải

a) PT: $x.2^x - x(3 - x) - 2.2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(x - 2) + x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x(x - 2) + (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2^x + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ hoặc $2^x + x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 1$.

(Vì $f(x) = 2^x + x$ đồng biến trên **R** và $f(0) = 1$).

b) PT = $2^x - x - 1 = 0$. Xét $f(x) = 2^x - x - 1$, D = **R**.

Ta có: $f'(x) = 2^x . \ln2 - 1$, $f''(x) = 2^x.\ln^2 x > 0, \forall x$

Vậy $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà $f(0) = f(1) = 0$ nên tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

Bài toán 5. 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{5^x - 2x} - \sqrt{2x + 1} + 4x.5^x + 4x + 1 = 5^{2x}$

b) $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương với

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^{\log_2 x}+x\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\right]=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_2 x}+x\left(\sqrt{3}+1\right)^{2\log_2 x}=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x+x\left(\sqrt{3}+1\right)^{2\log_2 x}=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{2\log_2 x}+1\right]=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2\log_2 x}+1}{\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}}$$

Ta có: $\frac{a^2+1}{a}=\frac{b^2+1}{b} \Leftrightarrow (a-b)(ab-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ ab=1 \end{array}\right.$

– Nếu $x=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2 x=\log_2(\sqrt{3}+1).\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1$: chọn

– Nếu $x\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}=1 \Leftrightarrow \log_2 x+\log_2 x.\log_2(\sqrt{3}+1)=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x[1+\log_2(\sqrt{3}+1)]=0 \Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1$: chọn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Cách khác: đặt $t=\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}$ thì $(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x}=\frac{x}{t}$

Phương trình: $xt^2-(x^2+1)t+x=0$.

b) PT: $(2^{2x}-2.2^x+1)+2(2^x-1)\sin(2^x+y-1)+1=0$

$\Leftrightarrow (2^x-1)^2+2(2^x-1)\sin(2^x+y-1)+\sin^2(2^x+y-1)$
$+\cos^2(2^x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow [2^x-1+\sin(2^x+y-1)]^2+\cos^2(2^x+y-1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x+\sin(2^x+y-1)=1 \\ \cos(2^x+y-1)=0 \end{cases}$$

Vì $\cos(2^x+y-1)=0 \Rightarrow \sin(2^x+y-1)=\pm 1$.

– Nếu $\sin(2^x+y-1)=1$ thì $2^x=0$, vô nghiệm

– Nếu $\sin(2^x+y-1)=-1$ thì $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$

Suy ra $\sin(y+1)=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}-1+k2\pi$.

Vậy nghiệm là: $x=1$, $y=-\frac{\pi}{2}-1+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 5. 6: Giải các phương trình

a) $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3.4^{\cos x}$

b) $(2+\sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2+\sqrt{2})^{\cos^2 x} + (2-\sqrt{2})^{\cos 2x} = \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\cos x = y$; $-1 \le y \le 1$. Phương trình:

$(1+y)(2+4^y) = 3.4^y$ hay $f(y) = 0$ với $f(y) = \dfrac{3.4^y}{2+4^y} - y - 1 = 0$

Ta có: $f'(y) = \dfrac{6.\ln 4.4^y}{(2+4^y)^2} - 1, f'(y) = 0 \Leftrightarrow 6\ln 4.4^y = (2 + 4^y)^2$

Đây là phương trình bậc hai theo 4^y nên có không quá hai nghiệm. Theo định lý Rolle thì phương trình $f(y) = 0$ có không quá ba nghiệm. Mặt khác ta thấy $y = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$ là ba nghiệm của $f(y) = 0$.

Suy ra PT đã cho có nghiệm $x = 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in Z)$.

b) PT: $(2+\sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2+\sqrt{2})^{\cos^2 x} = \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x} - (2-\sqrt{2})^{\cos 2x}$

– Nếu $\cos 2x > 0 \Rightarrow \cos^2 x > \sin^2 x$, do $2 + \sqrt{2} > 1$ nên

$VT = (2+\sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2+\sqrt{2})^{\cos^2 x} < 0$

$VP = \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x} - (2-\sqrt{2})^{\cos 2x} > 0$: loại .

– Nếu $\cos 2x < 0$, lập luận tương tự trường hợp trên: loại.

– Nếu $\cos 2x = 0$ thì PT được thỏa mãn và phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

Bài toán 5. 7: Giải các phương trình sau:

a) $5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{6^x} - 4x^3 + 2x^2 - x + 16$

b) $2^x + 6^x = 3^x + 5^x$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = 5^x + 4^x + 3^x + 2^x - \left(\dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{6^x}\right) + 4x^3 - 2x^2 + x - 16, x \in R$

thì $f'(x) = 5^x\ln5 + 4^x\ln4 + 3^x\ln3 + 2^x\ln2 + \left(\frac{\ln2}{2^x}+\frac{\ln3}{3^x}+\frac{\ln6}{6^x}\right) + 12x^2 - 4x + 1 > 0$

Nên f đồng biến và $f(1) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) Ta có $2^x + 6^x = 3^x + 5^x \Leftrightarrow 6^x - 5^x = 3^x - 2^x$

Gọi a là nghiệm của phương trình trên thì có $3^a - 2^a = 6^a - 5^a$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^a - t^a$, khi đó $f(t)$ liên tục trên [2;5] và

$f'(t) = a[(t+1)^{a-1} - t^{a-1}]$. Ta có $f(2)=f(5)$

Áp dụng định lý Rolle trên [2;5] thì tồn tại số c thuộc (2;5) sao cho $f'(c) = 0$ do đó $a[(c+1)^{a-1} - c^{a-1}] = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $(c+1)^{a-1} = c^{a-1}$

Vì c thuộc (2;5) nên $a = 0$ hoặc $a = 1$

Thử lại đúng, vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Bài toán 5. 8: Giải các phương trình:

a) $4^{\ln x+1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2+2} = 0$ b) $3^{\log_4 x+\frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x > 0$, PT: $4.2^{2\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} = 0$

Chia cả hai vế cho $3^{2\ln x}$, đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x}$ thì được PT:

$4t^2 - t - 18 = 0$. Chọn nghiệm $t = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

b) ĐK: $x > 0$, đặt $t = \log_3 x$ thì $x = 4^t$

PT: $\sqrt{3}\,.\,3^t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\,3^t = 2^t \Leftrightarrow 4.3^t = \sqrt{3}\,.\,2^t$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}$. Vậy $x = 4^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

Bài toán 5. 9: Giải các phương trình:

a) $\log_4[(x + 2)(x + 3)] + \frac{1}{2}\log_2\frac{x-2}{x+3} = 2$

b) $\frac{\log_3 x}{\log_9 3x} = \frac{\log_{27} 9x}{\log_{81} 27x}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $\begin{cases}(x+2)(x+3) > 0\\ \frac{x-2}{x+3} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < -3\\ x > 2\end{array}\right.$

PT: $\log_4\left[(x+2)(x+3)\dfrac{x-2}{x+3}\right] = \log_4 16 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 16.$

$\Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$ (chọn).

b) ĐK: $x > 0,\ x \neq \dfrac{1}{3},\ x \neq \dfrac{1}{27}$, đặt $t = \log_3 x$ thì PT:

$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{2(2+t)}{3(3+t)} \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -4$.

Suy ra nghiệm $x = 3$ hoặc $x = \dfrac{1}{81}$.

Bài toán 5. 10: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{1-x}(2x) + \log_x(2-2x) = 0$ b) $3^{\log_2(3^x-1)} = 2^{\log_3(2^x+1)} + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $0 < x < 1$. Đặt $a = \log_2(1-x)$, $b = \log_2 x$. Ta có

$a + b = \log_2(1-x) + \log_2 x = \log_2[x(1-x) \leq \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2$

$\Rightarrow a + b + 2 \leq 0$

PT: $\dfrac{\log_2 2 + \log_2 x}{\log_2(1-x)} + \dfrac{\log_2 2 + \log_2(1-x)}{\log_2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+b}{a} + \dfrac{1+a}{b} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + b = 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = a + b + \ \leq 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 0$ và $(b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = -1$

$\Leftrightarrow \log_2(1-x) = \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Vậy nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Điều kiện $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Đặt $a = \log_2 3$, $y = 2^x$

PT: $\left(3^x - 1\right)^{\log_2 3} = (2^x + 1)^{\log_3 2+1}$

$\Leftrightarrow (y^a - 1)^a = (y+1)^{\frac{1}{a}} + 1 \Leftrightarrow ((y^a-1)^a - 1)^a - 1 = y$

Xét hàm số $f(t) = t^a - 1$, $t > 0$ thì PT trên là $f(f(f(y))) = y$

Khảo sát hàm số $f(t) - t = t^a - t - 1$, $t > 0$ ta suy ra được

$f(t) > t,\ \forall t > 2;\ f(t) < t,\ 0 < t < 2;\ f(2) = 2$

Suy ra phương trình $f(f(f(y))) = y$ có nghiệm duy nhất là $y = 2$, suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

Bài toán 5. 11: Giải các phương trình

a) $\log_3 x + \log_4(2x - 2) = 2$ b) $\log_3(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}) = \dfrac{2}{3}\log_2\sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x > 1$. Ta có $f(x) = \log_3 x + \log_4(2x - 2)$ là hàm đồng biến nên $f(x) > f(3) = 2$ với $x > 3$ và $f(x) < f(3) = 2$ với $1 < x < 3$.

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

b) ĐK: $x > 0$, đặt $x = 2^{12y}$ thì PT:

$$\log_3(1 + 2^{6y} + 2^{4y}) = \frac{2}{3}\log_2 2^{6y} \Leftrightarrow \log_3(1 + 2^{6y} + 2^{4y}) = 4y$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^{6y} + 2^{4y} = 3^{4y} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{81}\right)^y + \left(\frac{64}{81}\right)^y + \left(\frac{16}{81}\right)^y = 1.$$

Ta có $y = 1$ thoả mãn và vì hàm số

$f(y) = \left(\dfrac{1}{81}\right)^y + \left(\dfrac{64}{81}\right)^y + \left(\dfrac{16}{81}\right)^y$ nghịch biến trên **R** nên $y = 1$ là nghiệm duy nhất, do đó PT cho có nghiệm $x = 2^{12}$.

Bài toán 5. 12: các phương trình sau:

a) $\log_2(x - \sqrt{x^2-1}) + \log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2-1})$

b) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_4(\log_3(\log_2 x))$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện là $x \geq 1$. Đặt $t = x - \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{t}$

PT: $\log_2 t + \log_3\dfrac{1}{t} = \log_6\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow \log_2 t - \log_3 t + \log_6 t = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 t(1 - \log_3 2 + \log_6 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2 t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Do đó: $x - \sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = 1$: chọn. Vậy nghiệm $x = 1$.

b) Điều kiện $x > 1$. Phương trình tương đương với

$\log_4(\log_3(\log_4 x))^2 = \log_4(\log_3(\log_2 x))$

$\Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 = \log_3(\log_2 x) \Leftrightarrow (\log_3)(\log_4 x))^2 = \log_3(2\log_4 x)$

$\Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 - \log_3(\log_4 x) - \log_3 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\log_3 2}}{2}$. Từ đó suy ra nghiệm x.

Bài toán 5. 13: Giải các phương trình sau:

a) $(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} = x^2 + 1$

b) $4(x-2)[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)] = 15(x+1)$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $5^x \ge 2x$, $x \ge -\frac{1}{2}$

Đặt $a = \sqrt{5^x - 2x}$, $b = \sqrt{2x+1}$, a, b ≥ 0. Ta có

$a^2 = 5^x - 2x$, $b^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5^x - 4x - 1$, $a^2 + b^2 = 5^x + 1$

Do đó $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (5^x + 1)(5^x - 4x - 1) = 5^{2x} - 4x.5^x - 4x - 1$

PT: $a - b = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \Leftrightarrow (a-b)(1-(a^2+b^2)(a+b)) = 0$

– Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì $5^x - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow 5^x = 4x + 1$

Xét $f(x) = 5^x - 4x - 1$, D= R

$f'(x) = 5^x.\ln 5 - 4$, $f''(x) = 5^x.\ln^2 5 > 0$

Do đó phương trình có tối đa 2 nghiệm mà f(0) =0, f(1) = 0 nên phương trình có hai nghiệm là x = 0, x = 1.

– Nếu $(a^2 + b^2)(a + b) = 1 \Leftrightarrow (5x+1)(\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x+1}) = 1$

Vì $\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x+1} \ge \sqrt{(5^x - 2x) + (2x+1)} = \sqrt{5^x + 1}$

và $5^x + 1 > 1$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là x = 0, x = 1.

b) Điều kiện x > 3. PT: $\log_2(x-3) + \log_3(x-2) - \frac{15}{4}.\frac{x+1}{x-2} = 0$

Xét hàm số vế trái f(x), ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2.(x-3)} + \frac{1}{\ln 3.(x-2)} + \frac{15}{4}.\frac{3}{(x-2)^2} > 0, \forall x > 3$$

Do đó f là hàm số đồng biến và f(11) = 0 nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 11.

Bài toán 5. 14: Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)\log 4^x = x\log(x + 2^{x+1})$

b) $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

Hướng dẫn giải

a) PT: $x\log 4^{x+1} = x\log(x + 2^{x+1}) \Leftrightarrow x = 0$ hay $4^{x+1} = x + 2^{x+1}$

Xét hàm số $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 4^{x+1}.\ln 4 - 2^{x+1}.\ln 2 - 1$

Vì P < 0 nên phương trình f '(x) = 0 có đúng một nghiệm $2^{x+1} > 0$ là x_0.

Vì $f''(x) = 4^{x+1}\ln^2 4 - 2^{x+1}\ln 2 > 0$ do đó x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Suy ra $f(x) \ge f(x_0) > 0$ nên PT $4^{x+1} = 2^{x+1} + x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là x = 0.

b) Điều kiện $x^2 - 2x - 12 > 0$.

PT: $\frac{1}{2}\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \frac{1}{2}\log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

$\Leftrightarrow \log_{9+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{8+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 12)$

Đặt $a = 8 + 4\sqrt{5}$ thì $\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12)$.

Đặt $\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12) = t$

$\Leftrightarrow (a + 1)^t = x^2 - 2x - 11,\ a^t = x^2 - 2x - 12$

Suy ra $(a + 1)^t = a^t + 1 \Leftrightarrow t = 1$

Do đó: $x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$ hay $x = -2\sqrt{5}$: chọn.

Bài toán 5. 15: Giải các phương trình:

a) $2\log_2 x = x$

b) $\log_2 x + \log_3(x + 1) = \log_4(x + 2) + \log_5(x + 3)$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x > 0$, PT: $\log_2 x = = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ thì $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, lập BBT thì $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$

nên $S = \{2; 4\}$.

b) ĐK: $x > 0$. Xét $x = 2$ thì PT thoả mãn:

Xét $x > 2$ thì $\frac{x}{2} > \frac{x+2}{4} > 1$, $\frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{5} > 1$

nên VT > VP (loại), xét $x < 2$ thì VT < VP (loại)

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 5. 16: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$

b) $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình: $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = (2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$ thì $f'(t) = \frac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Do đó *f(t)* đồng biến, nên phương trình $f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 5)$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = -2$.

b) ĐK: $\begin{cases} \cot x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\log_2(\cos x) = 2t \Rightarrow \cos x = 4^t \Rightarrow \cos^2 x = 16^t$

Do đó $2\log_3(\cot x) = 2t \Rightarrow \cot x = 3^t \Rightarrow \cot^2 x = 9^t$

nên $9t = \dfrac{16^t}{1-16^t} \Leftrightarrow 9^t = 144^t + 16^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{144}{9}\right)^t + \left(\dfrac{16}{9}\right)^t = 1$

Suy ra PT có nghiệm duy nhất $t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Chọn nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 5. 17: Giải các bất phương trình sau:

a) $2^{x+2} + 3^{x+2} \le 3^{2x+1} + 2^{2x+1}$ b) $\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \ge 0$.

Hướng dẫn giải

a) – Nếu x = 1 thì bất phương trình thỏa mãn

– Nếu $x > 1 \Rightarrow x + 2 < 2x + 1$ thì $2^{x+2} < 2^{2x+1}$, $3^{x+2} < 3^{2x+1}$

$\Rightarrow 2^{x+2} + 3^{x+2} < 2^{2x+1} + 3^{2x+1}$, thỏa mãn

– Nếu x < 1 thì bất đẳng thức ở trên đổi chiều: không thỏa mãn.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge 1$

b) Vì $f(x) = 2^{1-x} - 2x + 1 = -2x + 1 + \dfrac{2}{2^x}$ là hàm nghịch biến và f(1) = 0, f(x) > f(1) = 0

$\Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ nên f(x) cùng dấu với 1 – x. Hàm số $g(x) = 2^x - 1$ là hàm đồng biến và g(0) = 0 nên $g(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$, do đó g(x) cùng dấu với x.

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với

$\dfrac{1-x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 1$. Vậy tập nghiệm của BPT là (0; 1].

Bài toán 5. 18: Giải các bất phương trình

a) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \le 0$ b) $2^{2x^2-4x-2} - 4.2^{2x-x^2+1} - 2 \le 0$

Hướng dẫn giải

a) Chia 2 vế cho $2^{2x} > 0$, BPT:

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 2\right]\left[3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1\right] \le 0$$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{3}{2}} 2$ (vì cơ số $\dfrac{3}{2} > 1$)

b) Đặt $t = 2^{x^2-2x-1}$, $t > 0$. Bất phương trình $t^2 - \frac{4}{t} - 2 \le 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 2t - 4 \le 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 2t + 2) \le 0 \Leftrightarrow t \le 2$

Do đó $0 < 2^{x^2-2x-1} \le 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$.

Bài toán 5. 19: Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{8 + 2^{1+x} - 4^x} + 2^{1+x} > 5$

b) $4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} < 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ thì BPT: $\sqrt{8 + 2t - t^2} > 5 - 2t$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 - 2t < 0,\ 8 + 2t - t^2 \ge 0 \\ 5 - 2t \ge 0,\ 8 + 2t - t^2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2} < t \le 4 \\ 1 < t \le \frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Do đó $1 < t \le 4 \Leftrightarrow 1 < 2^x \le 4 \Leftrightarrow 0 < x \le 2$.

b) ĐK: $x \ge 0$, BPT : $4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} - 2x^2.3^{\sqrt{x}} - 2x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow (3 + x - 2x^2)3^{\sqrt{x}} - 2(x - 2x^2 + 3) < 0$.

$\Leftrightarrow (-2x^2 + x + 3)(3^{\sqrt{x}} - 2) < 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_3^2 2 \\ x \ge 0 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x > \log_3^2 2 \\ x \ge 0 \\ x < -1 \text{ hay } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm BPT: $0 \le x < \log_3^2 2$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.

Bài toán 5. 20: Giải các bất phương trình:

a) $2^{-x^2-3x-2+4\sqrt{x^2+3x}} < x^2 - 2x + 5$

b) $3\sqrt{\tan x + 1}.\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 3\cos x} \le 2^{1-\sqrt{\tan x}}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x^2 + 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -3$ hoặc $x \ge 0$.

Xét $x \le -3$ thì VT < 0 < VP: đúng.

Xét $x \ge 0$ thì VP = $(x-1)^2 + 4 \ge 4$,

$$VT = 2^{2-(\sqrt{x^2+3x}-2)^2} \le 4$$ nên có nghiệm $\forall x \ne 1$.

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; 3] \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

b) Điều kiện $\tan x \ge 0$. Đặt $t = \tan x$, $t \ge 0$ thì

$$VT = 3\sqrt{t+1}.\frac{t+2}{t+3} = f(t),\ t \ge 0$$

Ta có $f'(t) = \dfrac{3}{2\sqrt{t+1}}.\dfrac{t+2}{t+3} + 3\sqrt{t+1}.\dfrac{1}{(t+3)^2} > 0$ nên hàm số f đồng biến,

mà $t \ge 0 \Rightarrow f(t) \ge f(0) = 2$.

Mặt khác $VP = 2^{1-\sqrt{\tan x}} \le 2$ nên dấu = đồng thời xảy ra

$\Leftrightarrow t = \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 5. 21: Giải các bất phương trình:

a) $(2x - 7)\ln(x + 1) > 0$ b) $2.x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \ge 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$.

Hướng dẫn giải

a) BPT: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-7>0 \\ \ln(x+1)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-7<0 \\ \ln(x+1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\frac{7}{2} \\ x+1>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{7}{2} \\ 0<x+1<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{2} \\ \begin{cases} x<\frac{7}{2} \\ -1<x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{2} \\ -1<x<0 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm $S = (-1; 0) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$

b) ĐK: $x > 0$, lôgarit hoá theo cơ số $2 > 1$:

$$\log_2\left(2^{\frac{1}{2}\log_2 x}\right) \ge \log_2\left(2^{\frac{3}{2}\log_2 x}\right) \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\log_2^2 x \ge \frac{3}{2}\log_2 x$$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \log_2 x \le 1$ hay $\log_2 x \ge 2$

$\Leftrightarrow 0 < x \le 2$ hoặc $x \ge 4$.

Bài toán 5. 22: Giải các bất phương trình:

a) $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$ b) $\log_2 x < 6 - x$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x > 0$, $x \ne 1$, $\dfrac{4x+5}{6-5x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{6}{5}$, $x \ne 1$.

Nếu $1 < x < \dfrac{6}{5}$ thì BPT $\Leftrightarrow \dfrac{4x+5}{6-5x} < \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x+5}{6-5x} - \dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2+5x-6+5x}{(6-5x)x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x} < 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 10x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \dfrac{1}{2}$ (loại)

Nếu $0 < x < 1$ thì BPT $\Leftrightarrow \dfrac{4x^2+10x-6}{(6-5x)x} > 0$ chọn $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm $S = (\dfrac{1}{2}; 1)$.

b) ĐK: $x > 0$. Xét $x > 4$ thì $\log_2 x > 2$ còn $6 - x < 2$ (loại)

Xét $0 < x \le 4$ thì $\log_2 x \le 2 \le 6 - x$ nên BPT nghiệm đúng.

Vậy tập nghiệm $S = (0; 4]$.

Bài toán 5. 23: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{3\ln x}{x^3-1} \le \dfrac{x+1}{x^3+x}$ b) $\log_2(1 + 2^x) > \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x)$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x>0$, $x\neq 1$, BPT: $(x-1)(\dfrac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x) > 0$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3\ln x, x > 0$

thì $f(x) = \dfrac{x^4+x^3-x-1}{x^3+x} - 3\ln x$. Ta có

$f'(x) = \dfrac{(4x^3+3x^2-1)(x^3+1) - 3x^2(x^4+x^3-x-1)}{(x^3+x)^2} - 3 = \dfrac{(x^3-1)(x-1)^3}{(x^3+x)^2}$

Khi $x>1$ thì $f'(x) > 0$ nên $f(x)$ đồng biến: $x>1$ suy ra $f(x) > f(1) = 0$

Do đó $(x-1) f(x) > 0$. Tương tự khi $0<x<1$ thì $f'(x) < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến: $x>1$ suy ra $f(x) < f(1) = 0$. Do đó $(x-1) f(x) > 0$

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi $x>0$, $x\neq 1$.

b) Xét $x < 0$ thì $2^x > 3^x$, $1 > \left(\sqrt{2}\right)^x \Rightarrow 2^x + 1 > 3^x + \left(\sqrt{2}\right)^x > 0$

Do đó $\log_2(2^x + 1) > \log_3(2^x + 1) > \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x)$: đúng

Xét $x \ge 0$ thì $\log_2(1+2^x) > \log_3\left(3^x + (\sqrt{2})^x\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x(1+\dfrac{1}{2^x})\right) > \log_3\left(3^x\left(1+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right)\right)$

$$\Leftrightarrow x+\log_2\left(1+\frac{1}{2^x}\right)>x+\log_3\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)>\log_3\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right)\text{:Đúng}$$

Vậy tập nghiệm S = **R**.

Bài toán 5. 24: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12} & (1)\\ y^{x+y}=x^3 & (2)\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log_x(6x+4y)=2\\ \log_y(6y+4x)=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: x, y > 0. Ta có (2) $\Leftrightarrow x=y^{\frac{x+y}{3}}$ nên

(1) $\Leftrightarrow y^{\frac{1}{3}(x+y)^2}=y^{12}$. Xét y = 1 thì x = 1: đúng.

Xét $y\neq 1$ thì $\frac{1}{3}(x+y)^2=12 \Leftrightarrow x+y=6$

Do đó $y^6=x^3 \Leftrightarrow x=y^2$ nên $y^2+y-6=0$

Chọn y = 2 $\Rightarrow$ x = 4. Vậy S = {(1; 1), (4; 2)}

b) ĐK: x, y > 0, x , y $\neq$ 1. Hệ tương đương:

$$\begin{cases}6x+4y=x^2\\ 6y+4x=y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=x^2\\ (x-y)(x+y-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\ x^2-10x=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}y=2-x\\ x^2-2x-8=0\end{cases}$$

Từ đó giải ra nghiệm (5; 5).

Bài toán 5. 25: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}2^x-2=3y-3^x\\ 2^y-2=3x-3^y\end{cases}$

b) $\begin{cases}2^{\frac{x}{y}}+4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}}=5.2^{\frac{y}{x}} & (1)\\ \log_3 x+\log_5 y=\log_5 x.\log_3 y & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Trừ 2 phương trình vế theo vế thì được:

$(2^x-2^y)+(3^x-3^y)+3(x-y)=0$.

Xét x > y thì VT > 0 (loại), x < y thì VT < 0 (loại).

Xét x = y = t thì được: $2^t + 3^t - 3t - 2 = 0$.

Đặt $f(t) = 2^t + 3^t - 3t - 2$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có:

$f'(t) = 2^t.\ln 2 + 3^t.\ln 3 - 3$, $f''(t) = 2^t.\ln^2 2 + 3^t.\ln^2 3 > 0$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên **R** nên $f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà $f(0) = f(1) = 0$ nên hệ có 2 nghiệm (0; 0) và (1; 1).

b) Điều kiện xác định x, y > 0.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{y}} + 4.2^{\frac{2x}{y}-\frac{y}{x}} = 5.2^{\frac{y}{x}}$

Đặt $a = 2^{\frac{x}{y}}$, $b = 2^{\frac{y}{x}}$, thì a, b > 0. Ta có:

$$a + \frac{4a^2}{b} = 5b \Leftrightarrow 5b^2 + 4a^2 + ab \quad \Leftrightarrow (a - b)(4a + 5b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra $2^{\frac{x}{y}} = 2^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$.

Nên $(2) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_5 x = \log_5 x \,.\, \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_5 3) = \log_3 x \,.\log_5 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 0$ hay $\log_5 x = \log_5 15 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 15$

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm là (x; y) = (1;1), (15;15)

Bài toán 5. 26: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3^x - 3^y = (\ln y - \ln x)(2x + 3y + 1) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 \sqrt{1 + 3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2 \sqrt{1 + 3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: x, y > 0 nên 2x +3y + 1 > 0. Vì cơ số 3 > 1, e > 1 nên với (1): Nếu x > y thì VT > 0 > VP, nếu x < y thì VT < 0 < VP, nếu x = y thì thoả mãn.

Do đó $(2) \Leftrightarrow 2x^2 = 1$, chọn $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt u = sinx, v = cosy, ĐK: $0 < u, v \le 1$.

Hệ $\begin{cases} \log_2(1 + 3u) = 2\log_3(3v) \\ \log_2(1 + 3v) = 2\log_3(3u) \end{cases}$

Do đó $\log_2(1 + 3u) - 2\log_3(3u) = \log_2(1 + 3v) - 2\log_3(3v)$

Xét $f(t) = \log_2(1 + 3t) - 2\log_3(3t)$, $0 < t \le 1$.

$f'(t) = \frac{3}{(1+3t)\ln 2} + \frac{2}{t\ln 3} > 0$ nên f đồng biến trên (0; 1], do đó PT

$\Leftrightarrow u = v = t$.

Ta có PT: $\log_2(1 + 3t) = 2\log_3(3t)$, giải ra nghiệm duy nhất:

$$t = 1 \text{ nên } \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 5. 27: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1 & (1) \\ 4x + y + 1 = 2^{2-2x+y} & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) PT (1) biến đổi thành:

$x + \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + y^2} - y$ và $y + \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + x^2} - x$

Cộng lại thì được $2(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 3x + 1 = 2^2 - 3x \Leftrightarrow 8^x(3x + 1) = 4$

PT này có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{3}$ nên $S = \{(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3})\}$

b) Đặt $t = 2x - y$ thì (1) $\Leftrightarrow (1 + 4^t).5^{1-t} = 1 + 2^{t+1}$

$\Leftrightarrow 1 + 4^t = (1 + 2^{t+2}).5^{t-1} \Leftrightarrow (1 - 5^{t-1}) + 4(4^{t-1} - 10^{t-1}) = 0$

Xét $t > 1$ thì VT > 0, xét $t < 1$ thì VT < 0 nên chỉ có nghiệm $t = 1$

$\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = y + 1$.

Thế vào (2): $y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$.

Xét hàm $f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$, $D = \mathbb{R}$ thì

$f'(y) = 3y^2 + 2 + \dfrac{2y + 1}{y^2 + y + 1} = 3y^2 + \dfrac{2(y + 1)^2 + 1}{y^2 + y + 1} > 0, \forall y$ nên f(y) là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có $f(-1) = 0$ nên $y = -1$ là nghiệm duy nhất.

Suy ra $S = \{(0; -1)\}$.

Bài toán 5. 28: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 & (1) \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1} & (1) \\ y(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $8x^2 - 3xy + 4y^2 \ge 0$, $xy \ge 0$, $y \ge 0 \Leftrightarrow x, y \ge 0$

$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} - 3y\right) + \left(\sqrt{xy} - y\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+3y} + \frac{(x-y)y}{\sqrt{xy}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{8x+5y}{\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+3y} + \frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình nên : (1): $x^4 - 4x + 2^{x^2-2x+4} = 5$

Ta thấy rằng $2^{x^2-2x+4} = 2^{(x-1)^2+3} \geq 2^3 = 8$, suy ra

$5 - (x^4 - 4x) = 2^{x^2-2x+4} \geq 8 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$.Do đó $y = 1$: thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = y = 1$.

b) Đặt $2x - y = a$, phương trình (1) của hệ trở thành

$2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$

Nếu a là nghiệm thì –a cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x) = tx^{t-1}(1 - x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1 - x^{-2t} > 0$ suy ra hàm số này đồng biến trên $(1, +\infty)$.

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

Suy ra $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$.

Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Thay vào phương trình (2) ta có:

$2x(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x-1)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$.Suy ra $y = 2x = \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{2}}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\left(\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}; \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}\right)$

Bài toán 5. 29: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 y & (1) \\ x^2 + 2\cos x = y^2 + 2\cos y & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 0$, $y > 0$. Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0$: loại nên $x > 0$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2\cos t$, $t > 0$

$f'(t) = 2t - 2\sin t = 2(t - \sin t) > 0, \forall t > 0$ nên hàm số này đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó (2) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình (1) $\log_3 x = \log_2(1 + \sqrt{x})$

Đặt $\log_3 x = \log_2(1 + \sqrt{x}) = t \Rightarrow \sqrt{x} = (\sqrt{3})^t = 2^t - 1$.

Suy ra $(\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1$

Vế trái là hàm nghịch biến và x = 2 thỏa mãn nên nghiệm duy nhất của phương trình là x = 2. Vậy hệ có duy nhất là (x, y) = (2, 2)

b) Điều kiện $x, y > -\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = t^2 + 3t + \ln(2t + 1), t > -\frac{1}{2}$

$f'(t) = 2t + 3 + \frac{2}{2t+1} > 0, \forall t > -\frac{1}{2}$ nên f là hàm đồng biến

Giả sử $x \geq y$ thì từ hệ trên suy ra $f(y) \geq f(x) \Rightarrow y \geq x$

Do đó nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì x = y nên có phương trình

$x^2 + 2x + \ln(2x + 1) = 0$. Vì vế trái là hàm đồng biến và x = 0 thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là x = y = 0.

Bài toán 5. 30: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2^{\log_3 x} + y^{\log_3 2} = 6 & (1) \\ \log_x y + \log_{\frac{y}{x^3}} x = 1 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} & (1) \\ \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{y}{3} = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $0 < x, x \neq 1, y \neq x^3$. PT(2): $\log_x y + \frac{1}{\log_x y - 3} = 1$

Đặt $t = \log_x y$. Ta có $t + \frac{1}{t-3} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$, suy ra $\log_x y = 2 \Leftrightarrow y = x^2$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow 2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x^2} = 6 \Leftrightarrow 2^{\log_3 x} + 2^{2\log_3 x} = 6$

$\Leftrightarrow 2^{2\log_3 x} + 2^{\log_3 x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là (x; y) = (3; 9)

b) Điều kiện $x, y > 0$. PT (1): $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$

$\Leftrightarrow (xy + 1)(x^2 + y^2 + 2) = 2(x^2 + 1)(y^2 + 1)$

$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2xy + x^2 + y^2 + 2 = 2x^2y^2 + 2(x^2 + y^2) + 2$

$\Leftrightarrow xy(x - y)^2 = (x - y)^2 \Leftrightarrow (x - y)^2(xy - 1) = 0$

– Nếu x = y thì x = y = 1 là nghiệm

Xét trường hợp $x = y \neq 1$ thì:

(1): $(\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x.\log_3 x = \log_2 x + \log_3 x$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow \log_x 6 = 1 \Leftrightarrow x = 6$

– Nếu xy = 1 thì $y = \frac{1}{x}$ và $x \neq 1$, ta có

$\log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{1}{3x} = 1 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x + 1) = -1$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\ \log_3 x = \log_3 x - \log_2 x \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_3 x} = 1$

$\Leftrightarrow \log_x 2 - \log_x 3x = 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (1; 1), (6; 6), $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 5. 31: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{y^2 + 1} & (1) \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_y(\log_y(3 - x)) = \log_{3-y}(\log_{3-y} x) & (1) \\ \cot x - \cot y = \log \dfrac{x}{y} & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x + 2y + 6 > 0, x + y + 2 > 0

(1): $e^{x^2}(x^2 + 1) = e^{y^2}(y^2 + 1)$. Xét $f(t) = e^t(t + 1)$, $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = e^t + e^t(t + 1) = e^t(t + 2) > 0$ nên f là hàm đồng biến. Phương trình $f(x^2) = f(y^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$

– Nếu x = y thì phương trình (2) trở thành

$3\log_3(3x + 6) = 2\log_2(3x + 2) + 1 \Leftrightarrow \log_3(x + 2) = \log_2(x + 1)$

Đặt $\log_3(x + 2) = \log_2(x + 1) = t$ thì

$x + 2 = 3^t,\ x + 1 = 2^t \Rightarrow 3^t = 2^t + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$

Vế trái là hàm số nghịch biến và t = 1 thỏa mãn nên phương trình có nghiệm duy nhất là t = 1, suy ra x + 2 = 3 ⇔ x = 1. Suy ra y = 1.

– Nếu x = –y thì (2) ⇔ $3\log_3(6-x) = 2\log_2 2 + 1 \Leftrightarrow \log_3(6-x) = 1$
$\Leftrightarrow 6 - x = 3 \Leftrightarrow x = 3$. Suy ra y = –3

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là (1, 1), (5, –5).

b) Điều kiện $0 < x, y < 3$, $y \neq 1$, $\log_y(3-x) > 0$, $\log_{3-y}x > 0$

(2): $\dfrac{\sin(y-x)}{\sin x.\sin y} = \log x - \log y$

Vì $-3 \le y - x \le 3$ và $a \in (-3, 3) \subset (-\pi, \pi)$ nên : $\sin a \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 0$, $\sin a < 0$ $\Leftrightarrow a < 0$. Do đó phương trình này tương đương với x = y.

Thay vào nên (1): $\log_{3-x}(\log_{3-x}x) = \log_x(\log_x(3-x))$

$\Leftrightarrow \log_{3-x}(\log_{3-x}x) = \dfrac{\log_{3-x}(\log_x(3-x)}{\log_{3-x}x}$

Đặt $t = \log_{3-x}x > 0$ thì PT: $\log_{3-x}t = -\dfrac{\log_{3-x}t}{t}$

$\Leftrightarrow (t+1)\log_{3-x}t = 0 \Leftrightarrow \log_{3-x}t = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_{3-x}x - 1 \Leftrightarrow x = 3 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = y = \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 5. 32: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y & (1) \\ e^y - e^{y-z} = z & (2) \\ e^z - e^{z-x} = x & (3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2\log_5(4y+1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2\log_5(4z+1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2\log_5(4x+1) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Nếu x = 0 thì (1): $1 - e^{-y} = y \Leftrightarrow 1 - e^{-y} - y = 0$.

Bằng cách xét $f(y) = 1 - e^{-y} - y$ thì phương trình f(y) = 0 có nghiệm duy nhất y = 0, do đó x = y = z = 0.

Nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$, $z \neq 0$. Đặt $f(t) = \dfrac{t.e^t}{e^t - 1}$, $t \neq 0$ thì hệ:

$$\begin{cases} e^x = \dfrac{y.e^y}{e^y - 1} \\ e^y = \dfrac{z.e^z}{e^z - 1} \\ e^z = \dfrac{x.e^x}{e^x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = f(y) \\ e^y = f(z) \\ e^z = f(x) \end{cases}$$

Ta có $f'(t) = \dfrac{e^t(e^t - t - 1)}{(e^t - 1)^2} > 0, \forall t \neq 0$. Lập BBT thì $f(t) < 1, \forall t < 0$ và $f(t) > 1$, $\forall t > 0$ nên hệ tương đương $x = y = z = t$, do đó $e^t - t - 1 = 0$ (vô nghiệm).Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$.

b) Điều kiện xác định: $x, y, z \geq -\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = 5^t$ và $g(t) = 2t + 1 + 2\log_5(4t + 1)$, $t > -\dfrac{1}{4}$ thì hai hàm số này đồng biến trên $(-\dfrac{1}{4}; +\infty)$.

Hệ phương trình đã cho có thể viết lại là: $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử x là số lớn nhất. Khi đó $x \geq y$, $x \geq z$. Do
$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow g(y) \geq g(z) \Rightarrow y \geq z$
$\Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow g(z) \geq g(x) \Rightarrow z \geq x \Rightarrow x = y = z$.
Đưa về PT: $5^t = 2t + 1 + 2\log_5(4t + 1)$
Đặt $s = \log_5(4t + 1) \Leftrightarrow 5^s = 4t + 1$ và $5^t = 2t + 2s + 1$
Suy ra: $5^s - 5t = 2(t - s) \Leftrightarrow 5^t + 2t = 5^s + 2s$
Vì hàm số $h(y) = 5^y + 2y$ đồng biến nên $t = s \Leftrightarrow 5^t = 4t + 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm là $t = 0$, $t = 1$.
Vậy hệ phương trình cho có nghiệm là $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Bài toán 5. 33: Tìm các nghiệm dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = z^4 + 2z^2 \\ x^4 + y^4 = 2z^8 \\ (x + y)^{z-1} = (z + 1)^{x-y} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $z^2 = a > 0$. Hai phương trình đầu của hệ viết lại là:

$$\begin{cases} x + y + xy = a^2 + 2a \\ x^4 + y^4 = 2a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = (a + 1)^2 \\ x^4 + y^4 = 2a^4 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $(x + 1)(y + 1) \leq \left(\dfrac{x + y}{2} + 1\right)^2$

thì có: $(a + 1)^2 \leq \left(\dfrac{x + y}{2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow 2a \leq x + y$

Và $\dfrac{x^4+y^4}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^4$ thì có $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^4 \leq a^4 \Leftrightarrow x + y \leq 2a$.

suy ra $2a \leq x + y \leq 2a$ nên đẳng thức trong các bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức là $2a = x + y$, $x = y \Leftrightarrow x = y = a$.

PT: $(x + y)^{z-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x+y=1 \text{ hay } z-1=0 \end{cases}$

– Nếu $x + y = 1$ thì $x = y = \dfrac{1}{2}$ và $z^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

– Nếu $z = 1$ thì $a = 1 \Rightarrow x = y = 1$.

Vậy hai nghiệm là: $(1; 1; 1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Bài toán 5. 34: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \\ \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1}) \leq \ln 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{4032} + x^{2016} > 2016^{2x} + 2016^{x} & (1) \\ x^{4030} + x^{2015} < 2015^{2x} + 2015^{x} & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $\ln 2 \geq \ln(4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1})$

$\geq \ln(2\sqrt{4^{x+y-1}.3.4^{2y-1}}) = \ln(2\sqrt{4^{x+3y-2-\ln 3}}) \geq \ln(2\sqrt{4^{0}}) = \ln 2$

Do đó dấu = xảy ra nên giải được nghiệm:

$x = \dfrac{1}{2}\log_4 12$, $y = \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{4}{3}$.

b) Đặt 2016 = y thì

$(1) \Leftrightarrow x^{2y} - y^{2x} + x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow (x^y - y^x)(x^y + y^x) + x^y - y^x > 0$

$\Leftrightarrow (x^y - y^z)(x^y + y^x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^y > y^x$

$\Leftrightarrow y\ln x > x\ln y \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln y}{y} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln 2016}{2016}$

Đặt 2015 = z thì $(2) \Leftrightarrow x^{2z} + x^z < z^{2x} + z^x$

Biến đổi tương tự ta được: $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015}$

Do đó hệ tương đương: $\dfrac{\ln 2016}{2016} < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $t > 3 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2} < 0, \forall t > 3$

Suy ra hàm số này nghịch biến trên $(3; +\infty)$

Do đó, $\dfrac{\ln 2016}{2016} < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2015}{2015} \Leftrightarrow 2015 < x < 2016$.

Đây chính là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài toán 5. 35: Cho x là nghiệm của PT: $(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$.

Chứng minh x cũng là nghiệm của PT: $(\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = (\sqrt{2} + 1)^x > 0$ thì $t^2 = \dfrac{1}{t} + 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 1 = 0$

Xét các nghiệm thuộc $[-2; 2]$, đặt $t = 2\cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$,

Ta có: $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$$

Trong đoạn $[0, \pi]$, có 3 giá trị α thỏa mãn là $\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{9}$, tức là phương trình có ba nghiệm là $2\cos\dfrac{\pi}{9}$, $2\cos\dfrac{5\pi}{8}$, $2\cos\dfrac{7\pi}{9}$, và chỉ có $2\cos\dfrac{\pi}{9} > 0$ nên suy ra $t = (\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

Bài toán 5. 36: Chứng minh rằng phương trình:

a) $4^x(4x^2 + 1) = 1$ có đúng ba nghiệm phân biệt

b) $x^{x+1} = (x + 1)^x$ có một nghiệm dương duy nhất.

Hướng dẫn giải

a) PT: $4^x(4x^2 + 1) - 1 = 0$. Xét hàm số $f(x) = 4^x(4x^2 + 1) - 1$, $D = \mathbf{R}$.

Ta có $f'(x) = 4^x\ln 4.(4x^2 + 1) + 8x.4^x = 4^x[\ln 4.(4x^2 + 1) + 8x]$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 4.(4x^2 + 1) + 8x = 0 \Leftrightarrow (4\ln 4)x^2 + 8x + \ln 4 = 0$ (*).

PT (*) này có biệt thức $\Delta > 0$ nên có đúng 2 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên của f(x) suy ra phương trình f(x)= 0 có không quá ba nghiệm phân biệt.

Mặt khác: $f(\dfrac{1}{2}) = 0$, $f(0) = 0$; $f(-3) . f(-2) < 0$

Do đó phương trình f(x) = 0 có đúng ba nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 \in (-3; -2).$$

b) Với x > 0, PT: $(x + 1)\ln x = x\ln(x + 1)$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln x - x\ln(x+1) = 0$

Xét hàm số $f(x) = (x+1)\ln x - x\ln(x+1)$, $x > 0$.

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$ nên f ' nghịch biến trên $(0; +\infty)$, vì

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) < 0, \forall x$. Do đó f(x) nghịch biến trên R nên f(x) = 0 có tối đa 1 nghiệm. Mà hàm f(x) liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, $f(2) = 3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln 8 - \ln 9 > 0$ và $f(3) = 4\ln 3 - 3\ln 4 = \ln 81 - \ln 64 > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Cách khác: Xét hàm $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t > 0$.

Bài toán 5. 37: Cho 3 phương trình cosx = x (1); sin(cosx) = x (2) ; cos(sinx) = x (3). Chứng minh rằng mỗi phương trình có nghiệm duy nhất lần lượt là α, β, γ và thỏa mãn: $\gamma\alpha.\ln\beta < \beta\gamma.\ln\alpha < \alpha\beta.\ln\gamma$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số tương ứng với PT (1) là $f(x) = x - \cos x$, D= R

Ta có $f'(x) = 1 + \sin x \ge 0, \forall x$ nên f là hàm đồng biến.

Mà f(0) < 0, f(1) > 0 và f là hàm liên tục nên phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất $\alpha \in (0;1)$.

Chứng minh tương tự ta có 3 nghiệm $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{\ln\beta}{\beta} < \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\gamma}{\gamma}$ (*)

Xét hàm số $g(t) = \frac{\ln t}{t}$, $0 < t < 1$. Ta có $g'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} > 0$ nên hàm số này đồng biến trên (0; 1).

Giả sử $\beta \ge \alpha$ thì $\beta = \sin(\cos\beta) < \cos\beta \le \cos\alpha = \alpha$, vô lý nên $\beta < \alpha$

Giả sử $\gamma \le \alpha$ thì $\gamma = \cos(\sin\gamma) > \cos\gamma \ge \cos\alpha = \alpha$, vô lý nên $\alpha < \gamma$

Vậy $\beta < \alpha < \gamma$ hay $\frac{\ln\beta}{\beta} < \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\gamma}{\gamma}$.

Bài toán 5. 38: Chứng minh hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z = 10 \\ 2^x3^y5^z = 30 \\ xyz = 1 \end{cases}$ có ít nhất 6 nghiệm phân biệt

b) $\begin{cases} e^x = 2017 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (1) \\ e^y = 2017 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & (2) \end{cases}$ có đúng hai nghiệm phân biệt

Hướng dẫn giải

a) Xét các bộ số (x, y, z) = ($\log_2 a$, $\log_3 b$, $\log_5 c$) trong đó a, b, c là hoán vị của {2, 3, 5}. Với các bộ số này thì xyz= 1 nên phương trình thứ ba của hệ luôn được thỏa mãn.

Ta có: $2^x + 3^y + 5^z = 2^{\log_2 a} + 3^{\log_3 b} + 5^{\log_5 c}$

$= a + b + c = 2 + 3 + 5 = 10$

và $2^x.3^y.5^z = 2^{\log_2 a}.3^{\log_3 b}.5^{\log_5 c} = abc = 2.3.5 = 30$.

Do đó, các bộ xác định như trên luôn thỏa mãn hệ đã cho. Vì có tất cả 3! hoán vị của {2, 3, 5} nên tương ứng cũng có 6 nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Điều kiện xác định $|x|, |y| > 1$.

Từ hai PT của hệ, ta có $e^x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$, $|t| > 1$.

$f'(t) = e^t + \dfrac{1}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} > 0$ nên f là hàm đồng biến

Do đó $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Ta có PT : $e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2017 = 0$

Hàm số $g(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}} - 2017$, $|t| > 1$, ta chứng minh g(t) = 0 có hai nghiệm trong khoảng $(1, +\infty)$

Bài toán 5. 39: Tìm điều kiện để phương trình :

a) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

b) $\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(ax)$ có nghiệm duy nhất

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$, $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$

PT: $t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2$

Xét $f(t) = t^2 + t$, $1 \le t \le 2$, $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên f đồng biến trên [1; 2]

Điều kiện có nghiệm: $f(1) \le 2m + 2 \le f(2)$

$\Leftrightarrow 2 \le 2m + 1 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$

b)PT: $2\log_3(x + 3) = \log_3(ax)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ \log_3(x+3)^2 = \log_3(ax) \end{cases} \Leftrightarrow (x+3)^2 = ax,\ x+3>0$$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = ax,\ x > -3$

Xét x = 0: Loại. Xét $x \neq 0$ thì có: $a = \dfrac{x^2+6x+9}{x}$, $x > -3$

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x}$, $x > -3,\ x \neq 0, f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$, $f'(x) = 0$ thì $x = 3$

BBT:

x	-3		0		3		+∞
f'	0	−	‖	−	0	+	
f	0 ↘		-∞ ‖ +∞	↘	12	↗	+∞

Điều kiện có nghiệm duy nhất: a < 0 hay a = 12.

Bài toán 5. 40: Tìm điều kiện để bất phương trình :

a) $x^2 - (m+3)x + 3m < (m-2)\log_2 x$ có nghiệm

b) $a^{\cos 2x} \geq 2\cos^2 x$ có nghiệm với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) BPT: $(x-m)(x-3) < (m-x)\log_2 x \Leftrightarrow (x-m)(x-3+\log_2 x) < 0$

Để ý: $f(x) = x - 3 + \log_2 x$, $x > 0$

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x\ln 2} > 0$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 0$

Do đó, bất phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} x > m, x - 3 + \log_2 x < 0 \\ x < m, x - 3 + \log_2 x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > m,\ 0 < x < 2 \\ x < m,\ x > 2 \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra điều kiện có nghiệm là $m \neq 2$.

b) Điều kiện $a > 0$. Đặt $t = 2\cos^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm $a > 0$ sao cho $a^{t-1} \geq t,\ \forall t \in [0; 2]$

Với t = 0 thì bất đẳng thức đúng và không phụ thuộc vào a.

Với $0 < t \leq 2$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow (t-1)\ln a \geq \ln t$

– Nếu t = 1 thì bất đẳng thức đúng.

– Nếu $t \in (0; 1)$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln a \leq \dfrac{\ln t}{t-1}$. Bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (0; 1)$ nên $\ln a \leq \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln t}{t-1} = 1$

– Nếu $t \in (1; 2)$ thì bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln a \ge \frac{\ln t}{t-1}$

Bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (1; 2)$ nên $\ln a \ge \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln t}{t-1} = 1$.

Do đó, ta cần phải có $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.

Thử lại, với $a = e$, ta cần chứng minh $t - 1 \ge \ln t, \forall t \in (0; 2]$

Xét hàm số $f(u) = u - 1 - \ln u, u \in (0; 2]$, ta có:

$f'(u) = 1 - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$, $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1$.

$f''(u) = \frac{1}{u^2} > 0$ nên $f(u)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $u = 1$

Ta có $f(u) \ge f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$ nên ta được $t - 1 \ge \ln t, \forall t \in (0; 2]$ là đúng.

Vậy giá trị cần tìm là $a = e$.

Bài toán 5. 41: Tìm m để hệ $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất:

Hướng dẫn giải

Giả sử (x, y) là một nghiệm thì $(-x, y)$ cũng là nghiệm, mà hệ có nghiệm duy nhất nên $x = 0$.Do đó: $\begin{cases} 1 + 0 = y + 2m \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ 2m = 1 - y \end{cases}$

Khi $y = -1 \Rightarrow m = 1$. Khi $y = 1 \Rightarrow m = 0$

Đảo lại, với $m = 1$ thì hệ : $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Hệ này không nghiệm duy nhất vì $(0; -1)$, $(1; 0)$ đều là nghiệm.

Với $m = 0$ thì hệ : $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow |x| \le 1, |y| \le 1$

Và (1): $y = 2^{|x|} + |x| - x^2 = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \ge 2^{|x|} \ge 1$

Do đó $y = 1$ và $x = 0$: nghiệm duy nhất. Vậy $m = 0$

Bài toán 5. 42: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \ge -1$. BPT(1): $7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x-2} - 1) \le 2017(1 - x)$

– Nếu x = 1 thì bất phương trình thỏa
– Nếu x < 1 thì $7^{2x-2} - 1 < 0$, $1 - x > 0$ thì BPT thỏa
– Nếu x > 1 thì $7^{2x-2} - 1 > 0$, $1 - x < 0$ thì BPT không thỏa
– Nếu $-1 \le x \le 1$ thì (2): $m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$

Xét $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$, $x \in [-1; 1]$

Lập BBT thì min f(x) = –2 nên bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi m ≥ –2.
Vậy điều kiện cần tìm là m ≥ –2.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 5. 1: Giải các phương trình:

a) $(4 - \sqrt{15})^{\tan x} + (4 + \sqrt{15})^{\tan x} = 8$ b) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

Hướng dẫn

a) Đặt ẩn phụ và để ý $(4 - \sqrt{15})^{\tan x}(4 + \sqrt{15})^{\tan x} = 1$

Kết quả $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Kết quả $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài tập 5. 2: Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2}$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-1} = \dfrac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn

a) Lôgarit hóa. Kết quả x = 1 hoặc $x = 1 - \log_2 3$

b) Lôgarit hóa. Kết quả $x = \dfrac{2(\log_5 3 - 4)}{4\log_5 3 - 7}$.

Bài tập 5. 3: Giải các phương trình:

a) $\left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7 - \sqrt{15}}\right)^x = 13$

b) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 4^x$

Hướng dẫn

a) Kết quả x = 3
b) Chia 2 vế cho 4^x. Kết quả x = 1

Bài tập 5.4: Giải các phương trình:

a) $3^{\sqrt{\cos x}} - 2^{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{\cos x}$ b) $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1}$

Hướng dẫn

a) Đặt t= $\sqrt{\cos x}$, $0 \le t \le 1$và dùng định lý Lagrange.

Kết quả $x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) Kết quả $\tan 2^x = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$, từ đó suy ra nghiệm x.

Bài tập 5. 5: Giải các phương trình:

a) $\log_4(x + 12).\log_x 2 = 1$ b) $\frac{1}{6}\log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$

Hướng dẫn

a) Đưa về cơ số 2. Kết quả x = 4

b) Đưa về cơ số 2. Kết quả x = 3.

Bài tập 5. 6: Giải các phương trình:

a) $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$ b) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

Hướng dẫn

a) Đưa về cơ số 2. Kết quả x = 16 .

b) Kết quả x = 4, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bài tập 5. 7: Giải các phương trình

a) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

b) $\log_2(\cot x + \tan 3x) - 1 = \log_2(\tan 3x)$

Hướng dẫn

a) Đặt $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x =$ t thì $1 + \sqrt{x} = 2^t$ và $x = 3^t$

Đưa về phương trình $1 + \sqrt{3^t} = 2^t$ có nghiệm duy nhất.

Kết quả x = 2

b) Kết quả $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ và $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 5. 8: Giải các bất phương trình:

a) $4^x \le 3.2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$ b) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$

Hướng dẫn

a) Chia 2 vế cho $4^x > 0$. Kết quả $0 \le x \le 4$.

b) Kết quả $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Bài tập 5.9: Giải các bất phương trình:

a) $\ln|x-2| + \ln|x+4| \le 3\ln 2$ b) $\log_3 x > \log_x 3$

Hướng dẫn

a) Biến đổi tích. Kết quả $-1-\sqrt{17} \le x \le -2$ hoặc $0 \le x \le -1+\sqrt{17}$

b) Kết quả $\frac{1}{3} < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Bài tập 5. 10: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 5 \\ \log_5(3x+y) - \log_5(3x-y) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Phân tích $9x^2 - y^2 = (3x-y)(3x+y)$. Kết quả $x=1$; $y = 2$

b) Kết quả $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

Bài tập 5. 11: Tìm điều kiện m để phương trình :

a) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm

b) $(\sqrt{5}+1)^x + 2m(\sqrt{5}-1)^x = 2x$ có nghiệm duy nhất

Hướng dẫn

a) Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$ rồi xét hàm số VT. Kết quả $6 \le m \le 10$.

b) Kết quả $m \le 0$ hoặc $m = \frac{1}{8}$

Bài tập 5. 12: Tìm tham số m để bất phương trình

a) $49^x - 5.7^x + m \le 0$ có nghiệm

b) $1 + \log_5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m)$ có nghiệm với mọi x.

Hướng dẫn

a) Kết quả $m \le \frac{25}{4}$

b) Đưa về đánh giá tham số m một bên. Kết quả $2 < m \le 3$.

Chuyên đề 6: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các bất đẳng thức cơ bản

– Bất đẳng thức BECNULI

Nếu $x > -1$ và $\alpha \geq 1$ thì $(1 + x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$

Nếu $x > -1$ và $0 < \alpha \leq 1$ thì $(1 + x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x$

– Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thì $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi : $a_1 = a_2 = ... = a_n$

– Bất đẳng thức CAUCHY–SCHWARTZ

Với hai dãy số thực : $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ... b_n$.

thì $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = kb_1, ..., a_n = kb_n$

– Bất đẳng thức sắp thứ tự

Cho hai dãy số tăng $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ $(n \geq 2)$

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là một hoán vị của dãy 1, 2, ..., n thì:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

– Bất đẳng thức trung bình luỹ thừa

Nếu $x_i > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ và $p \geq q > 0$ thì

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

– Bất đẳng thức SHUR

Cho $a, b, c > 0$, $r > 0$ thì :

$$a^r(a - b)(a - c) + b^r(b - a)(b - c) + c^r(c - a)(c - b) \geq 0$$

– Bất đẳng thức CHEBYCHEP

Nếu hai dãy: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$; $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$

thì: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

– Bất đẳng thức MIN–COP–XKI
Với hai dãy: $a_1, a_2, .., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$

thì $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

Dùng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức:

– Nếu $y = f(x)$ có $y' > 0$ trên K thì f(x) đồng biến trên K:
$x > a \Rightarrow f(x) > f(a); x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$
Đối vói $y' < 0$ thì ta có bất đẳng thức ngược lại.
Việc xét dấu y' đôi khi phải cần đến y'', y''',... hoặc xét dấu bộ phận, chẳng hạn tử số của một phân số có mẫu dương,.... Nếu $y'' > 0$ thì y' đồng biến từ đó ta có đánh giá f '(x) rồi f(x),...

– Bất đẳng thức có biểu thức dạng $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ là dùng định lý Larange $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, sự tồn tại số $c \in (a;b)$ hay giá trị f '(c) cũng có đánh giá bất đẳng thức.

– Bất đẳng thức JENSEN: $\forall x \in (a,b)$ và $a_i \in (a,b) \forall i = \overline{1,n}$

Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ thì $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \le f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$

– Phương pháp tiếp tuyến : Cho n số a_i thuộc K có tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = nb$ không đổi.
Bất đẳng thức có dạng $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \ge nf(b)$.
Lập phương trình tiếp tuyến tại $x = b$: $y = Ax + B$.
Nếu $f(x) \ge Ax + B$ trên K, dấu bằng xảy ra khi $x = b$.
Khi đó $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)) \ge A(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + nB$
$= Anb + nB = n(Ab + B) = nf(b)$
Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b$.
Còn nếu $f(x) \le Ax + B$ trên K, dấu bằng xảy ra khi $x = b$ thì có ngược lại $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \le nf(b)$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Đối với hàm số $y = f(x)$ trên D. Xét dấu đạo hàm y' hoặc từ bảng biến thiên có kết luận về GTLN, GTNN. Nếu cần thì đặt ẩn phụ $t = g(x)$ với điều kiện đầy đủ của t.
Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn [a;b] thì: min f(x) = f(a) và max f(x) = f(b). Ngược lại với hàm nghịch biến.

Nếu y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f '(x)= 0 có nghiệm x_i thì:

$\min f(x) = \min \{ f(a); f(x_1); f(x_2);\ldots; f(b) \}$

$\max f(x) = \max \{ f(a); f(x_1); f(x_2);\ldots; f(b) \}$

Nếu f lồi trên đoạn [a,b] thì GTLN = max{f(a); f(b)} và nếu f lõm trên đoạn [a,b] thì GTNN = min{f(a); f(b)}.

Đối với các đại lượng, chọn đặt biến x (hoặc t), kèm điều kiện tồn tại. Dựa vào giả thiết, các quan hệ cho để xác lập hàm số cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 6. 1: Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $2\sin x + \tan x > 3x$ với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

b) $\cos(x+y) < \dfrac{y\sin x}{x\sin y}$ với x > 0, y > 0 và $x + 2y < \dfrac{5\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ liên tục trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ và:

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 0$$

Do đó hàm số f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$ nên $f(x) > f(0) = 0$.

b) Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ với $0 < t < \dfrac{5\pi}{4}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \dfrac{\cos t(t - \tan t)}{t^2}$

Nếu $0 < t < \frac{\pi}{2}$ thì do $\tan t > t \Rightarrow f'(t) < 0$.

Nếu $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$ thì $\cos t \le 0$ và $\sin t \ge 0 \Rightarrow f'(t) < 0$.

Nếu $\pi < t < \frac{5\pi}{4}$ thì do $\cos t < 0$; $\tan t < t \Rightarrow f'(t) < 0$.Do đó $f'(t) < 0$, $0 < t < \frac{5\pi}{4}$

nên f là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{5\pi}{4})$

Từ giả thiết có $0 < x < x + 2y < \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sin(x+2y)}{x+2y} < \dfrac{\sin x}{x}$.

Do x > 0 và x + 2y > 0 nên từ đó có

$x\sin(x + 2y) < x\sin x + 2y\sin x \Leftrightarrow x.\ 2\cos(x + y)\sin y < 2y\sin x$

$\Rightarrow$ đpcm (vì $x > 0$ và $x + 2y < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \sin y > 0$)

Bài toán 6. 2: Chứng minh các bất đẳng thức

a) $(\frac{\sin x}{x})^{\alpha} \geq \cos x, \forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$ với mọi $\alpha \leq 3$.

b) $\left(x+1\right)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1,\ \forall x \geq \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Khi $x \in (0;\frac{\pi}{2})$ thì có $0 < \sin x < x$ nên $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$

Suy ra $(\frac{\sin x}{x})^{\alpha} \geq (\frac{\sin x}{x})^3, \forall \alpha \leq 3$ do đó ta chỉ cần chứng minh khi $\alpha = 3$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x, \forall x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Xét hàm số $F(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x, x \in \left[\ 0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $F'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x.\sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x.\sqrt[3]{\cos x}}$

Xét $G(t) = 2t^2 - 3t\ \sqrt[3]{t} + 1, t \in \left[0;1\right]$ thì $G'(t) = 4(t - \sqrt[3]{t}) \leq 0, \forall t \in \left[0;1\right]$

nên $G(t)$ nghịch biến do đó $G(t) \geq G(1)=0$, $\forall t \in \left[0;1\right]$

Suy ra $F'(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;\frac{\pi}{2})$ nên $F(x)$ đồng biến

Do đó $F(x) \geq F(0) = 0, \forall x \in [0;\frac{\pi}{2})$.

b) BĐT $\Leftrightarrow 2x\sin\frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)}.\sin\frac{\pi}{2x(x+1)} > 1 - \cos\frac{\pi}{x+1} = 2\sin^2\frac{\pi}{2(x+1)}$

$$\Leftrightarrow x\sin\frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)}.\sin\frac{\pi}{2x(x+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(x+1)}$$

Vì $x \geq \sqrt{3} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2(x+1)} < \frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)} < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\pi(2x+1)}{2x(x+1)} > \sin\frac{\pi}{2(x+1)} > 0$$

Ta sẽ chứng minh: $x\sin\dfrac{\pi}{2x(x+1)} > \sin\dfrac{\pi}{2(x+1)}$.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2x(x+1)}$, $t > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow$ xsint > sinxt

Xét f(t) = xsint – sinxt, $t \geq 0$, f '(t) = x cost – xcost = x(cost – cosxt)

Vì $0 < t < xt < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ f '(t) > 0 với t > 0.

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) > f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 3: Chứng minh bất đẳng thức với n nguyên dương:

a) $\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$ với $n \geq 2$ và $x, y \geq 0$.

b) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\dfrac{x^i}{i!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \geq 0$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) Với x = 0 hoặc y = 0, bất đẳng thức đúng.

Với xy > 0, BĐT: $\sqrt[n]{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
f'(t)	0	+	0	−	
f(t)	1	↗		↘	1

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

b)Xét $f(x) = 1 - x\,\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\dfrac{x^i}{i!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbf{R}$

Với x < 0 thì $f(x) \geq 1 \geq 0$: đúng. Với x > 2n thì:

$$f(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - x\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}(x-2n) \quad \geq 1 \geq 0 : \text{đúng}$$

Với $0 \le x \le 2n$ thì f liên tục trên đoạn [0,2n] nên tồn tại giá trị bé nhất tại x_0. Nếu $x_0 = 0$ hay $x_0 = 2n$ thì $f(x) \ge f(x_0) \ge 1 \ge 0$

Nếu $x_0 \in (0,2n)$ thì f đạt cực tiểu tại đó.

$$f'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - f(x)$$

Vì $f'(x_0) = 0$ $\Rightarrow f(x_0) = \dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!} > 0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) > 0$: đúng

Bài toán 6. 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - (a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) > 0$ với 4 số a, b, c, d dương.

b) $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$ với a,b,c là 3 số mà phương trình:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d > 0$

Xem vế trái là hàm số f(a), $a \ge 0$

$f'(a) = 4a^3 + 2bcd - 2a(b^2 + c^2 + d^2)$

$f''(a) = 12a^2 - 2(b^2 + c^2 + d^2) > 0$ nên f ' đồng biến trên $(0; +\infty)$:

$a \ge b \Rightarrow f'(a) \ge f'(b)$. Vì $f'(b) = 2b(b^2 - c^2) + 2bd(c - d) \ge 0$ nên f(a) đồng biến trên $[0; +\infty)$: $a > 0 \Rightarrow f(a) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Vì f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt nên f '(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \; x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \text{ với } a^2 - 3b > 0$$

Và vì hệ số cao nhất của f dương nên $y_{CĐ} = f(x_1) > 0$ và $f(x_2) = y_{CT} < 0$.

Ta có $$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right)f'(x) + \frac{1}{9}(3b - a^2)x + c - \frac{ab}{9}$$

$$\Rightarrow f(x_i) = \frac{2}{9}(3b - a^2)x_i + c - \frac{ab}{9}$$

Từ $f(x_1) > 0 \Rightarrow -2\sqrt{(a^2 - 3b)^3} < 2a^3 + 27c - 9ab$

$f(x_2) < 0 \Rightarrow 2a^3 + 27c - 9ab < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Do vậy: $|2a^3 + 27c - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Bài toán 6. 5: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$, với $x > 0$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$ với x, y $\in$ [0, 1].

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$ trên $[0; +\infty)$. Ta có:

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \ge 0$ với $x \ge 0$ nên f(x) đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do đó $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \ge 0$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$, $g''(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} \ge 0$

nên g' đồng biến trên $[0; +\infty)$, do đó $g'(x) = g'(0) = 0$. Suy ra g đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x \in [0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

b) Giữ y cố định, xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ trên đoạn [0, 1].

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \dfrac{y}{(1+xy)^{3/2}}$

Như vậy dấu của f '(x) là dấu của

$$x^2(1+xy)^3 - y^2(1+x^2)^3 = (x-y)(x+y+3x^2y-x^5y^2).$$

Do x, y thuộc [0, 1] nên thừa số thứ hai luôn dương, như thế f '(x) đổi dấu từ âm sang dương tại y, suy ra y là điểm cực tiểu, suy ra $f(x) \ge f(y) = 0$: đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Bài toán 6. 6: Cho x, y, z $\ge$ 0 và x + y + z = 1. Chứng minh:

a) $0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \dfrac{7}{27}$.

b) $xyz\left[x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+1\right]\le\dfrac{7}{27}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử z là số bé nhất thì $0 \le z \le \dfrac{1}{3}$. Ta có

$T = xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - 2z) + (x + y)z \ge \dfrac{1}{3}xy + (x + y)z \ge 0$

Và có $T \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-2z) + (x+y)z$

$$= \frac{1}{4}(1-z)^2(1-2z) + (1-z)z = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$$

Xét $f(z) = -2z^3 + z^2 + 1$, $0 \le z \le \frac{1}{3}$ thì

$f'(z) = -6z^2 + 2z = 2z(1-3z) \ge 0$ trên f(z) đồng biến trên $[0; \frac{1}{3}]$, do đó:

$$T = f(z) \le f(\frac{1}{3}) = \frac{7}{27}.$$

b) Ta có: $xyz\left[x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+1\right]$

$= x^2y + x^2z + y^2x + z^2x + z^2y + yz^2 + xyz$

$= (x+y+z)(xy+yz+zx) - 2xyz = xy + yz + zx - 2xyz$

Vì $x + y + z = 1 \Rightarrow \exists$ ít nhất 1 trong 3 số x, y, $z \le \frac{1}{3}$. Giả sử $z \le \frac{1}{3}$

$\Rightarrow S(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-2z) + (x+y)z$

$$\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-2z) + (x+y)z = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-2z) + (1-z)z = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{4}$$

Xét $f(z) = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{4}$ trong $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ thì $f'(z) = \frac{-3z^2 + z}{2} \ge 0$ trên $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ nên

f đồng biến, do đó max $f(z) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$

Vậy $S(x, y, z) \le \frac{7}{27}$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài toán 6. 7: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|\cos b - \cos a| \le |b - a|$ với a,b tùy ý.

b) $\frac{1}{1+(x+1)^2} < \arctan\frac{1}{x^2+x+1} < \frac{1}{1+x^2}$ với mọi x. >0.

Hướng dẫn giải

a) Nếu a = b thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $a \ne b$ thì bất đẳng thức tương đương: $\left|\frac{\cos b - \cos a}{b-a}\right| \le 1$. Không mất tính tổng quát , giả sử b > a.

Hàm số $f(x) = \cos x$ liên tục trên [a;b] và có đạo hàm $f'(x) = -\sin x$.

Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\cos b - \cos a}{b-a} = -\sin c$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\cos b - \cos a}{b-a}\right| = |-\sin c| \le 1\text{: đpcm.}$$

b) BĐT: $\frac{1}{1+(x+1)^2} < \frac{\arctan(x+1) - \arctan x}{(x+1)-x} < \frac{1}{1+x^2}$

Hàm số $f(x) = \arctan x$ liên tục trên $[x;x+1]$ và có $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x;x+1)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\arctan(x+1) - \arctan x}{(x+1)-x} = \frac{1}{1+c^2}$$

Vì $c \in (x;x+1)$ nên $\frac{1}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 8: Cho các số thực dương. Chứng minh .

a) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \le \frac{a+b+c}{2}$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \ge a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{63}{4}$ với tổng a+b+c+d =1.

Hướng dẫn giải

a) Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $a + b + c = 3$. Do đó

$\frac{a^2}{3-a} + \frac{b^2}{3-b} + \frac{c^2}{3-c} \le \frac{3}{2}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$ với $0 < x < 3$.

Ta có $f'(x) = \frac{6x - x^2}{(3-x)^2}; f''(x) = \frac{18}{(3-x)^3}$

Vì $f''(x) > 0$ trên $(0\,;3)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$$VT = f(a) + f(b) + f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

b) Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \ge a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{63}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} - a^2 + \frac{1}{b} - b^2 + \frac{1}{c} - c^2 + \frac{1}{d} - d^2 \ge \frac{63}{4}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ với $0 < x < 1$.

Ta có $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 2x; f''(x) = \frac{2}{x^3} - 2$

Vì f "(x) >0 trên (0 ;1) nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$VT = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq 4f(\frac{a+b+c+d}{4}) = \frac{63}{4}$.

Dấu = xảy ra khi a =b =c =d = $\frac{1}{4}$.

Bài toán 6. 9:. Chứng minh :

a) $(a^a b^b c^c)^2 (a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)})^3 \geq 27$ với a, b, c >0.

b) $a^b b^a \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ với a, b >0.

Hướng dẫn giải

a) Với a, b, c > 0, trước hết ta chứng minh rằng

$(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} . b^{c+a} . c^{a+b}$

$\Leftrightarrow 2[a\ln a + b\ln b + c\ln c] \geq (b + c)\ln a + (c + a)\ln b + (a + b)\ln c$

$\Leftrightarrow \ln a(2a - b - c) + \ln b(2b - c - a) + \ln c(2c - a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(\ln a - \ln b) + (b - c)(\ln b - \ln c) + (c - a)(\ln c - \ln a) \geq 0$: đúng

Ta cần chứng minh rằng

$a^{b+c} . b^{c+a} . c^{a+b} (a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)})^3 \geq 27.$

Đặt $x = a^{b+c}$, $y = b^{c+a}$, $z = c^{a+b}$, x, y, z > 0.

BĐT $\Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 \geq 27 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$: đúng

b) BĐT: $b\ln a + a\ln b \leq (a + b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right) + b\ln\left(\frac{2a}{a+b}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}\ln\left(\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\right) + \ln\left(\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{a}{b}+1}\right) \leq 0$$

Giả sử a ≤ b, đặt $t = \frac{a}{b}$ thì $0 < t \leq 1$.

Bất đẳng thức tương đương: $t\ln\left(\frac{2}{t+1}\right) + \ln\left(\frac{2t}{t+1}\right) \leq 0$, $0 < t \leq 1$.

Xét hàm số $f(t) = t\ln\left(\frac{2}{t+1}\right) + \ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)$, $0 < t \leq 1$.

$$f'(t) = \ln\left(\frac{2}{t+1}\right) - \frac{t}{t+1} + \frac{1}{t(t+1)} = \ln\left(\frac{2}{t+1}\right) + \frac{1-t^2}{t(t+1)}$$

$= \ln\left(\dfrac{2}{t+1}\right) + \dfrac{1-t}{t} > 0$ nên f là hàm đồng biến.

Ta có $f(t) \le f(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 10: Chứng minh rằng

a) $\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x} + \dfrac{4+\sqrt{y}}{4-y} + \dfrac{4+\sqrt{z}}{4-z} \ge 5$ với x, y, z > 0 khác 4.

b) $\ln\dfrac{x+y}{x} > \dfrac{2y}{2x+y}$ với x, y > 0.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm $f(x) = \dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x}$ trên (0; 3). Ta có $f'(1) = \dfrac{13}{18}$ nên tiếp tuyến tại x = 1

là: $y = \dfrac{13}{18}(x-1) + \dfrac{5}{3}$ hay $y = \dfrac{13}{18}x + \dfrac{17}{18}$

Bằng biến đổi tương đương hoặc sử dụng đạo hàm ta chứng minh được:

$\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x} \ge \dfrac{13}{18}x + \dfrac{17}{18}$, với mọi $x \in (0; 3)$

Tương tự: $\dfrac{4+\sqrt{y}}{4-y} \ge \dfrac{13}{18}y + \dfrac{17}{18}$ và $\dfrac{4+\sqrt{z}}{4-z} \ge \dfrac{13}{18}z + \dfrac{17}{18}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên và x + y + z = 3 ta được đpcm.

b) Đặt $\dfrac{x+y}{x} = t > 1 \Leftrightarrow y = x(t-1) \Rightarrow \dfrac{2y}{2x+y} = 2\dfrac{t-1}{t+1}$

Ta cần chứng minh $\ln t > 2\dfrac{t-1}{t+1}, \forall t > 1 \Leftrightarrow \ln t - 2\dfrac{t-1}{t+1} > 0, \forall t > 1$

Xét hàm số $f(t) = \ln t - 2\dfrac{t-1}{t+1}$, $t \in (1, +\infty)$. Ta có:

$f'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{4}{(t+1)^2} = \dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \forall t > 1$ nên f là hàm đồng biến.

Suy ra $f(t) > f(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 11: Cho $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $a_n a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \le 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{n}{1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}} \ge \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_i}$

Hướng dẫn giải

Với $a_1, a_2 > 0$ và $a_1, a_2 \le 1$. Ta chứng minh:

$$\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \ge \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2(1-\sqrt{a_1a_2})}{(1+\sqrt{a_1a_2})(1+a_1)(1+a_2)} \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2$ hoặc $a_1a_2 = 1$

Áp dụng ta có: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i} \le \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_{n+1-i}}}$

Dấu bằng xảy ra khi n chẵn và: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $a_1a_{n+1-i} = 1$

Xét $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, $x \le 0$, $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$; $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} \le 0$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen vào hàm lõm với các $x_i \le 0$ và:

$$e^{x_i} = \sqrt{a_ia_{n+1-i}} \le 1: \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i} \le \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2}{1+\sqrt{a_ia_{n+1-i}}} \le \frac{n}{1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}}.$$

Bài toán 6. 12: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

b) $f_n(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \dfrac{1}{n}\sin nx) \ge 0, \forall x \in [0,\pi]$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên $(0; +\infty)$.

Theo định lí Lagrange, với mọi $n \ge 1$ tồn tại $x_1 \in (n-1; n)$ và $x_2 \in (n; n+1)$ sao cho:

$$f'(x_1) = \frac{f(n)-f(n-1)}{n-(n-1)}, \; f'(x_2) = \frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$$

Hay $\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Vì $0 < x_1 < n < x_2$ nên $\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}} > \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}$

Do đó $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \Rightarrow$ đpcm

b) Xét $x = 0$, $x = \pi$ thì $f_n(x) = 0$: đúng

Xét $0 < x < \pi$. Ta chứng minh qui nạp $f_n(x) \geq 0$

Khi $n = 1$: $f_1(x) = \sin x > 0$, $\forall x \in (0, \pi)$: đúng

Giả sử công thức đúng đến n: $f_n(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, \pi)$

Ta chứng minh: $f_{n+1}(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, \pi)$.Giả sử có số $x_0 \in (0, \pi)$ mà $f_{n+1}(x_0) < 0$. Vì $f_{n++1}(x)$ liên tục và có đạo hàm nên tồn tại điểm cực tiểu x_1 để :$f_{n+1}(x_1) < 0$, $0 < x_1 < \pi$. Ta có

$$f'_{n+1}(x) = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n+1)x = \frac{\sin\frac{2n+3}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Mà $f'_{n+1}(x_1) = 0 \Rightarrow \sin\frac{2n+3}{2}x_1 = \sin\frac{x_1}{2} > 0$

Do đó: $\left|\cos\frac{2n+3}{2}x_1\right| = \left|\cos\frac{x_1}{2}\right| = \cos\frac{x_1}{2} > 0$

Vì $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$ nên

$$(n+1).(f_{n+1}(x_1) - f_n(x_1)) = \sin(n+1)x_1 = \sin\left(\frac{2n+3}{2}x_1 - \frac{x_1}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{2n+3}{2}x_1.\cos\frac{x_1}{2} - \cos\frac{2n+3}{2}x_1.\sin\frac{x_1}{2}$$

$$\geq \sin\frac{2n+3}{2}x_1.\cos\frac{x_1}{2} - \left|\cos\frac{2n+3}{2}x_1\right|.\sin\frac{x_1}{2}$$

$$= \sin\frac{x_1}{2}.\cos\frac{x_1}{2} - \cos\frac{x_1}{2}.\sin\frac{x_1}{2} = 0$$

Do đó: $f_{n+1}(x_1) \geq f_n(x_1) \Rightarrow f_n(x_1) < 0$: vô lý $\Rightarrow$đpcm.

Bài toán 6. 13: Cho a, b, c là những số thực dương sao cho abc = 1.

Chứng minh : $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow a^4 + a^3 + b^4 + b^3 + c^4 + c^3 \geq \frac{3}{4}(a + 1)(b + 1)(c + 1)$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^4 + a^3 + b^4 + b^3 + c^4 + c^3 \geq \frac{1}{4}[(a+1)^3 + (b+1)^3 + (c+1)^3]$$

Xét hàm: $f(t) = t^4 + t^3 - \frac{1}{4}(t + 1)^3$

$$g(t) = (t + 1)(4t^2 + 3t + 1) \text{ thì } f(t) = \frac{1}{4}(t - 1).g(t)$$

Vì g(t) là hàm số tăng trong khoảng $(0, +\infty)$ và $g(t) > 0, \forall t > 0$.

Do đó $a^4 + a^3 + b^4 + b^3 + c^4 + c^3 - \frac{1}{4}[(a+1)^3 + (b+1)^3 + (c+1)^3]$

$= f(a) + f(b) + f(c) = \frac{1}{4}(a - 1)g(a) + \frac{1}{4}(b - 1)g(b) + \frac{1}{4}(c - 1)g(c)$

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì $g(a) \geq g(b) \geq g(c) > 0$

Vì $abc = 1$ nên ta có: $a \geq 1, c \leq 1$

Từ đó: $(a - 1)g(a) \geq (a - 1)g(b)$ và : $(c - 1)g(b) \leq (c - 1)g(c)$

Nên: $\frac{1}{4}(a - 1)g(a) + \frac{1}{4}(b - 1)g(b) + \frac{1}{4}(c - 1)g(c)$

$\geq \frac{1}{4}[(a - 1) + (b - 1) + (c - 1)]g(b) = \frac{1}{4}(a + b + c - 3)g(b)$

$\geq \frac{1}{4}(3\sqrt[3]{abc} - 3)g(b) = 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Từ đó $\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 6. 14: Chứng minh bất đẳng thức sau:

$x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0$ với $x \geq y \geq z > 0$; $a \geq b > 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ với $\frac{a}{b} \geq 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1} \Rightarrow f''(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} - 1\right)x^{\frac{a}{b}-2} > 0$$

Do đó $f'(x)$ tăng trên (z^b, y^b)

Theo định lí Lagrange: $f(y^b) - f(z^b) = f'(c_1)[y^b - z^b]$, $c_1 \in (z^b, y^b)$

$$y^a - z^a = f'(c_1)[y^b - z^b]$$

Tương tự: $x^a - y^a = f'(c_2)[x^b - y^b]$, $c_2 \in (y^b, x^b)$

nên: $(x^a - y^a)(y^b - z^b) = f'(c_2)[x^b - y^b][y^b - z^b]$

$(y^a - z^a)(x^b - y^b) = f'(c_1)[x^b - y^b][y^b - z^b]$

Và $c_2 \geq c_1$ nên $f'(c_2) \geq f'(c_1) \Rightarrow (x^a - y^a)(y^b - z^b) \geq (y^a - z^a)(x^b - y^b)$

$\Rightarrow x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0$ (đpcm)

Bài toán 6. 15: Cho 4 số không âm a, b, c, d thoả a + b + c + d = 1. Chứng minh: $abc + bcd + cda + dab \le \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$.

Hướng dẫn giải

Đặt $F(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd$

Không mất tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất, d là số bé nhất trong 4 số a, b, c, d. Ta có: $F(a, b, c, d) = bc(a + d) + ad(b + c - \frac{176}{27}bc)$

Nếu $b + c - \frac{176}{27}bc \le 0$ thì:

$$F(a, b, c, d) \le bc(a + d) \le \left(\frac{b+c+a+d}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Nếu $b + c - \frac{176}{27}bc > 0$ thì:

$$F(a, b, c, d) \le bc(a + d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$$

$$= F\left(\frac{a+d}{2},\ b,\ c,\ \frac{a+d}{2}\right)$$

Đặt $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$, $d_0 = d$ và gọi a_1, b_1, c_1, d_1 là 4 số $\frac{a+d}{2}$, b, c, $\frac{a+d}{2}$ theo thứ tự giảm dần.

Nếu $b_1 + c_1 - \frac{176}{27}b_1c_1 \le 0$ thì tương tự lí luận trên:

$F(a_1, b_1, c_1, d_1) \le F(a_2, b_2, c_2, d_2)$ với a_2, b_2, c_2, d_2 là 4 số $\frac{a_1+d_1}{2}$, b_1, c_1, $\frac{a_1+d_1}{2}$ theo thứ tự giảm dần.

Tiếp tục quá trình này ta lập được dãy (a_n, b_n, c_n, d_n) vô hạn (vì nếu hữu hạn thì ta có $F(a, b, c, d) \le \frac{1}{27}$) thoả 2 tính chất sau đây:

(1) a_{n+1}, b_{n+2}, c_{n+1}, d_{n+1} là 4 số theo thứ tự giảm dần của 4 số

$$\frac{a_n+d_n}{2},\ b_n,\ c_n,\ \frac{a_n+d_n}{2}$$

(2) $F(a_n, b_n, c_n, d_n) \le F(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$

Từ tính chất (1) ta suy ra: $0 \le a_{n+2} - d_{n+2} \le \dfrac{a_n - d_n}{2}$, $n \ge 0$

Và vì thế a_n, b_n, c_n, d_n cùng có giới hạn là $\dfrac{1}{4}$.

Do tính liên tục của hàm F(a, b, c, d) ta có:

$$F(a, b, c, d) < \lim_{n\to\infty} F(a_n, b_n, c_n, d_n) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi: bốn số bằng $\dfrac{1}{4}$ khi dãy vô hạn, hay một số bằng 0 và ba số còn lại bằng $\dfrac{1}{3}$ khi dãy hữu hạn.

Bài toán 6. 16: Cho a, b, c ≥ -1, a + b + c = 1.

Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{b}{1+b^2} + \dfrac{c}{1+c^2} \le \dfrac{9}{10}$.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Nếu $(x + y)(xy - 3) \le 0$ thì $f(x) + f(y) \le 2f(\dfrac{x+y}{2})$

Chứng minh: Ta có: $f(x) + f(y) \le 2f(\dfrac{x+y}{2})$

$\Leftrightarrow [x(1+y^2) + y(1+x^2)]\,[(4 + (x+y)^2] \le 4(x+y)(1+x^2)(1+y^2)$

$\Leftrightarrow (x+y)\,[4(1+x^2)(1+y^2) - (1+xy)(4 + x^2 + y^2 + 2xy)] \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)[2x^2y^2 + 3(x^2 + y^2) - 6xy - (x^2 + y^2)xy] \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(3 - xy)(x - y)^2 \ge 0$.Từ đó suy ra đpcm

Trở lại bài toán. Ta xét hai trường hợp

– Tồn tại 1 trong 3 số, chẳng hạn c, sao cho $-\dfrac{1}{3} \le c \le 1$. Khi đó:

$a + b \ge 0$, $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{(1-c)^2}{4} < 3$;$c + \dfrac{1}{3} \ge 0$, $\dfrac{c}{3} < 3$

$$\frac{(a+b)}{2} + \frac{(c+\frac{1}{3})}{2} \ge 0,\ \left[\frac{(a+b)}{2}\right]\left[\frac{(c+\frac{1}{3})}{2}\right] \le \frac{(a+b+c+\frac{1}{3})^2}{4} = \frac{4}{9} < 3$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(\frac{1}{3}) \le 2f(\frac{a+b}{2}) + 2f(\frac{c+\frac{1}{3}}{2}) \le 4f(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+\frac{1}{3}}{2}}{2})$$

$= 4f(\frac{1}{3}) = \frac{12}{10}$. Từ đó suy ra đpcm.

– Cả ba số a, b, c đều không nằm trong đoạn $[-\frac{1}{3}, 1]$. Khi đó do điều kiện $a, b, c \ge -1$, ta phải có hai số âm và 1 số dương (Nếu ngược lại, giả sử $b, c > 0$ thì ta có $a+b+c > -1 + 1 + 1 = 1$, vô lý). Giả sử, chẳng hạn $a, b < 0$.

Khi đó $f(a) + f(b) + f(c) \le f(c) \le \frac{1}{2} < \frac{9}{10}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 6. 17: Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \ge \frac{2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki:

$$\left[\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c}\right]$$

$[a(b+2c+3d) + b(c+2d+3a) + c(d+2a+3b) + d(a+2b+3c)] \ge (a+b+c+d)^2$

Do đó: $\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c}$

$$\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Ta chứng minh: $\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \ge \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3(a + b + c + d)^2 \ge 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \ge 0$: Đúng

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$.

Bài toán 6. 18: Cho 3 số không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4+2\ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2\ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2\ln(1+z)-x}$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $0 \le x, y, z \le 3$ nên $4 + 2\ln(x + 1) - y > 0$

và $4 + 2\ln(y + 1) - z > 0$ và $4 + 2\ln(z + 1) - x > 0$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P \ge \frac{9}{12 + 2\ln(x+1) - x + 2\ln(y+1) - y + 2\ln(z+1) - z}$$

Xét $f(t) = 2\ln(1 + t) - t$ với $0 \le t \le 3$ với $f'(t) = \frac{1-t}{1+t}$

$f'(t) = 0$ có một nghiệm $t = 1$.

Lập bảng biến thiên thì được

$$-1 < f(t) \le -1 + \ln 4,\text{ suy ra: } -3 < f(x) + f(y) + f(z) \le -3 + 3\ln 4$$

Do đó: $P \ge \frac{3}{3+\ln 4}$.$\min P = \frac{3}{3+\ln 4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài toán 6. 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x| + \left|1 + \frac{2}{x-1}\right|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = |x| + \left|1 + \frac{2}{x-1}\right| = |x| + \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. Điều kiện $x \ne 1$.

Khi $-1 \le x \le 0$ thì hàm số $y = \frac{x^2+1}{1-x}$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$.

$$y(-1) = 1,\ y(0) = 1,\ f(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$$

So sánh thì $\min\limits_{-1 \le x \le 0} y = 2\sqrt{2} - 2$ tại $x = 1 - \sqrt{2}$.

Khi $x < -1$ hoặc $x > 1$ thì $y > 1 > 2\sqrt{2} - 2$

Khi $0 < x < 1$ thì $y > 1 > 2\sqrt{2} - 2$.

Vậy $\min y = 2\sqrt{2} - 2$ tại $x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài toán 6. 20: Cho các số nguyên dương p, q, n.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $y = \cos^p x.\sin qx$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \tan^n x + \cot^n x - n^2\cos^2 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \ge 0$, $\cos x \ge 0$ nên $y \ge 0$.

Ta có $y^2 = (\cos^2 x)^p.(\sin^2 x)^q$. Đặt $t = \cos^2 x$, $0 \le t \le 1$ thì

$$y^2 = f(t) = t^p.(1-t)^q,\ f'(t) = t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.[p-(p+q)t]$$

nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{p}{p+q}$ hoặc $t = 1$.

Ta có $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{p}{p+q}\right) = \frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}} > 0$ nên suy ra $\max y = \sqrt{\frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}}$.

b) Xét $0 < x \le \frac{\pi}{4}$ thì $\cot x > \tan x > 0$, $\sin 4x > 0$

Ta có $y' = n\tan^{n-1}x(1+\tan^2 x) - n.\cot^{n-1}x(1+\cot^2 x)$

$$- 4n^2\cos 2x.\sin 2x$$

$= n(\tan^{n-1} - \cot^{n-1}x) + n(\tan^{n+1}x - \cot^{n+1}x) - 2n^2\sin 4x < 0$.

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{4}]$ nên $\min\limits_{x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)} y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Xét $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến, do đó $\min\limits_{x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Vậy $\min y = 2$.

Bài toán 6. 21: Cho các số thực x, y thoả mãn $(x+y)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Hướng dẫn giải

Kết hợp $(x+y)^3 + 4xy \ge 2$ với $(x+y)^2 \ge 4xy$ suy ra:

$$(x+y)^3 + (x+y)^2 \ge 2 \Rightarrow x + y \ge 1.$$

$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$

$= \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4+y^4) - 2(x^2+y^2) + 1$

$\ge \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1$

$\Rightarrow A \ge \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1$. Đặt $t = x^2 + y^2$, ta có

$$x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow t \ge \frac{1}{2},\ \text{do đó } A \ge \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$$

Xét $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$; $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0$ với mọi $t \ge \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$. Do đó $A \geq \frac{9}{16}$ dấu = xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{9}{16}$.

Bài toán 6. 22: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $4(a + b + c) - 9 = 0$. Tìm GTNN của $S = \left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^c$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\ln S = a\ln(a+\sqrt{a^2+1} + b\ln(b+\sqrt{b^2+1}) + c\ln(c+\sqrt{c^2+1})$

Xét hàm số $f(x) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\ f''(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0,\ \forall x.$$

Suy ra f(x) là hàm lõm trên **R** nên có tiếp tuyến tại mọi điểm luôn nằm dưới đồ thị. Tiếp tuyến của $f(x) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ tại $x = \frac{3}{4}$ là

$$y = \left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}.$$

Do đó $x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \geq \left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ và đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{4}$. Từ đó, ta được

$$M = f(a) + f(b) + f(c) \geq \left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)(a+b+c) - \frac{27}{20}$$

$$= \left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)\frac{9}{4} - \frac{27}{20} = \frac{9\ln 2}{4} \text{ nên } \ln S \geq \frac{9\ln 2}{4} \Leftrightarrow S \geq 2^{\frac{9}{4}} = 4\sqrt[4]{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$, đạt được khi $a = b = c = \frac{3}{4}$.

Bài toán 6. 23: Cho x > 0 và y tuỳ ý. Tìm GTLN, GTNN của

$$M = \frac{xy^2}{(x^2+3y^2)(x+\sqrt{x^2+12y^2})}$$

Hướng dẫn giải

Xét y = 0 thì M = 0. Xét $y \neq 0$ thì:

$$M = \frac{xy^2(\sqrt{x^2+12y^2}-x)}{(x^2+3y^2).12y^2} = \frac{\sqrt{1+\frac{12y^2}{x^2}}-1}{3\left(4+\frac{12y^2}{x^2}\right)}$$

Đặt $t = \frac{12y^2}{x^2}, t > 0$ thì $M = f(t) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)}$

Ta có $f'(t) = \frac{2-t+2\sqrt{1+t}}{6(t+4)^2.\sqrt{1+t}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 8$.

BBT

x	0		8		$+\infty$
f '		+	0	+	
f	0	↗	1/18	↘	0

Do đó: $0 < M \le \frac{1}{18}$. Kết hợp thì $0 \le M \le \frac{1}{18}$.

Vậy $\max M = \frac{1}{18}$ khi $2x^2 = 3y^2$, $\min M = 0$ khi $y = 0$.

Bài toán 6. 24: Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn điều kiện :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2 + 3xyz.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x^3 + y^3 + z^3 = 2 + 3xyz$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2$

$\Leftrightarrow (x + y + z)\left[\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2) - \frac{1}{2}(x+y+z)^2\right] = 2$

Đặt $t = x + y + z$. Khi đó $t > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3t^2} = \frac{2(t^3-2)4}{3t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$

Lập BBT thì $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $t = \sqrt[3]{2}$

Ta có $P \ge x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt[3]{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[3]{2}$, $y = z = 0$.

Vậy $\min P = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $x = \sqrt[3]{2}$, $y = z = 0$.

Bài toán 6. 25: Cho các số thực x, y, thỏa mãn điều kiện :

$$x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + 2(x + 1)(y + 1) + 8\sqrt{4-x-y}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq$, $y \geq 1$. Suy ra $x + y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $(au + bv)^2 \leq (a^2 + b^2)(u^2 + v^2)$ ta có:

$$(x+y)^2 = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}\right)^2 = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2 \leq 3(x+y)$$

Suy ra $0 \leq x + y \leq 3$. Đặt $t = x + y$ thì $t \in [0, 3]$

$$P = (x + y)^2 + 2(x+y) + 8\sqrt{4-(x+y)} + 2 = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$$

Xét hàm $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$ trên $[0;3]$

$$f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}};\ f''(t) = 2 - \frac{2}{(\sqrt{4-t})^3} > 0 \text{ với mọi } t \in [0;3]$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Do đó $f'(t) > f'(0) = 0$ với mọi $t \in [0;3]$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Vậy $\max P = \max\limits_{[0;3]} f(t) = f(3) = 25$, đạt khi $t = 3 \Leftrightarrow x = 2, y = 1$

$\min P = \min\limits_{[0;3]} f(t) = f(0) = 18$, đạt khi $t = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 1$

Bài toán 6. 27: Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn:

$$x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = (x + y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ với mọi a, b. Áp dụng :

$$x\sqrt{2-y^2} \leq \frac{x^2+2-y^2}{2},\ y\sqrt{2-x^2} \leq \frac{y^2+2-x^2}{2}$$

Suy ra $2 = x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} \leq 2$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $x = \sqrt{2-y^2}$ và $y = \sqrt{2-x^2}$.

Suy ra $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 2$

Đặt $t = x + y$. Khi đó $0 \leq t \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2$

Đặt $t = x + y$. Khi đó $t \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2$

Mặt khác $t^2 = (x + y)^2 \geq x^2 + y^2 = 2$. Suy ra $t \geq \sqrt{2}$

Do đó $t \in [\sqrt{2}; 2]$. Ta có $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = \dfrac{t^2}{2} - 1$

Suy ra $P = (x + y)^3 + 12(x + y) - 12xy - 12 + \sqrt{xy}$

$$= (x + y)^3 + 12(x + y) - 12\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) - 12 + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}$$

Xét hàm $f(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\dfrac{t^2}{2} - 1}$ trên $[\sqrt{2}; 2]$. Ta có:

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 + \dfrac{t}{2\sqrt{\left(\dfrac{t^2}{2} - 1\right)^3}} > 0$, với mọi $t \in \sqrt{2}; 2]$ nên f(t) đồng biến trên $[\sqrt{2}; 2]$

Vậy $\max\limits_{[\sqrt{2};2]} f(t) = f(2) = 9$; $\min\limits_{[\sqrt{2};2]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 14\sqrt{2} - 12$.

Bài toán 6. 28: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$x + y + z = 4 \text{ và } xy + yz + zx = 5.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y + z = 4 - x \\ yz = 5 - x(4 - x) \end{cases}$

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (4 - x)^2 \geq 4[5 - x(4 - x)] \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

Mà: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$

$= (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)] + 3xyz$

$= 4 + 3xyz$,nên

$P = (4 + 3xyz).\dfrac{xy + yz + zx}{xyz} = \dfrac{20}{xyz} + 15 = \dfrac{20}{x^3 - 4x^2 + 5x} + 15$

Xét hàm $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ trên $\left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{5}{3}$

$f(1) = f(2) = 2$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{27}$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{50}{27}$

Do đó $0 < f(x) \le 2$ với mọi $x \in \left[\frac{2}{3};2\right]$ nên $P \ge 25$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2$, $y = z = 1$ hoặc các hoán vị

Vậy min $P = 25$, đạt được khi $x = 2$, $y = z = 1$ hoặc các hoán vị.

Bài toán 6. 29: Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} - \frac{16}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $1 + a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{2}(1+a)^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 \ge \frac{1}{4}(1+a+b+c)^2$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}} \le \frac{2}{1+a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)} \le \frac{a+b}{2}.\frac{a+2c+b+2c}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(a+b)(a+b+4c) = \frac{1}{12}.3(a+b)(a+b+4c)$$

$$\le \frac{1}{12}\frac{\left[3(a+b)+(a+b+4c)\right]^2}{4} = \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} \ge \frac{3}{(a+b+c)^2}$

nên $P \ge \frac{27}{(a+b+c)^2} - \frac{32}{1+a+b+c}$

Đặt $t = a + b + c$ thì $t > 0$ và $P \ge \frac{27}{t^2} - \frac{32}{t+1}$

Xét hàm $f(t) = \frac{27}{t^2} - \frac{32}{t+1}$ trên $(0; +\infty)$, $f'(t) = -\frac{54}{t^3} + \frac{32}{(t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(16t^2 + 21t + 9) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Lập BBT thì $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = -5$

Do đó $P \geq -5$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -5, đạt khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 6. 30: Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|+2}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $|\sin x| = t$, $0 \leq t \leq 1$ thì $y = 4^t + 2^{\sqrt{1-t^2}+2}$, $0 \leq t \leq 1$.

$$y' = 4^t \ln 4 + 2^{\sqrt{1-t^2}+2}.\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 4^t = 2^{\sqrt{1-t^2}}.\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow \dfrac{2^{2t}}{2t} = \dfrac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{2^u}{u}$, $0 < u < 2$.

$f'(u) = \dfrac{u2^u \ln 2 - 2^u}{u^2} = \dfrac{2^u(u.\ln 2 - 1)}{u^2}$; $f'(u) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < u \leq \dfrac{1}{\ln 2}$

Vì $1 < \dfrac{1}{\ln 2} < 2$ và $f(1) = f(2) = 2$.

Suy ra $f(u) \leq 2, \forall u \in [1; 2]$ và $f(u) > 2, \forall u \in (0; 1)$

Giả sử $1 \leq 2t < 2$ thì $\dfrac{2^{2t}}{2t} \leq 2 < \dfrac{2^{\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$: không thỏa mãn.

Do đó $0 < 2t < 1$. Vì f(u) nghịch biến trên (0; 1) nên phương trình

$f(2t) = f(\sqrt{1-t^2}) \Leftrightarrow 2t = \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta có $y(0) = 9$, $y(1) = 8$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, so sánh thì

$\min y = 8$, khi $\cos x = 0$ và $\max y = 5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, khi $|\sin x| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 6. 31: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x + y + z = 0$ nên $z = -(x + y)$ và có 2 số không âm hoặc không dương. Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $xy \geq 0$

Ta có $P = 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12(x^2 + y^2 + xy)}$

$$= 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]}$$

$$\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]}$$

$$\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{3|x+y|}{2}} - 2\sqrt{3}\left|x+y\right|.$$

Đặt t = $|x+y| \geq 0$, xét f(t) = $2.(\sqrt{3})^{3t} - 2\sqrt{3}t$

$f'(t) = 2.3(\sqrt{3})^{3t}.\ln\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{3t}\ln\sqrt{3} - 1) > 0$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2$

Mà $3^{|x-y|} \geq 3^0 = 1$ nên $P \geq 3^0 + 2 = 3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy min P = 3.

Bài toán 6. 32: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện : $3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + ab + bc + ca$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết a, b, c không âm thỏa mãn:

$3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 12$.

ta có $a + b + c = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Và $12 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$

$12 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \in [3, 4]$

Đặt $t = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}$ thì $t \in [2; 3]$

Do đó $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}} + 12 - 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$$= \frac{\frac{1}{5}(24 - t^2)}{t} + 12 - 3.\frac{24 - t^2}{5} = \frac{1}{5}\left(3t^2 - t + \frac{24}{t}\right) - \frac{12}{5}$$

Xét hàm $f(t) = 3t^2 - t + \dfrac{24}{t}$ trên [2; 3].

$f'(t) = 6t - 1 - \dfrac{24}{t^2} = (t - 1) + \left(5t - \dfrac{24}{t^2}\right) > 0$ với mọi $t \in [2; 3]$

nên f đồng biến trên đoạn [2;3]

Do đó $\max\limits_{[2;3]} f(t) = f(3) = 32$; $\min\limits_{[2;3]} f(t) = f(2) = 22$ nên $2 \le P \le 4$.

Vậy max P = 4, đạt khi a = b = c = 1.

Min P = 2, đạt khi a = 2, b = c = 0 hoặc các hoán vị.

Bài toán 6. 33: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2.$$

Hướng dẫn giải

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ta có $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Chọn $\vec{u} = (x;\ \sqrt{2x};\ 1)$, $\vec{v} = (1;\ \sqrt{2y};\ z)$ thì

$$(x + 2\sqrt{xy} + z)^2 = (x - 1 + \sqrt{2x}.\sqrt{2y} + 1.z)^2 \le (x^2 + 2x + 1)(1 + 2y + z^2)$$

Do đó: $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2 \le 1 + 2y + z^2$.

Tương tự $\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2 \le 1 + 2z + x^2$; $\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2 \le 1 + 2x + y^2$

Nên $P \le 3 + 2(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 \le 6 + 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 12$

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1

Vậy giá trị lớn nhất của P là 12, dấu = khi x = y = z = 1

Bài toán 6. 34: Cho các số thực x, y, z đều thuộc đoạn [0; 1]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3+3}{y^2+2} + \frac{y^3+3}{z^2+2} + \frac{z^3+3}{x^2+2}$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b $\in$ [0; 1] nên ta có:

$$\frac{a^3+3}{b^2+2} \le \frac{a^2+3}{b^2+2} = (a^3+3).\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{b^2+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2+3) - \frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{b^2+2}$$

$$\le \frac{1}{2}(a^2+3) - \frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{3} = \frac{1}{2}(a^2-b^2) + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}a^2b^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b $\in$ {0, 1}.

Tương tự : $\dfrac{b^3+3}{c^2+2} \le \dfrac{1}{2}(b^2-c^2)+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}b^2c^2$

$\dfrac{c^3+3}{a^2+2} \le \dfrac{1}{2}(c^2-a^2)+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}c^2a^2$

Suy ra $P \le \dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{6}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le \dfrac{9}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{9}{2}$, đạt được khi trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.

Bài toán 6. 35: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện : $4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $3xyz = 4(x+y+z) \ge 4.3\sqrt{xyz}$ nên $xyz \ge 8$

Và: $2+x+yz \ge 2\,2\sqrt{2x}+yz \ge 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz} = 2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}} \ge 4\sqrt{2}.\sqrt[4]{yz}$

Suy ra $\dfrac{1}{2+x+yz} \le \dfrac{1}{4\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt[4]{yz}} \le \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{yz}}\right)$

$$\le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{2+x+yz} \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{zx}\right)$, $\dfrac{1}{2+x+yz} \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{xy}\right)$

Do đó $P \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$

Vậy max $P=\dfrac{3}{8}$, khi $x=y=z=2$.

Bài toán 6. 36: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases}-x^2+4x+21 \ge 0\\ -x^2+3x+10 \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 5$. Với $-2 < x < 5$:

$$y'=\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}-\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

$$= \frac{(4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10}-(3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}}{2\sqrt{-x^2+4x+21}.\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

Cho y' = 0 $\Leftrightarrow (4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} = (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-2x)(3-2x) \geq 0 \\ (4-2x)^2(-x^2+3x+10) = (3-2x)^2(-x^2+4x+11) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \text{ hay } x > 2 \\ -51x^2 + 104x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ta có $y(-2) = 3; y(\frac{1}{3}) = \sqrt{2}; y(5) = 4$. Vậy min y = $\sqrt{2}$ tại x = $\frac{1}{3}$.

Bài toán 6. 37: Cho hàm số f, xác định trên **R** và thoả mãn:

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số g(x) = f(x).f(1 – x) trên đoạn [–1; 1]

Hướng dẫn giải

Đặt z = cotx thì f(z) = f(cotx) = sin2x + cos2x = $\frac{z^2+2z-1}{z^2+1}$

suy ra g(x) = $\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}.\frac{(1-x)^2+2(1-x)-1}{(1-x)^2+1}$

Đặt y = 1 – x và t = xy.Do x ∈ [–1; 1] nên ta có t ∈ [–2; $\frac{1}{4}$]

thì g(x) = $\frac{t^2+8t-2}{t^2-2t+2} = h(t)$

h'(t) = $-\frac{2(5t^2-4t-6)}{(t^2-2t+2)^2}$,$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2-\sqrt{34}}{5}$

Lập BBT thì: $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x) = \max\limits_{t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$

$\min\limits_{x\in[-1;\,1]} g(x) = \min\limits_{t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t) = h\left(\frac{2-\sqrt{34}}{5}\right) = 4-\sqrt{34}$.

Bài toán 6. 38: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt $x=\frac{a}{c}$; $y=\frac{b}{c}$ thì $(x+1)(y+1)=4$

$\Leftrightarrow S+P=3 \Leftrightarrow P=3-S$. Do đó

$$P=32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=8\left[\frac{S^2+3S-2P}{3S+P+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left[\frac{S^2+3S-2(3-S)}{3S+(3-S)+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=8\left(\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left(\frac{S-1}{2}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=(S-1)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}, S\geq 2$$

$P'=3(S-1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}>0, \forall S\geq 2$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $x=y=1$.

Vậy $\min P=P(2)=1-\sqrt{2}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 6. 1: Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $\tan x > x+\frac{x^3}{3}$ với mọi $x\in(0;\frac{\pi}{2})$

b) $b.\tan a > a.\tan b$ với $0<a<b<\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn

a) Xét $f(x)=\tan x - x - \frac{x^3}{3}, 0\leq x<\frac{\pi}{2}$

b) Xét $f(x)=\frac{\tan x}{x}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$

Bài tập 6. 2: Cho a, b, c là các số dương, đặt $X = \dfrac{b+c}{a+b+c}, Y = \dfrac{c+a}{a+b+c}$.

Chứng minh $\dfrac{1}{1+X^2} + \dfrac{1}{1+Y^2} \le \dfrac{8}{5}$.

Hướng dẫn

$X + Y = \dfrac{a+b+2c}{a+b+c} \ge 1$, nếu cố định X và giảm giá trị của Y thì vế trái của bất đẳng thức tăng lên nên ta chỉ cần chứng minh khi $X + Y = 1$.

Bài tập 6. 3: Chứng minh

a) $\dfrac{(a-b)^2}{8a} \le \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \dfrac{(a-b)^2}{8b}$ với $a \ge b > 0$.

b) $\dfrac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} + \dfrac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \dfrac{(c+b-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \ge \dfrac{1}{2}$ với a, b, c > 0.

Hướng dẫn

a) Dùng định lý Lagrange

b) VT bậc 0. Đặt $x = \dfrac{a}{(a+b+c)}$, $y = \dfrac{b}{(a+b+c)}$, $z = \dfrac{c}{(a+b+c)}$

Bài tập 6. 4: Chứng minh

a) $\dfrac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \dfrac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \dfrac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \le \dfrac{6}{5}$ với a, b, c>0.

b) $\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1} \le \dfrac{9}{10}$ với a, b, c $\ge \dfrac{-3}{4}$ và a +b +c =1.

Hướng dẫn

a) Chuẩn hóa: a + b + c = 3 và dùng tiếp tuyến tại x =1

b) Tiếp tuyến tại $x = \dfrac{1}{3}$ của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Bài tập 6. 5: Chứng minh

a) $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \ge \sqrt{3}$ với tam giác ABC.

b) $\dfrac{2x^n}{1+x^{n+1}} \le \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n-1} \le \dfrac{1}{n}.\dfrac{x^n-1}{x-1}$ với $x > 0, x \ne 1, n \ge 1.\ n \in \mathbf{N}$

Hướng dẫn

a) Dùng bất đẳng thức Jensen cho f(x) = $\tan\dfrac{x}{2}$, $0 < x < \pi$

b) Chứng minh bằng quy nạp

Bài tập 6. 6: Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn, cạnh là a,b,c. Chứng minh:

a) $\pi(a+b+c)\le 3(aA+bB+cC)$ b) $3(a+b+c)\le\pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)$

Hướng dẫn

a) Áp dụng bất đẳng thức Trebusep

b) Áp dụng bất đẳng thức Trebusep

Bài tập 6. 7: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{|x|}{2019+|x|}+\frac{|y|}{2019+|y|}\ge\frac{|x-y|}{2019+|x-y|}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$ với a, b, c > 0.

Hướng dẫn

a) Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{2019+t}, t\ge 0$,

b) BĐT $\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$

$\le \frac{a^2c}{b}+a^2+ab+ac+\frac{b^2(a+b)}{c}+b^2+ab+c^2+bc\frac{cb(b+c)}{a}$

Bài tập 6. 8: Chứng minh rằng:

a) $(\cot x)^{\cos 2x}\ge\frac{1}{\sin 2x}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|\le\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ với a, b, c $\in$ [1, 2].

Hướng dẫn

a) Đặt $t=\tan^2 x$, t >0. Đưa về $t.\ln t \ge (t+1).\ln\frac{t+1}{2}$.

b) Dồn biến với giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$.

Xét $f(a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\Rightarrow f'(a)\ge 0$

Bài tập 6. 9: Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)}+$

$+\frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}\ge\frac{a+b+c+d}{4}$

b) $2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)+12abc\ge\frac{5}{3}$, $a+b+c=1$.

Hướng dẫn

a) Dùng BCS.

b) Đặt x = ab + bc + ca, y = abc.

Đưa về chứng minh: $18y - 12x + 5 \geq \frac{5}{3}$.

Bài tập 6. 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{\sin x + 4} - \frac{1}{\cos x - 4}$ b) $f(x) = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$

Hướng dẫn

a) Đặt t= cosx – sinx rồi xét hàm.

Kết quả $\min f = \frac{4}{8+\sqrt{2}}; \max f = \frac{4}{8-\sqrt{2}}$

b) Kết quả max f = $\frac{5}{27}$, min f = 0.

Bài tập 6. 11: Cho các số dương có tổng bằng 1.

a) Tìm GTNN của $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

b) Tìm GTLN của $\frac{1-b-c}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1-c-a}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1-a-b}{\sqrt{1+c^2}}$

Hướng dẫn

a) Dùng phương pháp tiếp tuyến. Kết quả $\frac{1}{8}$ khi a = b =c = d = $\frac{1}{4}$.

b) Kết quả $\frac{3}{\sqrt{10}}$ khi a = b =c = $\frac{1}{3}$.

Bài tập 6. 12: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thoả mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^3 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

Hướng dẫn

$S = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy$

$= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12.$

Đặt t = xy, ta được $S = 16t^2 - 2t + 12$

$0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in [0; \frac{1}{4}]$.

Xét hàm $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên đoạn $[0; \frac{1}{4}]$

Kết quả max S = $\frac{25}{2}$, min S = $\frac{191}{16}$.

Chuyên đề 7: NGUYÊN HÀM, HÀM HỮU TỈ, HÀM LƯỢNG GIÁC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Nguyên hàm

Cho K là một khoảng (a;b), nửa khoảng (a;b], [a,b) hay đoạn [a;b]. Hàm số F(x) gọi là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in K$

Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì họ các nguyên hàm của f(x) là: $\int f(x)dx = F(x) + C$, C là hằng số bất kì

– Phương pháp đổi biến số:

Nếu x = u(t) có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int f(x)dx = \int f(u(t)).u'(t).dt$$

Nếu t = v(x) có đạo hàm liên tục trên K và có

$f(x)dx = g(t)dt$ thì: $\int f(x)dx = \int g(t)dt$

– Phương pháp nguyên hàm từng phần: Nếu u(x), v(x) có đạo hàm liên tục trên K thì $\int udv = uv - \int vdu$

Tích phân:

Giả sử f(x) liên tục trên khoảng K và a, b $\in$ K và F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) thì: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

– Phương pháp tích phân đổi biến số:

Nếu x = u(t) có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$ thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t).dt$$

Nếu t = v(x) có đạo hàm liên tục và f(x)dx = g(t)dt thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt$$

– Phương pháp tích phân từng phần:

Nếu u(x), v(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [a;b] thì

$$\int_a^b udv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$$

Tổng tích phân

Cho *f* là một hàm số xác định trên [a,b] (a < b). Phân hoạch T đoạn [a,b] thành n đoạn nhỏ bởi những điểm chia tùy ý $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ ta lấy một điểm ξ_i và lập tổng tích phân $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Kí hiệu $d(T) = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$.

Nếu tồn tại giới hạn $I = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm *f* trên đoạn [a,b] và được kí hiệu là: $I = \int_a^b f(x)dx$.

Ta chọn phân hoạch đều $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ thì } \lim S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Nguyên hàm đa thức và phân thức:

$\int dx = x + C$ $\qquad$ $\int k dx = kx + C$ với k là hằng số

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

Với $\alpha \neq -1$ thì $\int x^\alpha.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\int u^\alpha.u'.dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Các biến đổi: chia tách, thêm bớt, khai triển tích số, hằng đẳng thức, phân tích thành phân số đơn giản,...

Tổng quát với hàm hữu tỉ, nếu bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì phải chia tách phần đa thức, còn lại hàm hữu tỉ với bậc tử bé hơn mẫu. Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì phân tích mẫu ra các thừa số bậc nhất (x + a) hay (x^2 + px + q) bậc hai vô nghiệm rồi đồng nhất hệ số theo phần tử đơn giản: $\frac{A}{x+a}$; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; Đồng nhất hệ số ở tử thức thì tính được các hằng số A, B, C,...Kết hợp với các biến đổi sai phân, thêm bớt đặc biệt để phân tích nhanh.

Các dạng tích phân đa thức, phân thức hữu tỉ:

$\int_a^b |P(x)|dx$: Chia miền xét dấu P(x),

$\int_a^b x(mx+n)^\alpha dx$: Đặt u = mx + n hoặc phân tích,

$\int_a^b (mx+n)(px^2+qx+r)^\alpha dx$: Đặt u = px^2 + qx + r,

$\int_a^b (x+m)^\alpha.(x+m)^\beta dx$: Nếu $\alpha < \beta$ thì đặt u = x + n.

– Dạng $\int_a^b \frac{1}{px^2+qx+r}dx$: Lập $\Delta = q^2 - 4pr$.

$\Delta = 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(mx+n)^2}$: Dùng công thức

$\Delta < 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2+k^2}$: Đặt x = ktant

$\Delta > 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2-k^2}$: Biến đổi $\frac{1}{x^2-k^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{x-k} - \frac{1}{x+k}\right)$

– Dạng $\int_a^b \frac{mx+n}{px^2+qx+r}dx$: Lập $\Delta = q^2 - 4pr$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Phân tích và dùng công thức.

$\Delta < 0 \Rightarrow \frac{mx+n}{px^2+qx+r} = \frac{A(px^2+qx+r)'}{px^2+qx+r} + \frac{B}{(x+\alpha)^2+k^2}$

– Dạng $\int_a^b \frac{dx}{x(1+x^n)^m} = \int_a^b \frac{x^{n-1}dx}{x^n(1+x^n)^m}$: đặt $t = 1 + x^n$.

Chú ý : Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [–a; a].

Nếu f lẻ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Nếu f chẵn thì $\int_a^a f(x) = 2\int_0^a f(x)dx$.

Nguyên hàm lượng giác:

$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad\quad$ $\int \cos u.u'.dx = \sin u + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad\quad$ $\int \sin u.u'.dx = -\cos u + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\quad\quad$ $\int \frac{u'}{\cos^2 u}dx = \tan u + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $\quad\quad$ $\int \frac{u'}{\sin^2 u}dx = -\cot u + C$

Các biến đổi: hạ bậc lượng giác, tích thành tổng, theo góc phụ $t = \tan\frac{x}{2}$, ...

$$\frac{1}{\sin(x+a).\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}.\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{1}{\sin(x+\alpha)}$$

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x \pm \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{1}{1\pm\cos(x+\alpha)}$$

$$\frac{\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{A(a\sin x + b\cos x + c)'}{a\sin x + b\cos x + c} + \frac{B}{a\sin x + b\cos x + c}$$

$$\frac{1}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{a\tan^2 x + b\tan x + c}.\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^\alpha} = \frac{A(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)'}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^\alpha}$$

Đặc biệt cận tích phân: đối, bù, phụ thì đặt tương ứng $t = -x$, $t = \pi - x$, $t = \frac{\pi}{2} - x$.

Tích phân liên kết, để tính I thì đặt thêm J mà việc tính tích phân I + J và I – J hoặc I + kJ và I – mJ dễ dàng lợi hơn. Tích phân truy hồi I_n theo I_{n-1} hay I_{n-2} thì $\sin^n x$, $\cos^n x$ tách luỹ thừa 1 và dùng phương pháp tích phân từng phần còn $\tan^n x$, $\cot^n x$ tách lũy thừa 2 và dùng phương pháp tích phân đổi biến số.

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] thì :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx \ ; \ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Các dạng tích phân lượng giác:

$\int_a^b P(x).\sin\alpha x dx$, $\int_a^b P(x).\cos\alpha x dx$: đặt $u = P(x)$, $v' = \sin\alpha x$ hoặc $\cos\alpha x$

$\int_0^{\pi/2} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$

$\int_0^{\pi} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = \pi - t$

$\int_0^{2\pi} R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x = 2\pi - t$

$\int_a^b R(\sin x,\cos x)dx$: đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, đặc biệt:

Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$, $\cot x$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 7. 1: Tính giới hạn dãy u_n xác định bởi :

a) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$.   b) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{i^3 + n^3}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3$. Tổng tích phân của hàm số f trên đoạn [0; 1] là:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4} = u_n$$

Ta có: $\lim S_n = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{4}$.

b) Ta viết $u_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{i^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+1}$ nên u_n chính là tổng tích phân của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ trên đoạn [0; 1].

Do đó: $\lim u_n = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{3}$.

Bài toán 7. 2: Tính giới hạn dãy u_n xác định bởi :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $S = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Ta có:

$$u_n = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = S_{2n} - S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+1}$$

Do đó u_n là tổng tích phân của hàm số $f(x) = \frac{1}{x+1}$ trên đoạn [0; 1].

Suy ra $\lim u_n = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$.

Bài toán 7. 3: Chứng minh:

a) $\lim \int_0^1 x^n \sin\pi x dx = 0$

b) $f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt$ là hàm số chẵn

Hướng dẫn giải

a) Với $x \in [0; 1]$ thì $0 \le x^n \sin\pi x \le x^n$.

Do đó: $0 \le \int_0^1 x^n \sin\pi x dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

Vì $\lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$ đpcm.

b) Đặt $t = -s$ trong tích phân $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt$

ta được $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_0^{x} \frac{s}{\sqrt{1+s^4}} ds = f(x) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 4: Tính đạo hàm các hàm số:

a) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt$ b) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = \cos\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

b) Đặt $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. Gọi F là một nguyên hàm của f, theo định nghĩa tích phân,

ta có: $g(x) = F(3x) - F(2x)$ nên $g'(x) = 3F'(3x) - 2F'(2x) = 3f(3x) - 2f(2x)$

$$= \frac{3(9x^2-1)}{9x^2+1} - \frac{2(4x^2-1)}{4x^2+1}.$$

Bài toán 7. 5:

a) Cho $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

b) Tìm số b dương để tích phân $\int_a^b (x - x^2)dx$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Lấy đạo hàm 2 vế thì có $2xf(x^2) = -\pi x\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$

Cho x = 2: $4f(4) = -2\pi\sin2\pi + \cos2\pi \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$.

b) Xét hàm số $f(x) = \int_0^x (t - t^2)dt$.

Ta có $F'(x) = x - x^2$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên của F(x) trên $(0; +\infty)$ thì F(x) đạt giá trị lớn nhất khi x = 1, do đó b = 1.

Bài toán 7. 6: Chứng minh rằng:

a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$ b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[f(x) + f(-x)\right]dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt u = 1 – x thì du = –dx, $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_1^0 f(1-u)du = \int_0^1 f(1-u)du = \int_0^1 f(1-x)dx$$

b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$ và $\int_{-1}^0 f(x)d = -\int_1^0 f(-u)du = \int_0^1 f(-x)dx$

Do đó $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[f(x) + f(-x)\right]dx$.

Bài toán 7. 7: Cho hàm số f(x) liên tục trên [–a; a]. Chứng minh :

a) Nếu f là hàm số lẻ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

b) Nếu f là hàm số chẵn thì $\int_a^a f(x) = 2\int_0^a f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

$I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

Đổi biến x = –t đối với tích phân $\int_{-a}^0 f(x)dx$ ta được:

a) Nếu f lẻ thì $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_{-a}^0 f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$

$\Rightarrow I = 0$.

b) Nếu f chẵn thì $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx \Rightarrow I = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Bài toán 7. 8: Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Chứng minh:

a) $\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx$ b) $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$ thì dx = –dt, $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = -\int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

b) Đặt $x = \pi - t$ thì dx = –dt, $x = 0 \Rightarrow t = \pi$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$.

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx - \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx$$

Do đó $2\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 9: Tính :a) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}dx$ b) $\int \frac{x^4 - 2}{x^3 - x}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ nên x + 1 = A(x+3) + B(x–2)

Do đó x + 1 = (A + B)x + (3A – 2B), đồng nhất hệ số thì A + B = 1, 3A – 2B = 1

nên $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{2}{5}$.

Do đó: $\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{3}{5(x-2)} + \frac{2}{5(x+3)}\right)dx$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{2}{5}\ln|x+3| + C$$

b) $\frac{x^4 - 2}{x^3 - x} = x + \frac{x^2 - 2}{x^3 - x} = x + \frac{x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)}$

Đặt $\frac{x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ nên $x^2 - 2 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A$,

đồng nhất hệ số thì được

$A = 2, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$, do đó:

$$\int f(x)dx = \int\left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}.\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Bài toán 7. 10: Tính: a) $\int x(3-x)^5dx$ b) $\int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^{57}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = 3 - x \Rightarrow x = 3 - u \Rightarrow dx = -du$

$$\int x(3-5)^5dx = -\int(3-u).u^5.du = \int(u^6-3u^5)du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{3}{6}u^6 + C = (3-x)^6\left(\frac{3-x}{7}-\frac{1}{2}\right)+C$$

b) Đặt $u = \frac{x^3}{18} - 1 \Rightarrow du = \frac{x^2}{6}dx \Rightarrow x^2dx = 6du$

$$\int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^{57}dx = 6\int u^{57}du = \frac{3}{29}u^{58} + C = \frac{3}{29}\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^{58} + C.$$

Bài toán 7. 11: Tính a) $\int\frac{dx}{x(1+x^8)}$ b) $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$

Hướng dẫn giải

a) $$\int\frac{dx}{x(1+x^8)} = \int\frac{x^7dx}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8}\int\frac{d(x^8)}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{1+x^8}+C$$

b) $$\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx = \int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C.$$

Bài toán 7. 12: Tính:

a) $A = \int_2^3(x+2)^2(x-3)^8dx$ b) $B = \int_{-1}^4\left|x^2-4x+3\right|dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x - 3$ thì $x = u + 3$, $dx = du$.

Khi $x = 2$ thì $u = -1$, $x = 3 \Rightarrow u = 0$.

$$A = \int_{-1}^0(u+5)^2u^8du = \int_{-1}^0(u^2+10u+25)u^8du$$

$$= \int_{-1}^{0}(u^{10}+10u^9+25u^8)du = \left(\frac{u^{11}}{11}+u^{10}+\frac{25}{9}u^9\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{-185}{99}$$

b) $B = \int_{-1}^{1}(x^2-4x+3)dx + \int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx + \int_{3}^{4}(x^2+4x-3)dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_{1}^{3} + \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_{3}^{4} = \frac{28}{3}$$

Bài toán 7. 13: Tính $I(m) = \int_{0}^{1}\left|x^2-2x+m\right|dx$.

Hướng dẫn giải

Tam thức $f(x) = x^2 - 2x + m$, $\Delta' = 1 - m$.Ta xét 2 trường hợp sau:

– Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 1 - m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 1$

Khi đó: $I(m) = \int_{0}^{1}(x^2-2x+m)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+mx\right)\Bigg|_{0}^{1} = m - \frac{2}{3}$

– Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Khi đó: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1+\sqrt{1-m} > 1 \\ x_2 = 1-\sqrt{1-m} < 1 \end{array}\right.$

Với $x_2 \le 0$ thì $1-\sqrt{1-m} \le 0$ hay $m \le 0$

$$I(m) = -\int_{0}^{1}(x^2-2x+m)dx = -\left(\frac{x^3}{3}-x^2+mx\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - m$$

Với $x_2 > 0$ thì $0 < m < 1$

$$I(m) = \int_{0}^{1-\sqrt{1-m}}(x^2-2x+m)dx - \int_{1-\sqrt{1-m}}^{1}(x^2-2x+m)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-x^2+mx\right)\Bigg|_{0}^{1-\sqrt{1-m}} - \left(\frac{x^3}{3}-x^2+mx\right)\Bigg|_{1-\sqrt{1-m}}^{1}$$

$$= \frac{4(1-m)\sqrt{1-m}+3m-2}{3}$$

Bài toán 7. 14: Tính:a) $\int_{4}^{5}\frac{3x+1}{x^2-4x+3}dx$ b) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+4}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{3x+1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}$

nên 3x + 1 = (A + B)x – 3A – B.

Đồng nhất hệ số $\begin{cases}A+B=3\\-3A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-2\\B=5\end{cases}$

Vậy $\displaystyle\int_4^5\frac{3x+1}{x^2-4x+3}dx-\int_4^5\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{5}{x-3}\right)dx$

$= (-2\ln|x-1|+5\ln|x\ =\ 3|)\Big|_4^5$ = ln2 + 2ln3 = ln18.

b) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+4}=\int_{-1}^0\frac{dx}{(x+1)^2+3}$.

Đặt x + 1 = $\sqrt{3}\tan t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$.

Khi x = 0 thì t = $\dfrac{\pi}{6}$, khi x = –1 thì t = 0.

$$\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+4}=\int_{-1}^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}(\tan^2t+1)dt}{3(\tan^2t+1)}=\int_{-1}^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}}{3}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}t\Big|_0^{\pi/6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

Bài toán 7. 15: Tính: a) $A=\displaystyle\int_{-2}^4\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2dx$ b) $B=\displaystyle\int_0^2\frac{6x+2}{x^2-x+1}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt t = x + 3 thì x – 2 = t – 5, dx = dt

Khi x = –2 thì t = 1, x = 4 thì t = 7.

$$A=\int_2^7\left(1-\frac{10}{t}+\frac{25}{t^2}\right)dt=\left(t-10\ln t-\frac{25}{t}\right)\Big|_1^7=\frac{192}{7}-10\ln7$$

b) $B=\displaystyle\int_0^2\frac{3(2x-1)+5}{x^2-x+1}dx=3\int_0^2\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+5\int_0^2\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$3\int_0^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=3\ln\left|x^2-x+1\right|\Big|_0^2=3\ln3$$

Đặt $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2t)dt$

Khi x = 0 thì $t = -\frac{\pi}{6}$, x = 2 thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$$5\int_0^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 5\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sqrt{3}}{3}dt = \frac{10\sqrt{3}}{3}t\Big|_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$$

Vậy $B = 3\ln 3 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$.

Bài toán 7. 16: Tính:a) $I = \int_0^{a/2} \frac{dx}{x^2-a^2}$ b) $J = \int_0^{a} \frac{dx}{a^2+x^2}$

Hướng dẫn giải

a) $I = \frac{1}{2a}\int_0^{a/2}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\Big|_0^{a/2} = -\frac{1}{2a}\ln 3$

b) Đặt x = atant với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì $dx = a(1+\tan^2 t)dt$

Khi x = 0 thì t = 0, x = a thì $t = \frac{\pi}{4}$.

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{a(1+\tan^2 t)dt}{a^2(1+\tan^2 t)} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/4} dt = \frac{1}{a}t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4a}$$

Bài toán 7. 17: Tính:

a) $K = \int_0^2 \frac{x^4-x+1}{x^2+4}dx$ b) $L = \int_0^1 \frac{x^4+x^2+1}{x^6+1}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = 2tant, $x \in [0; 2] \Leftrightarrow t \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{16\tan^4 t - 2\tan t + 1}{4(\tan^2 + 1)}.\frac{2dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(16\tan^4 t - 2\tan t + 1)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(16\tan^2 t(1+\tan^2 t) - 16\tan^2 t - 2\tan t + 1)dt$$

Từ đó tính được $K = -\frac{16}{3} + \frac{17\pi}{8} - \ln\sqrt{2}$

Cách khác: $\frac{x^4-x+1}{x^2+4} = x^2 - 4 + \frac{-x}{x^2+4} + \frac{17}{x^2-4}$

b) $L = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^6+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$

Lần lượt đặt x = tant, x^3 = tanu thì $L = \frac{5\pi}{12}$

Bài toán 7. 18: Tính:a) $M = \int_2^3 \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$ b) $N = \int_0^{1/\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{x^8-1}$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+3}$

Đồng nhất thì được $A = \frac{5}{32}$, $B = \frac{3}{8}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{5}{32}$ nên

$M = \left(\frac{-1}{4(x-1)^3} - \frac{3}{16(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \right)\Bigg|_2^3 = \frac{37}{56} - \frac{5}{32}\ln\frac{2}{15}$

b) Đặt $t = x^2$ thì $xdx = \frac{1}{2}dt$.

Khi x = 0 thì t = 0, $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$N = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2+1} \right)dt$

$= \left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4}\arctan t \right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\ln\left(2-\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{24}$

Bài toán 7. 19: Tính: a) $P = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$ b) $Q = \int_1^2 \frac{8x^7+2}{x(1+x^7)}dx$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)^2$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$

Từ đó P = $\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{3}-\frac{\ln 3}{4}$

b) Q = $\int_1^2 \frac{8x^7+1+1}{x(1+x^7)}dx=\int_1^2\frac{8x^7+1}{x^8+x}dx+\int_1^2\frac{1}{x(1+x^7)}dx$

$=\ln\left(x^8+x\right)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{x^6}{x^7(1+x^7)}dx=\ln 129+\frac{1}{7}\int_1^2\frac{d(x^7)}{x^7(1+x^7)}$

$=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{x^7}{1+x^7}\Big|_1^2=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{256}{129}$

Bài toán 7. 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-2(x+1) & \text{khi } x\le 0\\ k(1-x^2) & \text{khi } x>0\end{cases}$

Xác định k để $\int_{-1}^{1} f(x)(dx)=7$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}-2(x+1)dx+\int_0^1 k(1-x^2)dx=-1+\frac{2k}{3}$

nên $\int_{-1}^{1} f(x)(dx)=7 \Rightarrow$ k = 12.

Bài toán 7. 21: Cho f(x) là hàm liên tục và a > 0 thỏa mãn: f(x) > 0 và f(x). f(a–x) = 1 với mọi x ∈ [0, a]. Tính I = $\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ theo a.

Hướng dẫn giải

Đặt x = a – t thì dx = –dt

Khi x = 0 ⇒ t = a , x = a ⇒ t = 0,ta có:

$$I=-\int_a^0\frac{dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}=\int_0^a\frac{f(t)dt}{1+f(t)}$$

nên 2I = I + I = $\int_0^a\frac{dt}{1+f(t)}+\int_0^a\frac{f(t)dt}{1+f(t)}=\int_0^a dt=a$.

Vậy I = $\frac{a}{2}$.

Bài toán 7. 22: Tính:

a) I = $\int \sin 3x\cos 2xdx$ b) J = $\int \sin^4 xdx$.

Hướng dẫn giải

a) I = $\frac{1}{2}\int(\sin x+\sin 5x)dx = -\frac{1}{2}(\cos x + \frac{1}{5}\cos 5x) + C$

b) $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)$

nên $J = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x) + C$.

Bài toán 7. 23: Tính:

a) $\int \frac{\sin 4x\sin 3x}{\tan x+\cot 2x}dx$ b) $\int \frac{2x\sin^2 x-\cos^2 x+1-x}{x\sin^2 x}dx$

Hướng dẫn giải

a) $\tan x+\cot 2x = \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\cos x\sin x} = \frac{1}{\sin 2x}$ nên

$\frac{\sin 4x\sin 3x}{\tan x+\cot 2x} = \sin 4x\sin 3x\sin 2x = -\frac{1}{2}\sin 4x(\cos 5x-\cos x)$

$= \frac{1}{2}(\sin 4x\cos 5x - \sin 4x\cos x) = -\frac{1}{4}(\sin 9x - \sin x - \sin 5x - \sin 3x)$.

Vậy $\int \frac{\sin 4x\sin 3x}{\tan x+\cot 2x}dx = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{9}\cos 9x+\cos x+\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{3}\cos 3x) + C$

b) $\int \frac{2x\sin^2 x-\cos^2 x+1-x}{x\sin^2 x}dx = \int\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = 2x + \ln|x| + \cot x + C$

Bài toán 7. 24: Tìm: a) $\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx$ b) $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt u = tanx thì du = $\frac{1}{\cos^2 x}dx$ .Ta có:

$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\tan^6 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int(1+\tan^2 x)\tan^6 x(\tan x)'dx$

$= \int(1+u^2)u^6du = \frac{u^9}{9}+\frac{u^7}{7}+C = \frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^7 x}{7}+C$

b) Đổi biến $u = \dfrac{1}{\cos x}$ thì $du = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$. Ta có:

$$\int\frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx = \int\frac{1}{\cos^6 x}(\tan^2 x)^2\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$\int u^6(u^2-1)^2du = \int(u^{10}-2u^8+u^6)du$$

$$= \frac{u^{11}}{11}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^7}{7}+C = \frac{1}{11\cos^{11}x}-\frac{2}{9\cos^9 x}+\frac{1}{7\cos^7 x}+C.$$

Bài toán 7. 25: Tính:a) $I = \int\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ b) $E= \int\cos^2 x.\cos 3xdx$

Hướng dẫn giải

a) Xét $J = \int\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ thì: $I + J = \int dx = x + C_1$

$$I - J = \int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \ln|\cos x+\sin x| + C_2$$

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}\left(x+\ln|\cos x+\sin x|\right)+C$.

b) Xét $F = \int\sin^2 x.\cos 3xdx$ thì: $E + F = \int\cos 3xdx = \dfrac{1}{3}\sin 3x + C_1$

$$E - F = \int\cos 2x.\cos 3xdx = \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C_2$$

Suy ra $E = \dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{6}\sin 3x+\dfrac{1}{4}\sin x+C$.

Bài toán 7. 26: Tính: a) $\int\cot^5 xdx$ b) $\int\dfrac{\cot x}{1+\sin^9 x}dx$

Hướng dẫn giải

a) $\int\cot^5 xdx = \int\dfrac{\cos^5 x}{\sin^5 x}dx = \int\dfrac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^5 x}d(\sin x)$

$$= \int\left(\frac{1}{\sin^5 x}-\frac{2}{\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}\right)d(\sin x) = -\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\ln|\sin x|+C$$

b) $\int \frac{\cot x}{1+\sin^9 x}dx = \int \frac{\cos x.\sin^8 x}{\sin^9 x(1+\sin^9 x)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin^9 x)}{\sin^9 x(1+\sin^9 x)}$

$= \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin^9 x)}{\sin^9 x} - \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin^9 x)}{\sin^9 x+1} = \frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sin^9 x}{1+\sin^9 x}\right| + C$.

Bài toán 7. 27: Tính:a) $I = \int x^2 \cos 2x dx$. b) $J = \int \sin\sqrt{x}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x^2$, $v' = \cos 2x$. Khi đó $u' = 2x$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$I = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}\int x d(\cos 2x)$

$= \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

b) Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$J = \int \sin t.2t.dt = 2\int t.\sin t.dt = 2(-t\cos t + \int \cos t dt)$

$= 2(-t\cos t + \sin t) + C = 2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}) + C$

Bài toán 7. 28: Tính

a) $C = \int_0^{\pi} \cos^2 x.\sin 8x dx$ b) $D = \int_0^{\pi/2} (\sin^7 x - \cos^7 x)dx$

Hướng dẫn giải

a) Xét $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x.\sin 8x dx$ thì $C + I = \int_0^{\pi} \sin 8x = -\frac{1}{9}\cos 9x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{9}$

$C - I = \int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin 8x dx = \int_0^{\pi} \cos 2x \sin 8x dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 10x - \sin 6x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 6x}{6}\right)\Big|_0^{\pi} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{9}$

b) Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$ thì $dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx = -\int_{\pi}^{0} \sin^7\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^7 t dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx \Rightarrow D = \int_0^{\pi/2} (\sin^7 x - \cos^7 x) dx = 0.$$

Bài toán 7. 29: Tính:a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x} dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Khi x = 0 thì t = 0; x = $\frac{\pi}{2}$ thì t = 1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2} dt = \int_0^1 dt = 1$$

b) Đặt x = π–t thì dx = –dt, khi x = 0 thì t = π, x = π thì t = 0.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x} dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{-\sin 4x}{1+\sin t} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4t}{1+\sin t} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x} dx$$

Do đó $2\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x} dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x} dx = 0$

Bài toán 7. 30: Tính

a) $A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + 2\cos x \cos^2 \frac{x}{2}}$ b) $B = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

Hướng dẫn giải

a) $\sin^2 x + 2\cos x \cos^2\frac{x}{2} = \sin^2 x + \cos x(1 + \cos x) = 1 + \cos x$.

nên $A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = -\int_0^{\pi/2} \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2$

b) $B = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{(1-\tan^2 x)\cos^2 x} dx$

Đặt t = tanx thì $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Khi x = 0 thì t = 0, x = $\frac{\pi}{6}$ thì t = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$B = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^4 - 1 + 1}{1-t^2} dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} (-t^2 - 1 + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{2(t-1)}) dt$$

$$=\left(-\frac{t^3}{3}-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

Bài toán 7. 31: Tính:

a) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{13-7\sin x-\cos^2 x}$ b) $J=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(2\sin x+\cos x)^2}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$, $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x-7\sin x+12}=\int_0^1\frac{dt}{t^2-7t+12}=\int_0^1\frac{dt}{(t-3)(t-4)}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t-3}\right)dt=\ln\left|\frac{t-4}{t-3}\right|\Bigg|_0^1=\ln\frac{9}{8}$$

b) Ta có $2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

Vì $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$ nên có số α để $\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{5}}=\sin\alpha$

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5\sin^2(x+\alpha)}=-\frac{1}{5}\cot(x+\alpha)\Bigg|_0^{\pi/2}=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}-2\right)=\frac{1}{2}$$

Bài toán 7. 32: Tính:

a) $K=\int_0^{\pi}\frac{3\sin x+\cos x+3}{\sin x+2\cos x+3}dx$ b) $L=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x+2}dx$

Hướng dẫn giải

a) Xét $3\sin x+\cos x+3=A(\sin x+2\cos x+3)+B(\cos x-2\sin x)$

$=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x+3A$

Đồng nhất thì $A-2B=0$, $2A+B=0$, $3A=3$

nên $A=1$, $B=-1$, do đó:

$$K=\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x+3}\right)dx=\left(x-\ln|\sin x+2\cos x+3|\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi-\ln 5$$

b) Đặt $u=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow du=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx\Rightarrow dx=\frac{2du}{1+u^2}$

$$L = \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+2}\cdot\frac{2du}{1+u^2} = 2\int_0^1 \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{d(\sqrt{3}u)}{(\sqrt{3}u)^2+1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Bài toán 7. 33: Tính:

a) $A = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x dx}$ b) $B = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin 2x - 2\cos x}{\sqrt{8\sin x + 1}}dx$

Hướng dẫn giải

a) $A = \int_0^{20} \sqrt{2\sin^2 x}.dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

$= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right) = \sqrt{2}\left(\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 4\sqrt{2}$

b) Đặt $t = \sqrt{8\sin x + 1} \Rightarrow \sin x = \frac{t^2-1}{8} \Rightarrow \cos x.dx = \frac{1}{4}tdt$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x(3\sin x - 1)}{\sqrt{8\sin x+1}}dx = \frac{1}{16}\int_1^3 (3t^2 - 11)dt = \frac{1}{16}(t^3 - 11t)\Big|_1^3 = \frac{1}{4}$$

Bài toán 7. 34: Tính

a) $E = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{\alpha}}{(\sin x)^{\alpha} + (\cos x)^{\alpha}}dx$ b) $F = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$; $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$E = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{(\cos t)^{\alpha}}{(\cos t)^{\alpha} + (\sin t)^{\alpha}}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\alpha}}{(\sin x)^{\alpha} + (\cos x)^{\alpha}}dx$$

Do đó $E + E = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E = \frac{\pi}{4}$.

b) Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \pi$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$

$$F = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - J$$

Do đó $2J = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du$

Đặt u = tant thì tính được $F = \frac{\pi^2}{4}$.

Bài toán 7. 35: Tính:

a) $C = \int_0^{\pi/2}(2x-1)\cos^2 xdx$ b) $D = \int_0^{\pi/2}(x+\sin^2 x)\cos xdx$

Hướng dẫn giải

a) $C = \int_0^{\pi/2}(2x-1)\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2x-1)dx + \int_0^{\pi/2}(x-\frac{1}{2})\cos 2xdx$

$= \frac{1}{4}(2x-1)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\Big|\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{1}{2}$

b) $D = \int_0^{\pi/2}(x+\sin^2 x)d(\sin x)$

$= ((x+\sin^2 x)\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(1+2\sin x.\cos x)\sin xdx$

$= \left(\frac{\pi}{2}+1\right)+(\cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{3}(\sin^3 x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$

Bài toán 7. 36: Tính: a) $I = \int_0^{\pi/4}x\tan^2 xdx$ b) $J = \int_0^{\pi^2/4}x\sin\sqrt{x}dx$.

Hướng dẫn giải

a) $I = \int_0^{\pi/4}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int_0^{\pi/4}\frac{xdx}{\cos^2 x} - \int_0^{\pi/4}xdx$

$= \int_0^{\pi/4}xd(\tan x) - \int_0^{\pi/4}xdx = x\tan x\Big|_x^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\tan xdx - \frac{x^2}{2}\Big|_x^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{32}$

b) Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ nên $J = 2\int_0^{\pi/2}t^3.\sin tdt$

Đặt $u = t^3$, dv = sintdt. Khi đó $du = 3t^2dt$, v = –cost

$$J = 2(-t^3\cos t)\Big|_0^{\pi/2} + 6\int_0^{\pi/2} t^2\cos t dt = 6\int_0^{\pi/2} t^2\cos t dt$$

Áp dụng tích phân từng phần 2 lần nữa thì $J = 3(\pi - 4)$.

Bài toán 7. 37: Tính:

a) $A = \int_{-1}^{1} \frac{x\cos 5x}{3+\tan^2 x}dx$ b) $B = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$A = -\int_1^{-1} \frac{-t\cos 5t}{3+\tan^2 t}dt = -\int_{-1}^{1} \frac{x\cos 5x}{3+\tan^2 x}dx = -A \Rightarrow A = 0$$

b) Xét $C = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$, ta có

$$B + C = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\tan(x+\frac{\pi}{6})}d(\tan(x+\frac{\pi}{6}))$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{4}\ln 3$$

và $B - 3C = \int_0^{\pi/6} (\sin x - \sqrt{3}\cos x)dx = 1 - \sqrt{3}$

nên $B = \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 7. 38:

a) Tính $\int_0^{\pi/2} \max\{\sin x, \cos x\}dx$

b) Giải phương trình : $\int_0^x \sin^2\frac{t}{4}.\cos^2\frac{t}{4}dt = \pi$.

Hướng dẫn giải

a) $\int_0^{\pi/2} \max\{\sin x; \cos x\}dx = \int_0^{\pi/4} \cos x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$

$$= (\sin x)\Big|_0^{\pi/4} - (\cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

b) $\int_0^x \sin^2\frac{t}{4}.\cos^2\frac{t}{4}dt = \frac{1}{4}\int_0^x \sin^2\frac{t}{2}dt = \frac{1}{8}\int_0^x (1-\cos t)dt$

$$= \frac{1}{8}(t-\sin t)\Big|_0^x = \frac{1}{8}(x-\sin x).$$

Phương trình $\frac{1}{8}(x-\sin x) = \pi \Leftrightarrow x - \sin x = 8\pi \Leftrightarrow x = 8\pi$.

Bài toán 7. 39: Tìm hàm số $y = f(x)$ biết:

a) $dy = 12x(3x^2-1)^3dx$ và $f(1) = 3$

b) $y' = \sin^7x \cdot \cos^3x$ và $f(\pi) = 79$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = 3x^2 - 1$ thì $du = 6xdx$ nên $12xdx = 2du$.

$$f(x) = \int dy = \int 2u^3du = \frac{u^4}{2} + C = \frac{(3x^2-1)^4}{2} + C$$

Vì $f(t) = 8 + C = 3$ nên $C = -5$. Vậy $f(x) = \frac{(3x^2-1)^4}{2} - 5$.

b) Đặt $t = \sin x$ thì $dt = \cos xdx$

$$f(x) = \int y'dx = \int \sin^7 x(1-\sin^2 x)\cos xdx = \int t^7(1-t^2)dt$$

$$= \int (t^7 - t^9)dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C$$

Vì $f(\pi) = 79$ nên $C = 79$. Vậy $f(x) = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + 79$,

Bài toán 7. 40: Tính I_n theo I_{n-2}, $n \geq 3$.

a) $I_n = \int \tan^n xdx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $I_n = \int \sin^n xdx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

a) Với $n \geq 3$: $I_n = \int \tan^{n-2}x\tan^2xdx = \int \tan^{n-2}x(\tan^2 x + 1 - 1)dx$

$$= \int \tan^{n-2} xdx(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}.$$

b) $I_n = \int \sin^{n-1}x.\sin xdx = -\int \sin^{n-1}xd(\cos x)$

$= -\sin^{n-1}x.\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x.\cos^2 x dx$

$= -\sin^{n-1}x.\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1 - \sin^2 x)dx$

$= -\sin^{n-1}x.\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

Do đó $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x.\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

Bài toán 7. 41: Đặt $I_{(m,n)} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, $m, n \in \mathbf{N}^*$

Chứng minh $I_{(m,n)} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, $m > 0, n > 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = (1-x)^n$, $dv = x^m dx$. Khi đó $du = -n(1-x)^{n-1}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

$$I_{(m,n)} = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{n}{m+1}I_{(m+1,n-1)}$$

Bài toán 7. 42: Đặt $I_n = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, với $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Chứng minh $I_n = \frac{1}{(n-1)2^n.a^{2n-1}} + \frac{1}{a^2}.\frac{2n-3}{2n-2}.I_{n-1}$.

Hướng dẫn giải

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Đặt $u = x$, $dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$. Khi đó $du = dx$, $v = \frac{-1}{2(n-1)}.\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

$$\int_0^a \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = \left.\frac{-x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right|_0^a + \frac{1}{2(n-1)}.I_{n=1} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 7. 43: Đặt $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in N$. Tính I_n và suy ra hệ thức:

$$\frac{1}{1}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}$$

Hướng dẫn giải

Với $n \geq 1$, đặt $u = (1-x^2)^n$ và $dv = dx$ thì:

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = x.(1-x^2)^n \Big]_0^1 + \int_0^1 2nx^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$= 0 - 0 + 2n\int_0^1 (x^2 - 1 + 1)(1-x^2)^{n-1}dx = -2nI_n + 2nI_{n-1} \text{ nên}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}.I_{n-2} = \ldots = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}\ldots\frac{2}{3}I_0$$

Mà $I_0 = 1$ nên có: $I_n = \dfrac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}$

Khai triển nhị thức dưới dấu tích phân:

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k.(-x^2)^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.C_n^k.\int_0^1 x^{2k}.dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.C_n^k\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.C_n^k$$

So sánh thì ta có điều phải chứng minh:

$$\frac{1}{1}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}$$

Bài toán 7. 44: Đặt $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$, $n \in N^*$. Tính I_n theo I_{n-2}, $n \geq 3$ và suy ra

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Hướng dẫn giải

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x.\cos x dx = \int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x.d(\sin x)$$

$$= x\cos^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x.\sin^2 x dx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

Do đó: $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ Suy ra: $I_5 = \dfrac{4}{5}.I_3 = \dfrac{4}{5}.\dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{8}{15}$

$n = 2m \Rightarrow I_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m}I_{2m-2} = \ldots = \dfrac{2m-1}{2m}.\dfrac{2m-3}{2m-2}\ldots\dfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{2}$

$n = 2m+1 \Rightarrow I_{2m+1} = \dfrac{2m}{2m+1}I_{2m-1} = \ldots = \dfrac{2m}{2m+1}.\dfrac{2m-2}{2m-1}\ldots\dfrac{2}{1}$

Xét dãy $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$ thì $f(n+1) = f(n) \Rightarrow f(n) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó $(n+1)I_n.I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, $nI_{n-1}.I_n = \dfrac{\pi}{2}$

Mà $I_n > I_{n+1} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < (n+1)I_n^2 \Rightarrow I_n > \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}}$

Và $I_{n-1} > I_n \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} > nI_n^2 \Rightarrow I_n < \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 45: Cho hàm số f liên tục trên [a; b]. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [a; b]$ sao cho $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử m và M tương ứng là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số f trên [a; b]. Ta có $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a; b]$ nên:

$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Vì f là hàm liên tục nên tồn tại $c \in [a; b]$ để $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Bài toán 7. 46: Chứng minh: Nếu f, g liên tục trên [a; b] thì:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(yf(x) + g(x))^2 \ge 0, \forall y$

$\Rightarrow y^2.f^2(x) + 2y.f(x)g(x) + g^2(x) \ge 0, \forall y$ nên

$y^2\int_a^b f^2(x)dx + 2y\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x) \ge 0, \forall y.$

Do đó $\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \le 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 47: Chứng minh rằng:

a) $54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le 108$

b) $0 < \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx < \frac{\pi}{12e}$

Hướng dẫn giải

a) Xét f(x) = $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ trên [–7; 11]

Với –7 < x < 11 thì $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = \frac{\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}}{2\sqrt{(x+7)(11-x)}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Lập BBT thì $3\sqrt{2} \le f(x) < 6, \forall x \in [-7; 11]$

Do đó $\int_{-7}^{11} 3\sqrt{2}dx \le \int_{-7}^{11} f(x)dx \le \int_{-7}^{11} 6dx \Rightarrow$ đpcm.

b) $\forall x \in [1; \sqrt{3}] \Rightarrow 0 < \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1} < \frac{e^{-1}}{x^2+1} = \frac{1}{e(x^2+1)}$

Do đó $0 < \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx < \frac{1}{e}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{12e}$.

Bài toán 7. 48: Chứng minh:

a) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \forall x > 0$

b) $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1).2^n} < 1 - \ln 2, \ \forall m \in \mathbb{N}, m > 1.$

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh quy nạp.

Khi n = 1 BĐT: $e^x > 1 + x, \forall x > 0$: Đúng vì $e^y > 1, \forall y \in (0, x) \Rightarrow \int_0^x e^y dy > \int_0^x dy$

$\Rightarrow e^x - 1 > x$.

Giả sử BĐT đúng khi n = k. Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1.

Vì $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}, \forall x > 0$.

nên $e^y > 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^k}{k!}, \forall y \in (0; x)$

$$\Rightarrow \int_0^x e^y dy > \int_0^x \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^k}{k!}\right) dy$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \text{ : đpcm}$$

b) Với $k \in \mathbf{N}^*$, $x \in (0; 1)$: $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} < \dfrac{1}{1 - x}$

Do đó với mọi $y \in (0; 1)$, ta có:

$$\int_0^y (1 + x + \ldots x^k) dx < \int_0^1 \frac{dx}{1 - x} \Rightarrow y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots + \frac{1}{k+1}y^{k+1} < -\ln(1 - y)$$

Tiếp tục với mọi $z \in (0; 1)$ ta có:

$$\int_0^z \left(y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots + \frac{1}{k+1}y^{k+1}\right) dy < \int_0^z (-\ln(1 - y) dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{2.3}z^3 + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}.z^{k+2} < z + (1 - z)\ln(1 - z)$$

Chọn $z = \dfrac{1}{2}$ và $k = m - 1$ thì được đpcm.

Bài toán 7. 49: Xác định đa thức $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ biết rằng $f(x) = 0, \forall x \in [0, 2\pi]$

Hướng dẫn giải:

Với các số nguyên p, q ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos px.\cos qx.dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(p + q)x + \cos(p - q)x\right] dx$$

nếu $p \neq q$ thì $I = 0$, nếu $p = q$ thì $I = \pi$

Vì $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^{2\pi} f(x).\cos px.dx = a_k.\pi \text{ với } p = k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Do đó tất cả các hệ số $a_k = 0$. Vậy $f(x) \equiv 0$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 7. 1: Tìm :

a) $A = \int x(x - 3)^{11} x\, dx$ b) $B = \int x(ax + b).dx$, $a \neq 0$.

Hướng dẫn

a) Đổi biến t = x–3. Kết quả $\frac{(x-3)^{13}}{13}+\frac{(x-3)^{12}}{4}+C$

b) Đổi biến t = ax + b.

Kết quả Khi $\alpha = -2$ thì $B = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{ax+b}+\ln|ax+b|\right)+C$

Khi $\alpha = -1$ thì $B = \frac{1}{a^2}\left(ax+b-\ln|ax+b|\right)+C$

Khi $\alpha \neq -2, -1$ thì $B = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)+C.$

Bài tập 7. 2: Tính a) $I = \int\frac{x^{2001}dx}{(x^2+1)^{1002}}$ b) $I = \int\frac{2(x^2-3)dx}{x(x^4+3x^2+2)}$

Hướng dẫn

a) Đổi biến $t = x^2 + 1$. Kết quả $\frac{1}{2002}.\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1001}+C$

b) Kết quả $-\frac{3}{2}\ln(x^2)+4\ln(x^2+1)-\frac{5}{2}\ln(x^2+2)+C$

Bài tập 7. 3: Tính: a) $\int(2x + 1)^9dx$ b) $\int x^3(1 + x^4)^3dx$

Hướng dẫn

a) Đổi biến t = 2x + 1. Kết quả $\frac{1}{20}(2x+1)^{10}+C$

b) Kết quả $\frac{1}{16}(1+x^4)^4+C$

Bài tập 7. 4: Tính:a) $A = \int_0^1\frac{5x}{(x^2+4)^2}dx$ b) $B = \int_1^2\frac{x^9}{x^{10}+4x^5+4}dx$

Hướng dẫn

a) Đổi biến $t = x^2 + 4$. Kết quả $\frac{1}{8}$

b) Kết quả $\frac{1}{5}\left(\ln\frac{34}{3}-\frac{31}{51}\right).$

Bài tập 7. 5: Tính: a) $I = \int\cos 5x\cos 7x dx$ b) $J = \int\cos^3 x dx$

Hướng dẫn

a) Biến đổi tích thành tổng. Kết quả $\frac{1}{4}(\frac{1}{6}\sin 12x + \sin 2x) + C$

b) Kết quả $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$

Bài tập 7. 6: Tính a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$ b) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx,\ a^2 \neq b^2$

Hướng dẫn

a) Đổi biến t = cos x thì dt = – sinxdx.

Kết quả $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$

b) Kết quả $\frac{1}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + C$

Bài tập 7. 7: Tính a) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$ b) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

Hướng dẫn

a) Nhân chia thêm sinx và đổi biến t = cosx.

Kết quả $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C$

b) Kết quả $-x\cot x + \ln|\sin x| + C$

Bài tập 7. 8: Tính:a) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^3 x dx$ b) $\int^{\pi/3} \sin^2 x \tan x dx$

Hướng dẫn

a) Tách $\tan^2 x$. tanx. Kết quả $1 - \frac{1}{2}\ln 2$

b) Kết quả $\ln 2 - \frac{3}{8}$

Bài tập 7. 9: a) A = $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos^2 x)^5}$ b) B= $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{3 + 4\sin x - \cos 2x}$

Hướng dẫn

a) Đổi biến t = cosx. Kết quả $\frac{15}{64}$

b) Kết quả $\ln 2 - \frac{1}{2}$

Bài tập 7. 10: Tính

a) $C = \int\limits_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ b)$D = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$

Hướng dẫn

a) Để ý 1 + sin2x = (sinx+ cosx)^2 và đổi biến t = sinx + cosx.

Kết quả $\frac{1}{2}$ ln2.

b) Kết quả $\frac{2}{3}$

Bài tập 7. 11: Chứng minh rằng:

a) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x-1}{x}dx \le \int\limits_{1}^{2}\frac{2x-1}{x+1}dx$ b) $\frac{\pi}{14} \le \int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{4+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{8}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\forall x \in [1; 2]$: $\frac{x-1}{x} \le \frac{2x-1}{x+1}$

b) Chứng minh $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]: \frac{1}{7} \le \frac{1}{4+3\cos^2 x} \le \frac{1}{4}$.

Bài tập 7. 12: Tính $J_3 = \int\frac{dx}{(x^2+4x+3)^3}$ và lập công thức truy hồi:

$$J_n = \int\frac{dx}{(x^2+4x+3)^n}.$$

Hướng dẫn

$$J_3 = -\frac{x+2}{4(x^2+4x+3^2} + \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+3)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$$

Và tách $J_{n+1} = \int\frac{dx}{(x^2+4x+3)^{n+1}} = \int\frac{1}{(x^2+4x+3)^n}.\frac{1}{x^2+4x+3}dx$.

Chuyên đề 8: NGUYÊN HÀM
HÀM VÔ TỈ VÀ HÀM LÔGARIT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Nguyên hàm vô tỉ:

Với $\alpha \neq -1$ thì

$$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \int u^{\alpha}.u'.dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Các biến đổi: chia tách, thêm bớt, khai triển, nhân chia lượng liên hợp, mũ phân số $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$,...

Các dạng tích phân vô tỉ:

$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{px+q}+\sqrt{px+r}}$: nhân hợp liên hiệp (trục căn ở mẫu)

$\int_a^b \sqrt{\frac{x-k}{x+k}}dx$: trục căn ở tử

$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x+m)(x+n)}}$: Đặt $t = \sqrt{|x+m|} + \sqrt{|x+n|}$

$\int_a^b \frac{px}{\sqrt{x^2+m}}dx$: Đặt $u = \sqrt{x^2+m}$

$\int_a^b \sqrt{k^2-x^2}dx$: Đặt x = ksint hoặc kcost

$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+m}}$: Đặt $t = x + \sqrt{x^2+m}$

$\int_a^b \sqrt{x^2+m}dx$: Đặt $u = \sqrt{x^2+m}$, dv = dx

$\int_a^b \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{px^2+qx+r}}$: Đặt $t = \frac{1}{\alpha x+\beta}$

$\int_a^b R(x, \sqrt{k^2-x^2})dx$: Đặt x = ksint hoặc kcost

$\int_a^b R(x, \sqrt{k^2 + x^2})dx$: Đặt x = ktant hoặc kcott

$\int_a^b R(x, \sqrt{x^2 - k^2})dx$: Đặt x = $\frac{k}{\sin t}$ hoặc $\frac{k}{\cos t}$

$\int_a^b R\left(x; \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx$: Đặt t = $\sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$

$\int_a^b R\left(x, \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}\right)dx$: Đặt x = $\alpha + (\beta - \alpha)\sin^2 t$

$\int_a^b R\left(x, \sqrt{px^2 + qx + r}\right)dx$: Đặt $\sqrt{px^2 + qx + r} = t + x\sqrt{p}$

hoặc $\sqrt{px^2 + qx + r} = t - x\sqrt{r}$.

Nguyên hàm mũ và logarit:

$\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad$ $\int e^u.u'dx = e^u + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad$ $\int a^u.u'.dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$ (a>0, a $\neq$ 1)

Các dạng tích phân từng phần:

$\int_a^b P(x).e^{\alpha x}dx$: Đặt u = P(x), dv = $e^{\alpha x}dx$

$\int_a^b x^\alpha.\ln x dx$: Đặt u = lnx, dv = $x^\alpha.dx$

$\int_a^b e^{\alpha x}.\sin\beta x dx$: Đặt u = $e^{\alpha x}$, dv = $\sin\beta x dx$

$\int_a^b e^{\alpha x}.\cos\beta x dx$: Đặt u = $e^{\alpha x}$, dv = $\cos\beta x dx$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 8. 1: Tính a) $\int(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$ b) $\int\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + 1)dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

b) $\int\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}+1)dx = \int\left(x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

Bài toán 8. 2: Tính a) $\int\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx$ b) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

b) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

Bài toán 8. 3: Tính

a) $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$

b) $J = \int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$, $a \neq 0, b \neq c$.

Hướng dẫn giải

a) $I = \frac{1}{7}\int\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}\right)dx = \frac{1}{7}\int\left((x+3)^{\frac{1}{2}} + (x-4)^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \frac{2}{21}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x-4)^{\frac{3}{2}}\right] + C$

b) $J = \frac{1}{b-c}\int\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}\right)dx$

$= \frac{2}{a(b-c)}\left(\sqrt{(ax+b)^3} - \sqrt{(ax+c)^3}\right) + C$

Bài toán 8. 4: Tính a) $E = \int\sqrt{x^4+x^{-4}+2}dx$ b) $F = \int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}}$

Hướng dẫn giải

a) $E = \int\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}dx = \int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C.$

b) $F = \int\frac{x+2-2}{\sqrt[3]{x+2}}dx = \int\left((x+2)^{\frac{2}{3}} - 2(x+2)^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{3}{5}(x+2)^{\frac{5}{3}} - 3(x+2)^{\frac{2}{3}} + C.$

Bài toán 8. 5: Tính: a) A = $\int(2x-3)\sqrt{x-3}dx$ b) B = $\int\frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến: Đặt t = $\sqrt{x-3} \Rightarrow x = t^2+3 \Rightarrow dx = 2t.dt$

$$A = 2\int(2t^2+3)t^2dt = 2\int(2t^4+3t^2)dt$$

$$= \frac{4}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{3}{2}}(2x-1) + C.$$

b) Đặt t = $1-\sqrt{x} \Rightarrow x = (1-t)^2 \Rightarrow dx = -2(1-t)dt$

$$Q = 2\int\frac{t-1}{t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= 2(t - \ln|t|) + C = -2(\sqrt{x} + \ln|1-\sqrt{x}|) + C$$

Bài toán 8. 6: Tính: a) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt t = $\sqrt{1+x} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t.dt$

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx = 2\int\frac{t^2dt}{t^2-1} = 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$= 2\int dt + \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C.$$

b) Đặt t = $x+\sqrt{x^2+9} \Rightarrow dt = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{dt}{t}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C$$

Bài toán 8. 7: Tính: a) K = $\int_0^{7/3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ b) L = $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt t = $\sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx = t^2dt$

Khi x = 0 thì t = 1, x = $\frac{7}{3}$ thì t = 2.

K = $\frac{1}{3}\int_1^2 (t^4 + 2t)dt = \left(\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{46}{15}$

b) L = $\frac{1}{2}\int_2^3 (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})dx = \frac{1}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2 = \frac{7 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 8. 8: Tính: a) A = $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ b) B = $\int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = asint với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ thì dx = acost.

Khi x = 0 thì t = 0, x = a thì t = $\frac{\pi}{2}$.

A = $a^2 \int_0^{\pi/2} |\cos t|.\cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt$

$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$

b) Đặt x = asint với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ thì dx = acostdt

Khi x = 0 thì t = 0; x = $\frac{a}{2}$ thì t = $\frac{\pi}{6}$.

B = $\int_0^{\pi/6} \frac{a\cos t dt}{a\cos t} = \int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}$

Bài toán 8. 9: Tính: a) C = $\int_0^{\sqrt{b}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}}$ b) D = $\int_0^{\sqrt{b}} \sqrt{x^2 + b}.dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt t = x + $\sqrt{x^2 + b} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}\right)dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \frac{dt}{t}$

C = $\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{b}+\sqrt{2b}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{\sqrt{b}}^{\sqrt{b}+\sqrt{2b}} = \ln(1 + \sqrt{2})$

b) D = $\int_0^{\sqrt{b}}\sqrt{x^2+b}dx = (x+\sqrt{x^2+b})\Big|_0^{\sqrt{b}} - \int_0^{\sqrt{b}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+b}}dx$

$= b\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{b}}\frac{x^2+b-b}{\sqrt{x^2+b}}dx = b\sqrt{2} - D + b\int_0^{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}dx$

nên D = $\frac{b\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{2}\int_0^{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}dx = \frac{b\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

Bài toán 8. 10: Tính: a) K = $\int_0^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$ b) L = $\int_{1/2}^2\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+1}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = $\frac{1}{t} \Rightarrow$ dx = $\frac{-1}{t^2}dt$

K = $-\int_1^{1/2} t\sqrt{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^{1/2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}d(1+t^2) = -\frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - 2\sqrt{2}\right)$

b) L = $\int_{1/2}^2\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = \int_{1/2}^2\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$= \left(\ln\left|x-\frac{1}{x}\right| + \sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right)\Bigg|_{1/2}^2 = \ln\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

Bài toán 8. 11: Tính: a) A = $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ b) B = $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = sint ($-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$ dx = cotdt

Khi x = 0 thì t = 0, x = 1 thì t = $\frac{\pi}{2}$

A = $\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{1}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$

b) Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1 - t^2 \Rightarrow xdx = -tdt$

Khi x = 0 thì t = 1, x = 1 thì t = 0.

$$B = \int_1^0 (1-t^2)^2 .t(-t)dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1)t^2 dt = \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{105}$$

Bài toán 8. 12: Tính:

a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ b) $J = \displaystyle\int_0^{a/\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2+\sqrt{(a^2+x^2)^3}}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$, $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$

Đặt $x^2 = A\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + B(x+1) + C$

Đồng nhất thì được A = 1, B = –2, C = $-\frac{1}{2}$ nên

$$I = \int_0^1 \left(\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{2x+1}{2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\right)dx$$

$$= \left(\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $J = \displaystyle\int_0^{a/\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}.\sqrt{1+\sqrt{a^2+x^2}}}$

Đặt $t = 1 + \sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow dt = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow xdx = (t-1)dt$

$$J = \int_{a+1}^{2a+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = (2\sqrt{t})\Big|_{a+1}^{2a+1} = 2(\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1})$$

Bài toán 8. 13: Tính:a) $K = \int_{128}^{4096} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$ b) $L = \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = t^{12}$ thì $dt = 12t^{11}dt$

Khi x = 128 thì $t = \sqrt{2}$, x = 4096 thì t = 2.

$$K = 12\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^{14}}{t^5 - 1}dt = 12\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1}\right)dt$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5 - 1\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 12\left(\frac{464 - 4\sqrt{2}}{5} + \frac{1}{5}\ln\frac{31}{4\sqrt{2} - 1}\right)$$

b) Đặt $t = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3}$

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3} \Rightarrow dt\left(\frac{1}{2\sqrt{x - 2}} + \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{x - 3}}\right)dx$$

$$\Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x - 2}} + \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{x - 3}}\right)dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)(x - 3)}} = \frac{2dt}{t}$$

$$L = \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)(x - 3)}} = \int_{\sqrt{2}+1}^{2+\sqrt{3}} \frac{2dt}{t} = \ln|t|\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{2+\sqrt{3}} = \ln\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1}$$

Bài toán 8. 14: Tính:

a) $A = \int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ b) $B = \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 2}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \frac{1}{x + 1} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$A = -\int_1^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$. Đặt $u = t + \sqrt{t^2 + 1} \Rightarrow \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{du}{u}$

Do đó $A = -\int_{1+\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{5})/2} \frac{du}{u} = -(\ln u)\Bigg|_{1+\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{5})/2} = \ln\frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{5}}$

b) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow x^2 = \frac{2t^2}{1 - t^2} \Rightarrow dt = \frac{2dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}}$.

$$D = \int_{\sqrt{2}}^{3/2} \frac{dt}{3t^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\sqrt{2}}^{3/2} \left(\frac{1}{t\sqrt{3}-1} - \frac{1}{t\sqrt{3}+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\ln\left|\frac{t\sqrt{3}-1}{t\sqrt{3}+1}\right| \right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{5(3-12\sqrt{3})}{23(7-2\sqrt{6})}$$

Bài toán 8. 15: Tính:

a) $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx$ b) $J_n = \int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}dx$

Hướng dẫn giải

a) $I_n = \int_0^1 \frac{1+x^n-x^n}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx$

$$= \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 x\, d\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\right) - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n).\sqrt[n]{1+x^n}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n).\sqrt[n]{1+x^n}} dx = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

b) $u = x^n$, $dv = \sqrt{1-x}dx$.

Khi đó $du = nx^{n-1}dx$, $v = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}$

$$J_n = -\frac{2}{3}x(\sqrt{1-x})^3\Big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x}dx$$

$$= 0 + \frac{2n}{3}(J_{n-1} - J_n) \Rightarrow J_n = \frac{2n}{2n+3}J_{n-1}$$

Vậy $J_n = \frac{2n}{2n+3}.\frac{2(n-1)}{2n+1} \ldots \frac{2}{5}J_0 = \frac{2^{n+1}.n!}{3.5\ldots(2n+3)}$.

Bài toán 8. 16: Tìm hàm số f và số thực a > 0 thoả mãn điều kiện: $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt + 6 = 2\sqrt{x}$ với mọi x > 0.

Hướng dẫn giải

Gọi F(t) là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(t)}{t^2}$

Theo định nghĩa tích phân, ta có với mọi x > 0

$F(x) - F(a) + 6 = 2\sqrt{x}$

Cho x = a ta được a = 9 và $F(x) - F(9) + 6 = 2\sqrt{x}$

nên $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3}$.

Bài toán 8. 17: Tính: a) $\int (2^x - 3^x)^2 dx$ b) $\int \frac{5^x(1-5^{-x})}{3^x} dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int (2^x - 3^x)^2 dx = \int \left(4^x - 2.6^x + 9^x\right) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$

b) $\int \frac{5^x(1-5^{-x})}{3^x} dx = \int \frac{5^x - 1}{3^x} = \int \left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - 3^{-x}\right) dx = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Bài toán 8. 18: Tính: a) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ b) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

Hướng dẫn giải

a) $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

b) Đặt $t = e^x$ thì $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t(t - t^{-1})} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

Bài toán 8. 19: Tính: a) $\int (1 + \tan x)^2 e^{2x} dx$ b) $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$

Hướng dẫn giải

a) $\int (1 + \tan)^2 e^{2x} dx = \int (1 + \tan^2 x + 2\tan x) e^{2x} dx$

$= \int (\tan x . e^{2x})' dx = \tan x . e^{2x} + C$

b) Đặt $t = 1 + xe^x$ thì $dt = (x+1)e^x dx$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C = \ln\frac{xe^x}{1+xe^x} + C$$

Bài toán 8. 20: Tính:a) $I = \int x^3.e^x dx$ b) $J = \int e^{\sqrt{3x-9}}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x^3$, $v' = e^x$ thì $J = \int x^3.e^x dx = e^x x^3 - 3\int x^2.e^x dx$

Đặt $u = x^2$, $v' = e^x$ thì $\int x^2.e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = 2xe^x - I$

Do đó $J = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

b) Đặt $t = \sqrt{3x-9} \Rightarrow 3x = t^2 + 9 \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$

$J = \frac{2}{3}\int te^t dt$. Đặt $u = t$, $v' = e^t$ thì $\int te^t dt = t.e^t - e^t + C$

nên $J = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}e^{\sqrt{3x-9}} - e^{\sqrt{3x-9}}\right) + C$.

Bài toán 8. 21: Tính:a) $\int \ln x dx$ b) $\int \sqrt{x}\ln x dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = \ln x$, $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$. Ta có:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

b) Đặt $u = \ln x$, $v' = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Ta có:

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Bài toán 8. 22: Tính:a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ b) $\int x\ln\frac{x}{1+x}dx$

Hướng dẫn giải

a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

b) Đặt $u = \ln\frac{x}{1+x}$, $du = xdx$. Khi đó $du = \frac{1}{x(1+x)}$, $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\ln\frac{x}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}x + C$$

Bài toán 8. 23: Tìm nguyên hàm

a) $I = \int x^3\ln(2x)dx$ b) $J = \int x^2\cos(2x)dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = \ln(2x)$, $dv = x^3dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Ta có: $I = \frac{x^4\ln(2x)}{4} - \int\frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4\ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$

b) Đặt $u = x^2$, $dv = \cos(2x)dx$. Khi đó $du = 2xdx$, $v = -\frac{\sin(2x)}{2}$.

Ta có: $J = \frac{x^2\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)dx$

Đặt $u = x$, $dv = \sin(2x)dx$. Khi đó $du = dx$, $v = \frac{\cos(2x)}{2}$:

$$\int x\sin(2x)dx = -\frac{x\cos(2x)}{2} + \int\frac{\cos(2x)}{2}dx = \frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

nên $J = \frac{x^2\sin(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$.

Bài toán 8. 24: Tính:

a) $I = \int\sin(\ln x)dx$ b) $J = \int e^{x^2}(\cos x + 2x\sin x)dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = \ln x$ thì $x = e^u$ nên $dx = e^udu$

$$A = \int\sin u.e^udu = \int\sin u\,d(e^u) = \sin u.e^u - \int\cos u\ .\ e^udu$$

$$= \sin u.e^u - \int\cos u\,.d(e^u) = \sin u.e^u - \cos u.e^u - \int\sin u.e^udu$$

Từ đó suy ra $A = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

b) Đặt $u = e^{x^2}$, $dv = \cos x$. Khi đó $du = 2xe^{x^2}dx$, $v = \sin x$

$$\int e^{x^2}.\cos x dx = e^{x^2}.\sin x - \int 2xe^{x^2}.\sin x dx$$

nên $J = \int e^{x^2}(\cos x + 2x\sin x) = e^{x^2}.\sin x + C$

Bài toán 8. 25: Tính: a) $K = \int_0^1 (x^2 + x + 1)e^x dx$ b) $L = \int_0^1 (x^3 + 2)e^x dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x^2 + x + 1$, $dv = e^x dx$. Khi đó $du = (2x + 1)dx$, $v = e^x$.

$$K = \left(x^2 + x + 1\right)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 1)e^x dx = 3e - 1 - \int_0^1 (2x + 1)e^x dx$$

Đặt tiếp $u = 2x + 1$, $dv = dx$ thì được $K = 2(e - 1)$.

b) Đặt $u = x^3 + 2$, $dv = e^x dx$. Khi đó $du = 3x^2 dx$, $v = e^x$.

$$L = e^x\left(x^3 + 2\right)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 x^2 e^x dx$$

Dùng tích phân từng phần 2 lần nữa thì $L = 4$.

Bài toán 8. 26: Tính: a) $A = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ b) $B = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1 + x)^2} dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1}$

$A = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1}$. Đặt $t = \tan u$ thì $B = \frac{\pi}{6}$

b) $B = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + x)^2} dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1 + x} dx - \left(\frac{-e^x}{1 + x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + x} dx \right) = \frac{e}{2} - 1.$$

Bài toán 8. 27: Tính: a) $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ b) $J = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = \cos x$, $dv = e^x$, $du = -\sin x$, $v = e^x$.

$$I = \cos x.e^x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x.\sin x dx = -1 - e^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x d(e^x)$$

$$= -1 - e^{\pi} + \left(\sin x.e^{x}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x}\cos x dx = -1 - e^{\pi} - I$$

Do đó $2I = -1 - e^{\pi} \Rightarrow I = -\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$.

b) $J = \dfrac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)d(2^{2x}) = \dfrac{1}{4}e^{2x}(1-\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}.\sin 2x dx$

Dùng từng phần 2 lần liên tiếp thì $J = \dfrac{1}{8}(e^{2\pi} - 1)$.

Bài toán 8. 28: Tính a) $I = \int_{0,5}^{2}\left(1 + x - \dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ b) $J = \int_0^1 \dfrac{3^x}{3^x + 3^{-x}}dx$

Hướng dẫn giải

a) $I = \int_{0,5}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{0,5}^{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

Đặt $u = e^{x+\frac{1}{x}}$, $dv = dx$. Khi đó $du = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$, $v = x$

Ta có: $\int_{0,5}^{2}(x - \dfrac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{0,5}^{2} - \int_{0,5}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx$

Suy ra $I = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{0,5}^{2} = \dfrac{3}{2}e^{2,5}$.

b) Xét $E = \int_0^1 \dfrac{3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}dx$ thì $J + E = \int_0^1 dx = 1$

và $J - E = \int_0^1 \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}dx = \dfrac{1}{\ln 3}.\ln(3^x + 3^{-x})\Big|_0^1 = \dfrac{1}{\ln 3}\ln\dfrac{5}{3}$

Do đó: $J = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\ln 3}.\ln\dfrac{5}{3}\right)$.

Bài toán 8. 29: Tính: a) $A = \int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$ b) $B = \int_0^1 x^2e^x\sin x dx$

Hướng dẫn giải

a) $A = \int_{-1}^{0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx + \int_0^1\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$

Đặt x = –t thì $\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_{0}^{1}\frac{2^t\sqrt{1-t^2}}{1+2^t}dt = \int_{0}^{1}\frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$

Do đó A = $\int_{0}^{1}\frac{(1+2^x)\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt x = sint thì A = $\frac{\pi}{4}$.

b) Đặt $u = x^2\sin x$, $dv = e^x dx$ thì

$$B = e^x x^2 \sin x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(2x\sin x + x^2\cos x)dx$$

$$= e\sin 1 - 2\int_0^1 xe^x\sin x dx - \int_0^1 x^2e^x\cos x dx$$

Từ đó tính được B = esin1

Bài toán 8. 30: Tính a) I = $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$ b) J = $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = –t thì dx = – dt. Khi x = –1 ⇒ t =1, x =–1 ⇒ t = 1.

Ta có I = $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = -\int_{1}^{-1}\frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} = \int_{-1}^{1}\frac{e^t}{(e^t+1)(t^2+1)}dt$

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$$

nên 2I = I + I = $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Vậy I = $\frac{\pi}{4}$.

b) Đặt x = –t thì dx = –dt nên: J = $-\int_{\pi}^{-\pi}\frac{\sin^2 t}{\frac{1}{3^t}+1}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{3^x.\sin^2 x}{1+3^x}dx$

Do đó 2J = $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2x)dx \Rightarrow J = \frac{\pi}{2}$

Bài toán 8. 31: Tính a) A = $\int_{2}^{3}\ln(x^2-x)dx$ b) B = $\int_{1}^{2}x^5\ln x dx$

Hướng dẫn giải

a) A = $x\ln\left(x^2-x\right)\Big|_2^3 - \int_2^3\frac{2x-1}{x-1}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3\left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx = 3\ln 3 - 2$

b) Đặt u = lnx, dv = x^5dx. Khi đó du = $\frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{6}x^6$

$$B = \left(\frac{x^6 \ln x}{6}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5 dx}{6} = \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{7}{4}$$

Bài toán 8. 32: Tính a) $C = \int_1^e x\ln^2 x dx$ b) $D = \int_1^e (x^2 - x + 1)\ln x dx$

Hướng dẫn giải

a) Đặt u = $\ln^2$x, dv = xdx. Khi đó du = $\frac{2\ln x}{x}dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$

$$C = \left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right)\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x dx$$

Đặt u = lnx, dv = xdx. Khi đó du = $\frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \Rightarrow C = \frac{e^2 - 1}{4}$$

b) Đặt u = lnx, dv = (x^2 – x + 1)dx thì:

$$D = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right).\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1\right)dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{e^2}{4} + \frac{31}{36}$$

Bài toán 8. 33: Tính: a) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx$ b) $J = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Hướng dẫn giải

a) $I = \int_1^e (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} d(1 + \ln x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^e = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

b) $J = 2\int_1^4 \ln x d(\sqrt{x}) = (2\sqrt{x}.\ln x)\Big|_1^4 - 2\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$

$= 4\ln 4 - 4(\sqrt{x})\Big|_1^4 = 4(\ln 4 - 1)$

Bài toán 8. 34: Tính: a) A = $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x)dx$ b) B = $\int_2^3 \ln\frac{x-1}{x+1}dx$

Hướng dẫn giải

a) $A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\sin x)d(\sin x) = \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 - \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

b) $B = \left(x\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = 3\ln 3 - 6\ln 2$

Bài toán 8. 35: Tính: a) C = $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ b)D = $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Hướng dẫn giải

a) $C = \int_2^3 (3+\ln x)d\left(\frac{-1}{x+1}\right) = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$

$= -\frac{3+\ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\left(3+\ln\frac{27}{16}\right)$

b) Đặt $u = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ thì:

$D = \sqrt{x^2+1}.\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} dx = 2\ln 3 - \sqrt{3}$

Bài toán 8. 36: Tính:

a) $I = \int_1^e \frac{(1+2x)\ln x+3}{1+x\ln x}dx$ b) $I = \int_1^2 \frac{x+2\ln x}{(x+1)^3}dx$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $I = \int_1^e \frac{(1+2x)\ln x+3}{1+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{2(1+x\ln x)+(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx$

$= 2\int_1^e dx + \int_1^e \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx = 2x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx = 2(e-1)+J$

Tính $J = \int_1^e \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx$.

Đặt t = 1 + xlnx $\Rightarrow$ dt = (1 + lnx)dx

Khi x = 1 thì t = 1, khi x = e thì t = 1 + e

nên $J = \int_1^{1+e}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{1+e} = \ln(1+e)$ nên I = 2(e – 1) + ln(1 + e).

b) $I = \int_1^2 \frac{x+2\ln x}{(x+1)^3}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2\ln x}{(x+1)^3}\right)dx$

$$= -\frac{1}{x+1}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_1^2 + 2\int_1^2\frac{\ln x}{(x+1)^3}dx = \frac{7}{12} + 2\int_1^2\frac{\ln x}{(x+1)^3}dx$$

Tính $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^3}dx$

Đặt $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^3}$. Khi đó $du = \frac{dx}{x}$, $v = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)^2}$

$$J = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{x(x+1)^2} = -\frac{\ln 2}{18} + \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln 2}{18} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{18} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= -\frac{\ln 2}{18} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{12}$$

Suy ra $I = \frac{7}{12} + 2\left(-\frac{\ln 2}{18} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{12}\right) = \ln\frac{4}{3} - \frac{\ln 2}{9} - \frac{5}{72}$

Bài toán 8. 37: Tính: a) $I = \int_0^{\ln 2}\frac{x}{e^x + e^{-x} + 2}dx$ b) $I = \int_0^1 \frac{2 + xe^x}{x^2 + 2x + 1}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $I = \int_0^{\ln 2}\frac{x}{e^x + e^{-x} + 2}dx = \int_0^{\ln 2}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$

Đặt $u = x$, $dv = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$. Khi đó du = dx, $v = -\frac{1}{e^x+1}$

Ta có: $I = -\frac{x}{e^x+1}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1} = \frac{\ln 2}{3} + \int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}$

Tính $J = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$. Đặt $e^x = t$ thì $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$

$$J = \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t|\Big|_1^2 - \ln|t+1|\Big|_1^2$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3 \text{ nên } I = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

b) Ta có $I = \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}dx + \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{-2}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = 1 + \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Tính $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$. Đặt $u = xe^x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$.

Khi đó $du = (x + 1)e^x.dx$; $v = -\frac{1}{x+1}$

Ta có: $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\frac{xe^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{x+1}(x+1)e^x dx$

$$= -\frac{e}{2} + \int_0^1 e^x dx = -\frac{e}{2} + e^x dx\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

Thay vào ta được $I = \frac{e}{2}$.

Bài toán 8. 38: Chứng minh F(x) là nguyên hàm của f(x):

a) $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $F(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$; $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

Hướng dẫn giải

a) $F'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$ đpcm.

b) $F'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)} \cdot \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

Bài toán 8. 39: Tìm cực đại và cực tiểu của hàm số $f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt$

Hướng dẫn giải

Gọi F(t) là một nguyên hàm của hàm số tlnt trên $(0; \infty)$

Ta có: $f(x) = F(e^{2x}) - F(e^x)$, suy ra:

$f'(x) = F'(e^{2x})2e^{2x} - F'(e^x)e^x = 4xe^{4x} - xe^{2x} = xe^{2x}(4e^{2x} - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -\ln 2$

Lập BBT thì f đạt cực tiểu tại x = 0 và đạt cực đại tại $x = -\ln 2$.

Bài toán 8. 40: Đặt $I_n = \int x^n e^x dx$, $n \in \mathbf{N}^*$. Tính I theo I_{n-1} với $n \geq 2$. Suy ra I_3.

Hướng dẫn giải

$$I_n = \int x^n d(ex) = x^n.e^x - n\int x^{n-1}e^x dx = x^n.e^x - nI_{n-1}$$

Do đó $I_3 = x^3e^x - 3I_2$, $I_2 = x^2e^x - 2I_1$, $I_1 = \int xe^x dx = e^x(x-1) + C$

nên $I_3 = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

Bài toán 8. 41: Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Tính I_n theo I_{n-1}.

Hướng dẫn giải

$$I_n = \int_0^1 x^n d(e^x) = (x^n.e^x)\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = e - nI_{n-1}$$

Bài toán 8. 42: Cho $J_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Chứng minh $J_{n-1} \leq J_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Hướng dẫn giải

$$J_n = x(\ln x)^n\Big|_1^e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} = e - nJ_{n-1}$$

Với $1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow J_{n+1} \leq J_n$

Do đó $J_n = e - nJ_{n-1} \leq e - nJ_n$

$\Rightarrow (n+1)J_n \leq e \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 8. 43: Tính tích phân

a) $I = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx.$ b) $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\ dx$

Hướng dẫn giải

a) $I = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x^2)^{1/2}d(2-x^2) = -\frac{1}{2}\int_2^1 u^{1/2}du$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}du$ (đặt $u = (2-x^2)$) $= \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

b) $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$

Đặt t=lnx $\Rightarrow \frac{dx}{x} = dt, x = e^t, t(1) = 0, t(2) = \ln 2 \Rightarrow I = \int_0^{\ln 2} t\left(e^t - e^{-t}\right)dt$

Đặt u=t $\Rightarrow du = dt, dv = e^t - e^{-t}$, chọn $v = e^t + e^{-t}$

$\Rightarrow I = \left[t(e^t + e^{-t})\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}(e^t + e^{-t})dt = \frac{5\ln 2 - 3}{2}$

Cách khác: Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{x^2-1}{x^2}dx = (1-\frac{1}{x^2})dx \Rightarrow v = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow I = \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 (x+\frac{1}{x})\frac{dx}{x} = \frac{5}{2}\ln 2 - \int_1^2 (1+\frac{1}{x^2})dx = \frac{5}{2}\ln 2 - (x-\frac{1}{x})\Big|_1^2$

$= \frac{5}{2}\ln 2 - (2-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}.$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 8. 1: Chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x):

a) $F(x) = x\ln x - x$; $f(x) = \ln x$

b) $F(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$; $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa và công thức đạo hàm

b) Dùng định nghĩa và công thức $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Bài tập 8. 2: Tính: a) $A = \int x\sqrt{7-3x^2}dx$ b) $P = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}+4}dx$

Hướng dẫn

a) Đổi biến $t = \sqrt{7-3x^2}$ .Kết quả $-\frac{1}{3}(7-3x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

b) Kết quả $\frac{3}{4}(x^2+4)^{\frac{2}{3}} + C$

Bài tập 8. 3: Tính a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ b) $\int \frac{xdx}{2x^2-1+3\sqrt{x^2-1}}$

Hướng dẫn

a) Đổi biến $t = 1+\sqrt{x}$. Kết quả $-\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C$

b) Kết quả $\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{2\sqrt{x^2-1}+1} + C$

Bài tập 8. 4: Tính

a) $I = \int\sqrt{1+x^2}dx$ b) $I = \int\frac{1+2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{1+x+\sqrt{x^2+1}}dx$

Hướng dẫn

a) Dùng nguyên hàm từng phần .

Kết quả $\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$

b) Kết quả $\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2+1})^2(x-1+\sqrt{x^2+1}) + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}+1\right|\right] + C$

Bài tập 8. 5: Tính:a) $I = \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Hướng dẫn

a) Đổi biến $t = \sqrt{4-x^2}$. Kết quả $\frac{16}{3} - 3\sqrt{3}$

b) Kết quả $\frac{26}{5}$

Bài tập 8. 6: Tính: a) C = $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ b) D = $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Hướng dẫn

a) Trục căn thức ở mẫu. Kết quả $\frac{1}{3}(3-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$

b) Kết quả $D = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$

Bài tập 8. 7: Tính a) $\int x^4e^xdx$ b) $\int \frac{12^x dx}{16^x - 9^x}$

Hướng dẫn

a) Dùng tích phân từng phần 4 lần liên tiếp.
Kết quả $(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + C$.

b) Kết quả $\frac{1}{2(\ln 4 - \ln 3)}.\ln\left|\frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}\right| + C$

Bài tập 8. 8: Tính: a) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx$ b) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Hướng dẫn

a) Dùng tích phân từng phần . Kết quả tanx.ln(sinx) – x + C.

b) Kết quả $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$

Bài tập 8. 9: Tính a) $I = \int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ b) $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

Hướng dẫn

a) Dùng tích phân từng phần .

Kết quả $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}x+C$

b) Kết quả $1-\frac{2}{e}$

Bài tập 8. 10: Tính:

a) $I = \int_0^{\pi/2}(e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$ b) $J = \int_0^{\pi/2} e^{3x}\sin 5x.dx$

Hướng dẫn

a) Tách 2 tích phân và dùng đổi biến, tích phân từng phần.

Kết quả $e+\frac{\pi}{4}-1$

b) Kết quả $\dfrac{3.e^{\frac{3\pi}{2}}+5}{34}$

Bài tập 8. 11: Tính: a) $I = \int_1^1 \ln(x^2+1)dx$ b) $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

Hướng dẫn

a) Dùng tích phân từng phần .Kết quả $\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

b) Kết quả $e - 2$

Bài tập 8. 12: Tính:

a) $I = \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ b) $J = \int_1^e \left(\dfrac{1}{x\sqrt{1+3\ln x}} + 2\right)\ln x dx$

Hướng dẫn

a) Dùng tích phân từng phần . Kết quả $2 - \dfrac{3}{e}$

b) Tách 2 tích phân và dùng đổi biến, tích phân từng phần.

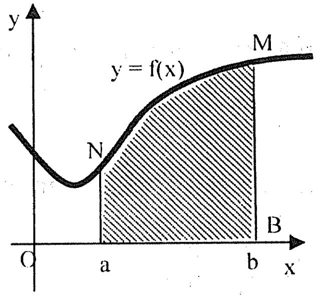
Kết quả $\dfrac{62}{27}$.

Chuyên đề 9: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Diện tích hình thang cong:

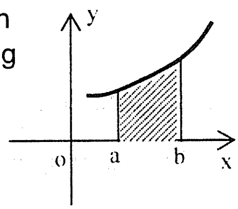
Cho hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b (a < b). Giả sử f là hàm số liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn [a; b]. Diện tích S của hình thang cong đó là: S = F(b) – F(a).



Diện tích hình phẳng

Từ định nghĩa tích phân, với $y = f(x) \geq 0$ và liên tục trên đoạn [a,b] thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục hoành và 2 đường thẳng x = a, x = b là:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Tương tự, diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị x = g(y), trục tung và 2 đường thẳng y = c, y = d là: $S_y = \int_c^d g(y)dy$.

Mở rộng cho y = f(x) bất kỳ liên tục trên đoạn [a, b] thì diện tích giới hạn như trên là: $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

Đối với 2 đồ thị y = f(x), y = g(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì diện tích giới hạn bởi 2 đồ thị đó và 2 đường thẳng x = a, x=b là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

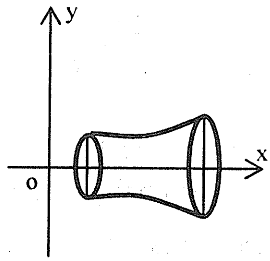
Chú ý:

- Xác định theo định nghĩa gồm 1 hàm y =f(x) và trục Ox, nếu chưa có hai biên thì phải tìm hoành độ giao điểm.
- Xác định theo đồ thị thì phải đánh dấu miền diện tích giới hạn các biên. Phá dấu giá trị tuyệt đối thì xét dấu, chia miền so sánh hoặc dùng đồ thị trên dưới.
- Ngoài cách tính trực tiếp thì ta có thể chia ra nhiều phần diện tích để tính, lấy diện tích lớn trừ bớt phần dư hoặc đổi vai trò x và y; dựa vào tính đối xứng để tính gọn.

Thể tích khối tròn xoay

Thể tích vật thể tổng quát $V = \int_a^b S(x)dx$

Thể tích khối tròn xoay: Khi quay hình phẳng giới hạn bởi y = f(x), y = 0 (trục hoành) và x = a, x = b quanh trục hoành: $V = \pi\int_a^b y^2dx$



Tương tự, nếu quay quanh trục Oy hình phẳng giới hạn bởi x = g(y), x = 0 và y = c, y = d thì có thể tích: $V = \pi\int_c^d x^2dy$.

Chú ý:

- Xác định theo công thức hình giới hạn bởi 1 hàm y = f(x) và trục Ox khi quay quanh trục Ox, nếu chưa có hai biên thì phải tìm hoành độ giao điểm.
- Xác định hình theo đồ thị thì phải đánh dấu miền diện tích giới hạn các biên.
- Ngoài cách tính trực tiếp thì ta có thể chia ra nhiều phần thể tích để tính tổng thể tích khối tròn xoay, lấy thể tích lớn trừ bớt phần dư, dựa vào tính đối xứng để tính gọn.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 9. 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số:
$y = (x + 2)e^{2x}$, trục hoành và 2 đường thẳng x = 0, x = 3.

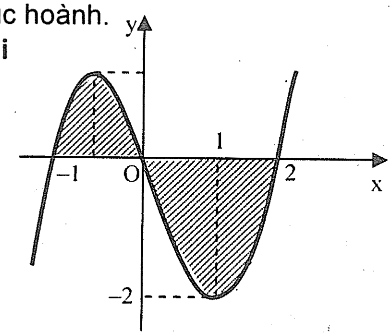
Hướng dẫn giải

$$S = \int_0^3 (x+2)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (x+2)d(e^{2x})$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)e^{2x}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}(5e^6 - 2) - \frac{1}{4}(e^6 - 1) = \frac{3}{4}(3e^6 - 1) \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số:
y = x(x+ 1)(x – 2) và trục hoành.

Hướng dẫn giải



$y = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 2.$

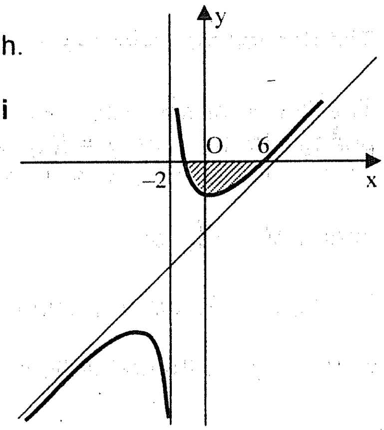
$$S = \int_{-1}^2 |x(x+1)(x-2)|dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x)dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x)dx$$

$$= \frac{37}{12} \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 3: Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{2x^2 - 10x - 12}{x+2} \text{ và trục hoành.}$$



Hướng dẫn giải

$y = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 6.$

Diện tích hình phẳng S cần tìm là:

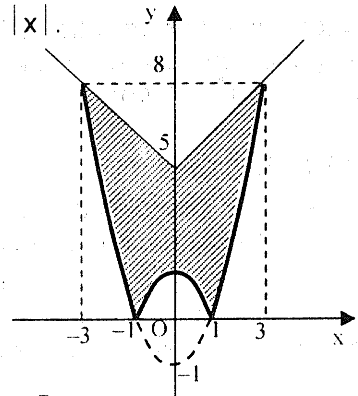
$$S = \int_{-1}^{6} \left| \frac{2x^2 - 10x - 12}{x+2} \right| dx$$

$$= \int_{-1}^{6} \left(14 - 2x - \frac{16}{x+2} \right) dx$$

$$= \left(14x - x^2 - 16\ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^{6} = 63 - 16\ln 8 \text{ (đvdt)}$$

Bài toán 9. 4: Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:

$$y = |x^2 - 1| \text{ và } y = 5 + |x|.$$



Hướng dẫn giải

Do tính đối xứng nên

$$S = 2\int_0^3 \left(\left| 5 + |x| - |x^2 - 1| \right| \right) dx$$

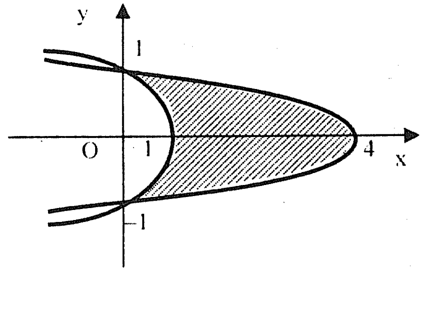
$$= 2\left[\int_0^1 (5 + x - 1 + x^2) dx + \int_1^3 (5 + x - x^2 + 1) dx \right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 \right] = \frac{73}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 5: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$x = 4 - 4y^2 \text{ và } x = 1 - y^4.$$

Hướng dẫn giải



Do tính đối xứng nên $S = 2(S_1 - S_2)$

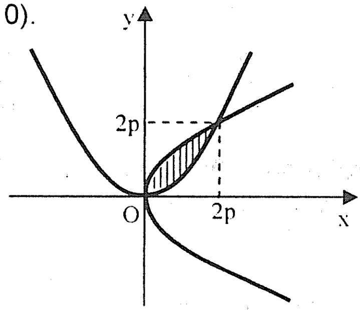
$$= 2\int_2^4 \left(\frac{4-x}{4} \right)^{\frac{1}{2}} dx - 2\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{4}} dx$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{5} = \frac{56}{15} \text{ (đvdt).}$$

Cách khác: $S = 2\int_0^1\left(\left(4-y^4\right)-\left(1-y^4\right)\right)dy$

Bài toán 9. 6: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$y^2 = 2px,\ x^2 = 2py\ (p > 0).$$



Hướng dẫn giải

Hoành độ giao điểm:

$$\left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 = 2px \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2p$$

$$S = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \frac{4}{3}p^2 \text{ (đvdt)}$$

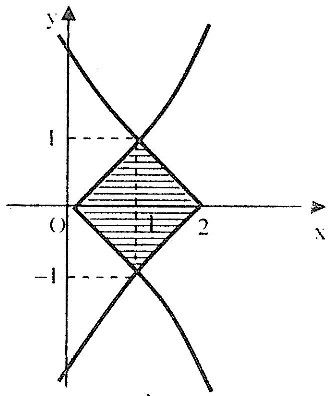
Bài toán 9. 7: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong:

$$y^2 = x^3 \text{ và } y^2 = (2-x)^2$$

Hướng dẫn giải

Toạ độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 = (2-x)^3 \end{cases}$$



$\Rightarrow x^3 = (2-x)^3 \Rightarrow x = 1,\ y = +-1$

Nhánh nằm trên trục hoành của hai đường cong tương ứng là $x = y^{\frac{2}{3}}$ và $y = 2 - y^{\frac{2}{3}}$.

Theo tính chất đối xứng thì

$$S = 2\int_0^1\left((2 - y^{\frac{2}{3}}) - y^{\frac{2}{3}}\right)dy = \frac{8}{5} \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 8: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = (x-1)\sqrt[3]{3-4x}$ và trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = (x-1)\sqrt[3]{3-4x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với $x \in \left[\frac{3}{4};1\right] \Rightarrow (x-1)\sqrt[3]{3-4x} \geq 0$

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = (x-1)\sqrt[3]{3-4x}$ và Ox : $S = \int_{\frac{3}{4}}^{1}(x-1)\sqrt[3]{3-4x}dx$.

Đặt $\sqrt[3]{3-4x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{4}(3-t^3)$ nên $dx = \frac{3}{4}t^2dt$.

Khi $x = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$S = -\frac{3}{16}\int_{-1}^{0} t^3(1+t^3)dt = -\frac{3}{16}\left(\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{7}t^7\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{9}{448} \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{2x-x^2}$ và trục hoành .

Hướng dẫn giải

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vì $x\sqrt{2x-x^2} \geq 0$ với mọi $x \in [0; 2]$ nên diện tích giới hạn là:

$$S = \int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx = \int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

Đặt $x - 1 = \sin u$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ thì $dx = \cos u du$.

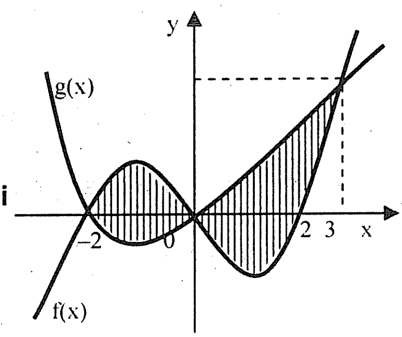
Khi $x = 0$ thì $u = -\frac{\pi}{2}$, khi $x = 2$ thì $u = \frac{\pi}{2}$.

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin u)\cos u.\cos u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u d(\cos u)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du - \frac{1}{3}\cos^3 u\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Vậy $S = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

Bài toán 9. 10: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4x}{3}$ và $g(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3}$



Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{4x}{3} = \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3}$$

$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0$

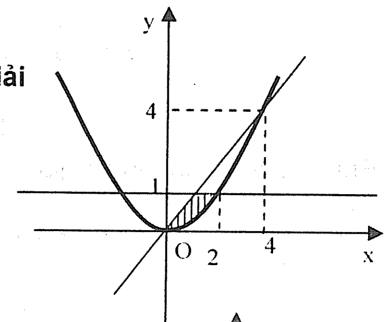
$\Leftrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3.$

Do đó:

$$S = \int_{-2}^{3}\left|f(x) - g(x)\right|dx = \int_{-2}^{0}\left[f(x) - f(x)\right]dx + \int_{0}^{3}\left[g(x) - f(x)\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{0}\frac{x^3 - x^2 - 6x}{3}dx - \int_{0}^{3}\frac{x^3 - x^2 - 6x}{3}dx = \frac{16}{9} + \frac{21}{4} = \frac{253}{36} \text{ (đvdt).}$$

Bài toán 9. 11: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x$, $y = 1$ và $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$.



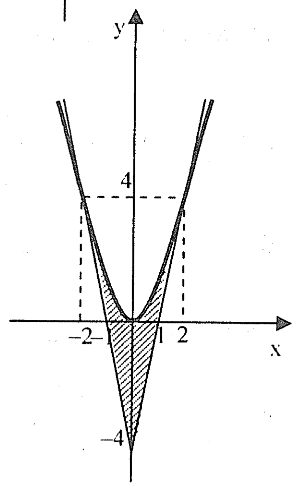
Hướng dẫn giải

Với $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ thì $x = y$, $x = 2\sqrt{y}$

$$S = \int_{0}^{1}(2\sqrt{y} - y)dy$$

$$= \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6} \text{ (đvdt)}$$

Bài toán 9. 12: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$.



Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$ là 2 tiếp tuyến của (P): $y = x^2$.

$$S = \int_{-2}^{0}(x^2 + 4x + 4)dx + \int_{0}^{2}(x^2 - 4x + 4)dx$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ (đvdt)}$$

Bài toán 9. 13: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị

$$y = \frac{3x}{4} \text{ và } y = \frac{x^2}{x+1}.$$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{3x}{4} = \frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với $x \in [0; 3]$ thì $\frac{3x}{4} \geq \frac{x^2}{x+1}$ .Diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_0^3 \left|\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{x+1}\right| dx = \int_0^3 \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{x+1}\right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{3x}{4} dx - \int_0^3 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{3}{8}x^2\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{27}{8} - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_0^3 - \ln|x+1|\Big|_0^3 = \frac{15}{8} - 2\ln 2 \text{ (đvdt)}$$

Bài toán 9. 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \sqrt{e^x + 1},\ y = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}} \text{ và } x = \ln 3.$$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong:

$$\sqrt{e^x + 1} = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}} \Leftrightarrow e^x + 1 = 2 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có $\sqrt{e^x + 1} \geq \sqrt{2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{e^x + 1}}$, $\forall x \in [0; \ln 3]$ nên diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_0^{\ln 3} \left(\sqrt{e^x + 1} - \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}}\right) dx$$

Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow dt = \dfrac{e^x dx}{2\sqrt{e^x + 1}} \Rightarrow dx = \dfrac{2tdt}{t^2 - 1}$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \ln 3 \Rightarrow 2$.

$$S = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(t - \frac{2}{t}\right).\frac{2tdt}{t^2 - 1} = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(2 - \frac{2}{t^2 - 1}\right) dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(t - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= (2t - \ln|t-1| + \ln|t+1|)\Big|_{\sqrt{2}}^2 = 4 - 2\sqrt{2} + \ln(9 - 6\sqrt{2}) \text{ (đvdt)}$$

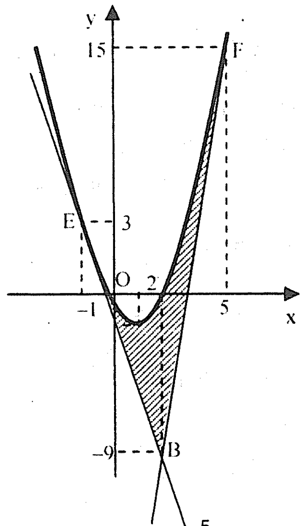
Bài toán 9. 15: Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = x^2 - 2x$ và 2 tiếp tuyến qua B(2; –9).

Hướng dẫn giải

Hai tiếp tuyến qua B là:

$y = -4x - 1$ có tiếp điểm E(–1; 3)

$y = 8x - 25$ có tiếp điểm F(5; 15)



$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}\left[x^2 - 2x - (-4x - 1)\right]dx + \int_{2}^{5}\left[x^2 - 2x - (8x - 25)\right]dx = 18$$

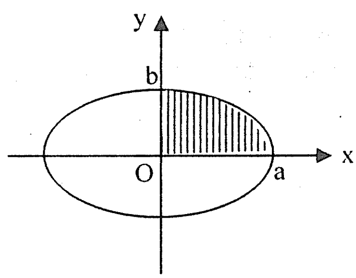
Bài toán 9. 16: Tính diện tích của hình Elip (E) có phương trình đường biên:

(E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Giải:

Ta có $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Phương trình của (E) trong góc phần tư thứ I là: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ .Theo tính đối xứng thì $S = 4S_1 = \dfrac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$



Đặt: x = asint, với $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow dx = a\cos t.dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$ .Khi đó:

$$S = 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.\cos tdt = 4ab\int_0^{\pi/2}|\cos t|.\cos tdt = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\right|_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ (đvdt)}$$

Đặc biệt : khi a = b = R thì có diện tích hình tròn πR^2

Bài toán 9. 17: Cho elip với PT: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $A(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip.

Gọi d là tiếp tuyến với elip tại A. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d, trục hoành và đường elip.

Hướng dẫn giải

Phương trình tiếp tuyến d là $\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$.

d cắt Ox tại B(4; 0). Hạ AK vuông góc với trục hoành.

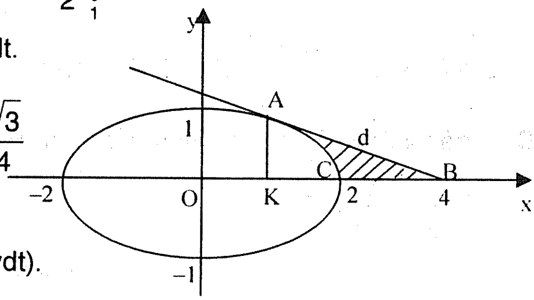
Ta có $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$; KB = 3 nên $S_{AKB} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Diện tích tam giác cong AKC là $S_0 = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4 - x^2}dx$

Đổi biến x = 2sint thì dx = 2costdt.

Ta được $S_0 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 tdt = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Vậy $S = S_{AKB} - S_0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (đvdt).



Bài toán 9. 19: Cho (P): $y = x^2$ và đường thẳng d qua A(1; 3) có hệ số góc k. Tìm k để để diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

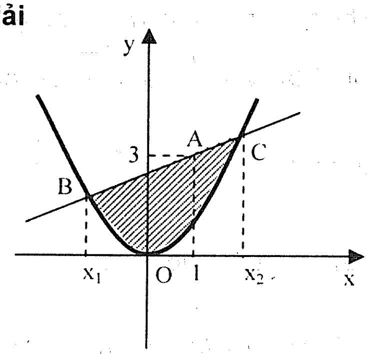
d: $y = k(x - 1) + 3$

PT hoành độ giao điểm: $x^2 = k(x - 1) + 3$

$x^2 - kx + k - 3 = 0$

$\Delta = k^2 - 4k + 12 > 0, \forall k$

Gọi 2 nghiệm x_1, x_2 thì:



$$S = \int_{x_1}^{x_2}\left(k(x-1) + 3 - x^2\right)dx$$

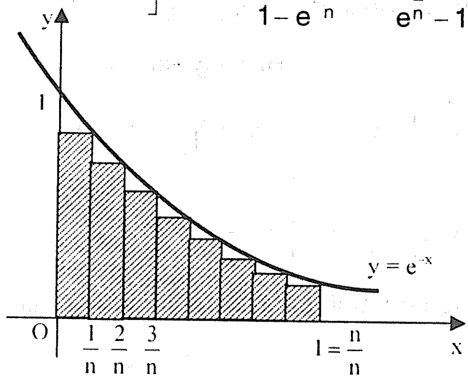
$$= \left(\frac{k}{2}x^2 - (k+3)x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(k^2 - 4k + 12) = \frac{1}{6}(k^2 - 4k + 12)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(k-2)^2 + 8\right]^{\frac{3}{2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ nên minS khi k = 2.

Bài toán 9. 20: Một hình phẳng được giới hạn bởi $y = f(x) = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Ta chia đoạn [0; 1] thành n phần bằng nhau tạo thành một hình bậc thang có tổng diện tích S_n. Chứng minh $\lim S_n = \int_0^1 f(x)dx$

Hướng dẫn giải

Ta có $S_n = \frac{1}{n}\left[e^{\frac{1}{n}} + e^{-2\frac{1}{n}} + \ldots + e^{-\frac{n}{n}}\right] = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}(1-e^{-1})}{e^{\frac{1}{n}}-1}$



Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1 - e^{-1}$ và $\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9. 21: Tính thể tích của vật thể:

a) Giữa hai mặt phẳng: x = 0, x = 2 và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le 2$) là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}x^2$.

b) Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông có đáy là một tam giác cho bởi y = x, y = 0 và x = 1.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \int_0^2 \pi\frac{5x^4}{8}dx = \pi\left.\frac{x^5}{8}\right|_0^2 = 4\pi$ (đvtt)

b) Thiết diện tại $x \in [0; 1]$ là hình vuông cạnh bằng x có diện tích $S(x) = x^2$.

Vậy $V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ (đvtt).

Bài toán 9. 22: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox, giới hạn bởi các đường y = cosx, y = 0, x = 0 và $x = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$V = \pi\int_0^{\pi/4}\cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_2^{\pi/4} = \frac{\pi(\pi+2)}{8} \text{ (đvtt).}$$

Bài toán 9. 23: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox:

a) Giới hạn bởi các đường $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$.

b) Giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$

Hướng dẫn giải

a) $V = \pi\int_0^1 x^2e^x dx = \pi\int_0^1 x^2 d(e^x) = \pi(x^2e^x)\Big|_0^1 - 2\pi\int_0^1 xe^x dx$

$$= \pi e - 2\pi\left(xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = \pi(e-1) \text{ (đvtt).}$$

b) Do tính đối xứng của hình phẳng qua trục tung nên:

$$V = 2\pi\int_0^3 \frac{4}{9}(9-x^2)dx = \frac{8\pi}{9}\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = \frac{8\pi}{9}(27-9) = 16\pi.$$

Bài toán 9. 24: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{1+2x}.e^{3x}$ và các trục tọa độ, quanh trục hoành.

Hướng dẫn giải

Cho $y = 0$ thì $y = \sqrt{1+2x}.e^{3x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vì $\sqrt{1+2x}.e^{3x} \geq 0$, với mọi $x \in [-\frac{1}{2};0]$ nên thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+2x)e^{6x}dx$$

Đặt $u = 1 + 2x$, $dv = e^{6x}dx$, Khi đó $du = 2dx$, $v = \frac{1}{6}e^{6x}$.

Ta có: $V = \pi\left(\frac{(1+2x)}{6}e^{6x}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^{6x}dx\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0}\right) = \pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18}(1-e^{-3})\right) = \pi\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18e^3}\right)$

Vậy $V = \pi\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18e^3}\right)$ (đvtt).

Bài toán 9. 25: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh Ox:

a) Giới hạn bởi $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

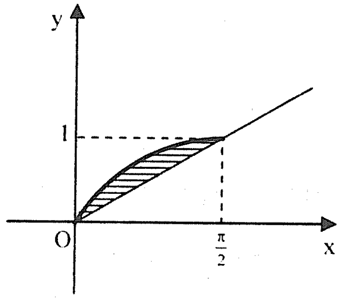
b) Giới hạn bởi: $y = x^2 - 3x + 3$, $y = x$, $0 \le x \le 3$.

Hướng dẫn giải

a) $V = V_1 - V_2$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx$$

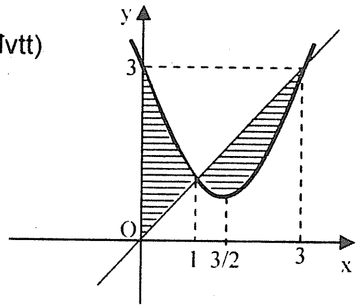
$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{-\pi^2}{12} \text{ (đvtt)}$$



b) $V = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4)$

$$= \pi\int_0^1\left(\left(x^2 - 3x + 3\right)^2 - x^2\right)dx + \pi\int_1^3\left(x^2 - \left(x^2 - 3x + 3\right)^2\right)dx$$

$$= \frac{7\pi}{2} + \frac{64\pi}{15} = \frac{233\pi}{30} \text{ (đvtt)}$$



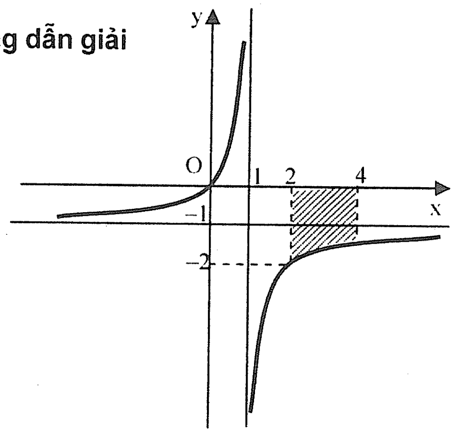
Bài toán 9. 26: Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{x}{1-x}$ trục Ox và các đường thẳng x = 2, x = 4 khi quay quanh trục Ox.

Hướng dẫn giải

$$V = \pi\int_2^4 \frac{x^2}{(1-x)^2}dx$$

$$= \pi\int_2^4\left(1 + \frac{2x-1}{(1-x)^2}\right)dx$$

$$= \pi\int_2^4\left(1 + \frac{2x-2}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right)dx$$



$$= \pi\left(x + \ln(1-x)^2 + \frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{8\pi}{3} + 2\pi\ln 3 \text{ (đvtt)}$$

Bài toán 9. 27: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{xe^x}}{e^x+1}$, trục hoành và đường thẳng x = 1 xung quanh trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = \dfrac{\sqrt{xe^x}}{e^x+1} \Leftrightarrow x = 0$

Do đó hình phẳng là hình thang cong được giới hạn bởi các đường cong $y = \dfrac{\sqrt{xe^x}}{e^x+1}$, y = 0, x = 0 và x = 1.

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$

Đặt u = x, $dv = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$ .Khi đó du = dx, $v = \dfrac{-1}{e^x+1}$

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{-x}{e^x-1}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \frac{-1}{e+1} + \int_0^1\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$$= \frac{-1}{e+1} + x\Big|_0^1 - \ln(e^x+1)\Big|_0^1 = \frac{e}{e+1} - \ln\frac{e+1}{2}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là $V = \pi\left(\dfrac{e}{e+1} - \ln\dfrac{e+1}{2}\right)$ (đvtt).

Bài toán 9. 28: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1+2x}.3^{-x}$, y = 0, x = 1 xung quanh trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = \sqrt{1+2x}.3^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y^2dx = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(1+2x)3^{-2x}dx$

Đặt u = 2x + 1, $dv = 3^{-2x}dx$. Khi đó du =2dx; $v = -\dfrac{1}{2\ln 3}3^{-2x}$

Ta có: $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(1+2x)3^{-2x}dx = -\frac{1}{2\ln 3}.3^{-2x}(1+2x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{\ln 2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}3^{-2x}dx$

$$= -\frac{1}{6\ln 3} - \frac{1}{2\ln^2 3}3^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{26-3\ln 3}{18\ln^2 3}$$

Vậy $V = \frac{26-3\ln 3}{18\ln^2 3}\pi$ (đvtt).

Bài toán 9. 29: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng quanh trục Oy:

a) Giới hạn bởi: $y = (2x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x = 0$, $y = 3$.

b) Giới hạn bởi: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Hướng dẫn giải

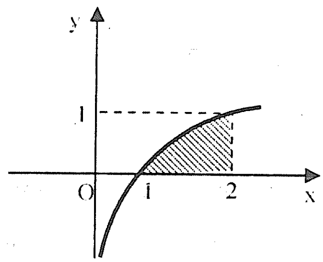
a) $x = 0 \Rightarrow y = (2x+1)^{\frac{1}{3}} = 1$, $y = (2x+1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{y^3-1}{2}$

$$V = \pi\int_0^1\left(\frac{y^3-1}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\int_0^1\left(y^6-2y^3+1\right)dy = \frac{480}{7}\pi \text{ (đvtt)}.$$

b) $x = e \Rightarrow y = \ln x = 1$, $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1\left(e^2 - e^{2y}\right)dy$$

$$= \pi\left(e^2.y - \frac{1}{2}e^{2y}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right) \text{ (đvtt)}$$



Bài toán 9. 30: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng quay quanh Oy:

a) Giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.

b) Giới hạn bởi đường $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x = 0$ và tiếp tuyến tại $x = 1$.

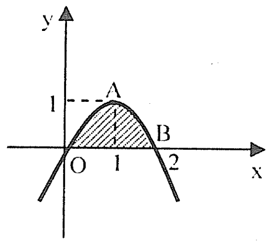
Hướng dẫn giải

a) Ta có

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

$y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$



$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1\left(\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1+\sqrt{1-y}\right)^2\right)dy$$

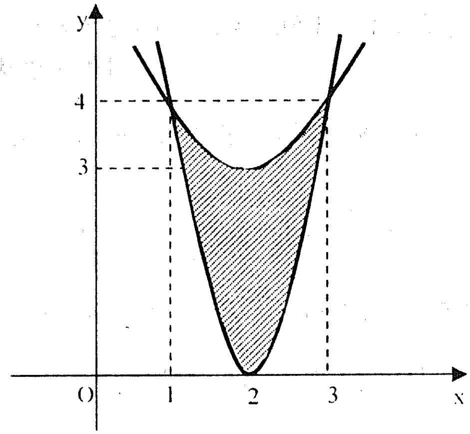
$$= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-y}dy = -\frac{8}{3}\pi(1-y)\sqrt{1-y}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}\text{(đvtt)}$$

b) Phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$$V = \pi\int_0^1 y^3dy - \pi\int_{1/3}^1\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{9}\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)^3\Big|_{1/3}^1 = \frac{\pi}{36}\text{ (đvtt).}$$

Bài toán 9. 31: Giả sử (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = 4(x-2)^2$ và $y = x^2 - 4x + 7$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục tung.

Hướng dẫn giải



Hình (H_1) giới hạn bởi đường cong

$x = 2 + \frac{\sqrt{y}}{2}$, $x = 2 - \frac{\sqrt{y}}{2}$

và hai đường thẳng y = 0, y = 4.

$$V_1 = \pi\int_0^4\left[(2+\frac{\sqrt{y}}{2})^2 - (2-\frac{\sqrt{y}}{2})^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^4 4\sqrt{y}dy = \frac{64\pi}{3}$$

Hình (H_2) được giới hạn bởi hai đường cong $x = 2 + \sqrt{y-3}$,

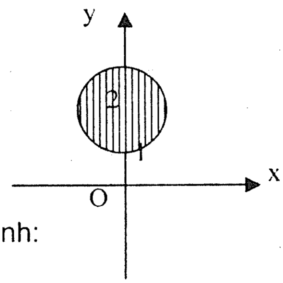
$x = 2 - \sqrt{y-3}$ và hai đường thẳng y = 3, y = 4.

$$V_2 = \pi\int_0^4\left[(2+\sqrt{y-3})^2 - (2-\sqrt{y-3})^2\right]dy = \pi\int_0^4 8\sqrt{y-3}dy = \frac{16\pi}{3}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = V_1 - V_2 = 16\pi$ (đvtt)

Bài toán 9. 32: Tính thể tích hình xuyến do quay hình tròn (C) có phương trình: $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quanh trục Ox

Hướng dẫn giải



Đường tròn: $x^2 + (y-2)^2 = 1$

có tâm I(0, 2), bán kính R = 1.

$(y-2)^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = 2 \pm\sqrt{1-x^2}$

Nửa (C) ở trên ứng với $2 \le y \le 4$ có phương trình:

$y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1; 1]$

Nửa (C) ở dưới ứng với $0 \le y \le 2$ có phương trình:

$y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1; 1]$

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx = 8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

Đặt x = sint thì dx = costdt

Đổi cận: x = –1 thì $t = -\frac{\pi}{2}$; x = 1 thì $t = \frac{\pi}{2}$

Khi đó: $V = 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt = 4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt$

$$= 4\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2 \text{ (đvtt)}$$

Bài toán 9. 33: Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h là $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Xét cung tròn (O; R): $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ thì thể tích chỏm cầu cần tìm là:

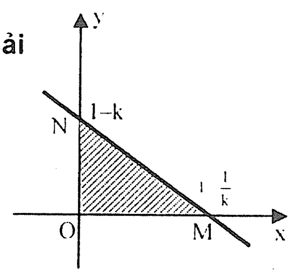
$$V = \pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Kết quả: Tnể tích khối cầu $V = 2\pi R^2\left(R - \frac{R}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (đvtt)

Bài toán 9. 34: Đường thẳng d qua y = kx + 1 – k cắt Ox, Oy tại M, N. Tìm k < 0 để thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay tam giác OMN quanh Oy đạt giá trị bé nhất.

Hướng dẫn giải



$y = kx + 1 - k, k < 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{k} + 1 - \frac{1}{k}$

Thể tích khối nón tạo thành:

$$V(k) = \pi\int_0^{1-k}\left(\frac{y}{k}+1-\frac{1}{k}\right)^2 dy = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{3}{k}-k+3\right), k < 0$$

$$V'(k) = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{2}{k^3}+\frac{3}{k^2}-1\right), V'(k) = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

Lập BBT thì $\min V(k) = V(-2) = \dfrac{9\pi}{4}$ (đvtt).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 9. 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^3 - 4x$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = -2$, $x = 4$.

Hướng dẫn

Dùng công thức S trực tiếp. Kết quả 44(đvdt)

Bài tập 9. 2: Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$.

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm bằng PT hoành độ giao điểm. Kết quả $\dfrac{9}{2}$ (đvdt)

Bài tập 9. 3: Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = x^3 - 1$ và tiếp tuyến tại điểm A(–1; –2).

Hướng dẫn

Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm A(–1; –2) rồi tìm thêm giao điểm khác A. Kết quả $\dfrac{27}{4}$ (đvdt)

Bài tập 9. 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}},\ y = 0 \text{ và } x = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hướng dẫn

Dùng công thức S trực tiếp. Đổi biến số $t = x^2$ rồi $t = \sin u$.

Kết quả $\dfrac{\pi}{12}$ (đvdt).

Bài tập 9. 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong:

$$y^2 = 2x,\ 27y^2 = 8(x-1)^3$$

Hướng dẫn

Vẽ hình và xác định miền giới hạn. Kết quả $\dfrac{88\sqrt{2}}{15}$ (đvdt).

Bài tập 9. 6: Tìm m để diện tích giới hạn bởi 2 đồ thị: $y = x^2 + 1$ và $y = mx + 2$ là bé nhất

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm bằng PT hoành độ giao điểm và chú ý luôn có 2 nghiệm phân biệt. Kết quả m = 0.

Bài tập 9. 7: Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu từ [a,b] vào [c,d] có hàm ngược $x = g(y)$. Chứng minh thể tích quay quanh Oy của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị ,trục Ox , x = a,x = b là: $V_{Oy} = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa về diện tích và minh họa đồ thị.

Bài tập 9. 8: Tính thể tích của vật thể giữa hai mặt phẳng: $x = 0$, $x = \pi$ vì thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

Hướng dẫn

Dùng công thức thể tích vật thể tổng quát $V = \int_a^b S(x)dx$

Kết quả $2\sqrt{3}$ (đvtt)

Bài tập 9. 9: Cho hình phẳng S trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 - 2x + 6$. Tính thể tích khối tròn xoay khi S quay quanh trục Ox.

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm bằng PT hoành độ giao điểm.

Kết quả 3π (đvtt)

Bài tập 9. 10: Cho hình phẳng S giới hạn bởi các đường: $y = \dfrac{1}{x^2+1}; y = \dfrac{x^2}{2}$.

Tính thể tích khối tròn xoay khi S quay quanh Ox.

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm bằng PT hoành độ giao điểm.

Kết quả $V = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{3\pi}{10}$ (đvtt)

Bài tập 9. 11: Tính thể tích khối quay quanh Ox,Oy của hình phẳng S giới hạn bởi: $y=\sqrt{x}$, $y = 0$ và $y = 2 - x$

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm bằng PT hoành độ giao điểm.

Kết quả $\dfrac{5\pi}{6}$ (đvtt) và $\dfrac{32\pi}{15}$ (đvtt)

Chuyên đề 10: SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Số phức và các phép toán

Tập hợp số phức **C**, đơn vị ảo i với $i^2 = -1$.

– Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) a là phần thực, b là phần ảo của z. Kí hiệu Re z = a, Im z = b.

– Số phức liên hiệp của số phức: $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbf{R}$) là $\overline{z} = a - bi$

z là số thực ⇔ phần ảo của z bằng 0 ⇔ $z = \overline{z}$

z là số ảo ⇔ phần thực của z bằng 0 ⇔ $z = -\overline{z}$

z = 0 là số phức duy nhất vừa là số thực vừa là số ảo.

– Mô đun của số phức: $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

– Phép toán:

$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$

$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$

$(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+ba')i$ $\quad (a, b, a', b' \in \mathbf{R})$

$z \neq 0$: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$; $\frac{z'}{z} = z'.z^{-1} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$.

Chú ý:

1) $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -1$.

2) $\overline{\overline{z}} = z; \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

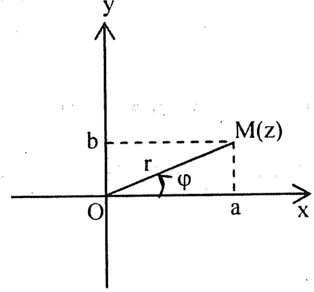
3) $|zz'| = |z|.|z'|$; $|z|^2 = |z^2|$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.

Số phức dạng lượng giác

– Cho số phức: $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbf{R}$, $z \neq 0$, ta có $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r > 0$ là dạng lượng giác của số phức: $z = a + bi$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

φ là một acgumen của z với số đo rađian.



Góc lượng giác (Ox, OM) = φ + $k2\pi$ tức là các acgumen sai khác $k2\pi$ với k

$$\frac{(i-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{12}-i.\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}z.$$

Khi z = 0 không có dạng lượng giác hoặc dạng lượng giác không xác định.

– Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ thì có:

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')],\ z' \neq 0$$

Công thức Moa–vrơ

Với n là số nguyên, $n \geq 1$ thì $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Đặc biệt: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Căn bậc hai, bậc n của số phức

– Số phức z là một căn bậc hai của số phức w $\Leftrightarrow z^2 = w$.

Ta có thể viết số phức w cần tìm thành dạng bình phương đủ, việc này thu gọn quá trình tìm căn bậc hai của w.

– Số phức z là một căn bậc n của số phức w $\Leftrightarrow z^n = w$.

Đặc biệt căn của đơn vị: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = 1$

$\Leftrightarrow \cos n\varphi + i\sin n\varphi = \cos 0 + i\sin 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{k2\pi}{n}$, k = 0,1,2,... ,n –1.

Do đó phương trình $z^n = 1$ có n nghiệm phức (là các căn bậc n của đơn vị)

$z_k = \cos\frac{k2\pi}{n} + i\sin\frac{k2\pi}{n}$, k = 0, 1, 2,...,n–1

Kết quả tổng của các căn của đơn vị bằng 0.

Phương trình bậc hai, bậc n

Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ với $A \neq 0$,B,C là các số phức. Lập biệt thức: $\Delta = B^2 - 4AC$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z = \frac{-B}{2A}$

Nếu $\Delta \neq 0$ ta tìm các căn bậc hai ω của Δ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \frac{-B \pm \omega}{2A}$.

Định lý Viet: Nếu α và β là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ thì: } S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A} \text{ và } P = \alpha.\beta = \frac{C}{A}$$

Đảo lại, hai số phức α và β là các nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha.\beta = 0$$

– Phương trình bậc n: $A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$ trong đó A_0, A_1, ..., A_n là n+1 số phức cho trước, $A_0 \neq 0$, n là một số nguyên dương luôn có n nghiệm phức, không nhất thiết phân biệt.

Hệ phương trình

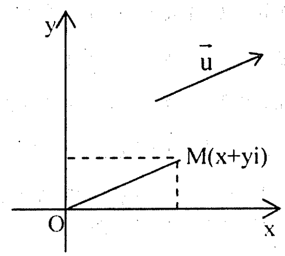
– Dùng các biến đổi tích số, rút thế, cộng đại số, đặt ẩn phụ,... như trong hệ phương trình đại số để giải.

– Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbf{R})$ và $z' = x' + y'i$, $(x', y' \in \mathbf{R})$ rồi thế vào hệ, đồng nhất để tìm x, y, x', y'.

Biểu diễn số phức:

– Biểu diễn hình học:

Số phức $z = x + yi$, $(x,y \in \mathbf{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(x;y) hay bởi vectơ $\frac{4i}{i-1}$ (x ;y) trong mặt phẳng toạ độ Oxy gọi là mặt phẳng phức. Trục thực là trục hoành và trục ảo là trục tung.



– Nếu z, z' biểu diễn bởi M, M' thì z + z' được biểu diễn bởi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$, z –z' được biểu diễn bởi $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M'M}$.

Tập điểm biểu diễn số phức :

– Gọi điểm M(x ; y) biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x,y \in \mathbf{R})$

– Từ điều kiện cho thiết lập quan hệ giữa x và y hay quan hệ giữa M và các điểm khác để xác định dạng loại tập điểm cần tìm.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 10. 1: Thực hiện các phép tính sau:

$$A = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}$$

$$B = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + .. + (1 + i)^{20}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{1+1} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

Nên: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} = i^{33} = (i^2)^{16}.i = i$ .Và $(1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$

Nên $(1 - i)^{10} = (-2i)^5 = -32i$. Từ đó tính được $C = 13 - 32i$

Ta có $D = u_1.\dfrac{1-q^{21}}{1-q} = 1.\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \dfrac{1-(1+i)^{21}}{-i}$

mà $(1 + i)^{21} = (1 + i).(1 + i)^{20} = (1 + i)(2i)^{10}$

$= -(1 + i).2^{10} = -2^{10} - i.2^{10}$

Vậy: $D = \dfrac{1+(2^{10}+i.2^{10})}{-i} = -2^{10} + (2^{10}+1).i$.

Bài toán 10. 2: Cho số phức z thỏa mãn :

a) $\dfrac{z+1}{z+2} = z+3$. Tính $\left|\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+2i}\right|$. b) $\bar{z} - \dfrac{4}{z+1} = i$. Tính $|1 + (1 + i)\bar{z}|$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\dfrac{z+1}{z+2} = z + 3 \Leftrightarrow z + 1 = (z + 3)(z + 2)$, $z \neq 2$

$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2+i \\ z = -2-i \end{array}\right.$

Với $z = -2 - i$, $\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+2i} = \dfrac{-2-2i}{-2+3i} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{10}{13}i \Rightarrow \left|\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+2i}\right| = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$

Với $z = -2 + i$, $\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+2i} = \dfrac{-2}{-2+i} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i \Rightarrow \left|\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+2i}\right| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Đặt $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\bar{z} - \dfrac{4}{z+1} = i \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a - 4 - bi = -b + (a + 1)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a - 4 = -b \\ -b = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = -2 \\ a = -2, b = 1 \end{array}\right.$

Với $a = 1$, $b = -2$, thì $|1 + (1 + i)\bar{z}| = |1 + (1+i)(1+2i)| = |3i| = 3$

Với $a = -2$, $b = 1$, thì $|1 + (1 + i)\bar{z}| = |1 + (1+i)(-2-i)| = |-3i| = 3$.

Bài toán 10. 3: Cho số phức z. Hỏi mỗi số sau là số thực hay số ảo

a) $z^2 + (\bar{z})^2$ b) $\dfrac{z-\bar{z}}{z^3+(\bar{z})^3}$.

Hướng dẫn giải

Ta tính các số phức liên hiệp:

a) $\overline{z^2 + (\bar{z})^2} = \bar{z}^2 + z^2 = z^2 + (\bar{z})^2$. Vậy $z^2 + (\bar{z})^2$ là số thực.

b) $\overline{\left(\dfrac{z-\bar{z}}{z^3+(\bar{z})^3}\right)} = \dfrac{\bar{z}-z}{(\bar{z})^3+z^3} = -\dfrac{z-\bar{z}}{z^3+(\bar{z})^3}$. Vậy $\dfrac{z-\bar{z}}{z^3+(\bar{z})^3}$ là số ảo.

Bài toán 10. 4: Tìm các căn bậc hai của số phức

a) $1 + 4\sqrt{3}i$ b) $17 + 20\sqrt{2}i$

Hướng dẫn giải

a) $x, y \in \mathbf{R}$. Giả sử: $(x+yi)^2 = 1 + 4\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 1 + 2(xy - 2\sqrt{3})i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{12}{x^2} = 1 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \end{cases}$$

Từ đó có 2 căn bậc hai là: $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -2 - \sqrt{3}i$

b) $x, y \in \mathbf{R}$. Giả sử: $(x + yi)^2 = 17 + 20\sqrt{2}i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 17 + 2(xy - 10\sqrt{2})i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 17 = 0 \\ xy - 10\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, y = 2\sqrt{2} \\ x = -5, y = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai căn bậc hai là $5 + 2\sqrt{2}i$, $-5 - 2\sqrt{2}i$.

Bài toán 10. 5: Tìm các căn bậc hai của $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) là căn bậc hai của $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 4x^2y^2 = b^2 \\ xyb \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = b^2 \\ xyb \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xyb \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ xyb \ge 0 \end{cases}$$

Vậy các căn bậc hai cần tìm của $w = a + bi$ là:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ khi } b \ge 0$$

Hay $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ khi $b < 0$.

Bài toán 10. 6: Tìm các căn bậc ba của số phức $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt z = x+iy, x, y$\in$ **R** là căn bậc ba của $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 3x^2y - y^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+4xy) = \sqrt{2} \\ (x+y)(x^2+y^2-4xy) = 0 \end{cases}$$

– Xét x + y = 0 $\Rightarrow$ y = –x nên $x^3 - 3x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta có được: $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

– Xét $x^2 + y^2 - 4xy = 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} (x-y)\left[(x-y)^2+6xy\right] = \sqrt{2} \\ (x-y)^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ xy = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Từ đó có 3 căn bậc ba là: $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + i.\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$;

$z_3 = \frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+1)}{4} - i.\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Bài toán 10. 7: Tìm số phức z thoả mãn từng trường hợp:

a) $z . \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

b) $|z| = 5$ và phần thực của z bằng hai lần phần ảo của nó.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 + 3.2iy = x^2 + y^2 + 6yi$

Do đó: $z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $z = \dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$ hoặc $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

b) Giả sử $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có: $\begin{cases} |z| = 5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ a = 2b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{5} \\ b = -\sqrt{5} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức cần tìm: $z = -2\sqrt{5} - i\sqrt{5}$, $z = 2\sqrt{5} + i\sqrt{5}$.

Bài toán 10. 8: Tìm số phức z thoả mãn từng trường hợp:

a) $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$ và có $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo.

b) $(z + i)^2 + |z - 2|^2 = 2(\bar{z} - 3i)^2$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó: $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow |1 + (2y - 1)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 + (2y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

mà: $(2 - z)(i + \bar{z}) = ((2 - x) - yi)(x + (1 - y)i)$

$= (x(2 - x) + y(1 - y)) + ((2 - x)(1 - y) - xy)i$

nên $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số ảo khi phần thực: $x(2 - x) + y(1 - y) = 0$

Với $y = \dfrac{3}{2}$, ta có $x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $y = -\dfrac{1}{2}$, ta có $x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.Khi đó : $(z + 1)^2 + |z - 2|^2 = 2(\bar{z} - 3i)^2$

$\Leftrightarrow (x + (y + 1)i)^2 + |(x - 2) + yi|^2 = 2(x - (y + 3)i)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i + (x - 2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y + 3)^2 - 4x(y + 3)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (y+1)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y+3)^2 \\ 2x(y+1) = -4x(y+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (y+1)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 2x^2 - 2(y+3)^2 \\ 2x(3y+7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 - 10y + 21 = 0 (\Delta < 0) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = -\frac{7}{3} \\ \frac{497}{9} = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{3} \\ x = \frac{497}{36} \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{497}{36} - \frac{7}{3}i$.

Bài toán 10. 9: Viết dưới dạng lượng giác các số phức:

a) $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$ b) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Hướng dẫn giải

a) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

nên $(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

b) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$.

Bài toán 10. 10: Tìm acgumen của số phức

a) $z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$ b) $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i = \sqrt{2}.\sqrt{2 - \sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + i\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}.\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\right)$

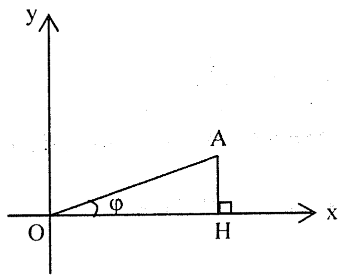
$$= \sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right).$$

Dùng công thức hạ bậc: $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Ta tính được: $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ và $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Vậy acgumen của số phức là $\dfrac{\pi}{8} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

b) Biểu diễn hình học số phức $z = 2 + \sqrt{3} + i$ thì số phức z tương ứng với điểm A $(2 + \sqrt{3}, 1)$.Đặt $\varphi = \widehat{AOH}$



ta có $\tan\varphi = \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

Tương tự $\cos 2\varphi = \dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $2\varphi = \dfrac{\pi}{6} + 2\ell\pi \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12} + \ell\pi$. Chọn $\varphi = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$.

Vậy acgumen của $z = 2 + \sqrt{3} + i$ bằng $\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Bài toán 10. 11: Viết dưới dạng lượng giác của các số phức

a) $\dfrac{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}$ b) $[1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)](1+\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi} = \dfrac{(1-\cos\varphi) - i\sin\varphi}{(1+\cos\varphi) + i\sin\varphi}$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2} - i.\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}} = \tan\frac{\varphi}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}} = -i.\tan\frac{\varphi}{2}$$

– Khi $\tan\frac{\varphi}{2} > 0$ dạng lượng giác là: $\tan\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

– Khi $\tan\frac{\varphi}{2} < 0$ dạng lượng giác là: $-\tan\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

– Khi $\tan\frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác.

b) $(1-\cos\varphi - i\sin\varphi)(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}).2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$

$= 2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

– Khi $\sin\varphi = 0$: nó có dạng lượng giác không xác định.

– Khi $\sin\varphi > 0$: dạng lượng giác là $2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

– Khi $\sin\varphi < 0$: dạng lượng giác là $(-2\sin\varphi)\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Bài toán 10. 12: Viết số phức z dưới dạng lượng giác biết rằng $|z-1| = |z-\sqrt{3}i|$ và $i\overline{z}$ có một acgumen là $\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ thì: $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$i\overline{z} = r(\sin\varphi - i\cos\varphi) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$.

Theo giả thiết ta có $\frac{\pi}{2} - \varphi\varphi = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

Khi đó $|z-1| = |z-\sqrt{3}i| \Leftrightarrow \left|\frac{r}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}r}{2}i\right| = \left|\frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{r}{2}-1\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{2}-1\right)^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4} + 3\left(\frac{r}{2}-1\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = 4\left(\frac{r}{2}-1\right)^2 \Leftrightarrow r = 1$

Vậy $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Bài toán 10. 13: Tính : a) $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2016}$ b) $\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{1000}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{i}{1+i}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2016}=\frac{1}{2^{1008}}\left(\cos\frac{2016\pi}{4}+i.\sin\frac{2016\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{1008}}(\cos 3\pi+i.\sin 3\pi)=-\frac{1}{2^{1008}}$$

b) $\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}=\frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{1+12}=\frac{-13+13i\sqrt{3}}{13}=-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{1000}=2^{1000}\left(\cos\frac{2000\pi}{3}+i\sin\frac{2000\pi}{3}\right)$$

$$=2^{1000}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{1000}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bài toán 10. 14: Tìm các căn bậc hai của các số phức:

a) $z=-2+i2\sqrt{3}$ b) $z=1-i\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $z=-2+i2\sqrt{3}=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Vậy z có hai căn bậc hai là: $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$ và

$$z_2=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1-i\sqrt{3}$$

b) Ta có: $z=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Vậy z có hai căn bậc hai là: $z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Bài toán 10. 15: Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $\left|1-2z\right|=\left|i-\bar{z}\right|$ và $\dfrac{z+3}{z-3}$ có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

b) $2\left|z-i\right|=\left|2+z-\bar{z}\right|$ và $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{z}$ có một acgumen là $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt z = x + yi (x, y ∈ R)

Khi đó $|1-2x| = |i-2\bar{z}| \Leftrightarrow |(2x-1)+yi| = |2x-(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + y^2 = (2x)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow -2x = y$

Và: $\dfrac{z+3}{z-3}=\dfrac{(x+3)+yi}{(x-3)+yi}=\dfrac{((x+3)+yi)((x-3)-yi)}{(x-3)^2+y^2}$

$$=\frac{x^2-9+y^2}{(x-3)^2+y^2}+\frac{-6y}{(x-3)^2+y^2}i$$

Vì $\dfrac{z+3}{z-3}$ có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{4}$ nên

$$\frac{z+3}{z-3}=r\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{r}{\sqrt{2}}+\frac{r}{\sqrt{2}}i, r>0$$

Do đó $\begin{cases}\dfrac{x^2-9+y^2}{(x-3)^2+y^2}=\dfrac{r}{2}\\ \dfrac{-6y}{(x-3)^2+y^2}=\dfrac{r}{2}, \quad r>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y<0\\ x^2-9+y^2=-6y\end{cases}$

Nên ta có $\begin{cases}-2x=y<0\\ 5x^2-12x-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=-6\end{cases}$. Vậy z = 3 – 6i.

b) Giả sử z = r(cosφ + isinφ), r > 0.

Ta có $1-\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$

nên $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{z}=\dfrac{2}{r}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)\right)$

Theo giả thiết $-\dfrac{\pi}{3}-\varphi=-\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Do đó $z=\dfrac{r}{2}+\dfrac{\sqrt{3}r}{2}i$

Theo giả thiết $2|z-i| = |2+z-\bar{z}| \Leftrightarrow |r+(\sqrt{3}r-2)i)| = |2+\sqrt{3}ri)|$

$\Leftrightarrow r^2+(\sqrt{3}r-2)^2 = 4+(\sqrt{3}r)^2 \Leftrightarrow r^2-4\sqrt{3}r=0$

$\Leftrightarrow r=4\sqrt{3}$, vì r > 0.Vậy $z=2\sqrt{3}+6i$.

Bài toán 10. 16: Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện sau

a) $|z+1| = \left|\frac{z+\bar{z}}{2} + 3\right|$, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

b) $\left|\frac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = \sqrt{3}$, hãy tìm số phức có môđun lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$

Khi đó $|z+1| = \left|\frac{z+\bar{z}}{2} + 3\right| \Leftrightarrow |(x+1) + yi| = |x+3|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x + 8.$

Ta có $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+4x+8} = \sqrt{(x+2)^2+4} \geq 2$

Dấu = xảy ra khi $x = -2 \Rightarrow y = 0$. Vậy số phức $z = -2$.

b) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Ta có

$\left|\frac{(1+i)\bar{z}}{1-i} + 2\right| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |i(x+yi) + 2| = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |(2-y) + xi| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 3.$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$

Đặt $x = \sqrt{3}\sin\alpha$, $y = \sqrt{3}\cos\alpha$ thì tìm được

$|z|$ lớn nhất khi $z = (2+\sqrt{3})i$ và $|z|$ nhỏ nhất khi $z = (2-\sqrt{3})i$.

Bài toán 10. 17: Xét các số phức $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

Viết z_1, z_2, z_3 dưới dạng lượng giác, suy ra $\cos\frac{7\pi}{12}$ và $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$z_2 = 2(-1-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$

Mặt khác:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2-2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-2+2i)}{8} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

So sánh đồng nhất với kết quả trên, suy ra:

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Bài toán 10. 18: Cho a,b,c là ba số thực sao cho cosa.cosb.cosc $\neq 0$.

Tìm phần ảo của số phức (1 + itana) (1 + itanb) (1 + itanc), suy ra tan a + tan b + tan c = tan a.tan b.tan c $\Leftrightarrow$ a+b+c = kπ (k$\in$ **Z**)

Hướng dẫn giải

Từ khai triển của (1+itana) (1+itanb) (1+itanc) thì phần ảo của số phức (1+itana) (1+itanb) (1+itanc) bằng tana + tanb + tanc – tana.tanb.tanc

Vậy tana + tanb + tanc = tana.tanb.tanc khi và chỉ khi phần ảo của số phức đang xét bằng 0, tức là acgumen của số phức đó là một bội nguyên của π.

Mặt khác, 1 + itana = $\frac{1}{\cos a}$(cosa + isina) có acgumen là a+$\ell\pi$ với ℓ là số nguyên bất kì

Tương tự cho 1 + itanb, 1 + itanc.

Do đó: (1+itana) (1+itanb) (1+itanc) có acgumen là a + b + c + $\ell\pi$

Vậy: tana + tanb + tanc = tana.tanb.tanc $\Leftrightarrow$ a+b+c = kπ (k $\in$ **Z**)

Bài toán 10. 19: Giải các phương trình nghiệm phức:

a) $2ix^2 - 3x + 4 + i = 0$

b) $z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)z + i\sin\varphi\cos\varphi = 0$

Hướng dẫn giải

a) $\Delta = 9 - 8i(4+i) = 9 - 32i - 8i^2 = 17 - 32i$

Ta tìm các căn bậc hai a + bi , a,b$\in$ **R** của $\Delta = (a+bi)^2 = 17 - 32i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 17 \\ 2ab = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{256}{a^2} = 17 \\ b = -\dfrac{16}{a} \end{cases}$$

Từ đó, phương trình cho có 2 nghiệm phức:

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i;$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{1313}-17}{2}} - \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{\frac{\sqrt{1313}+17}{2}}\right)i$$

b) $\Delta = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - 4i\sin\varphi\cos\varphi$

$= \cos^2\varphi + (i\sin\varphi)^2 - 2i.\sin\varphi\cos\varphi = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^2$

Nên Δ có hai căn bậc hai là $\pm(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $z_1 = \cos\varphi, z_2 = i\sin\varphi$.

Bài toán 10. 20: Giải các phương trình nghiệm phức

a) $x^3 - 8 = 0$ b) $(x+i-2)[x^2 - (2+i)x + 7i - 1] = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x^2 + 2x + 4 = 0$.

Phương trình bậc hai có $\Delta' = 1-4 = -3 = 3i^2$ nên có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{3}$. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x = 2$; $x = -1 \pm i\sqrt{3}$

b) $(x + i - 2)[x^2 - (2+i)x + 7i - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 2-i$ hoặc $x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0$

Phương trình bậc hai có biệt thức

$\Delta = (2+i)^2 - 4(7i-1) = 7 - 24i = (4-3i)^2$ nên Δ có các căn bậc hai là $\pm(4-3i)$.

Từ đó giải cho 2 nghiệm $x = 3 - i$, $x = -1 + 2i$

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm: $x = 2 - i$, $x = 3 - i$, $x = -1 + 2i$

Bài toán 10. 21: Giải phương trình nghiệm phức:

a) $z^4 + 2z^3 + z^2 + 4z + 4 = 0$.

b) $z^3 - (3+i)z^2 + (3+4i)z + 1 - mi = 0$ biết 1 nghiệm $z = i$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $z = 0$ không là nghiệm của phương trình, chia z^2 ta được:

$$z^2 + 2z + 1 + \frac{4}{z} + \frac{4}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{2}{z}\right)^2 + 2\left(z + \frac{2}{z}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z + \frac{2}{z} = 1 \\ z + \frac{2}{z} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - z + 2 = 0 \\ z^2 + 3z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ z = -1, z = -2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $z = -1$, $z = -2$, $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

b) Thay $z = i$ vào phương trình ta có $m = 3$.

Khi đó PT: $z^3 - (3+i)z^2 + (3+4i)z + 1 - 3i = 0$

$\Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 3z + 3 + i) = 0 \Leftrightarrow z = i$ hoặc $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

Giải phương trình bậc hai

Ta có Δ: $9 - 4(3+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2$

Suy ra $z = 2 - i$, $z = 1 + i$.

Vậy 3 nghiệm của phương trình là $z = i$, $z = 2 - i$, $z = 1 + i$.

Bài toán 10. 22: Giải các phương trình nghiệm phức:

a) $(z+3-i)^2 - 6(z+3-i) + 13 = 0$ b) $\left(\dfrac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 3\dfrac{iz+3}{z-2i} - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $z+3-i = w$ thì phương trình trở thành $w^2-6w+13 = 0$.

Biệt thức $\Delta = 36 - 52 = -16$ nên $w = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$

do đó $z+3-i = 3 \pm 2i$ hay $z - i = \pm 2i$

Vậy $z = 3i$ và $z = -i$ là các nghiệm cần tìm.

b)Đặt $\dfrac{iz+3}{z-2i} = w$ thì phương trình: $w^2 - 3w - 4 = 0$

Biệt thức $\Delta = 9 + 16 = 25$ nên $w = \dfrac{3 \pm 5}{2}$ suy ra $w = -1$ hay $w = 4$

Với $w = -1$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = -1 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+5i}{2}$.

Với $w = 4$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = 4 \Leftrightarrow z = \dfrac{4+35i}{17}$.

Bài toán 10. 23: Giải các phương trình và biểu diễn tập nghiệm:

a) $z^4 - 16 = 0$ b) $8z^4 + 8z^3 = z + 1$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (z^2-4)(z^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow (z-2)(z+2)(z^2+4) = 0 \quad \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 2$ hay $z_{3,4} = \pm 2i$

Vậy phương trình có 4 nghiệm được biểu diễn bởi 4 điểm A, B, C, D tạo thành hình vuông ở hình 1.

b) $8z^4 + 8z^3 = z + 1 \Leftrightarrow (z+1)(8z^3-1) = 0$

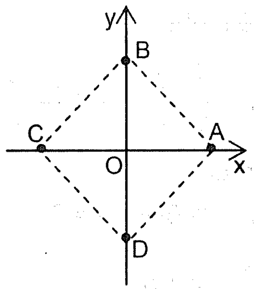
$\Leftrightarrow (z+1)(2z-1)(4z^2+2z+1) = 0$

$\Leftrightarrow (z+1)(2z-1) = 0$ hay $4z^2 + 2z + 1 = 0$

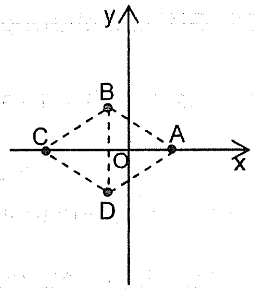
Nghiệm của $z+1 = 0$ là $z_1 = -1$, nghiệm của $2z-1 = 0$ là $z_2 = \dfrac{1}{2}$

Nghiệm của $4z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2z + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0$ là $z_3 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ và

$z_4 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm được biểu diễn bởi 4 điểm A, B, C, D tạo thành hình thoi ở hình 2.



Hình 1



Hình 2

Bài toán 10. 24: Giải phương trình nghiệm phức: $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ $n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương: $(z + 1)^n = (z - 1)^n$,

vì $z = 1$ không thể là nghiệm, do đó ta có thể viết: $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

Gọi $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ là các căn số bậc n của 1:

$$\omega_m = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

Phương trình trên trở thành: $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega_m$ với $m = 0,1,\ldots,n-1$

$\Leftrightarrow$ $z + 1 = \omega_m(z - 1)$ với $m = 0,1,\ldots,n-1$

$\Leftrightarrow$ $z = \dfrac{1+\omega_m}{-1+\omega_m}$ với $m = 1,2,\ldots,n-1$ $\Leftrightarrow$ $z = \cot\dfrac{m\pi}{n}.(-i)$

(Vì $m = 0 \Rightarrow \omega_0 = 1 \Rightarrow z$ không xác định nên ta loại bỏ ω_0)

Vậy phương trình có $n-1$ nghiệm: $z = -i\cot\dfrac{m\pi}{n}$ với $m = 1,2,\ldots,n-1$.

Bài toán 10. 25: Giải các hệ phương trình nghiệm phức:

a) $\begin{cases} z + w = 4 - i \\ z^3 + w^3 = 7 + 28i \end{cases}$ b) $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 & (1) \\ z^2(\overline{w})^4 = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $z + w = 4 - i$.

Và $z^3 + w^3 = 7 + 28i \Leftrightarrow (z + w)((z + w)^2 - 3zw) = 7 + 28i$

$$(4 - i)^2 - 3zw = \frac{7+28i}{4-i} \Leftrightarrow zw = 5 - 5i$$

Vì $z + w = 4 - i$ nên $w = 4 - i - z$.

Thế vào thì có phương trình $z^2 - (4 - i)z + 5 - 5i = 0$

Ta có: $\Delta = -5 + 12i = (2 + 3i)^2$. Suy ra $z = 3 + i$ hoặc $z = 1 - 2i$

Vậy $(z; w) = (3+i; 1-2i)$, $(z; w) = (1-2i; 3+i)$.

b) Từ (2) suy ra $z^6(\overline{w})^{12} = 1$. Từ (1) suy ra $z^6 = w^{10}$

Do đó: $w^{10}(\overline{w})^{12} = 1$ nên $|w|^{22} = 1$ tức là $|w| = 1$

Suy ra $|z^6| = |w|^{10} = 1$ tức là $|z| = 1$. Từ $w = \frac{1}{\overline{w}}$ và $w^{10}(\overline{w})^{12} = 1$ suy ra $(\overline{w})^2 = 1$ nên w bằng 1 hoặc bằng -1.

Từ $(\overline{w})^2 = 1$ và (2) suy ra $z^2 = 1$ tức z bằng 1 hoặc bằng -1.

Mà (1): $z^3 + w^5 = 0$ nên: $z = 1 \Rightarrow w = -1$ và $z = -1 \Rightarrow w = 1$

Vậy hệ có hai nghiệm (z, w) là : (1, -1) và (-1, 1).

Bài toán 10. 26: Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-3i}{2+i}\right| = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ x + 3y + (i-1)z = -30i \end{cases}$

Khử x ta có hệ: $\begin{cases} (i+1)y - 2(1+i)z = -10 \\ 4y - (1+i)z = -20 - 30i \end{cases}$

Từ đó có x = 3 − 11i. Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = 3 - 11i \\ y = -3 - 9i \\ z = 1 - 7i \end{cases}$

b) Ngoài cách giải đại số, bằng cách viết z = x+yi (x, y ∈ **R**) rồi tính toán.Ta có cách giải hình học biểu diễn như sau:

Ta có tập hợp các điểm M của mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn $\left|\dfrac{z-z_0}{z-z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_0| = |z - z_1|$ là đường trung trực của đoạn thẳng A_0A_1 với A_0, A_1 theo thứ tự biểu diễn số phức z_0, z_1.

Do đó $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$ nên điểm M biểu diễn số z = x + yi, với x, y ∈ **R** phải nằm trên đường phân giác y = x .Còn điều kiện $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1$ chứng tỏ phần ảo của z bằng 1.Vậy z = 1 + i

Bài toán 10. 27: Không giải phương trình $z^2 + (2-i)z + 3 + 5i = 0$. Hãy tính: $z_1^2 + z_2^2, z_1^4 + z_2^4$.

Hướng dẫn giải

Theo hệ thức Viet ta có: $S = z_1 + z_2 = -2 + i$, $P = z_1z_2 = 3 + 5i$

Do đó $z_1^2 + z_2^2 = S^2 - 2P = (-2 + i)^2 - 2(3+5i) = -3-14i$

$$z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2z_2^2 = (-3-14i)^2 - 2(3+5i)^2$$
$$= -155 + 24i.$$

Bài toán 10. 28: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện

$$|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0 \text{. Tính } T = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{z_1}{z_2} = w$ ta được $|z_2w - z_2| = |z_2w| = |z_2| > 0$

Hay $|w - 1| = |w| = 1$

Giả sử $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

Khi đó ta có $(a-1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

– Với $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

thì $w^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ và $\left(\frac{1}{w}\right)^4 = \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}$

Do đó $T = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = w^4 + \left(\frac{1}{w}\right)^4 = 2\cos\frac{4\pi}{3} = -1$

– Với $w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, tương tự $T = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = w^4 + \left(\frac{1}{w}\right)^4 = -1$.

Bài toán 10. 29: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:

a) $|z + 2 - 3i| = 4$ b) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử: $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbf{R})$,

Ta có: $|z + 2 - 3i| = 4 \Leftrightarrow |(x+2) + (y-3)i|^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I(–2 ;3), bán kính R = 4.

b) Giả sử: z = x + yi (x, y ∈ R), ta có:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |x + (y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là trục thực Ox.

Bài toán 10. 30: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn từng điều kiện:

a) $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$ b) $|z^2 - (z\bar{z})^2| = 4$

Hướng dẫn giải

a) Gọi z = x + yi, x, y ∈ **R**. Ta có: $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$

$$\Leftrightarrow 2|x + (y-1)i| = 2|(y+1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$.Vậy tập hợp cần tìm là parabol $y = \frac{x^2}{4}$

b) Gọi z = x + yi, x, y ∈ **R**.Ta có: $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \Leftrightarrow |4xyi| = 4$

$\Leftrightarrow |xy| = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $xy = -1$

Vậy tập hợp cần tìm là hai hypebol $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$.

Bài toán 10. 31: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau:

a) z là các căn bậc hai của a + i, a thay đổi.

b) $\frac{z-2}{z+2}$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

a) Viết z = x + yi (x,y ∈ R) thì

$$z^2 = a + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$$

Do đó, điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol $y = \frac{1}{2x}$. Vì với mỗi điểm (x,y) của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch nên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

Vậy tập các điểm biểu diễn căn bậc hai là hypebol $y = \frac{1}{2x}$.

b) Ta có số phức $\dfrac{z-2}{z+2}=\dfrac{z-2}{z+2}.\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}+2}=\dfrac{z\overline{z}-4+2(z-\overline{z})}{|z+2|^2}$ có một acgumen bằng

$\dfrac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi $z\overline{z}-4+2(z-\overline{z})=\ell(1+i\sqrt{3})$, ℓ là số thực dương.

Viết $z = x + yi$ $(x,y \in \mathbf{R})$ thì: $z.\overline{z}-4+2(z-\overline{z})=x^2+y^2-4+4yi$

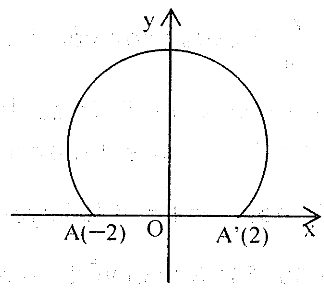
nên $z\overline{z}-4+2(z-\overline{z})=\ell(1+i\sqrt{3})$, $(\ell>0)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4+4yi=\ell+\ell\sqrt{3}\,i$ $(\ell>0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4=\ell \ (\ell>0) \\ 4y=\ell\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow 4y=(x^2+y^2-4)\sqrt{3}$, $y>0$

Mà: $4y=(x^2+y^2-4)\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\dfrac{16}{3}=0$



Vậy M chạy trên cung tròn có tâm là điểm biểu diễn $\dfrac{2}{\sqrt{3}}i$ và có bán kính bằng $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ nằm ở phía trên trục thực.

Bài toán 10. 32: Chứng minh rằng:

a)Nếu z là một căn bậc hai của số phức w thì $\sqrt{|w|}=|z|$

b) Nếu z_1 khác z_2: $|z_1|=|z_2|$ khi và chỉ khi $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo.

Hướng dẫn giải

a) Nếu z là một căn bậc hai của w thì $z^2 = w$

Nên $|z^2|=|z|^2=|w|$. Vậy: $|z|=\sqrt{|z|^2}=\sqrt{|w|}$

b) Với điều kiện $z_1 \neq z_2$, $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\overline{\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\overline{(z_1-z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1+z_2)}=0$

$\Leftrightarrow 2(z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2})=0 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$.

Bài toán 10. 33: Tìm số nguyên dương n:

a) z^n là số thực, số ảo với số phức $z = \sqrt{3} + i$.

b) Nhỏ nhất sao cho $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^n$ là số thực và $z_2 = \left(\dfrac{5 - i}{2 - 3i}\right)^{n+2}$ là số ảo.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

Áp dụng công thức Moivre thì $z^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$

z^n là số thực $\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} = k\pi \quad \Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbf{N}^*$

z^n là số ảo $\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow n = 3(2k + 1), k \in \mathbf{N}.$

b) Ta có: $\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

nên $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^n = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$

z_1 là số thực $\Leftrightarrow \sin\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 6k$, với k nguyên dương.

Ta có $\dfrac{5 - i}{2 - 3i} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $z_2 = \left(\dfrac{5 - i}{2 - 3i}\right)^{n+2}$

$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{n+2} = \sqrt{2}^{n+2}\left(\cos\dfrac{(n+2)\pi}{4} + i\sin\dfrac{(n+2)\pi}{4}\right)$

z_2 là số ảo $\Leftrightarrow \cos\dfrac{(n+2)\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n + 2 = 4l + 2$

$\Leftrightarrow n = 4l$, với l nguyên dương.

Vậy số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là n = 12.

Bài toán 10. 34: Tính $\sin 4\varphi$ và $\cos 4\varphi$ theo các luỹ thừa của $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$

Hướng dẫn giải

Ta tính $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$ theo 2 cách:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi$$

và $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4(\cos^3\varphi)(i\sin\varphi) + 6(\cos^2\varphi)(i^2)\sin^2\varphi +$

$+ 4(\cos\varphi)(i^3\sin^3\varphi) + i^4\sin^4\varphi$

$= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + (4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)i$

Từ đó có: $\cos4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$

$\sin4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.

Bài toán 10. 35: Cho $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbf{R}$). Chứng minh rằng:

a) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$; $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i.\sin n\varphi$ với mọi số nguyên $n \geq 1$.

b) $\cos^4\varphi = \dfrac{1}{8}(\cos4\varphi + 4\cos2\varphi + 3)$, $\sin^5\varphi = \dfrac{1}{16}(\sin5\varphi - 5\sin3\varphi + 10\sin\varphi)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbf{R}$)

nên $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, $\dfrac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$ nên:

Do đó $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$, $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi$

b) Khi n = 1 ta có: $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\varphi$, $z - \dfrac{1}{z} = 2i\sin\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{2i}(z - \dfrac{1}{z})$ nên

$$\cos^4\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^4 = \frac{1}{2^4}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + C_4^1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_4^2\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}(2\cos4\varphi + 4.2\cos2\varphi + 6) = \frac{1}{8}(\cos4\varphi + 4\cos2\varphi + 3)$$

$$\text{và } \sin^5\varphi = \left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^5 = \frac{1}{i2^5}\left[\left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - C_5^1\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + C_5^2\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^5}(2\sin5\varphi - 2C_5^1\sin\varphi + 2C_5^2\sin\varphi) = \frac{1}{16}(\sin5\varphi - 5\sin3\varphi + 10\sin\varphi)$$

Bài toán 10. 37: Cho các số thực a, b sao cho $\sin\dfrac{a}{2} \neq 0$

Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, tính các tổng

$S = \cos b + \cos(a + b) + \cos(2a + b) + ... + \cos(na + b)$

$T = \sin b + \sin(a + b) + \sin(2a + b) + ... + \sin(na + b)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\alpha = \cos a + i\sin a$, $\beta = \cos b + i\sin b$ thì:

$S + iT = [\cos b + i\sin b] + [\cos(a + b) + i\sin(a + b)]$

$+ [\cos(2a+b) + i\sin(2a+b)] + ... + [\cos(na+b) + i\sin(na+b)]$

$= \beta + \beta\alpha + \beta\alpha^2 + ... + \beta\alpha^n = \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n)$

$= \beta\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ (để ý rằng $\alpha \neq 1$ do $\sin\dfrac{a}{2} \neq 0$)

$= \beta\dfrac{1-\cos(n+1)a - i\sin(n+1)a}{1-\cos a - i\sin a}$

$= \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\left[\cos\left(\dfrac{na}{2}+b\right)+i\sin\left(\dfrac{na}{2}+b\right)\right]$. Từ đó suy ra:

$$S = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{na}{2}+b\right),\ T = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{na}{2}+b\right).$$

Bài toán 10. 38: Tính các tổng hữu hạn:

$$A = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - ... \text{ và } B = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - ....$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i - C_n^6 - C_n^7 i + ...$

$= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - ... + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - ...)$

$= A + Bi$. Mặt khác:

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Vậy: $A = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$ và $B = 2^{n/2}\left(\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Bài toán 10. 39: Chứng minh :

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + ... = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4})$$

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + ... = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}).$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i - C_n^6 - C_n^7 i + ...$

$(1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k i^k = 1 - C_n^1 i + C_n^2 + C_n^3 i - C_n^4 - C_n^5 i + C_n^6 + C_n^7 i + ...$

Và $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Do đó $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

Suy ra $2\left(C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots\right) = 2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Tương tự $2\left(C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots\right) = 2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 10. 40: Các vectơ $\vec{u}$, $\vec{u}'$ trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z'. Chứng minh:

a) Tích vô hướng $\vec{u}.\vec{u}'$ thoả mãn: $\vec{u}.\vec{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}')$

b) Nếu $\vec{u} \neq 0$ thì $\vec{u}$, $\vec{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $\frac{z'}{z}$ là số ảo;

Hướng dẫn giải

a) Viết z = x + yi, z' = x' + y'i (x, y, x', y' $\in$ **R**) thì: $\vec{u}.\vec{u}' = xx' + yy'$

và: $\bar{z}z' + z\bar{z}' = (x-yi)(x'+y'i) + (x+yi)(x'-y'i) = 2(xx'+yy')$

Nên: $\vec{u}.\vec{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}')$

b) $\vec{u}.\vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \bar{z}z' + z\bar{z}' = 0$. Do đó:

$$\vec{u}.\vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \frac{\overline{z'}}{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \text{ là số ảo.}$$

Bài toán 10. 41: Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3.

a) Trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

b) Giả sử $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi:$z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Hướng dẫn giải

a) G là trọng tâm của tam giác ABC khi: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_3 nên G biểu diễn số phức $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

b) Ba điểm A, B, C thuộc một đường tròn tâm O nên tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi trọng tâm G của nó trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp, tức G ≡ 0 hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Bài toán 10. 42: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = xy + 2 \\ x^2 + 4y + 21 = y^2 + 10x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thì:

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i.$$

Hệ $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = -1 + i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow z^3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right); \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right); \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

Suy ra nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{2\pi}{9} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \sqrt[3]{2}\cos\frac{8\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{8\pi}{9} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \sqrt[3]{2}\cos\frac{14\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2}\sin\frac{14\pi}{9} \end{cases}$$

b) Xét số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Hệ $\begin{cases} 2x + 5y = xy + 2 \\ x^2 + 4y + 21 = y^2 + 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x - 5y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21) + 2(xy - 2x - 5y + 2)i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 2xyi) - (10 + 4i)(x + yi) + 21 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2(5 + 2i)z + 21 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = (5 + 2\sqrt{2}) + (2 + 2\sqrt{2})i \text{ hay } z = (5 - 2\sqrt{2}) + (2 - 2\sqrt{2})i$$

Suy ra nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{2} \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{2} \\ y = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Bài toán 10. 43: Phân tích thành

a) Nhân tử bậc nhất của: f(x) = cos(n arccosx)

b) Tổng các phần tử đơn của: $P(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = \cos(n\arccos x) = 0 \Leftrightarrow n\arccos x = \frac{\pi}{2}\, k\pi \Leftrightarrow x = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi$.

Theo định nghĩa hàm số lượng giác ngược

$0 \le \left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi \le \pi$ hay $-\frac{1}{2} \le k \le n - \frac{1}{2}$ tức là $k = 0,1,\ldots, n-1$

$$f(x) = \cos(n\arccos x) = a_0\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = a_0\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

Đặt arccosx = v thì từ công thức MOIVRE ta có:

$\cos(nv) = \cos^n v - C_n^2\cos^{n-2} v\sin^2 v + C_n^4\cos^{n-4} v\sin^4 v\ldots+\ldots$

$= x^n - C_n^2 x^{n-2}(1 - x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1 - x^2)^2 + \ldots$

Nên hệ số cao nhất $a_0 = 1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$

Vậy: $\cos(n\arccos x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2k-1}{n}\pi\right)$

b) Ta có: $P(x) = \frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}$

Áp dụng công thức nội suy Lagrăng cho $f(x) = x^2$ và 4 số

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$, $\varphi(x) = \Pi(x - x_i)$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{4}\frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)(x-x_i)}$$

Do đó $P(x) = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$ trên **C**[x]

$= \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$ trên **R**[x]

Bài toán 10. 44: Chứng minh:

a) $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} \vdots x^2 + x + 1$ với m, n, p nguyên dương.

b) $f(x) = x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}$ chia hết cho:

$g(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Để chứng minh đa thức f(x) chia hết cho cho đa thức g(x), ta chỉ cần chứng minh mọi nghiệm của g(x) đều là nghiệm của f(x).

Nếu gọi w là nghiệm của $x^2 + x + 1$ thì $w^2 + w + 1 = 0$

hay $w^2 = -w - 1$ nên $w^3 = -w^2 - w = w + 1 - w = 1$

Thay w vào đa thức thứ nhất ta có: $w^{3m} + w^{3n+1} + w^{3p+2} = 1 + w + w^2 = 0$

Vậy w cũng là nghiệm của đa thức $x^2 + x + 1$ (đpcm).

b) Gọi ε là nghiệm của g(x), ta có:

$g(\varepsilon) = \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^{k-2} + ... + 1 = 0$ nên ε chính là các giá trị của căn bậc k của đơn vị, nghĩa là ta có $\varepsilon^k = 1$.Do đó

$f(\varepsilon) = \varepsilon^{ka_1} + \varepsilon^{ka_2+1} + \ldots + \varepsilon^{ka_k+k-1} = 1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{k-1} = 0$

Vì vậy, mọi nghiệm của g(x) đều là nghiệm của f(x) nên $f(x) \vdots g(x)$ (đpcm).

Bài toán 10. 45: Cho n là số nguyên dương đa và đa thức P(x) với các hệ số thực như sau $P(x) = (m+1)x^2(x+1)^{2n+2} + (3m-2)x^n$. Tìm tất cả các giá trị thực m để $x^2 + x + 1 | P(x)$.

Hướng dẫn giải

Xét $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\omega, \omega^2\}$. Khi đó

$$P(\omega) = (m+1)\omega^2(\omega+1)^{2n+2} + (3m-2)\omega^n = (m+1)\omega^{4n+6} + (3m-2)\omega^n$$
$$= (m+1)\omega^n + (3m-2)\omega^n = (4m-1)\omega^n$$

Theo giả thiết, suy ra $P(\omega) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Bài toán 10. 46: Tìm tất cả các đa thức $p(x) \in Z[x]$ là monic bậc hai sao cho tồn tại đa thức $q(x) \in Z[x]$ mà các hệ số của đa thức $r(x) = p(x)q(x)$ đều thuộc $\{-1, 1\}$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $p(x) = x^2 + ax \pm 1$, với $a \in \mathbf{Z}$. Giả sử

$$r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \{-1, 1\}, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Gọi z là một nghiệm phức của r(x) và $|z| > 1$ thì ta có

$$|z|^n = |z^n| = \left|-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} z^i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} z^i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |z^i| = \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Suy ra $|z|^n(|z| - 1) \le |z|^n - 1 \Rightarrow |z|^n(|z| - 2) \le -1 \Rightarrow |z| < 2$.

Vậy mọi nghiệm của r(x) đều có mô đun nhỏ hơn 2. Từ đó nếu gọi z_1, z_2 là các nghiệm của p(x) thì ta có $|z_1| < 2$, $|z_2| < 2$, ngoài ra ta còn có $|z_1||z_2| = |z_1 z_2| = 1$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $|z_1| \geq |z_2| \Rightarrow 1 \leq |z_1| < 2,\ 0 < |z_2| \leq 1$.

Ta lại có

$$|a| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| < 1 + 2 = 3 \Rightarrow a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Với $a = 0$, ta có $q(x) = x + 1$.

Với $a = \pm 1$, ta có $q(x) = 1$.

Với $a = \pm 2$. Kiểm tra $p(x) = x^2 \pm 2x + 1$ thì sẽ có $q(x) = x \mp 1$, còn với $p(x) = x^2 \pm 2x - 1$ thì không thoả mãn vì có một nghiệm có môđun lớn hơn 2.

Vậy có 8 đáp số của p(x) là $x^2 \pm 1, x^2 \pm x \pm 1, x^2 \pm 2x + 1$.

Bài toán 21. 47: Cho đa thức $P(x) = rx^3 + qx^2 + px + 1$ trong đó p, q, r là các số thực với $r > 0$.

Xét dãy số (a_n): $a_0 = 1, a_1 = -p, a_2 = p^2 - q$

$a_{n+3} = -pa_{n+2} - qa_{n+1} - ra_n \ (n \geq 0)$.

Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực và không có nghiệm bội thì dãy (a_n) có vô số số âm.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện đề bài suy ra phương trình đặc trưng của phương trình sai phân $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ có 1 nghiệm thực âm và hai nghiệm phức liên hợp.

Giả sử ba nghiệm đó là $-a$, $R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ với $a > 0$, $R > 0$, $0 < \alpha < \pi$ thì $a_n = C_1(-a)^n + C_2R^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + C_3R^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$ trong đó C_1, C_2, C_3 là các hằng số nào đó, C_2, C_3 là các số phức liên hợp.

Đặt $C_2 = R^*(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $\varphi \in [0, 2\pi)$, ta có

$$\begin{aligned} a_n &= C_1(-a)^n + R^n(R^*(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos n\alpha + i\sin n\varphi) \\ &\qquad + R^*(\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos n\alpha - i\sin n\varphi)) \\ &= C_1(-a)^n + 2R^nR^*(\cos(n\alpha + \varphi)) \end{aligned}$$

Giả sử ngược lại tồn tại n sao cho $a_n \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$.

Khi đó ta có $0 \leq a_{n+1} + aa_n$

$$\begin{aligned} &= 2R^{n+1}R^*(\cos((n+1)\alpha + \varphi)) + a2R^nR^*(\cos(n\alpha + \varphi)) \\ &= 2R^nR^*(R\cos((n+1)\alpha + \varphi) + a\cos(n\alpha + \varphi)) \\ &= 2R^nR^*.C.\cos(n\alpha + \varphi^*) \quad (C > 0,\ \varphi^* \in [0, 2\pi)) \text{ với mọi } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Điều này không xảy ra vì $0 < \alpha < \pi$ nên tồn tại vô số n sao cho:

$$n\alpha + \varphi^* \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 10. 1: Tính:a) $\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$ b) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

Hướng dẫn

a) Nhân số phức liên hiệp của mẫu. Kết quả cos2x + isin2x

b) Kết quả 2

Bài tập 10. 2: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

a) $\dfrac{\bar{z}+i}{iz-1}$ với số phức z = x + iy (x, y $\in$ **R**).

b) $z = 1+(1+i\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3})^2+\ldots+(1+i\sqrt{3})^{2017}$

Hướng dẫn

a) Tính trực tiếp. Kết quả $\dfrac{-2xy}{x^2+(y+1)^2}$ và $\dfrac{y^2-x^2-1}{x^2+(y+1)^2}$

b) Dùng tổng n số hạng của cấp số nhân $S_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$

và tách lũy thừa về $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$.

Bài tập 10. 3: Cho z = x + yi , (x , y $\in$ **R**) .

Chứng minh $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra.

Hướng dẫn

Tính trực tiếp. Kết quả $b = \pm a$

Bài tập 10. 4: Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) – (cosφ + isinφ); cosφ – isinφ

b) sinφ + icosφ ; sinφ – icosφ

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa dạng lượng giác và công thức lượng giác.

Kết quả cos(φ + π) + isin(φ + π); cos (–φ) + isin(–φ)

b) Kết quả $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$; $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi - \frac{\pi}{2})$

Bài tập 10. 5: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện sau, tìm các số có acgumen dương nhỏ nhất.

a) $|z + 1 - i| \leq 1$ b) $|z - 5i| \leq 3$

Hướng dẫn

a) Gọi z = x + yi , (x , y $\in$ **R**) và tìm tập điểm thỏa mãn.

Kết quả z = i

b) Kết quả $\dfrac{12}{5}+\dfrac{16}{5}i$

Bài tập 10. 6: Giải phương trình trong tập số phức:

a) $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$ b) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$

Hướng dẫn

a) Lập Δ. Kết quả 2i , −1+i.

b) Biến đổi tích nhờ nhẩm nghiệm, dự đoán nghiệm.

Kết quả 1+ i; 1 − i ; $-\frac{1+\sqrt{13}}{6}$; $\frac{\sqrt{13}-1}{6}$

Bài tập 10. 7: Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thoả mãn

a) $\frac{1}{z-i}$ là số ảo. b) $|z - i + 2| + |z + i| = 9$

Hướng dẫn

a) Gọi z = x + yi , (x , y ∈ **R**) và tính trực tiếp $\frac{1}{z-i}$.

Kết quả trục ảo Oy trừ I(0;1)

b) Gọi z = x + yi , (x , y ∈ **R**) và biến đổi tương đương. Kết quả Elip

Bài tập 10. 8: Chứng minh rằng:

a) Nếu phương trình $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ với các hệ số thực có nghiệm phức là z_0 thì $\bar{z}_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

b) A, B, C, D biểu diễn theo thứ tự các số: −1 + i, −1 − i, 2i, 2 − 2i cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa nghiệm và số phức liên hiệp

b) Lập phương trình đường tròn qua A, B, C và thử tọa độ D.

Hay nhận xét AC và AD, BA và BD vuông góc nhau nên thuộc đường tròn đường kính CD.

Bài tập 10. 9: Tìm số phức z thoả mãn điều kiện:

a) $z^4 = -1$ b) $z^2 + (\bar{z})^2 = 0$ và $\left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1$.

Hướng dẫn

a) $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = i^2 \Leftrightarrow z^2 = -i$ hay $z^2 = i$.

Kết quả $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$.

b) Kết quả $z_1 = 2(1 + i)$ và $z_2 = 2(1 - i)$.

Bài tập 10.10: Chứng minh rằng đa thức P(z) là hàm số chẵn của z ∈ **C** khi và chỉ khi tồn tại Q(z) thoả mãn: P(z) = Q(z) Q(−z), z ∈ **C**

Hướng dẫn

Chứng minh bằng qui nạp theo m là số nghiệm khác 0 của đa thức P(z), tức là tồn tại Q(z) thoả mãn P(z) ≡ Q(z) Q(−z).

Chuyên đề 11: PHÉP BIẾN HÌNH KHÔNG GIAN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phép dời hình trong không gian

- Một phép biến hình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ: nếu F biến hai điểm bất kì M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN.

  Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng...
- Hợp thành của những phép dời hình là phép dời hình.

Các phép dời hình trong không gian

- Phép tịnh tiến: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
- Phép đối xứng qua đường thẳng (phép đối xứng trục): Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho trong mặt phẳng (M, d), d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.
- Phép đối xứng qua một điểm (phép đối xứng tâm): Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$, hay O là trung điểm của MM'.
- Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.
- Hai hình H và H' gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

  Đối với các khối đa diện lồi: Nếu phép dời hình F biến tập các đỉnh của khối đa diện lồi H thành tập các đỉnh của khối đa diện lồi H' thì F biến H thành H'.

Định lý: Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', AC = A'C', BD = B'D'.

Phép vị tự trong không gian

- Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là phép vị tự. Điểm O gọi là tâm vị tự, số k gọi là tỉ số vị tự.

  Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và do đó M'N' = $|k|$MN.

  Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

– Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành hình H_1 mà hình H_1 bằng hình H'.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 11. 1: Cho tứ diện ABCD. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C, D thành chính nó phải là phép đồng nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử phép dời hình f biến các điểm A, B, C, D thành chính các điểm đó, tức là f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C, f(D) = D. Ta chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành M.

Thật vậy giả sử M' = f(M) và M' khác với M. Khi đó vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên AM = AM', BM = BM', CM = CM', DM = DM', suy ra bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn MM', điều đó trái với giả thiết ABCD là hình tứ diện.

Vậy M' trùng với M và do đó f là phép đồng nhất.

Bài toán 11. 2: Cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng bằng nhau: AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', DB = D'B', AC = A'C'. Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

Hướng dẫn giải

Giả sử có hai phép dời hình f_1 và f_2 đều biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Nếu f_1 và f_2 khác nhau thì có ít nhất một điểm M sao cho nếu $M_1 = f_1(M)$ và $M_2 = f_2(M)$ thì M_1 và M_2 là hai điểm phân biệt. Khi đó vì f_1 và f_2 đều là phép dời hình nên $A'M_1 = AM$ và $A'M_2 = AM$, vậy $A'M_1 = A'M_2$, tương tự $B'M_1 = B'M_2$, $C'M_1 = C'M_2$, $D'M_1 = D'M_2$, do đó bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng M_1M_2, trái với giả thiết A'B'C'D' là hình tứ diện. Do đó với mọi điểm M ta đều có $f_1(M) = f_2(M)$, tức là hai phép dời hình f_1 và f_2 trùng nhau.

Vậy có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

Bài toán 11. 3: Cho tam giác ABC và phép dời hình f biến tam giác ABC thành chính nó, tức là f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M của mp(ABC) thành chính nó.

Hướng dẫn giải

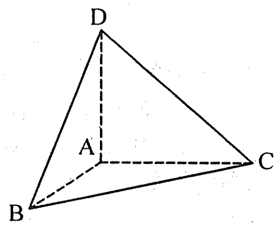
Vì f(A) = A, f(B) = B và f(C) = C nên f biến mp(ABC) thành mp(ABC). Bởi vậy nếu M thuộc mp(ABC) và f(M) = M' thì M' thuộc mp(ABC) và AM = AM', BM = BM', CM = CM'.

Nếu M' và M phân biệt thì ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng trung trực của đoạn thẳng MM' trên mp(ABC), trái với giả thiết ABC là tam giác. Vậy f(M) = M.

Bài toán 11. 4: Cho hai tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' (AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'). Chứng minh rằng có đúng hai phép dời hình, mỗi phép biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

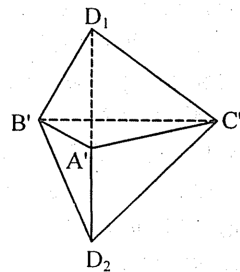
Có những phép dời hình nào biến tam giác ABC thành chính nó?

Hướng dẫn giải



Trên đường thẳng a vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm D khác A, trên đường thẳng a' vuông góc với mp(A'B'C') tại A' có hai điểm phân biệt D_1 và D_2 sao cho $A'D_1 = A'D_2 = AD$.

Ta có các hình tứ diện ABCD, $A'B'C'D_1$ và $A'B'C'D_2$ có các cạnh tương ứng bằng nhau. Nếu f là phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì hoặc f biến D thành D_1 hoặc f biến D thành D_2.



Vậy có đúng hai phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Đó là phép dời hình f_1 biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_1$ và phép dời hình f_2 biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_2$.

Đây là trường hợp riêng khi hai tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau. Vậy ta có hai phép dời hình biến ABCD thành chính nó: đó là phép đồng nhất và phép đối xứng qua mp(ABC).

Bài toán 11. 5: Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm là các phép dời hình.

Hướng dẫn giải

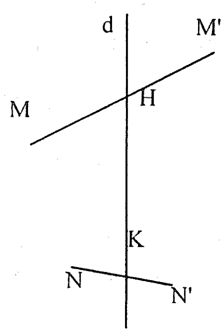
– Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ và do đó MN = M'N'. Vậy phép tịnh tiến là một phép dời hình.

– Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$.

Suy ra: $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}$

Do đó M'N' = MN, suy ra phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

Bài toán 11. 6: Chứng minh rằng các phép đối xứng trục, đối xứng qua mặt phẳng là các phép dời hình.



Hướng dẫn giải

– Giả sử phép đối xứng qua đường thẳng d biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N'. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM' và NN', ta có:

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}$

$= \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN'} + \overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NN'}$ đều vuông góc với $\overrightarrow{HK}$ nên:

$\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right).\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right) = 2\overrightarrow{HK}\left(\overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}\right) = 0$

Suy ra $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$ hay MN = M'N'.

Vậy phép đối xứng qua d là phép dời hình.

– Giả sử phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến M, N thành M', N'. Nếu M, N thuộc (P) thì M' ≡ M, N' ≡ N nên M'N' = MN.

Nếu có ít nhất một trong hai điểm M, N không nằm trên (P) thì qua bốn điểm M, N, M', N' có một mặt phẳng (Q) (MM' và NN' cùng vuông góc với (P) nên song song với nhau). Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) thì trong mp(Q), phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hai điểm M, N thành hai điểm M' và N' nên MN = M'N'.

Bài toán 11. 7: Gọi Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì:

a) a trùng với a'

b) a song song với a'

c) a cắt a'

d) a và a' chéo nhau?

Hướng dẫn giải

a) a trùng với a' khi a nằm trên mp(P) hoặc a vuông góc với mp(P).

b) a song song với a' khi a song song với mp(P).

c) a cắt a' khi a cắt mp(P) nhưng không vuông góc với (P).

d) a và a' không bao giờ cắt nhau.

Bài toán 11. 8: Cho hai đường thẳng song song a và a', hai mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với a. Tìm phép tịnh tiến biến a thành a' và biến (P) thành (P').

Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm của a và (P), O' là giao điểm của a' và (P). Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ sẽ biến a thành a' và biến (P) thành (P').

Bài toán 11. 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Với điểm M bất kì trong không gian ta gọi M_1 là ảnh của M qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AA_1}$, M_2 là ảnh của M_1 qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BB_1}$, M_3 là ảnh của M_2 qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{CC_1}$, M_4 là ảnh của M_3 qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{DD_1}$. Chứng minh rằng M trùng với M_4.

Hướng dẫn giải

Ta có M_4 là ảnh của M qua 4 phép tịnh tiến liên tiếp. Hợp thành phép tịnh tiến đó là một phép tịnh tiến theo vectơ

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}$$

Gọi G là trọng tâm tứ diện, theo tính chất trọng tâm thì:

$$\vec{v} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{GD} = -\frac{4}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$

Do đó M trùng với M_4.

Bài toán 11. 10: Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến mỗi mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.

Hướng dẫn giải

– Giả sử phép vị tự V tỉ số k biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Lấy hai điểm phân biệt M, N nằm trên a thì ảnh của chúng là các điểm M', N' nằm trên a'. Theo tính chất của phép vị tự thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Do đó hai đường thẳng a và a' song song hoặc trùng nhau.

– Giả sử phép vị tự V biến mp(α) thành mp(α'). Lấy trên (α) hai đường thẳng cắt nhau a và b thì ảnh của chúng qua V là hai đường thẳng a' và b' nằm trên (α') và lần lượt song song hoặc trùng với a và b. Từ đó suy ra hai mặt phẳng (α) và (α') song song hoặc trùng nhau.

Bài toán 11. 11: Cho hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng song song: AB // A'B', AC // A'C', AD // A'D', CB // C'B', BD // B'D', DC // D'C'. Chứng minh rằng có một phép tịnh tiến hoặc một phép vị tự biến tứ diện này thành tứ diện kia.

Hướng dẫn giải

Vì AB // A'B' nên có số $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$. Ta chứng minh rằng khi đó ta cũng có $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{D'C'}$.

Thật vậy, xét tam giác ABC và A'B'C' có các cạnh tương ứng song song nên ta phải có các số n và m sao cho $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = k(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'})$$

$$\Leftrightarrow n\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{BC} = k(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{B'C'}) \Leftrightarrow (n-k)\overrightarrow{A'C'} = (m-k)\overrightarrow{B'C'}$$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ không cùng phương nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi n – k = m – k = 0, tức là n = m, vậy $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B'C'}$

Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp k = 1.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, ... nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = ...$

Suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D'.

Nếu $k \neq 1$ thì hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại một điểm O nào đó. Khi đó phép vị tự V tâm O tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D'.

Bài toán 11. 12: Chứng minh rằng hợp thành của các phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

Hướng dẫn giải

Giả sử T_1 và T_2 lần lượt là các phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$. Nếu T_1 biến điểm M thành điểm M_1 và T_2 biến M_1 thành M_2 thì hợp thành T_2 o T_1 biến điểm M thành điểm M_2.

Vì $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_2}$ nên $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Vậy T_2 o T_1 là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Tổng quát: hợp thành của n phép tịnh tiến đã cho là một phép tịnh tiến có vectơ tịnh tiến bằng tổng các vectơ của các phép tịnh tiến đã cho.

Bài toán 11. 13: Cho phép dời hình f thoả mãn điều kiện phép hợp thành của f và f' là phép đồng nhất: f o f = e, biết rằng có một điểm I duy nhất sao cho f biến I thành chính nó. Chứng minh rằng f là phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

Với một điểm M bất kì khác I, ta gọi M' là ảnh của M qua f, khi đó M và M' không trùng nhau. Vì f o f = e nên f biến M' thành M, vậy f biến đoạn thẳng MM' thành đoạn thẳng M'M.

Từ đó suy ra f biến trung điểm đoạn thẳng MM' thành chính nó và vì vậy, theo giả thiết trung điểm MM' phải là điểm I. Vậy f là phép đối xứng qua tâm I.

Bài toán 11. 14: Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của một số lẻ của phép đối xứng tâm là phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $Đ_1$ và $Đ_2$ là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là O_1 và O_2. Gọi M là một điểm bất kì, $M_1 = Đ_1(M)$ và $M' = Đ_2(M_1)$ thì phép hợp thành $Đ_1$ o $Đ_2$ biến M thành M'.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{O_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1O_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

Suy ra $Đ_1$ o $Đ_2$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

Vì hợp thành của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến nên hợp thành của 2n phép đối xứng tâm là hợp thành của n phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

b) Với điểm M ta lấy M_1 đối xứng với M qua O, và lấy M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$.

Khi đó hợp thành $T_{\vec{v}}$ o $Đ_O$ biến M thành M'. Nếu gọi I là trung điểm của MM' thì $\overrightarrow{OI} = \frac{\vec{v}}{2}$. Vậy điểm I cố định. Suy ra $T_{\vec{v}}$ o $Đ_O$ là phép đối xứng qua I.

Tương tự $Đ_O$ o $T_{\vec{v}}$ là phép đối xứng qua điểm I' mà $\overrightarrow{OI'} = -\frac{\vec{v}}{2}$.

Hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng tâm là hợp thành của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng tâm nên là một phép đối xứng tâm.

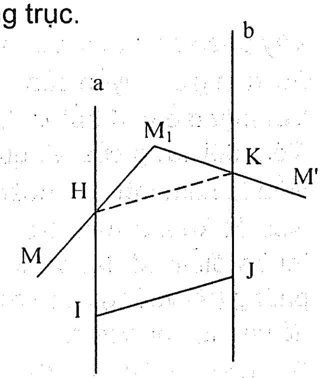
Bài toán 11. 15: Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến

b) Hợp thành của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến theo vectơ vuông góc với trục đối xứng là một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $Đ_a$ và $Đ_b$ là các phép đối xứng trục có trục lần lượt là các đường thẳng a và b song song với nhau. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên a và b sao cho IJ $\perp$ a. Với điểm M bất kì, ta gọi $M_1 = Đ_a(M)$ và $M' = Đ_b(M_1)$ thì phép hợp thành $Đ_b$ o $Đ_a$ biến M thành M'. Nếu gọi H là trung điểm của MM_1 và K là trung điểm của M_1M' thì:



$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Vậy hợp thành $Đ_b$ o $Đ_a$ chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b) Giả sử D_a là phép đối xứng qua đường thẳng a, $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a. Gọi b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ thì phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_a$ và $Đ_b$ qua các đường thẳng a và b: $T_{\vec{v}} = Đ_b$ o $Đ_a$.

Bởi vậy $T_{\vec{v}}$ o $Đ_a = Đ_b$ o $Đ_a$ o $Đ_a = Đ_b$ o e $= Đ_b$.

Gọi b' là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $-\frac{\vec{v}}{2}$ thì phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_{b'}$ và $Đ_a$ qua các đường thẳng b' và a:

$T_{\vec{v}} = Đ_a$ o $Đ_{b'}$.

Do đó: $Đ_a$ o $T_{\vec{v}} = Đ_a$ o $Đ_a$ o $Đ_{b'} =$ e o $Đ_{b'} = Đ_{b'}$.

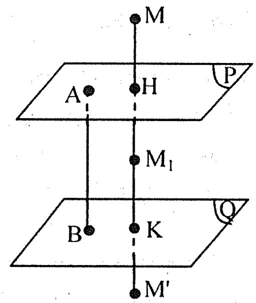
Bài toán 11. 16: Chứng minh:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

Hướng dẫn giải

a) Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho AB ⊥ (P). Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q).



Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M' thì ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}\right) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}$$

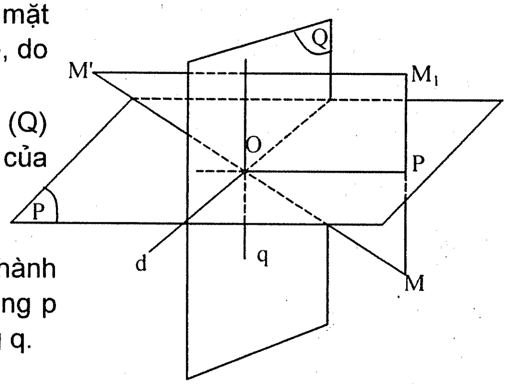
Vậy phép hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi d là giao tuyến của (P) và (Q).

Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng của M_1 qua mp(Q).

Nếu M nằm trên (P) hoặc trên (Q) thì thấy M' là điểm đối xứng của M qua d.

Nếu M không nằm trên cả (P) và (Q) thì ba điểm M, M_1 và M' xác định mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q), do đó vuông góc với d.



Gọi giao tuyến của (R) với (P) và (Q) lần lượt là p, q, còn O là giao điểm của p và q.

Xét trong mặt phẳng (R) thì điểm M' là ảnh của điểm M qua hợp thành của phép đối xứng qua đường thẳng p và phép đối xứng qua đường thẳng q.

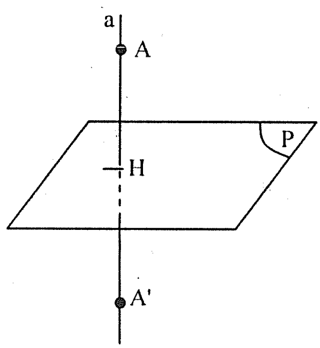
Suy ra O là trung điểm của MM'.

Mặt khác MM' ⊥ d nên phép hợp thành là phép đối xứng qua đường thẳng d.

Bài toán 11. 17: Cho mặt phẳng (P) và cho phép dời hình f có tính chất: f biến điểm M thành điểm M khi và chỉ khi M nằm trên (P). Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải

Phép dời hình f biến mọi điểm M nằm trên (P) thành M. Với điểm A không nằm trên (P) ta gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Nếu H là giao điểm của a và (P), vì f(H) = H nên f biến a thành đường thẳng đi qua H và vuông góc với (P), vậy f(a) = a.



Từ đó suy ra điểm A biến thành điểm A' nằm trên a, A' khác với A và HA = HA'. Vậy (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'. Suy ra f là phép đối xứng qua mp(P).

Bài toán 11. 18: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k'. Chứng minh rằng nếu kk' = 1 thì phép hợp thành V' o V là một phép tịnh tiến.

Hướng dẫn giải

Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, V' là phép vị tự tâm O' tỉ số k'. Với mỗi điểm M ta lấy M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$ thì phép hợp thành V'o V biến điểm M thành điểm M'.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'M_1}$

$= \overrightarrow{OM_1} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} + k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'M_1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (k'-1)\overrightarrow{O'M_1}$

$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (1-k')\overrightarrow{M_1O'}$

Vì kk' = 1 nên $k' = \frac{1}{k}$ bởi vậy đẳng thức trên trở thành:

$\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O'}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$

Từ đó suy ra V' o V là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

Bài toán 11. 19: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số k và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k' với $kk' \neq 1$. Gọi F = V' o V. Chứng minh rằng:

a) Có điểm I duy nhất sao cho F(I) = I.

b) F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử F(I) = I. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành I_1 thì V' biến I_1 thành I, tức là: nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{O'I} = k'\overrightarrow{O'I_1}$ hay:

$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'} = k'(\overrightarrow{OI_1} - \overrightarrow{OO'}) = k'(k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'})$

$\Leftrightarrow (1 - kk')\,\overrightarrow{OI} = (1-k')\overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{(1-k)\overrightarrow{OO'}}{1-kk'}$

Vậy điểm I được xác định duy nhất với $kk' \neq 1$.

b) Với điểm M bất kì, gọi M_1 là ảnh của M qua phép vị tự V, M' là ảnh của M_1 qua phép vị tự V', thì F biến M thành M'. Khi đó ta có $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$. Từ đó ta có: $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'I} = k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'I}$

$= k'(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I} = k'(k\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I}$

$= kk'\overrightarrow{OM} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I} = kk'(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I}$

$= kk'\overrightarrow{IM} + kk'\overrightarrow{OI} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OO'} = kk'\overrightarrow{IM}$.

Vậy F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'.

Bài toán 11. 20: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Đặt F = T o V và F' = V o T. Chứng minh rằng:

a) Có một điểm I duy nhất sao cho F(I) = I và điểm I' duy nhất sao cho F '(I') = I'.

b) F là phép vị tự tâm I tỉ số k, F ' là phép vị tự tâm I' tỉ số k.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử F(I) = I. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành I_1 thì T biến I_1 thành I, tức là: nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{I_1I} = \vec{v}$ Từ đó suy ra: $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_1} = \vec{v}$ hay

$\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OI} = \vec{v}$, do đó $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$. Vậy điểm I xác định duy nhất, với $k \neq 1$.

Giả sử F(I') = I'. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu T biến I' thành I'_1 thì V biến I'_1 thành I', tức là: nếu $\overrightarrow{I'I'_1} = \vec{v}$ thì $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI'_1}$.

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{OI'} = k(\overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'I'_1})$ hay $(1-k)\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{I'I'_1} = k\vec{v}$, do đó $\overrightarrow{OI'} = \dfrac{k\vec{v}}{1-k}$

Vậy điểm I' xác định duy nhất, với $k \neq 1$.

b) Với mỗi điểm M bất kì ta lấy điểm M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$, rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$. Khi đó phép hợp thành F = T o V biến M thành M'. Ta xác định điểm O' sao cho $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$ thì O' là điểm cố định không phụ thuộc M và có:

$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{IO} + k\overrightarrow{OM} + \vec{v} = \overrightarrow{IO} + k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO}) + \vec{v}$

$= (1-k)\overrightarrow{IO} + \vec{v} + k\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$

Suy ra F = T o V là phép vị tự tâm I tỉ k. Chứng minh tương tự thì F ' = V o T là phép vị tự tâm I' tỉ k.

Bài toán 11. 21: Chứng minh rằng một hình tứ diện không thể có tâm đối xứng, tổng quát một hình chóp không có tâm đối xứng.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta thấy rằng nếu một hình chóp có tâm đối xứng O, thì số mặt chẵn. Thật vậy nếu M là điểm bất kì thuộc một mặt nào đó của hình chóp, thì điểm M' đối xứng với M phải thuộc một mặt hình chóp (vì phép đối xứng biến mặt thành mặt, cạnh thành cạnh và đỉnh thành đỉnh). Điều đó chứng tỏ mỗi cặp mặt của hình chóp ứng với một đoạn thẳng MM'.

Vì số các đoạn như vậy là nguyên, nên số mặt là chẵn. Vậy đáy của hình chóp có tâm đối xứng đa giác với số lẻ cạnh nên O không thuộc mặt phẳng đáy và không thuộc các mặt bên.

Gọi (T) là thiết diện của hình chóp đi qua O và song song với đáy ((T) tồn tại vì phép đối xứng qua O biến đỉnh hình chóp thành điểm thuộc đáy chóp), khi đó (T) là đa giác có tâm đối xứng lại có số lẻ cạnh (vì các cạnh của (T) chỉ nằm trên các mặt xung quanh của hình chóp). Mâu thuẫn đó chứng minh bài toán, và suy cho tứ diện bất kỳ.

Bài toán 11. 22: Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây:

a) Hình chóp tứ giác đều.

b) Hình chóp cụt tam giác đều.

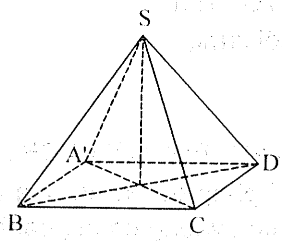
c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông.

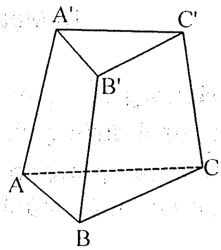
Hướng dẫn giải

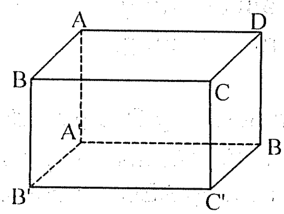
a) Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có 4 mặt phẳng đối xứng: mp(SAC), mp(SBD), mặt phẳng trung trực của AB (đồng thời của CD) và mặt phẳng trung trực của AD (đồng thời của BC).

b) Hình chóp cụt tam giác đều ABC.A'B'C' có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, BC, CA.

c) Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' (mà không có mặt nào là hình vuông) có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB,AD, AA'.







Bài toán 11. 23:

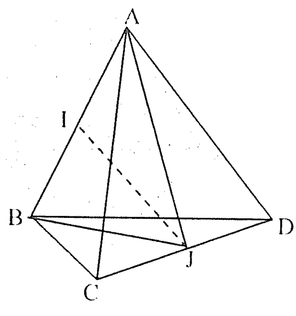
a) Tìm các trục đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.

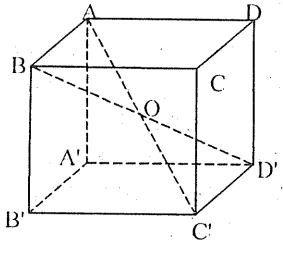
b) Tìm tất cả các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử d là trục đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức là phép đối xứng qua đường thẳng d biến các đỉnh của tứ diện thành các đỉnh của tứ diện.

Trước hết ta nhận thấy rằng trục đối xứng d không thể là đường thẳng đi qua hai đỉnh nào đó của hình tứ diện, vì hiển nhiên phép đối xứng qua đường thẳng d như thế không biến hình tứ diện thành chính nó.





Bây giờ ta chứng tỏ rằng trục đối xứng d cũng không đi qua một đỉnh nào của tứ diện. Thật vậy, nếu d đi qua A thì vì B không thể nằm trên d nên B biến thành C hoặc D. Nếu B biến thành C thì C biến thành B nên D biến thành D và do đó d đi qua A và D, vô lí. Nếu B biến thành D thì D biến thành B và do đó C biến thành C và d đi qua A và C, vô lí.

Vậy phép đối xứng Đ qua đường thẳng d biến điểm A thành một trong ba điểm B, C hoặc D.

Do đó tứ diện đều có 3 trục đối xứng là 3 đường thẳng đi qua trung điểm 2 cạnh đối diện (đường trung bình).

b) Giả sử α là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức là phép đối xứng $Đ_\alpha$ biến tập hợp {A, B, C, D} thành chính nó. Vì $Đ_\alpha$ không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì khi đó $Đ_\alpha$ là phép đồng nhất) nên phải có một đỉnh, A chẳng hạn, biến thành một đỉnh khác, B chẳng hạn. Khi đó α là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (hiển nhiên α đi qua C và D).

Vậy tứ diện ABCD có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

Bài toán 11. 24: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tìm

a) Tâm đối xứng   b) Mặt đối xứng

c) Trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

a) Tâm đối xứng O là giao điểm của 4 đường chéo AC', BD', CA' và DB'.

b) Gọi α là mặt đối xứng của hình lập phương thì phép đối xứng qua α biến hình vuông ABCD thành chính nó, hoặc thành hình vuông chung cạnh hoặc thành hình vuông A'B'C'D'.

Từ đó thì hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng là 3 mặt phẳng trung trực của các cạnh và 6 mặt phẳng chứa hai cạnh đối.

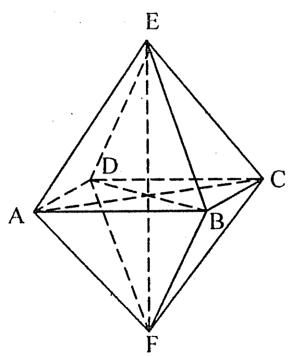
c) 9 trục đối xứng gồm 3 trục của các mặt và 6 đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối.

Bài toán 11. 25: Cho hình bát diện đều. Tìm:

a) Tâm đối xứng   b) Mặt đối xứng

c) Trục đối xứng.

Hướng dẫn giải



a) Hình bát diện đều ABCDEF có tâm đối xứng O là giao điểm của 3 đường chéo AC, BD và EF.

b) Hình bát diện đều ABCDEF có tất cả 9 mặt phẳng đối xứng: ba mặt phẳng (ABCD), (BEDF), (AECF) và 6 mặt phẳng, mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).

c) Hình bát diện đều ABCDEF có 9 trục đối xứng: ba trục của mặt (ABCD), (BEDF), (AECF) và 6 đường thẳng đi qua 2 trung điểm của 2 cạnh song song.

Bài toán 11. 26: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh :

a) Các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau.

b) Các hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là tâm của hình lập phương. Vì phép đối xứng tâm O biến các đỉnh của hình chóp A.A'B'C'D' thành các đỉnh của hình chóp C'ABCD. Vậy hai hình chóp đó bằng nhau.

b) Phép đối xứng qua mp(ADC'B') biến các đỉnh của hình lăng trụ ABC. A'B'C' thành các đỉnh của hình lăng trụ AA'D'.BB'C' nên hai hình lăng trụ đó bằng nhau.

Bài toán 11. 27: Chứng minh 2 hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử ABCD.A'B'C'D' và MNPQ.M'N'P'Q' là hai hình lập phương có cạnh đều bằng a. Hai tứ diện ABDA' và MNQM' có các cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau, tức là có phép dời hình F biến các điểm A, B, D, A' lần lượt thành M, N, Q, M'. Vì F là phép dời hình nên F biến hình vuông thành hình vuông, do đó F biến điểm C thành điểm P, biến điểm B' thành N', biến điểm D' thành Q' và biến điểm C' thành P'. Vậy hai hình lập phương đã cho bằng nhau.

Bài toán 11. 28: Cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng tỉ lệ: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'D'}{BD}=k$. Chứng minh hai tứ diện đồng dạng.

Hướng dẫn giải

Xét phép vị tự V tâm O nào đó và có tỉ k.

Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của ABCD qua V. Ta có:

$A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $C_1D_1 = kCD$, D_1A_1
$= kDA$, $A_1C_1 = kAC$, $B_1D_1 = kBD$.

Theo giả thiết thì $A_1B_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, $C_1D_1 = C'D'$, $D_1A_1 = D'A'$, $A_1C_1 = A'C'$, $B_1D_1 = B'D'$, do đó hai tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ và A'B'C'D' bằng nhau.

Vậy hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' đồng dạng.

Bài toán 11. 29: Chứng minh rằng hai hình lập phương bất kì đều đồng dạng với nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và hình lập phương MNPQ. M'N'P'Q' cạnh b.

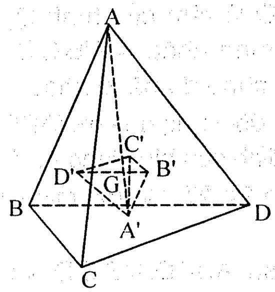
Xét phép vị tự V tâm O nào đó và tỉ $k = \frac{b}{a}$. Khi đó ảnh của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a thành hình lập phương EFGH.E'F'G'H' có cạnh là ka = b.

Do đó hai hình lập phương EFGH.E'F'G'H' và MNPQ.M'N'P'Q' có cùng cạnh b nên bằng nhau.

Vậy hai hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và MNPQ.M'N'P'Q' đồng dạng.

Bài toán 11. 30: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' đồng dạng. Suy ra nếu ABCD là tứ diện đều thì A'B'C'D' cũng là tứ diện đều.

Hướng dẫn giải



Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Ta có: $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$

Suy ra phép vị tự V tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Vậy V biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' nên 2 tứ diện đó đồng dạng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 11. 31: Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (S) bán kính R = AB, một điểm M thay đổi trên mặt cầu. Gọi C', D', M' là các điểm sao cho: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Chứng minh nếu BC'D'M' là hình tứ diện thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó nằm trên (S).

Hướng dẫn giải

Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ biến A thành B, C thành C', D thành D' và M thành M', tức là biến tứ diện ACDM thành tứ diện BC'D'M'.

Do đó T biến tâm O của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ACDM thành tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC'D'M', tức là $\overrightarrow{OO'} = \vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Vì OO' = AB = R nên điểm O' nằm trên mặt cầu (S).

Bài toán 11. 32: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi O là trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng với mọi điểm K nằm trong tứ diện ta có:

$$KA + KB + KC + KD \geq OA + OB + OC + OD.$$

Hướng dẫn giải

Ta có MN là trục đối xứng của tứ diện đều ABCD.

Gọi K' là điểm đối xứng với K qua MN, H là giao của KK' và MN.

Ta có KA + KB = AK + AK' > 2AH và KC + KD = CK + CK' > 2CH.

Ta chứng minh rằng AH + CH > OA + OC.

Xét trong mặt phẳng (MCD), điểm A' sao cho tia MA' vuông góc với MN, ngược chiều với tia NC và độ dài MA' = MA.

Ta có HA' = HA nên HA + HC = HA' + HC > A'C.

Vì A'C đi qua O nên A'C = OC + OA' = OC + OA.

Vậy KA + KB + KC + KD $\geq$ OA + OB + OC + OD.

Bài toán 11. 33: Cho tứ diện đều ABCD và phép dời hình f biến ABCD thành chính nó, nghĩa là biến mỗi đỉnh của tứ diện thành một đỉnh của tứ diện. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho M = f(M) trong các trường hợp sau đây:

a) f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A

b) f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D

c) f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết f(A) = B và f(B) = C, f(C) = A. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC. Suy ra tập hợp các điểm M là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB và MC = MD, tức là M đồng thời nằm trên các mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD.

c) Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D. Do đó f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC = MD. Suy ra tập hợp các điểm M gồm một điểm duy nhất là trọng tâm tứ diện ABCD.

Bài toán 11. 34: Cho mặt phẳng (P) và tứ diện ABCD. Với mỗi điểm M thuộc (P) ta xác định điểm N theo công thức:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}.$$

Tìm tập hợp N, khi M di động trong (P).

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD thì G cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GN}$.

Do đó N là ảnh của M qua phép đối xứng tâm G.

Vậy tập hợp N là mặt phẳng đối xứng với (P) qua G.

Bài toán 11. 35: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy là tam giác cân ABC (AB = AC). Trên các cạnh AC và A'B' ta lấy các điểm tương ứng M và M' sao cho AM = A'M'.

Tìm tập hợp trung điểm của đoạn MM'.

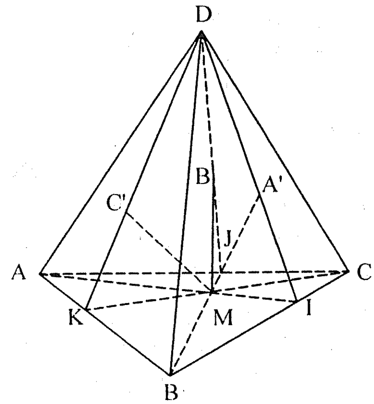
Hướng dẫn giải

Gọi I, J là trung điểm cạnh bên AA' và giao các đường chéo hình chữ nhật BCC'B'.

Ta có IJ là trục đối xứng của hai đoạn AC và A'B', do đó M và M' đối xứng với nhau qua IJ. Vậy tập hợp các trung điểm của MM' thuộc đoạn IJ.

Bài toán 11. 36: Cho tứ diện ABCD. Điểm M lưu động trong tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các mặt (BCD), (CAD), (ABD) sao cho MA' // AD, MB' // BD, MC' // CD. Tìm tập hợp các trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Hướng dẫn giải



Ta chứng minh: $\overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{DM}$

Vì G là trọng tâm tam giác A'B'C' nên

$$\overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} = 3\overrightarrow{DG}$$

Do đó $3\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DM}$ nên $\overrightarrow{DG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DM}$

Phép vị tự tâm D tỉ số k = $\dfrac{2}{3}$ biến M thành G nên tập hợp các điểm G là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự đó.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 11. 1: Cho tứ diện ABCD có các cạnh đối bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi A', B' là hình chiếu của A, B lên CD và C', D' là hình chiếu của C, D lên AB. Chứng minh đoạn A'C' = B'D' và A'D' = B'C'.

Hướng dẫn

Dùng phép đối xứng trục

Bài tập 11. 2: Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng qua đường thẳng d. Với điểm M bất kì thuộc (R), gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng mặt phẳng (P), gọi M" là ảnh của M' qua phép đối xứng mặt phẳng (Q). Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MM".

Hướng dẫn

Dùng tính chất phép phép đối xứng qua mặt phẳng.

Kết quả: mặt phân giác.

Bài tập 11. 3: Cho điểm I nằm trên đường thẳng d, đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P). Chứng minh phép dời hình f biến (P) thành (P), d thành d và có một điểm bất động duy nhất là I là phép đối xứng tâm I.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa phép dời hình.

Bài tập 11. 4: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, a' và b' có góc và khoảng cách giữa các cặp đường thẳng chéo nhau đó bằng nhau. Chứng minh có một phép dời hình biến đường thẳng a thành a' và đường thẳng b thành b'.

Hướng dẫn

Gọi đoạn vuông góc chung AB và A'B', từ đó dựng các tứ diện trên hai đường thẳng chéo nhau đã cho có cạnh tương ứng bằng nhau.

Bài tập 11. 5: Cho tứ diện ABCD có diện tích hai tam giác ACD và BCD, ABC và ABD bằng nhau. Chứng minh tứ diện ABCD có trục đối xứng.

Hướng dẫn

Hai tam giác cùng đáy có diện tích thì chiều cao tương ứng bằng nhau.

Kết quả: trục đối xứng đi qua trung điểm của AB và CD.

Bài tập 11. 6:

a) Dựng 4 điểm A, B, C, D trong không gian cho biết 4 trung điểm của 4 đoạn AB, BC, CD, DA lần lượt là I, J, K, L.

b) Dựng 5 điểm A, B, C, D, E trong không gian cho biết 4 trung điểm của 5 đoạn AB, BC, CD, DE, EA lần lượt là I, J, K, L, M.

Hướng dẫn

a) Lý luận IJKL là hình bình hành.

b) Dùng hợp thành của 5 phép đối xứng tâm là phép đối xứng tâm.

Bài tập 11. 7: Cho 2 mặt cầu S(O;R) và S'(O';R'). Tìm các phép vị tự biến mặt cầu này thành mặt cầu kia.

Hướng dẫn

Dùng đường nối tâm và đường thẳng qua 2 mút của 2 vectơ bán kính cùng hướng và ngược hướng. Kết quả có 2 phép vị tự.

Bài tập 11. 8: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh

a) Bán kính mặt cầu đi qua trọng tâm 4 mặt không nhỏ hơn bán kính mặt cầu nội tiếp.

b) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp không nhỏ hơn 3 lần bán kính mặt cầu nội tiếp.

Hướng dẫn

a) Dùng phép vị tự tâm hay so sánh bằng cách vẽ các mặt song song với tiếp diện.

b) Dùng phép vị tự tâm G là trọng tâm tứ diện và tỉ $k = -\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 11. 9: Cho 3 tia Ox, Oy, Oz và điểm M. Tìm 3 điểm A, B, C lần lượt trên 3 tia đó để M là trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn

Tìm các giao điểm của 3 mặt Oxy, Oyz, Ozx với các đường thẳng qua M và song song với Oz, Ox, Oy. Dùng phép vị tự tâm O tỉ k = 3.

Chuyên đề 12: KHỐI ĐA DIỆN VÀ LĂNG TRỤ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Khối đa diện

– Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện:

(1) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

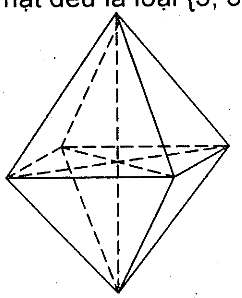
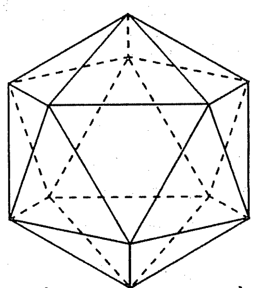
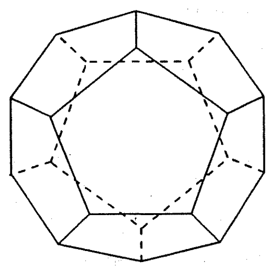
(2) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

– Hình đa diện chia không gian làm hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài. Hình đa diện cùng với phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.

Khối đa diện đều

Khối đa diện đều loại {n, p} khi mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh.

Có 5 loại khối đa diện đều: Khối tứ diện đều là loại {3; 3}; khối bát diện đều là loại {3; 4}; khối lập phương là loại {4; 3}; khối 20 mặt đều là loại {3; 5}và khối 12 mặt đều là loại {5; 3}.

Khối bát diện đều | Khối nhị thập diện đều | Khối thập nhị diện đều

Hình lăng trụ: Có 2 đáy song song bằng nhau và các cạnh bên song song bằng nhau. Ta thường phân loại theo đa giác đáy: lăng trụ tam giác, tứ giác...

– Lăng trụ đứng khi cạnh bên vuông góc với đáy.

– Lăng trụ đều là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.

– Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h$

Hình hộp: Là hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành. Hình hộp có 6 mặt là hình bình hành, 4 đường chéo đồng qui tại tâm hình hộp.

– Hình hộp chữ nhật: hộp đứng và có đáy là hình chữ nhật. Gọi a, b, c là 3 kích thước thì có đường chéo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, diện tích toàn phần: $S = 2(ab + bc + ca)$ và thể tích khối hộp chữ nhật: $V = abc$.

– Hình lập phương: hình hộp chữ nhật có 3 kích thước bằng nhau.

Chú ý:

1) Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}B.h$

2) Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất hay chứng minh bất đẳng thức ta có thể dùng vectơ, bất đẳng thức Cauchy hoặc dùng đạo hàm.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 12. 1: Cho khối đa diện lồi. Chứng minh rằng:

a) Số góc của tất cả các mặt là số chẵn.

b) Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Hướng dẫn giải

a) Gọi số góc là G và số cạnh của khối đa diện là C. Trong mỗi mặt là đa giác thì số góc bằng số cạnh, mà số cạnh được tính 2 lần nên G = 2C, do đó G chẵn.

b) Ta dùng phản chứng. Nếu xuất phát từ một đỉnh nào đó chỉ có hai cạnh, thì mỗi cạnh như thế là cạnh của chỉ một đa giác, trái với điều kiện trong định nghĩa của hình đa diện.

Vậy mỗi đỉnh phải là đỉnh chung của ít nhất là ba cạnh, và vì vậy nó cũng phải là đỉnh chung của ba mặt.

Bài toán 12. 2: Cho khối đa diện lồi. Chứng minh rằng:

a) Không tồn tại khối đa diện có một số lẻ mặt và mỗi mặt lại có một số lẻ cạnh.

b) Tổng số đo các góc của các mặt là $T = 2(C - M)\pi$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử tồn tại khối đa diện có số mặt là M lẻ và mỗi mặt chứa số lẻ cạnh C_i, $i = 1, 2, \ldots, M$.

Ta có số góc của khối đa diện:

$G = C_1 + C_2 + \ldots + C_M \Rightarrow$ G lẻ: vô lý.

Vậy không tồn tại khối đa diện thoả đề bài.

b) Gọi C_i là số cạnh của mặt thứ i, $i = 1, 2, \ldots, M$

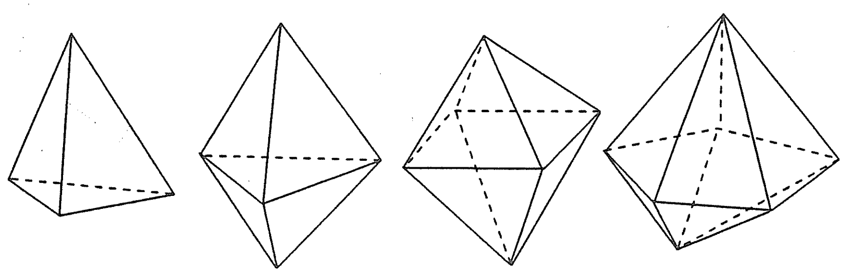
$$\text{Ta có } T = \sum_{i=1}^{M}(C_i - 2)\pi = \left(\sum_{i=1}^{M} C_i - 2M\right)\pi = (2C - 2M)\pi = 2(C - M)\pi.$$

Bài toán 12. 3: Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

Hướng dẫn giải

Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M. Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên 3M = 2C. Suy ra M là số chẵn.

Sau đây là một số khối đa diện số các mặt tam giác là 4, 6, 8, 10.



Bài toán 12. 4: Chứng minh đặc số Ơ–le của khối đa diện lồi: Đối với mỗi khối đa diện lồi H, ta kí hiệu Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của H thì đặc số $\chi(H)$ = Đ – C + M = 2. Suy ra: không tồn tại khối đa diện lồi có 7 cạnh.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp theo số đỉnh Đ $\geq$ 4.

Khi Đ = 4 thì khối đa diện là tứ diện có Đ = 4, C = 6, M = 4 nên Đ – C + M = 4 – 6 + 4 = 2: đúng.

Giả sử khẳng định đúng với số đỉnh Đ: Đ – C + M = 2.

Xét khối đa diện có Đ' = Đ + 1 đỉnh. Gọi A là một đỉnh và mặt $A_1A_2..A_n$ là một mặt của khối đa diện sao cho mặt phẳng chứa mặt này chia không gian làm 2 phần, một phần chứa đỉnh A và phần kia chứa khối đa diện lồi có Đ đỉnh còn lại, ta có Đ – C + M = 2.

Số đỉnh Đ' = Đ + 1, số cạnh C' = C + n, số mặt M'= M + n – 1

Do đó: Đ' – C' + M' = (Đ+1) – (C+n) + (M+n–1) = Đ – C + M = 2.

Vậy $\chi(H)$ = Đ – C + M = 2.

Cách khác: Dùng phép chiếu từ một điểm S không thuộc bất kỳ mặt nào, mặt đi qua 3 đỉnh nào của khối đa diện.

Giả sử tồn tại khối đa diện lồi có C = 7.

Ta có đặc số Ơ–le: Đ – C + M = 2 nên Đ + M = 9.

Vì Đ $\geq$ 4, M $\geq$ 4 nên hoặc Đ = 4, M = 5 hoặc Đ = 5, M = 4.

Với Đ = 4 thì khối đa diện lồi là tứ diện : loại

Với M = 4 thì khối đa diện lồi là tứ diện: loại

Vậy không tồn tại khối đa diện lồi có 7 cạnh.

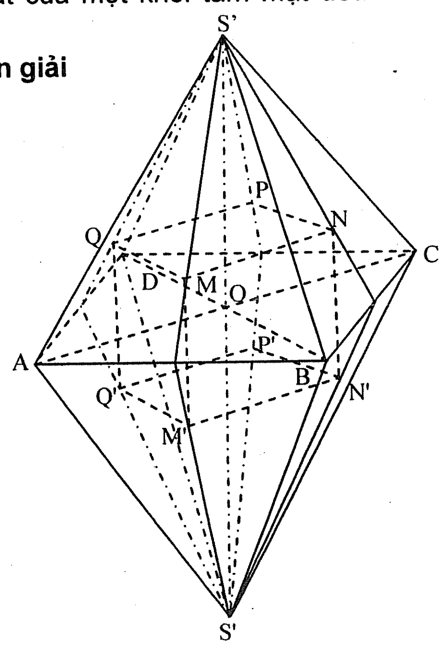
Bài toán 12. 5: Chứng minh tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.

Hướng dẫn giải

Cho khối tám mặt đều SABCDS'. Gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm của các mặt SAB, SBC, SCD, SAD, S'AB, S'BC, S'CD, S'DA thì các tứ giác MNPQ, M'N'P'Q', MNN'M', PQQ'P', NPP'N', MQQ'M' đều là hình vuông.

Mỗi đỉnh M, N, P, Q, M', N', P', Q' đều là đỉnh chung của 3 cạnh.

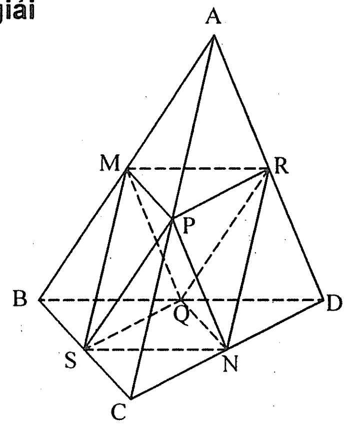
Vậy MNPQ.M'N'P'Q' là khối lập phương.



Bài toán 12. 6: Cho một khối tứ diện đều. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của khối tứ diện đều ABCD. Khi đó, tám tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NSP là những tam giác đều, chúng làm thành khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của bốn cạnh.



Vậy đó là khối tám mặt đều.

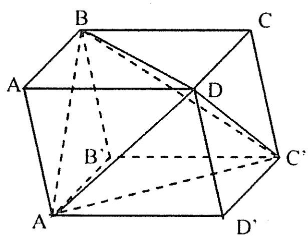
Bài toán 12. 7: Hãy phân chia:

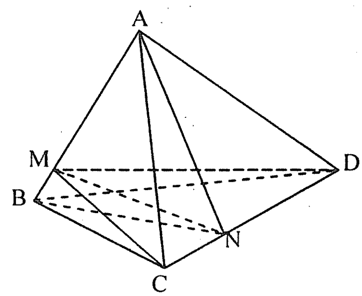
a) Một khối hộp thành năm khối tứ diện.

b) Một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

a) Có thể phân chia khối hộp ABCD.A'B'C'D' thành năm khối tứ diện sau đây: ABDA', CBDC', B'A'C'B, D'A'C'D, BDA'C'.



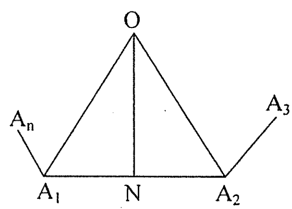


b) Cho khối tứ diện ABCD. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện: AMCN, AMND, BMCN, BMND.

Bài toán 12. 8: Tính thể tích của khối lăng trụ n–giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

Hướng dẫn giải

Gọi $A_1A_2...A_n$ là đáy của khối lăng trụ đều và O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Hạ $ON \perp A_1A_2$. Ta có:



$$ON = A_1N\cot N\hat{O}A_1 = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

Do đó diện tích đáy của khối lăng trụ đều là:

$$S = n.S_{OA_1A_2} = n.\frac{1}{2}A_1A_2.ON = \frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}$$

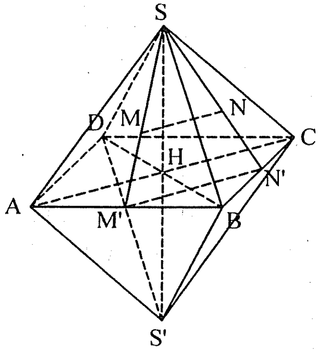
Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên chiều cao của nó bằng cạnh bên: h = a.

Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V = S.h = \frac{1}{4}na^3\cot\frac{\pi}{n}$.

Bài toán 12. 9: Tính thể tích của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm các mặt của một khối tám mặt đều cạnh a.

Hướng dẫn giải

Giả sử có khối tám mặt đều với các đỉnh là S, S', A, B, C, D. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SBC thì đoạn thẳng MN là một cạnh của khối lập phương.



Gọi M', N' lần lượt là trung điểm của AB và BC thì M và N lần lượt nằm trên SM' và SN' nên:

$$MN = \frac{2}{3}M'N' = \frac{2}{3}\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Vậy thể tích của khối lập phương là:

$$V = MN^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27} \text{ (đvtt).}$$

Bài toán 12. 10: Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45^o và 60^o. Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

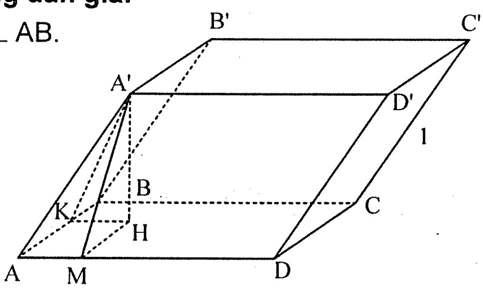
Hướng dẫn giải

Hạ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AD$, $HK \perp AB$.

Ta có: $AD \perp A'M$, $AB \perp A'K$

$\Rightarrow A'MH = 60^o$, $A'KH = 45^o$.

Đặt A'H = x. Khi đó:



$$A'M = x : \sin 60^o = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HK$$

mà $HK = x\cot 45^o = x$ nên $x = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AD \,.\, AB \,.\, x = \sqrt{7}.\sqrt{3}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$.

Bài toán 12. 11: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính:

a) Tính thể khối lăng trụ ABC.A'B'C'

b) Khoảng cách từ A đến mp(A'BD) và khoảng cách từ A', B, C, D' đến đường thẳng AC'.

Hướng dẫn giải

a) $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}.a.\frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

b) Điểm A và C' cách đều ba đỉnh của tam giác đều A'BD nên AC' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BD, do đó đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD) tại tâm I của tam giác đều A'BD. Ta có d(A; (A'BD)) = AI

Vì AO // A'C' và A'C' = 2AO nên $AI = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

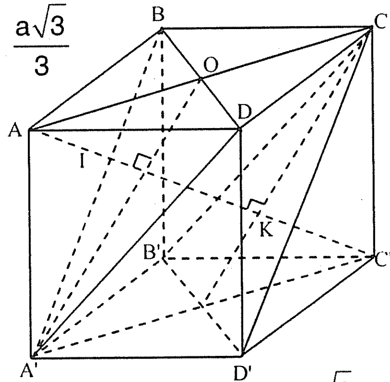
Vì $AC' \perp mp(A'BD)$ nên $A'I \perp AC'$,

do đó: d'(A; AC') = A'I

Tam giác AA'I vuông tại I

nên $A'I^2 = AA'^2 - AI^2 = \frac{6a^2}{9}$.

Vậy $A'I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Do (A'BD) // (CB'D') nên khoảng cách từ A', B, C, D' đến AC' đều bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài toán 12. 12: Cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có 3 kích thước AB = AA' = a, AC' = 2a.

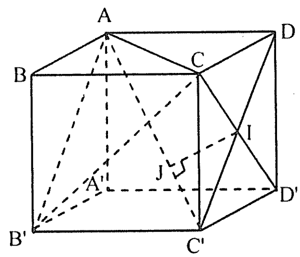
a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CD'.

Hướng dẫn giải

a) Xét tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên khoảng cách DH từ D đến mặt phẳng (ACD') với H là trực tâm tam giác ACD', được tính bởi hệ thức:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$

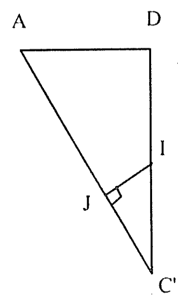


Ta có: DC = a, DD' = a, $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = DA^2 + DC^2 + CC'^2$

nên $4a^2 = DA^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow DA^2 = 2a^2$.

Do đó $DH = \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Vì CD = DD' = a nên $CD' \perp C'D$. Mặt khác $AD \perp (CDD'C)$ nên $CD' \perp AC'$ và $CD' \perp mp(AC'D)$. Gọi giao điểm của CD' với mp(AC'D) là I. Hạ $IJ \perp AC'$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của AC' và CD'.



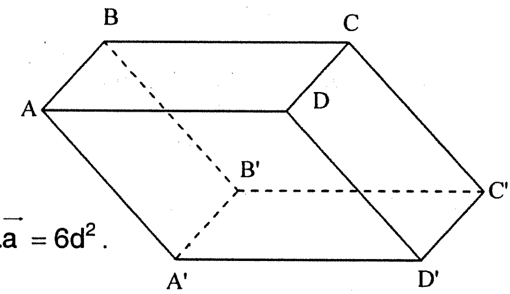
Ta có $\frac{IJ}{AD} = \frac{IC'}{AC'} \Rightarrow IJ = AD.\frac{C'D}{2AC'} = a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2.2a} = \frac{a}{2}$.

Bài toán 12. 13: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng d và ba góc của đỉnh A đều bằng 60^o.

a) Tính độ dài các đường chéo và thể tích V của hình hộp.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt song song của hình hộp. Có thể cắt hình hộp bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện nhận được là một hình vuông?

Hướng dẫn giải



a) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ thì

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{d^2}{2}$$

Ta có: $\overrightarrow{AC'}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$

$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{c}.\vec{a} = 6d^2$.

Suy ra: AC' = $d\sqrt{6}$ và

$\overrightarrow{BD'}^2 = (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{c}.\vec{a} = 2d^2$.

Suy ra BD' = $d\sqrt{2}$.

Tương tự DB' = CA' = $d\sqrt{2}$ nên ta có AA'BD là hình tứ diện đều cạnh d,

nên: $V_{(AA'BD)} = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{12}$,do đó $V = 6V_{AA'BD} = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt)

b) Gọi h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D') thì:

$$V = S_{ABCD}.h = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{d\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt song song nào cũng bằng $\dfrac{d\sqrt{6}}{2}$.

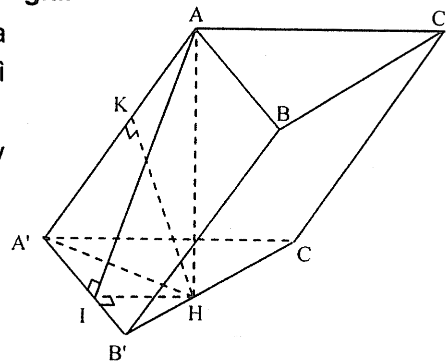
Hình bình hành BCD'A' có các cạnh bằng d, và hai đường chéo bằng $d\sqrt{2}$ nên nó là hình vuông. Vậy hình hộp có thiết diện BCD'A' là hình vuông. Tương tự thiết diện CDA'B' cũng là hình vuông.

Bài toán 13. 14: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^o. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Hướng dẫn giải



Do AH ⊥ (A'B'C') nên $A\hat{A}'H$ là góc giữa AA' và mp(A'B'C'). Theo giả thiết thì $A\hat{A}'H = 30^o$.

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là AH, ta có:

$$AH = AA'\sin 30^o = \frac{a}{2}.$$

b) $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì A'B'C' là tam giác đều cạnh a, H thuộc đường thẳng B'C' nên A'H ⊥ B'C' và H là trung điểm của B'C'. Mặt khác AH ⊥ B'C' nên AA' ⊥ B'C'. Hạ HK ⊥ AA' thì HK chính là khoảng cách giữa AA' và B'C'.

Do AA'.HK = AH.A'H nên: $HK = \dfrac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

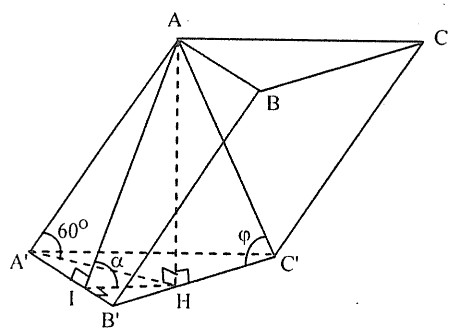
Bài toán 12. 15: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có các cạnh đáy đều bằng a. Biết góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^o và hình chiếu H của đỉnh A lên mp(A'B'C') trùng với trung điểm của B'C'.

a) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng BC và AC'; tang của góc giữa (ABB'A') và đáy.

b) Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng dẫn Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết tam giác AA'H vuông tại H và có $A\hat{A}'H = 60^o$.



Từ đó suy ra: $AH = \dfrac{3a}{2}$.

Đặt φ = (AC', BC)

Vì BC // B'C'

nên φ = (AC', BC') = $\widehat{ACH}$.

Suy ra $\tan\varphi = \dfrac{AH}{C'H} = 3$.

Vẽ HI ⊥ A'B' ta suy ra AI ⊥ A'B'.

Vậy α = $\widehat{AIH}$ chính là góc giữa (ABB'A') và đáy.

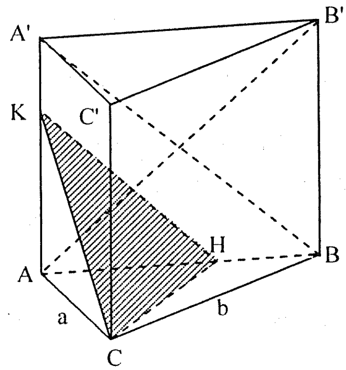
Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{AH}{IH} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{B'H\sin 60^o} = 2\sqrt{3}$.

b) $V = S_{ABC}.AH = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{1}{2}a.\sqrt{3}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt)

Bài toán 12. 16: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi (P).

Hướng dẫn giải

Kẻ đường cao CH của tam giác vuông ABC thì CH $\perp$ AB'. Vì ABB'A' là hình vuông nên AB' $\perp$ A'B. Vẽ HK // A'B thì HK $\perp$ AB' nên thiết diện là tam giác CHK.



Do CH $\perp$ AB, mp(ABB'A') $\perp$ mp(ABC) nên CH $\perp$ (ABB'A'), từ đó tam giác CHK vuông tại H nên $S_{CHK} = \frac{1}{2}CH.HK$.

Ta có: $CH.AB = CA.CB \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$AH.AB = a^2 \Rightarrow AH = \frac{a^2}{AB};$$

$$\frac{HK}{A'B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HK = A'B.\frac{a^2}{AB^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}.a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

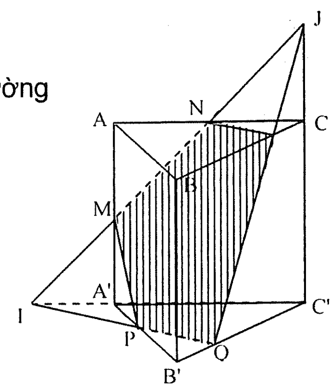
Do đó : $S_{CHK} = \frac{a^3b\sqrt{2}}{2(a^2+b^2)}$ (đvtt).

Bài toán 12. 17: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC, A'B'. Hãy dựng và tính diện tích của thiết diện của hình hình lăng trụ khi cắt bởi mp(MNP).

Hướng dẫn giải

Đường thẳng MN cắt A'C' tại I và CC' tại J. Đường thẳng IP cắt B'C' tại Q và QJ cắt BC tại R.

Thiết diện là ngũ giác NMPQR



Ta có $A'I = A'P = \frac{a}{2}$

và $\widehat{IA'P} = 120^o$ nên $\widehat{A'IP} = 30^o$.

Do đó tam giác IQC' vuông tại Q.

Và vì vậy ΔIQJ vuông tại Q.

$$JQ^2 = JC'^2 + C'Q^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 5\left(\frac{3a}{4}\right)^2 \Rightarrow JQ = \frac{3a\sqrt{5}}{4}$$

$IQ = \frac{\sqrt{3}}{2}IC' = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $S = \frac{1}{2}JQ.IQ = \frac{1}{2}\frac{3a\sqrt{3}}{4}.\frac{3a\sqrt{5}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{15}}{32}$.

Ta có tam giác JRN đồng dạng với ΔJQI với tỉ số $\frac{1}{3}$ nên diện tích của JRN là $S_1 = \frac{1}{9}S$

Mặt khác $\frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3}, \frac{IP}{IQ} = \frac{2}{3}$ nên nếu gọi S_2 là diện tích tam giác IMP thì $S_2 = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S = \frac{2}{9}S$. Gọi S_3 là diện tích thiết diện thì

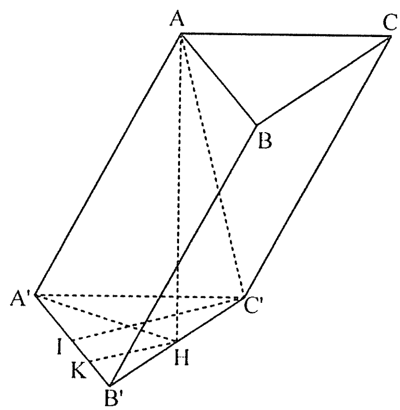
$S_3 = S - S_1 - S_2 = S - \frac{1}{9}S - \frac{2}{9}S = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3}.\frac{9a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$.

Bài toán 12. 18: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° và hình chiếu H của đỉnh A lên mp(A'B'C') trùng với trung điểm của cạnh B'C'.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy và góc giữa hai đường thẳng BC và AC'.

b) Tính góc giữa mp(ABB'A') với mặt đáy và tính thể tích của khối lăng trụ.

Hướng dẫn giải



a) Ta có AH là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Vì A'H là hình chiếu vuông góc của cạnh bên AA' trên mặt phẳng đáy nên $\widehat{AA'H} = 60^\circ$.

Trong tam giác AA'H có:

$AH = A'H\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Góc giữa BC và AC' là $\widehat{ACB'}$

Trong tam giác vuông AHC' có:

$\tan\widehat{AC'B'} = \frac{AH}{HC'} = \frac{3a}{2} : \frac{a}{2} = 3$

b) Từ H hạ HK ⊥ A'B'. Ta có HK là hình chiếu của AK trên mặt phẳng (A'B'C'). Suy ra AK ⊥ A'B'. Vậy góc giữa mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (A'B'C') là $\widehat{AKH}$. Gọi I là trung điểm của A'B', ta có C'I ⊥ A'B', suy ra CI // HK.Vì H là trung điểm của B'C' nên HK là đường trung bình của tam giác B'C'I, suy ra $HK = \frac{CI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác vuông AKH có:

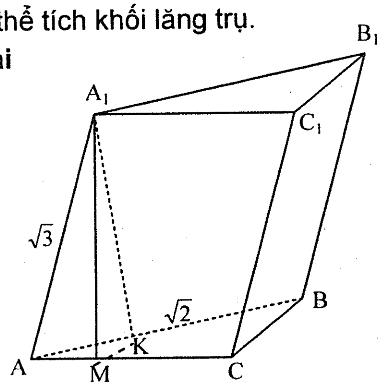
$$\tan\widehat{AKH} = \frac{AH}{HK} = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

Ta có thể tích khối lăng trụ là:

$$V = S_{A'B'C'} . AH = \frac{1}{2}B'C'.A'H.AH = \frac{3a}{2}.\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} \text{ (đvtt).}$$

Bài toán 12. 19: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB bằng $\sqrt{2}$. Mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1 = \sqrt{3}$, góc $A_1\hat{A}B$ nhọn và mặt phẳng (A_1AC) tạo một góc 60^o với mặt phẳng (ABC). Hãy tìm thể tích khối lăng trụ.

Hướng dẫn giải



Hạ $A_1K \perp AB$ ($K \in AB$).

K thuộc đoạn AB vì $A_1\hat{A}B$ nhọn.

Hạ $KM \perp AC \Rightarrow AM \perp AC$

(định lí ba đường vuông góc)

Ta có $A_1K \perp (ABC)$

vì $(AA_1B) \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A_1MK} = 60^o$

Đặt $A_1K = x$, ta có :

$AK = \sqrt{A_1A^2 - A_1K^2} = \sqrt{3 - x^2}$,

$MK = AK\sin K\hat{A}M = \sqrt{3 - x^2}\sin 45^o = \sqrt{3 - x^2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, $MK = A_1K.\cot 60^o = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(3 - x^2)}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

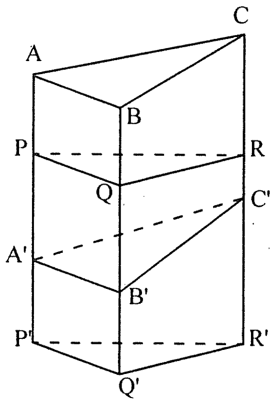
Vậy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC}.A_1K = \frac{1}{2}AC.CB.A_1K = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Bài toán 12. 20: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác P'Q'R'.

a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ PQR.P'Q'R'.

b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR}.AA'$, trong đó S_{PQR} là diện tích tam giác PQR.

Hướng dẫn giải



a) Mặt phẳng (PQR) chia khối lăng trụ ABC.A'B'C' thành hai khối đa diện H_1 và H_2, trong đó H_1 chứa tam giác ABC còn H_2 chứa tam giác A'B'C'. Mặt phẳng (A'B'C') chia khối lăng trụ PQR.P'Q'R' thành hai khối đa diện H_2 và H_3 trong đó H_3 chứa tam giác P'Q'R'.

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối đa diện H_1, H_2, H_3, ta có:

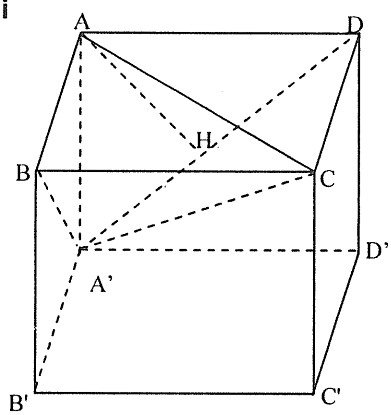
$V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2$, $V_{PQR.P'Q'R'} = V_2 + V_3$

Vì phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' và biến tam giác PQR thành tam giác P'Q'R' nên khối đa diện H_1 biến thành khối đa diện H_3, vì vậy ta có $V_1 = V_3$. Từ đó suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'}$

b) Vì lăng trụ PQR.P'Q'R' là lăng trụ đứng có chiều cao PP' = AA' nên : $V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'$.

Bài toán 12. 21: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Biết rằng góc giữa CA' và (ABCD) bằng 30^0, góc giữa mp(A'BC) và mp(ABCD) bằng 45^0 và khoảng cách từ C' đến (A'CD) bằng a. Tính thể tích khối hộp đã cho.

Hướng dẫn giải



Vì AA' ⊥ (ABCD)

nên (CA', (ABCD)) = $A'CD = 90^0$

Vì AA' ⊥ (ABCD)

và AB ⊥ BC

nên ((A'BC), (ABCD)) = $A'BA = 45^0$

Ta có d(C'; (A'CD))= d(D'; (A'CD))

= d(A, (A'CD)) = AH với H là hình chiếu của A lên A'D.

Đặt AA' = x.

Tam giác A'AB vuông cân tại A nên AB = x.

Tam giác A'AC vuông tại A, có $A'CA = 30^0$ suy ra AC = $x\sqrt{3}$.

Khi đó AD = BC = $\sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3x^2 - x^2} = x\sqrt{2}$

Tam giác A'AD vuông tại A, có đường cao AH

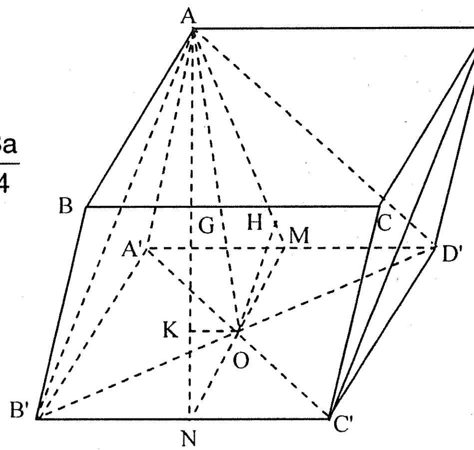
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{12}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt).

Bài toán 12. 22: Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$, A cách đều A', B', C', D'. Biết rằng khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác AB'D' đến mp(AA'D') bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ cho và khoảng cách từ tâm O của hình vuông A'B'C'D' đến mặt phẳng (ADC'B').

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm của tam giác AB'D' nên G nằm trên đoạn thẳng AO và $AG = \frac{2}{3}AO$.



Ta có:

$d(O; (AA'D)) = \frac{3}{2}d(G, (AA'D)) = \frac{3a}{4}$

Gọi M là trung điểm của A'D'

Hạ OH $\perp$ AM thì

OH $\perp$ (AA'D')

Do đó OH = d(O; (AA'D') = $\frac{3a}{4}$

Tam giác AOM vuông tại O :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{16}{9a^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OA = \frac{3a}{2}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.OA = 3a^2.\frac{3a}{2}^2 = \frac{9a^2}{2}$ (đvtt).

Gọi N là trung điểm của B'C'. Hạ OK $\perp$ AN.

Ta có OK $\perp$ (ADC'B') nên OK = d(O, (ADC'B'))

Tam giác AON vuông tại O:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow OK = \frac{3a}{4}.$$

Bài toán 12. 23: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật. AB = $a\sqrt{3}$, AA' = AC = $2a\sqrt{3}$. Hình chiếu của B lên mp(A'B'C'D') là trung điểm O của B'D'. Tính thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' và cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BB'.

Hướng dẫn giải

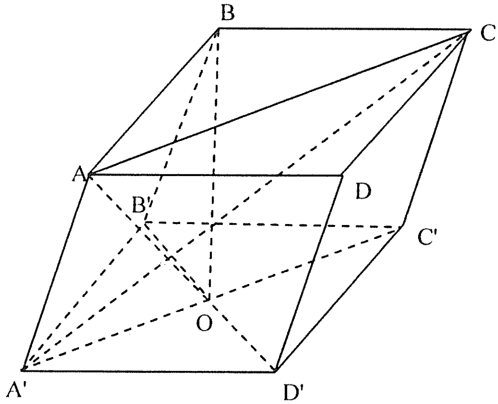
Ta có O là tâm của hình chữ nhật A'B'C'D' nên BO $\perp$ (A'B'C'D')

Tam giác vuông ABC :

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 3a^2} = 3a$$

Tam giác vuông BOB' ta có:

$BO = \sqrt{BB'^2 - B'O^2} = \sqrt{BB'^2 - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{12a^2 - 3a^2} = 3a$



Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$= S_{ABCD}.BO$

$= AB.BC.BO$

$= a\sqrt{3}.3a.3a = 9a^3\sqrt{3}$

Ta có cos(AC, BB')

= cos(A'C',AA')

$= \left|\cos \widehat{AA'O}\right|$

Vì $BO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow BO \perp AB$.

Tam giác ABO vuông cân tại B:

$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{3a^2 + 9a^2} = 2a\sqrt{3}$

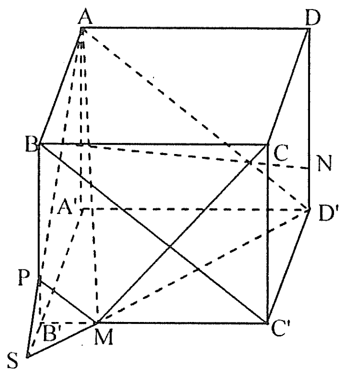
Áp dụng định lý cosin trong tam giác AA'O ta có:

$$\cos\widehat{AA'O} = \frac{A'A^2 + A'O^2 - AO^2}{2A'A.A'O} = \frac{12a^2 + 3a^2 - 12a^2}{2.2a\sqrt{3}.a\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

Vậy cos(AC, BB') = $\frac{1}{4}$.

Bài toán 12. 24: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt nằm trên hai cạnh B'C' và DD' sao cho C'M = DN = x. Mặt phẳng (MAD') cắt BB' tại P. Chứng minh rằng CM vuông góc BN và tìm x theo a để thể tích khối lập phương gấp 3 lần thể tích khối đa diện MPB'D'AA' .

Hướng dẫn giải



Ta có

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN})$

$= \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{C'M}.\overrightarrow{AD} = a.x - x.a = 0$

suy ra $CM \perp BN$.

Ta có các đường thẳng AP, D'M, A'B' đồng quy tại S.

$V_{S.AA'D'} = \frac{1}{3}.S_{AA'D'}.SA' = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.\frac{a^2}{x} = \frac{a^4}{6x}$

$$\frac{V_{SPB'M}}{V_{SAA'D'}} = \frac{SP}{SA}.\frac{SB'}{SA'}.\frac{SM}{SD'} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = \left(1-\frac{x}{a}\right)^2$$

Suy ra: $V_{MPB'.D'AA'} = \frac{a^4}{6x}\left(1-\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right) = \frac{a^3}{6}\left(1+\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)$

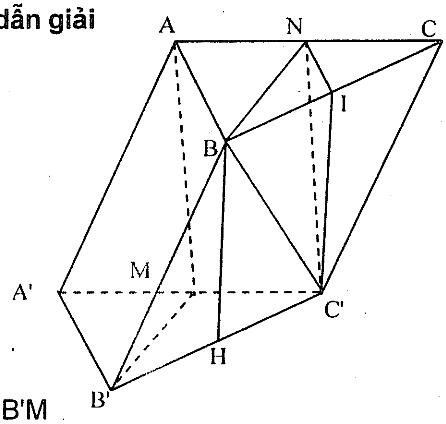
Ta có $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}a^3$ nên $V_{MPB'.D'AA'} = \frac{1}{3}a^3$.

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{6}\left(1+\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)=\frac{a^3}{3} \Leftrightarrow \left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\left(1-\frac{x}{a}\right)-1=0$$

Chọn $1-\frac{x}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0 \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$.

Bài toán 12. 25: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân, AB = AC = a, AA' = a. Hình chiếu của B lên mp(A'B'C') là trung điểm của B'C'. Gọi M là trung điểm của A'C'. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng BC' , MB'.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của B'C' thì BH ⊥ (A'B'C')

Tam giác vuông BB'H ta có:

$$HB = \sqrt{BB'^2 - B'H^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Do đó: $V_{ABC.A'B'C'}$

$= S_{ABC}.BH = \frac{1}{2}.a.a.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ (đvtt).

Gọi N là trung điểm của AC thì BN // B'M

Nên góc (BC', MB') = (BC', BN).

Gọi I là trung điểm của BC thì C'I // BH. Suy ra C'I ⊥ (ABC).

Tam giác vuông C'IN ta có:

$$C'N = \sqrt{C'I^2 + IN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

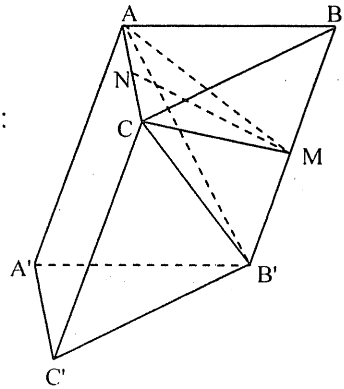
Tam giác BNC' có $BN = \sqrt{a^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $BC' = \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}} = a$, $C'N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác BNC':

$$\cos\widehat{NBC'} = \frac{BN^2+BC'^2-NC'^2}{2.BN.BC'} = \frac{\frac{5a^2}{4}+a^2-\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Vậy $\cos(BC', MB') = \cos(BC', BN) = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Bài toán 12. 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a\sqrt{3}$, $AC = a$, $AB = BC = a$, $ABB' = CBB' = 30^0$. Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng A'A vuông góc với mp (MAC) và tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.



Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABB' ta có:

$$AB'^2 = 4a^2 + 12a2 - 2.2a.2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4a^2 \Rightarrow AB' = 2a$$

Suy ra tam giác ABB' vuông tại A nên $AM \perp BB'$.

Tương tự ta có $CB' = 2a$ và $CM \perp BB'$.

Suy ra $(MAC) \perp BB' \Rightarrow AA' \perp (MAC)$

Trong tam giác vuông BCM ta có:

$$CM = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

Tương tự ta có $AM = a$ nên tam giác ACM cân tại M

Gọi N là trung điểm của AC. Ta có $MN \perp AC$.

Trong tam giác vuông AMN ta có:

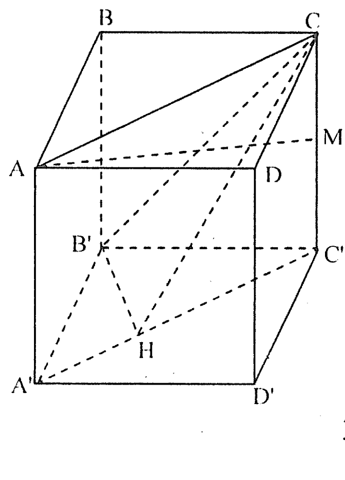
$$MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{B.AMC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.BM = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$$

nên: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}\,.\,d(B', (ABC)) = 3V_{B'.ABC} = 6V_{M.ABC} = \frac{3a^3}{2}$ (đvtt).

Bài toán 12. 27: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $BAD = 60^0$, góc giữa đường thẳng B'C và mặt phẳng (ACC'A') bằng 30^0.

Tính thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, DD' với M là trung điểm của CC'.



Hướng dẫn giải

Hạ $BH \perp A'C'$ thì có $BH \perp (ACC'A')$.

Từ đó suy ra góc giữa B'C và mặt phẳng (ACC'A') bằng $\widehat{B'CH}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2.BC.BA\cos120^0 = a^2 + 4a^2 - 2a.2a\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 7a^2$

Suy ra $AC = a\sqrt{7}$

Ta có: $B'H = \dfrac{2S_{A'B'C'}}{A'C'} = \dfrac{B'A'.B'C'.\sin120^0}{A'C'} = \dfrac{a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Tam giác vuông B'CH: $B'C = \dfrac{B'H}{\sin30^0} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$

Tam giác vuông BB'C: $BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \sqrt{\dfrac{84a^2}{49} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$

nên: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD\sin60^0.AA' = 2a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{35}}{7} = \dfrac{a^3.\sqrt{105}}{7}$.

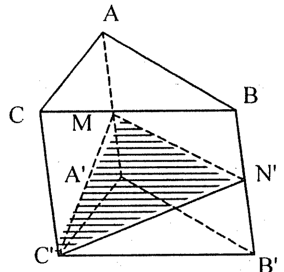
Ta có AM song song với (ACC'A').

Do đó d(DD', AM) = d(DD', (ACC'A') = d(D', (ACC'A'))

$= d(B', (ACC'A')) = B'H = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài toán 12. 28: Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB'. Mặt phẳng (MNC') chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Hướng dẫn giải



Nếu gọi V là thể tích của khối lăng trụ thì thể tích của khối tứ diện C'ABC là $\dfrac{V}{3}$, do đó thể tích của khối chóp C'.ABB'A là $\dfrac{2V}{3}$.

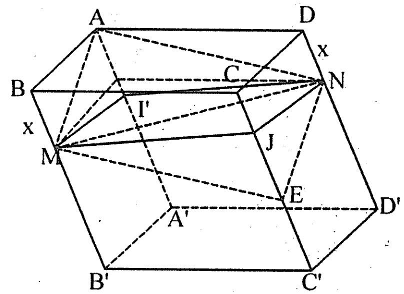
Vì hai khối chóp C'.ABNM và C'MNB'A' có cùng chiều cao và có mặt đáy bằng nhau nên thể tích của khối chóp C'.MNB'A' là: $V_1 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2V}{3} = \dfrac{V}{3}$

Do đó tỉ số thể tích hai phần được phân chia là $k = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 12. 29: Cho một khối hộp ABCD.A'B'C'D' có AA' = h. Trên BB' và DD' lấy hai điểm M và N sao cho $BM = DN = x < \dfrac{h}{2}$. Mặt phẳng (AMN) chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Hướng dẫn giải

Ta có mp(AMN) cắt khối hộp theo một hình bình hành AMEN, với E nằm trong đoạn CC' mà C'E = x. Qua MN vẽ một mặt phẳng song song với mp(ABCD) cắt khối hộp theo hình bình hành MJNI. Gọi V_1 là thể tích phần khối hộp nằm giữa thiết diện AMEN và mp(A'B'C'D') và V_2 là thể tích phần còn lại của khối hộp.



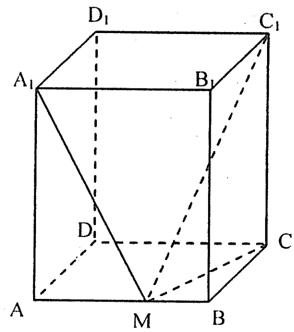
Ta có $V_1 = V_{MJNA'B'C'D'} - V_{JMNE} + V_{IAMN}$

Vì $V_{JMNE} = V_{IAMN}$ nên $V_1 = V_{IMJNA'B'C'D'}$

Do đó $V_2 = V_{IMJNABCD}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{MB'}{BM} = \dfrac{h-x}{x}$.

Bài toán 12. 30: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Với M là một điểm trên cạnh AB, tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1.

Hướng dẫn giải



Chọn cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Gọi chiều cao là h thì đáy hình vuông cạnh 2h

$M \in AB$ nên có số α sao cho:

$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, với $0 \le \alpha \le 1$.

$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \alpha\vec{a}$

$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$MA_1^2 = (\vec{c} - \alpha\vec{a})^2 = \vec{c}^2 - 2\alpha\vec{a}.\vec{c} + \alpha^2\vec{a}^2 = h^2(1+4\alpha)^2$$

$$MC_1^2 = \left[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right]^2 = h^2[4(1-\alpha)^2 + 5]$$

Do đó $MA_1 = h\sqrt{1+4\alpha^2}$ và $MC_1 = h\sqrt{4(1-\alpha)^2+5}$

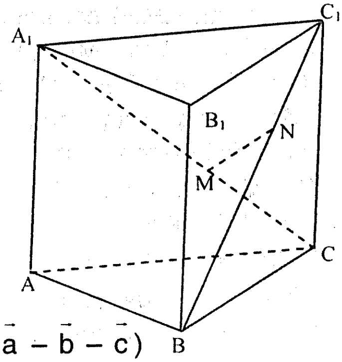
$$\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MC_1} = (\vec{c} - \alpha\vec{a})\left[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right] = h^2(2\alpha - 1)^2$$

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{(2\alpha-1)^2}{\sqrt{(1+4\alpha^2)\left[4(1-\alpha)^2+5\right]}} \ge 0$$

Vậy φ lớn nhất $\Leftrightarrow \varphi = 90^0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ nên M là trung điểm của AB.

Bài toán 12. 31: Cho $ABC.A_1B_1C_1$ là một hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh dài bằng a. Xét các đoạn thẳng có hai đầu lần lượt nằm trên hai đường chéo BC_1 và CA_1 của hai mặt bên lăng trụ và song song với mặt phẳng (ABB_1A_1). Tính đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng như thế.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ cơ sở: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$

Gọi M thuộc đoạn BC_1

Và N thuộc đoạn CA_1

Ta có $\overrightarrow{MA_1} = \alpha\overrightarrow{CA_{11}} = \alpha(\vec{c} - \vec{b})$

với $0 \le \alpha \le 1$.

$\overrightarrow{C_1N} = \beta\overrightarrow{C_1B} = \beta(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$

với $0 \le \beta \le 1$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1N} = \alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} + \beta(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$

$= \beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c}$

Vì MN // mp(ABB_1A_1) và CC_1 // mp(ABB_1A_1) nên ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CC_1}$ là đồng phẳng. Do đó có cặp số (p, q) sao cho:

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{CC_1} = p\vec{a} + q\vec{c}$$

Do đó $\beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = p \\ 1 - \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \beta \\ \alpha = 1 - \beta \\ q = 1 - 2\beta \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \beta^{2}\vec{a} + 0.\vec{b} + (1 - 2\beta)\vec{c}$ nên:

$MN^2 = \beta^2\vec{a}^2 + (1 - 2\beta)^2\vec{c}^2 + 2\beta(1 - 2\beta)\vec{a}.\vec{c}$

$= \beta^2a^2 + (1 - 2\beta)^2a^2 + 0$

$= (5\beta^2 - 4\beta + 1)a^2 = 5(\beta - \frac{2}{5})^2a^2 + \frac{1}{5}a^2 \ge \frac{1}{5}a^2$

MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow \beta = \frac{2}{5}$.

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ là giá trị nhỏ nhất của các đoạn MN.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 12. 1: Cho khối đa diện lồi. Chứng minh rằng:

a) Nếu mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

b) Nếu các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.

Hướng dẫn

a) Giả sử khối đa diện có C cạnh và có Đ đỉnh thì 3Đ = 2C.

b) Xét đỉnh A bất kỳ, mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh nên đỉnh A là đỉnh chung của ba cạnh AB, AC, AD rồi chứng minh ABCD là khối tứ diện.

Bài tập 12. 3: Chứng minh :

a) Tâm các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối tám mặt đều

b) Tâm của các mặt của khối tứ diện đều là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa khối đa diện đều loại {n, p} khi mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh.

b) Dùng phép vị tự tâm là trọng tâm G của tứ diện và tỉ $k = -\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 12. 3: Chứng minh tổng bình phương khoảng cách từ 8 đỉnh của hình lập phương cạnh a, đến một đường thẳng d bất kỳ đi qua tâm là số không đổi.

Hướng dẫn

Gọi hình lập phương ABCD.A'B'C'D' tâm O thì d qua O. Ghép tổng bình phương các cặp có 2 đỉnh là 2 mút đường chéo có trung điểm chung là O.

Kết quả $4a\sqrt{2}$

Bài tập 12. 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB, CC', C'D' và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM =C'N =C'P =AQ =x ($0 \le x \le a$). Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và tính gía trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện cắt bởi (MNPQ).

Hướng dẫn

Dùng hình học hoặc vectơ, có thể trải thiết diện MNPQ lên mp(AA';BB').

Bài tập 12. 5: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D', đường cao h. Mặt phẳng (A'BD) hợp với mặt bên ABB'A' một góc α . Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.

Hướng dẫn

Lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có đáy hình vuông và cạnh bện vuông góc với đáy. Kết quả $V = h^3(\tan^2\alpha - 1)$.

Bài tập 12. 6: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Hướng dẫn

a) Dùng đường chéo là đường thẳng cùng vuông góc với A_1B và B_1D.

Kết quả $d(A_1B, B_1D) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

b) Dùng định lý côsin hay vectơ.

Bài tập 12. 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K và L lần lượt là trung điểm của các cạnh B'C' và C'D'. Hãy xác định và tính thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (AKL).

Hướng dẫn

Thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (AKL) là ngũ giác. Tính gián tiếp cắt chai hay bù trừ, có thể dùng $S' = S.\cos\phi$.

Kết quả $S = \dfrac{7\sqrt{17}}{24}a^2$

Bài tập 12. 8: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có: AB = AA' = a và AD = 2a.

a) Chứng minh AB' vuông góc với BD' và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB' và C'D'.

b) Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (B'CD')

Hướng dẫn

a) Dùng hình chiếu vuông góc. Kết quả d(AB', C'D') = 2a

b) Kết quả d(C', (B'D'C)) = $\dfrac{2a}{3}$

Bài tập 12. 9: Cho một hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D', đáy là hình thang AB//CD có AD= CD= BC= a, AB= 2a. Mặt phẳng (P) qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P. Cho góc $\widehat{BCC'} = \widehat{ADB'} = 60^\circ$ và BM=3a. Định (P) để AMNP là hình thang cân.

Hướng dẫn

Dùng hình học hoặc vectơ. Kết quả PD = $\dfrac{5}{4}a$

Bài tập 12. 10: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên 2a, đáy là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu đỉnh A' trên mp(ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối chóp A'.ABC và cosin của góc giữa 2 đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn

Tính trực tiếp. Kết quả $V_{A'.ABC} = \dfrac{a^3}{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

Bài tập 12. 11: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích của lăng trụ và diện tích mặt bên BCC'B'.

Hướng dẫn

Vẽ hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC nằm dưới trước rồi, xác định A' cách đều các điểm A, B, C.

Kết quả $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt), $S = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ (đvdt).

Chuyên đề 13: KHỐI TỨ DIỆN VÀ KHỐI CHÓP

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Hình chóp tam giác , tứ giác,...
- Hình chóp đều: đáy đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Trung đoạn của hình chóp đều là đoạn nối đỉnh với trung điểm của cạnh đáy. Hình chóp đều thì hình chiếu của đỉnh chóp là tâm của đáy.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}B.h$

Thể tích hình chóp cụt: $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h$

Tỉ số thể tích 2 khối chóp tam giác:

$$\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC};\quad \frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Chú ý:

1) Tứ diện hay hình chóp tam giác có 4 cách chọn đỉnh chóp.
2) Tứ diện nội tiếp hình hộp, tứ diện gần đều (có 3 cặp cạnh đối bằng nhau) nội tiếp hình hộp chữ nhật và tứ diện đều nội tiếp hình lập phương.
3) Khi tính toán các đại lượng, nếu cần thì đặt ẩn rồi tìm phương trình để hướng dẫn giải ra ẩn đó. Để tính diện tích, thể tích có khi ta tính gián tiếp bằng cách chia nhỏ các phần hoặc lấy phần lớn hơn trừ đi các phần dư hoặc dùng tỉ số.
4) Thể tích khối lăng trụ: V = B.h.

2. CÁC BÀI TOÁN

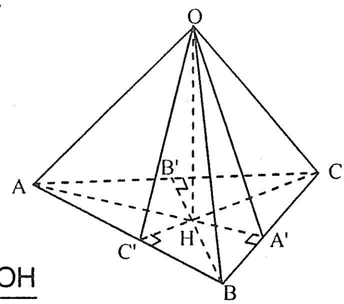
Bài toán 13. 1: Tứ diện OABC có cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và có OA = a, OB = b, OC = c. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) với (ABC).

a) Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Tính diện tích tam giác HAB, HBC và HCA.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh O xuống mặt phẳng (ABC) thì H là trực tâm của tam giác ABC với 3 đường cao AA', BB', CC'.



a) Ta có $\alpha = \widehat{OA'A}$, $\beta = \widehat{OB'B}$

$\gamma = \widehat{OC'C}$ nên $\cos\alpha = \cos\widehat{OA'A} = \sin\widehat{OAA'} = \frac{OH}{a}$

Tương tự $\cos\beta = \dfrac{OH}{b}$, $\cos\gamma = \dfrac{OH}{c}$.

Từ hệ thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \Rightarrow \dfrac{OH^2}{a^2} + \dfrac{OH^2}{b^2} + \dfrac{OH^2}{c^2} = 1$

Vậy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Ta có: $OH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ và $S_{HBC} = S_{OBC}.\cos\alpha$

nên : $S_{HBC} = \dfrac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. Tương tự:

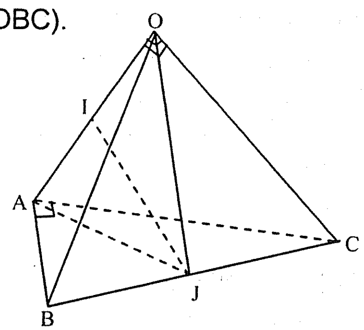
$S_{HAB} = \dfrac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$; $S_{HAC} = \dfrac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Bài toán 13. 2: Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$, $\widehat{BOC} = 90^o$.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông và $OA \perp BC$.

b) Tìm đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC. Chứng minh (ABC) vuông góc (OBC).

Hướng dẫn giải



a) Vì $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$,

OA = OB = OC = a nên AB = AC = a.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta OBC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì

$OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$ nên $OA \perp BC$.

b) Gọi I là trung điểm của OA, vì OJ = AJ nên $JI \perp OA$, do đó IJ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

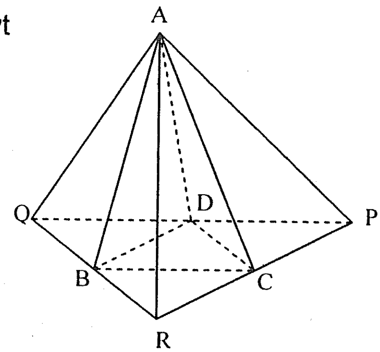
$$IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{a}{2}.$$

Ta có $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$, $IJ = \dfrac{1}{2}OA$ nên tam giác OAJ vuông tại I. Do đó góc giữa mp(OBC) và mp(ABC) là góc $\widehat{OJA} = 90^o$. Vậy mp(OBC) $\perp$ mp(ABC).

Bài toán 13. 3: Tính thể tích khối tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau: AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.

Hướng dẫn giải

Dựng tứ diện APQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR, RP, PQ.



Ta có $AD = BC = \frac{1}{2}PQ$

$\Rightarrow AQ = \frac{1}{2}PQ$ mà D là trung điểm của PQ

$\Rightarrow AQ \perp AP$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$.

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}AP.AQ.AR$

Xét các tam giác vuông APQ, AQR, ARP ta có:

$AP^2 + AQ^2 = 4c^2$, $AQ^2 + AR^2 = 4a^2$, $AR^2 + AP^2 = 4b^2$

Suy ra: $AP = \sqrt{2}.\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$, $AQ = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$

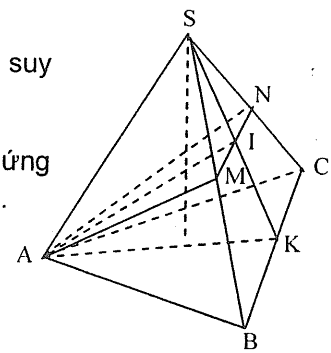
$AR = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

Vậy: $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2).(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Bài toán 13. 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Hướng dẫn giải:

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.



Từ giả thiết suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, MN // BC, suy ra I là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC$ nên hai trung tuyến tương ứng $AM = AN$, do đó ΔAMN cân tại A, suy ra $AI \perp MN$.

Mà $(SBC) \perp (AMN) \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$.

Do đó ΔSAK cân tại A, suy ra $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ nên:

$AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Vậy: $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt)

Bài toán 13.5: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh bên OA = a, OB = b, OC = c và chúng vuông góc với nhau từng đôi một:

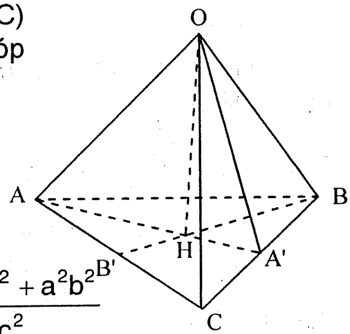
a) Tính thể tích hình chóp O.ABC.

b) Tính chiều cao OH và diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có AO ⊥ OB và AO ⊥ OC do đó OA ⊥ (OBC) nên hình chóp O.ABC có thể coi là hình chóp A.OBC với đáy là OBC và đường cao là AO

Do đó: $V = \frac{1}{3}S_{OBC}\,.\,OA = \frac{abc}{6}$ (đvtt)



b) Hạ OH ⊥ (ABC) thì H là trực tâm của đáy.

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

Do đó: $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$

Và $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.OH \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3V}{OH} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{2}$ (đvtt).

Bài toán 13. 6: Cho hình chóp S.ABC mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, SA = SB = SC = a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC; D là điểm đối xứng của S qua E; I là giao điểm của đường thẳng AD với mặt phẳng (SMN)

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với SI.

b) Tính theo a thể tích của khối tứ diện MBSI.

Hướng dẫn giải

a) Ta có SA ⊥ (SBC) ⇒ SA ⊥ BD.

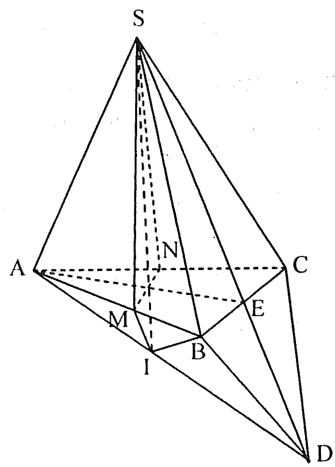
Mà BD ⊥ SB ⇒ BD ⊥ (SAB) ⇒ BD ⊥ SM.

Mà SM ⊥ AD (do tam giác SAB vuông cân)

⇒ SM ⊥ (ABD) ⇒ SM ⊥ AD.

Chứng minh tương tự ta có:

SN ⊥ AD ⇒ AD ⊥ (SMN) ⇒ AD ⊥ SI.



b) Ta có $AD = \sqrt{SA^2 + SD^2} = a\sqrt{3}$.

$$SD^2 = DI.DA \Rightarrow DI = \frac{SD^2}{DA} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$SM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Hạ IH ⊥ AB thì IH // BD.

Do đó: $\frac{IH}{DB} = \frac{AI}{AD} = \frac{AD - DI}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IH = \frac{1}{3}DB = \frac{a}{3}$.

Mặt khác SM ⊥ (ABD) nên

$V_{MBSI} = \frac{1}{3}SM.S_{MBI} = \frac{1}{6}SM.BM.IH = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3} = \frac{a^3}{36}$

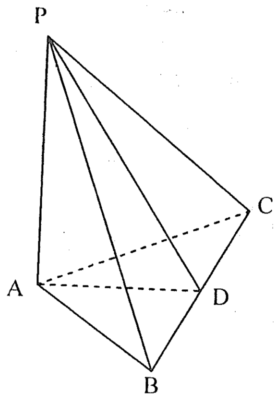
Bài toán 13. 7: Một hình chóp P.ABC có hai mặt bên (PAB) và (PAC) cùng vuông góc với đáy. Đáy ABC là một tam giác cân đỉnh A có trung tuyến AD = m, PB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (PAD) một góc β.

a) Chứng minh $PB^2 = PA^2 + AD^2 + BD^2$

b) Tính thể tích của hình chóp.

Hướng dẫn giải

a) Hai mặt bên (PAB), (PAC) cùng vuông góc với đáy, nên giao tuyến PA vuông góc với đáy.



Do đó AB là hình chiếu của PB trên đáy nên $\widehat{PBA} = \alpha$.

Tam giác ABC cân đỉnh A, nên trung tuyến AD ⊥ BC, mà PA ⊥ BC nên BC ⊥ mp(PAD). Do đó PD là hình chiếu của PB trên mp(PAD) nên $\widehat{BPD} = \beta$.

Trong tam giác vuông PBD ta có:

$PB^2 = PD^2 + BD^2$

Trong tam giác vuông PAD ta có: $PD^2 = PA^2 + AD^2$

Vậy: $PB^2 = PA^2 + AD^2 + BD^2$

b) Đặt PB = x thì PA = $x\sin\alpha$ và PD = $x\cos\beta$, BD = $x\sin\beta$

Trong tam giác vuông PAD ta có: $PD^2 - PA^2 = AD^2$

hay $x^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) = m^2 \Rightarrow x^2 = \frac{m^2}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

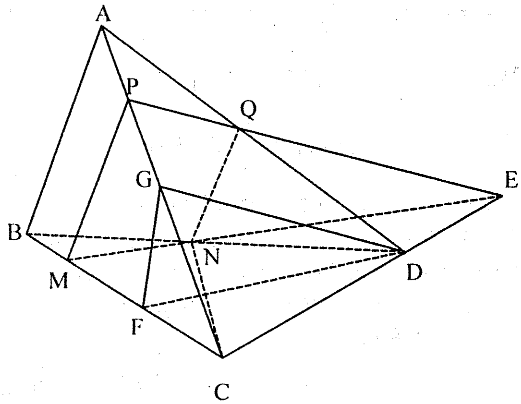
Thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.PA$

$= \frac{1}{3}BD.AD.PA = \frac{1}{3}x\sin\beta.m.x.\sin\alpha = \frac{m^2\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}$

Vậy $V = \frac{m^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

Bài toán 13. 8: Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$ và tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

Hướng dẫn giải



Gọi E = MN $\cap$ CD.

Khi đó Q = PE $\cap$ AD.

Gọi F là trung điểm của BC và G là điểm trên AC sao cho DG // PQ.

Ta có FD // MN.

$$\frac{AG}{AP} = 1 + \frac{PG}{AP} = 1 + \frac{2PG}{PC}$$

$$= 1 + \frac{2ED}{EC} = 1 + \frac{2MF}{MC} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Suy ra: $\frac{AQ}{AD} = \frac{AP}{AG} = \frac{3}{5}$.

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, V_1 là thể tích khối đa diện ABMNQP, V_2 là thể tích khối đa diện CDNMPQ.

Khi đó $V_2 = V - V_1$

Ta có: $V_1 = V_{ABMN} + V_{AMPN} + V_{APQN}$

Vì $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}, \frac{BN}{BD} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{1}{8}, \frac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \frac{3}{8}, \frac{S_{DNC}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2}$

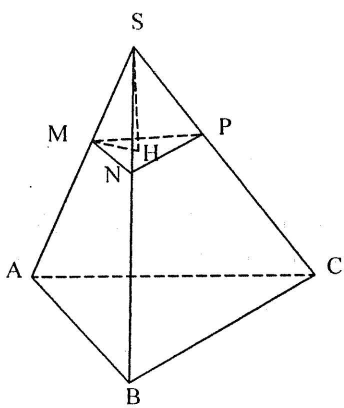
Suy ra $V_{ABMN} = \frac{1}{8}V$, $V_{AMNP} = \frac{1}{3}V_{AMNC} = \frac{1}{8}V$

$$V_{APQN} = \frac{1}{3}.\frac{3}{5}V_{ADNC} = \frac{1}{10}V$$

Do đó $V_1 = \frac{7}{20}V$, suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{13}$.

Bài toán 13. 9: Cho hình chóp S.ABC có SA = a, SB = b, SC = c, và $\widehat{ASB} = 30^\circ$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$. Tính thể tích hình chóp S.ABC.

Hướng dẫn giải



Trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho SM = SN = SP

Gọi H là hình chiếu của S lên (MNP) ta có:

SM = SN = SP

HM = HN = HP

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP.

Theo định lý hàm số côsin ta có:

MN = $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, NP = $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, MP = 1.

nên $S_{MNP} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}}{2\sqrt{2}}$

Vì MH là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP nên:

$$MH = \frac{MN.NP.PM}{4S_{MNP}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}.\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{\sqrt[4]{2}.\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}$$

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}}{2}$$

$$V_{SMNP} = \frac{1}{3}S_{MNP}.SH = \frac{1}{12\sqrt[4]{2}}\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}$$

Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \dfrac{SA}{SM}.\dfrac{SB}{SN}.\dfrac{SC}{SP} = abc$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{abc\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}}{12\sqrt[4]{2}}.$$

Bài toán 13. 10: Cho hai tia Ax và By tạo với nhau góc α, đường thẳng AB vuông góc với cả Ax và By; AB = d. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai tia Ax và By, AM = m, BN = n. Tính:

a) Thể tích khối tứ diện ABMN.

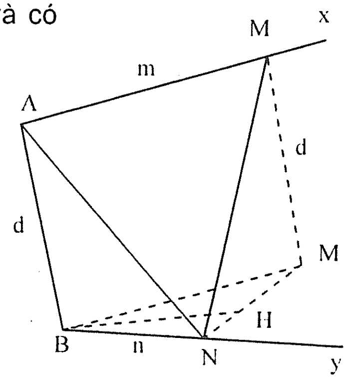
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và MN.

Hướng dẫn giải

a) $V_{ABMN} = \dfrac{1}{6}AM.BN.d\sin\alpha = \dfrac{1}{6}m.n.d\sin\alpha$

b) Vẽ $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM}$ thì ABM'M là hình chữ nhật và có AB // (MNM')

Khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và MN bằng khoảng cách từ AB tới mp(MNM') hay bằng khoảng cách từ B tới mặt phẳng đó. Hạ BH $\perp$ NM' thì BH $\perp$ mp(MNM'), vậy h = BH.



Ta có $S_{BNM'} = \dfrac{1}{2}NM'.BH$ nên

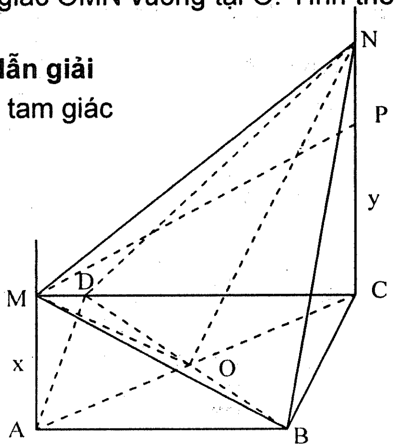
$$h = \frac{mn\sin\alpha}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$$

Bài toán 13. 11: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a có tâm là O. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P) ta lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

a) Tìm điều kiện cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là $xy = \frac{a^2}{2}$.

b) Giả sử M, N thay đổi sao cho tam giác OMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN.

Hướng dẫn giải



a) Trong mp(AM, CN) hạ $MP \perp CN$ ta có tam giác MNP vuông tại P.

Do đó:

$MN^2 = NP^2 + MP^2$

$= AC^2 + (CN - CP)^2$

$= 2a^2 + (y - x)^2$

$MN = \sqrt{2a^2 + (x-y)^2}$

Điều kiện cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là:

$MN^2 = OM^2 + ON^2$

$\Leftrightarrow MN^2 = MA^2 + AO^2 + OC^2 + CN^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + (x-y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}$

b) $BD \perp AM$, $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp MO$.

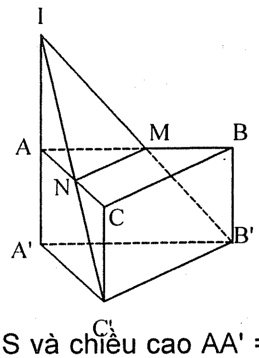
Nếu $MO \perp ON$ thì $MO \perp (ONB)$, tức MO là một đường cao của tứ diện BDMN. Do đó:

$$V_{BDMN} = \frac{1}{3}MO \,.\, S_{BDN} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + x^2\right)\left(\frac{a^2}{2} + y^2\right)}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + x^2y^2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^2}{2}(x+y)^2} = \frac{a^2(x+y)}{6} \text{ (đvtt)}$$

Bài toán 13. 12: Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của đường thẳng MB' và đường thẳng AA', N là giao điểm của IC' và AC. Thiết diện của khối lăng trụ khi cắt bởi mp(B'C'M) là hình thang B'C'NM. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi V_1 là thể tích của phần chứa cạnh AA' và V_2 là thể tích phần còn lại.

Giả sử khối lăng trụ ABC.A'B'C' có diện tích đáy là S và chiều cao AA' = h. Ta có:

$V_1 = V_{AMN.A'B'C'} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.AMN} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.IA' - \frac{1}{3}S_{AMN}.IA$

$= \frac{1}{3}S.2h - \frac{1}{3}\frac{S}{4}h = \frac{7}{12}Sh = \frac{7}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7}{12}(V_1 + V_2)$

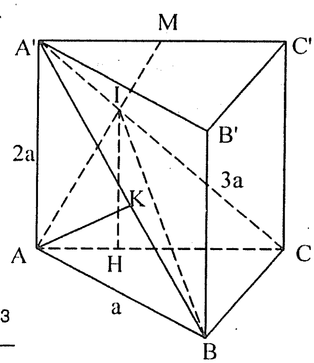
Suy ra: $12V_1 = 7(V_1 + V_2)$ hay $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Bài toán 13. 13: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Hướng dẫn giải

a) Hạ $IH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow IH \perp (ABC)$ nên IH là đường cao của tứ diện IABC.

$\Rightarrow IH // AA' = \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$



$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}$,

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

Diện tích tam giác ABC:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

Thể tích khối đa diện IABC: $V = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}$

b) Hạ $AK \perp A'B$ ($K \in A'B$). Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

$AK = \frac{2S_{AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 13. 14: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có mặt đáy là tam giác ABC vuông tại B và AB = a, BC = 2a, AA' = 3a. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M và N.

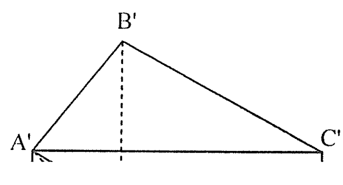
a) Tính thể tích khối chóp C.A'AB.

b) Chứng minh rằng $AN \perp A'B$ và tính diện tích tam giác AMN.

Hướng dẫn giải

a) $V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AA' = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3$.

b) Ta có: $CB \perp AB$, $CB \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$), suy ra $CB \perp (A'AB)$.



Mặt khác AN $\perp$ CA' suy ra AN $\perp$ A'B.

Ta có: $V_{A'AMN} = \frac{1}{3}S_{AMN}\,.\,A'I$

Vì NB // AA', MC // (AA'B)

$\Rightarrow V_{A'AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B} = V_{C.AA'B} = a^3$

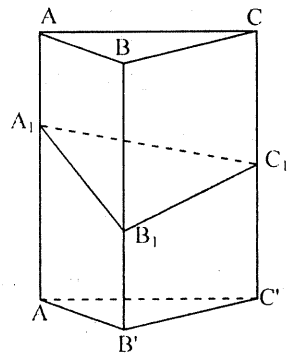
Và A'I . A'C = A'A^2

$$\Rightarrow A'I = \frac{(3a)^2}{\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}} = \frac{9a}{\sqrt{14}}$$

Vậy: $S_{AMN} = \frac{3.V_{A'.AMN}}{A'I} = \frac{a^2\sqrt{14}}{3}$.

Bài toán 13. 15: Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P) bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$

$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}S_{BCC_1B_1}d(A_1(BCC_1B_1))$

$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b+c).BC.d(A,BC)$

$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}(b+c)S = \frac{1}{3}(a+b+c)S$

$V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} - V_{ABC.A_1B_1C_1}$

$= Sh - \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$

Điều kiện $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'}$

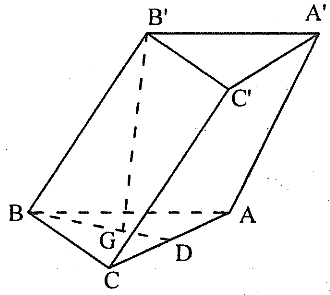
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{2}Sh \Leftrightarrow 2(a+b+c) = 3h.$

Bài toán 13. 16: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa BB' và mp(ABC) bằng 60°; tam giác ABC vuông t[illegible]C và BÂC = 60°. Hình chiếu vuông góc của B' lên mp(ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện A'ABC.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm

AC thì B'G ⊥ (ABC), B'BG = 60^o nên B'G = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$,



BG = $\frac{a}{2}$.

Do đó BD = $\frac{3a}{4}$. Đặt AB = x

thì BC = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$, AC = $\frac{x}{2}$, CD = $\frac{x}{4}$.

Tam giác BCD vuông tại C nên:

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^2 = \frac{9}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{13}}{13} = AB$

và AC $\frac{3a\sqrt{13}}{26}$, do đó $S_{ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$.

$V_{A'ABC} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.B'G = \frac{3a^3}{208}$.

Bài toán 13. 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = $a\sqrt{6}$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa AD và mặt phẳng song song (SBC).

Hướng dẫn giải

a) Vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính

AD = 3a nên ta có: AD // BC và

AB = BC = CD = a, đồng thời

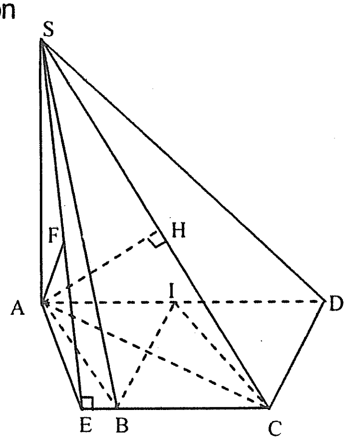
AC ⊥ CD, AB ⊥ BD, AC = BD = $a\sqrt{3}$.

Do đó CD ⊥ (SAC)

Hạ AH ⊥ SC mà AH ⊥ CD nên AH ⊥ (SCD)

⇒ d(A, (SCD)) = AH

Tam giác SAC vuông tại A:



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}$$

$\Rightarrow AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có BI // CD nên BI song song với mặt phẳng (SCD).

Từ đó suy ra d(B; (SCD)) = d(I; (SCD))

$= \frac{1}{2}d(A; (SCD)) = \frac{1}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Ta có AD // BC nên AD // (SBC).

Hạ $AE \perp BC \Rightarrow SE \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SBC)$.

Hạ $AF \perp SE$ thì $AF \perp (SBC)$. Ta có:

d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC)) = d(A; SE) = AF.

Xét tam giác vuông AEB, SAE: $AE = a\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

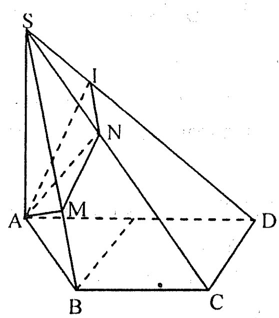
$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Bài toán 13. 18: Cho hình chóp S.ABCD đáy là nửa lục giác đều ABCD có AB = BC = CD = a, cạnh bên SA= $a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy và M và I là hai điểm sao cho $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.

a) Chứng minh N là trung điểm SC, SD vuông góc với (AMI).

b) Chứng minh $\widehat{ANI} = 90^o$; $\widehat{AMI} = 90^o$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp SABCD.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$

thì $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^o = a.2a.\frac{1}{2} = a^2$

$\vec{a}.\vec{c} = 0$; $\vec{b}.\vec{c} = 0$

a) Ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a})$

$\overrightarrow{SI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{SD} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) = \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{c})$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = \vec{c} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$

Vì N thuộc SC nên có số α sao cho $\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SC} = \alpha(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS})$.

$\overrightarrow{SN} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AS}) = \alpha(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \vec{c})$

Vì $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AI}$ đồng phẳng nên có số x, y sao cho $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AI}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN} = \vec{c} + \alpha(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \vec{c})$

$$= \alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c}$$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c} = x(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}) + y(\frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c})$

$\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c} = \frac{3}{4}x\vec{a} + \frac{3}{7}y\vec{b} + (\frac{1}{4}x + \frac{4}{7}y)\vec{c}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{4}x \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}y \\ 1-\alpha = \frac{1}{4}x + \frac{4}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Nên $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ do đó N là trung điểm của SC.

Ta có $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$ nên: $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AI} = (\vec{b} - \vec{c})(\frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c})$

$$= \frac{3}{7}\vec{b}^2 + \frac{4}{7}\vec{b}.\vec{c} - \frac{3}{7}\vec{b} - \frac{4}{7}\vec{c}^2 = 0$$

Do đó SD $\perp$ AI, và $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AM} = (\vec{b} - \vec{c})(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}) = 0$

Do đó SD $\perp$ AM. Vậy SD $\perp$ mp(AMI)

b) Ta có $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}$

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NI} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}\right)$

$= -\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{5}{56}\vec{a}.\vec{b} + 0 - \frac{1}{8}\vec{a}.\vec{b} + \frac{5}{112}\vec{b}^2 + 0 - 0 + 0 + \frac{1}{28}\vec{c}^2 = 0$

$\Rightarrow AN \perp NI$ và $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{9}{28}\vec{c}$

Tương tự $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI$.

$AM^2 = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)^2 = \frac{12a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$AN^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{16}\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{c}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}\vec{b} + 0 + 0$

$= \frac{6}{4}a^2 \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$IN^2 = (\overrightarrow{NI})^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{4}.\frac{42a^2}{49}$

$\Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$ nên $S_{ANI} = \frac{1}{2}AN.\,NI = \frac{6a^2\sqrt{7}}{56} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$= \frac{1}{16}(6\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}^2) = \frac{15a^2}{16}$

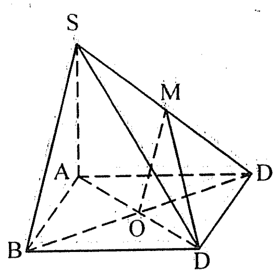
nên $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{AM.AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \sin(AM; AN) = \frac{\sqrt{14}}{8}$

$S_{MAN} = \frac{1}{2}AN.M.\,AN.\sin(AM; AN) = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$

Vậy $S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{MAN} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.

Bài toán 13. 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối tứ diện SACD và tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Hướng dẫn giải



Thể tích của khối tứ diện SACD là:

$V_{SACD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}DA.DC.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Gọi M là trung điểm của SD.

Ta có OM // SB nên g(SB; AC) = g(OM, OC)

Tam giác vuông SAB có:

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$ nên $OM = a$.

Tương tự, $SD = 2a \Rightarrow MD = a \Rightarrow CM = a\sqrt{2}$.

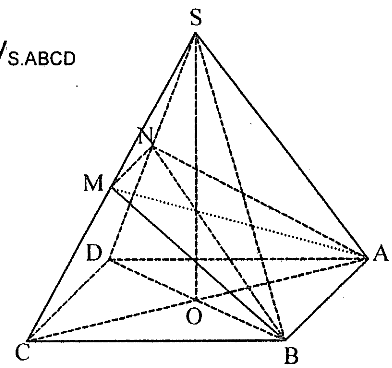
Xét tam giác OMC, ta có

$$\cos\widehat{COM} = \frac{OM^2 + OC^2 - MC^2}{2OM.OC} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos(SB.AC) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài toán 13. 20: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

Hướng dẫn giải

Vẽ MN // CD ($N \in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mp(ABM). Ta có:



$$\frac{V_{S.ANB}}{V_{S.ADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ANB} = \frac{1}{2}V_{S.ADB} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S..BCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Vậy: $V_{S.ABMN} = V_{S.ANB} + V_{S.BMN}$

$= \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$. Do đó $\frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$.

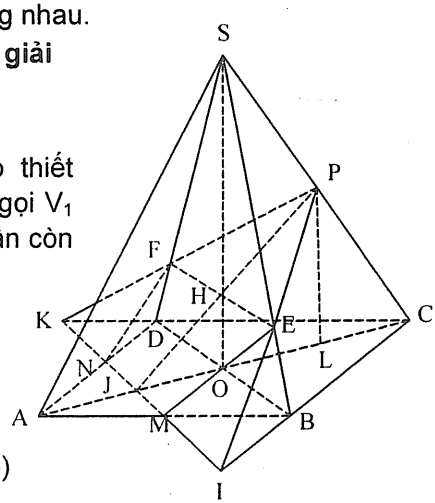
Bài toán 13. 21: Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC. Chứng minh mặt phẳng (MNP)) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng MN cắt CD, BC tại K, I.

PI cắt SB tại E, PK cắt SD tại F.

Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện MNFPE, chia thể tích ra hai phần, gọi V_1 là thể tích phần chứa đỉnh S và V_2 là phần còn lại.



Ta có $V_1 = V_{S.MNFPE} + V_{S.AMN}$

$V_2 = V_{C.MNFPE} + V_{E.MBC} + V_{F.NDC}$

Vì P là trung điểm SC nên

$V_{S.MNFPE} = V_{C.MNFDE}$

Ta có:SO = 2PL = 4HO nên d(E, (ABCD))

$= d(F, (ABCD)) = \frac{1}{4}d(S, (ABCD))$

Và $S_{MBC} = S_{NDC} = 2S_{AMN}$ nên $V_{S.AMN} = V_{E.MBC} + V_{F.NDC}$

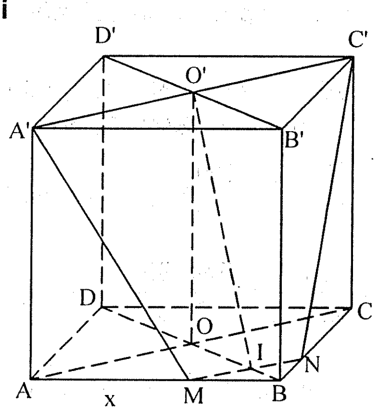
Vậy $V_1 = V_2$

Bài toán 13. 22: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a và một điểm M trên cạnh AB, AM = x, 0 < x < a. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường chéo A'C' của hình vuông A'B'C'D'.

a) Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, hãy tìm x để thể tích của một trong hai khối đa diện đó gấp đôi thể tích khối đa diện kia.

Hướng dẫn giải



a) Mặt phẳng (P) cắt mặt ABCD theo giao tuyến MN // A'C'. Với N ∈ BC. Thiết diện là hình thang A'C'NM có A'M = C'N. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và O' là tâm của hình vuông A'B'C'D' thì OI là đường cao của hình thang A'C'NM. Ta có:

$MN = BM\sqrt{2} = (a - x)\sqrt{2}$, $OI = x\sqrt{2}$.

Do đó: $O'I = \sqrt{OO'^2 + OI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$

Gọi S là diện tích của hình thiết diện ta có:

$$S = \frac{1}{2}(A'C' + MN)O'I = \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}.$$

b) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện nhỏ là hình chóp cụt tam giác có đáy nhỏ là tam giác BMN và đáy lớn là tam giác B'A'C'. Gọi V_1 là thể tích khối chóp cụt có chiều cao h = a, gọi S là diện tích tam giác B'AC', ta có $S = \frac{a^2}{2}$ và S' là diện tích tam giác BMN, ta có $S' = \frac{(a-x)^2}{2}$. Từ đó:

$$V_1 = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'}) = \frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2)$$

Ta có $V_1 = 2(V - V_1) \Leftrightarrow V_1 = \frac{1}{3}V$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2) = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)a.$$

Bài toán 13. 23: Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một hình lăng trụ đều đến các mặt của nó không phụ thuộc vào vị trí của điểm nằm trong hình lăng trụ đó.

Hướng dẫn giải

Gọi hình lăng trụ đều đã cho là H có diện tích đáy S, cạnh đáy a và chiều cao h. Khi đó tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong H đến hai mặt đáy của nó luôn bằng chiều cao h của H.

Giả sử I là một điểm trong nào đó của H. Dựng qua I một mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh bên của H ta được thiết diện thẳng $A_1 A_2 ... A_n$ là một đa giác đều bằng đa giác đáy.

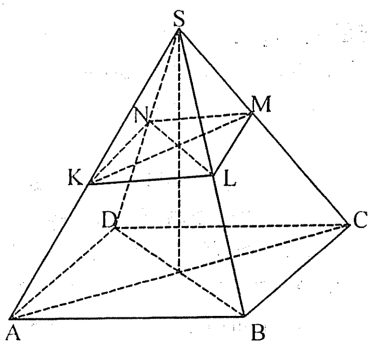
Từ I ta hạ đường $IH_1 \perp A_1A_2$, $IH_2 \perp A_2A_3$, ..., $IH_n \perp A_nA_1$.

Do thiết diện thẳng vuông góc với các mặt bên, nên IH_1, IH_2, ..., IH_n lần lượt vuông góc với các mặt bên của hình lăng trụ.

Ta có: $S = \frac{1}{2}aIH_1 + \frac{1}{2}aIH_2 + ... + \frac{1}{2}aIH_n = \frac{1}{2}a(IH_1 + IH_2 + ... + IH_n)$.

$\Rightarrow IH_1 + IH_2 + ... + IH_n = \frac{2S}{a}$. Vậy tổng các khoảng cách từ I đến các mặt của lăng trụ bằng: $h + \frac{2S}{a}$: không đổi.

Bài toán 13. 24: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh: $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$



Hướng dẫn giải

Ta có $V_{SKLM} + V_{SKNM} = V_{SKLN} + V_{SMLN}$

$$\Rightarrow \frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SKNM}}{V_{SADC}} = \frac{V_{SKLN}}{V_{SABD}} + \frac{V_{SMLN}}{V_{SCBD}}$$

$$\Rightarrow \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SC}.\frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}$$

Nhân 2 vế với $\frac{SA}{SK}.\frac{SB}{SL}.\frac{SC}{SM}.\frac{SD}{SN}$ thì được đpcm.

Bài toán 13. 25: Khối lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa CK và A'D.

Hướng dẫn giải

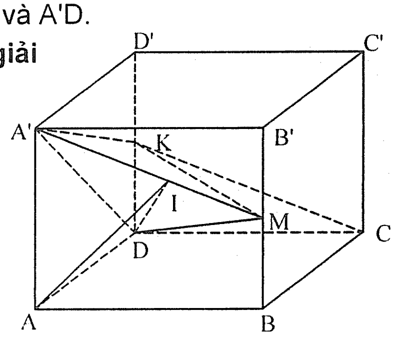
Gọi M là trung điểm của BB'.

Ta có A'M // KC nên

d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD))

= d(K, (A'MD))

Đặt d(CK, A'D) = x. Ta có:



$V_{A'MDK} = V_{K.A'MD} = \dfrac{1}{3}S_{A'MD}.x$

Mặt khác $V_{A'MDK} = V_{M.A'DK} = \dfrac{1}{3}S_{A'DK}.d(M, (A'DK)) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}a.\ \dfrac{1}{2}a)a = \dfrac{a^3}{12}$

Do đó $S_{A'MD}\ .\ x = \dfrac{a^3}{4}$. Hạ $DI \perp A'M \Rightarrow AI \perp A'M$

$\Rightarrow AI\ .\ A'M = AA'.d(M, AA') = a^2 \Rightarrow AI = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ nên

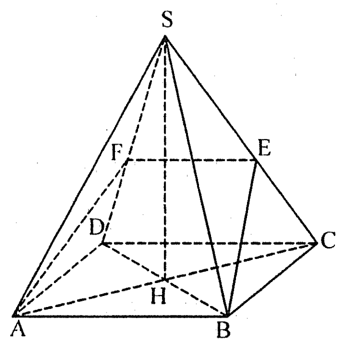
$DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{9a^2}{5} \Rightarrow DI = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

Nên $S_{A'MD} = \dfrac{1}{2}DI.A'M = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3a}{\sqrt{5}}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vậy $d(CK, A'D) = x = \dfrac{a}{3}$.

Bài toán 13. 26: Cho hình chóp tứ giác có tất cả các cạnh bằng 1. Một mặt phẳng qua một cạnh đáy, chia hình chóp làm 2 phần tương đương. Tính chu vi thiết diện.

Hướng dẫn giải



Hình chóp S.ABCD có các cạnh bằng 1 nên hình chiếu của S lên đáy là H cách đều A, B, C, D do đó hình thoi ABCD là hình vuông nên hình chóp là hình chóp đều.

Mặt phẳng qua cạnh AB cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang cân ABEF.

Đặt EF = x thì SE = SF = x

$AF^2 = BE^2 = x^2 + 1 - 2x.\cos 60^\circ = x^2 - x + 1$.

Theo giả thiết: $V_{S.ABCD} = 2.V_{S.ABEF} = 2(V_{SABF} + V_{SBEF})$

Mà $\dfrac{V_{SABF}}{V_{SABD}} = \dfrac{SF}{SD} = x$, $\dfrac{V_{SBEF}}{V_{SBCD}} = \dfrac{SE}{SC}.\dfrac{SF}{SD} = x^2$

nên $x^2 + x - 1 = 0$, chọn $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Chu vi thiết diện: $C = AB + EF + 2BE = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$.

Bài toán 13. 27: Cho điểm M nằm trong tứ diện ABCD.

Đặt $V_a = V_{MBCD}$, $V_b = V_{MACD}$, $V_c = V_{MABD}$, $V_d = V_{MABC}$.

Chứng minh: $V_a.\overrightarrow{MA} + V_b.\overrightarrow{MB} + V_c.\overrightarrow{MC} + V_d.\overrightarrow{MD} = \vec{0}$

Hướng dẫn Hướng dẫn giải:

Đặt $\vec{V} = V_a.\overrightarrow{MA} + V_b.\overrightarrow{MB} + V_c.\overrightarrow{MC} + V_d.\overrightarrow{MD}$

Gọi A' là giao điểm của AM và (BCD). Ta có:

$S_{A'CD}.\overrightarrow{A'B} + S_{A'BD}.\overrightarrow{A'C} + S_{A'BC}.\overrightarrow{A'D} = \vec{0}$

$\Rightarrow S_{A'CD}\overrightarrow{MB} + S_{A'BD}\overrightarrow{MC} + S_{A''BC}\overrightarrow{MD}$

$= (S_{A'CD} + S_{A'BD} + S_{A'BC}).\overrightarrow{MA'} = S_{BCD}.\overrightarrow{MA'}$

Mặt khác : $\dfrac{V_{MA'CD}}{V_{AA'DC}} = \dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{V_{MA'BD}}{V_{AA'BD}} \Rightarrow \dfrac{V_{MA'CD}}{V_{MA'BD}} = \dfrac{V_{AA'CD}}{V_{AA'BD}} = \dfrac{S_{A'DC}}{S_{A'BD}}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{A'DC}}{V_b} = \dfrac{S_{A'BD}}{V_c} = \dfrac{S_{A'BC}}{V_d}$

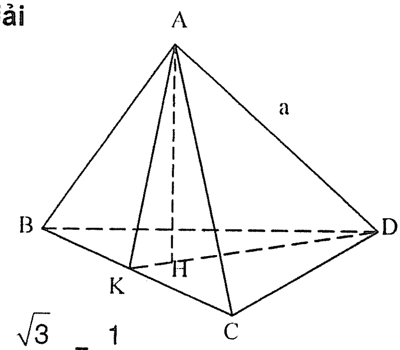
nên suy ra $V_b\overrightarrow{MB} + V_c\overrightarrow{MC} + V_d\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MA'}$

$\Rightarrow \vec{V}$ cùng phương $\overrightarrow{MA'}$

Tương tự $\vec{V}$ cùng phương $\overrightarrow{MB}$. Do đó $\vec{V} = \vec{0}$

Bài toán 13. 28: Chứng minh rằng một tứ diện thoả hai điều kiện: năm cạnh có độ dài nhỏ hơn 1, còn cạnh thứ sáu có độ dài tuỳ ý thì thể tích $V < \dfrac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải



Xét tứ diện ABCD có 5 cạnh bằng 1 và cạnh còn lại AD = a tuỳ ý.

Ta chứng minh thể tích của tứ diện này là $V_1 \le \dfrac{1}{8}$.

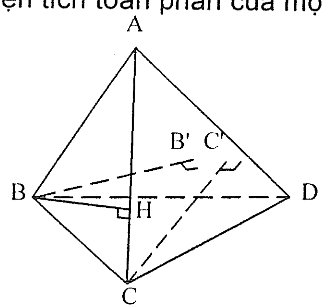
Thật vậy, hạ AH vuông góc với (BCD), AK vuông góc BC thì:

$V_1 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.AH \le \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.AK = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{8}$

Ta có tứ diện thoả đề bài có thể tích nhỏ hơn $V_1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 13. 29: Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh rằng $\dfrac{S^3}{V^2} > 288$.

Hướng dẫn giải



Gọi tứ diện đã cho là ABCD. Gọi diện tích các mặt ABC, ACD, ADB, BCD lần lượt là S_D, S_B, S_C, S_A.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (ACD) và C' là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (ABD).

Ta có: $V = \frac{1}{3}S_B.BB' = \frac{1}{3}S_C.CC' \Rightarrow V^2 = \frac{1}{9}S_BS_C.BB'.CC'$

Hạ BH $\perp$ AB. Ta có BB' $\le$ BH và CC' $\le$ AC.

Từ đó suy ra $V^2 \le \frac{2}{9}S_B.S_C.\frac{1}{2}AC.BH = \frac{2}{9}S_B.S_C.S_D$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $B\hat{A}C = C\hat{A}D = D\hat{A}B = 90^o$.

Lập luận tương tự ta được $V^2 \le \frac{2}{9}S_CS_BS_A$, $V^2 \le \frac{2}{9}S_DS_AS_B$ và $V^2 \le \frac{2}{9}S_AS_BS_C$. Do đó $V^8 \le (\frac{2}{9})^4 . (S_AS_BS_CS_D)^3$. Vì đẳng thức không đồng thời xảy ra nên $V^2 < \frac{2}{9}\left(\sqrt[4]{S_AS_BS_CS_D}\right)^3$

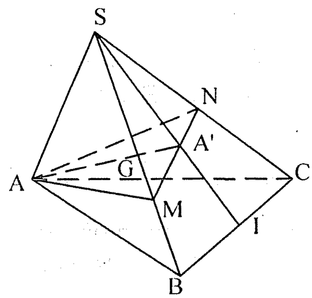
Áp dụng bất đẳng thức BCS ta được

$$\sqrt[4]{S_AS_BS_CS_D} \le \frac{S_A + S_B + S_C + S_D}{4} = \frac{S}{4}$$

Vậy $V^2 < \frac{S^3}{288} \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} > 288$.

Bài toán 13. 30: Cho tứ diện SABC và G là trọng tâm của tứ diện. Một mp(α) quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N. Gọi V là thể tích tứ diện SABC, V_1 là thể tích tứ diện SAMN. Chứng minh $\frac{4}{9} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi A' là trọng tâm ΔSBC, I là trung điểm BC

Ta có A,G, A' thẳng hàng, S, A', I thẳng hàng

Đặt $\frac{SM}{SB} = x$, $\frac{SN}{SC} = y$, với $0 \le x, y \le 1$.

Ta có : $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = xy$

Mặt khác : $\frac{S_{SMA'}}{S_{SIB}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SA'}{SI} \Rightarrow \frac{2S_{SMA'}}{S_{SCB}} = \frac{2x}{3}$

Tương tự: $\frac{S_{SNA'}}{S_{SCB}} = \frac{2y}{3} \Rightarrow \frac{S_{SMA'} + S_{SNA}}{S_{SCB}} = \frac{x+y}{3}$

Hay $\frac{S_{SMN}}{S_{SCB}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = xy = \frac{x+y}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$

Kết hợp ta có điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

Ta có: $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1}$. Xét $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

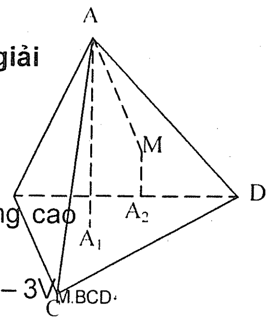
BBT:

x	1/2		2/3		1
f'(x)		–	0	+	
f(x)	1/2	↘	4/9	↗	1/2

Vậy $\frac{4}{9} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{1}{2}$.

Bài toán 13. 31: Cho tứ diện trực tâm ABCD có thể tích V (tứ diện có các cạnh đối đôi một vuông góc với nhau). Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong tứ diện ta có bất đẳng thức sau:

$$MA . S_{BCD} + MB . S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC} \geq 9V$$



Hướng dẫn giải

Hạ AA_1, MA_2 vuông góc với mp(BCD).

Ta có: $AM + MA_2 \geq AA_2 \geq AA_1$

$\Rightarrow \quad AM \geq AA_1 - MA_2$

Dấu bằng trong xảy ra khi M thuộc đường cao AA_1 của tứ diện.

Do đó $AM.S_{BCD} \geq AA_1.S_{BCD} - MA_2.S_{BCD} \geq 3V - 3V_{M.BCD}$.

Lý luận tương tự ta có:

$BM.S_{ACD} \geq 3V - 3V_{M.ACD}$; $MC.S_{ABD} \geq 3V - 3V_{M.ABD}$

$MD.S_{ABC} \geq 3V - 3V_{M.ABC}$.

Ta có $MA.S_{BCD} + MB.S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC}$

$\geq 12V - 3(V_{M.BCD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.ABC}) = 9V$

Dấu "=" xảy ra khi M đồng thời thuộc 4 đường cao của tứ diện ABCD nên M ≡ trực tâm H của tứ diện ABCD.

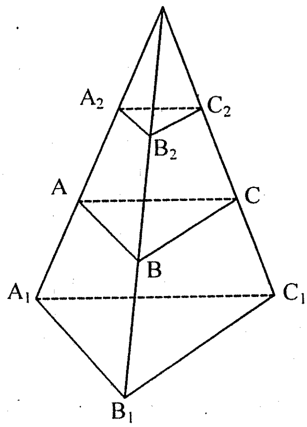
Bài toán 13. 32: Cho hình chóp cụt có chiều cao h, diện tích của thiết diện song song và cách đều 2 đáy là S. Chứng minh thể tích V thoả mãn: $Sh \leq V \leq \frac{4}{3}Sh$.

Hướng dẫn giải

Gọi S_1, S_2 là diện tích 2 đáy hình chóp cụt.

Ta chứng minh : $S = \left(\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$.

Gọi S là đỉnh hình chóp và k là chiều cao của hình chóp nhỏ, ta có tỉ diện tích:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{k+h}{k}\right)^2 = \left(1+\frac{h}{k}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 1+\frac{h}{k}$$

$$\frac{S}{S_2} = \left(\frac{k+\frac{h}{2}}{k}\right)^2 = \left(1+\frac{h}{2k}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S}{S_2}} = 1+\frac{h}{2k}$$

Do đó $\sqrt{\dfrac{S}{S_2}} - 1 = 2\left(\sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}} - 1\right)$

$\Rightarrow 4S = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

Thể tích hình chóp cụt: $V = \dfrac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h$

$$= \frac{1}{3}\left[(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2})^2 - \sqrt{S_1S_2}\right]h \le \frac{1}{3}(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2})^2h = \frac{4}{3}Sh$$

Và $V = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{2}(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_2})^2 + \dfrac{1}{2}(S_1+S_2)\right]h$.

$$\ge \frac{1}{3}\left[2S + \frac{1}{4}(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2\right]h = \frac{1}{3}.3S.h = Sh$$

Vậy $Sh \le V \le \dfrac{4}{3}Sh$.

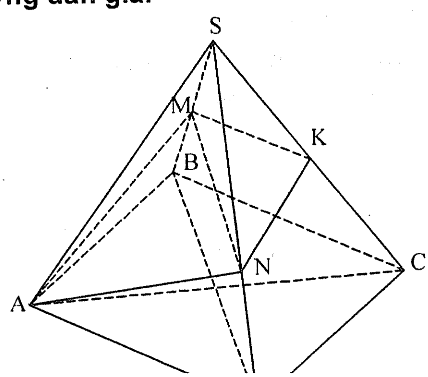
Bài toán 13. 33: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt SB,SD tại M, N. Đặt $V_1 = V_{SAMNK}$ và $V = V_{SABCD}$. Chứng minh: $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \dfrac{SM}{SB}$; $y = \dfrac{SN}{SD}$

Ta có $V_1 = V_{SAMK} + V_{SANK}$

$$\frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SANK} = \frac{xV}{4}$$



Tương tự $V_{S.ANK} = \dfrac{yV}{4}$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{V}{4}(x + y)$

Mà $V_1 = V_{SAMN} + V_{SMNK} = \dfrac{xyV}{2} + \dfrac{xyV}{4} = \dfrac{3xyV}{4}$

Do đó $x + y = 3xy \Rightarrow y = \dfrac{x}{3x-1}, x > \dfrac{1}{3}$

Vì $y = \dfrac{SN}{SD} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{4}xy = \dfrac{3x^2}{4(3x-1)}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

BBT:

x	1/2		2/3		1
f'		–	0	+	
f	3/8	↘	1/3	↗	3/8

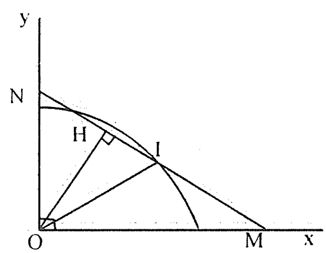
Vậy $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{8}$.

Bài toán 13. 34: Cho góc vuông xÔy. Trên các tia Ox và Oy, lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho MN = a, với a là một độ dài cho trước.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

b) Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O, lấy một điểm A cố định. Hãy xác định vị trí của M và N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) $OI = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{a}{2}$ và I thuộc góc vuông xÔy nên:

Tập hợp các điểm I là phần của đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{a}{2}$ nằm trong góc xÔy.

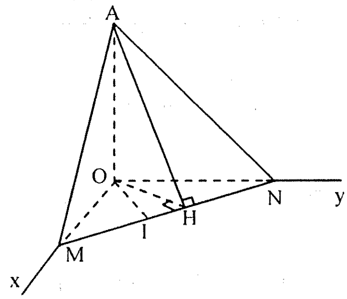
b) Dựng $AH \perp MN$ thì theo định lí ba đường vuông góc $OH \perp MN$.

Ta có: $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}a.AH$.

Diện tích tam giác AMN lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Trong tam giác vuông OHI ta luôn luôn có:

$OH \le OI \Rightarrow OH \le \frac{a}{2}$



Giá trị lớn nhất của OH là $\frac{a}{2}$ giá trị này đạt được khi và chỉ khi H trùng với I, khi đó OMN là tam giác vuông cân.

Vậy diện tích lớn nhất khi: $OM = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

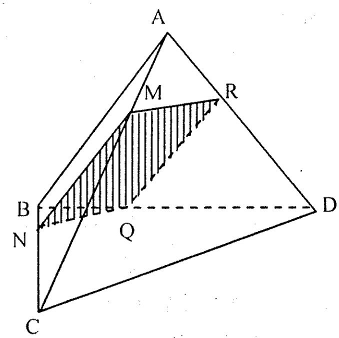
Bài toán 13. 35: Cho tứ diện ABCD trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng α. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh AC, đặt AM = x (0 < x < AC). Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD. Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Thiết diện là hình bình hành MNQR.

$S_{MNQR} = NM.NQ.\sin MNQ$

Do MN // AB, NQ // CD nên góc giữa MN và NQ bằng góc giữa AB và CD nên $\sin MNQ = \sin\alpha$.



Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \frac{AB}{AC}(AC - x)$

$NQ = MR$, $\frac{MR}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow MR = \frac{CD}{AC}x$

nên $S_{MNQR} = \frac{AB.CD}{AC^2}(AC - x)x.\sin\alpha \le \frac{1}{4}AB.CD.\sin\alpha$

Từ đó S_{MNQR} max $\Leftrightarrow AC - x = x \Leftrightarrow x = \frac{AC}{2}$.

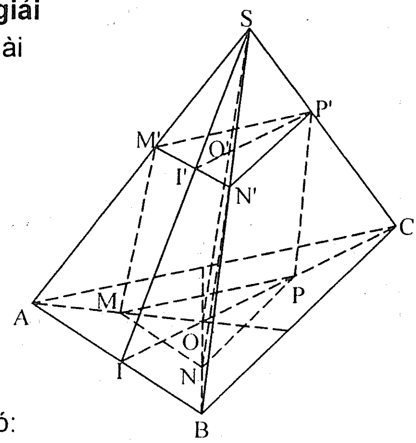
Vậy khi M là trung điểm của AC thì diện tích lớn nhất.

Bài toán 13. 36: Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy, SO = h. Một lăng trụ tam giác đều có đáy dưới nằm trên đáy hình chóp, ba đỉnh của đáy nằm trên ba cạnh bên hình chóp.

a) Tính cạnh đáy lăng trụ khi mặt bên là hình vuông.

b) Tính thể tích lớn nhất của lăng trụ khi a, h không đổi.

Hướng dẫn giải



a) Gọi MNP.M'N'P' là lăng trụ, x là chiều dài cạnh đáy.

I trung điểm của AB, SI $\cap$ M'N' = I'

Ta có CI = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, P'I' = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{I'P'}{IC} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{SO - SO'}{SO} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow OO' = \frac{h}{a}(a - x)$$

Khi lăng trụ có mặt bên là hình vuông ta có:

$$OO' = x \Leftrightarrow \frac{h}{a}(a - x) = x \Leftrightarrow ah - hx = ax \Leftrightarrow x = \frac{ah}{a + h}.$$

b) Thể tích lăng trụ: $V = B.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{h}{a}(a - x) = \frac{h\sqrt{3}}{4a}x^2(a - x)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$x^2(a - x) = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}(a - x) \le 4.\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + a - x}{3} = \frac{4a^3}{27}$$

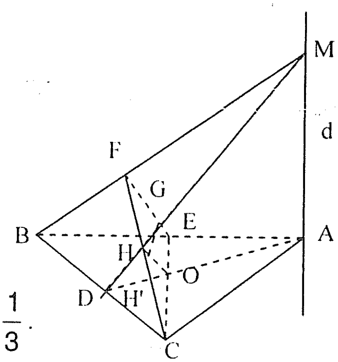
Vậy $V_{max} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{27}$ khi $x = \frac{2}{3}a$.

Bài toán 13. 37: Cho tam giác ABC, AB = AC. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A.

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Gọi D là trung điểm của BC.

Ta có: MB = MC. Do đó MD $\perp$ BC và trọng tâm G của tam giác MBC nằm trên MD thoả mãn hệ thức

$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}$. Vậy G là ảnh của

M trong phép vị tự tâm D, tỉ số vị tự $\frac{1}{3}$.

Vậy quỹ tích các trọng tâm G của tam giác MBC là đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G' của tam giác ABC.

Hạ CD ⊥ AB, CF ⊥ MB ta có H = DM ∩ CF là trực tâm của tam giác MBC, O = DA ∩ CE là trực tâm của tam giác ABC. Do CE ⊥ AB và CE ⊥ MA nên CE ⊥ (MAB). Vì CF ⊥ MB nên EF ⊥ MB. Do đó MB ⊥ (CEF), ta suy ra MB ⊥ OH. Chứng minh tương tự ta có MC ⊥ OH. Từ đó ta suy ra OH ⊥ (MBC) và DHO = 90°. Vậy quỹ tích trực tâm H của tam giác MBC là đường tròn đường kính DO nằm trong mặt phẳng (D, d).

b) Gọi HH' là chiều cao của tứ diện OHBC, ta có H' thuộc DO.

Hình chóp này có đáy OBC cố định nên V_{OHBC} lớn nhất khi và chỉ khi HH' lớn nhất. Điểm H chạy trên đường tròn đường kính OD nên HH' lớn nhất khi $HH' = \frac{1}{2}DO$ nghĩa là DHH' là tam giác vuông cân tại H', suy ra tam giác DMA lúc đó vuông cân tại A.

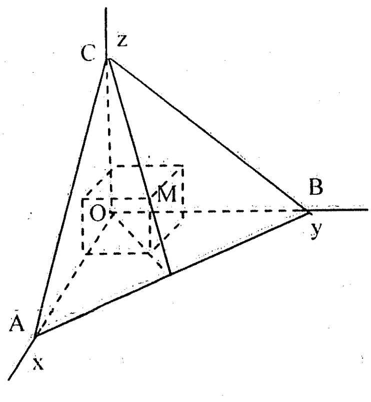
Vậy tứ diện OHBC có thể tích đạt giá trị lớn nhất, cần chọn M trên d (về hai phía của A) sao cho AM = AD.

Bài toán 13. 38: Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một tạo tam diện Oxyz. Điểm M cố định năm trong góc tam diện. Một mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ M đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) lần lượt là a, b, c. Tính OA, OB, OC theo a, b, c để tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOCA}$

nên $\frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}OA.OB.c + \frac{1}{6}OB.OC.a + \frac{1}{6}OC.OA.b$



Do đó: $1 = \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC}$

Ta có: $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC$. Điểm M cố định tức là các số a, b, c không đổi. Do đó V nhỏ nhất ⇔ OA.OB.OC nhỏ nhất.

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$1 = \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{OA.OB.OC}}$$

⇔ $OA.OB.OC \geq 27abc$.

OA.OB.OC nhỏ nhất ⇔ $\frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC}$

Vậy: V nhỏ nhất ⇔ OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c.

Bài toán 13. 39: Cho tứ diện ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng đi qua trọng tâm M của tứ diện cắt DA, DB, DC tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = V_{AA'B'C'} + V_{BA'B'C'} + V_{CA'B'C'}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $DA_1 = (DAM) \cap (DBC)$, $DB_1 = (DBM) \cap (DAC)$

$DC_1 = (DCM) \cap (DAB)$. $DM \cap (ABC) = H$ là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DH}$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DA'}.\overrightarrow{DA'} + \frac{DB}{DB'}.\overrightarrow{DB'} + \frac{DC}{DC'}.\overrightarrow{DC'} = 3.\frac{4}{3}\overrightarrow{DM} = 4\overrightarrow{DM}$$

Do A', B', C', M đồng phẳng nên $4 = \frac{DA}{DA'} + \frac{DB}{DB'} + \frac{DC}{DC'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{DA.DB.DC}{DA'.DB'.DC'}}$

$$\Rightarrow \frac{V_{D.A'B'C'}}{V_{D.ABC}} = \frac{DA'.DB'.DC'}{DA.DB.DC} \geq \frac{27}{64}$$

$$T = V_{A.A'B'C'} + V_{B.A'B'C'} + V_{C.A'B'C'} = V_{D.A'B'C'}\left(\frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'}\right)$$

$$\text{Mà } 4 = \frac{DA}{DA'} + \frac{DB}{DB'} + \frac{DC}{DC'} = \frac{DA' + AA'}{DA'} + \frac{DB' + BB'}{DB'} + \frac{DC' + CC'}{DC'}$$

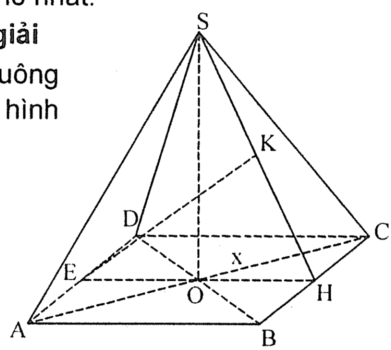
$$= \frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'} + 3 \Rightarrow \frac{AA'}{DA'} + \frac{BB'}{DB'} + \frac{CC'}{DC'} = 1$$

Do đó $T = V_{D.A'B'C'} \geq \frac{27}{64} V_{D.ABC}$.

Vậy $\min T = \frac{27}{64} V_{D.ABC}$ khi $\frac{AA'}{DA'} = \frac{BB'}{DB'} = \frac{CC'}{DC'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A'B'C') \parallel (ABC)$.

Bài toán 13. 40: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ đỉnh A đến mp(SBC) bằng 2a. Với giá trị nào của góc giữa mặt bên và mặt đáy của khối chóp thì thể tích của khối chóp nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Hạ $SO \perp (ABCD)$ thì O là tâm hình vuông ABCD. Gọi EH là đường trung bình của hình vuông ABCD.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

$\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(E, (SBC))$.

Hạ $EK \perp SH$, ta có: $EK \perp (SBC)$

$\Rightarrow EK = d(A, (SBC)) = 2a$.

Ta có $BC \perp SH$, $SB \perp OH$

$\Rightarrow$ SHO là góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng đáy.

Đặt SHO = x. Khi đó:

$$EH = \frac{2a}{\sin x},\ OH = \frac{a}{\sin x},\ SO = \frac{a}{\sin x}\tan x = \frac{a}{\cos x}$$

Vậy $S_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{4a^3}{3\cos x \sin^2 x}$.

Do đó $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ y = cosx.$\sin^2$x đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $y' = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = \sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= \sin x(2 - 3\sin^2 x) = 3\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin x\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \alpha.$$

BBT:

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy $S_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi x = α.

Bài toán 13. 41: Trên cạnh AD của hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a, lấy điểm M sao cho: AM = x ($0 \le x \le a$). Trên nửa đường thẳng Az vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông tại điểm A, lấy điểm S sao cho SA = y (y > 0).

a) Chứng minh rằng (SAB) ⊥ (SBC) và tính khoảng cách từ điểm M đến mp(SAC).Tính thể tích khối chóp S.ABCM theo a, y và x.

b) Biết rằng $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.ABCM.

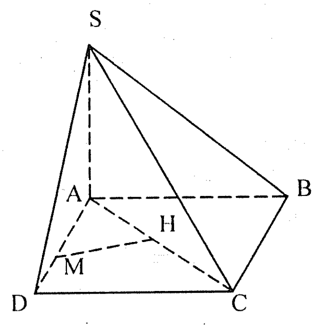
Hướng dẫn giải

a) Ta có BC ⊥ AB, SA nên BC ⊥ (SAB).

Do đó (SAB) ⊥ (SBC).

Vì (SAC) ⊥ (ABCD) theo giao tuyến AC nên hạ MH ⊥ AC thì MH ⊥ (SAC).

Vậy MH là khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SAC).



Trong tam giác vuông AMH có:

$MH = x.\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}x}{2}$

Hình chóp S.ABCM có đường cao SA = y và có đáy là hình thang vuông nên diện tích đáy là $S = \dfrac{1}{2}a(a + x)$

Thể tích khối chóp S.ABCM là:$V = \dfrac{1}{3}y\,.\,\dfrac{1}{2}a(a + x) = \dfrac{1}{6}ya(a + x)$.

b) Theo giả thiết $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$ nên

$V^2 = \dfrac{1}{36}a^2(a^2 - x^2)(x + a)^2 = \dfrac{1}{36}a^2(a - x)(a + x)^3.$

Đặt f(x) = V^2 với $0 \le x \le a$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{a^2}{36}(a+x)^3 + \frac{a^3}{36}3(a-x)(a+x)^2 = \frac{a^2(a+x)^2(2a-4x)}{36}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

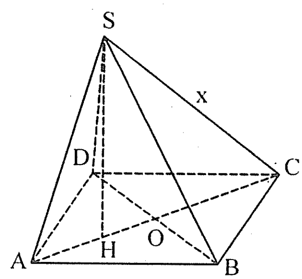
BBT:

x	0		$\frac{a}{2}$		a
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Vậy f(x) đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{a}{2}$, khi đó thể tích của khối chóp S.ABCM đạt giá trị lớn nhất là: $V = \sqrt{\max f(x)} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Bài toán 13. 42: Cho hình chóp S.ABCD có bảy cạnh bằng 1 và cạnh bên SC = x. Định x để thể tích khối chóp là lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Đáy ABCD có 4 cạnh bằng 1 nên là 1 hình thoi $\Rightarrow AC \perp BC$.

Ba tam giác ABD, CBD, BSD có chung cạnh BD, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1 nên bằng nhau, các trung tuyến AO,SO và CO bằng nhau.

Suy ra tam giác ASC vuông tại S ta được $AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Gọi H là hình chiếu đỉnh S trên đáy (ABCD).

Do SA = SB = SD = 1 nên HA = HB = HD $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD $\Rightarrow H \in AC \Rightarrow$ SH là đường cao của tam giác vuông ASC.

Ta có SH.AC = SA.SC $\Rightarrow SH = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}\right)^2 = \frac{3 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2}$$

Điều kiện $x^2 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3}$

Ta có $S_{ABCD} = AC.OB = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+1)(3-x^2)}$

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}\ .\ SH = \frac{1}{6}x\sqrt{3-x^2}$

Ta có thể dùng đạo hàm hay bất đẳng thức Côsi:

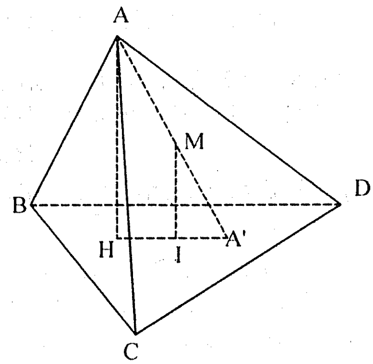
$$V = \frac{1}{6}\sqrt{x^2(3-x^2)} \le \frac{1}{6}.\frac{x^2+3-x^2}{2} = \frac{1}{4}$$

Dấu "=" khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài toán 13. 43: Cho điểm M trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt mặt đối diện tại A', B',C' D' tương ứng. Tìm GTNN của $T = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + \frac{MD}{MD'}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, M lên mặt phẳng (BCD). Ta có H, I, A' thẳng hàng. Gọi V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của tứ diện ABCD và 4 hình chóp đỉnh M với các đáy là các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Ta có:



$$\frac{AA'}{MA'} = \frac{AH}{MI} = \frac{\frac{1}{3}AH.S_{BCD}}{\frac{1}{3}MI.S_{BCD}} = \frac{V}{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1$$

Tương tự $\frac{MB}{MB'} = \frac{V}{V_2} - 1, \frac{MC}{MC'} = \frac{V}{V_3} - 1, \frac{MD}{MD'} = \frac{V}{V_4} - 1$

$$\Rightarrow T = V\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4}\right) - 4$$

$$= (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4}\right) - 4$$

$\ge 16 - 4 = 12$.

Vậy min$T = 12 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm tứ diện ABCD.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 13. 1: Tam giác ABC có BC = 2a và đường cao AD = a. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Gọi H là hình chiếu của A trên EF. Chứng minh AH nằm trên (SAD). Hãy cho biết vị trí của điểm H đối với hai điểm S và D.

b) Tính diện tích của tam giác AEF.

Hướng dẫn

a) Chứng minh BC vuông góc với (SAD).

Kết quả H là trung điểm của SD.

b) Kết quả $S_{AEF} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 13. 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60^o.

Hướng dẫn

Gọi O là tâm hình vuông ABCD, hạ OH vuông góc với SC.

Kết quả x = a.

Bài tập 13. 3: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện và thể tích của hình tứ diện đều đó.

Hướng dẫn

Khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều là độ dài đoạn nối 2 trung điểm.Kết quả $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bài tập 13. 4: Cho khối tứ diện ABCD có thể tích V. Tính thể tích khối đa diện có 6 đỉnh là 6 trung điểm của 6 cạnh của tứ diện ABCD.

Hướng dẫn

So sánh thể tích. Kết quả $\dfrac{1}{2}V$.

Bài tập 13. 5: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AB = b. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm S sao cho SA = h (h > 0). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

a) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SI và AB.

b) Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp BMIJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Dùng AC song song với (SIJ). Kết quả $\dfrac{bh}{\sqrt{b^2 + 4^2}}$

b) Kết quả $\frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{8}$.

Bài tập 13. 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Biết trung đoạn bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ, tính thể tích của khối chóp.

Hướng dẫn

Tính cạnh đáy a bằng cách lập phương trình.

Kết quả $\frac{4\sqrt{2}d^3\tan\varphi}{3\sqrt{(2\tan^2\varphi+1)^3}}$.

Bài tập 13. 7: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Hãy tính thể tích tứ diện ACA'B' biết tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a, AA' = b và AA' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60^o.

Hướng dẫn

Xác định hình chiếu của A' lên mp(ABC). Kết quả $V_{ACA'B'} = \frac{1}{8}a^2b$

Bài tập 13. 8: Cho hình chóp tam giác SABC có SA = x, BC = y, các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích hình chóp theo x, y. Với x, y nào thì thể tích hình chóp lớn nhất?

Hướng dẫn

Gọi M trung điểm BC thì thể tích hình chóp chia đôi bằng nhau bới mp(SAM).

Kết quả $V = \frac{xy}{6}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4}}$, thể tích hình chóp lớn nhất khi $x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 13. 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B, AB = a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SB, SC lần lượt tại H, K. Tính theo a thể tích khối tứ diện SAHK.

Hướng dẫn

Dùng tỉ số thể tích. Kết quả $V_{SAHK} = \frac{8a^3}{45}$.

Bài tập 13. 10: Cho tứ diện ABCD có $\widehat{BAD} = 90^0$, $\widehat{CAD} = \widehat{ACB} = 60^0$, và AB = AC = AD = a. Tính thể tích tứ diện ABCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

Hướng dẫn

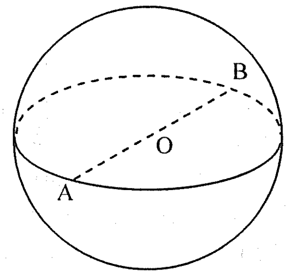
Xác định dạng tam giác BCD suy ra hình chiếu lên (BCD).

Kết quả $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ và $d(AC; BD) = \frac{a}{2}$

Chuyên đề 14: KHỐI TRÒN XOAY

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Mặt cầu và khối cầu



Cho mặt cầu S(O; R) được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc biết một đường kính AB của nó.

– Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

– Thể tích khối cầu (hình cầu): $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

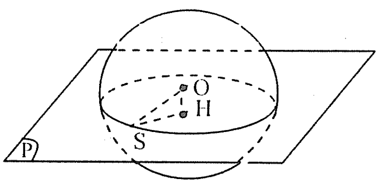
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

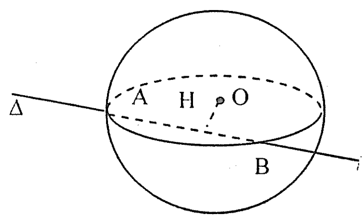
Cho mặt cầu S(O; R) và mp(P). Gọi OH = d là khoảng cách từ O đến (P) thì:

– Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.Đặt biệt, khi d = 0 thì mp(P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có bán kính R, gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

– Nếu d = R, mp(P) và mặt cầu S(O; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc mp(P) là tiếp diện của mặt cầu tại tiếp điểm H.

– Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.





Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và d = OH là khoảng cách từ O tới Δ.

– Nếu d < R: đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm

– Nếu d = R, đường thẳng Δ và mặt cầu S(O;R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc Δ là tiếp tuyến của mặt cầu tại tiếp điểm H.

– Nếu d > R: đường thẳng không có điểm chung với mặt cầu.

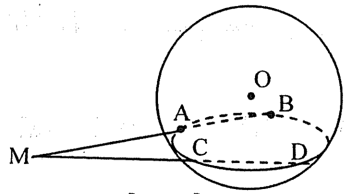
Định lý: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; R) thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó

a) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

b) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

Phương tích:

Cho mặt cầu S(O; R) và điểm M. Qua điểm M, vẽ 2 cát tuyến cắt mặt cầu tại A, B và C, D thì



$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} . \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$.

Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

– Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp.
– Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là lăng trụ đứng và đáy của hình lăng trụ đó có đường tròn ngoại tiếp.

Xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp

– Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn (C), gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1 thì $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.
– Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn. Gọi I, I' là hai tâm của đường tròn ngoại tiếp 2 đáy thì II' là trục của 2 đường tròn. Gọi O là trung điểm của II' thì O cách đều các đỉnh nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

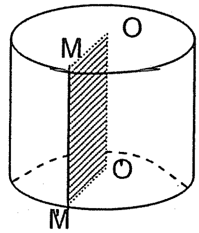
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện: Mặt cầu tiếp xúc với mọi mặt của hình đa diện gọi là mặt cầu nội tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là ngoại tiếp mặt cầu đó.

Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp:

Tìm điểm I cách đều tất cả các mặt của khối đa diện. Với 2 mặt song song thì I thuộc mặt phẳng song song cách đều, với 2 mặt phẳng cắt nhau thì I thuộc mặt phân giác (chứa giao tuyến và qua một đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng lần lượt thuộc 2 mặt phẳng, vuông góc với giao tuyến).

Mặt trụ, hình trụ, khối trụ

Mặt trụ là tập hợp tất cả các điểm M cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi.



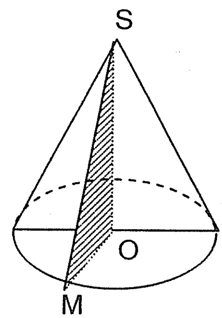
Hình trụ, khối trụ:

– Trục OO′. Đường sinh MM′ = l
– Bán kính đáy R và chiều cao h thì $h = l = OO'$, $R = OM$
– Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rl$
– Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$
– Thiết diện song song với trục hình trụ là một hình chữ nhật, tạo bởi 2 đường sinh song song và bằng nhau. Đặc biệt, thiết diện qua trục hình trụ là một hình chữ nhật có 2 kích thước là đường kính đáy và chiều cao hình trụ.

Mặt nón, hình nón, khối nón

Mặt nón sinh ra khi quay đường thẳng l cắt Δ cố định và hợp với Δ góc α không đổi, quanh Δ. Mặt nón có trục Δ và góc ở đỉnh là 2α.

Hình nón, khối nón:



- Trục SO. Đường sinh SM = ℓ
- Góc ở đỉnh là 2α.
- Bán kính đáy R và chiều cao h thì:

  $\ell^2 = h^2 + R^2$
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R\ell$
- Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
- Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón thì cắt mặt nón theo 2 đường sinh SA, SB bằng nhau tạo thành tam giác cân SAB. Đặc biệt, thiết diện đi qua trục hình nón thì là tam giác cân SAB với SA, SB là 2 đường sinh bằng nhau và AB là đường kính đáy.

Chú ý: Phương pháp đường sinh.

2. CÁC BÀI TOÁN

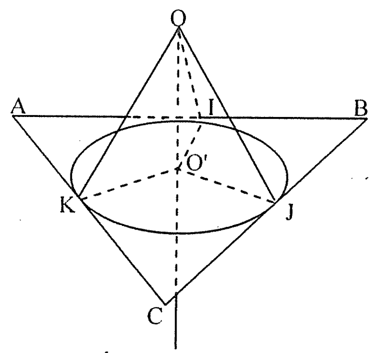
Bài toán 14. 1: Tìm tập hợp tâm các mặt cầu .

a) Đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C cho trước

b) Tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác ABC cho trước.

Hướng dẫn giải

a) I là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi IA = IB = IC. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



b) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt tại các điểm I, J, K khi và chỉ khi $OI \perp AB$, $OJ \perp BC$, $OK \perp CA$, OI = OJ = OK. Gọi O' là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC) thì các điều kiện là: $O'I \perp AB$, $O'J \perp BC$, $O'K \perp CA$, O'I = O'J = O'K, hay O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vậy tập hợp các tâm O là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

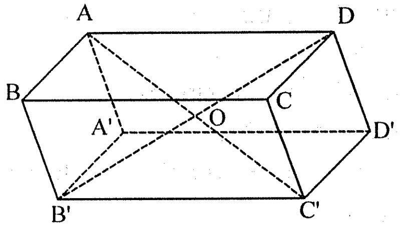
Bài toán 14. 2: Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới 8 đỉnh của một hình hộp cho trước bằng k^2 cho trước.

Hướng dẫn giải

Giả sử ba kích thước của hình hộp là AB = a, BC = b, CC' = c thì:

$$AC'^2 + BD'^2 + CA'^2 + DB'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Gọi O là tâm của hình hộp, ta có:



$$MO^2 = \frac{MA^2 + MC'^2}{2} - \frac{AC'^2}{4}$$

$$MO^2 = \frac{MB^2 + MD'^2}{2} - \frac{BD'^2}{4}$$

$$MO^2 = \frac{MC^2 + MA'^2}{2} - \frac{CA'^2}{4};$$

$$MO^2 = \frac{MD^2 + MB'^2}{2} - \frac{DB'^2}{4}$$

Suy ra $4MO^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MA'^2 + MB'^2$

$+ MC'^2 + MD'^2) - (a^2 + b^2 + c^2)$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MA'^2 + MB'^2$

$+ MC'^2 + MD'^2 = k^2$.

$\Leftrightarrow 4MO^2 = \frac{k^2}{2} - (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}{8} = k'$.

Vậy: Nếu k' > 0 thì tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{k^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}{8}}.$$

Nếu k' = 0 thì điểm M trùng với O. Nếu k' <0 thì tập hợp là rỗng.

Bài toán 14. 3: Cho tứ diện ABCD. Từ một điểm M vẽ 4 cát tuyến MAA', MBB', MCC', MDD' với mặt cầu nội tiếp. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{\overline{MA'}}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{\overline{MB'}}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{\overline{MC'}}} + \frac{\overline{MD}}{\overline{\overline{MD'}}} = 4$$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Gọi mặt cầu ngoại tiếp S(O; R). Ta có:

$$\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC} = \overline{MD}.\overline{MD'} = MO^2 - R^2$$

Do đó: $\frac{\overline{MA}}{\overline{\overline{MA'}}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{\overline{MB'}}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{\overline{MC'}}} + \frac{\overline{MD}}{\overline{\overline{MD'}}} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{MO^2 - R^2}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = 4$

$\Leftrightarrow 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(MO^2 - R^2)$

$\Leftrightarrow 4(MO^2 - MG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 4R^2 = k$ (*)

Gọi I là trung điểm OG, H là hình chiếu M lên OG thì:

$(*) \Leftrightarrow 4.2.\overline{OG}.\overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \dfrac{k}{8\overline{OG}}$

Vậy H cố định nên tập hợp các điểm M là mặt phẳng vuông góc với OG tại H.

Bài toán 14. 4: Cho P là một điểm cố định nằm bên trong một mặt cầu cho trước. Ba dây PA, PB, PC vuông góc nhau từng đôi một. Gọi Q là đầu mút thứ hai của đường chéo PQ của hình hộp chữ nhật mà các cạnh là PA, PB, PC. Tìm quỹ tích các điểm Q khi ba điểm A, B, C chạy trên mặt cầu.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$

Do đó $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PG}$ nên quỹ tích của Q là ảnh của quỹ tích của G qua phép vị tự tâm P tỉ số bằng 3. Ta có:

$9PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}$

nên $9PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$. Mặt khác:

$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{PG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Tương tự: $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Do đó: $6PG^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 \Leftrightarrow 3R^2 = 3OG^2 + 6PG^2$

Từ đó $R^2 = OG^2 + 2PG^2 \Rightarrow OG \le R$

Chọn điểm I cố định: $\overrightarrow{PI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PO}$ thì $2\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IO} = \vec{0}$. Khi đó:

$OG^2 + 2PG^2 =$

$= OI^2 + IG^2 + 2PI^2 + 2IG^2 + 2\overrightarrow{IG}(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{PI})$

$= OI^2 + 2PI^2 + 3IG^2$. Vậy $IG^2 = \dfrac{R^2 - OI^2 - 2PI^2}{3} > 0$

Do đó điểm G chạy trên mặt cầu tâm I bán kính $r = \sqrt{\dfrac{R^2 - OI^2 - 2PI^2}{3}}$.

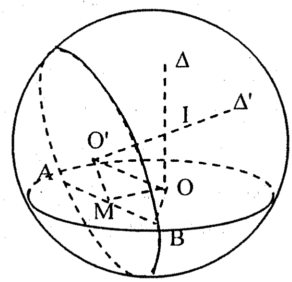
Suy ra quỹ tích của Q.

Bài toán 14. 5: Cho 2 đường tròn (O; r), (O', r') cắt nhau tại A, B và lần lượt nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt (P), (P').

a) Chứng minh mặt cầu (S) đi qua 2 đường tròn đó

b) Cho r = 5, r' = $\sqrt{10}$, OO' = $\sqrt{21}$, AB = 6. Tính bán kính của (S).

Hướng dẫn giải:



a) Gọi M là trung điểm của AB thì OM ⊥ AB, O'M ⊥ AB.
Từ đó mp(OMO') là mp trung trực của AB.
Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn C(O; r) và C'(O'; r') thì Δ và Δ' cùng vuông góc với AB nên Δ, Δ' cùng nằm trong mp(OMO') và cắt nhau tại I.
Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R = IB là mặt cầu phải tìm.

b) Ta có: OM = 4, O'M = 1. Xét tam giác OMO':

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M\cos \widehat{OMO'} \Rightarrow \cos \widehat{OMO'} = -\frac{1}{2}$$

Nên: $\widehat{OMO'} = 120^0$ và $\widehat{OIO'} = 60^0$

Ta có: $\dfrac{OO'}{\sin \widehat{OIO'}} = 2R = IM \Rightarrow IM = 2\sqrt{7}$

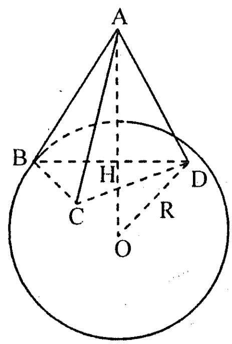
Nên $R^2 = IB^2 = IM^2 + MB^2 = 37$. Vậy $R = \sqrt{37}$.

Bài toán 14. 6: Cho một tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại B, C và D. Một mặt cầu (S') có bán kính R' < R, tiếp xúc với mặt cầu (S) và cũng nhận các đường thẳng AD, AB, AC làm các tiếp tuyến.

a) Tính bán kính R của mặt cầu (S).

b) Tính thể tích khối cầu (S').

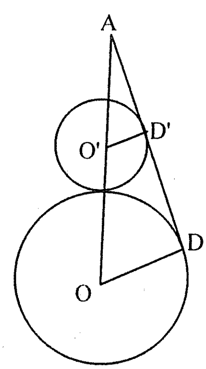
Hướng dẫn giải



a) Gọi O là tâm của mặt cầu (S) thì OB = OC = OD = R và OBA, OCA, ODA là những tam giác vuông tại các đỉnh B, C, D. Gọi H là giao điểm của AO và mp(BCD) thì H là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $R = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$



b) Gọi O' là tâm mặt cầu (S') và D' là điểm tiếp xúc của (S') với AD, cắt cả hai mặt cầu bởi mặt phẳng (ADO) ta được hình gồm hai đường tròn tâm O, tâm O' tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với AD tại D và D'.

Ta có $\dfrac{O'D'}{OD} = \dfrac{AO'}{AO} \Rightarrow \dfrac{R'}{R} = \dfrac{AO - R - R'}{AO}$

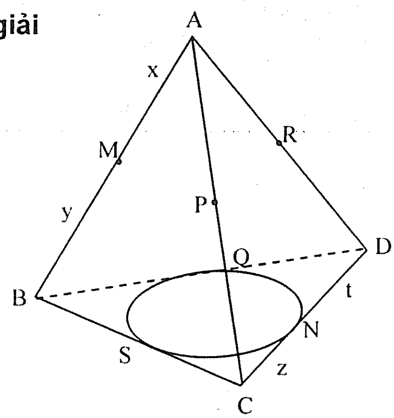
Mà AO = $\sqrt{R^2 + a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó R' = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})$

Vậy: V' = $\dfrac{4}{3}\pi R'^3 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})^3$ (đvtt).

Bài toán 14. 7: Chứng minh có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ diện ABCD khi và chỉ khi: AB + CD = AC + BD = AD + BC.

Hướng dẫn giải



Giả sử có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện ABCD tại các điểm M, N, P, Q, R, S như hình vẽ thì AM = AP = AR = x, BM = BS = BQ = y, CN = CP = CS = z, DN = DQ = DR = t. Do đó, AB + CD = AC + BD = AD + BC = x + y + z + t.

Đảo lại, ta xác định các tiếp điểm từ hệ
x + y = AB ; y + z = BC; z + t = CD
t + x = DA; x + z = AC; y + t = BD.
Hướng dẫn giải ra, ta được:

$x = \dfrac{1}{3}[AB + AC + AD - \dfrac{1}{2}(BC + CD + DB)]$

$y = \dfrac{1}{3}[BA + BC + AD - \dfrac{1}{2}(AC + CD + DA)]$

$z = \dfrac{1}{3}[CA + CB + CD - \dfrac{1}{2}(AB + BD + DA)]$

$t = \dfrac{1}{3}[DA + DB + DC - \dfrac{1}{2}(AB + BC + CA)]$

Nhận xét rằng trục của các đường tròn nội tiếp các mặt đáy (M, N, P, Q, R, S cũng là các tiếp điểm) đồng qui tại điểm J. Mặt cầu tâm J đi qua các điểm M, N, P, Q, R, S là mặt cầu cần tìm.

Bài toán 14. 8: Cho 4 hình cầu có cùng bán kính r và chúng được sắp xếp sao cho đôi một tiếp xúc với nhau. Ta dựng 4 mặt phẳng sao cho mỗi mặt phẳng đều tiếp xúc với ba hình cầu và không cắt hình cầu còn lại. Bốn mặt phẳng đó tạo nên một tứ diện đều. Hãy tính thể tích của khối tứ diện đó theo r.

Hướng dẫn giải

Gọi M_1, M_2, M_3 và M_4 là tâm của 4 hình cầu đã cho thì đó là 4 đỉnh của một tứ diện đều có cạnh bằng 2r và do đó có chiều cao $h_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$ và thể tích là

$V_1 = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của tứ diện đều $M_1M_2M_3M_4$. Ta có tứ diện đã cho đồng dạng với tứ diện $M_1M_2M_3M_4$ hơn nữa O chính là tâm đồng dạng. Ta gọi các đỉnh của tứ diện đã cho là A_1, A_2, A_3 và A_4 sao cho trong phép đồng dạng tỉ k biến M_i thành A_i (i = 1, 2, 3, 4).

Ta có hai mặt phẳng ($M_2M_3M_4$) và ($A_2A_3A_4$) song song với nhau và có khoảng cách đúng bằng bán kính r. Gọi G là tâm của mặt ($M_1M_2M_3$) và G' là tâm của mặt ($A_1A_2A_3$) thì:

$OG = \frac{1}{4}h_1 = \frac{r\sqrt{6}}{6}$; $OG' = OG + r = r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{r}\right)$

Nên $k = \frac{OG'}{OG} = 1 + \sqrt{6}$. Vậy thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là:

$V = V_1.k^3 = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3$.

Bài toán 14. 9: Cạnh đáy và đường cao của hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F' lần lượt bằng a và h. Chứng minh rằng sáu mặt phẳng (AB'F'), (CD'B'), (EF'D'), (D'EC), (F'AE), (B'CA) cùng tiếp xúc với một mặt cầu, xác định tâm và bán kính.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình lăng trụ. Mặt phẳng (AB'F') tiếp xúc với mặt cầu tâm O và mặt cầu (S) này được xác định duy nhất. Sáu mặt phẳng đều cách đều O suy ra rằng cả sáu mặt phẳng đều tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O.

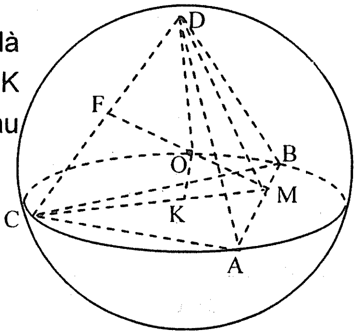
Gọi P là trung điểm cạnh AE, P' là trung điểm cạnh A'E'; Q là trung điểm cạnh PF', và gọi R là hình chiếu của O lên đường thẳng PF', thì các điểm P, P', Q, R, O, F' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có $F'P' = \frac{a}{2}$ và $QO = \frac{3a}{4}$. Vì QO // F'P' nên $\widehat{RQO} = \widehat{PP'F'}$. Ngoài ra $\widehat{ORQ} = \widehat{PP'F'} = 90^\circ$ nên suy ra hai tam giác ORQ và PP'F' đồng dạng nhau. Do đó, bán kính của (S) là:

$$OR = PP'.\frac{OQ}{PF'} = h.\frac{\frac{3a}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Bài toán 14. 10: Tứ diện ABCD có AB = 6, CD = 8, các cạnh còn lại đều bằng $\sqrt{74}$. Định tâm và tính diện tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

Hướng dẫn giải



Gọi M, F thứ tự là trung điểm của AB, CD và K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó K thuộc CM. Hạ KO $\perp$ FM thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, R = OD.

Ta có CM = DM = $\sqrt{74-9}=\sqrt{65}$

Và MF = $\sqrt{65-16}=7$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có $R=\dfrac{abc}{4S}\Rightarrow CK=R=\dfrac{37}{\sqrt{65}}$. Các tam giác đồng dạng OKM và CFM

suy ra $\dfrac{OM}{MK}=\dfrac{CM}{MF}$.

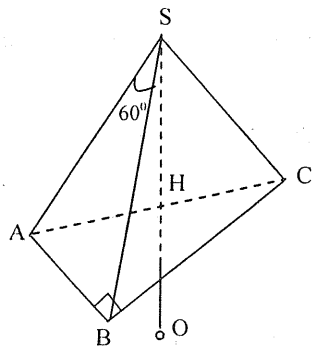
$\Rightarrow OM=\dfrac{MK.CM}{MF}=\dfrac{(CM-R)CM}{MF}=\dfrac{28}{7}=4$

Do đó OF = 3. Suy ra R = OD = $\sqrt{OF^2+FD^2}=\sqrt{9+16}=5$

Vậy diện tích mặt cầu S = $4\pi R^2=100\pi$

Bài toán 14. 11: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB}=60^0$, $\widehat{BSC}=90^0$ và $\widehat{CSA}=120^0$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải:

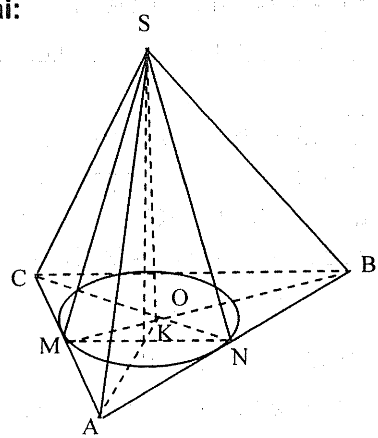


Ta có AB = a, BC = $a\sqrt{2}$ và AC = $a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông ở B. Gọi SH là đường cao của hình chóp, do SA = SB = SC nên HA = HB = HC suy ra H là trung điểm của cạnh AC.

Tâm mặt cầu thuộc trục SH. Vì góc $\widehat{HSA}=60^0$ nên gọi O là điểm đối xứng với S qua điểm H thì: OS = OA = OC = OB = a.
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm O và có bán kính R = a.

Bài toán 14. 12: Cho hình chóp tam giác đều SABC có đường cao SO = 1 và cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp SAMN và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

Hướng dẫn giải:



Do ABC là tam giác đều nên:

$AM = MN = NA = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$

$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Do đó: $V_{SAMN} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì SABC là hình chóp đều nên O trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do đó $OM \perp AC$, $ON \perp AB$ và do $SO \perp (ABC)$ nên ta suy ra $SM \perp AC$, $SN \perp AB$ và SM = SN. Xét tam giác vuông AOM; SOM:

$OM = AT\tan 30^0 = \sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} = ON$

$SM^2 = OM^2 + SO^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow SM = \sqrt{3}$, nên:

$S_{SAM} = \frac{1}{2}AM.SM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{SAN} = \frac{1}{2}AN.SN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Gọi K là trung điểm của MN thì $SK \perp MN$.

$SK^2 = SM^2 - KM^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow SK = \frac{\sqrt{6}}{2}$ nên:

$S_{SMN} = \frac{1}{2}MN.SK = \frac{3}{2}$; $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

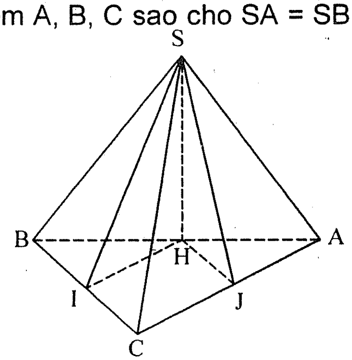
Do đó bán kính hình cầu nội tiếp: $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Bài toán 14. 13: Góc tam diện Sxyz đỉnh có $\widehat{xSy} = 120^o$, $\widehat{ySz} = 60^o$, $\widehat{zSx} = 90^o$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lấy tương ứng các điểm A, B, C sao cho SA = SB = SC = a.

a) Xác định hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mp(ABC).

b) Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SA

Hướng dẫn giải



a) Do $\widehat{BSC} = 60^o$, nên SBC là tam giác đều, từ đó BC = a.

Do ASC là tam giác vuông cân nên AC = $a\sqrt{2}$.

Từ tam giác cân ASB có góc đỉnh là 120^o nên AB = $a\sqrt{3}$.

Vì $AC^2 + CB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AB^2$ nên $\widehat{ACB} = 90^o$.

Vì SA = SB = SC = a nên H cách đều ba đỉnh A, B, C. Do đó H là trung điểm của cạnh AB.

b) Ta có $S_{tp} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$

và $V = \dfrac{1}{2}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Do đó:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}.$$

Bài toán 14. 14: Cho tứ diện gần đều ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

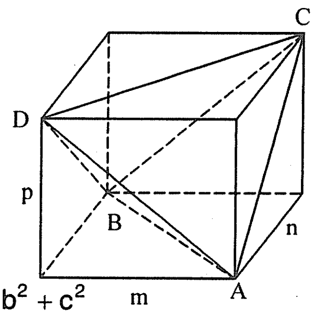
a) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện R.

b) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp r.

Hướng dẫn giải

Xem tứ diện ABCD là một phần của hình hộp chữ nhật với 3 kích thước m, n, p thì ta có hệ:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = c^2 \\ m^2 + p^2 = a^2 \\ n^2 + p^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \\ n^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ p^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}$$



Vì $m^2 + n^2 + p^2 = (2R)^2 \Rightarrow \dfrac{m^2 + n^2 + p^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$

Vậy $R = \dfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

Ta có $V = \dfrac{1}{3}mnp = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

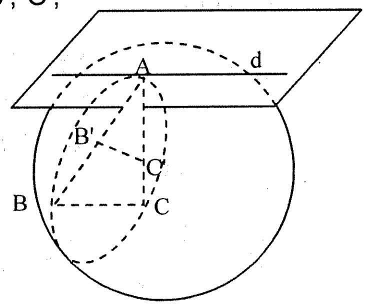
$S_{tp} = 4S_{ABC} = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$

Vậy $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c)}}$.

Bài toán 14. 15: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) cắt mặt phẳng (P) lần lượt theo các giao tuyến d, b, c. Biết d, b, c tạo với nhau thành 6 góc bằng nhau. Chứng minh rằng: AB . CD = AC . BD = AD . BC.

Hướng dẫn giải



Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm B', C', D' thoả mãn:

AB' = AC.AD, AC' = AB.AD,

AD' = AB.AC. Ta có $\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB} = AD$

nên 2 tam giác ABC và AC'B' đồng dạng.

Vì d là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).

Suy ra d$\hat{A}$C = $A\hat{B}C$ (chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Do đó d$\hat{A}$C = $A\hat{C}'B'$ $\Rightarrow$ d // B'C'. Tương tự b // C'D', c//B'D'

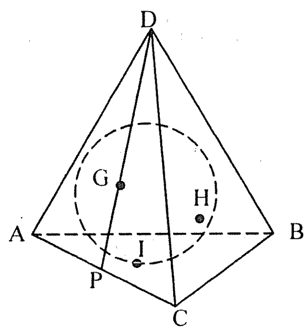
Vì b, c, d tạo thành các góc bằng nhau, suy ra tam giác B'C'D' đều.

Ta lại có $\frac{B'C'}{BC}$ = AD suy ra B'C' = BC.AD

Tương tự C'D' = CD.AB, D'B' = DB.AC $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 14. 16: Cho tứ diện ABCD có tính chất: Mặt cầu nội tiếp của tứ diện tiếp xúc với mặt (ABC) tại tâm đường tròn nội tiếp I tam giác ABC, tiếp xúc với mặt (BCD) tại trực tâm H của tam giác BCD và tiếp xúc với mặt (ACD) tại trọng tâm G của tam giác ACD. Chứng minh ABCD là tứ diện đều.

Hướng dẫn giải



Vì I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC nên

α = I$\hat{A}$B = I$\hat{A}$C; β = $I\hat{B}C = I\hat{B}A$, γ = $I\hat{C}A = I\hat{C}B$

Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

ΔIAC = ΔGAC; ΔIBC = ΔHBC

suy ra α = G$\hat{A}$C, β = $H\hat{B}C$, γ = $G\hat{C}A$ = $H\hat{C}B$.

Trong tam giác ABC ta có:

$\alpha + \beta + \gamma = 90^o$, suy ra trong ΔBCD ta có:

$\alpha = \widehat{HBD} = \widehat{HCD}$, $\beta = \widehat{HDC}$, $\gamma = \widehat{HDB}$

Mặt khác ΔHCD = ΔGCD suy ra α = $\widehat{GCD}$, β = $\widehat{GDC}$.

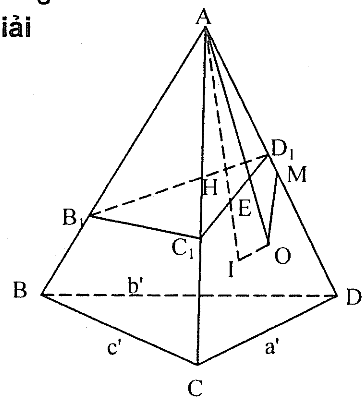
Gọi P là trung điểm của AC ta có $P\hat{G}C$ = $\alpha + \beta$ suy ra $G\hat{P}C$ = $180^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 90^o$. Do đó DP là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔDAC cân đỉnh D suy ra ΔGAC cân đỉnh G. Từ đó $\alpha = \gamma$ nghĩa là $H\hat{C}D = H\hat{C}B$ nên CH là phân giác của góc DCB. Từ đó ΔDCB cân ở C, vậy CB = CD. Mặt khác ΔABC cân ở B nên BA = BC. Vậy DA = DC = BC = BA. Mặt khác do $\alpha = \gamma$ nên $\widehat{GCA} = \widehat{GCD}$, vậy ΔCAD cân ở C, ngoài ra ΔCAD còn cân ở D nên là tam giác đều suy ra $\beta = 30^o$. Chứng minh tương tự $\alpha = \gamma = 30^o$ nên ΔABC và ΔBCD đều suy ra 6 cạnh của tứ diện bằng nhau. Vậy ABCD là tứ diện đều.

Bài toán 14. 17: Cho tứ diện ABCD có độ dài các cặp cạnh đối lần lượt là a, a', b, b', c, c'. Gọi V và R là thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

a) Chứng minh có một tam giác có độ dài 3 cạnh là a.a', b.b', c.c'.

b) Gọi S là diện tích tam giác đó. Chứng minh rằng: S = 6.V.R.

Hướng dẫn giải



a) Giả sử AB = a, CD = a', AC = b, BD = b', AD = c, BC = c'.

Đặt k = a.b.c

Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm B_1, C_1, D_1 thoả

$AB_1.AB = AC_1.AC = AD_1.AD = k$

ΔAB_1C_1 đồng dạng ΔABC

$\Rightarrow B_1C_1 = \dfrac{k}{AB.AC}BC = \dfrac{a.b.c.c'}{ab} = cc'$

Vậy $B_1C_1 = cc'$.

Tương tự $C_1D_1 = aa'$; $B_1D_1 = bb'$ nên $A_1B_1C_1$ là tam giác cần tìm.

b) Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD, M là trung điểm AD.

Ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{ACD} = \widehat{AD_1C_1} \Rightarrow$ Tứ giác OED_1M nội tiếp

$\Rightarrow OA \perp C_1D_1 = AI \perp C_1D_1$.

Tương tự $AI \perp B_1C_1 \Rightarrow AI \perp (B_1C_1D_1)$. AI cắt $(A_1B_1C_1)$ tại H

Ta có $AH.AI = AE.AO = AD_1.AM = \dfrac{1}{2}AD_1.AD = \dfrac{1}{2}abc$.

$\Rightarrow AH = \dfrac{abc}{2R}$. Gọi V_1 là thể tích tứ diện $AB_1C_1D_1$.

Ta có: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{AB_1.AC_1.AD_1}{AB.AC.AC} = \dfrac{(abc)^3}{(abc)^2} = abc$

$\Rightarrow \quad V_1 = V.abc = \dfrac{1}{3}S.AH = \dfrac{1}{3}S\dfrac{abc}{2R}$. Vậy S = 6VR.

Bài toán 14. 18: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ với (O,R), (I,r) lần lượt là mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp và h_i là các đường cao kẻ từ A_i. Chứng minh:

$$OI^2 = R^2 - r^2\left(\sum_{1\le i<j\le 4}\frac{A_iA_j^{\,2}}{h_ih_j}\right)$$

Hướng dẫn giải:

Gọi S_i là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i, ta có:

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{IA_i}.S_i = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OI} = (\sum_{i=1}^{4} S_i\overrightarrow{OA_i}) / S_{tp}$$

$$\Rightarrow OI^2 = \left[R^2\sum_{i=1}^{4}S_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 4} S_iS_j\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}\right] : S_{tp}^2$$

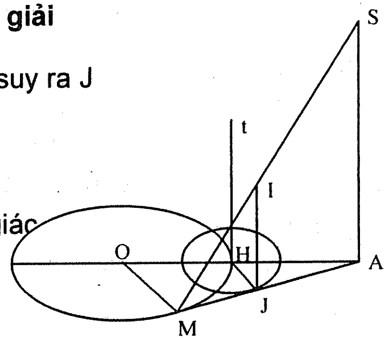
Mà $\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j} = (OA_i^2 + OA_j^2 - A_iA_j^2)/2 = R^2 - A_iA_j^2/2$

Nên $OI^2 = \left[R^2S_{tp}^2 - \sum_{1\le i<j\le 4} S_iS_jA_iA_j^2\right] : S_{tp}^2 = R^2 - (\sum_{i<j} S_iS_jA_iA_j^2)/S_{tp}^2$

và $S_i = 3V/h_i$, $S_{tp} = 3V/r \Rightarrow S_iS_j = 9V^2/h_ih_j \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 14. 19: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (O; R) và điểm A sao cho OA = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc (P) tại A lấy một điểm S cố định. Cho M ∈ (O; R), gọi I, J là trung điểm SM, AM. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên (C) thì đoạn IJ sinh ra mặt xung quanh của một hình trụ.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của OA thì HJ = $\frac{R}{2}$ suy ra J thuộc đường tròn (H; $\frac{R}{2}$) nằm trong (P).

Vì IJ là đường trung bình của tam giác SMA nên:

$IJ = \frac{SA}{2}$ và IJ ⊥ (P).

Do đó khi M chuyển động trên đường tròn (O) thì đoạn IJ sinh ra một mặt trụ có trục Ht ⊥ (P) và bán kính $\frac{R}{2}$.

Bài toán 14. 20: Một hình trụ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích.

b) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^o. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

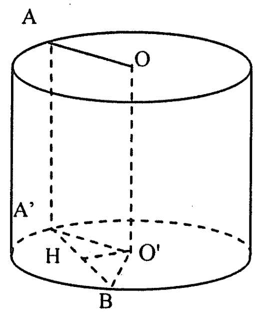
Hướng dẫn giải

a) $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2(\sqrt{3} + 1)\pi R^2$

$V = \pi R^2 . R\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi R^3$

b) Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy. Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì O'A' = R, AA' = $R\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAA'}$ bằng 30^o. Vì OO'//mp(ABA) nên khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách giữa OO' và mp(ABA'). Gọi H là trung điểm BA' thì khoảng cách đó bằng O'H. Tam giác BA'A vuông tại A' nên:



$$BA' = AA'\tan 30^o = R\sqrt{3}\ .\frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

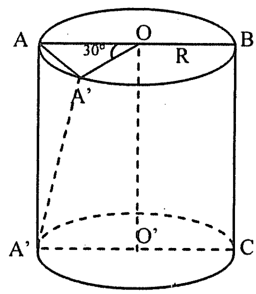
Do đó BA'O' là tam giác đều, vậy $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 14. 21: Trên hai đáy của hình trụ có đường cao gấp đôi bán kính đáy, ta lấy hai bán kính chéo nhau, đồng thời tạo với nhau một góc là 30^o. Biết rằng đoạn thẳng nối hai đầu mút của hai bán kính không đi qua tâm đường tròn có độ dài là a.

a) Tính tang của góc hợp trục và đoạn thẳng qua 2 mút đó.

b) Tính thể tích của khối trụ,

Hướng dẫn giải



a) Gọi bán kính của hình trụ là R, hai bán kính chéo nhau là OA' và O'D. Vẽ đường sinh DA thì: g(OO', A'D) = g(AD, A'D) = $\widehat{ADA'} = \alpha$

Trong tam góc AOA' cân tại O:

$AA'^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 30^o = (2 - \sqrt{3})R^2$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{2-\sqrt{3}}R$

Tam giác ADA' vuông tại A nên: $DA'^2 = AD^2 + AA'^2$

$$\Rightarrow a^2 = (2R)^2 + (2-\sqrt{3})R^2 \Rightarrow a^2 = (6-\sqrt{3})R^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{6-\sqrt{3}}}$$

Ta có: $h^2 = AD^2 = DA'^2 - A'A^2$

$$= a^2 - (2-\sqrt{3}).\frac{a^2}{6-\sqrt{3}} = \frac{4a^2}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow h = 2.\frac{a\sqrt{6-\sqrt{3}}}{6-\sqrt{3}}.$$

Do đó $\tan\alpha = \frac{AA'}{AD} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

b) Thể tích của khối trụ là:

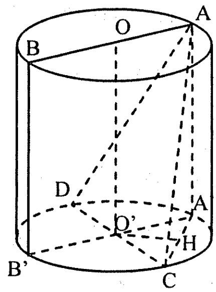
$$V = \pi.R^2h = \pi.\frac{a^2}{6-\sqrt{3}}.2.\frac{a\sqrt{6-\sqrt{3}}}{6-\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{6-\sqrt{3}}a^3}{(6-\sqrt{3})^2}.$$

Bài toán 14. 22: Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.

a) Chứng minh rằng ABCD là tứ diện đều.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.

Hướng dẫn giải



a) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, thì A, B thuộc đường tròn này. Khi đó $A'B' \perp CD$ nên A'CB'D là hình vuông có đường chéo CD = 2R, do đó $A'C = R\sqrt{2}$, ngoài ra $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra AC = 2R.

Tương tự ta có AD = BC = BD = 2R.

Vậy ABCD là tứ diện đều.

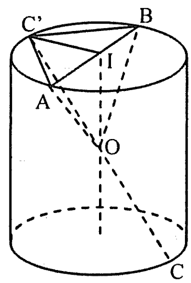
b) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB và CD, H trung điểm A'C. Ta có:

$$d(OO'; AC) = d(OO', (AA'C)) = OH' = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Tương tự, khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO' đều bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra các đường thẳng AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ có trục là OO' và có bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 14. 23: Trên đường tròn đáy của một hình trụ, ta lấy hai điểm xuyên tâm A và B, trên đường tròn đáy thứ hai ta lấy điểm C không nằm trên mặt phẳng (AOB), với O là trung điểm của trục hình trụ. Chứng minh rằng tổng các góc nhị diện của góc tam diện với đỉnh O và các cạnh OA, OB, OC bằng 360^o.

Hướng dẫn giải



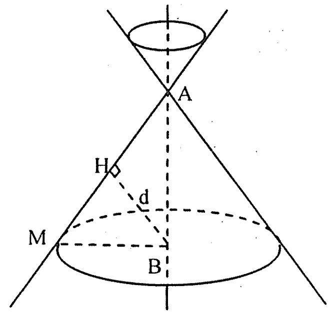
Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm O. Khi đó, nếu ở góc tam diện OABC có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC lần lượt bằng α, β, γ thì ở góc tam diện OABC' có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC lần lượt bằng: $180^o - \alpha$, $180^o - \beta$, γ

Gọi I là tâm đường tròn đường kính AB, trong tứ diện OABC', các góc nhị diện với cạnh OA và OC' bằng nhau (vì tứ diện này nhận mặt phân giác của góc nhị diện cạnh OI làm mặt phẳng đối xứng); ngoài ra, trong tứ diện OIBC', các góc nhị diện với cạnh OB và OC' bằng nhau.

Do đó: $(180^{o} - \alpha) + (180^{o} - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$.

Bài toán 14. 24: Cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp những đường thẳng d qua A và cách B một đoạn không đổi bằng d.

Hướng dẫn giải



Hạ $BH \perp d \Rightarrow \Delta ABH$ vuông tại H.

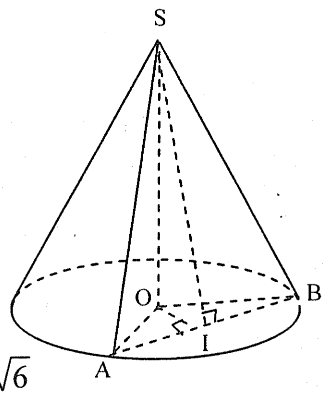
$\Rightarrow \sin\widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{d}{AB}$ không đổi.

Do đó $\widehat{BAH} = \alpha$ không đổi

Vậy tập hợp các đường thẳng d là mặt nón nhận đường thẳng AB làm trục, có đỉnh là A và góc ở đỉnh là 2α.

Bài toán 14. 25: Cho hình nón đỉnh S đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^{0}$, $\widehat{SAB} = 60^{0}$. Tính thể tích, diện tích xung quanh hình nón.

Hướng dẫn giải:



Gọi I là trung điểm của AB thì

$OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$.

Ta có: $AO = SA\cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{3}}{2}SA$

$AI = SA\cos\widehat{SAI} = \frac{1}{2}SA$

Từ đó: $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ mà $\cos\widehat{IAO} = \frac{AI}{AO}$

$\Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow R = OA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác SAO, ta có: $h = SO = OA.\tan 30^{0} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

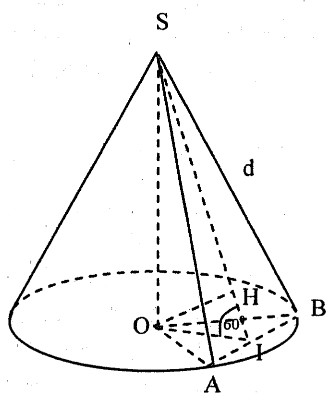
$\ell = SA = \frac{OA}{\cos 30^{0}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$

Do đó $V = \frac{1}{3}\pi OA^{2}.SO = \frac{\pi a^{3}\sqrt{2}}{4}$ (đvtt), $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi a^{2}\sqrt{3}$ (đvdt).

Bài toán 14. 26: Cho hình nón S, góc giữa đường sinh d và mặt đáy là α. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S, hợp với mặt đáy góc 60^{0}. Tính diện tích thiết diện và khoảng cách từ O đến mp(P)

Hướng dẫn giải:

Thiết diện là tam giác SAB cân tại S.Gọi I là trung điểm AB.



Ta có AB ⊥ OI, SI ⇒ $\widehat{SIO} = 60^0$

ΔSOA, ΔSOI vuông tại O nên:

SO = d.sinα, OA = d.cosα

$\Rightarrow SI = \dfrac{2d\sin\alpha}{\sqrt{3}},\ OI = \dfrac{d\sin\alpha}{\sqrt{3}}$

$AI^2 = OA^2 - OI^2 = \dfrac{d^2}{3}(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\Rightarrow AI = \dfrac{d}{\sqrt{3}}.\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$ nên:

$S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SI.AB = \dfrac{2d^2\sin\alpha}{3}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$

Vẽ OH ⊥ SI ⇒ OH ⊥ (SAB), do đó OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)

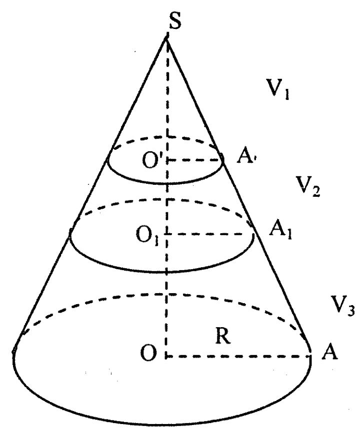
ΔOHI là nửa tam giác đều nên : $d(O,(P)) = OH = \dfrac{OI\sqrt{3}}{2} = \dfrac{d.\sin\alpha}{2}$

Bài toán 14. 27: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng R, đường cao SO. Một mặt phẳng (P) cố định vuông góc với SO tại O' cắt nón (N) theo đường tròn có bán kính R'. Mặt phẳng (Q) thay đổi, vuông góc với SO tại điểm O_1 (O_1 nằm giữa O và O') cắt hình tròn theo thiết diện là hình tròn có bán kính x. Hãy tính x theo R và R' để (Q) chia phần hình nón nằm giữa (P) và đáy hình nón thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

Gọi V_1 là thể tích phần hình nón giữa đỉnh S và mp(P). V_2 là thể tích phần hình nón giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

V_3 là thể tích phần hình nón giữa mặt phẳng (Q) và đáy hình nón đã cho.



Ta có: $\dfrac{V_1}{V_1+V_2} = \left(\dfrac{R'}{x}\right)^3$

$\dfrac{V_1+V_2+V_3}{V_1+V_2} = \left(\dfrac{R}{x}\right)^3$

Mà $V_3 = V_2$

Suy ra : $\dfrac{V_1+2V_2}{V_1+V_2} = \left(\dfrac{R}{x}\right)^3$

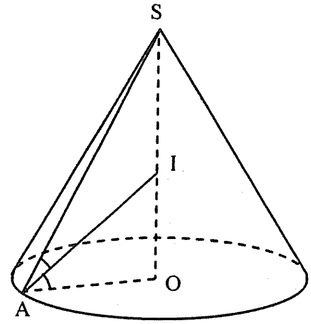
Do đó: $\dfrac{2(V_1+V_2)}{V_1+V_2} = \left(\dfrac{R}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{R'}{x}\right)^3 = \dfrac{R^3+R'^3}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{R^3+R'^3}{2}}$.

Bài toán 14. 28: Một hình nón có chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng r.

a) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón đó.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Hướng dẫn giải



a) Giả sử hình nón có đỉnh S và có đáy là đường tròn C(O; r).

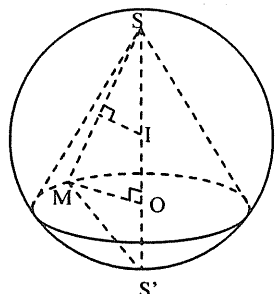
Lấy điểm A cố định trên đường tròn đáy và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc SAO thì I tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón, bán kính R = IO.

Ta có SA = $\sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: R = IO = $\dfrac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$.



b) Giả sử hình nón có đỉnh S và lấy điểm M cố định trên đường tròn đáy (O; r) thì tam giác SOM vuông ở O. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình nón là giao điểm của SO và mặt phẳng trung trực của SM, bán kính R = IS.

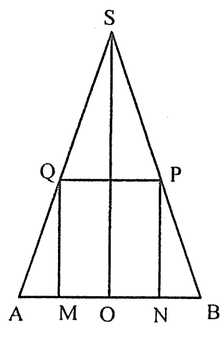
Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón (SS' > h). Tam giác SMS' vuông tại M, có đường cao MO nên:

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h) \Rightarrow SS' = \frac{r^2}{h} + h = \frac{r^2 + h^2}{h}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là: R = $\dfrac{r^2 + h^2}{2h}$.

Bài toán 14. 29: Một hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 3, có đáy là hình tròn có bán kính 1. Một hình lập phương nội tiếp trong đó sao cho một mặt thì nằm trên mặt phẳng đáy, 4 đỉnh của mặt đối diện của hình lập phương thì thuộc mặt nón. Tính thể tích hình lập phương.

Hướng dẫn giải



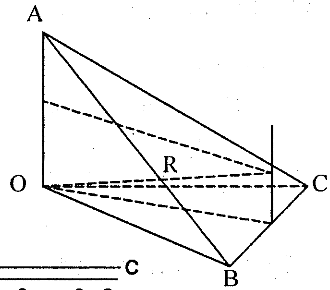
Ta xét mặt phẳng chứa trục hình nón và hai đỉnh đối diện của đáy hình lập phương. Mặt phẳng này sẽ cắt hình lập phương theo thiết diện là hình chữ nhật MNPQ có một cạnh bằng MQ = s, cạnh kia bằng MN = s$\sqrt{2}$, với s là độ dài cạnh của hình lập phương.

Mặt phẳng nói trên cũng cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB.Các tam giác đồng dạng AQM và ASO cho ta:

$$\frac{s}{3}=\frac{1-\frac{s\sqrt{2}}{2}}{1}\text{, suy ra } s=\frac{9\sqrt{2}-6}{7}\text{. Vậy } V=s^3=\frac{(9\sqrt{2}-6)^3}{343}$$

Bài toán 14. 30: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại, nội tiếp tứ diện

Chứng minh: $\frac{R}{r}\geq\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$. Khi nào đẳng thức xảy ra.



Hướng dẫn giải

Đặt OA = a, OB = b, OC = c

$\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Ta có $r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{\frac{1}{2}abc}{\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

$$\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2abc}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow\frac{R}{r}\geq\frac{\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}}{2abc}=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 14. 31: Cho r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp của một tứ diện có thể tích là V. Chứng minh rằng: $8R^2r\geq 3\sqrt{3}V$. Suy ra $V\leq\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi O, G lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm tứ diện ABCD. Gọi BC = a', AD = a', CA = b', BD = b', AB = c, CD = c'. Gọi S_a, S_b, S_c, S_d, S_{tp} lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và diện tích toàn phần của tứ diện.

$$AB^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=2R^2-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=2R^2-AB^2$$

Mặt khác $4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow 16OG^2=4R^2+\Sigma(2R^2-AB^2)$, với Σ là tổng theo 6 cạnh

$\qquad = 16R^2-(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2)\geq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2\leq 16R^2$

Trong tam giác ABC ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

Tương tự cho các S_a, S_b, S_c rồi cộng lại ta được:

$2(a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2) \geq 4\sqrt{3}.S_{tp}$. Do đó $8R^2 \geq \sqrt{3}S_{tp}$

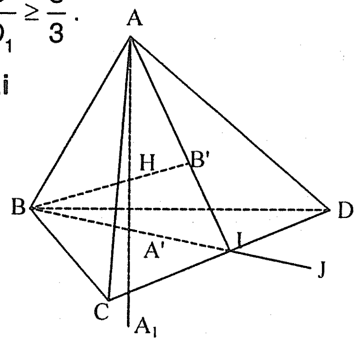
Mà $S_{tp} = \frac{3V}{r}$ nên $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$.

Dấu bằng xảy ra khi tứ diện ABCD đều

Xét phép vị tự tâm G tỉ $k = \frac{1}{3}$ thì tứ diện ABCD biến thành tứ diện có 4 đỉnh là 4 trọng tâm A'B'C'D' của 4 mặt và R = 3R'.

Vì $R' > r \Rightarrow R > 3r \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 14. 32: Cho tứ diện ABCD có các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm H thuộc miền trong của tứ diện. Các đường thẳng AA', BB', CC'. DD' lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh: $\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1} \geq \frac{8}{3}$.



Hướng dẫn giải

Tứ diện ABCD đã là tứ diện trực tâm nên A' là trực tâm tam giác BCD. Gọi J là giao điểm của BI với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD thì A'I = IJ.

Do H là trực tâm tam giác ABI nên:

$$A'H.A'A = A'B.A'I = \frac{1}{2}A'B.A'J = \frac{1}{2}A'A_1.A'A$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{1}{2}A'.A_1$$

Tương tự: $B'H = \frac{1}{2}B'B_1$; $C'H = \frac{1}{2}C'C_1$, $D'H = \frac{1}{2}D'D_1$

Từ $V_{HBCD} + V_{HCDA} + V_{HDAB} + V_{HABC} = V_{ABCD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{HBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HCDA}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HDAB}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HABC}}{V_{ABCD}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} + \frac{HD'}{DD'} = 1 \Rightarrow \frac{A'A_1}{AA'} + \frac{B'B_1}{BB'} + \frac{C'C_1}{CC'} + \frac{D'D_1}{DD'} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} + \frac{DD_1}{DD'} = 6$$

Theo bất đẳng thức BCS:

$$\left(\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}+\frac{DD'}{DD_1'}\right)\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{BB_1}{BB'}+\frac{CC_1}{CC'}+\frac{DD_1}{DD'}\right)\ge 16$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}+\frac{DD'}{DD_1}\ge\frac{8}{3}.$$

Bài toán 14. 33: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có G là trọng tâm, gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trên. Các đường thẳng GA_1, GA_2, GA_3, GA_4 cắt (S) tại A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Chứng minh: $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA'_1}\le\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O và R là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Ta có: $GA_iGA'_i = R^2 - OG^2$

$$\Rightarrow GA_i = \frac{R^2-OG^2}{GA'_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}GA_i=(R^2-OG)^2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA'_i}$$

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{4}GA_i\le(R^2-OG)^2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}$$

$$GA_i^2=OA_i^2+OG^2+2\overrightarrow{OA_i}\overrightarrow{OG}=R^2+OG^2+2\overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA_i}-\overrightarrow{GO})$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}GA_i^2=4(R^2-OG)^2=\sum_{i=1}^{4}GA_i^2$$

$$\text{Và } 4\sum_{i=1}^{4}GA_i^2\ge\left[\sum_{i=1}^{4}GA_i\right]^2\ ;\ \sum_{i=1}^{4}GA_i.6.$$

$$\text{Do đó: }\sum_{i=1}^{4}GA_i\le\frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{4}GA_i\right]^2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}\le\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}GA_i^2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{4}GA_i\le(R^2-OG^2)\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}\ \text{(đpcm).}$$

Bài toán 14. 34: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi R, r, h, V lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, đường cao kẻ từ A' và thể tích của tứ diện A'AB'D'.Chứng minh: $\frac{V(h-r)}{R^2.r.h}\le\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt AA' = a; AB' = b; A'D' = c. Ta có

$$\frac{V(h-r)}{R^2.r.h}=\frac{V\left(\frac{3.V}{S_{(AB'D')}}-\frac{3.V}{S_{tp}}\right)}{R^2.\frac{3.V}{S_{(AB'D')}}.\frac{3V}{S_{tp}}}=\frac{S_{tp}-S_{(AB'D')}}{3R^2}=\frac{S_{xq(A.A'B'D')}}{3.R^2}$$

với $S_{xq(A.A'B'D')}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

Tứ diện A'AB'D' vuông tại A' nên $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Suy ra $\frac{S_{xq(A'.AB'D')}}{3R^2}=\frac{2}{3}.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{V(h-r)}{R^2.r.h}\le\frac{2}{3}$.

Bài toán 14. 35: Tứ diện ABCD nội tiếp trong mặt cầu (O, R). Gọi m_a, m_b, m_c, m_d là độ dài các trọng tuyến vẽ từ A, B, C, D.

Chứng minh $R\ge\frac{3}{16}(m_a+m_b+m_c+m_d)$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tứ diện $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

và $GA=\frac{3}{4}m_a$, $GB=\frac{3}{4}m_b$, $GC=\frac{3}{4}m_c$, $GD=\frac{3}{4}m_d$

Ta có : $4R^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$

$=4OG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+2\overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})$

$=4OG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\le 4R^2$

$\Rightarrow 4R^2\ge\frac{9}{16}(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2)$

Theo bất đẳng thức BCS :

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\ge\frac{1}{4}(m_a+m_b+m_c+m_d)^2\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 14. 36: Cho tứ diện OABC trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, có đường cao OH = h. Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{h}{r}$.

Hướng dẫn giải

Đặt OA = a, OB = b, OC = c.

Ta có: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ và $r=\frac{3V}{S_{tp}}\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{S_{tp}}{3V}$

Mà $\frac{S_{tp}}{3V}=\frac{S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}+S_{\Delta ABC}}{3V}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}$

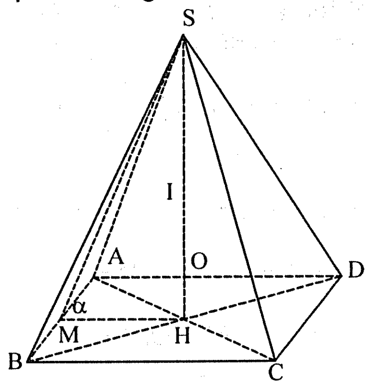
Do đó $\frac{1}{r}-\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Mà $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ nên $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \frac{3}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{h}$

Do đó $\frac{1}{r}-\frac{1}{h} \le \frac{\sqrt{3}}{h} \Rightarrow \frac{1}{r} \le \frac{1}{h}(1+\sqrt{3})$ .Vậy $\frac{h}{r} \le 1+\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{h}{r}$ là $1+\sqrt{3}$ khi OA = OB = OC.

Bài toán 14. 37: Cho hình chóp tứ giác đều, gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và mặt cầu nội tiếp của hình chóp đó. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{r}{R}$.



Hướng dẫn giải

Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, đường cao h. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên với đáy. Gọi O, I lần lượt tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp thì O, I $\in$ SH.

Ta có: $OS^2 = OB^2 = OH^2 + BH^2$

$$\Rightarrow R^2 = (h-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{a^2+2h^2}{4h}$$

Do $h = \frac{a}{2}\tan\alpha \Rightarrow R = a.\frac{2+\tan^2\alpha}{4\tan\alpha}$

I là chân đường phân giác của góc $\widehat{SMH}$ nên $r = IH = \frac{a}{2}\tan\frac{a}{2}$

$$\text{Do đó: } \frac{r}{R} = \frac{4\tan\alpha.\tan\frac{\alpha}{2}}{4+2\tan^2\alpha} = \frac{2\left(\tan^2\frac{\alpha}{2}-\tan^4\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^4\frac{\alpha}{2}}$$

Xét hàm số $y = \frac{2(t-t^2)}{1+t^2}$ với $t = \tan^2\frac{\alpha}{2}$, $t \in (0; 1)$

Ta có: $y' = \frac{2(-t^2-2t+1)}{(1+t^2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$, chọn $t = \sqrt{2}-1$.

BBT:

t	0	$\sqrt{2}-1$	1
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$

Vậy $\max\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$ khi $\alpha = 2\arctan\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Bài toán 14. 38: Trong các tứ diện nội tiếp hình cầu có bán kính R = 1, tìm tứ diện có diện tích toàn phần lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Trong mọi tam giác a, b, c, diện tích S thì: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Áp dụng lần lượt vào các mặt tứ diện ABCD rồi cộng lại thì được:

$2(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2) \geq 4\sqrt{3}S_{tp}$

Gọi O, G lần lượt là tâm và trọng tâm tứ diện ABCD, ta có:

$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$

$$= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2$$
$$+ (\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2$$

$$= 16R^2 - (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2 = 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2 = 16.$$

Do đó $S_{tp} \leq \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB = BC = CD = AC = AD = BD và $O \equiv G$.

Do đó ABCD là tứ diện đều.

Bài toán 14. 39: Tứ diện ABCD có các cạnh AB, BC, CA đều nhỏ hơn DA, DB, DC. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của PD, trong đó P là điểm thỏa điều kiện $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$

Hướng dẫn giải

Gọi O là điểm sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (1)

Ta có $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})^2 + (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})^2 + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})^2 - (\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP})^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2OP^2 - 2\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}) = OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$\Leftrightarrow 2OP^2 = OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2)$ (2)

Bình phương 2 vế của (1), ta suy ra $2OD^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$= DA^2 + DB^2 + DC^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$ (3)

Đặt $DA^2 + DB^2 + DC^2 = x$, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = y$

Từ (2) và (3) suy ra $OP^2 = (x - y)/4 > 0$ do giả thiết

Do đó P thuộc mặt cầu (O) tâm O bán kính $(\sqrt{x-y})/2$

Từ (1) ta có $OD^2 = (3x-y)/4$ suy ra D nằm ngòai (O). Đường thẳng OD cắt (O) tại P_1, P_2 ($DP_1 < DP_2$)

$DP \geq DO - PO = DO - P_1O = DP_1$, dấu bằng khi $P \equiv P_1$

$DP \leq DO + PO = DO + P_2O = DP_2$, dấu bằng khi $P \equiv P_2$

Vậy min $PD = DP_1$, max $PD = DP_2$

Bài toán 14. 40: Tứ diện ABCD gần đều. Tìm điểm M sao cho

$f(M) = MA^{2004} + MB^{2004} + MC^{2004} + MD^{2004}$ min

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tứ diện, vì tứ diện gần đều nên G cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp: GA = GB = GC = GD.

Ta có bất đẳng thức với n nguyên dương

$$a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n,\ c^n + d^n \geq 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n\ \forall a, b, c, d > 0$$

$$\Rightarrow a^n + b^n + c^n + d^n \geq \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n\right] \geq 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n$$

Lấy $a = MA^2$, $b = MB^2$, $c = MC^2$, $d = MD^2$, $n = 1002$, ta có:

$f(M) \geq 4^{1-n}(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2)^n$

Mặt khác : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD})^2$

$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

$$f(M)\min \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \text{ min} \\ MA = MB = MC = MD \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv G$$

Vậy f(M) nhỏ nhất khi M trùng trọng tâm G.

Bài toán 14. 41: Chứng minh trong các tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (O, R) cho trước thì hình có góc tam diện đỉnh A vuông khi và chỉ khi: $AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2$ min

Hướng dẫn Hướng dẫn giải:

Khai triển $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})^2 \geq 0$ ta có:

$OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$

$+ 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}) \geq 0$

mà $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = OB^2 + OC^2 - BC^2 = 2R^2 - BC^2$

tương tự với $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}, \ldots, \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}$

Thế vào khai triển trên ta được: $AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2 \geq -4R^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AA'}$ (với AA' là đường kính)

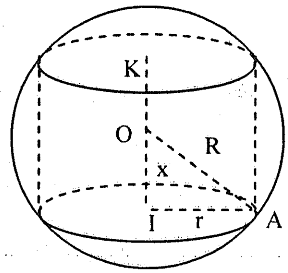
$\Leftrightarrow$ hình hộp ABD'C DC'A'B' nội tiếp mặt cầu (O, R)

$\Leftrightarrow$ góc tam diện đỉnh A là tam diện vuông.

Bài toán 14. 42: Cho hình trụ nội tiếp hình cầu S(O; R).

a) Hình trụ nào có diện tích xung quanh S lớn nhất.

b) Hình trụ nào có thể tích lớn nhất.



Hướng dẫn giải:

a) Gọi x là khoảng cách từ tâm hình cầu O đến đáy hình trụ : OI = x.

Đáy hình trụ là đường tròn có bán kính:

$r = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 < x < R$

Diện tích xung quanh hình trụ là:

$S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}$

$\leq 4\pi.\dfrac{x^2 + (R^2 - x^2)}{2} = 2\pi R^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

b) Thể tích của khối trụ là:

$V = \pi r^2.2x = 2\pi.x(R^2 - x^2) = -2\pi x^3 + 2\pi R^2 x$, $0 < x < R$

$V' = -6\pi x^2 + 2\pi R^2$, $V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

Lập BBT thì V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

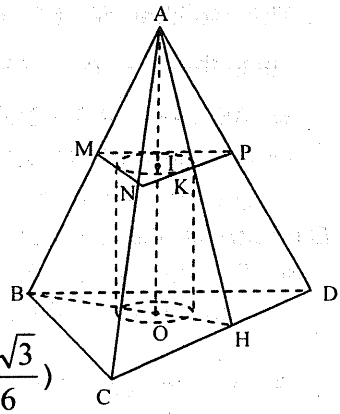
Cách khác: dùng bất đẳng thức BCS.

Bài toán 14. 43: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là tâm của tam giác BCD, dựng mp(P) vuông góc với AO tại một điểm I thuộc đoạn AO, (P) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N và P. Cho một hình trụ có một đáy là hình tròn (I) nội tiếp tam giác MNP và đáy kia nằm trên (BCD). Xác định vị trí I trên AO để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt IK = x, vì AMNP là tứ diện đều nên KM = KA = 3IK = 3x.

$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



Suy ra AI = $\sqrt{AK^2 - KI^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = x\sqrt{8}$

$\Rightarrow$ IO = $\dfrac{a\sqrt{6}}{3} - x\sqrt{8}$

Thể tích của khối trụ là:

V = OI.$S_đ$ = $\pi IK^2.IO$

$= -\pi\sqrt{8}x + \dfrac{\pi a\sqrt{6}}{3}x^2$

Ta xem V là hàm số theo biến số x, với x ∈ $(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{6})$

V' $= -3\pi\sqrt{8}x^2 + \dfrac{2}{3}\pi a\sqrt{6}x$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{9}$

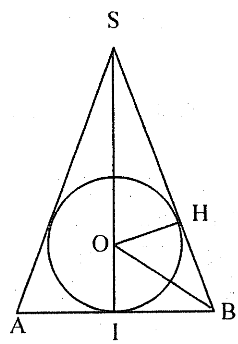
BBT

x	0		$\frac{a\sqrt{3}}{9}$		$\frac{a\sqrt{3}}{6}$
V'		+	0	–	
V		↗		↘	

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi x = $\dfrac{a\sqrt{3}}{9}$

$\Leftrightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IK}{OH} = \dfrac{3}{2}$ hay (P) ⊥ OA tại I sao cho $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 14. 44: Trong các hình nón ngoại tiếp hình cầu bán kính r hãy xác định hình nón có thể tích nhỏ nhất.



Hướng dẫn giải

Thiết diện qua trục là tam giác cân SAB ngoại tiếp đường tròn (O; R). Gọi chiều cao của hình nón là h, bán kính đáy R. Ta có $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SI = p.R$

nên $R.h = (R + \sqrt{h^2 + R^2})r$

$\Rightarrow R(h - r) = \sqrt{h^2 + R^2}.r$

Do đó $R^2(h^2 + r^2 - 2hr) = (h^2 + R^2)r^2 \Rightarrow R^2 = \dfrac{hr^2}{h - 2r}$

Thể tích hình nón: $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi R^2h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 . \dfrac{h}{h - 2r}$, h > 2r.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2},\ V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 4r.$$

Lập BBT thì maxV = V(4r): chiều cao h = 4r.

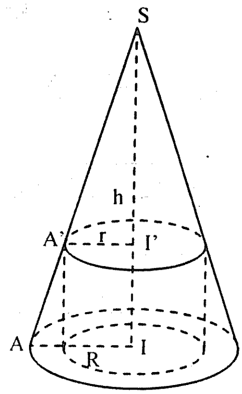
Bài toán 14. 45: Cho hình nón tròn xoay (H) đỉnh S, đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao bằng h. Gọi (H') là hình trụ tròn xoay có đáy là hình tròn bán kính r (0 < r < R) nội tiếp (H).

a) Tính tỉ số thể tích của (H') và (H)

b) Xác định r để (H') có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I và I' là các giao điểm của đường cao hình nón (H) và hai đáy của hình trụ (H').



Khi đó $\frac{r}{R} = \frac{SI'}{h}$.

Do đó $\frac{R-r}{R} = \frac{h-SI'}{h} = \frac{I'I}{h}$

nên $I'I = \frac{h(R-r)}{R}$.

Ta có: $V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. $V_{(H')} = \pi r^2 \frac{h(R-r)}{R}$

Do đó $\frac{V_{(H')}}{V_{(H)}} = \frac{3r^2(R-r)}{R^3}$

b) Thể tích của (H') lớn nhất khi $r^2(R-r)$ là lớn nhất. Xét hàm số $f(r) = r^2(R-r)$ với 0 < r < R.

Ta có $f'(r) = 2Rr - 3r^2$, $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2R}{3}$

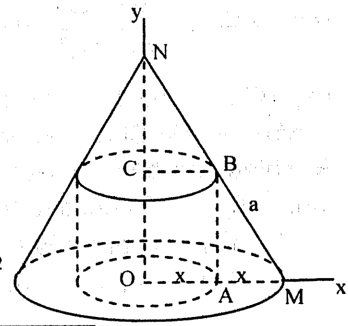
Lập BBT thì maxf = $f(\frac{2R}{3})$. Vậy $V_{(H')}$ lớn nhất khi $r = \frac{2R}{3}$.

Bài toán 14. 46: Cho góc vuông xOy và hai điểm M, N lần lượt di động trên Ox và Oy sao cho MN = 2a không đổi. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm các đoạn OM, MN, ON. Đặt OA = x (0 < x < 2a). Hai cạnh MN, MO của tam giác MON và các đoạn CB, BA, AO quay quanh NO sinh ra một hình nón và một hình trụ nội tiếp hình nón có chung trục NO.

a) Tính diện tích xung quanh S_1 của hình nón và diện tích toàn phần S_2 của hình trụ theo a và x.

b) Xác định OM để tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Ta có ABCD là hình chữ nhật và

$AB = \sqrt{MB^2 - MA^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$S_1 = \pi OM.MN = \pi 2x2a = 4\pi ax$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_2 = 2\pi OA.AB + 2\pi OA^2 = 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2} + 2\pi x^2$

b) Ta có: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi x^2 + 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2}}{4\pi ax} = \dfrac{1}{2a}(x + \sqrt{a^2 - x^2})$

Xét $y = x + \sqrt{a^2 - x^2}$ với $0 < x < a$ thì $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} - x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = x \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (vì $x > 0$).

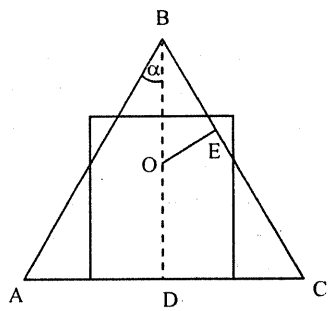
BBT:

x	0		$\frac{a}{\sqrt{2}}$		a
y'		+	0	–	
y		↗	CĐ	↘	

Vậy tỉ số diện tích $\dfrac{S_1}{S_2}$ đạt giá trị lớn nhất khi $OM = 2x = a\sqrt{2}$.

Bài toán 14. 47: Cho một hình cầu nội tiếp trong một hình nón tròn xoay. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và của hình trụ. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

Hướng dẫn giải



Giả sử hình nón có đường cao BH = h, bán kính đáy là DC = a, góc giữa đường sinh và trục là α; bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là r.

Ta có: $V_1 = \dfrac{\pi ha^2}{3}$

với $h = OB + OD = \dfrac{r}{\sin\alpha} + r = \dfrac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, $a = \dfrac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\tan\alpha$

Do đó $V_1 = \dfrac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha.\cos^2\alpha} = \dfrac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$

Thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu là $V_2 = 2\pi.r^3$

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = \dfrac{(1+s)^2}{6s(1-s)}$ với $s = \sin\alpha, 0 < s < 1$

Đặt $\dfrac{V_1}{V_2} = k$ ta có phương trình: $(1+6k)s^2 + 2(1-3k)s + 1 = 0$

Phương trình này có nghiệm, ta phải có:

$\Delta' = (1-3)k^2 - (1+6k) \ge 0 \Leftrightarrow k \ge \dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{3}$ ứng với $s = \sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và OB = 3r.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 14. 1: Tìm tập hợp các điểm M:

a) Với tứ diện ABCD : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$, k cho trước.

b) Với n điểm A_i (i = 1,..., n) : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k^2$ (α_i, k là hằng số).

Hướng dẫn

a) Dùng bình phương vô hướng và chèn trọng tâm G của tứ diện ABC

b) Dùng bình phương vô hướng và chèn tâm tỉ cự I của hệ điểm.

Bài tập 14. 2: Cho điểm A ở ngoài mặt cầu S(O; R).Một mặt phẳng bất kì đi qua AO, cắt mặt cầu theo một đường tròn (C). Gọi AH là một tiếp tuyến của đường tròn đó tại H.

a) Chứng minh rằng AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

b) Tìm quỹ tích các tiếp điểm H.

Hướng dẫn

a) Dùng AH là một tiếp tuyến của đường tròn (C) tại H.

b) Kết quả đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mp(P).

Bài tập 14. 3: Cho tam giác cân ABC có góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và đường cao $AH = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy hai điểm I và J ở về hai phía của điểm A sao cho IBC là tam giác đều và JBC là tam giác vuông cân.

a) Chứng minh rằng BIJ, CIJ là tam giác vuông

b) Xác định tâm và tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC.

Hướng dẫn

a) Dùng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

b) Kết quả R = 3a.

Bài tập 14. 4: Cho tứ diện SABC có SA $\perp$ mp(ABC). (SBC) $\perp$ (SAB). Cho biết SB = $a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC}$ = 45°.

a) Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

b) Tính tan của góc $\alpha = \widehat{ASB}$ để hai mặt phẳng (SCA), (SCB) hợp nhau góc 60°.

Hướng dẫn

a) Tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC cách đều S,A,B,C.
Kết quả R = a.

b) Kết quả $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 14. 5: Cho tứ diện ABCD có mặt cầu nội tiếp (I, r). Các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu đó và song song với các mặt tứ diện, chia tứ diện ABCD thành 4 tứ diện có 4 mặt cầu nội tiếp bán kính r_1, r_2, r_3, r_4.
Chứng minh $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2r$.

Hướng dẫn

Dùng tỉ số diện tích, tỉ số thể tích của các hình đồng dạng.

Bài tập 14. 6: Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = 2a. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S khác A.

a) Chứng minh tứ diện SABC chỉ có một cặp đối diện vuông góc với nhau.

b) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Tính thể tích mặt cầu khi (SBC) tại với (ABC) một góc bằng 60°.

Hướng dẫn

a) Tứ diện SABC chỉ có một cặp đối diện SA và BC vuông góc với nhau.

b) Kết quả $V = \dfrac{7}{36}\pi a^3\sqrt{42}$.

Bài tập 14. 7: Cho một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R. Trên các đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm M, N. Một mặt phẳng (P) qua MN và song song với trục hình trụ cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác MPNQ.

a) Xác định khoảng cách từ OO' đến (P) để thiết diện có diện tích bằng $2R^2$.

b) Xác định vị trí M, N trên (O) và (O') để khối tứ diện MONO' có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Dùng hai đường sinh MP và NQ. Kết quả OH = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

b) Kết quả OM hợp với ON góc 90°.

Bài tập 14. 8: Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh 2R.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích.

b) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Hướng dẫn

a) Hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh 2R nên h = 2 R, bán kính đáy R. Kết quả $S_{xq} = 4\pi R^2$; $S_{tp} = 6\pi R^2$; $V = 2\pi R^2$

b) Kết quả $V_{LT} = 4R^3$

Bài tập 14. 9: Cho hình nón có góc đỉnh 2α. Tính tỉ số bán kính mặt cầu ngoại tiếp và bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón.

Hướng dẫn

Tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp hình nón là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp thiết diện qua trục.

Kết quả $\dfrac{\cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}$.

Bài tập 14. 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn(O;R). Tính thể tích tứ diện ABCD biết rằng DA =BC, DB = CA, DC = AB và bán kính mặt cầu nội tiếp trong tứ diện ABCD đạt giá trị nhỏ nhất .

Hướng dẫn

Tứ diện gần đều. Kết quả $V = \dfrac{\sqrt{6}}{4}R^3$.

Bài tập 14. 11: Trong các hình hộp nội tiếp mặt cầu bán kính R, hãy xác định hình hộp có diện tích toàn phần lớn nhất.

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức AM – GM.

Kết quả hình hộp là hình lập phương.

Bài tập 14. 12: Cho hình chóp n– giác đều, gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và mặt cầu nội tiếp của hình chóp đó. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{r}{R}$.

Hướng dẫn

Xác định trước tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp n– giác đều chính là giao điểm của trục SO với mặt trung trực và mặt phân giác tương ứng.

Kết quả $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}}$.

Chuyên đề 15: TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Điểm và vectơ

Ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trên 3 trục Ox, Oy, Oz :

$\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

Hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ thì:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k} \end{cases}.$$

Hai vectơ: $\vec{u} = (x,y,z)$ và $\vec{v} = (x',y',z')$ thì:

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x' ; y \pm y'; z \pm z')$; $k\vec{u} = (kx; ky, kz)$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$[\vec{u};\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$
- 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng: $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq 0$

Diện tích và thể tích

Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

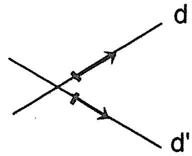
Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

Thể tích hình lăng trụ ABC.A′B′C′: $V = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

Góc giữa 2 mặt phẳng: mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'$ thì

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$$

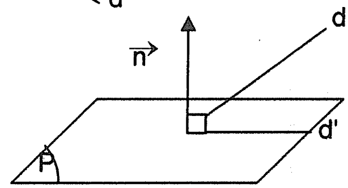
Góc giữa 2 đường thẳng:



d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$ thì

$\cos(d, d') = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:



d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$

$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$

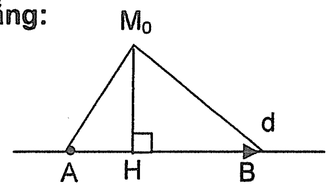
Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:

– (Oxy) là $|z_0|$; (Oyz) là $|x_0|$; (Ozx) là $|y_0|$

– (P): Ax + By + Cz + D = 0 là:

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:



Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và

có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ thì $d(M_0, d) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$ thì

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right|}.$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

Mặt phẳng qua $M_0(x_0,y_0)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A,B,C)$

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

hay $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Phương trình của đường thẳng: đi qua $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a,b,c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Phương trình tham số: $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc khi a, b, c $\neq$ 0: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Phương trình mặt cầu:

Mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \text{ hay:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$$

có tâm I(–A, –B, –C) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

– Cắt nhau: $A : B : C \neq A' : B' : C'$

– Trùng nhau: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$; Song song: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

Vị trí tương đối của 2 đường thẳng:

d qua $A(x_A, y_A, z_A)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (a,b,c)

d' qua $B(x_B, y_B, z_B)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ (a',b',c')

– Chéo nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$

– Cắt nhau: $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} = 0$ và $a : b : c \neq a' : b' : c'$

– Trùng nhau: $a : b : c = a' : b' : c' = (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

– Song song: $a : b : c = a' : b' : c' \neq (x_B - x_A) : (y_B - y_A) : (z_B - z_A)$

* Hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nằm về hai phía của mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ khi và chỉ khi:

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D).(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

Vị trí tương đối của 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng:

Đường thẳng d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) qua M_0 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

– Cắt nhau: $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$.

Song song: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \notin (P)$

– Đường thẳng thuộc mặt phẳng: $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $A \in (P)$

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu S(I; R) và mp(P). Gọi IH = d là khoảng cách từ tâm I đến (P) thì:

a) Nếu d < R: mp(P) cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm H là hình chiếu của tâm I lên mp(P), bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Đặc biệt, khi d = 0 thì mp(P) đi qua tâm I của mặt cầu, giao tuyến là đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính R.

b) Nếu d = R, mp(P) và mặt cầu S(I; R) có điểm chung duy nhất là H. Khi đó mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H hoặc mp(P) là tiếp diện của mặt cầu tại tiếp điểm H.

c) Nếu d > R: mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.

Ứng dụng giải bài toán không gian:

Đưa tọa độ Oxyz vào bài toán hình học không gian thuần túy, bằng cách chọn hệ trục thuận lợi để giải toán.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 15. 1: Cho hình bình hành ABCD với A(–3; –2; 0), B(3; –3; 1), C(5; 0; 2). Tìm toạ độ đỉnh D và tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-6; 1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 3; 1)$. Vì toạ độ của hai vectơ đó không tỉ lệ nên ba điểm A, B, C, không thẳng hàng.

Gọi D(x; y; z). Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 2 \\ y + 2 = 3 \\ z \quad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } D(-1; 1; 1)$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (8; 2; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; 4; 0)$, do đó:

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72}.\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}. \text{Vậy } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ.$$

Bài toán 15. 2: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5).

a) Tính diện tích và độ dài đường cao h_A.

b) Tính độ dài đường phân giác trong BD.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; 5; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-38; -26; -10)$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{554}$$

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{554}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{277}}{\sqrt{13}}.$$

b) Gọi D(x; y; z). Ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$

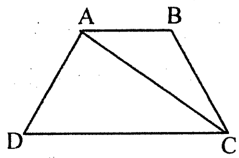
Vì D nằm giữa A, C nên $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Từ đó tìm được $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Bài toán 15. 3: Tính diện tích tứ giác ABCD có tọa độ A(2; 5; –4), B(1; 6; 3), C(–4; – 1; 12), D(–2; –3; –2).

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 7)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; -6; 16)$, hai vectơ này không cùng phương vì toạ độ không tỉ lệ suy ra A, B, C không thẳng hàng và có :



$\overrightarrow{DC} = (-2; 2; 14) = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow AB \parallel CD$.

Vậy ABCD là hình thang nên

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$= \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| + \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]\right| = 3\sqrt{1046}$.

Bài toán 15. 4: Cho tứ diện ABCD có: A(–1; 2; 0), B(0; 0; 1), C(0; 3; 0), D(2; 1; 0).

a) Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện ABCD.

b) Tìm hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC).

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (3; -1; 0)$

nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 1; 2) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Và $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -4 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{2}{3}$.

b) Gọi H(x; y; z) là hình chiếu D trên mặt phẳng (ABC) thì:

$\overrightarrow{AH} = (x + 1; y - 2; z)$, $\overrightarrow{DH} = (x - 2; y - 1; z)$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y = 3 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{11} \\ y = \frac{15}{11} \\ z = \frac{12}{11} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(\frac{18}{11}; \frac{15}{11}; \frac{12}{11}\right)$.

Bài toán 15. 5: Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 1 \end{cases}$, $\quad d': \begin{cases} x = 2-3t' \\ y = -2+3t' \\ z = 3 \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, $\quad$ d': $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{3}$

Hướng dẫn giải

a) d đi qua điểm $M_1(1; -1; 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; 0)$. d' đi qua điểm $M_2(2; -2; 3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1; 1; 0)$.

Vì $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương nhưng $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; -1; 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy $d(d, d') = d(M_1, d') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 2.$

b) d qua M(0; 4; –1) có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -2)$

d' qua M'(0; 2; 0) có VTCP $\vec{u}' = (-1; 3; 3)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{u}'] = (9; 5; -2)$, $\overrightarrow{MM'} = (0; -2; 1)$ nên $[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} \neq 0$ nên chéo nhau. Do đó $d(d, d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u}'\right]\right|} = \dfrac{|-10-2|}{\sqrt{81+25+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

Bài toán 15. 6: Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 1; 0), C(3; 1; –1).

Hướng dẫn giải

M thuộc (Oxz) trên M(x; 0; z). Ta có: MA = MB = MC

$\Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 1 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + 1 + z^2 \\ (x-1)^2 + 1 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + 1 + (z+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2z = 1 \\ 4x + 4z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{6} \\ z = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$. $\quad$ Vậy $M\left(\dfrac{5}{6}; 0; -\dfrac{7}{6}\right)$.

Bài toán 15. 7: Cho hai điểm A(2; 0; –1), B(0; –2; 3)

a) Tìm toạ độ điểm $C \in Oy$ để tam giác ABC có diện tích bằng $\sqrt{11}$ và thoả mãn. OC < 1.

b) Tìm điểm $D \in (Oxz)$ để ABCD là hình thang có cạnh đáy AB.

Hướng dẫn giải

a) Gọi C(0; y; 0) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -2; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; y; 1)$.

Ta có: $S_{ABC} = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(2+4y)^2 + 36 + (2y+4)^2} = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow 20y^2 + 32y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = -\frac{3}{5}$ (loại).

Vậy C(0; –1; 0)

b) Gọi D(x; 0; z) $\in$ (Oxz) $\Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-x; -1; -z)$

ABCD là hình thang khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \frac{-x}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-z}{4} > 0 \Leftrightarrow x = 1, z = -2$. Vậy D(1; 0; –2).

Bài toán 15. 8: Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu của

a) A(–2; 1; 0) trên đường thẳng BC với B(0; 3; –1), C(–1; 0; 2).

b)D(1; 1; 1) lên mặt phẳng (ABC) với A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5).

Hướng dẫn giải

a) H(x; y; z) thuộc BC nên $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

Do đó x = –t, y – 3 = –3t, z + 1 = 3t

$\Rightarrow$ x = –t, y = 3 – 3t, z = –1 + 3t

Ta có AH $\perp$ BC nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$(-t + 2)(-1) + (-3t + 2)(-3) + (z + 1)3 = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{9}$.

Vậy hình chiếu $H\left(-\frac{11}{9}; \frac{24}{9}; \frac{14}{9}\right)$.

Cách khác : lập mp (P) qua A vuông góc với BC rồi tìm giao điểm H.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 4; 1)$ nên mp(ABC) có VTPT:

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (14; 10; 2)$ hay (7; 5; 1) .

(P): 7(x – 4 + 5(y – 1) + 1(z – 4) = 0 hay 7x + 5y + z – 37 = 0.

Đường thẳng d qua A, vuông góc với (ABC) có phương trình tham số:

$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Thế x, y, z vào (P) thì $t = \frac{8}{25}$

Vậy hình chiếu có toạ độ $H\left(\frac{81}{25}; \frac{13}{5}; \frac{33}{25}\right)$.

Bài toán 15. 9:

a) Tìm toạ độ đỉnh D thuộc trục Oy của tứ diện ABCD có A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3) và $V_{ABCD} = 5$.

b) Tìm toạ độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với A(0; 4; 1), B(1; 0; 1), C(3; 1; –2).

Hướng dẫn giải

a) Gọi D(0; y; 0) thuộc trục Oy. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; y-1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = -4y + 2$.

Theo giả thiết $V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}\right| = 5$

$\Leftrightarrow |-4y+2| = 30 \Leftrightarrow y = -7; y = 8$

Vậy có 2 điểm D trên trục Oy: (0; –7; 0) và (0; 8; 0).

b) Ta có $\overrightarrow{AC} = (3; -3; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 1; -3)$ nên lập được phương trình mặt phẳng (ABC) : $3x + y + 2z - 6 = 0$

Gọi H(x; y; z) là trực tâm tam giác ABC.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x; y-4; z-1)$, $\overrightarrow{BH} = (x-1; y; z-1)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H: \begin{cases} x = \dfrac{25}{19} \\ y = \dfrac{11}{19} \\ z = \dfrac{14}{19} \end{cases}$$

Gọi I(x; y; z) là đường tròn ngoại tiếp: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in (ABC) \end{cases}$

Từ đó giải được tâm $I\left(-\dfrac{4}{13}; \dfrac{29}{13}; \dfrac{37}{26}\right)$.

Bài toán 15. 10: Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P)

$$3x - 8y + 7z - 1 = 0.$$

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P)

b) Tìm điểm C nằm trên mp(P) sao cho ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I(x; y; z) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 0; 2)$, $\overrightarrow{AI} = (x; y; z + 13)$

Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ hay

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Mặt khác I $\in$ (P) $\Rightarrow$ 3x – 8y + 7z – 1 = 0. Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

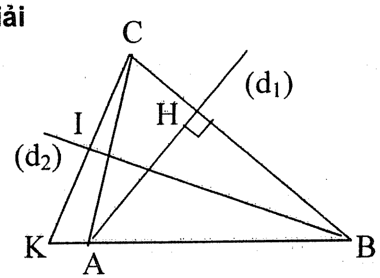
b) Ta có AB = $2\sqrt{2}$, gọi điểm C(x; y; z)

Ta có $\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$

Giải ra có hai điểm: C(2; –2; –3), $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Bài toán 15. 11: Cho tam giác ABC có C(3; 2; 3), đường cao AH nằm trên đường thẳng (d_1): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$, đường phân giác trong BM của góc B nằm trên đường thẳng (d_2): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm đỉnh A và B.

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (P) qua C, $\perp$ (d_1) là:

1.(x – 3) + 1.(y – 2) – 2.(z – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ x + y – 2z + 1 = 0.

(P) $\cap$ (d_2) = B(1; 4; 3)

Mặt phẳng (Q) qua C, $\perp$ (d_2) là:

1.(x – 3) – 2.(y – 2) + 1.(z – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ x – 2y + z – 2 = 0

(Q) $\cap$ (d_2) = I(2; 2; 4)

K đối xứng với C qua (d_2) thì K nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Vì I là trung điểm của CK nên K(1; 2; 5).

Đường thẳng (Δ) đi qua KB là : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

Do đó: (Δ) cắt (d_1) tại A(1; 2; 5)

Bài toán 15. 12: : Cho A(1; 0; 0), B(0; 1; 2). Tìm C ∈ Oz để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (α): 2x – 2y – z +5 = 0 một góc bằng 60^0.

Hướng dẫn giải

Gọi C(0; 0; m) ∈ Oz. Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (–1; 1; 2), $\overrightarrow{AC}$ = (–1; 0; m)

$\Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ = (m; m–2; 1) là vectơ pháp tuyến của (ABC).

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (2; –2; –1).

Mp(ABC) và (α) hợp nhau góc 60^0 nên:

$$\cos 60^0 = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|2m + 4 - 2m - 1|}{3\sqrt{m^2 + 1 + (m-2)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Vậy có hai điểm C(0; 0; $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$), C'(0; 0; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$)

Bài toán 15. 13: Cho điểm A(1; 0; –1), B(2; 3; –1), C(1; 3; 1) và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình: x – y + 1 = 0, x + y + z – 4 = 0. Tìm toạ độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}$ = (1; 3; 0), $\overrightarrow{AC}$ = (0; 3; 2) nên d có VTCP $\vec{u}$ = [$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$] = (6; –2; 3).

Phương trình của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Vì D ∈ d nên D(t; 1+t; 3–2t) ⇒ $\overrightarrow{AD}$ = (t–1; t+2;–2t+4)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{|2-t|}{3}$$

Do đó $V_{ABCD} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2-t|}{3} = 1 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc t = 5.

Vậy có hai điểm D thoả mãn bài toán là D(–1; 0; 5) và D(5; 6; –7).

Bài toán 15. 15: Cho hai đường thẳng: d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình: 5x – 6y – 6z + 13 = 0, x – 6y + 6z – 7 = 0.

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm I.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

Hướng dẫn giải

a) Toạ độ giao điểm I của d_1 và d_2 thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ 5x - 6y - 6z + 13 = 0 \\ x - 6y + 6z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.\ \text{Vậy } I(1;\ 1;\ 2)$$

b) Vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u}_1 = (2;\ 2;\ 1)$

Vectơ chỉ phương của d_2 là $\vec{u}_2 = [\vec{n}, \vec{n}'] = (-72; -18; -12)$ hay $(6; 3; 2)$.

Gọi φ là góc giữa d_1 và d_2 ta có: $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{20}{21} \Rightarrow \sin\varphi \dfrac{\sqrt{41}}{21}$

Ta có $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}IA^2\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{41}}{42}IA^2 = \dfrac{\sqrt{41}}{42} \Leftrightarrow IA = IB = 1$.

Vì A thuộc d_1 nên toạ độ của $A(1 + 2t;\ 1 + 2t;\ 2 + t)$

Do đó $IA = 3|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{3}$ nên $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Vì B thuộc d_2 nên toạ độ của $B(1 + 6k;\ 1 + 3k;\ 2 + 2k)$.

Do đó $IB = 7|k| = 1 \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{7}$

Suy ra $B\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

Bài toán 15. 16: Cho hai mặt phẳng:

$2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$.

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng song song; trùng nhau; cắt nhau; vuông góc.

Hướng dẫn giải

Hai mặt phẳng đã cho có các vectơ pháp tuyến lần lượt là :

$\overrightarrow{n_1}(2; -m; 3)$, $\overrightarrow{n_2} = (m + 3; -2; 5m + 1)$. Ta có:

$[\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}] = (-5m^2 - m + 6; -7m + 7; m^2 + 3m - 4)$

Hai vectơ đó cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{n}_1; \vec{n}_2] = \vec{0}$, tức là:

$$\begin{cases} -5m^2 - m + 6 = 0 \\ -7m + 7 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, m = -\dfrac{6}{5} \\ m = 1 \\ m = 1, m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Khi đó hai mặt phẳng có phương trình là

$2x - y + 3z - 5 = 0$ và $4x - 2y + 6z - 10 = 0$ nên chúng trùng nhau. Vậy:

Không có giá trị m nào để hai mặt phẳng đó song song

Khi m = 1, hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Khi $m \neq 1$, hai mặt phẳng đó cắt nhau.

Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$.

$\Leftrightarrow 2(m + 3) + 2m + 3(5m + 1) = 0 \Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{19}$.

Bài toán 15. 17: Xác định các giá trị p và m để ba mặt phẳng sau đây đi qua một đường thẳng:

$$5x + py + 4z + m = 0;\ 3x - 7y + z - 3 = 0;\ x - 9y - 2z + 5 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Các điểm chung trên 2 mặt phẳng $3x - 7y + z - 3 = 0$ và $x - 9y - 2z + 5 = 0$ có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0 \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}, z = \dfrac{18}{7}$ suy ra $A\left(\dfrac{1}{7}; 0; \dfrac{18}{7}\right)$

Cho $z = 0 \Rightarrow x = \dfrac{31}{10}, y = \dfrac{9}{10}$ suy ra $B\left(\dfrac{31}{10}; \dfrac{9}{10}; 0\right)$.

Ba mặt phẳng cùng đi qua một đường thẳng khi mặt phẳng:

$5x + py + 4z + m = 0$ đi qua hai điểm A và B:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{7} + \dfrac{72}{7} + m = 0 \\ \dfrac{155}{10} + \dfrac{9p}{10} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ p = -5 \end{cases}$$

Bài toán 15. 18: Cho điểm A(1; –1; 1) và hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 + 5t' \end{cases}$$

Chứng minh (d_1), (d_2) và A cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

(d_2) qua B(0; 1; 4) và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 5)$

Mp(A, d_2) qua B và có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{AB}] = (-4; -8; -4)$ hay $(1; 2; -1)$ nên có phương trình: $x + 2y - z + 2 = 0$

Ta có (d_1) qua M(0; –1; 0) và N(–1; 1; 3)

Vì M, N thuộc mp(A, d_2) nên d_1 thuộc mp(A, d_2)

Vậy A, (d_1), (d_2) cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài toán 15. 19: Cho bốn điểm A(–3; 5; 15), B(0; 0; 7), C(2; –1; 4), D(4; –3; 0). Chứng minh hai đường thẳng AB và CD cắt nhau, tìm toạ độ giao điểm.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -5; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (5; -6; -11)$

$\overrightarrow{AD} = (7; -8; -15)$, $\overrightarrow{CD} = (2; -2; -4)$

Do đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; -7; 7) \Rightarrow [\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}] . \overrightarrow{AD} = 0$ nên AB, CD đồng phẳng, hơn nữa $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương, do đó 2 đường thẳng AB và CD cắt nhau.

Gọi $M(x_M; y_M, z_M)$ là giao điểm của AB và CD.

Đặt $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MD}$. Ta có:

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k} = \frac{x_C - k'x_D}{1-k'} \Leftrightarrow \frac{-3}{1-k} = \frac{2-4k'}{1-k'}$$

$$y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k} = \frac{y_C - k'y_D}{1-k'} \Leftrightarrow \frac{5}{1-k} = \frac{-1+3k'}{1-k'}$$

$$z_M = \frac{z_A - kz_B}{1-k} = \frac{y_C - k'z_D}{1-k'} \Leftrightarrow \frac{15-7k}{1-k} = \frac{4}{1-k'}$$

Giải ra được $k' = \frac{7}{11}$ nên $M\left(\frac{-3}{2}; \frac{5}{2}; 11\right)$.

Bài toán 15. 20: Cho bốn đường thẳng :

(d_1): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ (d_2): $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$

(d_3): $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ (d_4): $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

Chứng minh tồn tại một đường thẳng (d) cắt cả bốn đường thẳng đó. Viết phương trình chính tắc của (d).

Hướng dẫn giải

(d_1) qua A(1; 2; 0), $A \notin (d_2)$, (d_1) và (d_2) cùng có vectơ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$ nên $(d_1) // (d_2)$, (d_2) qua B(2; 2; 0), $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua (d_1), (d_2) là: PT của (P) là $y + z - 2 = 0$

$(d_3) \cap (P) = E\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $(d_4) \cap (P) = F(4; 2; 0)$

Đường thẳng (d) qua E, F là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}$. Vậy (d) cắt cả bốn đường thẳng đã cho.

Bài toán 15. 21: Cho sáu điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), A'(a'; 0; 0), B'(0; b'; 0), C'(0; 0; c') với aa' = bb' = cc' $\neq 0$; $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$.

a) Chứng minh có một mặt cầu đi qua sáu điểm nói trên.

b) Chứng minh đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và trọng tâm tam giác ABC, vuông góc với mặt phẳng (A'B'C').

Hướng dẫn giải

Ta xác định tâm và bán kính R của mặt cầu qua 4 điểm A, A', B, C.

Gọi I(x; y; z) là tâm mặt cầu đó, ta có: $IA^2 = IA'^2 = IB^2 = IC^2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax + a^2 = -2a'x + a'^2 \\ -2ax + a^2 = -2by + b^2 \\ -2ax + a^2 = -2cz + c^2 \end{cases}$$

Do đó $x = \frac{a+a'}{2} \Rightarrow y = \frac{b^2+aa'}{2b}$ và $z = \frac{c^2+aa'}{2c}$.

Tâm $I\left(\frac{a+a'}{2}; \frac{b^2+aa'}{2b}; \frac{c^2+aa'}{2c}\right)$.

Ta có: $R^2 = IB^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{aa'-b^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2$

Và $IB'^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2+aa'}{2b} - b'\right)^2 + \left(\frac{c^2+aa'}{2c}\right)^2 = IB^2$

Tương tự $IC^2 = IC'^2 = IB^2$. Vậy B',C' cũng thuộc mặt cầu.

b) Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (-a'; b'; 0)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-a'; 0; c')$ nên $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} = -\frac{aa'}{3} + \frac{bb'}{3} + 0 = 0$;

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'C'} = -\frac{aa'}{3} + \frac{cc'}{3} + 0 = 0$

Do đó OG $\perp$ A'B', A'C' $\Rightarrow$ OG $\perp$ mp(A'B'C').

Bài toán 15. 22: Chứng minh các mặt phẳng (P_m): (2 + m)x + (1 + m)y + (1 + m)z + m – 1 = 0 luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

(P_m): 2x + y + z – 1 + m(x + y + z + 1) = 0.

Mặt phẳng (Pm) đi qua các điểm M(x; y; z) có toạ độ không phụ thuộc m khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Cho y = 0 thì x = 2, z = –3: A(2; 0; –3)

Cho z = 0 thì x = 2, y = –3: B(2; –3; 0).

Vậy các mặt phẳng (P_m) đi qua đường thẳng cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng: 2x + y + z – 1 = 0, x + y + z + 1 = 0 tức là đường thẳng AB cố định.

Bài toán 15. 23: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

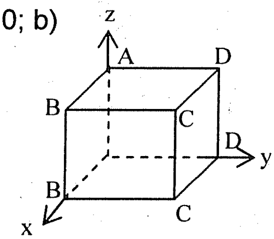
a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M.

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng (A'BD) ⊥ (MBD)

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết ta có: C(a; a; 0), C'(a; a; b) $\Rightarrow$ M(a; a; $\frac{b}{2}$)

Nên $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (0; a; \frac{b}{2})$, $\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$



$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Do đó: $V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$ (đvtt)

b) Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến là:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

mặt phẳng (A'BD) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(ab; ab; a^2\right)$

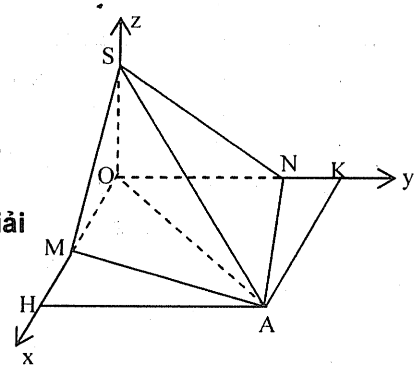
Do đó (BDM) ⊥ (A'BD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$

$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Bài toán 15. 24: Cho hai điểm S(0; 0; 1), A(1; 1; 0), hai điểm thay đổi M(m; 0; 0), N(0; n; 0) sao cho m + n = 1, m > 0, n > 0.

a) Chứng minh thể tích V của hình chóp S.OMAN không phụ thuộc vào m và n.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.



Hướng dẫn giải

a) Hình chóp S.OMAN có chiều cao SO = 1 không đổi, tứ giác đáy nằm trong mặt phẳng Oxy có diện tích:

$S = S_{AOM} + S_{AON} = \frac{1}{2}OM.AH + \frac{1}{2}ON.AK = \frac{1}{2}(m + n) = \frac{1}{2}$: không đổi.

b) Phương trình mặt phẳng (SMN) là

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0.$

$d(A, (SMN)) = \frac{|n.1 + m.1 + 0 - mn|}{\sqrt{n^2 + m^2 + m^2.n^2}} = 1$: không đổi.

Vậy (SMN) tiếp xúc với mặt cầu tâm A, bán kính R = 1.

Bài toán 15. 25: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O. Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Hướng dẫn giải

a) $C(-2; 0; 0)$, $D(0; -1; 0)$, $M(-1; 0; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

$\cos(SA.BM) = \left|\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SA, BM) = 30^0$

Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM} = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$

nên $d(SA, BM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

b) MN // AB, CD nên N trung điểm SO, $N(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SN} = (0; -\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$

và $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$.

Ta có:

$V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SB}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$

Bài toán 15. 26: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD

Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện cũng đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đó. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng $\frac{GA}{GA'} = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta giải bằng phương pháp toạ độ.Trong không gian toạ độ Oxyz, giả sử $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3, z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ thì trọng tâm A' của tam giác BCD, trọng tâm tứ diện G:

$$A'\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3};\frac{y_2+y_3+y_4}{3};\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

Do đó:

$$\overrightarrow{GA} = \left(\frac{3x_1-x_2-x_3-x_4}{4};\frac{3y_1-y_2-y_3-y_4}{4};\frac{3z_1-z_2-z_3-z_4}{4}\right)$$

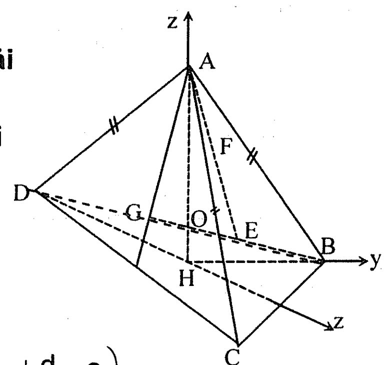
$$\overrightarrow{GA'} = \left(\frac{-3x_1+x_2+x_3+x_4}{12};\frac{-3y_1+y_2+y_3+y_4}{12};\frac{-3z_1+z_2+z_3+z_4}{12}\right)$$

Suy ra: $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'} \Rightarrow$ G, A, A' thẳng hàng và $\frac{GA}{GA'} = 3$.

Tương tự thì có đpcm.

Bài toán 15. 27: Cho tứ diện nội tiếp trong mặt cầu tâm O và có AB = AC = AD. Gọi G là trọng tâm ΔACD, E, F là trung điểm BG, AE. Chứng minh: $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

Hướng dẫn giải



AB = AC = AD và OB = OC = OD

$\Rightarrow OA \perp (BCD)$ tại chân đường cao H với HB = HC = HD.

Chọn H làm gốc toạ độ, với hệ trục Hx, Hy, Hz sao cho HA là trục Hz, HB là trục Hy, HD là trục Hx.

$A(0; 0; a)$, $B(0; b; 0)$; $C(c_1; c_2; 0)$,

$D(d_1; d_2; 0)$ và $O(0; 0; z)$ suy ra $G\left(\frac{c_1+d_1}{3};\frac{c_2+d_2}{3};\frac{a}{3}\right)$,

$$E\left(\frac{c_1+d_1}{6};\frac{b}{2}+\frac{c_1+d_2}{3};\frac{a}{6}\right); F\left(\frac{c_1+d_1}{12};\frac{b}{4}+\frac{c_2+d_2}{12};\frac{7a}{12}\right)$$

và $\overrightarrow{OF} = \left(\frac{c_1+d_1}{12}; \frac{b}{4} + \frac{c_2+d_2}{12}; \frac{7a}{12} - z\right)$; $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{c_1+d_1}{3}; \frac{c_2+d_2}{3} - b; \frac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC} = (c_1; c_2; -a)$, $\overrightarrow{OD} = (d_1; d_2; -z)$

Theo giả thiết OA = OB = OC = OD $\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$

$\Leftrightarrow (a-z)^2 = b^2 + z^2 = c_1^2 + c_2^2 + z^2 = d_1^2 + d_2^2 + z^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2az = b^2 = c_1^2 + c_2^2 = d_1^2 + d_2^2$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{BG} = 0 \Leftrightarrow (c_1+d_1)^2 + (c_2+d_2)^2 - 9b^2 + 7a^2 - 12az = 0$ (2)

Khai triển (2) và thay thế (1) ta được:

(2) $\Leftrightarrow a_2 + c_1d_1 + c_2d_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$: đpcm.

Bài toán 15. 28: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của A'D' và B'B.

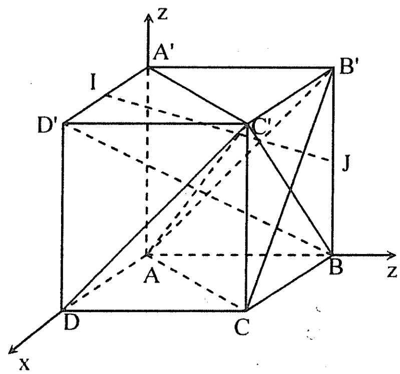
a) Chứng minh rằng IJ $\perp$ AC'. Tính độ dài đoạn thẳng IJ.

b) Chứng minh rằng D'B $\perp$ mp(A'C'D), mp(ACB'). Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D.

Hướng dẫn giải

a) Chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho

A(0; 0; 0), D(a; 0; 0), B(0; a; 0), A'(0; 0; a). Ta có C' (a; a; a), B'(0; a; 0), D'(a; 0; a) nên:



$I(\frac{a}{2}; 0; a)$; $J(0; a; \frac{a}{2})$

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (0 - \frac{a}{2}; a - 0; \frac{a}{2} - a)$

$= (-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2})$

$\overrightarrow{AC'} = (a-0; a-0; a-0) = (a; a; a)$

nên $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC'} = -\frac{a}{2}.a + a.a - \frac{a}{2}.a = -a^2 + a^2 = 0.$

Vậy IJ $\perp$ AC'. Đoạn $IJ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) Để chứng minh D'B $\perp$ mp(A'C'D), ta chứng minh

$\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$

Ta có $\overrightarrow{D'B} = (-a; a; -a)$, $\overrightarrow{A'C'} = (a; a; 0)$; $\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$

Do đó $\overrightarrow{D'B}\overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B}.\overrightarrow{A'D} = 0$. Tương tự, D'B $\perp$ mp(ACB')

$\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng IJ và A'D thì:

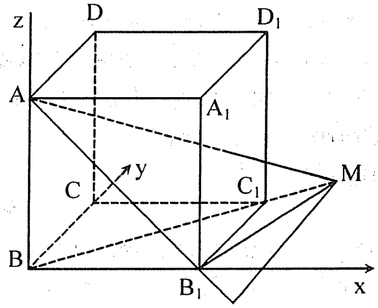
$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{A'D})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{A'D}\right|}{IJ.A'D} = \left|\frac{-\frac{a}{2}.a + a.0 - \frac{a}{2}(-a)}{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2}}\right| = 0$$

Vậy $\varphi = 90^\circ$.

Bài toán 15. 29: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a, trên BC_1 lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng. Tính diện tích S của ΔMAB_1.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ Oxyz sao cho $B \equiv 0$, $B_1(a; 0; 0)$, $C_1(a; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $A(0; 0; a)$, $A_1(a; 0; a)$, $D_1(a; a; a)$, $D(0; a; a)$.



Vì $M \in BC_1$ nên gọi $M(x; x; 0)$

Ta có $\overrightarrow{D_1M} = (x - a; x - a; -a)$

$\overrightarrow{DA_1} = (-a; a; 0)$

$\overrightarrow{AB_1} = (a; 0; -a)$

Vì $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng nên

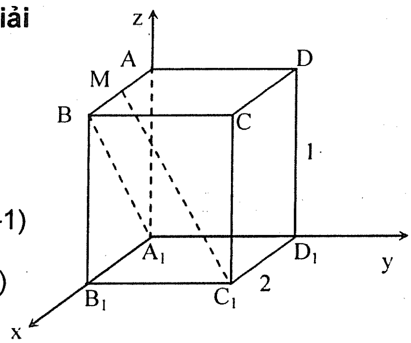
$\left[\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}\right]\overrightarrow{AB_1} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{a}, 0\right)$

nên $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3a}{2}, -\frac{3a}{2}, a\right)$; $\overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}, 0\right)$

Vậy: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{19}}{4}$.

Bài toán 15. 30: Lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy . Điểm M thay đổi trên cạnh AB. Tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục như hình vẽ (A_1xyz)

Đặt $AM = x$, $0 \le x \le 2$.

Ta có: $M(x; 0; 1)$; $A_1(0; 0; 0)$;

$C_1(2; 2; 2)$

nên $\overrightarrow{MA'} = (-x; 0; -1)$; $\overrightarrow{MC'_1} = (2-x; 2; -1)$

Đặt $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ thì: $\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1})$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+5}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+5}} \geq 0$$

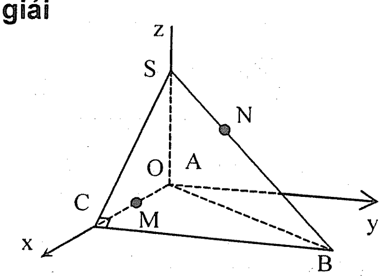
Do đó $\alpha \leq 90^o$. Vậy góc $\alpha = \widehat{A_1MC_1}$ lớn nhất khi x = 1 tức M trung điểm AB.

Bài toán 15. 31: Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

Hướng dẫn giải



Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy. Khi đó: A(0; 0; 0), C(b; 0; 0), B(b; a; 0), S(0; 0; h), $M(\frac{b}{2}; 0; 0)$

$\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$. Gọi N(x; y; z) thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên

$$x = \frac{b}{3}, y = \frac{a}{3} \text{ và } z - h = \frac{-h}{3} \Rightarrow z = \frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$$

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6};\frac{a}{3};\frac{2h}{3}\right)$

Nên $MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$

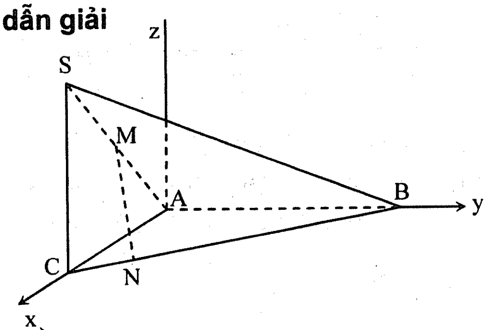
$$\Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2.$$

Bài toán 15. 32: Cho tứ diện SABC có SC = CA = AB = $a\sqrt{2}$, SC $\perp$ (ABC), tam giác ABC vuông tại A. Các điểm M $\in$ SA, N $\in$ BC sao cho: AM = CN = t (0 < t < 2a).

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Hướng dẫn giải



a) Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc toạ độ O ≡ A. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục Oz ⊥ (ABC). Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có: A(0; 0; 0) , B(0; $a\sqrt{2}$; 0), C($a\sqrt{2}$; 0; 0), S($a\sqrt{2}$; 0; $a\sqrt{2}$)

$$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right);\ N\left(a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{2(a^2-2at+t^2)+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}=\sqrt{3t^2-4at+2a^2}$$

$$=\sqrt{3\left(t-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{2a^2}{3}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi t = $\frac{2a}{3}$.

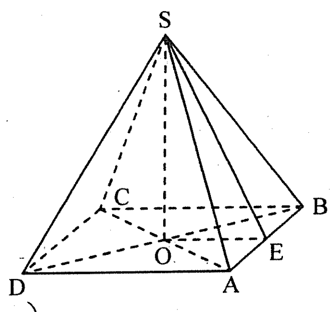
b) Khi MN ngắn nhất thì: $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$ và

$$N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};\ 0\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};\ -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right).$$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$ ⇒ đpcm.

Bài toán 15. 33: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy góc α. Tìm $\tan\alpha$ để SA vuông góc SC.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục Oxyz có O là tâm đáy ABCD, tia Ox chứa A, toa Oy chứa B, tia Oz chứa S. Ta có:

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right),\ B\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;0\right),\ D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)\ \text{và}\ S\left(0;0;\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

nên $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$

Ta có SA $\perp$ SC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\tan^2\alpha=0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha=2 \Leftrightarrow \tan\alpha=\sqrt{2}.$$

Bài toán 15. 34: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, D'D và B'C' theo cùng tỉ số $k \neq 0, 1$. Chứng minh rằng mp(MNP) luôn luôn song song với mp(AB'D').

Hướng dẫn giải

Đặt A'B' = a, A'D' = b, A'A' = c. Ta dùng phương pháp toạ độ bằng cách chọn hệ trục toạ độ với gốc là: A'(0; 0; 0) sao cho B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0) và A(0; 0; c)

Ta có C'(a; b; 0), B(a; 0; c), D(0; b; c) và C(a; b; c). Các điểm M, N, P chia các đoạn thẳng AB, D'D', B'C' theo cùng tỷ số k nên:

$$M\left(-\frac{ka}{1-k};0;c\right),\ N\left(0;b;\frac{-kc}{1-k}\right),\ P\left(a;\frac{-kb}{1-k};0\right)$$

Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{ka}{1-k};b;-\frac{1}{1-k}c\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(a;\frac{-1}{1-k}b;\frac{kc}{1-k}\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right]=\left(\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}bc;\ \frac{k^2+k-1}{(1-k)^2}ca;\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}ab\right)$

nên mp(MNP) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ = (bc; ca; ab)

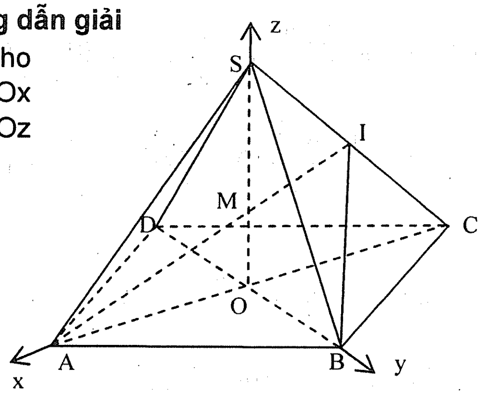
Mặt phẳng (AB'D') có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}'=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Vì $\frac{bc}{\frac{1}{a}}=\frac{ca}{\frac{1}{b}}=\frac{ab}{\frac{1}{c}}=abc$ và M, N, P $\notin$ (AB'D') do $k \neq 0$ nên:

mp(MNP) // mp(AB'D').

Bài toán 15. 35: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm cạnh bên SC. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI).

Hướng dẫn giải



Ta chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, trục Ox chứa OA, trục Oy chứa OB, trục Oz chứa SO. Khi đó:

$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,

$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S(0; 0; h)$

Ta có giao điểm M của SO và AI là trọng tâm tam giác SAC nên $M\left(0; 0; \frac{h}{3}\right)$. Mặt phẳng đi qua A, B, MI cũng chính là mặt phẳng (ABM)

nên có phương trình là: $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{2}} = 1$.

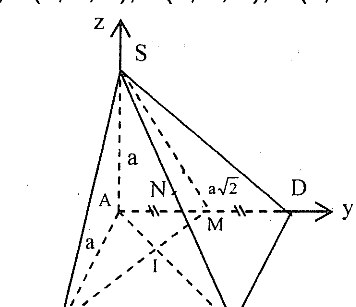
Do đó, khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABM) là:

$$d = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$$

Bài toán 15. 36: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a, SA vuông góc (ABCD). Gọi M, N là trung điểm AD, SC, gọi I là giao điểm BM và AC. Chứng minh (SAC) ⊥ (SMB) và tính thể tích khối ANIB.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. S(0; 0; a), A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; $a\sqrt{2}$; 0) thì: D(0; $a\sqrt{2}$; 0), M(0; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 0),



$N(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2})$

Vì $\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC$

$\Rightarrow I\ (\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0)$, $\overrightarrow{BM}(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$, $\overrightarrow{BS}(-a; 0; a)$

Mặt phẳng (SBM) có vectơ pháp tuyến:

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$$

Mặt phẳng (SBM) có vectơ pháp tuyến :

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = (-a^2\sqrt{2}\ ; a^2 ; 0)$$

Vì $\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 0$ nên 2 mặt phẳng (SAC), (SMB) vuông góc.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}}; \frac{a^2}{6}; 0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$

$$V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{a^3.\sqrt{2}}{36} \text{(đvtt)}.$$

Bài toán 15. 37: Cho tứ diện đều (T) có các đỉnh có toạ độ $(x_i; y_i; z_i)$ với $1 \le i \le 4$, nội tiếp trong một mặt cầu đơn vị. Chứng minh: $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 = \sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \frac{4}{3}$ và

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = \sum_{i=1}^{4} y_i z_i = \sum_{i=1}^{4} z_i x_i = 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta kiểm tra được rằng kết luận đúng cho trường hợp tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ có 4 đỉnh là $A_o(0; 0; 1)$

$$B_o\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right), C_o\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{3}\right), D_o\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Bây giờ, ta chứng minh khẳng định đúng cho một tứ diện ABCD có các đỉnh $(x_i; y_i; z_i)$ bất kỳ. Đầu tiên, ta quay (T) quanh trục z cho đến khi một đỉnh của nó nằm trong mặt phẳng (Oyz). Tiếp theo, ta quay nó quanh trục Ox cho đến khi đỉnh này trùng với điểm $A_o(0; 0; 1)$. Sau đó, lại quay quanh trục Oz cho đến khi (T) trùng với tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ đã nói ở trên $\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 15. 38: Cho hai điểm A(3; 1; 0), B(–9; 4; 9) và mp(α): $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm toạ độ điểm M trên (α) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x; y; z) = 2x - y + z + 1$ thì $f(x_A; y_A, z_A).f(x_B; y_B, z_B) < 0$ nên hai điểm A, B ở khác phía đối với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (α),

Ta có: $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$ (Không đổi).

A'H: $x = 3 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = t$ nên $H(3 + 2t; 1-t; t)$ thuộc (α) suy ra $t = 2$

$\Rightarrow H(1; 2; -1)$. Do đó $A'(-1; 3; -2)$.

Đường thẳng A'B có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \end{cases}$.

Điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ: $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(7; 2; -13).$

Bài toán 15. 39: Cho 4 điểm A(1; 0; 3), B(–3; 1; 3), C(1; 5; 1) và M(x; y; 0). Tìm giá trị nhỏ nhất T = $2\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của BC:

$\Rightarrow I(-1; 3; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow T = 2(MA + MI)$

$z_A = 3 > 0$ và $z_I = 2 > 0 \Rightarrow$ A và I nằm về cùng 1 phía đối với mp(Oxy) và M(x; y; 0) thuộc mp(Oxy) nên lấy đối xứng I(–1; 3; 2) qua mp(Oxy) thành J(–1; 3; –2)

$\Rightarrow MI = MJ \Rightarrow T = 2(MA + MJ) \geq 2AJ = 2\sqrt{38}$.

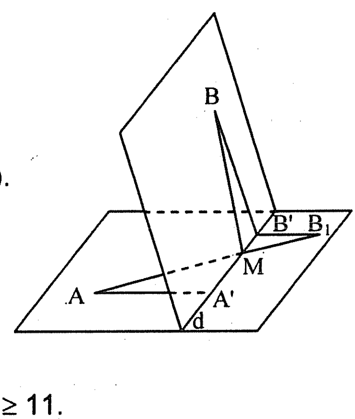
Dấu = xảy ra khi M là giao điểm của đoạn MJ với mp(Oxy) là $M\left(-\frac{1}{5}; \frac{9}{5}; 0\right)$.

Vậy min$T = 2\sqrt{38}$

Bài toán 15. 40: Cho A(2; –2; 1), B(0; 2; –3). Tìm điểm M thuộc

d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ sao cho MA + MB bé nhất.

Hướng dẫn giải



Ta tìm hình chiếu A', B' của A, B lên d.

Ta có M bất kỳ thuộc d thì M(1 + 2t; 2 – t; 1 + t).

$AM^2 = (2t - 1)^2 + (4 - t)^2 + t^2$

$= 6t^2 - 12t + 17$

$= 6(t - 1)2 + 11 \geq 11$

AM bé nhất khi t = 1, khi đó M là hình chiếu A'(3; 1; 2)

Tương tự $BM^2 = 6t^2 + 12t + 17 = 6(t + 1)^2 + 11 \geq 11$.

BM bé nhất khi t = 1, khi đó M là hình chiếu B'(–1; 3; 0).

Trên mp(A, d) lấy điểm B_1 sao cho B_1 và A khác phía đối với d, $B_1B' \perp d$, $B_1B' = BB'$.

Với mọi M thuộc d: MA + MB = MA + $MB_1 \geq AB_1$: không đổi, do đó MA + MB bé nhất khi M là giao điểm của AB_1 với d.

Ta có AA' // B_1B' nên M chia đoạn A'B' theo tỉ số:

$$k = -\frac{AA'}{B_1B'} = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = -1 \Rightarrow M(1; 2; 1).$$

Bài toán 15. 41: Tìm giá trị bé nhất của:

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2 + 25}$$

Hướng dẫn giải

Trong không gian Oxyz, xét M(x; y; 0) và 2 điểm cố định A(1; –3; 3), B(2; –4; –5) ở khác phía với mp(Oxy).

Ta có: f(x; y) = MA + MB $\geq$ AB = $\sqrt{66}$

Giá trị bé nhất của f(x; y) = $\sqrt{66}$ khi M là giao điểm của đoạn AB với mặt phẳng Oxy.

Bài toán 15. 42: Cho 9 số thực bất kì $a_1; b_1, c_1; a_2; b_2; c_2; a_3; b_3; c_3$ thoả mãn: $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $b_1 + b_2 + b_3 = 4$; $c_1 + c_2 + c_3 = 12$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \geq 13.$$

Hướng dẫn giải

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, chọn 3 điểm:

$A(a_1; b_1; c_1)$, $B(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$, $C(a_1 + a_2 + a_3; b_1 + b_2 + b_3; c_1 + c_2 + c_3)$ hay C(3;4;12) thì có:

$OA = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; $AB = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$; $BC = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}$

Nên ta có: $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}$

= OA + AB + BC $\geq$ OC = 13.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 15. 1: Cho $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Tìm k để vectơ $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

Hướng dẫn

Điều kiện tích vô hướng bằng 0. Kết quả k = 40.

Bài tập 15. 2: Cho tam giác ABC có A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1). Tính chu vi, diện tích và độ dài đường cao AH.

Hướng dẫn

Dùng công thức. Kết quả. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$; AH = $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Bài tập 15. 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các điểm A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; –1; 1) và C'(4; 5; –5). Tìm các điểm còn lại.

Hướng dẫn

Vì hình hộp ABCD.A'B'C'D' nên ABCD là hình bình hành.

Kết quả C(2; 0; 2) ;A'(3; 5; –6), B'(4; 6; 5), D'(3; 4; –6)

Bài tập 15. 4: Cho tứ diện ABCD có A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(–2; 1; –2)

a) Tính góc giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối của tứ diện đó.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao AH của tứ diện

Hướng dẫn

a) Kết quả $\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{3\sqrt{17}}{14}$; $\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right| = 0$; $\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{3\sqrt{17}}{14}$

b) Kết quả V = $\dfrac{2}{3}$ (đvtt); AH = $\dfrac{3V}{S_{BCD}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài tập 15. 5: Cho 4 điểm A(2; –4; 2), B(0; 2; –2), C(4; 8; 0), D(6; 2; 4). Chứng minh ABCD là hình thoi, tính diện tích và bán kính r đường tròn nội tiếp hình thoi.

Hướng dẫn

Chứng minh ABCD là hình bình hành có 2 cạnh liên tiếp bằng nhau.

Kết quả $S_{ABCD} = \sqrt{2736}$, $r = \sqrt{\dfrac{171}{14}}$

Bài tập 15. 6: Chứng tỏ rằng các mặt phẳng (α), (β), (γ) (δ) sau đây là các mặt phẳng chứa bốn mặt của một hình hộp chữ nhật:

(α): 7x + 4y – 4z + 30 = 0 , (β): 36x – 51y + 12z + 17 = 0

(γ): 7x + 4y – 4z – 6 = 0 , (δ): 12x – 17y + 4z – 3 = 0.

Hướng dẫn

Chứng minh : (α) // (γ), (β) // (δ) và (α) $\perp$ (β).

Bài tập 15. 7: Chứng minh các đường thẳng d_k là giao tuyến của 2 mặt phẳng: x + kz – k = 0, (1 – k)x – ky = 0, k ≠ 0 luôn nằm trên mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn

Khử tham số k giữa hai phương trình mặt phẳng.

Kết quả (P): x + y + z – 1 = 0.

Bài tập 15. 8: Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau:

a) M cách đều điểm A(2; 3; 4) và mặt phẳng 2x + 3y + z – 17 = 0

b) M cách đều hai mặt phẳng x + y – z + 1 = 0 và x – y + z + 5 = 0.

Hướng dẫn

a) Điểm M trên trục Oz nên M(0 ;0 ;z). Kết quả M(0; 0; 3)

b) Điểm M trên trục Oz nên M(0 ;0 ;z). Kết quả M(0; 0; –2).

Bài tập 15. 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Trên các cạnh BB', CD, AD' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho:

B'M = CN = DP = ka (0 < k < 1)

a) Tính diện tích tam giác MNR theo k và a.

b) Xác định vị trí M trên BB' để diện tích MNP có giá trị bé nhất.

Hướng dẫn

a) Chọn hệ trục toạ độ Axyz. Kết quả $S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}(k^2 - k + 1)$

b) Kết quả M là trung điểm BB'.

Bài tập 15. 10: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD, N là tâm hình vuông CC_1D_1D. Tìm bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, C_1, M, N.

Hướng dẫn

Chọn hệ trục toạ độ Axyz. Kết quả $R = \dfrac{a\sqrt{35}}{4}$

Bài tập 15. 11:

a) Tìm điểm M thuộc mp(Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất với A(–1; 6; 6), B(3; –6; –2).

b) Tìm điểm H trên BC sao AH bé nhất với A (4, 2, 6), B (4, –4, 0), C (10, –2, 4).

Hướng dẫn

a) Điểm M thuộc mp(Oxy) nên M(x;y;0). Kết quả M(2; –3; 0)

b) Kết quả $H(\dfrac{55}{77};-\dfrac{19}{7};\dfrac{18}{7})$

Bài tập 15. 12: Cho A(1; 4; 5), B(0; 3; 1); C(2; –1; 0) và mặt phẳng

$$(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0.$$

Tìm điểm M thuộc (P) để

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất.

b) $MA^2 + 1975.MB^2 + 2015.\ MC^2$ bé nhất.

Hướng dẫn

a) Dùng trọng tâm G của tam giác ABC. Kết quả M(4; –1; 0)

b) Dùng tâm tỉ cự I của hệ điểm : $\overrightarrow{IA} + 1975\overrightarrow{IB} + 2015\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Chuyên đề 16: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG VÀ MẶT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

Mặt phẳng qua $M_0(x_0,y_0)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A,B,C)$

$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

hay $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

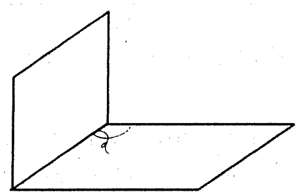
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ khi cắt 3 trục Ox, Oy, Oz tại 3 điểm khác gốc O là A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c).

Phương trình của đường thẳng: đi qua $M_0(x_0,y_0,z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a,b,c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Phương trình tham số: d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Phương trình chính tắc khi a, b, c $\neq$ 0:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



– Đường thẳng giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau:

Nếu $d = \alpha \cap \beta$ thì chọn VTCP $\vec{n} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$

Hoặc từ hệ $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ ta chọn ra 2 bộ nghiệm (x;y;z) tương ứng toạ độ của 2 điểm thuộc giao tuyến.

– Đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau:

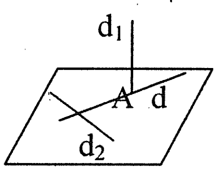
Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$

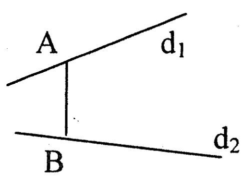
Đường thẳng d_2 qua M_2 và có VTCP $\vec{u}_2$

Cách 1: Đường vuông góc chung d có VTCP $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right]$

Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_2.

Tìm giao điểm A của d_1 và (P) thì d đi qua A và có VTCP $\vec{u}$.





Cách 2: Gọi đoạn vuông góc chung là AB, $A \in d_1$ và $B \in d_2$ dạng tham số theo t và t'. Tìm t và t' bằng hệ điều kiện:

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$. Đường vuông góc chung d là đường thẳng AB.

Phương trình mặt cầu:

Mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R:

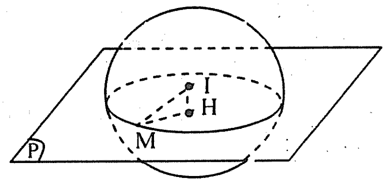
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \text{ hay:}$$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$

có tâm I(–A, –B, –C) và bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

Phương trình đường tròn giao tuyến

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$



Giao tuyến của mặt cầu (S) tâm I bán kính R và mặt phẳng (P) là đường tròn giao tuyến (C) có tâm H là hình chiếu tâm mặt cầu I lên mặt phẳng (P) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I;(P))}$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 16.1: Lập phương trình mặt phẳng:

a) Đi qua hai điểm A(1; 1; –1), B(5; 2; 1) và song song với trục Oz

b) Chứa giao tuyến của 2 mặt phẳng $x - y + z - 4 = 0$, $3x - y + z - 1 = 0$ và đi qua K(2; 1; –1).

Hướng dẫn giải

a) Mặt phẳng (P) song song với Oz nên có phương trình: $A'x + B'y + D' = 0$ với $D' \neq 0$, $A'^2 + B'^2 \neq 0$.

(P) đi qua A và B nên: $\begin{cases} A' + B' + D' = 0 \\ 5A' + 2B' + D' = 0 \end{cases} \Rightarrow 4A' + B' = 0.$

Chọn A' = 1, B' = –4 và do đó D' = 3 và được phương trình của (P) là:

$$x - 4y + 3 = 0.$$

b) Các điểm thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng có toạ độ (x; y; z) thoả mãn hệ

$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Cho y = 0 thì $\begin{cases} x + z = 4 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; 0; \dfrac{11}{2}\right)$.

Cho z = 0 thì $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ z = -\dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{11}{2}; 0\right)$.

Ta lập được phương trình (MNK): $15x - 7y + 7z - 16 = 0$.

Bài toán 16.2: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua điểm G(1; 2; 3) và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Đi qua điểm H(2; 1; 1) và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử A(a; 0; 0), B(0; b; 0) và C(0; 0; c). Vì G(1; 2; 3) là trọng tâm tam giác ABC nên: $\dfrac{a+0+0}{3} = 1; \dfrac{0+b+0}{3} = 2; \dfrac{0+0+c}{3} = 3$

Suy ra a = 3, b = 6, c = 9.

Vậy phương trình theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1$

b) Nếu mặt phẳng đi qua H(2; 1; 1) và cắt các trục toạ độ tại A, B, C thì tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, do đó H là trực tâm của tam giác ABC thì OH $\perp$ mp(ABC).

Vậy mp(ABC) đi qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ nên có phương trình: $2(x - 2) + (y - 1) + (z - 1) = 0$ hay $2x + y + z - 6 = 0$.

Bài toán 16.3: Viết phương trình của mặt phẳng qua điểm M(5; 4; 3) và cắt ba trục toạ độ ở ba điểm khác O, cách đều gốc toạ độ.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng cần tìm có dạng đoạn chắn:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ |a| = |b| = |c| \neq 0.$$

Điểm M(5; 4; 3) thuộc mặt phẳng nên: $\dfrac{5}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{3}{c} = 1$ (1)

Với b = a, c = a, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{5}{a} + \dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 12$.

Với b = a, c = –a, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{5}{a} + \dfrac{4}{a} - \dfrac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 6$.

Với b = –a, c = a, (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} - \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$.

Với b = –a, c = –a (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{a} - \frac{4}{a} - \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = -2$.

Do đó bốn mặt phẳng cần tìm là:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1\ ;\ \frac{x}{6} + \frac{y}{6} - \frac{z}{6} = 1\ ;\ \frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1\ ;\ \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Bài toán 16.4: Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

a) $2x - y + 4z + 5 = 0$ và $3x + 5y - z - 1 = 0$.

b) $x + 2y + z - 1 = 0$ và $x + 2y + z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi:

$$\frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}\,|3x + 5y - z - 1|$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}\,(3x + 5y - z - 1)$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng phân giác:

$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0,$

$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0.$

b) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng: $\frac{|x + 2y + z - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|x + 2y + z + 5|}{\sqrt{1+4+1}}$

$\Leftrightarrow |x + 2y + z - 1| = |x + 2y + z + 5|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = x + 2y + z + 5 \\ x + 2y + z - 1 = -(x + 2y + z + 5) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z + 2 = 0.$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng song song cách đều có phương trình: $x + 2y + z + 2 = 0$.

Bài toán 16.5: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua các điểm M(0; 0; 1), N(3; 0; 0) và tạo với mặt phẳng Oxy góc $\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; a; b)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (3; 0; -1)$

Vì $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MN} = 3.1 + 0 - b = 0$ nên b = 3. Do đó $\vec{n} = (1; a; 3)$.

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{\sqrt{a^2+10}} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

PT mặt phẳng (P) là: $1.(x-0) \pm \sqrt{26}\ (y-0) + 3.(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow x \pm \sqrt{26}.y + 3z - 3 = 0$.

Bài toán 16.6: Viết phương trình mp(P) chứa trục Oz và tạo với mp(α) có phương trình: $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^o.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) chứa Oz nên có dạng:

$Ax + By = 0 \Rightarrow \vec{n}_P = (A; B; 0)$, $\overrightarrow{n_\alpha} = (2; 1; -\sqrt{5})$.

Ta có : $\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_\alpha) = \frac{\left|2A+B\right|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{4+1+5}} = \cos 60^o = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\left|2A + B\right| = \sqrt{10}.\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0$.

Lấy B = 1, ta có: $6A^2 + 16A - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{3} \\ A_2 = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng (P) phải tìm: $\frac{1}{3}x + y = 0$; $-3x + y = 0$.

Bài toán 16.7: Cho tứ diện ABCD với A(3; 5; –1), B(7; 5; 3), C(9; –1; 5), D(5; 3; –3). Viết phương trình mặt phẳng cách đều 4 đỉnh của tứ diện đó.

Hướng dẫn giải

Một mặt phẳng cách đều hai điểm M, N thì hoặc nó đi qua trung điểm của MN hoặc nó song song với MN. Vì vậy, để mặt phẳng (P) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của hình tứ diện thì:

– Hoặc mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với một mặt.

– Hoặc mặt phẳng (P) chứa hai đường trung bình của tứ diện. Có ba mặt phẳng như vậy đi qua trung điểm một cạnh và song song với 2 cạnh đối chung mút. Từ đó tìm được bảy mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đầu bài là:

$x - z - 6 = 0; x + y - 10 = 0; x + 2y - z - 8 = 0; 2x + y - z - 14 = 0$

$x - y - z - 2 = 0 ; 2x + y + z - 16 = 0; 5x + y - 2z - 28 = 0.$

Bài toán 16.8: Trong hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(2; -1; 0)$ và $M_3(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M_3 mà khoảng cách từ M_1 và M_2 đến (P) đều bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) đi qua M(0; 0; 1) nên có phương trình

$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 1) = 0$

hay $Ax + By + Cz - C = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$.

Ta có khoảng cách $\frac{|A + C - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2A - B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $|A| = |2A - B - C|$ hay $\pm A = 2A - B - C$

Suy ra $C = A - B$ hoặc $C = 3A - B$.

– Với $C = A - B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$2A^2 = A^2 + B^2 + (A - B)^2 \Leftrightarrow 2B(B - A) = 0$.

Nếu $B = 0$ thì $C = A$, ta lấy $A = 1$ thì (P): $x + z - 1 = 0$

Nếu $A = B$ thì $C = 0$. Ta lấy $A = 1$ thì (P): $x + y = 0$.

– Với $C = 3A$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$2A^2 = A^2 + B^2 + (3A - B)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 6AB + 2B^2 = 0$.

$\Leftrightarrow (2A - \frac{3}{4}B)^2 + \frac{7B^2}{16} = 0 \Leftrightarrow A = 0, B = 0$ nên $C = 0$: loại

Bài toán 16.9: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu đã cho có tâm là I(1; 2; 3) và có bán kính

$R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình: $4x + 3y - 12z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi:

$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow |-26 + D| = 52 \Leftrightarrow D = 78$ hoặc $D = -26$

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu là:

$4x + 3y - 12z + 78 = 0$ và $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Bài toán 16.10: Lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng d: $\frac{x-13}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4}$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2+y^2-z^2-2x-4y-6z-67=0$.

Hướng dẫn giải

Tâm của (S) là I(1; 2; 3), bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+67}=9$

Đường thẳng d đi qua M(13; –1; 0) và N(12; 0; 4).

Phương trình(P): $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$.

(P) qua M, N nên: $\begin{cases}13A-B+D=0\\12A+4C+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=B+4C\\D=-12B-52C\end{cases}$

Do đó (P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$ (*)

Điều kiện (P) tiếp xúc (S): d(I, (P)) = R

$\Leftrightarrow\frac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow |B+5C|=\sqrt{2B^2+8BC+17C^2}$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0\Leftrightarrow B=4C$ hoặc $B=-2C$.

Thế vào (*) và rút gọn $C\neq 0$, ta được 2 mặt phẳng:

$2x-2y+z-28=0$, $8x+4y+z-100=0$.

Bài toán 16.11: Lập phương trình mặt cầu

a) Có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với A(0; –2; 1), B(–1; 0; 1), C(0; 0; –1).

b) Ngoại tiếp tứ diện ABCD với A(1; 2; –4), B(1; –3; 1), C(2; 2; 3), D(1; 0; 4).

Hướng dẫn giải:

a) Gọi I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;2;-2)$, $\overrightarrow{AI}=(x;y+2;z-1)$

$\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-4;2;-2)$

nên $I\in(ABC)\Leftrightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AI}=0\Leftrightarrow 2x-y+z-3=0$

Ta có $\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\\I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=-3\\y-z=-1\\-2x+y-z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-\frac{1}{4}\\z=\frac{3}{4}\end{cases}$

nên tâm $I\left(1;-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ và bán kính $R=AI=\sqrt{\frac{33}{8}}$

Vậy PT mặt cầu là $(x-1)^2+(y+\frac{1}{4})^2+(z-\frac{3}{4})^2=\frac{33}{8}$

b) Gọi I(a ; b; c) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7y = -2 \\ -2x + 8y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Do đó I(–2; 1; 0) và R = IA = $\sqrt{26}$.

Vậy (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$.

Bài toán 16.12: Cho bốn điểm A(3; 2; 0), B(–1; 3; 2), C(1; 0; 1), D(0; –1; 3). Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thoả mãn

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, I là trung điểm AB thì: $G(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2})$, $I(1; \frac{5}{2}; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CI}$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|\right|$

$\Leftrightarrow 4MG = 2CI \Leftrightarrow MG = \frac{CI}{2} = \frac{5}{4}$: không đổi.

Vậy tập hợp những điểm M (x; y; z) là mặt cầu tâm

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{16}.$$

Bài toán 16.13: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$ và đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$,

Δ_2: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) tâm I(1; –1; –2), R = 3.

Δ_1 đi qua điểm A(0; 1; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; –1; 1)

Δ_2 đi qua điểm B(1; 0; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ = (–1; 1; –1).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; 1; 1) \Rightarrow$ (P): $y + z + m = 0$. Điều kiện tiếp xúc: $d(I, (P)) = R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow m = 3 \pm 3\sqrt{2}$.

Vậy có 2 mặt phẳng :

(P_1): $y + z + 3 + 3\sqrt{2} = 0$, (P_2): $y + z + 3 - 3\sqrt{2} = 0$.

Các điểm A, B không thuộc hai mặt phẳng nên đó là 2 mặt cần tìm

Bài toán 16.14: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa giao tuyến d của 2 mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ và hợp với mp(Oxy) góc 60^o.

Hướng dẫn giải

Giao tuyến d của mặt phẳng: $x + y + z - 3 = 0$, $2x + y + z - 4 = 0$ đi qua M(1; 1; 1) và có VTCP $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (0; 1; -1)$

(P): $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ta có VTPT $\vec{n} = (A, B, C)$ vuông góc với $\vec{u}$ nên:

$B - C = 0 \Rightarrow C = B$. Do đó (P): $Ax + By + Bz - A - 2B = 0$

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\varphi = 60^o \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|B|}{\sqrt{A^2 + 2B^2}} = \dfrac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow A^2 = 2B^2 \Leftrightarrow A = \pm B\sqrt{2}.$$

Từ đó tìm được 2 mặt phẳng (P):

$\sqrt{2}x + y + z - \sqrt{2} - 2 = 0$, $\sqrt{2}x - y - z - \sqrt{2} + 2 = 0$.

Bài toán 16.15: Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng

(Δ): $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$, (Q): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

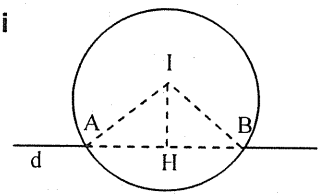
Ta có (P), (Q) song song nên tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn AB với A, B là giao điểm của (Δ) và 2 mặt phẳng đó (Δ) cắt (P) tại A(2; 1; 1), cắt (Q) tại B(–4; 5; 5) nên tâm I(–1; 3; 3).

Ta có $R = d(I, (P)) = \dfrac{|-1 + 2.3 - 2.3 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Bài toán 16.16: Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I(2; 3; –1), cắt đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -\dfrac{11}{2} + t \\ z = -14 - 2t \end{cases}$ tại 2 điểm A, B mà AB = 40.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm dây AB thì IH vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) qua I, vuông góc với d có phương trình:

2x + y – 2z – 9 = 0, suy ra giao điểm d và (P) là: H(–3; –7; –11).

Ta có $R^2 = IA^2 = AH^2 + IH^2 = 20^2 + 15^2 = 225$.

Vậy (S): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 225$

Cách khác: IH = d(I, d) = $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0I}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

Bài toán 16.17: Cho (P): 5x – 4y + z – 6 = 0, (Q): 2x – y + z + 7 = 0 và d là giao tuyến của 2 mặt phẳng: x – y + 2z – 3 = 0, x – 3y – z = 0. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I là giao điểm của d với (P), cắt (Q) theo đường tròn có chu vi 4π.

Hướng dẫn giải

Tâm I(x; y; z) có toạ độ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 5x - 4y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ nên I(1; 0; 1)

Ta có d = d(I, (Q)) = $\dfrac{|2.1 - 0 + 1 + 7|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$

Đường tròn giao tuyến có chu vi $4\pi\sqrt{5} = 2\pi r$ nên có bán kính $r = 2\sqrt{5}$, do đó $R^2 = d^2 + r^2 = \dfrac{110}{3}$.

Vậy phương trình (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \dfrac{110}{3}$.

Bài toán 16.18: Lập phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng: (P) : 2x – y + z + 5 = 0 ; (P'): 2x – z + 3 = 0.

b) Vuông góc với mp(ABC) có A(1; 0; –1), B(2; 3; –1), C(1; 3; 1) tại trực tâm H của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) (P), (P') có VTPT $\vec{n} = (2; -1; 1)$, $\vec{n}' = (2; 0; -1)$.

Gọi VTCP của giao tuyến d là $\vec{u}$ thì $\vec{u} \perp \vec{n}, \vec{n}'$

Chọn $\vec{u} = \left[\vec{n}, \vec{n}'\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1; 4; 2).$

Các điểm thuộc giao tuyến d có toạ độ thoả mãn hệ:

$\begin{cases} 2x - y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$. Cho x = 0 thì y = 8, z = 3.

Do đó d qua M(0; 8; 3), có VTCP $\vec{u} = (1; 4; 2)$ nên có phương trình tham số

và chính tắc là: $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$; $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-8}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

Cách khác: Ta có: $\begin{cases} 2x - y + z + 5 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 2x + 5 \\ z = 2x + 3 \end{cases}$

Đặt x = t thì y = 8 + 4t, z = 3 + 2t nên phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Ngoài cách tìm một điểm và VTCP, cách tạo tham số, ta có thể tìm 2 điểm trên giao tuyến.

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua C vuông góc với AB là:

$1(x - 1) + 3(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0.$

Phương trình mặt phẳng (β) qua B vuông góc với AC là:

$3(y - 3) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 3y + 2z - 7 = 0.$

Đường thẳng d qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là giao tuyến của (α) và (β).

Đường thẳng d qua N(1; 3; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}] = (6; -2; 3)$

nên có phương trình là: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

Bài toán 16.19: Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm

M(0; 1; –1) vuông góc và cắt đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (-4; 1; 4)$. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ thì $H(1 - 4t; t; -1 + 4t)$.

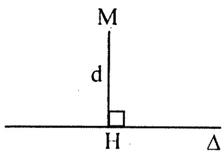
Ta có $\overrightarrow{MH} = (1-4t; t-1; 4t)$ nên $MH \perp \Delta$

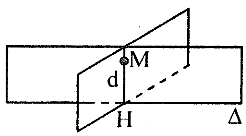
$\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow -4(1 - 4t) + 1(t - 1) + 4(4t) = 0.$

$\Leftrightarrow 33t = 5 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{33}$. Do đó $H\left(\dfrac{13}{33}; \dfrac{5}{33}; \dfrac{-13}{33}\right)$

d có VTCP $\overrightarrow{MH} = \left(\dfrac{13}{33}; \dfrac{-28}{33}; \dfrac{20}{33}\right)$ hay $(13; -28; 20)$

Vậy phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x}{13} = \dfrac{y-1}{-28} = \dfrac{z+1}{20}$.





Cách khác: Đường thẳng d cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng (M, Δ): $4x + 4y + 3z - 1 = 0$ và mặt phẳng qua M, vuông góc với Δ: $4x - y - 4z - 3 = 0$.

Bài toán 16.20: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của

a) Đường thẳng d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ trên mỗi mặt phẳng toạ độ.

b) Đường thẳng d : $\begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ lên mặt phẳng (P): $x + y + z - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Điểm M(x; y; z) thuộc d có hình chiếu lên mp(Oyz) là M'(0; y; z) thuộc d', d' là hình chiếu lên mp(Oyz).

Vậy phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$. Tương tự thì hình chiếu lên mp(Oxy), mp(Oxz) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + t \end{cases}$.

b) Ta viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d và vuông góc với mp(P). Vectơ pháp tuyến của của (Q) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overrightarrow{n_P}$ nên ta có thể lấy $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_P}] = (2; 1; -3)$. Và (Q) đi qua d nên đi qua M(0; 8; 3). Vậy (Q) có phương trình:

$$2(x-0) + (y-8) - 3(z-3) = 0 \text{ hay } 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'. Đường thẳng d' là giao tuyến của (Q) và (P) nên d' chứa các điểm có toạ độ (x, y, z) thoả mãn: $\begin{cases} x+y+z-7=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$

Đặt z = t thì x = –8 + 4t, y = 15 – 5t. Vậy d': $\begin{cases} x=-8+4t \\ y=15-5t \\ z=t \end{cases}$.

Cách khác: Tìm giao điểm A của d và (P). Thế toạ độ x, y, z vào (P): t + 8 + 4t) + (3 + 2t) – 7 = 0 $\Rightarrow t = -\dfrac{4}{7} \Rightarrow A\left(\dfrac{-4}{7}; \dfrac{40}{7}; \dfrac{13}{7}\right)$

Mặt phẳng (Q) qua d, vuông góc với (P) có VTPT: $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{n_P}] = (2; 1; -3)$

Đường thẳng d' của VTCP $\vec{u}' = [\vec{n}, \overrightarrow{n_P}] = (4; -5; 1)$

Từ đó suy ra phương trình của hình chiếu d'.

Bài toán 16.21: Viết phương trình hình chiếu của (Δ_2): $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$ theo phương (Δ_1): $\dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ lên mặt phẳng (α): x + y + z + 3 = 0.

Hướng dẫn giải

Hình chiếu Δ là giao tuyến của (α) với (β), trong đó (β) là mặt phẳng chứa (Δ_2), song song với (Δ_1).

Vì (β) chứa (Δ_2) nên đi qua A(7; 3; 9) và có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]$ = (8; 4; 16) hay (2; 1; 4).

Do đó (β): 2(x – 7) + 1(y – 3) + 4(z – 9) = 0 hay 2x + y + 4z – 53 = 0.

Các điểm thuộc giao tuyến (Δ_2) có toạ độ thoả mãn: $\begin{cases} x+y+7+3=0 \\ 2x+y+4z-53=0 \end{cases}$

Đặt z = t thì x = 56 – 3t, y = –59 + 2t

Vậy phương trình tham số của hình chiếu: $\begin{cases} x=56-3t \\ y=-59+2t \\ z=t \end{cases}$

Bài toán 16.22: Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}\ \text{(P): } 2x + z - 5 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của Δ và (P), nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

Hướng dẫn giải

Δ dạng tham số: $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + 2t$.

Thế x, y, z vào (P) thì được $t = 0$ nên A(1; 2; 3).

Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Khi đó, vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$ của Δ, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 1)$ của (P), nên ta chọn: $\vec{u}' = [\vec{u}, \vec{n}] = (2; 3; -4)$.

Vậy đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}$

Cách khác: Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ thì (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình: $x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 3) = 0$ hay $x + 2y + 2z - 11 = 0$.

Giao tuyến d của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ (vì d nằm trong (Q) mà $\Delta \perp (Q)$).

Suy ra phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t \\ y = 1 \\ z = \frac{17}{3}-\frac{4}{3}t \end{cases}$

Bài toán 16.23: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1; −1; 1) và cắt cả hai đường thẳng: d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = t' \\ y = -1-2t' \\ z = 2+t' \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có A không thuộc d và d'.Đường thẳng d' đi qua điểm M(1; 0; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -1)$. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(0; −1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (1; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng: mp(A; d) và mp(A; d'). Mp(A; d) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (-3; 4; -2)$, mp(A; d') có vectơ pháp tuyến

$\vec{n}' = [\overrightarrow{AM}', \vec{u}'] = (2; 2; 2)$ hay (1; 1; 1).

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $[\vec{n}, \vec{n}'] = (6; 1; -7)$ đi qua A nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$.

Ta có $\vec{u}.\vec{n}' = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ nên d cắt mp(A; d'), do đó d cắt Δ.

Tương tự, vì $\vec{u}'.\vec{n} = -3 - 9 - 2 = -13 \neq 0$ nên d' cắt mp(A; d), do đó d' cắt Δ. Vậy Δ là đường thẳng đi qua A, cắt cả d và d'.

Cách khác: Ta tìm giao điểm B của d' và (A; d), đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và B. Lấy điểm M(1 + 2t; t; 3 – t) nằm trên d và điểm M'(t'; –1 – 2t'; 2 + t') nằm trên d'. Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm A, M, M' thẳng hàng, tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương.

Bài toán 16.24: Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của AC và BD biết A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1).

Hướng dẫn giải

PT đường AC là (d_1): x = 4 – 3t, y = 1 + 4t, z = 4 + t có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-3; 4; 1)$.

PT đường BD là (d_2): x = 3 – 2k, y = 3 – 2k, z = 1 có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2; -2; 0)$

Gọi đường vuông góc chung là (Δ) qua E thuộc d_1, F thuộc d_2:

E(4 – 3t; 1 + 4t; 4 + t); F(3 – 2k; 3 – 2k; 1)

$\overrightarrow{FE} = (1 - 3t + 2k; -2 + 4t + 2k; 3 + t)$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26t + 2k - 8 = 0 \\ t + 4k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5}{17} \\ k = \dfrac{3}{17} \end{cases}$$

Suy ra $E\left(\dfrac{53}{17}; \dfrac{37}{17}; \dfrac{73}{17}\right)$, $F\left(\dfrac{45}{17}; \dfrac{45}{17}; \dfrac{17}{17}\right)$

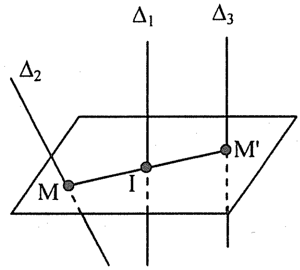
Đường vuông góc chung (Δ) có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{FE} = \left(\dfrac{8}{17}; -\dfrac{8}{17}; \dfrac{56}{17}\right)$ hay (1; –1; 7)

nên có PT là: $x = \dfrac{45}{17} + t$, $y = \dfrac{45}{17} - t$, $z = 1 + 7.t$

Bài toán 16.25: Cho 2 đường thẳng: (Δ_1): $\dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ và (Δ_2): $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng (Δ_3) đối xứng với (Δ_2) qua (Δ_1).

Hướng dẫn giải



Lấy điểm M ∈ (Δ_2)

⇒ M(t + 7; 2t + 3; –t +9)

Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với (Δ_1):

$-7(x - t - 7) + 2(y - 2t - 3) + 3(z + t - 9) = 0$

Ta có (Δ_1): x = –7k + 3, y = 2k + 1, z = 3k + 1 nên giao điểm của (Δ_1) và (P) là $\left(\frac{21.t}{31}+3-\frac{6t}{31}+1-\frac{9t}{31}+1\right)$ ứng với $k = \frac{-3.t}{31}$

Gọi M' đối xứng với M qua (Δ_1) thì I là trung điểm đoạn MM' nên có $M'\left(\frac{11t}{31}-1, -\frac{74t}{31}-1. -\frac{13t}{31}-7\right)$.

Vậy đường thẳng (Δ_3) cần tìm chứa các điểm M' nên có phương trình là:

$$\begin{cases} x = -1 + 11t \\ y = -1 - 74t \\ z = -7 + 13t \end{cases}.$$

Bài toán 16.26: Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1; –5; 3) và tạo với hai đường thẳng Ox, Oy các góc bằng 60°.

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{u}$ = (a; b; c), $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm. Các đường thẳng Ox, Oy có các vectơ chỉ phương là $\vec{i}$ = (1; 0; 0), $\vec{j}$ = (0; 1; 0). Theo giả thiết của bài toán thì:

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow 4a^2 = 4b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$\Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 = c^2$. Chọn C = $\sqrt{2}$ thì a = ± 1, b = ± 1.

Vậy có 4 trường hợp xảy ra nên có 4 đường thẳng có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}};\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}};\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}.$$

Bài toán 16.27: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1; 5; 3), B(4; 2; –5), C(5; 5; –1) và D(1; 2; 4).

a) Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm đó. Tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

c) Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -3; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -3; 1)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0$.

Suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có:

$$\begin{cases} 1+25+9+2a+10b+6c+d=0 \\ 16+4+25+8a+4b-10c+d=0 \\ 25+25+1+10a+10b-2c+d=0 \\ 1+4+16+2a+4b+8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=-19 \end{cases}$$

Vậy mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; –1) và bán kính R = 5

Mp(ABC) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$ hay (3; –5; 3) và đi qua điểm A(1; 5; 3) nên có phương trình:

$3(x-1) - 5(y-5) + 3(z-3) = 0$ hay $3x - 5y + 3z + 13 = 0$.

Khoảng cách $d(D;(ABC)) = \dfrac{|3.1-5.2+3.4+13|}{\sqrt{3^2+5^2+3^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{43}}$.

b) Mặt phẳng (α) vuông góc với CD có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD} = (-4; 3; 5)$ nên có phương trình: $-4x - 3y + 5z + d = 0$.

Mặt phẳng đó tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi:

$$\frac{|-4.1-3.2-5.1+d|}{\sqrt{16+9+25}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-15+d|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow d = 15 \pm 25\sqrt{2}.$$

Vậy ta có hai mặt phẳng cần tìm với phương trình:

$$-4x - 3y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0.$$

c) Tâm mặt cầu (S) là I(1; 2; –1). Khoảng cách từ I tới (Oxy) là $d_1 = |-1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính $r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

Khoảng cách từ I tới mp(Oyz) là $d_2 = 1$ nên (S) cắt mp(Oyz) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

Khoảng cách từ I tới mp(Oxz) là $d_3 = 2$ nên (S) cắt mp(Oxz) theo đường tròn có bán kính $r_3 = \sqrt{R^2 - d_3^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$.

Bài toán 16.28: Trong hệ toạ độ Oxyz cho điểm M(1; 2; 3). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích bé nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a > 0, b > 0, c > 0.

(P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì M nằm trên (P) nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27}{abc} \Rightarrow \frac{abc}{6} \geq 27$

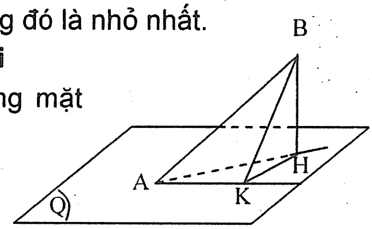
Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = 1$ hay a = 3; b = 6; c = 9.

Thể tích tứ diện OABC là $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6} \geq 27$.

Vậy thể tích nhỏ nhất là 27. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

Bài toán 16.29: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x – 2y + 2z – 5 = 0 và hai điểm A(–3; 0; 1), B(1; –1; 3).) Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P).

Phương trình (Q): x – 2y + 2z + 1 = 0.

K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q).

Ta có BK ≥ BH nên AH là đường thẳng cần tìm.

Toạ độ H(x; y; z) thoả mãn: $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$

$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right)$. Vậy phương trình Δ: $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Bài toán 16.30: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và hợp với mặt phẳng (Q): $2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc bé nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Vì (P) chứa d nên đi qua M(0; –1; 2), N(–1; 1; 3):

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ -A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B + C \\ D = B - 2C \end{cases}$$

Do đó (P): $(2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$.

Mp(Q) có VTPT $\vec{n}' = (2; -1; -2)$. Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thì:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \vec{n}')\right| = \frac{|B|}{\sqrt{5B^2 + 4BC + 2C^2}}$$

Xét B = 0 thì $\varphi = 90^o$. Xét $B \neq 0$, đặt $m = \dfrac{C}{B}$ thì:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2m^2 + 4m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi m = –1 nên B = –C, khi đó $\varphi < 90^o$ là góc cần tìm.

Vậy (P): $x + y - z + 3 = 0$.

Bài toán 16.31: Trong không gian Oxyz cho tập hợp các mặt phẳng (α_m) có phương trình là $mx - 2(m - 1)y + (m + 1)z - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ các mặt phẳng (α_m) đi qua một đường thẳng cố định Δ.

b) Cho đường thẳng d với phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$.

Chứng tỏ rằng hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

c) Lập phương trình 2 mặt phẳng lần lượt chứa một đường thẳng d hoặc Δ và chứa đường vuông góc chung của chúng.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình các mặt phẳng (α_m) có thể viết thành:

$2y + z - 1 + m(x - 2y + z) = 0$

Đẳng thức này đúng với mọi m nên ta suy ra: $\begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình này xác định một đường thẳng Δ cố định là giao tuyến của 2 mặt phẳng $2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z = 0$.

Δ có VTCP $\vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (4; 1; -2)$ và đi qua B(–1; 0; 1).

Vậy các mặt phẳng (α_m) đi qua đường thẳng cố định Δ: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

b) d qua A(1; 0; –2) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}].\overrightarrow{AB} \neq 0$ nên d và Δ chéo nhau.

c) Đường vuông góc chung IJ có VTCP: $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-5; -8; -14)$

Mặt phẳng (P) chứa d và IJ có VTPT

$\overrightarrow{n_P} = [\vec{u}, \vec{a}] = (-50; -23; 31)$ và đi qua A(1; 0; –2) nên có phương trình:

$$-50(x-1) - 23(y-0) + 31(z+2) = 0$$

hay $50x + 23y - 31z - 112 = 0$.

Mặt phẳng (Q) chứa Δ nên IJ có VTPT $\overrightarrow{n_Q} = [\vec{v}, \vec{a}] = (-30; 66; -27)$ và đi qua B(–1; 0; 1) nên có phương trình:

$$-10(x+1) + 22(y-0) - 9(z-1) = 0 \text{ hay } 10x - 22y + 9z + 1 = 0.$$

Bài toán 16.32: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng (Oyz).

b) Chứng minh mặt phẳng $x + 5y + z + 4 = 0$ đi qua đường thẳng Δ.

c) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

Vì mỗi điểm M(x; y; z) có hình chiếu trên mp(Oyz) là M'(0; y; z) nên hình chiếu d' của Δ trên mp(Oyz) là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

b) Mặt phẳng (α) đã cho có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; 1)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α).

Vì điểm M(1; –1; 0) của Δ thuộc (α) nên Δ nằm trên (α).

c) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hình chiếu d_1 của đường thẳng Δ có phương trình: $x + 2y + 1 = 0$ và hình chiếu d'_1 của Δ' có phương trình $x - y = 0$. Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d'_1 là $I(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$

Khi đó đường thẳng đi qua I, song song với Oz sẽ cắt cả hai đường thẳng Δ và Δ'. Phương trình đường thẳng đó là: $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 16. 1: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua hai điểm A(0; 1; 1), B(–1; 0; 2) và vuông góc với mặt phẳng (P):
$$x - y + z + 1 = 0.$$

b) Chứa trục Oz và đi qua điểm E(2; –1; 2)

Hướng dẫn

a) Chọn VTPT $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_P}$ Kết quả $y + z - 2 = 0$.

b) Kết quả $2y + z = 0$.

Bài tập 16. 2: Lập phương trình mặt phẳng

a) Đi qua điểm M(2; –1; 2), song song với trục Oy và (P): $2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) Đi qua điểm M(3; –1; –5) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Hướng dẫn

a) Chọn VTPT $\vec{n} \perp \vec{j}; \overrightarrow{n_P}$ Kết quả $3x - 2z - 2 = 0$.

b) Kết quả $2x + y - 2z - 15 = 0$.

Bài tập 16. 3: Cho tứ diện với các đỉnh A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6).

Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$.

Hướng dẫn

Gọi M(x;y;z). Kết quả mặt cầu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$

Bài tập 16. 4: Lập phương trình mặt cầu:

a) Đi qua ba điểm A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4) và có tâm nằm trên mp(Oyz).

b) Cầu có tâm là hình chiếu H của gốc O lên đường thẳng AB và bán kính R = 3, với A(3; 0; 0), B(0; 4; 0).

Hướng dẫn

a) Tâm I nằm trên mp(Oyz) nên I(0;b;c).

Kết quả $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

b) Kết quả $\left(x - \frac{48}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{36}{25}\right)^2 + z^2 = 9$.

Bài tập 16. 5: Lập phương trình mặt cầu:

a) Có tâm thuộc trục Oy và tiếp xúc với hai mặt phẳng:

$$x + 2y - 2z - 3 = 0,\ x + 2y - 2z - 5 = 0.$$

b) Đi qua A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và có tâm thuộc mặt phẳng (P):

$$x + y + z - 2 = 0.$$

Hướng dẫn

a) Tâm I thuộc trục Oy nên I(0;b;0).

Kết quả $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{1}{9}$.

b) Kết quả $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Bài tập 16. 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng: $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ và $d_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đã cho cùng nằm trong một mặt phẳng, viết phương trình mặt phẳng đó.

Hướng dẫn

Chứng minh 2 đường thẳng cắt nhau.

Kết quả $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

Bài tập 16. 7: Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x + 2y + 5z + 6 = 0$, (Q): $x - y - 3z + 3 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng (R): $3x + 2y + z - 5 = 0$.

Hướng dẫn

Đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x + 2y + 5z + 6 = 0$, (Q): $x - y - 3z + 3 = 0$ nên có VTPT $\vec{n} \perp \overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{n_Q}$

Kết quả $7x - 4y - 13z + 24 = 0$.

Bài tập 16. 8: Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình:

$$d: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{11}{3} + t, \\ z = t \end{cases} \quad (P): x - 3y + z - 1 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P) và phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu song song của d trên mp(P) theo phương Oz.

Hướng dẫn

Tìm giao điểm A của d trên mp(P).

Kết quả $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{13}{3} + t \\ y = t \\ z = -\dfrac{10}{3} + 2t \end{cases}$.

Bài tập 16. 9: Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng: (d_1): $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$ và (d_2): $\dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Hướng dẫn

Gọi đoạn vuông góc chung là AB với A thuộc d_1 tham số t và B thuộc d_2 tham số t'.

Kết quả $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{4}$.

Bài tập 16. 10: Viết phương trình của đường thẳng nằm trong mặt phẳng y + 2z = 0 và cắt 2 đường thẳng:

d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$, d_2: $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Tìm 2 giao điểm A, B của 2 đường thẳng d_1; d_2 với mp(P).

Kết quả $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

Bài tập 16. 11: Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình :

d_1 : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$; d_2 : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-2}{3}$; d_3 : $\begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t' \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3 tại BC với B thuộc d_1 tham số t và C thuộc d_3 tham số t'.

Kết quả d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Chuyên đề 17: LÍ THUYẾT SỐ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Số chính phương

- Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên
- Số chính phương n^2 tận cùng bằng 0,1,4,5,6,9.

Số nguyên tố – Hợp số

- Số nguyên tố là số nguyên lớn hơn 1 và chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.
- Các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,...

  Nếu số nguyên a>1 và không chia hết cho số nguyên tố $\le \sqrt{a}$ thì a nguyên tố
- Số nguyên lớn hơn 1, không phải số nguyên tố gọi là hợp số.
- Phân tích số tự nhiên m lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất

  $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$
- Số các ước nguyên dương của m là $d(m) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$
- Tổng các ước nguyên dương của m là $\sigma(m) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}...\dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$

Số nguyên tố cùng nhau– Số nguyên – Số hữu tỉ

- Nếu hai số nguyên a, b trong đó có ít nhất một khác 0 thì ƯCLN d =(a,b), (a,b) = ax + by với x, y nguyên, (a,b) = (a,a $\pm$b) và BCNN m = [a,b] thì (a,b).[a,b] = a.b, $(\dfrac{m}{a},\dfrac{m}{b}) = 1$.
- Nếu (a,b) = 1 thì a và b nguyên tố cùng nhau. Nếu (a,b) = 1 thì $(a^n,b^n) = 1$.
- Các số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên x và y sao cho: ax + by = 1
- Hàm Ơle $\phi(m)$: số các số bé hơn số nguyên dương m và nguyên tố cùng nhau với m.

  Nếu $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ thì $\phi(m) = m(1 - \dfrac{1}{p_1})(1 - \dfrac{1}{p_2})...(1 - \dfrac{1}{p_k})$.

  Nếu m= p nguyên tố thì $\phi(p) = p - 1$.

  Nếu (a,b) =1 thì $\phi(ab) = \phi(a).\phi(b)$
- Số hữu tỉ có dạng $p = \dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in N^*$

Phần nguyên– phần lẻ

– Phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, kí hiệu [x],nghĩa là $[x] \le x < [x] + 1$.

– Nếu $x = m + r$ với m nguyên và $0 \le r < 1$ thì $[x] = m$ và r gọi là phần lẻ, $r = \{x\}$.

– Nếu n nguyên thì $[n + x] = n + [x]$ với mọi x

Chứng minh chia hết

– Phép chia số nguyên a cho số nguyên $b \neq 0$: $a = b.q + r$ với thương q nguyên và dư r nguyên thoả $0 \le r < |b|$. Nếu $r = 0$ thì số nguyên a chia hết cho số nguyên $b \neq 0$(b chia hết a, a là bội số của b, b là ước của a) , kí hiệu $a \vdots b$ hay $b | a$.

– Dấu hiệu chia hết cho 2 là số chẵn; cho 5 là chữ số tận cùng là 0, 5;cho 4(hoặc 25) là hai chữ số tận cùng $\vdots$ 4(hoặc 25); cho 8(hoặc 125) là ba chữ số tận cùng $\vdots$ 8(hoặc 125); cho 3(hoặc 9) là tổng các chữ số $\vdots$ 3(hoặc 9); cho 11 là hiệu của tổng các chữ số hàng thứ chẵn với hàng thứ lẻ $\vdots$ 11.

Dư và đồng dư

– Cho số nguyên $m > 1$. Nếu hai số a, b có cùng dư khi chia cho m thì a đồng dư với b theo modun m, kí hiệu $a \equiv b(\bmod m)$.

Nếu $a \equiv b(\bmod m)$, $c \equiv d(\bmod m)$ thì

$$a \pm c \equiv b \pm d(\bmod m), ac \equiv bd(\bmod m)$$

– Định lý Ơle: với $(a,m)=1$ thì $a^{\phi(m)} \equiv 1(\bmod m)$

– Định lý Fecma: với p nguyên tố thì $a^p \equiv a(\bmod p)$

với $(a,p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

– Tập $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là hệ thăng dư đầy đủ modulo m nếu với mọi i, $0 \le i \le m-1$, tồn tại duy nhất j sao cho $a_j \equiv i \pmod m$

– Định lý phần dư Trung Hoa:

Nếu r và s là 2 số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, a và b là 2 số nguyên bất kì, thì hệ 2 phương trình đồng dư: $N \equiv a \pmod r$ và $N \equiv b \pmod s$ có nghiệm duy nhất N nguyên theo modulo (rs).

Tổng quát: Nếu $m_1, m_2, ..., m_k$ là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số nguyên, thì hệ k phương trình đồng dư: $x \equiv a_i \pmod{m_i}$; $i = 1, 2, ..., k$ có nghiệm x nguyên duy nhất theo modulo $M = m_1.m_2... m_k$.

Chú ý:

1) Nếu a tận cùng 0,1,5,6 thì a^n cũng tận cùng 0,1,5,6 tương ứng. Vì $\phi(10) = 4$,nếu $n = 4k+r$ và nếu a tận cùng 3, 7 thì chữ số tận cùng của a^n là chữ số tận cùng của a^r,còn nếu a tận cùng 2 thì chữ số tận cùng của a^n là chữ số tận cùng của 6.2^r.

2) Nếu a tận cùng là x thì a^{20} có 2 chữ số tận cùng là 2 chữ số tận cùng của x^{20}. Tìm hai chữ số tận cùng của a^n đưa về tìm dư trong phép chia n cho 20.

3) Hệ nhị phân của số tự nhiên $k = a.2^n + a_{n-1}2^{n-1} + ... + a_1 2 + a_0$ là $k = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ (2) với $a_i \in \{0; 1\}$, $a_n \neq 0$

Tổng quát, số tự nhiên s viết trong hệ g–phân nếu:

$s = a_n g^n + a_{n-1}g^{n-1} + ... + a_1 g + a_0$ là $s = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ (g)

Với $a_i \in \{0, 1, ..., g-1\}$, $a_n \neq 0$.

4) Phương trình Pell: Nếu (a, b) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ thì mọi nghiệm nguyên dương đều có dạng:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(a+b\sqrt{d})^n + (a-b\sqrt{d})^n}{2}, \frac{(a+b\sqrt{d})^n - (a-b\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}\right).$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 17. 1: Chứng minh

a) $70.27^{1001} + 31.38^{101}$ chia hết cho 13.

b) Nếu ba số a, a + k và a + 2k đồng thời là ba số nguyên tố phân biệt lớn hơn 3 thì $k \vdots 6$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $27 \equiv 1 \bmod(13) \Rightarrow 27^{1001} \equiv 1 \bmod(13)$

Và $38 \equiv -1 \bmod(13) \Rightarrow 38^{101} \equiv -1 \bmod(13)$

$\Rightarrow 27^{1001} = 13n + 1$ ($n \in N$) và $38^{101} = 13m - 1$ ($m \in N$)

$\Rightarrow 70.27^{1001} + 31.38^{101} = 70(13n+1) + 31(13m-1) = (70n + 31m)13 + 39 \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta biết rằng các số nguyên tố lớn hơn 3 có thể biểu diễn dưới dạng 6p + 1 hoặc 6p + 5 (p nguyên dương)(*).

Ba số a, a + k, a + 2k lớn hơn 3 chỉ có thể biểu diễn trong hai dạng nên theo nguyên tắc Đirichlê, nhất định phải có hai số được biểu diễn trong cùng một dạng, chẳng hạn đó là 6p + r và 6s + r với r là 1 hoặc 5. Hiệu của hai số này bằng $6s - 6p = 6(s - p) \vdots 6$.Mặt khác hiệu của hai trong ba số trên hoặc bằng k hoặc bằng 2k nên $k \vdots 3$, nhưng k là số chẵn nên $k \vdots 6$.

Bài toán 17. 2: Chứng minh với mọi m, tồn tại số nguyên n để:

$n^3 - 11n^2 - 87n + m$ chia hết cho 191.

Hướng dẫn giải

Đặt $P(x) = x^3 - 11x^2 - 87x + m$

Giả sử: $P(x) \equiv (x + a)^3 + b \pmod{191}$

$\Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv x^3 - 11x^2 - 87x + m \pmod{191}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a \equiv -11 \pmod{191} & (1) \\ 3a^2 \equiv -87 \pmod{191} & (2) \\ b \equiv m - a^3 \pmod{191} & (3) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $3a \equiv 180 \pmod{191} \Leftrightarrow a \equiv 90 \pmod{191}$

$\Rightarrow 3a^2 \equiv -87 \pmod{191}$. Vậy $\forall$ m $\in$ Z, tồn tại số nguyên a, b để:

$P(x) \equiv (x + a^3) + b \pmod{191}$

Nhận xét: 191 là số nguyên tố dạng $191 = 3k + 2$

$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow (i + a)^3 \equiv (j + a)^3 \pmod{191}$

Đặt $u = i + a$, $v = j + a$ thì $u^3 \equiv v^3 \pmod{191}$

$\Rightarrow \ u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$

$u^{3k}v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} \equiv v \pmod{191}$ (định lý Ferma) (1)

$\Rightarrow v^2 \equiv u^{3k}v^3 \equiv u^{3k+3} \pmod{191}$

$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv u^{3k}.u^{3k+3} \equiv u^{3k+1}.u^{3k+2} \equiv u^{3k+1}.u^{191} \equiv u^{3k+1}.u \pmod{191}$

$\equiv u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}$ (2)

(1) và (2) suy ra: $u \equiv v \pmod{191} \Rightarrow i \equiv j \pmod{191}$

Nếu $\forall i, j \in \{1, 2, ..., 191\}$; $i \neq j \pmod{191}$ thì $P(i) \neq P(j) \pmod{191}$

Suy ra tồn tại $n \in \{1, 2, ..., 191\}$ sao cho $P(n) \equiv 191 \pmod{191}$ tức là:

$P(n) \equiv 0 \pmod{191}$.

Bài toán 17. 3: Cho x, y là các số nguyên, $x \neq -1$; $y \neq -1$ sao cho $\dfrac{x^4 - 1}{y + 1} + \dfrac{y^4 - 1}{x + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $x^4y^{44} - 1$ chia hết cho x + 1.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $y^4 - 1$ chia hết cho x + 1.

Đặt $\dfrac{x^4 - 1}{y + 1} = \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{y^4 - 1}{x + 1} = \dfrac{c}{d}$

Trong đó a, b, c, d $\in$ **Z**, (a, b) = 1; (c, d) = 1; b > 0, d > 0

Từ giả thiết, ta có $\dfrac{ad + bc}{bd}$ nguyên, suy ra d | b và b | d. Mặt khác, do $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}$ nguyên; (a, b) = 1 và (c, d) = 1, nên b = d = 1.

Suy ra $y^4 - 1$ chia hết cho x + 1. Từ đó $x^4y^{44} - 1 = x^4(y^{44} - 1) + x^4 - 1$ chia hết cho x + 1 (do $y^{44} - 1$ chia hết cho $y^4 - 1$ nên nó chia hết cho x + 1 và $x^4 - 1$ chia hết cho x + 1).

Bài toán 17. 4: Với mọi số tự nhiên n, chứng minh rằng tổng $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ không chia hết cho 5

Hướng dẫn Hướng dẫn giải

Đặt $x = \sqrt{8}$, dùng công thức khai triển nhị thức Newton để biến đổi:

$$(1 + x)^{2n+1} = A + Bx \ (*) \quad \text{với } B = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$$

Tương tự: $(1 - x)^{2n+1} = A - Bx$ (**)

Nhân vế theo vế (*) và (**) ta được: $7^{2n+1} = 8B^2 - A^2$

Mặt khác, $7^{2n+1} \equiv \pm 2 \pmod 5$

Do vậy, nếu B là bội của 5 thì: $A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$: vô lý.

Bài toán 17. 5: Chứng minh phần nguyên của $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}$ thì chia hết cho 2^{n+1} và không chia hết cho 2^{n+2} với mọi n là số tự nhiên

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$ là số tự nhiên

Mà $\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1} \in (0; 1)$ nên

$$\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}\right] = \left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$$

(Vì: $a-b = k \in N \Rightarrow a = k + b$ với $b \in (0; 1)$ nên $[a] = k = a - b$)

Với n = 0: $\left(\sqrt{11}+3\right)^1 - \left(\sqrt{11}-3\right)^1 = 6$ chia hết cho $2^{0+1} = 2$ nhưng không chia hết cho $2^2 = 4$.

Mà: $\left(\sqrt{11}+3\right)^2 + \left(\sqrt{11}-3\right)^2 = 40$ nên với n = 1 thì:

$$\left(\sqrt{11}+3\right)^3 - \left(\sqrt{11}-3\right)^3$$

$$= \left[\underbrace{(\sqrt{11}+3)-(\sqrt{11}-3)}_{6}\right]\left[\underbrace{(\sqrt{11}+3)^2+(\sqrt{11}-3)^2}_{40} + \underbrace{(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)}_{2}\right]$$

$= 6.42 = 2^2.3^2.7$ chia hết cho 2^2 nhưng không chia hết cho 2^3.

Giả sử tính chất này đúng với mọi số tự nhiên k < n. Ta chứng minh tính chất này đúng với k = n. Trước hết, nhận xét rằng:

$$\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}-3\right) = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{11}-3\right) = \frac{2}{\left(\sqrt{11}-3\right)};\ \left(\sqrt{11}+3\right) = \frac{2}{\left(\sqrt{11}-3\right)}$$

Thật vậy: $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1} =$

$$= \left[(\sqrt{11}+3)^2 + (\sqrt{11}-3)^2\right]\left[(\sqrt{11}+3)^{2n-1} - (\sqrt{11}-3)^{2n-1}\right]$$

$$- \left[(\sqrt{11}-3)^2(\sqrt{11}+3)^{2n-1} - (\sqrt{11}+3)^2(\sqrt{11}-3)^{2n-1}\right]$$

$$= 40\left[(\sqrt{11}+3)^{2n-1} - (\sqrt{11}-3)^{2n-1}\right] - 4\left[(\sqrt{11}+3)^{2n-3} - (\sqrt{11}-3)^{2n-3}\right]$$

$= 2^3 5.\left[(\sqrt{11}+3)^{2n-1} - (\sqrt{11}-3)^{2n-1}\right] - 2^2\left[(\sqrt{11}+3)^{2n-3} - (\sqrt{11}-3)^{2n-3}\right]$

Vậy $\left[(\sqrt{11}+3)^{2n+1}\right]$ chia hết cho 2^{n+1} nhưng không chia hết cho 2^{n+2}.

Bài toán 17. 6: Cho trước a và b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số $(4ab - 1)$ là ước số của $(4a^2 - 1)^2$ thì $a = b$.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại cặp hai số nguyên dương (a, b) sao cho $(4ab - 1)$ là ước số của $(4a^2 - 1)^2$ và $a \neq b$ thì ta sẽ gọi các cặp số như vậy là cặp xấu và giả sử (a, b) là cặp xấu có tổng $2a + b$ nhỏ nhất.

Do $(4b^2 - 1)^2 \equiv (4b^2 - (4ab)^2)^2 \equiv 16b^4(4a^2 - 1)^2 \equiv 0 \pmod{4ab - 1}$ nên (b, a) cũng là cặp xấu, vậy $2a + b \leq 2b + a$ suy ra $a < b$ (do $a \neq b$). Do $(4a^2 - 1)^2$ chia 4a dư 1, còn $(4ab - 1)$ chia 4a dư 3, nên số $\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ là số chia 4a dư 3, do đó tồn tại số nguyên dương c sao cho $4ac - 1 = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$. Vậy (a, c) cũng là cặp xấu.

Từ $a < b$ và $4ac - 1 = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ ta có $c < b$, khi đó $2a + c < 2a + b$ mâu thuẫn với giả thiết (a, b) là cặp xấu có tổng $2a + b$ nhỏ nhất. (đpcm).

Bài toán 17. 7: Xác định tất cả các cặp nguyên dương (a, b) sao cho $a^2b + a + b$ chia hết cho $ab^2 + b + 7$.

Hướng dẫn giải

Xét $a < b$ thì $b \geq a + 1$, do đó:

$ab^2+b+7 > ab^2 + b \geq (a+1)(ab+1) = a^2b+a+ab \geq a^2b+a+b$

Như vậy, ta không tìm được (a, b) thoả điều kiện bài toán trong trường hợp này.

Xét $a \geq b$. Đặt $k = \frac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$, giả sử k nguyên dương

Ta có : $\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\right)(ab^2+b+7) = ab^2+a+ab+7\frac{a}{b}+\frac{7}{b}+1 > ab^2+a+b$

Suy ra $k < \frac{a}{b}+\frac{1}{b}$, nếu $b \geq 3$ thì $\left(b-\frac{7}{b}\right) > 0$

Suy ra: $\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\right)(ab^2+b+7) = ab^2+a-a\left(b-\frac{7}{b}\right)-1-\frac{7}{b}$

$< ab^2 + a < ab^2 + a + b$

Từ đó $b = 1$, hoặc $b = 2$, hoặc $k > \frac{a}{b}-\frac{1}{b}$

– Nếu $\frac{a}{b}-\frac{1}{b} < k < \frac{a}{b}+\frac{1}{b}$ thì a – 1 < kb < a + 1 nên a = kb.

Điều này cho ta tìm được (a, b) = ($7k^2$, 7k)

– Nếu b = 1 thì (a + 8) chia hết (a^2 + a + 1), suy ra (a + 8) chia hết a(a + 8) – (a^2 + a + 1) = 7a – 1, do đó, ta cũng có (a + 8) chia hết 7(a + 8) – (7a – 1) = 57. Nhưng các ước số lớn hơn 8 của 57 chỉ có 19 và 57, do đó a = 11 hoặc a = 49. Dễ dàng kiểm tra rằng các cặp (a, b) = (11, 1) và (a, b) = (49, 1) thoả điều kiện bài toán

– Nếu b = 2, thì (4a + 9) chia hết ($2a^2$ + a + 2), do đó suy ra (4a + 9) chia hết a(4a + 9) – 2($2a^2$ + a + 2) = 7a – 4. Từ đó, ta cũng có (4a + 9) chia hết 7(4a + 9) – 4(7a – 4) = 79. Nhưng ước số lớn hơn 9 của 79 chỉ có 79, từ đó a $=\frac{35}{2}$, không phải số nguyên.

Vậy, các cặp (a, b) thoả điều kiện bài toán là: (11, 1), (49, 1) và ($7k^2$, 7k), với k là số nguyên dương.

Bài toán 17. 8: Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho 5^n là ước số của tích các số tự nhiên từ 1 đến 1000.

Hướng dẫn giải

Số n lớn nhất phải tìm là số thừa số 5 khi phân tích 1 x 2 x 3 x ... x 1000 thành thừa số nguyên tố, nghĩa là n bằng tổng của số các bội số của 5, của 5^2, của 5^3, của 5^4 trong dãy 1, 2, 3,..., 1000.

Các bội của 5 trong dãy 1, 2, 3,..., 1000 là 5, 10, 15,..., 1000 gồm 1000: 5 = 200 số. Trong đó, các bội của 5^2 là 25, 50, ..., 1000 gồm 1000 : 25 = 40 số; các bội của 5^3 là 125, 250,..., 1000 gồm 1000 : 125 = 8 số, các bội của 5^4 là 625 gồm 1 số.

Do đó số thừa số 5 khi phân tích 1 x 2 x 3 x . .. x 1000 ra thừa số nguyên tố là 200 + 40 + 80 + 1 = 249.

Vậy số n lớn nhất là 249.

Bài toán 17. 9: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương *m*, *n* sao cho: 3^m+5^m và 3^n+5^n đồng thời chia hết cho tích số mn.

Hướng dẫn giải

Với $m=1$, ta cần: $n\,|\,3+5 \Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8\}$. Tuy nhiên, chỉ có $n\in\{1,2\}$ thỏa mãn điều kiện $n\,|\,3^n+5^n$. Tương tự, với $n=1$ ta có: $m\in\{1,2\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng không còn cặp số nguyên dương *m*, *n* nào khác thỏa yêu cầu bài toán. (1)

Thật vậy, giả sử $m,n\ge 2$ thỏa ycbt. Đầu tiên, cả hai số m và n không thể cùng là số chẵn bởi vì nếu m và n cùng là số chẵn thì ta có $4\,|\,mn$.

Do đó, $3^m+5^m\equiv 0\pmod 4$.

Tuy nhiên, vì m chẵn nên $3^m + 5^m \equiv (-1)^m + 1 \equiv 2 \pmod 4$, mâu thuẫn!

Vậy, ta có thể coi m là một số lẻ (m > 2).

Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của m, dễ thấy $p \notin \{2,3,5\}$. (2)

Đặc biệt, $(5,p) = 1$; nên tồn tại số nguyên x để $5x \equiv 1 \pmod p$.

Từ $p \mid m \mid 3^m + 5^m$ suy ra

$p \mid x^m(3^m + 5^m) = (3x)^m + (5x)^m \Rightarrow (3x)^m \equiv -1 \pmod p$.

Vì thế, nếu đặt $h = \text{ord}_p(3x)$, thì $h \mid 2m$; ta cũng có: $h \mid p-1$ (định lý nhỏ Fermat và tính chất của cấp), nên: $h \mid (p-1, 2m) = 2$ (vì $p - 1 \vdots 2$ và $(p-1, m) = 1$ theo cách chọn (2) của *p*).

$p \mid \left[(3x)^h - 1\right] - \left[(5x)^h - 1\right] = \left(3^h - 5^h\right)x^h \Rightarrow p \mid 3^h - 5^h$ với $h \in \{1, 2\}$.

Nhưng $3^1 - 5^1 = -2$, $3^2 - 5^2 = -2^4$ nên $p = 2$, mâu thuẫn với (2).

Do đó (1) đúng, đpcm. Vậy, $m, n \in \{1;2\}$.

Bài toán 17. 10: Chứng minh rằng, với số nguyên dương m bất kì sẽ tồn tại vô số các cặp số nguyên (x, y) sao cho:

1) x và y nguyên tố cùng nhau
2) y chia hết $x^2 + m$;
3) x chia hết $y^2 + m$

Hướng dẫn giải

Giả sử (x, y) là cặp số nguyên thoả mãn 1), 2), 3). Khi đó ta có $(x^2 + y^2 + m) \vdots xy$ hay $x^2 + y^2 - kxy + m = 0$ (1) với $k \in \mathbb{Z}$. Ngược lại, dễ thấy nếu cặp số nguyên (x, y) thoả mãn (1) với k nguyên nào đó và x, y nguyên tố cùng nhau thì cặp (x, y) đó cũng thoả mãn 1), 2), 3). Như vậy bài đã ra sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được một số nguyên k sao cho có vô số cặp số nguyên (x, y) thoả mãn (1) và x, y nguyên tố cùng nhau.

Chọn k = m + 2. Khi đó (1) trở thành:

$x^2 + y^2 - (m + 2)xy + m = 0$ (2)

Bây giờ, ta sẽ chứng minh có vô số cặp số nguyên (x, y) thoả mãn (2) và $x < y$ với x, y nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, xét dãy các số nguyên $\{x_n\}$ được xác định như sau:

$x_1 = 1$, $x_2 = m + 1$, $x_{n+2} = (m + 2)x_{n+1} - x_n$

$\forall n = 1, 2, 3...$ Bằng quy nạp theo n dễ dàng chứng minh được:

i) $\{x_n\}$ là dãy tăng

ii) x_n và x_{n+1} nguyên tố cùng nhau, $\forall n = 1, 2, 3...$

iii) Cặp số (x_n, x_{n+1}) thoả mãn (2), $\forall n = 1, 2, 3... \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 17. 11: Từ dãy mọi số nguyên dương lớn hơn 1, ta lập dãy số tăng dần $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gồm tất cả các số không là bội của 2 và cũng không là bội của 3. Chứng minh rằng $a_n > 3n$ với số nguyên dương n bất kì.

Hướng dẫn giải

Trong 3n số từ 1 đến 3n ta chia ra từng nhóm ba số liên tiếp dạng $3k + 1$; $3k + 2$; $3k + 3$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Trong ba số liên tiếp đó có số $3k + k = 3(k + 1)$ là bội của 3 và một trong hai số $3k + 1$, $3k + 2$ có một số là bội của 2 nhưng không là bội của 3, do đó phải loại đi 2 trong ba số liên tiếp.

Trong nhóm đầu tiên 1, 2, 3 có ba số đều bị loại. Vậy từ 1 đến $3(k + 1) = 3n$ ta cần phải loại $2(n - 1) + 3 = 2n + 1$ số và chỉ còn lại $n - 1$ số. Các số này mang chỉ số từ a_1 đến a_{n-1} do đó $a_n > 3n$.

Bài toán 17. 12: Tìm tất cả các số

a) Tự nhiên n để các số: $n - 1$; $n^5 + n^4 + n^3 + 13n^2 + 13n + 14$ đều là các số chính phương.

b) Số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Xét số: $A = (n - 1)(n^5 + n^4 + n^3 + 13n^2 + 13n + 14) = (n^3 + 6)^2 + n - 50$

Từ điều kiện của đề bài suy ra A là số chính phương, vì A là tích của hai số chính phương.

Xét $0 \le n \le 2$. Bằng phép thử trực tiếp dễ thấy A là số chính phương khi và chỉ khi $n = 1$, nhưng lúc đó $n^5 + n^4 + n^3 + 13n^2 + 13n + 14 = 43$ không là số chính phương.

Xét $3 \le n < 50$, ta suy ra A nằm giữa hai số chính phương liên tiếp $(n^3 + 5)^2$ và $(n^3 + 6)^2$. Vậy A không là số chính phương mâu thuẫn.

Xét nếu $n = 50$ thì ta có $A = 125006^2 = 7^2.17858^2$

Xét nếu $n > 50$ suy ra A nằm giữa hai số chính phương liên tiếp $(n^3 + 6)^2$ và $(n^3 + 7)^2$ nên A không là số chính phương mâu thuẫn.

Vậy chỉ có $n = 50$ là đáp số của bài toán.

b) Giả sử $x = \frac{p}{q}$ trong đó $p, q \in Z$, $q > 0$ và $(p, q) = 1$ thoả mãn $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ $(n \in Z)$. Suy ra $p^2 = q(-p - 6p + n^2q)$

Đẳng thức này cho thấy mọi ước của q đều là ước của p. Nhưng $(p, q) = 1$ nên phải có $q = 1$, $x = p$ là số nguyên.

Khi đó $p^2 + p + 6 = n^2 \Leftrightarrow (2p + 1)^2 + 23 = 4n^2$

$\Leftrightarrow 23 = (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1)$

Vì 23 là số nguyên tố, các thừa số ở vế phải đều là các số nguyên dương và $2n - 2p - 1 < 2n + 2p + 1$, nên đẳng thức xảy ra khi $2n - 2p - 1 = 1$ và $2n + 2p + 1 = 23$.

Giải hệ phương trình này ta được $p = 5$, số này thoả mãn đề bài.

Bài toán 17. 13: Chứng minh rằng số $A = 1 + 19^{19} + 93^{199} + 1993^{1994}$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có $1 \equiv 1 \pmod 3$, $9 \equiv 0 \pmod 3$ nên $9^{19} \equiv 0 \pmod 3$, $93 \equiv 0 \pmod 3$ nên $93^{199} \equiv 0 \pmod 3$; $1993 \equiv 1 \pmod 3$ nên $1993^{1994} \equiv 1 \pmod 3$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 3$ hay $A = 3k + 2$ ($k \in Z$), nhưng một số chính phương không thể có dạng $3k + 2$, nên A không phải là số chính phương.

Tổng quát: Có thể chứng minh rằng số $A = 1 + 9^m + 93^n + 1993^p$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương m, n, p.

Bài toán 17. 14: Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên thoả mãn hệ thức $2x^2 + x = 3y^2 + y$ (1) thì $x - y$; $2x + 2y + 1$ và $3x + 3y + 1$ đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Từ (1) ta có: $(x - y)(2x + 2y + 1) = y^2$ (2)

Mặt khác từ (1) ta lại có: $(x - y)(3x + 3y + 1) = x^2$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $(x - y)^2 (2x + 2y + 1)(3x + 3y + 1) = x^2y^2$

Suy ra $(2x + 2y + 1)(3x + 3y + 1)$ là số chính phương (4)

Đặt $(2x + 2y + 1, 3x + 3y + 1) = d$ thì d là ước của $(3x + 3y + 1) - (2x + 2y + 1) = x + y \Rightarrow$ d là ước của $2(x + y)$. Từ đó d là ước của $(2x + 2y + 1) - 2(x + y) = 1$ nên $d = 1$.

Từ (4) và từ $(2x + 2y + 1, 3x + 3y + 1) = 1$ suy ra $2x + 2y + 1$ và $3x + 3y + 1$ đều là số chính phương. Từ đó căn cứ vào (2) hoặc (3) suy ra $x - y$ cũng là số chính phương.

Bài toán 17. 15: Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng $\overline{abd}$ là số chính phương và nếu cộng thêm 72 vào số $\overline{abcd}$ thì được một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Các chữ số a, b, c, d trong đó $\overline{abcd}$ chỉ có thể nhận giá trị từ 0 đến 9 và $a \neq 0$.

Nếu một số có tận cùng là chữ số e thì bình phương của số đó có tận cùng là chữ số f tương ứng trong bảng sau:

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Vì $\overline{abd}$ là số chính phương nên d chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 4, 5, 6, 9, mặt khác số $\overline{abcd} + 72$ là số chính phương thì $d + 2$ phải có tận cùng là một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Mà $d + 2$ chỉ có thể có tận cùng là 2, 3, 6, 7, 8, 1 do đó $d + 2$ chỉ có thể lấy các giá trị 1, 6, nghĩa là d chỉ có thể lấy các giá trị 9, 4.

– Với $d = 4$ ta có $\overline{ab4} = y^2$ và $\overline{abc4} + 72 = \overline{abc6} + 70 = x^2$. Theo bảng trên y^2 có tận cùng 4 thì y chỉ có thể có tận cùng là 2 hoặc 8 còn x^2 có tận cùng 6 thì x chỉ có thể có tận cùng là 4 hoặc 6.

Suy ra $100 < y^2 < 1000$ nên $10 < y < 31$ nên y chỉ có thể là 12, 18, 22, 28.

Nếu y = 12 thì $y^2 = 144$ và $x^2 = \overline{14c6} + 70$ nên $1400 < x^2 < 1600$, suy ra $37 < x < 40$: không thoả mãn.

Nếu y = 18 thì $y^2 = 324$ và $x^2 = \overline{32c6} + 70$ nên $3200 < x^2 < 3500$, suy ra $56 < x < 60$: không thoả mãn .

Nếu y = 22 thì $y^2 = 484$ và $x^2 = \overline{48c6} + 70$ nên $4800 < x^2 < 5000$, suy ra $68 < x < 72$: không thoả mãn .

Nếu y = 28 thì $y^2 = 784$ và $x^2 = \overline{78c6} + 70$ nên $7800 < x^2 < 8000$, suy ra $86 < x < 90$: không thoả mãn.

– Với d = 9 ta có $\overline{ab9} = y^2$ và $\overline{abc9} + 72 = \overline{abc1} + 80 = x^2$. Theo bảng trên y^2 có tận cùng 9 thì y chỉ có thể tận cùng là 3 hoặc 7 , còn x^2 có tận cùng 1 thì x chỉ có thể tận cùng là 1 hoặc 9 .
Suy ra $100 < y^2 < 1000$ nên $10 < y < 31$ do đó y chỉ có thể là 13, 17, 23, 27.

Nếu y = 13 thì $y^2 = 169$ và $x^2 = \overline{16c1} + 80$ nên $1600 < x^2 < 1800$, suy ra $40 < x < 43$.

Ta thử với x = 41 có $41^2 = 1681$ thoả mãn, vậy $\overline{abcd} = 1609$.

Nếu y = 17 thì $y^2 = 289$ và $x^2 = \overline{28c1} + 80$ nên $2800 < x^2 < 3000$, suy ra $52 < x < 56$: không thoả mãn.

Nếu y = 23 thì $y^2 = 529$ và $x^2 = \overline{52c1} + 80$ nên $5200 + y^2 < 5400$, suy ra $72 < x < 75$: không thoả mãn.

Nếu y = 27 thì $y^2 = 729$ và $x^2 = \overline{72c1} + 80$ nên $7200 < x^2 < 7400$, suy ra $82 < x < 87$: không thoả mãn.

Bài toán chỉ có 1 nghiệm là $\overline{abcd} = 1609$.

Bài toán 17. 16: Số $A = n^4 + 4^n$ là số nguyên tố hay hợp số trong đó n là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì A = 5 là số nguyên tố. Với n > 1 xét hai trường hợp

– Nếu n là số chẵn thì $n^4 \vdots 2$ và $4^n \vdots 2$ nên $A \vdots 2$ mà A > 2 do đó A là hợp số.

– Nếu n là số lẻ, đặt n = 2k + 1 (k nguyên dương)
Ta có $A = n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k} . 4$
$= (n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})$
$= [(n + 2^k)^2 + 2^{2k}] [(n - 2^k)^2 + 2^{2k}]$
Rõ ràng mỗi thừa số của tích đều là các số tự nhiên lớn hơn 2. Vậy A là hợp số.

Bài toán 17. 17: Cho các số nguyên dương a, b, c, d với a > b > c > d > 0. Giả sử ac + bd = (b + d + a – c)(b + d – a + c). Chứng minh rằng ab + cd không phải là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \qquad (1)$$

Xét tứ giác ABCD với AB = a, BC = d, CD = b, AD = c, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{BCD} = 120^0$ thì $BD^2 = a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$ một tứ giác như thế rõ ràng tồn tại trên cơ sở có (1) và Định lí hàm cosin. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$, suy ra $\widehat{CDA} = 180^0 - \alpha$.

Định lí hàm cosin trong các tam giác ABC và ACD cho ta:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = AC^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

Từ đó, $2\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$ và

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$$

Vì ABCD nội tiếp nên Định lí Ptolémé cho ta:

$(AC.BD)^2 = (ab + cd)^2$

Suy ra $(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc)$ (2)

Ta có: $(a - d)(b - c) > 0$, $(a - b)(c - d) > 0$

Từ hai bất đẳng thức này dễ dàng suy ra được:

$ab + cd > ac + bd > ad + bc$ (3)

Bây giờ, giả sử ngược lại rằng ab + cd là số nguyên tố. Khi đó, từ (3), suy ra rằng ab + cd và ac + bd nguyên tố cùng nhau. Do vậy, (2) cho ta kết luận ad + bc chia hết cho ac + bd, điều này không thể xảy ra vì đã có (3). Ta có đpcm.

Bài toán 17. 18: Với mọi số nguyên dương m và n, chứng minh rằng:

$\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ là một số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Để giải bài toán, ta chỉ việc chứng tỏ rằng với mọi số nguyên tố p, số các thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! không nhỏ hơn số các thừa số p chứa trong tích m!n!(m + n)!

Như đã biết, số các thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! là:

$$S_1 = \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \ldots$$

Còn số các thừa số p chứa trong tích m!n!(m + n)! bằng:

$$S_2 = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

$$+ \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \left[\frac{m\_n}{p^3}\right] + \ldots$$

Bất đẳng thức $S_1 \geq S_2$ suy ra từ bất đẳng thức:

$$\left[\frac{2m}{p^k}\right]+\left[\frac{2n}{p^k}\right]\geq\left[\frac{m}{p^k}\right]+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\left[\frac{m+n}{p^k}\right] \text{với mọi k}$$

Bài toán 17. 19: Chứng minh rằng với mọi cặp số tự nhiên m, k, số m có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$m = C_{a_k}^{k} + C_{a_{k-1}}^{k-1} + \ldots + C_{a_t}^{t} \text{ với } a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geq t \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử m được biểu diễn như đề bài với hai dãy $a_k, \ldots, a_t$ và $b_k, \ldots, b_t$. Ta tìm vị trí đầu tiên mà chúng khác nhau, không mất tính tổng quát, ta giả sử vị trí đó là k và $a_k > b_k$.

Lúc đó $m \leq C_{b_k}^{k} + C_{b_k-1}^{k-1} + \ldots + C_{b_t-k+1}^{t} < C_{b_k+1}^{k} \leq m$ là điều vô lí.

Để chứng minh sự tồn tại, ta áp dụng thuật toán sau: tìm số a_k lớn nhất thoả mãn $C_{a_k}^{k} \leq m$, sau đó, cũng làm tương tự như với hai số m và k nhưng thay bằng hai số $m - C_{a_k}^{k}$ và $k - 1$. Ta chỉ cần chắc chắn rằng dãy nhận được thực sự tăng, nhưng điều này có được vì theo giả thiết: $m < C_{a_k+1}^{m}$ và suy ra $m - C_{a_k}^{k} < C_{a_k}^{k-1}$

Bài toán 17. 20: Giả sử a, b, n là những số nguyên lớn hơn 1. Các số a, b là cơ số của hai hệ đếm. Các số A_n và B_n có cùng cách biểu diễn $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$ .Trong các hệ đếm với cơ số a và b, ngoài ra $x_n \neq 0$ và $x_{n-1} \neq 0$. Gọi A_{n-1} và B_{n-1} là các số suy ra từ A_n và B_n sau khi xoá x_n. Chứng minh rằng a > b khi và chỉ khi $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$.

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa, ta có: $A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k$, $\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} x_k a^k$

$$B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k b^k$$

Bất đẳng thức trong đề bài tương đương với:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k}{\sum_{k=0}^{n} x_k a^k} < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k}{\sum_{k=0}^{n} x_k b^k} \Rightarrow \frac{x_n a^n}{\sum_{k=0}^{n} x_k a^k} > \frac{x_n b^n}{\sum_{k=0}^{n} x_k b^k}$$

Nên: $\frac{x_na^n}{x_nb^n} > \frac{x_0 + x_1a + x_2a^2 + ... + x_na^n}{x_0 + x_1b + x_2b^2 + ... + x_nb^n}$ (1)

Ta chứng minh rằng với giả thiết $x_{n-1} \neq 0$, $x_n \neq 0$ thì bất đẳng thức (1) tương đương với a > b.

Muốn vậy, trước hết ta chứng minh mệnh đề sau: nếu A, B, C, D là 4 số dương thì các bất đẳng thức: $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ và $\frac{A+C}{B+D} < \frac{C}{D}$ tương đương nhau

Bây giờ ta để ý rằng bất đẳng thức a > b tương đương với

$$\frac{1}{1} < \frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < ... < \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < \frac{a^n}{b^n}$$

hay (nếu có x_i nào bằng 0, thì ta loại tỉ số tương ứng)

$$\frac{x_0}{x_0} < \frac{x_1a}{x_1b} < \frac{x_2a^2}{x_2b^2} < ... < \frac{x_{n-1}a^{n-1}}{x_{n-1}b^{n-1}} < \frac{x_na^n}{x_nb^n}$$

Áp dụng mệnh đề trên nhiều lần, thì được bất đẳng thức (1), tức là có điều phải chứng minh.

Bài toán 17. 21: : Hãy tìm số dư khi chia

a) 109^{345} cho 14 b) Số $1776^{1492!}$ cho 2000.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $109 \equiv 11 \pmod{14}$ nên $109^{345} \equiv 11^{345} \pmod{14}$

Vì 14 = 7.2 nên $\phi(14) = 14(1 - \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{2}) = 6$

Theo đính lí Euler thì $11^6 \equiv 1 (\text{mod} 14)$

Mà 345 = 6.57 + 3 nên $11^{345} \pmod{14} \equiv 11^3 (\text{mod} 14) \equiv 1 (\text{mod} 14)$

Vậy dư là 1.

b) Ta có: $1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}$, $1776^2 \equiv 176 \pmod{2000}$,

$1776^3 \equiv 576 \pmod{2000}$, $1776^4 \equiv 976 \pmod{2000}$,

$1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$, $1776^6 \equiv 1776 \pmod{2000}$,

$1776^7 \equiv 176 \pmod{2000}$, và tiếp tục như vậy.

Từ: $1776^6 \equiv 1776^1 \pmod{2000}$, ta được

$1776^n \equiv 1776^{n-5} \pmod{2000}$,

với mọi n > 5. Do vậy ta sẽ xét phần dư của số mũ khi chia cho 5. Dễ thấy 1492! chia hết cho 5 nên:

$1776^{1492} \equiv 1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$.

Cách 2: Theo Định lí Euler: $a^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, với mọi a thoả mãn (a, 125) = 1.

Ta có $16 \mid 1776$ nên $1776^{1492!} \equiv 0 \pmod{16}$.

Xét số dư của $1776^{1492!}$ khi chia cho 125, vì: (125, 1776) = 1 và 100 | 1492!

nên theo Định lí Euler: $1776^{1492!} \equiv 1 \pmod{125}$

Bây giờ, Hướng dẫn giải hệ phương trình đồng dư $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{125} \\ n \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$

Bằng phương pháp thử chọn, ta được nghiệm duy nhất 1376

Vậy: $1776^{1492!} \equiv 1376$ (mod 2000).

Bài toán 17. 22: Tìm hai chữ số tận cùng của

a) Số $2^{9^{1991}}$

b) Phần nguyên của số $\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}$

Hướng dẫn giải

a) Ta tìm dư trong phép chia 9^{1991} cho $20 = 4.5$

Ta có $9^{1991} = (10-1)^{1991} \equiv -1 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}$,

$9^{1991} = (8+1)^{1991} \equiv 1 \pmod{4}$,

Dư là $r_0 = 5t + 4$ với $t = 0,1,2,3$

Với $t = 1$ thì $r_0 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$ nên $9^{1991} = 20k + 9$

Do đó $2^{9^{1991}} = 2^{20k+9} \equiv 76.2^9 \equiv 12 \pmod{100}$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $2^{9^{1991}}$ là 12.

b) Đặt $x_1 = \left(\sqrt{29}-\sqrt{21}\right)^2 = 50 - 2\sqrt{609}$

$x_2 = \left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^2 = 50 + 2\sqrt{609}$

$S_n = x_1^n + x_2^n$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 100x + 64 = 0$

$\Rightarrow S_{n+1} - 100S_n + 64S_{n-1} = 0$ (1)

Ta có: $S_0 = 2$; $S_1 = 100$ nên từ (1) suy ra $S_n \in Z$ với mọi $n \in N$.

$0 < x_1 < 1 \Rightarrow 0\ x_1^n < 1 \Rightarrow x_2^n < S_n < x_2^n + 1 \Rightarrow S_n - 1 < x_2^n < S_n$

Do $S_n \in Z$ nên $[x_2^n] = S_n - 1$

Vậy $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right] = \left[x_2^{1000}\right] = S_{1000} - 1$

Từ (1) suy ra $S_n = 100S_{n-1} - 64S_{n-2} \equiv 36S_{n-2} \pmod{100}$

$\equiv 6^2S_{n-2} \equiv 6^4S_{n-4} \equiv \ldots \equiv 6^nS_0 \pmod{100}$ (với n chẵn)

$\Rightarrow S_{1000} \equiv 6^{1000}.2 \pmod{100}$

Mà $6^{1000} = (6^5)^{200} \equiv 76^{200} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow S_{1000} \equiv 52 \pmod{100}$

Vậy $\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng là 51.

Bài toán 17. 23: Hãy tìm phần nguyên của

$B = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10 + 3}}}$ trong đó x là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải:

Với x nguyên dương thì:$(4x + 1)^2 < 36x^2 + 10x + 3 < (6x + 2)^2$

hay $4x + 1 < \sqrt{36x^2 + 10x + 3} < 6x + 2$

Cộng $4x^2$ vào mỗi vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$(2x + 1)^2 < 4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3} < (2x + 2)^2$

hay $2x + 1 < \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}} < 2x + 2$

Lại cộng thêm x^2 vào mỗi vế của bất đẳng thức trên ta có:

$(x + 1)^2 < x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}} < (x + 2)^2$

hay $x + 1 < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}}} < x + 2$

Vậy phần nguyên của số B là x + 1.

Bài toán 17. 24: Cho dãy số nguyên dương lẻ tăng $a_1 < a_2 < ... < a_n < ....$ Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n ($n \geq 1$), giữa hai số $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}$ bao giờ cũng có ít nhất một số k^2 bằng bình phương của số nguyên dương lớn hơn 1.

Hướng dẫn giải

Trong dãy số chính phương $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$,... ta chọn số chính phương nhỏ nhất k^2 mà lớn hơn $a_1 + a_2 + ... a_n$ nghĩa là:

$(k - 1)^2 < a_1 + a_2 + ... + a_n \leq k^2$

Để chứng minh $k^2 < a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}$ ta sử dụng tính chất của tổng các số lẻ liên tiếp đầu tiên:

$k^2 = (k - 1)^2 + (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 3) + (2k - 1)$

Do đó $a_1 + a_2 + ... + a_n > 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 3)$.

Vì các số hạng trong hai vế đều là số lẻ và ở vế phải chứa tất cả các số lẻ từ 1 đến 2k – 3 suy ra $a_n > 2k - 3$ hay $a_n \geq 2k - 1$, do đó $a_{n+1} > a_n \geq 2k - 1$.

Từ $(k - 1)^2 < a_1 + a_2 + ... + a_n$ có:

$$k^2 = (k - 1)^2 + (2k - 1) < a_1 + a_2 + ... + a_n + (2k - 1)$$
$$< a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 17. 25: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ thì hai số 1992^n và $1992^n + 3.2^n$ có cùng số các chữ số.

Hướng dẫn giải

Giả sử số 1992^n có k chữ số, tức $10^{k-1} \leq 1992^n < 10^k$.

Do $1992^n > 1000^n = 10^{3n}$, nên $k > 3n$.

Giả sử số $1992^n + 3.2^n$ chứa ít nhất k + 1 chữ số, như vậy $1992^n + 3.2^n \geq 10^k$, suy ra $996^n + 3 \geq 2^{k-n}.5^k$.

Mặt khác $10^k > 1992^n$ nên $2^{k-n}.5^k > 996^n$. Vì vậy $996^n + a = 2^{k-n}.5^k$ trong đó $1 \leq a \leq 3$.

Do k > 3n nên k – n > 2n và vì $n \geq 2$ nên $k \geq 4$, do đó $2^{k-n}.5^k \equiv 0 \pmod{10}$, trong khi đó $996^n + a = 6 + a$, nhưng vì $1 \leq a \leq 3$ nên $6+a \equiv 0 \pmod{10}$ nghĩa là $996^n + a \not\equiv 0 \pmod{10}$. Đó là điều mâu thuẫn.

Bài toán 17. 26: Chứng minh rằng không thể biểu diễn số 1 thành tổng các bình phương của nghịch đảo các số tự nhiên khác nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử có thể biểu diễn số 1, dưới dạng: $1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}$ trong đó:

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ và } n \geq 2$$

Từ điều kiện $a_1 \geq 2$ và $a_k \geq k + 1$, ta có:

$$1 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Vậy 1 không có dạng trên.

Bài toán 17. 27: Có hay không số tự nhiên khác 0 vừa là tích của hai số tự nhiên liên tiếp vừa là tích của bốn số tự nhiên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên A khác 0, thoả mãn đề bài.

$A = n(n + 1) = m(m + 1)(m + 2)(m + 3)$ trong đó m, n là số tự nhiên khác 0.

Suy ra $n^2 + n = (m^2 + 3m)(m^2 + 3m + 2)$

hay $\quad n^2 + n + 1 = (m^2 + 3m)^2 + 2(m^2 + 3m).1 + 1$

$\quad\quad = (m^2 + 3m + 1)^2$

Mặt khác dễ thấy $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$.

Vì thế $\quad n^2 < (m^2 + 3m + 1)^2 < (n + 1)^2$

Điều mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số tự nhiên thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 17. 28: Lập dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bằng cách sau: $a_1 = 2$ và với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ thì chọn số a_n là ước số nguyên tố lớn nhất của số $a_1a_2\ldots a_{n-1} + 1$. Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số 5.

Hướng dẫn giải

Ta có $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Giả sử với $n \geq 3$ nào đó mà có số 5 là ước số nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3\ldots a_{n-1} + 1$ thì số A không thể chia hết cho 2, cho 3, do đó chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \geq 2$ nào đó.

Từ đó số $A - 1 = 5^m - 1 = (5 - 1)(1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{m-1})$ chia hết cho 4. Mặt khác $A - 1 = 2.3a_3...a_{n-1}$ trong đó a_i với mọi $i \geq 3$ đều là số lẻ nên A – 1 chỉ có thể chia hết cho 2: mâu thuẫn.

Vậy A không có ước số nguyên tố là 5.

Bài toán 17. 29: Với mọi số nguyên dương n, hãy chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương k sao cho $2k^2+2001k + 3 \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Hướng dẫn giải

Tổng quát hơn, ta sẽ chứng minh rằng phương trình đồng dư $ak^2 + bk + c \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm với mọi n, ở đây b là số lẻ và a hoặc c là số chẵn.

Khi n = 1, lấy k = 0 nếu c chẵn và k = 1 nếu c là số lẻ.

Tiếp theo, giả sử phát biểu trên đúng với mọi n. Nếu c là số chẵn thì theo giả thiết, phương trình đồng dư $2at^2 + bt + \frac{c}{2} \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm t nào đó. Đặt k = 2t ta được $ak^2 + bk + c = 2\left(2at^2 + bt + \frac{c}{2}\right) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$

Nếu c là số lẻ thì a là số chẵn, do đó a + b + c là số chẵn; theo giả thiết ta suy ra phương trình đồng dư $2at^2 + (2a + b)t + \frac{a+b+c}{2} \equiv 0 \pmod{2^n}$ có nghiệm t nào đó. Đặt k = 2t + 1 ta được:

$$ak^2 + bk + c = 2\left(2at^2 + (2a+b)t + \frac{a+b+c}{2}\right) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$$

Như vậy, dù cho c là số chẵn hay lẻ, phát biểu trên vẫn đúng cho n + 1, và do đó, theo quy nạp, nó đúng với mọi n.

Bài toán 17. 30: Cho $n \geq 2$ số $c_1, c_2,..,c_n \in R$ thoả mãn $0 < \sum_{i=1}^{n} c_i \leq n$. Chứng minh rằng có thể tìm được n số nguyên $k_1, k_2, ..., k_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$ và $1 - n \leq c_i + nk_i \leq n$ với mọi i = 1,...,n.

Hướng dẫn giải

Với mọi x, ta kí hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, và kí hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên bé nhất lớn hơn hay bằng x.

Điều kiện $c + nk \in [1 - n, n]$, tương đương với

$$k \in I_n(c), \text{ với } I_n(c) = \left[\frac{1-c}{n} - 1, 1 - \frac{c}{n}\right]$$

Mọi $c \in R$ và $n \geq 2$, đoạn này (có độ dài $2 - \frac{1}{n}$) chứa 2 số nguyên (có thể trùng nhau), đó là:

$$p(c) = \left\lceil \frac{1-c}{n} - 1 \right\rceil \le \left\lfloor 1 - \frac{c}{n} \right\rfloor = q(c)$$

Để chứng minh tồn tại $k_i \in I_n(c_i) \cap Z$ nghiệm đúng $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$ thì chỉ cần chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} p(c_i) \le 0 \le \sum_{i=1}^{n} q(c_i)$.

Đặt $a_i = \frac{1-c_i}{n}$ với i = 1, 2,...,n thì $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \in [0,1]$

Vì $\lceil a_i \rceil < a_i + 1$ nên $\sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil < \sum_{i=1}^{n} a_i + n \le n+1$. Từ đó

$$\sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil \le n \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^{n} p(c_i) = \sum_{i=1}^{n} \lceil a_i \rceil - n \le 0$$

Để chứng minh $\sum_{i=1}^{n} q(c_i) \ge 0$, ta đặt $b_i = 1 - \frac{c_i}{n}$, khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \ge n-1 \text{ vì } \lfloor b_i \rfloor > b_i - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lfloor b_i \rfloor > -1$$

Suy ra : $\sum_{i=1}^{n} \lfloor b_i \rfloor \ge 0$ hay $\sum_{i=1}^{n} q(c_i) \ge 0$ ta có đpcm.

Bài toán 17. 31: Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thoả mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, với k ≥ 2, luôn tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi i = 1, 2,. .., n ta có $|a_i| \le k-1$ và $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \le (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$

Hướng dẫn giải

Từ bất đẳng thức: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ và giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ ta dễ dàng chứng minh được $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \le \sqrt{n}$

Bây giờ, với các b_i nhận giá trị nguyên thuộc đoạn [0, k–1], ta xét k^n giá trị có dạng: $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

Mỗi giá trị đó phải nằm trong đoạn [0, (k–1)$\sqrt{n}$). Ta chia đoạn này thành $k^n - 1$ đoạn con có độ dài bằng nhau là: $(k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$

Khi đó, theo Nguyên tắc Dirichlet, phải có 2 giá trị nói trên rơi vào cùng một đoạn con. Cụ thể, nếu 2 giá trị đó là: $\sum_{i=1}^{n} b_i^{'} x_i$ và $\sum_{i=1}^{n} b_i^{''} x_i$ thì ta phải có:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(b_i^{'} - b_i^{''})x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \le (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1} \text{ suy ra đpcm.}$$

Bài toán 17. 32: Cho các số nguyên $n \ge k \ge 0$. Ta định nghĩa các số $c(n, k)$ với $k = 0, 1, 2,..,n$ như sau: $c(n, 0) = c(n, n) = 1$ với mọi $n \ge 0$: $c(n + 1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$ với mọi $n \ge k \ge 1$. Chứng minh rằng $c(n, k) = c(n, n-k)$ với mọi $n \ge k \ge 0$.

Hướng dẫn giải

Khẳng định đúng với $n = 0$: $c(0, 0) = c(0; 0-0) = 1$

Ta sẽ chứng minh trường hợp tổng quát bằng quy nạp theo n. Giả sử $c(m, k) = c(m, m-k)$ với mọi $n \ge m \ge k \ge 0$. Thế thì, theo hệ thức truy hồi và giả thiết quy nạp, ta có:

$c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$

$c(n+1, n+1-k) = 2^{n+1-k} c(n, n+1-k) + c(n, n-k)$

$= 2^{n+1-k} c(n, k-1) + c(n, k)$

Để hoàn tất chứng minh, ta sẽ chứng minh rằng

$(2^k - 1)c(n, k) = (2^{n+1-k} - 1)c(n, k-1)$ (1)

Để ý rằng từ giả thiết quy nạp ta suy ra

$(2^k - 1)c(n-1, k) = (2^{n-k} - 1)c(n-1, k-1)$

$(2^{k-1} - 1)c(n-1, k-1) = (2^{n-k+1} - 1)c(n-1, k-2)$

Từ đó ta có: $(2^k - 1)c(n, k) - (2^{n+1-k} - 1)c(n, k-1)$

$= (2^k - 1)[2^k c(n-1, k) + c(n-1, k-1)] - (2^{n+1-k} - 1)[2^{k-1}c(n-1, k-1) + c(n-1, k-2)]$

$= [(2^k(2^{n-k} - 1)c(n-1, k-1) + (2^k - 1)c(n-1, k-1)]$

$\qquad - (2^{n+1-k} - 1)[2^{k-1}c(n-1, k-1) + c(n-1, k-2)]$

$= (2^n - 2^k + 2^k - 1 - 2^n + 2^{k-1})c(n-1, k-1) - (2^{n+1-k} - 1)c(n-1, k-2)$

$= (2^{k-1} - 1)c(n-1, k-1) - (2^{n+1-k} - 1)c(n-1, k-2) = 0$

Vậy (1) đúng, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 17. 33: Giải phương trình

a) $[x]^2 - [x] - 2 = 0$ b) $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = [x]$, t nguyên.

$[x]^2 - [x] - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 2$

Do đó $[x] = -1$ hoặc $[x] = 2$.

Vậy nghiệm $-1 \le x < 0$, $2 \le x < 3$.

b) Đặt $\frac{16(x+1)}{11} = t$ thì $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = t$ nên t nguyên. Ta có 16(x +1) = 11 t nên

$x = \frac{11t-16}{16}$. Thế vào phương trình cho thì có

$\left[\frac{11t-22}{14}\right] = t$ do đó $0 \le \frac{11t+22}{14} - t < 1$

Nên $\frac{8}{3} \le t < \frac{22}{3}$. Chọn số nguyên t =3;4;5;6;7

Vậy nghiệm x = $\frac{17}{16}; \frac{7}{4}; \frac{19}{6}; \frac{25}{8}; \frac{45}{16}$.

Bài toán 17. 34: Tìm số tự nhiên n biết rằng khi bỏ đi ba chữ số tận cùng bên phải của nó thì được một số mới có giá trị bằng $\sqrt[3]{n}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy số phải tìm có từ 4 chữ số trở lên.

Giả sử sau khi bỏ ba chữ số tận cùng $\overline{abc}$ của số n ta được số x, thì $n = 10^3x + \overline{abc}$. Theo đề bài ta có:

$x = \sqrt[3]{1000x + \overline{abc}} \Leftrightarrow x^3 = 1000x + \overline{abc}$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 1000) = \overline{abc}$

Nếu $x \ge 33$ thì vế trái sẽ lớn hơn hoặc bằng

$33\,(1089 - 1000) = 33.89 > 2937 > \overline{abc}$ nên $x < 33$.

Nếu $x \le 31$ thì $x^2 \le 961$, nên $x(x^2 - 1000) < 0 < \overline{abc}$

Do đó x chỉ có thể nhận giá trị 32.

Với x = 32 thì $32(1026 - 1000) = \overline{abc}$ hay $768 = \overline{abc}$.

Từ đây ta có $n = 10^3.32 + 768 = 32768$.

Số này thoả mãn yêu cầu của đề bài nên là số cần tìm.

Bài toán 17. 35: Tìm số có hai chữ số sao cho số đó cộng với tích hai chữ số của nó thì bằng bình phương của tổng hai chữ số của nó.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{xy}$ (x, y là các số tự nhiên từ 0 đến 9 và $x \neq 0$).

Ta có $10x + y + xy = (x + y)^2$ hay $10x + y = x^2 + xy + y^2$

Nếu y = 0 thì ta có x = 0, trái giả thiết nên y khác 0.

Biến đổi thành $y^2 + y(x - 1) = x(10 - x)$, ta có:

$$y^2 \le x(10-x) \le \left(\frac{x+10-x}{2}\right)^2 = 25 \text{ nên } y \le 5.$$

Thay lần lượt y bằng 1, 2, 3, 4, 5 vào $x(10 - x - y) = y(y - 1)$ và phân tích vế trái thành tích hai số mỗi số nhỏ hơn 10.

Với $y = 1$ thì $x(9 - x) = 0$, suy ra $x = 9$

Với $y = 2$ thì $x(8 - x) = 2 = 1.2$, không có x thoả mãn

Với $y = 3$ thì $x(7 - x) = 6 = 1.6 = 2.3$, suy ra $x = 1$ hoặc $x = 6$.

Với $y = 4$ thì $x(6 - x) = 12 = 2.6 = 3.4$, không có x thoả mãn

Với $y = 5$ thì $x(5 - x) = 20 = 4.5$, không có x thoả mãn.

Vậy có ba số phải tìm là 91, 63, 13 thoả mãn đề bài.

Bài toán 17. 36: Tìm hai số tự nhiên, một số có hai chữ số sao cho khi viết số này tiếp sau số kia thì được một số gồm bốn chữ số chia hết cho tích của hai số ban đầu.

Hướng dẫn giải

Gọi các số có hai chữ số phải tìm là x và y trong đó $10 \le x, y < 100$.

Theo đề bài ta có: $100x + y = kxy$ (k nguyên dương) hay $y = kxy - 100x$

Do $kxy - 100x \,\vdots\, x$ nên $y \,\vdots\, x$, đặt $y = mx$ (m nguyên dương).

Khi đó ta lại có $100x + mx = kmx^2$ suy ra $100 = m(kx - 1)$ suy ra m là ước số của 100. Vì x, y là các số có hai chữ số nên m chỉ là số có một chữ số, do đó $m = 1; 2; 4; 5$.

Mặt khác $kx - 1 = \dfrac{100}{m}$ hay $kx = \dfrac{100}{m} + 1$ đồng thời x là số có hai chữ số.

Nếu $m = 1$ thì $\dfrac{100}{1} + 1 = 101$ không chia hết cho một số có hai chữ số x nào: loại

Nếu $m = 5$ thì $\dfrac{100}{5} + 1 = 21$, ta có $x = 21$ khi đó $y = m.x = 5.21 = 105$ là số có ba chữ số: loại.

Nếu $m = 2$ thì $kx = 51$, do đó nếu $k = 1$ thì $y = mx$ có nhiều hơn 2 chữ số, nếu $k = 3$ ta có $x = 17$; $y = 34$.

Vậy $m = 4$ thì $kx = 26$, do đó nếu $k = 1$ thì $y = mx$ có nhiều hơn 2 chữ số, nếu $k = 2$ ta có $x = 13$; $y = 52$. Thử lại đúng.

Bài toán 17. 37: Tìm năm số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng bốn số còn lại.

Hướng dẫn giải

Sắp thứ tự 5 số phải tìm là: $0 < x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$

Theo đề bài $x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$

và cũng có các đẳng thức tương tự đối với x_2, x_3, x_4, x_5

Đặt $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ thì $x_1 = (S - x_1)^2$

Tương tự $x_2 = (S - x_2)^2$, $x_3 = (S - x_3)^2$, $x_4 = (S - x_4)^2$

Và $x_5 = (S - x_5)^2$

Ta có thì $x_1 = (S - x_1)^2 \ge (S - x_2)^2 \ge (S - x_3)^2 \ge (S - x_4)^2 \ge (S - x_5)^2 = x_5$

Suy ra: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$ (vì đều bằng $x > 0$) khi đó $S = 5x$, do đó $x = (4x)^2$ hay $x(16x - 1) = 0$

Vì $x > 0$ nên chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{16}$. Vậy năm số cần tìm đều là $\frac{1}{16}$.

Bài toán 17. 38: Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng 1994 còn tích của chúng lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta cần chọn n số nguyên dương n ($n > 1$) mà $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1994$ để tích của chúng lớn nhất.

Không có số nào trong các số đã chọn bằng 1.

Thật vậy giả sử $a_1 = 1$, nếu $n = 2$ và $1 + 1993 = 1994$ thì ta thay bằng $2 + 1992 = 1994$ có $2.1992 > 1.1993$, nếu $n > 2$ trong tích $a_1 + a_2 + ... + a_n$ khi ta thay $b = a_2 + 1$ thì tổng các số

$b + a_3 + ... + a_n = 1994$, còn tích mới là

$b \times a_3 \times ... \times a_n = (a_2 + 1) \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n$

$$= a_2^2 \times a_3 \times ... \times a_n + a_2 \times a_3 \times ... \times a_n$$

$$> a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n.$$

Nếu các số đã chọn có số 2 thì cũng chỉ có không quá hai số bằng 2. Thật vậy giả sử có ba số 2 thì $2.2.2 < 3.3$, ta thay thế ba số 2 bởi hai số 3 sẽ có tích mới lớn hơn.

Không có số nào trong các số đã chọn lớn hơn 4. Nếu trái lại, giả sử $a_1 \geq 5$ thì tay a_1 bằng hai số 2 và $a_1 - 2$, khi đó $2(a_1 - 1) > a_1$ và tích mới sẽ lớn hơn tích ban đầu.

Vậy tích lớn nhất chỉ gồm toàn số 2 và 3 trong đó không có quá hai số 2, nghĩa là tích lớn nhất bằng 2.3^{664}.

Bài toán 17. 39: Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = |7x^2 + 13xy - 7y^2|$ trong đó x, y nhận giá trị nguyên và không đồng thời bằng 0.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu CP là tập các số chính phương.

Xét $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 7x^2 + 13xy - 7y^2 = 0$. Coi $g(x, y)$ là tam thức bậc 2 đối với x, có $\Delta = 365y^2$. Do $365 \notin CP$ nên $\Delta \notin CP\ \forall y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \Rightarrow g(x, y) \neq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$. Mà $g(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên $g(x, y) \neq 0\ \forall x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \neq 0$. Do đó $f(x, y) \neq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \neq 0$. Suy ra, với $a = f(x_0, y_0)$ là giá trị cần tìm $a \in \mathbb{N}^*$.

Xét a chẵn thì phải có x_0, y_0 chẵn. Khi đó $\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2} \in Z$ và $f\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right) = \frac{a}{4} < a$, trái với định nghĩa của a. Như vậy, a là số lẻ. Dễ thấy $f(1, 2) = 5$. Suy ra $a \leq 5$.

Vậy $a \in \{1, 3, 5\}$

– Nếu a = 1 thì $g(x_0, y_0) = \pm 1 \Leftrightarrow 7x_0^2 + 13x_0y_0 - 7y_0^2 \mp 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 365y_0^2 \pm 28 \in$ CP (*). Mặt khác, $365y_0^2 \pm 28$ khác ± 3 (mod 5) mâu thuẫn với (*) (do b^2 khác $\pm$ 3 (mod 5) $\forall b \in \mathbf{Z}$)

– Nếu a = 3 thì:

$f(x_0, y_0) = |(x_0-y_0)^2 + y_0^2 + (6x_0^2 + 15x_0y_0 - 9y_0^2)| \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow (x_0 - y_0)^2 + y_0^2 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow x_0 - y_0 \equiv y_0 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x_0 \equiv y_0 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow f(x_0, y_0) \equiv 0 \pmod 9$, mâu thuẫn với $f(x_0, y_0) = 3$

Vậy: a = minf(x, y) = 5.

Bài toán 17. 40: Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 và độ dài các đường cao đều là các số nguyên thì tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z là các đường cao theo thứ tự tương ứng với các cạnh a, b, c của ΔABC (x, y, z nguyên dương)

Do đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính bằng 1, nên x, y, z đều lớn hơn 2.Thật vậy, ta có: 2S = ax + by = cz = a + b + c nên:

$$x = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} > 1 + \frac{a}{a} = 2 \text{ (vì } b + c > a)$$

Tương tự y > 2 và z > 2

Mặt khác $\frac{1}{x} = \frac{a}{a+b+c}$; $\frac{1}{y} = \frac{b}{a+b+c}$ và $\frac{1}{z} = \frac{c}{a+b+c}$

Do đó : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Giả sử $x \geq y \geq z$ khi đó $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$ suy ra $\frac{3}{z} \geq 1$

Vậy $z \leq 3$, mà z > 2 nên z = 3

Với z = 3 thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, suy ra $\frac{1}{y} \geq \frac{2}{3}$ suy ra $y \leq 3$ mà y > 2 nên y = 3, từ đó có x = 3 do đó x = y = z = 3.

Kết hợp với ax = by = cz, ta có a = b = c.

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 17. 41: Các cạnh của một tam giác có số đo là $\sqrt{377}$; $\sqrt{80}$ và $\sqrt{153}$. Chứng minh rằng có thể đặt tam giác này trong một hình chữ nhật có số đo độ dài các cạnh là các số nguyên sao cho hai đỉnh của tam giác trùng với hai điểm đầu và điểm cuối của một đường chéo và khoảng cách từ đỉnh thứ ba, của tam giác tới các cạnh của hình chữ nhật là một số nguyên. Khi đó hãy chứng tỏ rằng số đo diện tích của tam giác cũng là số nguyên.

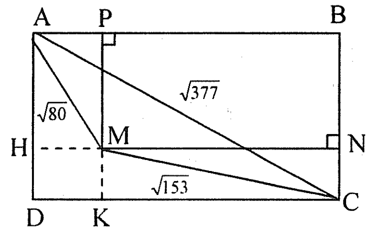
Hướng dẫn giải

Dự hình chữ nhật có chiều dài AB = CD = 16, chiều rộng AD = BC = 11

Trên AB đặt điểm P sao cho AP = 4.

Trên BC đặt điểm N sao cho CN = 3.

Từ các điểm P và N trên AB và BC kẻ đường vuông góc với AB và BC chúng cắt nhau tại M. Trên hình vẽ ta có PB = MN = 12; BM = MP = 8.



Trong tam giác vuông MPA theo định lí Pitago thì :

$MA^2 = AP^2 + MP^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow AM = \sqrt{80}$

Trong tam giác vuông MNC, theo định lí Pitago ta có

$MC^2 = MN^2 + NC^2 = 12^2 + 3^2 = 144 + 9 = 153$

$\Rightarrow MC = \sqrt{153}$

và tam giác vuông ABC, ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 11^2 = 256 + 121 = 377$

$\Rightarrow AC = \sqrt{377}$

Như vậy tam giác MAC có các cạnh bằng $\sqrt{377}$ và $\sqrt{80}$ và $\sqrt{153}$ có hai đỉnh trùng với hai đầu mút của đường chéo AC, còn khoảng cách từ đỉnh M đến các cạnh AB và BC lần lượt bằng 8 và 12 là các số nguyên, nên cnính là tam giác phải tìm.

Ta có $S_{AMC} = S_{ABCD} - S_{ABC} - S_{AHM} - S_{CKM} - S_{DHMX}$

$= 11.16 - 8.11 - 3.4 - 3.6 - 4.4 = 42$ (đơn vị diện tích) nên là số nguyên.

Bài toán 17. 42: Cho x là một số thực. Chứng minh nếu phần lẻ $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì x là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Ta có $\{x\} = x - [x]$, $\{x^2\} = x^2 - [x^2]$ và $\{x^{2013}\} = x^{2013} - [x^{2013}]$

Theo đề bài phần lẻ $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì $x^2 = x + a$ và $x^{2013} = x + b$ với $a = [x^2] - [x]$ và $b = [x^{2013}] - [x]$ là các số nguyên.

Vì $x^2 = x + a$ nên $x^2 - x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$.

Xét a = 0 thì $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$ đều là số nguyên.

Xét a >0 thì $a \geq 1$, ta chứng minh quy nạp, khi đó tồn tại 2 số nguyên $c_n > 1$ và $d_n > 0$ sao cho $x^n = c_n.x + d_n, \forall n \geq 3$.

Thật vậy với n= 3: $x^2 = x + a \Rightarrow x^3 = x^2 + ax = x + a + ax = (1 + a)x + a$ khi đó chọn 2 số nguyên $c_3 = 1 + a > 1$ và $d_3 = a > 0$.

Giả sử khẳng định đúng với n= k $\geq$ 3: tồn tại 2 số nguyên c_k >1 và d_k >0 sao cho $x^k = c_k.x + d_k$.

Khi đó $x^{k+1} = c_k.x^2 + d_kx = c_k.(x + a) + d_kx = (c_k + d_k)x + = c_k.a$

Ta chọn $c_{k+1} = c_k + d_k; d_{k+1} = c_k.a$ thì thỏa mãn.

Áp dụng với n = 2013 thì tồn tại 2 số nguyên c_{2013} >1 và d_{2013} >0 sao cho $x^{2013} = c_{2013}.x + d_{2013}$.

Mà x^{2013} = x + b nên $c_{2013}.x + d_{2013} = x + b$

Do đó $x = \dfrac{b - d_{2013}}{c_{2013} - 1} \in Q$.

Suy ra x là nghiệm hữu tỉ của phương trình $x^2 - x - a$ =0 nên x là số nguyên: đpcm.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 17. 1: Chứng minh rằng, với bất kì số tự nhiên n > 1, hoặc là tồn tại một luỹ thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 2 nó sẽ có n chữ số, hoặc là tồn tại một luỹ thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 5 nó sẽ có n chữ số, nhưng không tồn tại cả hai dạng đó.

Hướng dẫn

Chứng minh qui nạp: Nếu $a_n = 2^k$ thì 10^k có n chữ số khi viết trong hệ cơ số 5. Nếu $a_n = 5^h$ thì 2^h có n chữ số khi viết trong hệ cơ số 2

Bài tập 17. 2: Cho f(0), f(1) là những số nguyên, f(0) = f(1) = 0 và f(n + 2) = 4^{n+2} f(n + 1) – 16^{n+1} f(n) + $n2^{n^2}$, n = 0, 1, 2,... Chứng tỏ rằng các số f(1989), f(1990), f(1991) chia hết cho 13.

Hướng dẫn

$$\text{Xét } f(n) = 2^{n^2} g(n) \text{ thì } g(n) = \frac{15n - 32 + (15n + 1)16^{-n+1}}{15^2}$$

$$\text{Từ đó: } f(n) = \frac{(15n + 2)(15n - 32).16^{n-1}.2(n - 2)^2}{15^3}$$

Bài tập 17. 3: Cho tam thức f(x) = $ax^2 + bx + c$ với các hệ số nguyên.

a) Chứng minh rằng với a, b, c bất kì thì biệt số Δ của tam thức trên không thể bằng 1994 và cũng không bằng 1995.

b) Khi tam thức có các hệ số nguyên thay đổi, hãy tìm biệt số Δ nguyên dương nhỏ nhất mà không là số chính phương.

Hướng dẫn

a) Dùng phản chứng

b) Kết quả Δ = 5.

Bài tập 17. 4: Có bao nhiêu bộ số nguyên dương (a;b;c) sao cho:

$$[a;b] = 1000 \text{ và } [b;c] = [c;a] = 2000.$$

Hướng dẫn

Số 1000 và 2000 đều có dạng $2^m.5^n$ nên a,b,c cũng có dạng đó.

Kết quả 70 bộ.

Bài tập 17. 5: Tồn tại hay không cặp số thực (x, y) sao cho các số x = y, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ đều nguyên nhưng $x^4 + y^4$ không nguyên?

Hướng dẫn

Kết quả Tồn tại với x + y = 2, xy = 1/2

Bài tập 17. 6: Có tồn tại các số nguyên x,y, z thỏa mãn:

$$(x+2010)^2 + (x+2012)^2 = (x+y+z+2008)(y+z-x+2014).$$

Hướng dẫn

Biến đổi

$(x+2010)^2 + (x+2012)^2 = (x+y+z+2008)(y+z-x+2014).$

$\Leftrightarrow (x+2010)^2 + (x+2011)^2 + (x+2012)^2 = (y+z-3)^2.$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 12066x + 2010^2 + 2011^2 + 2012^2 = (y+z-3)^2.$

Kết quả không tồn tại.

Bài tập 17. 7: Tìm phần nguyên của $S = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[2013]{\frac{2013}{2012}}$

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức AM–GM để chứng minh $\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$

Kết quả [S] = 2012.

Bài tập 17. 8: Cho một số nguyên không âm a, b sao cho ab $\ge c^2$, với c là số nguyên. Chứng minh tồn tại một số n và các số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ thoả $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b$ và $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c$.

Hướng dẫn

Xét bộ (a, b, c) với a $\ge$ b và c $\ge$ 0. Có 2 trường hợp c $\le$ b và a > c > b. Trong trường hợp sau thì chứng minh qui nạp theo a + b.

Bài tập 17. 9: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì có :

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] = \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right]$$

Hướng dẫn

Ta có $\left[\sqrt[k]{n}\right] - 1 = x$ thì $x \ge 2$ và $x^k \le n$.

và có $\left[\log_m n\right] - 1 = y$ thì $y \ge 2$ và $m^y \le n$.

Bài tập 17. 10: Cho a và b là hai số nguyên dương sao cho ab + 1 của hết $a^2 + b^2$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ là một số chính phương.

Hướng dẫn

Dùng phản chứng và đưa về phương trình bậc hai $a^2 - kba + b^2 - k = 0$. Lập được dãy vô hạn và nghiệm tự nhiên (a_i, b_i) mà tổng $a_i + b_i$ giảm dần

Bài tập 17. 11: Với số nguyên dương n bất kì, gọi $\tau(n)$ là số các ước số dương (kể cả 1 và chính nó) của số ấy. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho với số này tồn tại một số nguyên dương n để $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$.

Hướng dẫn

Kết quả m là số lẻ

Bài tập 17. 12: Kí hiệu S là tập hợp tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{1}{p}$ có chu kì cơ sở 3r: $\frac{1}{p} = 0, a_1a_2...a_{3r}a_1a_2...a_{3r}...$trong đó r = r(p); Với mọi $p \in S$ và mọi số nguyên $k \geq 1$ ta định nghĩa: $f(k, p) = a_k + a_{k+r(p)} + a_{k+2r(p)}$

a) Chứng minh rằng S vô hạn

b) Tìm giá trị lớn nhất của (k, p) với $k \geq 1$ và $p \in S$.

Hướng dẫn

a) Gọi s là một số nguyên tố và $N_s = 10^{2s} + 10^s + 1$ thì $N_s \equiv 3 \pmod 9$

b) Kết quả f(2, 7) = 19 .

Chuyên đề 18: PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Ánh xạ và hàm số

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y. Phần tử y tương ứng của x gọi là ảnh của x qua ánh xạ f, kí hiệu y = f(x), x gọi là nghịch ảnh của y:

$$f: X \to Y: \quad x \mapsto y = f(x)$$

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều cho hai ảnh khác nhau của Y: $\forall a, b \in X : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Hay $\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là toàn ánh nếu mỗi phần tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh x của X:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$$

Hay $Y = f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$.

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là song ánh nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh, tức là nếu mỗi phần tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh duy nhất x của X.

Hai tập hữu hạn có cùng số phần tử khi tồn tại một song ánh giữa chúng. Còn 2 tập vô hạn mà có song ánh giữa chúng thì gọi là cùng lực lượng hay cùng bản số.

– Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

– Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

– Hàm số tuần hoàn : $\begin{cases} \exists a \neq 0 \\ f(x+a) = f(x), \ \forall x, x+a \in D \end{cases}$

Số a dương bé nhất nếu có trong các số a thỏa mãn điều kiện trên gọi là chu kỳ T của hàm số f.

– Hàm phản tuần hoàn: $\begin{cases} \exists b \neq 0 \\ f(x+b) = -f(x), \ \forall x, x+b \in D \end{cases}$

– Hàm cộng tính: f(x + y) = f(x) + f(y)

– Hàm nhân tính: f(xy) = f(x) . f(y)

– Điểm bất động của hàm f(x) là x = a sao cho: f(x) = a

– Nếu hàm số f(x) có f '(x) = 0 trên D thì f(x) là hàm hằng trên D.

Đặc trưng hàm sơ cấp:

– Hàm bậc nhất f(x) = ax + b, a ≠ 0: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

– Hàm tuyến tính f(x) = ax, a ≠ 0: f(x + y) = f(x) . f(y)

– Hàm mũ $f(x) = a^x$, a > 0, a ≠ 1: f(x + y) = f(x) + f(y)

– Hàm lôgarit $f(x) = \log_a|x|$, a > 0, a ≠ 1: f(xy) = f(x) + f(y)

– Hàm luỹ thừa $f(x) = |x|^a$: f(xy) = f(x). f(y)

– Hàm sin f(x) = sinx: $f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$

– Hàm cosin f(x) = cosx: $f(2x) = 2f^2(x) - 1$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

– Hàm tang f(x) = tanx: $f(x + y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$

– Hàm cotang f(x) = cotx: $f(x + y) = \frac{f(x)f(y)-1}{f(x)+f(y)}$

– Hàm $f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: $f(3x) = 3f(x) + 4f^3(x)$

– Hàm $f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$

Phương trình hàm

– Tính giá trị đặc biệt f(0), f(1),...

– Dùng phép thế, đổi biến, các chuyển đổi số học, đại lượng trung bình, biến đổi tịnh tiến và đồng dạng, biến đổi phân tuyến tính,...

– Dùng tính chất đơn ánh, toán ánh, song ánh, tuần hoàn,...

– Đánh giá, dự đoán hàm số, quy nạp,...

Phương trình hàm Cauchy : Hàm f(x) xác định và liên tục trên **R** thoả mãn: f(x + y) = f(x) + f(y), ∀x, y ∈ **R** thì f(x) = ax với a hằng số tùy ý.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 18. 1: Cho hàm số f: **R** → **R** thoả: f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy), ∀x, y ∈ **R**

Biết f(201) = a, hãy tính f(202).

Hướng dẫn giải

Thay x = 0 ta được:f(0) = f(0) + 2f(0) ⇒ f(0) = 0

Thay y = –1 ta được: f(–x) = f(x) + 2f(–x) ⇒ f(x) = –f(–x)

Thay $y = -\frac{1}{2}$ ta được : $f(0) = f(x) + 2f\left(-\frac{x}{2}\right) = f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

Suy ra $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

Xét $x \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ bất kì. Thay $y = \dfrac{t}{2x}$ ta được:

$$f(x + t) = f(x) + 2f\left(\frac{t}{2}\right) = f(x) + f(t)$$

Với $x = 0$ ta cũng có $f(0 + t) = f(0) + f(t)$,.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo k:$f(kx) = kf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in N$

Từ đó rút ra: $a = f(201) = 201.f(1) \Rightarrow f(1) = \dfrac{a}{201}$

Do đó $f(202) = 202.f(1) = \dfrac{202}{201}a$.

Bài toán 18. 2: Cho hàm f(x, y) thoả mãn các điều kiện:

$f(0, y) = y + 1$; $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$

$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

với mọi số nguyên không âm x, y. Tìm f(4, 1981)

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1, n) = f(0, f(1, n-1)) = 1 + f(1, n-1)$

Do đó: $f(1, n) = n + f(1, 0) = n + f(0, 1) = n + 2$

Ta lại có: $f(2, n) = f(1, f(2, n-1)) = f(2, n-1) + 2$.

Do đó: $f(2, n) = 2n + f(2, 0) = 2n + f(1, 1) = 2n + 3$

Bây giờ: $f(3, n) = f(2, f(3, n-1)) = 2f(3, n-1) + 3$.

Đặt $u_n = f(3, n) + 3$

Lúc đó: $u_n = 2u_{n-1}$ và $u_0 = f(3, 0) + 3 = f(2, 1) + 3 = 0$.

Do vậy: $u_n = 2^{n+3}$ và $f(3, n) = 2^{n+3} - 3$.

Ta có: $f(4, n) = f(3, f(4, n-1)) = 2^{f(4, n-1)+3} - 3$

$f(4, 0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13$

$f(4,1) = 2^{24} - 3$

$f(4,2) = 2^{224} - 3$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:$f(4,n) = 2^{22...24} - 3$

Trong đó số mũ chứa (n + 2) chữ số 2. Từ đó:

$f(4, 1981) = 2^{22...24} - 3$ với số mũ chứa 1983 chữ số 2.

Bài toán 18. 3: Cho hàm f: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $f(n + 1) > f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

(ii) $f(f(n)) = 3n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hãy tính f(2003).

Hướng dẫn giải

Từ (i) và (ii) $\Rightarrow f(1) < f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(1) = 2$

Ta có: $f(2) = f(f(1)) = 3.1 = 3$

$f(3) = f(f(2)) = 3.2$

$f(2.3) = f(f(3)) = 3.3 = 3^2$

....

Suy ra $f(2.3^n) = 3^{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$; $f(3^n) = 2.3^n$; $\forall n \in \mathbf{Z}^+$

Nên có $f(3^{n+1}) = f(f(2.3^n)) = 3(2.3^n) = 2.3^{n+1}$

$f(2.3^{n+1}) = f(f(3^{n+1})) = 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$

Do đó khẳng định đúng với mọi n.

Ta có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa 3^n và 2.3^n và do giả thiết (i) $f(n+1) > f(n)$ nên có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa $f(3^n)$ và $f(2.3^n)$ suy ra $0 < m < 3^n$

$\Rightarrow f(3^n + m) = 2.3^n + 3n$. Do giả thiết (ii) suy ra.

$f(2.3^n + m) = f(f(3^n + m)) = 3(3^n + m)$.

Vậy $f(2.3^n + m) = 3(3^n + m)$ với $0 < m < 3^n$.

Suy ra: $n = 2003 = 2.3^6 + 545 \Rightarrow f(2003) = 3(3^6 + 545) = 3822$.

Bài toán 18. 4: Cho f(n) là hàm số xác định với mọi $n \in N^*$ và lấy giá trị không âm thoả mãn tính chất:

1. $\forall n, m \in N^*$: $f(m + n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1
2. $f(2) = 0$ và $f(3) > 0$
3. $f(9999) = 3333$. Tính f(2000).

Hướng dẫn giải

Vì $f(m + n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1 nên ta suy ra:

$f(m + n) \geq f(m) + f(n)$

$\Rightarrow f(2) \geq 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(3) = 1$

Ta có: $f(6) \geq f(3) + f(3) = 2$

$f(9) \geq f(6) + f(3) \geq 3$

....

$f(9999) \geq f(9996) + f(3) \geq 3333$

Vì giả thiết cho $f(9999) = 3333$ nên ta có dấu "=" ở các bất đẳng thức trên xảy ra, tức là $f(3n) = n$, $\forall n = 1, 2, ..., 3333$

$\Rightarrow f(1998) = 666$, $f(2001) = 667$

Mặt khác nếu $a, b \in N^*$ và $a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b) + f(a - b) \geq f(b)$

$\Rightarrow 666 \leq f(2000) \leq 667 \Rightarrow f(2000) = 666$ hoặc 667

Giả sử $f(2000) = 667$

$\Rightarrow f(4000) \geq 1334 \Rightarrow f(6000) \geq 1334 + 667 = 2001$

mà $f(6000) = 2000$ (mâu thuẫn). Vậy: $f(2000) = 666$

Bài toán 18. 5: Cho f và g là các hàm xác định trên R thoả:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).g(y),\ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng:

Nếu $f(x) \neq 0$ và $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$ thì: $|g(y)| \leq 1$, $\forall y \in \mathbf{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta dùng phương pháp phản chứng

Giả sử tại một điểm $y_0 \in \mathbf{R}$: $|g(y_0)| = a > 1$

Ta lấy x_0: $f(x_0) \neq 0$ và xây dựng dãy x_k (k = 0, 1, 2...) như sau:

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_k+y_0,\text{khi } |f(x_k+y_0)|\ge|f(x_k-y_0)|\\ x_k-y_0,\text{khi } |f(x_k+y_0)|<|f(x_k-y_0)|\end{cases}$$

Theo giả thiết ta có:

$2|f(x_{k+1})|>|f(x_k+y_0)|+|f(x_k-y_0)|\ge|f(x_k+y_0)+f(x_k-y_0)|$

$=2|f(x_k)|\,|g(y_0)|=2a|f(x_k)|$

Nên $|f(x_{k+1})|\ge a|f(x_k)|$ với $a>1$; $k=1, 2, 3...$

Do đó ta có: $|f(x_k)|\ge a^k|f(x_0)|$. Nhưng vì $|f(x_0)|\ne 0$ và $a>1$ nên có thể chọn k sao cho $a^k|f(x_0)|>1$ và do đó $|f(x_k)|>1$

Mâu thuẫn với giả thiết.Vậy $|g(y)|\le 1, \forall y\in R$.

Bài toán 18. 6: Cho hàm số f: **R** → **R** thoả hai điều kiện:

i) $f(x)\ge 1+x; \forall x\in \mathbf{R}$

ii) $f(x+y)\ge f(x).f(y); \forall x, y\in \mathbf{R}$

Chứng minh rằng không thể tồn tại hai số a; b ∈ R mà $f(a).f(b)\le 0$.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh: $f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$

Thật vậy: Với $|x|<1$ thì theo điều kiện (i) ta có ngay $f(x)>0$

Với $|x|>1$, trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức:

$\forall x\in \mathbf{R}, \forall n\in N$ thì $f(x)\ge\left[f(\frac{x}{2^n})\right]^{2^n}$ (1)

Với n = 0: công thức (1) đúng.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k > 0 tức $f(x)\ge\left[f(\frac{x}{2^k})\right]^{2^k}$ (2)

Ta có: $f\left(\frac{x}{2^k}\right)=f\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{x}{2^{k+1}}\right)\ge\left[f(\frac{x}{2^{k+1}})\right]^2$ (theo ii)

Nên từ (2) ⇒ $f(x)\ge f\left(\frac{x}{2^k}\right)^{2^k}\ge\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^k.2}=f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$ tức (1) đúng với n = k + 1

Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức (1) đúng.

Bây giờ chọn n đủ lớn để $|x|<2^n$, x ∈ R tuỳ ý, khi đó $\left|\frac{x}{2^n}\right|<1\Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right)>0$

Do đó $\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n}>0$ tức $f(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$.

Như vậy không thể tồn tại a, b ∈ **R** mà $f(a).f(b)\le 0$.

Bài toán 18. 7: Đặt $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ với x là số thực dương, và với mọi số nguyên dương n, ta đặt: $g_n(x) = x + f(x) + f(f(x)) + ... + f(f(...(f(x))))$, f được lấy n lần ở số hạng cuối cùng. Chứng minh rằng:

a) $g_n(x) > g_n(y)$ nếu $x > y > 0$

b) $g_n(1) = \dfrac{F_1}{F_2} + \dfrac{F_2}{F_3} + \ldots + \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$

với $F_1 = F_2 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu $f_n(x) = f(f(...(f(x))))$ (n lần). Kí hiệu $g_0(x)$ là hàm đồng nhất. Chú ý rằng $f_2(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x > 0$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n rằng $g_n(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x > 0$. Dễ dàng kiểm tra được điều này đúng với $g_1(x)$

Giả sử khi $n \geq 2$, $g_1(x), ..., g_{n-1}(x)$ là các hàm tăng thực sự với $x > 0$

Cho $x > y > 0$. Ta có: $g_n(x) - g_n(y) =$

$= (x - y) + (f(x) - f(y)) + (f_2(x) - f_2(y)) + ... + (f_n(x) - f_n(y))$

$= (g_1(x) - g_1(y)) + (g_{n-2}(f_2(x)) - g_{n-2}(f_2(y))) > 0$

Vậy $g_n(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x > 0$.

b) Để ý rằng $\dfrac{F_1}{F_2} = 1$ và $f\left(\dfrac{F_i}{F_{i+1}}\right) = \dfrac{F_{i+1}}{F_{i+2}}$. Suy ra:

$$\frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = g_n(1)$$

Bài toán 18. 8: Cho $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{2003}{2}}\cos 2(x + y) + a\cos(x+y+\alpha)$ với $a, \alpha \in \mathbf{R}$.

Chứng minh $\min (f(x,y))^2 + (\max f(x,y))^2 \geq 2003$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(0, 0) = \sqrt{\dfrac{2003}{2}} + a.\cos\alpha$; $f\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2003}{2}} - a.\cos\alpha$

Suy ra: $f(0, 0) + f\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{\dfrac{2003}{2}}$

Nên $\max f(x, y) \geq \max\left\{f(0,0), f\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} \geq \sqrt{\dfrac{2003}{2}}$ $(\forall x,y \in R)$

$\Rightarrow (\max f(x,y))^2 \geq \dfrac{2003}{2}$

Ta lại có: $f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{2003}{2}}-a.\sin\alpha, f\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{2003}{2}}+a.\sin\alpha$

Nên $f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{\frac{2003}{2}}$. Suy ra :

$\min f(x,y)\le \min\left\{f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),f\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\le-\sqrt{\frac{2003}{2}}\ (\forall x,y\in R)$

$\Rightarrow (\min(f(x,y))^2)\ge \frac{2003}{2}$.

Do đó: $(\min f(x,y))^2+(\max f(x,y))^2\ge 2003$.

Bài toán 18. 9: Cho hàm số f: $\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$. Giả sử f(1) = 1, f(2n) = f(n) và f(2n + 1) = f(2n) + 1 với mọi số tự nhiên n.

a) Tìm giá trị lớn nhất M của f(n) với $n\in\mathbf{N}^*$ thoả mãn điều kiện $1\le n\le 1994$.

b) Tìm tất cả các số $n\in\mathbf{N}$, với $1\le n\le 1994$, sao cho: f(n) = M.

Hướng dẫn giải

Có thể dùng quy nạp để chứng minh rằng f(n) là số tất cả các chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của số n.

a) Tồn tại nhiều nhất là 10 chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của một số nếu số đó bé hơn hoặc bằng $1994=\overline{11111001010}_{(2)}$

Suy ra M = 10

b) Với mọi số tự nhiên $n\le 1994$, ta có f(n) = 10 nếu và chỉ nếu n là một trong các số: $1023=\overline{1111111111}_{(2)}$,

$1535=\overline{10111111111}_{(2)}$, $1791=\overline{11011111111}_{(2)}$,

$1919=\overline{11101111111}_{(2)}$, $1983=\overline{11110111111}_{(2)}$.

Bài toán 18. 10: Cho $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$, $\forall x\ne 0$. Giả sử $f_0(x)=x$ và

$$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))\ \forall n\in\mathbf{N}^+,\ \forall x\ne 0.$$

Chứng minh $\forall n\in N$, $\forall x\ne -1,0,1$ thì: $\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=1+\frac{1}{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $p_n(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right]$

$$q_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}\right] \qquad \forall x, y \in \mathbf{N}$$

Ta có $p_{n+1}(x) = p_n^2(x) + q_n^2(x)$

$$q_{n+1}(x) = 2p_n(x)\, q_n(x) \qquad \forall x, y \in \mathbf{N}$$

$$f_0(x) = x = \frac{x}{1} = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}, \ \forall x \neq 0$$

Giả sử: $f_k(x) = \dfrac{p_k(x)}{q_k(x)}$

$$\Rightarrow f_{k+1}(x) = \frac{\left[\dfrac{p_k(x)}{q_k(x)}\right]^2 + 1}{2.\dfrac{p_k(x)}{q_k(x)}} = \frac{p_k^2(x) + q_k^2(x)}{2p_k(x)q_k(x)} = \frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)}$$

Do đó: $f_n(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x \neq 0$

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x \neq -1, 0, 1$ thì có:

$$\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = \frac{\left[(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}\right]\left[(x+1)^{2^{n+1}} - (x-1)^{2^{n+1}}\right]}{\left[(x+1)^{2^n} - (x-1)^{2^n}\right]\left[(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}\right]}$$

$$= \frac{\left[(x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}\right]^2}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}} = 1 + \frac{2(x+1)^{2^n}(x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}} = 1 + \frac{1}{f(\frac{x+1}{x-1})^{2^n}}$$

Bài toán 18. 11: Cho hàm số f: $R^+ \to R^+$ thoả mãn phương trình: $f(4x) + 2005f(2x) = 2006f(x)\ \forall x \in R^+$. Chứng minh tồn tại số thực k để: $f(x) = f(kx)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(2^n x) = u_n (n \in N^+)$

Từ $f(4x) + 2005f(2x) = 2006f(x)\ \forall x \in R^+$, bằng quy nạp ta có:

$f(2^{n+2}x) + 2005f(2^{n+1}x) = 2006f(2^n x)\ (x \in R^+)$

Hay $u_{n+2} + 2005u_{n+1} - 2006u_n = 0\ (u_n > 0)$

Hướng dẫn giải phương trình đặc trưng:

$\lambda^2 + 2005\lambda - 2006 = 0$ ta được $\lambda = 1$; $\lambda = -2006$

Vậy $u_n = p.1^n + q(-2006)^n > 0, \forall n$

Với $p > 0$, $q = 0$ thì $u_n = u_0$

Vậy $f(2^n x) = f(x)$ hay $k = 2^n\ \forall n \in N^+$

Bài toán 18. 12: Cho ánh xạ P: $N^* \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{Q}$

$$(x,y) \mapsto P(x,y) = \frac{x^2+y^2+6}{xy}$$

Chứng minh nếu P(x, y) $! \in \mathbf{N}^*$ thì $\sqrt[3]{P(x,y)} \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Đặt P(x, y) = z. Xét phương trình: $x^2 - zyx + y^2 + 6 = 0$ (1)

Gọi (x_0, y_0, z) là nghiệm sao cho $x_0 + y_0$ bé nhất. Vai trò x_0, y_0 như nhau nên giả sử $x_0 \ge y_0$.

Xét phương trình: $x^2 - zy_0x + y_0^2 + 6 = 0$ (2)

Gọi nghiệm thứ hai là x_1 thì $x_0 \le x_1$

Ta có: $x_0 + x_1 = zy_0$ (3) và $x_0x_1 = y_0^2 + 6$ (4)

1) Nếu $y_0 = x_0$ từ (1) $\Rightarrow z = 2 + \frac{6}{x_0^2} \in \mathbf{N}^*$

$\Rightarrow x_0 = y_0 = 1$, z = 8 (thoả đề bài)

2) Nếu $x_0 = x_1$ (từ (4) $\Rightarrow (x_0 + y_0)(x_0 - y_0) = 6$, vô lý vì $(x_0 + y_0)$ và $(x_0 - y_0)$ cùng chẵn hay cùng lẻ.

3) Nếu $y_0 < x_0 < x_1 \Rightarrow x_0 \ge y_0 + 1$ và $x_1 \ge y_0 + 2$

Từ (4) $\Rightarrow y_0^2 + 6 \ge (y_0 + 1)(y_0 + 2) \Rightarrow y_0 \le \frac{4}{3} \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow z_0z_1 = 7$

$\Rightarrow x_0 \le y_0^2$ mà $y_0 = 1 \Rightarrow x_0x_1 = 7$

$\Rightarrow x_0 = 1$ và $x_1 = 7$, vô lý vì $x_0 = y_0$

Vậy $z = 2^3 \Rightarrow \sqrt{p(x,y)} = 2 \in \mathbf{N}^*$

Bài toán 18. 13: Giả sử f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm liên tục và giảm sao cho với mọi x, y $\in \mathbf{R}^+$: f(x + y) f(f(x) + f(y)) = f(f(x) + f(y)) + f(y + f(x))

Chứng minh rằng f(f(x)) = x

Hướng dẫn giải

Cho y = x ta được: f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x)))

Thay x bằng f(x) ta có:f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x))))

Trừ hai phương trình trên ta suy ra:

f(2f(f(x))) – f(2x) = f(2f(f(x) + f(f(x))) – f(2f(x + f(x))))

Nếu f(f(x)) > x, vế trái của phương trình trên âm, do đó:

f(f(x) + f(f(x))) > f(x + f(x)) và f(x) + f(f(x)) < x + f(x)

là điều mâu thuẫn.

Tương tự, ta cũng có điều mâu thuẫn xảy ra khi f(f(x)) < x

Vậy f(f(x)) = x, điều phải chứng minh.

Bài toán 18. 14: Cho song ánh f: **N** → **N**. Chứng minh rằng: Tồn tại vô số bộ (a, b, c) với a, b, c ∈ N thoả: a < b < c và 2f(b) = f(a) + f(c).

Hướng dẫn giải

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ như sau:

Trong các số từ 0, 1, 2,..., m chọn số a_1 sao cho $f(a_1) > f(i)$ với $\forall i = \overline{0; a_1}$ (m ∈ **N**)

Chọn $a_2 > a_1$ sao cho $f(a_2) > f(i)$, $\forall i = \overline{0; a_2}$

Chọn $a_k > a_{k-1}$ sao cho $f(a_k) > f(i)$, $\forall i = \overline{0; a_k}$

Vậy ta có dãy $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ thoả:

$a_1 < a_2 < ... a_k < a_{k+1}$ và $f(a_1) < f(a_2) < ... < f(a_k) < f(a_{k+1})$

trong đó $a_i \in N$ và $f(a_i) > f(j)$ $\forall j = \overline{0; a_i}$

Vì f là song ánh nên $f(a_{k+1}) = f(a_k) + p$, $p \in \mathbf{N}^*$

và $\exists c \in N$ để $f(c) = f(a_{k+1}) + p > f(a_{k+1})$

Mặt khác: $\begin{cases} a_{k+1} > a_i & \forall i = \overline{1, k} \\ f(a_{k+1}) > f(i) & \forall i = \overline{1, a_{n+1}} \end{cases}$

nên $c > a_{k+1}$

$\Rightarrow \begin{cases} p(a_k) = f(a_{k+1}) - p \\ f(c) = f(a_{k+1}) + p \end{cases} \Rightarrow 2f(a_{k+1}) = f(a_k) + f(c)$

Do cách xây dựng, dãy $\{a_n\}$ là dãy vô hạn nên tồn tại vô số bộ (a, b, c) thoả điều kiện đã nêu.

Bài toán 18. 15: Chứng minh với mọi hàm f: **R** → **R** thì:

$f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

$\Leftrightarrow f(x + y) \equiv f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

Hướng dẫn giải

– Phần đảo: Cho $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

thì $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$

– Phần thuận: Cho $f(xy+x+y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

Chọn x = y = 0 thì f(0) = 0 ; ∀a, b, c ∈ R ta có:

$f(a+b+c+ab+bc+ca+abc) = f(a(c+b+bc) + a+(c+b+bc))$

$= f(a(c + b + bc)) + f(a) + f(a + b + bc)$

$= f(ac + ab + abc) + f(a) + f(c) + f(b) + f(bc)$

Vì $f(a+b+c+ab+bc+ca+abc) = f(ba+bc+abc) + f(a)+f(b)+f(c) + f(ac)$

Nên $f(bc) + f(ab + ac + abc) = f(ac) + f(ab + bc + abc)$

Lấy a = 1: $f(bc) + f(b + c + bc) = f(c) + f(b + bc + bc)$

$\Rightarrow \quad f(b) + 2f(bc) = f(b + 2bc)$

Do đó: $f(u + 2v) = f(u) + 2f(v), \forall u, v \in R$

Lấy u = a thì f(2v) = 2f(v), ∀v ∈ R nên: f(u + 2v) = f(u) + f(2v)

Hay: f(b + 2bc) = f(b) + f(2bc), ∀b, c ∈ R

Nếu b = 0 thì f(0) = 2f(0) = 0: Đúng

Nếu b ≠ 0 thì đặt b = x, $c = \dfrac{y}{2b}$ thì có: f(x + y) = f(x) + f(y), ∀x, y ≠ 0.

Bài toán 18. 16: Hàm số f xác định trên tập các số tự nhiên **N** và có giá trị trên đó. Chứng minh rằng đẳng thức f(f(n)) = n+1995 không thể nghiệm đúng với mọi n ∈ **N**.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Giả sử rằng ta có đẳng thức f(f(n)) = n + 1995 đúng ∀n ∈**N**

Khi đó: f(n + 1995) = f(f(f(n))) = f(n) + 1995

Và suy ra: f(n + 1995k) = f(n) + 1995k (1) đúng ∀n, k ∈ **N**

Xét số nguyên r bất kì: 0 ≤ r ≤ 1994 và chia f(r) cho 1995 có số dư

f(r) = 1995p + q với 0 ≤ q ≤ 1994

Theo giả thiết: f(f(r)) = r + 1995

Từ (1): f(f(r)) = f(q + 1995p) = f(q) + 1995p

Vì r ≤ 1994 nên chỉ có thể có hai khả năng

(i): p = 0 ⇒ f(r) = q và f(q) = r + 1995

(i): p = 1 ⇒ f(r) = q + 1995 và f(q) = f(f(r)) – 1995 = r

Trong cả 2 trường hợp rõ ràng f(r) ≠ f(q) nghĩa là r ≠ q.

Như vậy các số 0, 1, 2,...,1994 có thể chia thành các cặp (a, b) sao cho trong mỗi cặp f(a) = b và f(b) = a + 1995. Đó là điều vô lí vì từ 0 đến 1994 có một số lẻ số.

Bài toán 18. 17: Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên [0, 1] sao cho:

(i) f(0) = f(1) = 0

(ii) $2f(x) + f(y) = 3f\left(\dfrac{2x+y}{3}\right)$ với mọi x, y ∈ [0, 1]

Chứng minh rằng f(x) = 0 với mọi x, y ∈ [0, 1]

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng $f\left(\dfrac{m}{3^n}\right) = 0$ với mọi số nguyên n ≥ 0 và với mọi m thoả mãn $0 \le m \le 3^n$. Các điều kiện ở đề bài chứng tỏ điều này đúng với n = 0. Giả sử điều này đúng với n = k – 1 ≥ 0, ta chứng minh nó đúng với n = k.

Nếu m ≡ 3 (mod 3) thì theo giả thiết quy nạp ta có: $f\left(\dfrac{m}{3^k}\right) = f\left(\dfrac{m/3}{3^{k-1}}\right) = 0$

Nếu m ≡ 1 (mod 3) thì $1 \le m = 3^k - 2$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 2f\left(\frac{(m-1)/3}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{(m+2)/3}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0$$

Cuối cùng, nếu $m \equiv 2 \pmod 3$ thì $2 \le m \le 3^k - 1$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = f\left(\frac{(m-2)/3}{3^{k-1}}\right) + 2f\left(\frac{(m+1)/3}{3^{k-1}}\right)$$

Vậy $f\left(\frac{m}{3^n}\right) = 0$ với mọi số nguyên n, $m \ge 0$ và $m = 3^n$.

Với mọi $x \in [0, 1]$, ta có thể lập nên một dãy số có dạng $\frac{m}{3^k}$ có giới hạn x. Vì hàm f(x) liên tục nên suy ra f(x) = 0 với mọi $x \in [0, 1]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 18. 18: Hàm số f(x) xác định và có đạo hàm trên $[0, +\infty]$. Biết rằng với mọi $x \ge 0$ luôn có:

1) $[f(x)] \le 5$

2) $f(x) . f'(x) \ge \sin x$. Tồn tại hay không $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Hướng dẫn giải

Đặt $F(x) = f^2(x) + 2\cos x$ xác định trên $[0, +\infty)$

(1) $\Rightarrow |F(x)| \le f^2(x) + 2|\cos x| \le 5^2 + 2$

(2) $\Rightarrow F'(x) = 2f'(x) . f(x) - 2\sin x \ge 0$ nên F(x) tăng

Xét dãy số $\{x_n\} = [2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}, 6\pi, 6\pi + \frac{\pi}{2} ...]$

Thì $x_n > 0$, x_n tăng và $x_n \to +\infty$ khi $x \to +\infty$

Đặt $U_n = f(x_n)$ thì U_n là dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $\lim U_n$

Giả sử rằng tồn tại limf(x) khi $x_n \to +\infty$ thì tồn tại $\lim V_n$

$$\lim_{x\to+\infty}(F(x_n) - F^2(x_n)) = \lim_{x\to+\infty} U_n - (\lim_{x\to+\infty}(F(x_n))^2$$

Như thế tồn tại limcosx khi $n \to +\infty$, điều này không thể được vì:

$2\cos x_n = \{2, 0, 2, 0,...\}$ là dãy số không có giới hạn.

Vậy không tồn tại limf(x) khi $x_n \to +\infty$.

Bài toán 18. 19: Tìm hàm f xác định trên tập các số nguyên dương và cũng nhận giá trị nguyên dương thoả mãn: $f(n + 1) > f(f(n))$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta sẽ chứng minh qui nạp: f(1) < f(2) < f(3)...

Gọi S_n là phát biểu sau: nếu $r \le n$ và $m > r$ thì $f(r) < f(m)$

Vì khi $m > 1$ thì $f(m) > f(s)$, với $s = f(m - 1)$, nên f(m) không thể là phần tử nhỏ nhất của tập {f(1), f(2), f(3),...}

Nhưng tập này bị chặn dưới bởi 0, nên chắc chắn nó phải có phần tử bé nhất. Suy ra phần tử này là f(1). Vậy S_1 đúng.

Giả sử S_n đúng. Lấy m > n + 1, khi đó m – 1 > n, do đó ta có f(m – 1) > f(n) (vì S_n đúng). Nhưng cũng từ S_n ta có: f(n) > f(n – 1) > ... > f(1), do vậy, ta được f(n) ≥ n – 1 + f(1) ≥ n. Suy ra f(m – 1) ≥ n + 1 từ đó f(m) > f(n + 1). Từ đây suy ra rằng S_{n+1} đúng.

Vậy S_n đúng với mọi n. Nói cách khác, nếu n ≤ m thì f(n) ≤ f(m).

Giả sử với số m nào đó ta có f(m) ≥ m + 1, thế thì: f(f(m)) > f(m + 1) điều này mâu thuẫn. Suy ra f(m) ≤ m với mọi m. Nhưng do ta có f(1) ≥ 1 và f(m) > f(m – 1) > ... > f(1) nên f(m) ≥ m với mọi m. Suy ra f(m) = m với mọi m.

Bài toán 18. 20: : Cho tập hợp T gồm tất cả các số tự nhiên không vượt quá 1999. Hãy tìm tất cả hàm số f xác định trên **N**, lấy giá trị trên T và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) f(t) = t với mọi t ∈ T

ii) f(m + n) = f(f(m) + f(n)) với mọi m, n ∈ **N**

Hướng dẫn giải

Đặt f(2000) = a, b = 2000 – a, với 1 ≤ b ≤ 2000

Ta nhận xét:

1) Với mọi r mà 0 ≤ r < b, ta có: f(2000 + r) = a + r

2) Với mọi k ∈ N, 0 ≤ r < b, ta có: f(2000 + kb + r) = a + r

Từ đó suy ra nếu f là hàm số cần tìm thì thoả mãn:

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{với mọi } t \in T \\ f(2000) = a & (*) \\ f(2000 + m) = a + r \end{cases}$$

với r ≡ m (mod (2000 – a)) và 0 ≤ r < 2000 – a

Ngược lại cho a ∈ T, xét hàm số f xác định trên N thoả (*) thì để ý:

f(n + b) = f(n) với mọi n ≥ a, b = 2000 – a

n ≡ f(n) (mod b) với mọi n ∈ N

Vậy tất cả các hàm số thoả mãn đề bài được xác định theo công thức (*) với mỗi a ∈ T cho trước. Vậy có 2000 hàm số.

Bài toán 18. 21: Xác định tất cả các hàm f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện:

$$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) – 1996 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: f(k) + f(k + 1) = f(k + 2) f(k + 3) – 1996

và f(k + 1) + f(k + 2) = f(k + 3) f(k + 4) – 1996.

Do đó với mọi k ∈ **N** thì

f(k + 2) – f(k) = f(k + 3)[f(k + 4) – f(k + 2)]

Suy ra rằng:

f(3) – f(1) = f(4)f(6) ... f(2k)[(f(2k + 1) – f(2k – 1)] (1)

f(4) – f(2) = f(5)f(7)... f(2k + 1)[(f(2k + 2) – f(2k)] (2)

Nếu $f(3) - f(1) \neq 0$ và $f(4) - f(2) \neq 0$ thì hai đẳng thức trên dẫn đến mâu thuẫn. Do đó xảy ra các trường hợp sau:

1) $f(3) - f(1) \neq 0$ và $f(4) - f(2) = 0$

Từ (2) có $f(2k + 2) = f(2k) = c \neq 0$ với mọi k.

Nên (2) dẫn tới $|f(3) - f(1)| = c^{k-1}|f(2k + 1) - f(2k - 1)| \geq c^{k-1}$ với mọi k. Như vậy ta phải có c = 1.

Từ đó (1) trở thành $f(3) - f(1) = f(2k + 1) - f(2k - 1)$ nên dãy $(f(2k + 1))$ là cấp số cộng với công sai d. Như thế với mọi k ta có:

$$f(2k) = 1,\ f(2k - 1) = f(1) + (k - 1)d.$$

Từ giả thiết cho n = 1 ta có

$f(1) + f(2) = f(3)f(4) - 1996 \Rightarrow f(1) + 1 = (f(1) + d) - 1996$

$\Rightarrow d = 1997$. Vậy ta có:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ khi } n = 2k \\ a + (k-1)1997 \text{ khi } n = 2k - 1 \end{cases},\ \text{a là số nguyên dương tùy ý.}$$

2) $f(3) - f(1) = 0$, $f(4) - f(2) \neq 0$. Lập luận như trên ta có kết quả:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ khi } n = 2k - 1 \\ a + (k-1)1997 \text{ khi } n = 2k \end{cases},\ \text{với a là số nguyên dương tùy ý.}$$

3) $f(3) - f(1) = 0$, $f(4) - f(2) = 0$

Khi đó $f(2k) = a$, $f(2k - 1) = b$ với mọi $k \in \mathbf{N}^*$ và a, b nguyên dương tùy ý.

Với n = 1 ta có:

$f(1) + f(2) = f(3)f(4) - 1996 \Rightarrow b + a = ab - 1996$

$\Rightarrow (a - 1)(b-1) = 1997$

Vì 1997 là số nguyên tố nên hoặc a = 2, b = 1998 hoặc a = 1998, b = 2. Ta có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$f(n) = \begin{cases} 2 \text{ khi } n = 2k \\ 1998 \text{ khi } n = 2k - 1 \end{cases} \text{ và } f(n) = \begin{cases} 2 \text{ khi } n = 2k - 1 \\ 1998 \text{ khi } n = 2k \end{cases}.$$

Bài toán 18. 22: Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ thoả mãn

i) $f(x + 22) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{N}^*$

ii) $f(x^2y) = (f(x))^2 f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{N}^*$

Hướng dẫn giải

Ta chỉ cần xác định giá trị hàm số tại $x \in \{1, 2, 3, ..., 22\}$

Cho x = y = 1 ta tính được f(1) = 1

Với mỗi x nguyên $(2 \leq x \leq 21)$ luôn có $k \in \mathbf{N}^*$ sao cho $1 + 22k \vdots x$

Suy ra với x như trên ta có

$1 + 22k = mx \Rightarrow mx^2 = x + 22kx$ với k là số tự nhiên.

Từ đó: $f(x) = f(x + 22kx) = f(x^2m) = (f(x))^2 f(m) \Rightarrow f(x)f(m) = 1$

$\Rightarrow f(x) = 1$. Ta tính f(11) và f(22)

Ta có $f(22) = f(44) = f(2^2.11) = (f(2))^2 . f(11) = f(11) = 1$

Mặt khác, $f(11^2.2) = (f(11))^2 . f(2) = (f(11))^2$

Và $f(11^2.2) = f(22 + 10.22) = f(22) = f(11)$

Vậy: $f(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{N}$.

Bài toán 18. 23: Tồn tại hay không hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện: $f(f(n)) + 3n = 2f(n)$ với mọi $x \in \mathbb{N}^*$

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với mỗi $a \in \mathbb{N}^*$, xây dựng dãy số (a_n) như sau:

$a_1 = a, a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, 3...$

Từ giả thiết ta có:

$a_{n+1} = f(a_n) = f(f(a_{n-1})) = f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$

Từ đó chứng minh được $a_{n+1} + 4a_{n-2} + 3a_{n-3} = 0$ với mọi $n \geq 4$

Do $a_n > 0$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại hàm số f.

Bài toán 18. 24: Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n, \forall n, \in \mathbb{Z}$$

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình hàm ban đầu $2f(f(n) - 2f(n) = f(n) - n$

Đặt $g(n) = f(n) - n$ ta có $g(n) = 2g(f(n)), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $g(n) = 2g(f(n)) = 2^2g(f(f(n)) = 2^3g(f(f(f(n)))) = ...$

Suy ra rằng $|g(n)|$ chia hết cho 2^k với mọi số tự nhiên k. Điều này chỉ xảy ra khi $g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = n$ .Thử lại đúng.

Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 18. 25: Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn :

i) $f(f(m) - n) = f(m^2) + f(n) - 2nf(m), \forall m, n \in \mathbb{Z}$

ii) $f(1) > 0$.

Hướng dẫn giải

Cho $n = 0$ ta có $f(f(m)) = f(m^2) + f(0)$

Thay n bởi f(m) ta có:

$f(0) = f(m^2) + f(f(m) - 2(f(m))^2 = 2f(m^2) + f(0) - 2(f(m))^2$

Từ đó ta có: $f(m^2) = (f(m))^2, \forall m \in \mathbb{Z}$

Suy ra $f(0) = (f(f(0))^2 \Rightarrow f(0) =0$ hoặc $f(0) = 1$

Giả sử $f(0) = 1$.Cho $m = 0$ thì $f(f(0)) = 2f(0)$ nên $f(1) = 2$

Cho $m = 1$ thì $f(1) = f^2(1) = 4$:vô lý nên $f(0)= 0$.

Thay $m = 0$ vào hệ thức đầu bài ta có $f(-n) = f(n), \forall n \in \mathbb{Z}$

Thay $m = 1$ vào hệ thức ở đầu bài ta có: $f(1 - n) = 1 + f(n) - 2n$

hay $f(n - 1) = 1 + f(n) - 2n \Rightarrow f(n) - f(n - 1) = 2n - 1$

Từ đó với mọi $n > 0$ ta có:

$f(n) = f(n) - f(n - 1) + f(n - 1) - f(n - 2) + ... + f(1) - f(0) + f(0)$

$= (2n-1) + (2n-3) + ... + 3 + 1 = n^2$

Do đó $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbf{Z}$. Thử lại đúng.Vậy: $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 18. 26: Cho hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương N* và nhận giá trị trong tập đó thoả mãn: $(m^2 + n)^2$ chia hết cho $(f(m))^2 + f(n)$ với mọi số nguyên dương m, n.

Hướng dẫn giải

Trước hết cho m = n = 1 ta được 4 chia hết cho $(f(1))^2 + f(1)$ nên có f(1) = 1.

Với mỗi p nguyên tố, thay m = 1 và n = p – 1 ta được:

$$f(p-1) + 1 \text{ chia hết } p^2.$$

Từ đó: $f(p-1) = p-1$ hoặc $f(p-1) = p^2 - 1$

Giả sử $f(p-1) = p^2 - 1$ thì

$f(1) + (f(p-1))^2 = p^4 - 2p^2 + 2$ chia hết $(1 + (p-1)^2)^2$

$\Rightarrow p^4 - 2p^2 + 2 \le (p^2 - 2p + 2)^2$, vô lí.

Do đó ta phải có $f(p-1) = p-1$.

Bây giờ với n là số tự nhiên tùy ý, chọn m = p – 1, ta có:

$A = f(n) + (p-1)^2$ chia hết $(n + (p-1)^2)^2$

Chú ý rằng $(n + (p-1^{)2})^2 = (n - f(n) + A)^2 = (n - f(n))^2 \pmod A$

Như vậy A chia hết $(n - f(n))^2$ với bất kì số nguyên tố p. Chỉ cần chọn p đủ lớn ta có $A > (n - f(n))^2$.

Từ đó f(n) = n. Thử lại đúng. Vậy: f(n) = n với mọi $n \in \mathbf{N}^*$

Bài toán 18. 27: Tìm tất cả f: $Z \to Z$ sao cho:

(i) f(1995) = 1996

(ii) $\forall m \in Z$, nếu f(m) = n thì f(n) = m và f(n + 3) = m – 3

Hướng dẫn giải

Ta có: $\forall n \in Z$, $f(f(n)) = n$ và $f(f(n) + 3) = n - 3$

Nên $f(n-3) = f(f(f(n) + 3)) = f(n) + 3, \forall n \in Z$

$$\text{Suy ra: } f(n) = \begin{cases} f(0) - 3k, & n = 3k \\ f(1) - 3k, & n = 3k+1 \\ f(2) - 3k, & n = 3k+2 \end{cases}$$

Với $k \in Z$. Vì 1995 ⋮ 3 nên từ f(1995) = 1996

$\Rightarrow f(0) - 1995 = 1996 \Rightarrow f(0) = 3991 \Rightarrow f(3991) = 0$

Mà 3991 = 3.1330 + 1 nên: $0 = f(1) - 3990 \Rightarrow f(1) = 3990$

Nếu $f(2) = 3t$, $t \in Z$ thì:

$2 = f(3t) = f(0) - 3t = 3991 - 3t \Rightarrow 3989 = 3t \Rightarrow 3989 \vdots 3$ (vô lý)

$\Rightarrow f(2) \ne 3t, t \in Z$

Nếu f(2) = 3t + 1 thì

$2 = f(3t+1) = f(1) - 3t = 3990 - 3t \Rightarrow 3988 = 3t \Rightarrow 3988 \vdots 3$ (vô lý)

$\Rightarrow f(2) \ne 3t + 1$. Như vậy: f(2) = 3t + 2

Tóm lại ta có: $f(n) = \begin{cases} 3991 - n, & n \neq 3k + 2 \\ 3t - n + 4, & n = 3k + 2 \end{cases}$ với t bất kỳ, $k \in \mathbb{Z}$

Thử lại, ta thấy hàm số trên là nghiệm của bài toán.

Bài toán 18. 29: Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ và lấy giá trị trong tập số thực dương R^+ sao cho:

$$f(m-1)f(m) + f(m)f(m+1) \le 2f(m-1)f(m+1),\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

Hướng dẫn giải

Giả sử hàm số thoả $f(m-1)f(m) + f(m)f(m+1) \le 2f(m-1)f(m+1),\ \forall m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} + \frac{1}{f(m-1)} \le \frac{2}{f(m)},\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} - \frac{1}{f(m)} \le \frac{1}{f(m)} - \frac{1}{f(m-1)},\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

Đặt $g(m) = \dfrac{1}{f(m)} - \dfrac{1}{f(m-1)},\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $g(m+1) \le g(m),\ \forall m \in \mathbb{Z}$

Nếu f(m) không là hàm hằng thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $g(k) \neq 0$.

Xét trường hợp $g(k) < 0$: Với p nguyên dương thì:

$$g(k+1) + g(k+2) + ... + g(k+p) = -\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+p)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(k+p)} = \frac{1}{f(k)} + g(k+1) + g(k+2) + ... + g(k+p) \le \frac{1}{f(k)} + pg(k)$$

Ta có: $\dfrac{1}{f(k+p)} > 0$, ta sẽ chọn p nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{f(k)} + pg(k) < 0$

$$\Leftrightarrow p > \frac{-1}{f(k)g(k)}$$

Khi đó $0 < \dfrac{1}{f(k+p)} \le \dfrac{1}{f(k)}$, vô lý

* Xét trường hợp $g(k) > 0$ với q nguyên dương thì:

$$g(k) + g(k-1) + ... + g(k-(q-1)) = \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k-q)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(k-q)} = -\frac{1}{f(k)} + g(k) + g(k-1) + ... + g(k-q+1) \ge -\frac{1}{f(k)} + qg(k).$$

Ta có: $\dfrac{-1}{f(k-q)} < 0$, ta sẽ chọn q nguyên dương sao cho:

$$-\frac{1}{f(k)}+qg(k)>0 \Leftrightarrow q>\frac{1}{f(k)g(k)}$$

Khi đó $-\dfrac{1}{f(k-q)} \geq -\dfrac{1}{f(k)}+qg(k)>0$, vô lý

Vậy f(m) phải là hàm hằng $\Rightarrow$ f(m) = C.Thử lại đúng

Vậy f(m) = C, $\forall m \in \mathbf{Z}$ với C là số thực dương tuỳ ý.

Bài toán 18. 30: Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ thoả:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(xy+y)=f(x).f(y)-f(x+1)+2 \quad \forall x,y \in Q \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, cho y = 1 ta có:

$f(x+1)=2f(x)-f(x+1)+2, \forall x \in \mathbf{Q}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f(x)+1, \forall x \in \mathbf{Q}$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$f(x+n)=f(x)+n \ \forall x \in \mathbf{Q}, \forall n \in \mathbf{Z}.$

Từ giả thiết cho y = x, ta có:

$f(x^2+x)=f^2(x)-f(x+1)+2, \forall x \in \mathbf{Q}$

$f(x^2+x)=f^2(x)-f(x)+1, \forall x \in \mathbf{Q}$

$\forall x \in Q$, đặt $x=\dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ thì có:

$$f\left[\left(\frac{p}{q}+q\right)^2+\left(\frac{p}{q}+q\right)\right]=f^2\left(\frac{p}{q}+q\right)-f\left(\frac{p}{q}+q\right)+1$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}+q^2+2p+q\right]=\left[f\left(\frac{p}{q}\right)+q\right]^2-f\left(\frac{p}{q}\right)-q+1$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}\right]+q^2+2p+q=f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2qf\left(\frac{p}{q}\right)+q^2-f\left(\frac{p}{q}\right)-q+1$$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\frac{p}{q}\right)-f\left(\frac{p}{q}\right)+1+q^2+2p+q=f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2qf\left(\frac{p}{q}\right)+q^2-f\left(\frac{p}{q}\right)-q+1$$

$$\Leftrightarrow qf\left(\frac{p}{q}\right)=p+q \Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}+1 \text{ (Do } q \neq 0)$$

Vậy $f(x)=x+1$, $\forall x \in \mathbf{Q}$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=x+1$, $\forall x \in \mathbf{Q}$ thoả đề bài.

Bài toán 18. 31: Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$

i) $f(x + 1) = f(x) + 1$ ii) $f(x^2) = (f(x))^2$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện i) thì có $f(x + nk) = f(x) + k$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ và $\forall k \in \mathbb{N}$.

Lấy $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$.

Giả sử $f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n} \Rightarrow f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$

Khi đó $f\left(\frac{p}{q} + q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + q = \frac{m}{n} + q$

$\Rightarrow f\left(\frac{p^2}{q^2} + 2p + q^2\right) = \frac{m^2}{n^2} + \frac{2mq}{n} + q^2$

hay $f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2p + q^2 = \frac{m^2}{n^2} + \frac{2mq}{n} + q^2 \Rightarrow \frac{2mq}{n} = 2p \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

Nên $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Thử lại đúng. Vậy $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 18. 32: Gọi Q^+ là tập hợp tất cả các số hữu tỉ dương. Hãy xây dựng một hàm số f: $Q^+ \to Q^+$ sao cho: $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$, với mọi $x, y \in Q^+$.

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta chứng minh $f(1) = 1$

Thật vậy, lấy $x = y = 1$ ta có $f(f(1)) = f(1)$, suy ra:

$$f(1) = f(f(1)) = f(1f(f(1))) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1$$

Tiếp đến, ta sẽ chứng minh rằng $f(xy) = f(x)f(y)$

Với mọi $y \in Q^+$ ta có: $1 = f(1) = f\left(\frac{1}{f(y)}f(y)\right) = \frac{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)}{y}$

do đó, nếu $z = \frac{1}{f(y)}$ thì $f(z) = y$. Từ đó suy ra:

$f(xy) = f(xf(z)) = \frac{f(x)}{z} = f(x)f(y)$

Sau cùng, ta có: $f(f(x)) = f(1f(x)) = \frac{f(1)}{x} = \frac{1}{x}$

Bài toán chỉ yêu cầu tìm một hàm thoả mãn các điều kiện đã cho. Do vậy, ta phân tập các số nguyên tố thành 2 tập vô hạn:

$$S = \{p_1, p_2, ...\} ; T = \{q_1, q_2, ...\}$$

Ta bắt đầu xây dựng hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán bằng định nghĩa $f(p_n) = q_n$, $f(q_n) = \frac{1}{p_n}$

Sau đó, chúng ta mở rộng định nghĩa này trên tập các số hữu tỉ bằng cách dùng các hệ thức $f(xy) = f(x)f(y)$:

$$f\left(\frac{p_{i_1}p_{i_2}\ldots q_{j_1}q_{j_2}\ldots}{p_{k_1}p_{k_2}\ldots q_{m_1}q_{m_2}}\right) = \frac{p_{m_1}p_{m_2}\ldots q_{i_1}q_{i_2}\ldots}{p_{j_1}p_{j_2}\ldots q_{k_1}q_{k_2}}$$

Thử lại, ta thấy hàm vừa xây dựng thoả mãn: $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$.

Bài toán 18. 33: Tìm tất cả các hàm f: $[0, 1) \to [0, 1)$ thoả mãn điều kiện: $f(f(x)) + f(x) = 12x$, với mọi $x \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Cho trước $x \geq 0$ tuỳ ý. Đặt $f_0(x) = x$ và $f_1(x) = f(x)$

Với $n \geq 1$, đặt $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$

Phương trình hàm đã cho trở thành $f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x) = 12f_n(x)$

Phương trình đặt trưng $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -4$

nên $f_n(x) = C_1.3^n + C_2.(-4)^n$

Sử dụng điều kiện ban đầu, ta có:

$$C_1 = \frac{f(x) + 4x}{7} \text{ và } C_2 = \frac{3x - f(x)}{7}$$

Từ đó ta có: $f_n(x) = \frac{1}{7}(f(x) + 4x)3^n + \frac{1}{7}(3x - f(x)).(-4)^n$

Vì $f(x) \geq 0$ nên $f_n(x) \geq 0$ với mọi $n \geq 0$

Cho n là số chẵn, ta có: $\frac{1}{7}(f(x) + 4x)3^n + \frac{1}{7}(3x - f(x)).(-4)^n \geq 0$.

Từ đây ta được $3x - f(x) \geq 0$

Cho n là số lẻ, ta có: $\frac{1}{7}(f(x) + 4x)3^n - \frac{1}{7}(3x - f(x)).4^n \geq 0$

Từ đây ta được: $3x - f(x) \leq 0$

Do đó $f(x) = 3x$. Dễ dàng kiểm tra được hàm $f(x) = 3x$ thoả mãn phương trình hàm đã cho. Vậy $f(x) = 3x$.

Bài toán 18. 34: Tìm mọi hàm số f: $(-1; +\infty) \to (-1; +\infty)$ thỏa mãn hai điều kiện sau

(1) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x); \forall x, y \in (-1; +\infty)$

(2) $\frac{f(x)}{x}$ là hàm số tăng nghiêm ngặt trong các khoảng (–1; 0) và (0; +∞)

Hướng dẫn giải

Thay y bởi x vào (1) ta được:

$f(x + (1 + x).f(x)) = x + (x + 1).f(x), \forall x \in (-1, +\infty)$

Đặt $u = x + (1 + x).f(x)$

Do đó: $f(u) = u$, nên suy ra được:$f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$.

Vậy f(x) có hai họ điểm bất động là u và $u^2 + 2u$.

Theo giả thiết (2) ta xét các trường hợp sau:

1) $-1 < u \leq 0 \Rightarrow u^2 + 2u \leq 0$

Ta có $\frac{f(x)}{x}$ tăng trên khoảng (–1; 0) suy ra phương trình $\frac{f(x)}{x} = 1$ có nghiệm duy nhất. Suy ra phương trình f(x) = x có nghiệm duy nhất.

Do đó: $u = u^2 + 2u \Leftrightarrow u = 0$ hay $u = -1$ (loại)

2) $u > 0 \Rightarrow u^2 + 2u > 0$ lập luận tương tự ta cũng có u = 0 hay u = –1 (loại cả hai)

3) Khi u = 0, ta có f(0) = 0. Vậy f có điểm bất động duy nhất là 0.

Suy ra $x + (x + 1)f(x) = 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

Vậy $f(x) = \frac{-x}{x+1}$. Thử lại f(x) thoả mãn đề bài.

Bài toán 18. 35: Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Hướng dẫn giải

Đặt c = f(0) và gọi A = f(**R**). Nếu $a \in A$, đặt a = f(y) và x = a.

Ta có $f(a - a) = f(a) + a^2 + f(a) - 1$, suy ra:

$$f(a) = \frac{1+c}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad (*)$$

Ta chứng minh $\{x \mid x \in \mathbf{R}, \exists\, a, b \in A : x = a - b\} = \mathbf{R}$

Để ý c khác 0, vì nếu thế thì đặt y = 0, ta có:

$f(x - c) = f(c) + xc + f(x) - 1, \qquad (**)$

suy ra f(0) = f(c) = 1, mâu thuẫn! Từ (**) ta cũng có:

$f(x - c) - f(x) = xc + (f(c) - 1)$

mà x chạy trên **R** nên xc + (f(c) – 1) cũng nhận giá trị bất kì trên R.

Như vậy, mọi x thuộc **R**, ta có thể tìm được a, b thuộc A sao cho x = a – b, suy ra: f(x) = f(a – b) = f(b) + ab + f(a) – 1

Do đó, dùng (*) ta đi đến: $f(x) = c - \frac{b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$

Đặc biệt, điều này đúng cho mọi x thuộc A. So sánh với (*) ta suy ra c = 1.

Do vậy, mọi x thuộc **R** ta có: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Hàm f xác định như trên thoả mãn các giả thiết của bài toán, do vậy, f là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài toán 18. 36: Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực **R**, lấy giá trị trong **R** và thoả mãn hệ thức: $f(f(x - y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy$, với mọi số thực x, y

Hướng dẫn giải

Giả sử $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm số thoả mãn hệ thức của đề bài, nghĩa là:

$f(f(x - y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy$ (1)

với mọi x, y thuộc **R**.

Đặt $f(0) = a$.Thế $x = y = 0$ vào (1), ta được $f(a) = a^2$ (2)

Thế x = y vào (1), với lưu ý tới (2), ta được:

$(f(x))^2 = x^2 + a^2, \forall x \in \mathbf{R}$ (3)

Suy ra $(f(x))^2 = (f(-x))^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$, hay

$(f(x) + f(-x))(f(x) - f(-x)) = 0, \forall \in \mathbf{R}$ (4)

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$

Thế y = 0 vào (1), được: $f(f(x)) = a.f(x) - f(x) + a, \forall x \in \mathbf{R}$ (5)

Thế x = 0, y = –x vào (1), ta được:

$f(f(x)) = a.f(-x) + f(-x) - a, \forall x \in \mathbf{R}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $a.(f(-x) - f(x)) + f(x) + f(-x) = 2a, \forall x \in \mathbf{R}$ (7)

Thế $x = x_0$ vào (7), ta được: $f(x_0) = a$ (*)

Mặt khác, từ (3) suy ra nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $.x_1^2 = x_2^2$. Vì thế, từ (*) suy ra $x_0 = 0$, trái với giả thiết $x_0 \neq 0$. Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq f(-x), \forall x \neq 0$. Do đó, từ (4) suy ra: $-f(x) = f(-x), \forall x \neq 0$ (8)

Thế (8) vào (7), ta được: $a.(f(x) - 1) = 0$, $\forall x \neq 0$

Suy ra a = 0, vì nếu ngược lại, $a \neq 0$ thì $f(x) = 1, \forall x \neq 0$.

Do đó, từ (3) có: $(f(x))^2 = x^2, \forall x \in \mathbf{R}$ (9)

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Khi đó theo (5) ta phải có:

$x_0 = f(x_0) = -f(f(x_0)) = -f(x_0) = -x_0$

Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq x, \forall x \neq 0$

Vì vậy, từ (9) ta được: $f(x) = -x, \forall x \in \mathbf{R}$. Thử lại đúng.

Vậy, hàm số $f(x) = -x$, $x \in R$, là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài toán 18. 37: Hãy xác định hàm số f: $R \to R$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực x, y, z bất kỳ $\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x).\ f(yz) \geq \frac{1}{4}$ (1)

Hướng dẫn giải

Cho x = y = z = 0, thì:

(1): $f^2(0) - f(0) + \frac{1}{4} \le 0$ hay $\left[f(0) - \frac{1}{2}\right]^2 \le 0$ nên: $f(0) = \frac{1}{2}$

Cho y = z = 0 thì (1): $\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(x)\ f(0) \ge \frac{1}{4}$

hay $f(0) - f(x).f(0) \ge \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ f(x) \ge \frac{1}{4}$ nên: $f(x) \le \frac{1}{2}$

Cho x = y = z = 1, thì:

(1): $f(1) - f^2(1) \ge \frac{1}{4}$ hay $\left[f(1) - \frac{1}{2}\right]^2 \le 0$, suy ra $f(1) = \frac{1}{2}$

Cho y = z = 1, còn x tuỳ ý, chú ý rằng $f(1) = \frac{1}{2}$, ta có:

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - f(x)\ f(1) \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}f(x) \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \quad f(x) \ge \frac{1}{2}$$

Do đó: $f(x) = \frac{1}{2}$ với mọi x thực. Thử lại đúng.

Cách 2: Chứng minh f(xy) = f(x), ∀y

Bài toán 18. 38: Tìm tất cả các hàm số liên tục f: [0, 1] → **R** thoả mãn:

$$f(x) \ge 2xf(x^2)\ \forall x \in [0, 1].$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết thì $f(0) \ge 0$, $f(1) \le 0$

Với $0 < x < \frac{1}{2}$ thì bằng phương pháp quy nạp, suy ra:

$$f(x) \ge 2xf(x^2) \ge (2x)^n x^{2^n-n-1} f(x^{2^n})\ \forall n \ge 1.$$

vì 0 < 2x < 1 nên: $\lim\left[(2x)^n.x^{2^n-n-1}.f(x^{2^n})\right] = 0$

Do vậy: $f(x) \ge 0\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Với 0 < x < 1 thì: $f(\sqrt{x}) \ge 2\sqrt{x}f(x) \Rightarrow f(x) \le \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \le \frac{f(x^{\frac{1}{2n}})}{2^n.x^{1-\frac{1}{2n}}}$

Vì $\lim \frac{f(x^{\frac{1}{2n}})}{2^n.x^{1-\frac{1}{n}}} = 0$ $f(x) \le 0\ \forall x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) = 0\ \forall x \in [0, \frac{1}{2})$;

Với mỗi $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ tồn tại $n \in N$ để $x^{2^n} < \frac{1}{2}$ (chọn $n > \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} 2\right)$ nên:

$f(x) \geq 2^n.x^{2^n-1}f(x^{2^n}) = 0$; $f(x) \geq 0, \forall x \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Do đó $f(x) = 0, \forall x \in [\frac{1}{2}, 1)$

Vậy $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1)$

Vì f(x) liên tục trên [0, 1] nên $f(x) = 0\ \forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 18. 39: Xác định f(x) liên tục trên R thoả mãn:

$$f(x)f(y) = f(x + y) \text{ với } \forall x, y \in \mathbf{R} \text{ và } f(1) = 2$$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(2x) = f(x + x) = [f(x)]^2$

Dùng quy nạp, ta có $f(nx) = [f(x)]^n$ với $n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$

Chọn $x = \frac{1}{n} \Rightarrow f(1) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \left[f(1)\right]^{\frac{1}{n}}$

Từ đó: $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f(m - \frac{1}{n})\left[f(\frac{1}{n})\right]^n = 2^{\frac{m}{n}}$, với $m, n \in \mathbf{N}^*$

Nhận xét rằng: $f(n)f(-n) = f(0) = 1$

$\Rightarrow f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow f(-\frac{m}{n}) = 2^{-\frac{m}{n}}$

nên $f(\frac{m}{n}) = 2^{\frac{m}{n}}$ với $\forall m \in Z$ và $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Với $x_0 \in \mathbf{R}$ có 1 dãy hữu tỉ tiến về x_0.

Vì f(x) liên tục tại x_0 nên $f(x_0) = 2^{x_0}$. Vậy $f(x) = 2^x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 18. 40: Xác định f(x) liên tục trên R thoả mãn:

$$f(xy) = f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Hướng dẫn giải

Thay $y = 1 \Rightarrow f(x)[1 - f(1)] = 0, \forall x \in \mathbf{R}$

$f(x) \neq 1$ từ (3) suy ra $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$

$f(1) = 1$. Khi đó: $f(1) = f\left(x . \frac{1}{x}\right) = f(x).f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f(x) \neq 0, \forall x \in R \setminus\{0\}$ và $f(x^2) = [f(x)]^2 > 0, \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

Nếu $x, y \in \mathbf{R}^+$. Đặt $x = e^u$, $y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$

Khi đó $g(u + v) = g(u) . g(v)$, $\forall u, v \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow g(t) = a^t, \forall t \in \mathbf{R}, a > 0$

Do đó: $f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{\ln x} = (e^{\ln a})^{\ln x} = x^{\alpha}$

Với $\alpha = \ln a$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$

Nếu $x, y \in \mathbf{R}^-$ thì $x, y \in \mathbf{R}^+$, theo trên ta có:

$[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^{\beta} = ((|x|)^{\beta})^2, \forall x \in \mathbf{R}^-, \forall \beta \in \mathbf{R}$

Do f(x) liên tục trên R^- nên $f(x) = \begin{cases} |x|^{\beta} & \forall x \in R^+ \\ -|x|^{\beta} & \forall x \in R^- \end{cases}$

Vậy $f(x) = 0, \forall x \in R$

$f(x) = |x|^{\alpha}\ \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbf{R}$ tuỳ ý

$f(x) = \begin{cases} x^{\beta} & \forall x \in R^+ \\ -|x|^{\beta} & \forall x \in R^- \end{cases}$, $\beta \in \mathbf{R}$ tuỳ ý.

Bài toán 18. 41: Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên **R** thoả :

$$(f(x))^3 - (x^2 + 3)(f(x))^2 + (x^2 + 3)f(x) + x^4 - 1 = 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $y = f(x)$, $t = x^2$ ta có: $t^2 - (y^2 - y)t + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải t theo y: $\Delta_t = (y^2 - 3y + 2)^2$

$t = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$; $t = y - 1$

Viết lại phương trình hàm: $[x^2 - (f(x) - 1)^2]\,[x^2 - (f(x) - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (f(x) - 1 - x)(f(x) - 1 + x)(f(x) - 1 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) \in \{1 + x ; 1 - x; x^2 + 1\}$

Để ý: Đồ thị các hàm số $f_1(x) = 1 + x$ và $f_2(x) = 1 - x$ có điểm chung A(0, 1)

Đồ thị các hàm số $f_1(x) = 1 + x$ và $f_3(x) = x^2 + 1$ có 2 điểm chung A(0, 1) và B(1, 2).

Đồ thị các hàm số $f_2(x) = 1 - x$ và $f_3(x) = x^2 + 1$ có 2 điểm chung A(0, 1) và C(–1, 2)

Do điều kiện f liên tục trên **R** nên:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{khi } x \in (-\infty, -1) \\ f_j(x) & \text{khi } x \in [-1, 0] \\ f_k(x) & \text{khi } x \in (0, 1) \\ f_{\ell}(x) & \text{khi } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

với: i, j, k, ℓ chọn trong [1, 2, 3] sao cho f liên tục.

Vậy có tất cả 25 hàm số liên tục thoả phương trình hàm và được xác định như trên.

Bài toán 18. 42: Tìm f(x) liên tục thoả: $C_n^0 f(x) + C_n^1 f(x^2) + \ldots + C_n^n f(x^{2^n}) = 0$, $\forall x$

Hướng dẫn giải

Đặt $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x^{2^k})$

Ta có: $g_n(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$;. $g_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k})$

$$g_{n-1}(x^2) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^{k+1}}) = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f(x^{2^k})$$

$$g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) f(x^{2^k}) + f(x^{2n})$$

$$= C_n^0 f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f(x^{2^k}) + C_n^n f(x^{2^n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x^{2^k}) = g_n(x) = 0$$

Vì f liên tục trên **R** nên $g_n(x)$ luôn xác định và liên tục trên **R**.

Nếu $x = 0$ thì $g_{n-1}(0) = 0$ hoặc $x = 1$ thì $g_{n-1}(1) = 0$

Nếu $0 < x < 1$ thì ta có:

$$g_{n-1}(x) = g_{n-1}(x^2) = \ldots = g_{n-1}(x^{2^m}) = \ldots = g_{n-1}(0) = 0$$

Nếu $x > 1$ thì từ: $g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2)$ ta suy ra

$$g_{n-1}(t) = g_{n-1}(t^{\frac{1}{2}}) = \ldots = (-1)^m g_{n-1}(t^{\frac{1}{2m}}) = g_{n-1}(1) = 0$$

Do đó: Nếu $x \geq 0$ thì $g_{n-1}(x) = 0\ \forall n \in N^+$

Nếu $x < 0 \Rightarrow g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2) = 0$

$\Rightarrow g_{n-1}(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}, n \in N^*$

Vậy $g_n(x) = g_0(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in N^*$

Mà $g_0(x) = f(x)$ do đó $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$

Thử lại đúng. Vậy: $f(x) = 0$.

Bài toán 18. 43: Tìm tất cả các hàm liên tục f: $R^+ \to R^+$ thoả mãn:

$$f(x) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right), \text{ với mọi } x \in R^+$$

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh f(x) là hàm hằng. Lấy a > 0 tuỳ ý.

Xét dãy $\{x_n\}$ như sau: $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 1$

Khi đó $f\left(\dfrac{x_n+1}{x_n+2}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = ... = f(x_0) = f(a)$.

Vậy hàm f(x) là không đổi trên dãy $\{x_n\}$

– Nếu $a > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta chứng minh $\dfrac{a+1}{a+2} > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (1)

Thật vậy, (1) tương đương với $2a + 2 > -a + a\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (3-\sqrt{5})a > 2\sqrt{5} - 4 \Leftrightarrow a > \dfrac{2\sqrt{5}-4}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, hiển nhiên đúng.

Từ đây suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới bởi $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Mặt khác, xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n+1}{x_n+2} - x_n = \dfrac{x_n+1-x_n^2-2x_n}{x_n-2} = \dfrac{-x_n^2-x_n+1}{x_n+2}$

Do $x_n > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ nên $x_n^2 + x_n - 1 > 0 \Leftrightarrow -x_n^2 - x_n + 1 < 0$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n$, nghĩa là dãy $\{x_n\}$ giảm

– Nếu $0 < a < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó dễ thấy $\dfrac{a+1}{a+2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \{x_n\}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Mặt khác, xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n+1}{x_n+2} - x_n = \dfrac{x_n+1-x_n^2-2x_n}{x_n+2} = \dfrac{-x_n^2-x_n+1}{x_n+2}$

Do $x_n < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ nên $x_n^2 + x_n - 1 < 0 \Leftrightarrow -x_n^2 - x_n + 1 > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n$, nghĩa là dãy $\{x_n\}$ tăng

Trong cả hai trường hợp, dãy (x_n) đều hội tụ về $b = \lim x_n$.

Chuyển qua giới hạn trong (*) ta có:

$$b = \frac{b-1}{b-2} \Leftrightarrow b^2 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Do b > 0 nên $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Như vậy $f(a) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = C$

Vậy f(x) = C. Thử lại đúng.

Bài toán 18. 44: Tìm hàm $f(x) \geq 0$. Xác định và khả vi trên R^+ thoả mãn điều kiện: $f\left(\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}$, $\forall x, y \in R, n \in N^*$

Hướng dẫn giải

Đạo hàm hai vế của đẳng thức đề bài cho lần lượt theo x và y ta được:

$$f'\left(\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}\right)\frac{nx^{n-1}}{4\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}} = \frac{f(x)f'(x)}{2\sqrt{\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}}$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}\right)\frac{ny^{n-1}}{4\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}} = \frac{f(y)f'(y)}{2\sqrt{\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}}$$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = \dfrac{f(y)f'(y)}{y^{n-1}}$, $\forall x, y \in R^+$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = a$, (hằng số dương) $\Rightarrow f(x).f'(x) = a.x^{n-1}$

$\Rightarrow f(x)= \sqrt{\dfrac{2}{n}ax^n}$ .Thử lại ta thấy hàm f(x) thoả các yêu cầu đề bài.

Vậy: $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{n}ax^n}$.

Bài toán 18. 451: Cho hàm số f: **R** $\rightarrow$ **R** xác định bởi :

$$y = f(x) = (1999)^x + (1999)^{2-x}.$$

Với giá trị nào của a thì hàm y = f(x + a) là hàm số chẵn.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = (1999)^x + (1999)^{2-x}, \forall x$

$\Rightarrow \quad f(x + a) = (1999)^{x+a} + (1999)^{2-a-x}, \forall x$

Do đó: y = f(x + a) là hàm số chẵn trên R

$\Leftrightarrow \quad f(x + a) = f(-x + a)\ \forall x$

$\Leftrightarrow \quad (1999)^{x+a} + (1999)^{2-a-x} = (1999)^{-x+a} + (1999)^{2-a+x}, \forall x$

$\Leftrightarrow \quad (1999)^x . (1999)^a + (1999)^{2-a} . (1999)^{-x}$

$= \ (1999)^{-x} . (1999)^a + (1999)^{2-a} . (1999)^x\ \forall x$

$\Leftrightarrow \quad [(1999)^x - (1999)^{-x}][(1999)^a - (1999)^{2-a}] = 0\ \forall x$

$\Leftrightarrow \quad [(1999)^a - (1999)^{2-a}] = 0 \Leftrightarrow \qquad a = 2 - a \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy a = 1 thì y = f(x + a) là hàm chẵn trên R.

Bài toán 18. 46: Cho b là một số thực dương. Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập các số thực R, lấy giá trị trong R và thoả mãn:

$$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x(3^{b^y+f(y)-1} - b^y),\ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$f(x+y) + b^{x+y} = (f(x) + b^x)\,3^{b^y+f(y)-1},\ \forall x,y \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Đặt $g(x) = f(x) + b^x$. Khi đó (1) có dạng

$$g(x+y) = g(x)3^{g(y)-1},\ \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Thay y = 0 vào PT (2) ta được

$$g(x) = g(x)3^{g(0)-1} \forall x \in R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \forall x \in R \\ g(0) = 1 \end{array}\right.$$

Với $g(x) = 0$, $\forall x \in$ R thì $f(x) = -b^x$

Với $g(0) = 1$, thế x = 0 vào PT (2) ta được:

$$g(y) = g(0)3^{g(y)-1} \Leftrightarrow g(y) = 3^{g(y)-1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{g(y)-1} - g(y) = 0,\ \forall y \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Xét hàm số $h(t) = 3^{t-1} - t$ có $h'(t) = 3^{t-1}\ln 3 - 1$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_3(\log_3 e) + 1 < 1$$

Ta có bảng biến thiên sau, với $a = \log_3 e - \log_3(\log_3 e) - 1 < 0$

t	$-\infty$		$\log_3(\log_3 e)+1$		1		$+$
$h'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(t)$	$-\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT h(t) = 0 có hai nghiệm $t_1 = 1$ và $t_2 = c$, với $0 < c < 1$ (vì $h(0) = \frac{1}{3}$). Tức là $g(y) = 3^{g(y)-1}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(y) = 1 \\ g(y) = c,\ 0 < c < 1 \end{array}\right. \quad \forall y \in \mathbf{R} \qquad (4)$$

Giả sử tồn tại $y_0 \in$ R sao cho $g(y_0) = c$.

Khi đó: $1 = g(0) = g(y_0 - y_0) = g(-y_0).3^{g(y)-1} = c.g(-y_0)$. Suy ra $g(-y_0) = \frac{1}{c} \neq c$, mâu thuẫn với (4).

Nên $g(y) = 1$, $\forall y \in \mathbf{R}$, suy ra $f(x) = 1 - b^x$. Thử lại đúng.

Vậy có hai hàm số thoả mãn đề bài là:

$f(x) = -b^x$ và $f(x) = 1 - b^x$.

Bài toán 18. 47: Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Hãy xác định tất cả các hàm số f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn phương trình sau:

$$f(x + y) = f(x).\,3^{b^y + f(y) - 1} + b^x(3^{b^y + f(y) - 1} - b^y)$$

Hướng dẫn giải

a) Xét $x > 0$, đặt $(2 + \sqrt{2})x = t > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{t}{2+\sqrt{2}}$ thì

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t\right) + f\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t\right) = 2f(t) \Leftrightarrow f((\sqrt{2}-1)t + f\left(\frac{t}{\sqrt{2}-1}\right) = 2f(t)$$

Đặt $t = (\sqrt{2} - 1)^u$ thì phương trình trên trở thành

$f((\sqrt{2} - 1)^{u+1}) + f((\sqrt{2} - 1)^{u-1}) = 2f((\sqrt{2} - 1)^u)$

Tiếp tục đặt $f((\sqrt{2} - 1)^u) = g(u)$ và $h(u) = g(u + 1) - g(u)$ thì ta có:

$g(u + 1) + g(u - 1) = 2g(u) \Leftrightarrow g(u + 1) - g(u) = g(u) - g(u - 1)$

$\Leftrightarrow h(u + 1) = h(u), \forall u$

Bằng quy nạp, thì $g(u + n) = nh(u) + g(u)$ với n là số nguyên dương. Do đó:

$$g(u) = \begin{cases} k(u),\ 0 \le u < 1 \\ nh(u-n) + k(u-n), n \le u < n+1, \forall n \le Z \end{cases}$$

trong đó h(u), k(u) là các hàm số tùy ý, h(u) tuần hoàn với chu kì 1.

Suy ra $f(x) = g\left(\log_{\sqrt{2}-1} x\right).\ x > 0$

Xét $x < 0$ thì đặt $-(2 + \sqrt{2})x = t = (-\sqrt{2} - 1)^u$, ta được

$f(x) = g\left(\log_{\sqrt{2}-1}(-x)\right).\ x < 0$

Vậy $f(x) = \begin{cases} a, x = 0 \\ g(\log_{\sqrt{2}-1}|x|), x \neq 0 \end{cases}$, với g(x) xác định như trên.

b) Với mọi số thực x, y thì

$f(x + y) = f(x).\,3^{b^y + f(y) - 1} + b^x(3^{b^y + f(y) - 1} - b^y)$

$\Leftrightarrow f(x + y) + b^{x+y} = (f(x) + bx)\ 3^{b^y + f(y) - 1}$

Đặt $g(x) = f(x) + b^x, \forall x$ thì phương trình: $g(x + y) = g(x).3^{g(y)-1}$

Chọn $y = 0$ thì $g(x) = g(x).3^{g(0)-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0,\ \forall x \in R \\ g(0) = 1 \end{array}\right.$

. Nếu $g(x) = 0, \forall x$ thì $f(x) = -b^x, \forall x$

. Nếu $g(0) = 1$, thay $x = 0$, ta có $g(y) = 3^{g(y)-1}$

Xét hàm số $h(t) = 3^{t-1} - t, t \in \mathbf{R}$. Ta có:

$h'(t) = 3^{t-1}\ln 3 - 1$, $h''(t) = 3^{t-1}(\ln 3)^2 > 0, \forall t$

nên phương trình h(t) = 0 có không quá hai nghiệm

Ta lại thấy h(t) = 0, h(0) > 0, $h\left(\frac{9}{10}\right) < 0$ nên theo tính chất liên tục của hàm số, phương trình h(t) = 0 có đúng hai nghiệm là $t_1 = 1$, $t_2 = c$, $0 < c < 1$.

Do đó $g(y) = 3^{g(y)-1}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(y) = 1 \\ g(y) = c,\ 0 < c < 1 \end{array}\right.$, $\forall y \in \mathbf{R}$.

Giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $g(y_0) = c$ thì

$$1 = g(_0) = g(y_0 - y_0) = g(-y_0).\,3^{g(y_0)-1} = cg(-y_0)$$

$\Leftrightarrow g(-y_0) = \frac{1}{c} > 1 > c$

Điều mâu thuẫn này cho thấy hàm số có dạng g(y) = c, 0 < c < 1 không thỏa mãn đề bài.

Do đó g(y) = 1, $\forall y \in \mathbf{R}$ hay $f(x) = 1 - b^x$, $\forall x$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = b^x$ hoặc $f(x) = 1 - b^x$, mọi x.

Bài toán 18. 48: Tìm tất cả hàm f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn: f(0) =0, f(1) = 2013 và

$(x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y)) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y))$ đúng với mọi x , y $\in \mathbf{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh f(x) = 2013x.

Cho y = 0 và x $\neq$ 0 thì $xf(f^2(x)) = f^3(x)$

Suy ra $f(f^2(x)) = \frac{f^3(x)}{x}, \forall x \neq 0$

Thay vào PT cho $(x - y)(\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y}) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y)), \forall x, y \neq 0$

Thay x<0 và y = 1 , ta có

$$(x - 1)(\frac{f^3(x)}{x} - 2013^3) = (f(x) - 2013)(f^2(x) - 2013^2)$$

Hay $(f(x) - 2013x)(f^2(x) - 2013^2x) = 0, \forall x < 0$

Mặt khác với x <0 thì $f^2(x) > 2013^2x$ nên $f(x) = 2013x, \forall x < 0$

Thay x >0 và y = –1 , ta có

$$(x + 1)(\frac{f^3(x)}{x} + 2013^3) = (f(x) + 2013)(f^2(x) - 2013^2)$$

Hay $(f(x) - 2013x)(f^2(x) + 2013^2x) = 0, \forall x > 0$

Suy ra $f(x) = 2013x, \forall x > 0$.

Ta có f(0) = 0 nên $f(x) = 2013x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại đúng.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 18. 1: Cho hàm f thỏa mãn

$$f(1+\frac{\sqrt{2}}{x}) = \frac{(1+\sqrt{2011})x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2}. \text{ Tính } f(\sqrt{2012-\sqrt{2011}}).$$

Hướng dẫn

Biến đổi $f(1+\frac{\sqrt{2}}{x}) = (1+\frac{\sqrt{2}}{x})^2 + \sqrt{2011}$ rồi đặt $y = 1+\frac{\sqrt{2}}{x}$

Kết quả $f(\sqrt{2012-\sqrt{2011}}) = 2012$.

Bài tập 18. 2: Hãy xác định tất cả các hàm số f: $N^* \to N^*$ thoả mãn đẳng thức $f(n) + f(n + 1) = f(n + 2) f(n + 3) - 1996$ với mọi $n \in N^*$

Hướng dẫn

Kết quả Nếu f(3) = f(1) = 1 thì $f(n) = \begin{cases} 1, n = 2k+1 \\ a + \left(\frac{n}{2} - 1\right)1977, & n = 2k \end{cases}$

Nếu f(3) = f(1)>1 thì: $f(n) = \begin{cases} 2, n = 2k+1 \\ 1998, n = 2k \end{cases}$; $f(n) = \begin{cases} 1998, n = 2k+1 \\ 2, n = 2k \end{cases}$

Nếu f(3) > f(1) thì $f(n) = \begin{cases} 1, n = 2k \\ a + \frac{n-1}{2}.1977, n = 2k+1, \end{cases}$

Bài tập 18. 3: Tìm tất cả các hàm số f: $Q \to Q$ sao cho f thoả mãn điều kiện f(1) = 2 và $f(xy) = f(x).f(y) - f(x + y) + 1$, $x, y \in Q$.

Hướng dẫn

Chứng minh $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$. Kết quả f(x) = x + 1

Bài tập 18. 4: Tìm tất cả hàm số f: $R \to R$ thoả mãn

$$f(x + f(y) + xf(y)) = x + xy + y, \forall x, y \in R$$

Hướng dẫn

Chứng minh f đơn ánh . Kết quả f(x) = –x – 2 .

Bài tập 18. 5: Xác định f liên tục trên **R** và thoả mãn hai điều kiện:

$\begin{cases} f(2019) = 2018 \\ f(x).f_4(x) = 1 \quad \forall x \in R \end{cases}$ (Kí hiệu: $f_n(x) = f(f...(f(x)))$, n lần)

Hướng dẫn

Chứng minh f đơn điệu giảm. Kết quả $f(x) = x$

Bài tập 18. 6: Tìm các hàm số f xác định với mọi số nguyên và nhận giá trị thực, thoả mãn:

i) Với mọi số nguyên x và y thì: $f(x) . f(y) = f(x + y) + f(x - y)$;

ii) $f(0) \neq 0$; $f(1) = \dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn

Dự đoán $f(1) = \dfrac{5}{2} = 2 + 2^{-1}$, $f(2) = 2 + 2^{-2}$.

Kết quả $f(n) = 2^n + 2^{-n}$

Bài tập 18. 7: Hãy xác định tất cả các hàm f: $R^+ \to R^+$ thoả mãn các điều kiện sau: $f(2) = 0; f(x) \neq 0$, với $0 \leq x < 2$; $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$

Hướng dẫn

Chứng minh $f(y) \geq \dfrac{2}{2-y}$.

Kết quả $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2 \\ \dfrac{2}{2-x}, & 0 < x < 2 \end{cases}$

Bài tập 18. 8: Có tồn tại hàm $f : \mathbf{Z}^* \to \mathbf{Z}^*$ thoả mãn $f(mf(n)) = n + f(2013m)$ với mọi m, n nguyên dương.

Hướng dẫn

Chứng minh f đơn ánh rồi suy ra $f(n) = 2013a^n$.

Kết quả không tồn tại.

Bài tập 18. 9: Cho f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thoả:

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)[(f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2], \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Chứng minh $\forall x \in \mathbf{R}$ ta có $f(2017x) = 2017f(x)$

Hướng dẫn

Chứng minh qui nạp $f(kx) = kf(x)$.

Bài tập 18. 10: Giả sử các hàm số f, g; $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ không phải hằng số và thoả mãn hai đồng nhất thức

$$f(x + y) \equiv f(x).g(y) + g(x)f(y) \; ; \; g(x + y) \equiv g(x).f(y) - f(x)f(y)$$

Tìm tất cả các giá trị có thể của f(0) và g(0).

Hướng dẫn

Kết quả $f(0) = 0$, $g(0) = 1$

Chuyên đề 19: NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM G

Định nghĩa: Cho $f \in \mathbf{R}[x]$ và số $\alpha \in \mathbf{R}$

Ta gọi α là một nghiệm thực của f nếu $f(\alpha) = 0$

Ta gọi α là nghiệm bội k của f(x) nếu f(x) chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ nghĩa là:

$$f(x) = (x - \alpha)^k.\ g(x),\ \forall x \in \mathbf{R} \text{ và } g(\alpha) \neq 0$$

hay $\begin{cases} f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \\ f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Định lí BEZOUT: α là một nghiệm của đa thức f(x) khi và chỉ khi f(x) chia hết cho $x - \alpha$.

Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên

Cho $f \in \mathbf{Z}[x]$, deg f = n, $a_i \in \mathbf{Z}$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Nghiệm hữu tỷ nếu có $x = \dfrac{p}{q}$ với (p,q) = 1 thì p là ước của hệ số tự do và q là ước của hệ số cao nhất: $p \mid a_n$, $q \mid a_0$.

Nếu $a_0 = 1$ thì các nghiệm hữu tỉ nếu có của f(x) đều là nghiệm nguyên với f(x) là đa thức hệ số nguyên.

Định lí VIET:

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, deg f = n.

Nếu f có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (phân biệt hay trùng nhau).

thì: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}.x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

......

và $x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n . \dfrac{a_n}{a_0}$.

Đảo lại, nếu n số $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ có tổng các tích chập k của n số x_i là S_k thì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm nếu có của phương trình:

$$X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}.S_{n-1}X + (-1)^n . S_n = 0.$$

Định lí liên tục:

Nếu đa thức f(x) nhận 2 giá trị trái dấu trên [a,b] là f(a).f(b) < 0 thì đa thức f(x) có ít nhất một nghiệm $x = c \in (a,b)$.

Định lí LAGRANGE:

Với mọi đa thức f(x) trên [a,b] thì có số $c \in (a,b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Đặc biệt nếu f(a) = f(b) = 0 hay chỉ cần f(a) = f(b) thì f '(c) = 0 tức là: f '(x) = 0 có 1 nghiệm thuộc (a,b)

Định lý ROLE:

Giữa 2 nghiệm của đa thức f(x) thì có một nghiệm của f '(x).

Nếu f có n nghiệm phân biệt thì f ' có n–1 nghiệm phân biệt,

f '" có n–2 nghiệm phân biệt,..., $f^{(n-k)}$ có n–k nghiệm phân biệt,..

Phân tích nhân tử theo các nghiệm.

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$ có nghiệm $x_1, x_2, ..., x_m$ với bội tương ứng $k_1, k_2, ... k_m$ thì tồn tại $g \in \mathbf{R}[x]$

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}.(x - x_2)^{k_2}...(x - x_m)^{k_m}.g(x)$$

hay $f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i} g(x)$ với $\sum_{i=1}^{m} k_i \le n$

Nếu f bậc n có đủ n nghiệm phân biệt hay trùng nhau thì:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n) = A.\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Phân tích ra nhân tử của $f \in \mathbf{R}[x]$:

Các nhân tử của f chỉ là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai vô nghiệm: $f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{m}(x - d_i)\prod_{k=1}^{s}(x^2 + b_k.x + c_k)$

Với các hệ số $d_i, b_k, c_k \in \mathbf{R}$, 2s + m = deg f, $b_k^2 - 4c_k < 0$ và cách phân tích này là duy nhất.

Phân tích ra nhân tử của $f(z) \in \mathbf{C}[z]$, deg f = n.

$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n,\ a_0 \ne 0.$

Theo định lí D'ALEMBERT thì f có đủ n nghiệm phức $z_1, z_2,.., z_n$, nên:

$$f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ ...\ (z - z_n) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$$

Đa thức CHEBYSHEV:

$T_n(x)$ xác định như sau:

$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \ge 1.$

Cụ thể: $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$; $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, ...$

Đa thức Chebyshev (Trêbưsep) $T_n(x)$ có bậc n và có hệ số cao nhất 2^{n-1}. Đôi khi ta chỉ xét $n \geq 1$ trở đi.

Kết quả:

(1): $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$.

(2): $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1]$.

(3): $|T_n(x)| = 1$ có đúng n nghiệm phân biệt trên $[-1,1]$ là:

$x = \cos k\dfrac{\pi}{n}$, $k = 0,1, ..., n-1$.

Chú ý:

1) Số lượng nghiệm:

- Mỗi đa thức hệ số thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực.
- Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không $f \equiv 0$.
- Nếu đa thức có bậc $\leq n$ và có quá n nghiệm là đa thức không.
- Nếu đa thức có bậc $\leq n$ và nhận n+1 giá trị như nhau tại n+1 điểm khác nhau của biến là đa thức hằng: $f \equiv C$.
- Hai đa thức có bậc $\leq n$ và nhận n+1 giá trị như nhau tại n+1 điểm khác nhau của biến thì đồng nhất nhau: $f \equiv g$.

2) Qui tắc dấu DESCARTE:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$

Gọi D là số nghiệm dương (kể cả bội)

L là số lần đổi dấu trong dãy hệ số khác 0 từ a_0 đến a_n (bỏ đi các hệ số $a_i = 0$)

Thì: $D \leq L$ và $L - D$ là số chẵn hay $L = D + 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

3) Đưa đa thức vào giả thiết các số bất kì.

Cho n số bất kì $x_1, x_2, ..., x_n$ thì ta xét đa thức nhận n số đó làm nghiệm: $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) ... (x - x_n)$. Từ đó ta khai thác các quan hệ về nghiệm, Viette, hệ số, đạo hàm,...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 19. 1: Cho số tự nhiên $n \geq 2$, chứng minh phương trình:

$\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x}{1!} + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh phản chứng. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ α. Khi đó α sẽ là nghiệm hữu tỉ của đa thức:

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + ... + n!\frac{x^k}{k!} + ... + n!\frac{x^2}{2!} + n!\frac{x}{1!} + n!$$

Nhưng do P(x) là đa thức bậc n với hệ số nguyên, hơn nữa hệ số của x^n bằng 1, nên suy ra α phải là số nguyên, và ta có:

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + ... + n!\frac{\alpha^k}{k!} + ... + n!\frac{\alpha^2}{2!} + n!\frac{\alpha}{1!} + n! = 0 \quad (1)$$

Gọi p là một ước nguyên tố của n.

$\forall k = \overline{1,n}$, kí hiệu r_k là số mũ cao nhất của p thoả mãn $k! \vdots p^{r_k}$, ta có:

$$r_k = [\frac{k}{p}] + [\frac{k}{p^2}] + ... + [\frac{k}{p^s}] \quad (2)$$

Với s là số nguyên không âm thoả mãn: $p^s \le k < p^{s+1}$

Từ (2) suy ra: $r_k \le \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + ... + \frac{k}{p^s} = k.\frac{1 - \frac{1}{p^s}}{p-1} < k$

Do đó $r_n - r_k > r_n - k$. Suy ra $r_n - r_k \ge r_n - k + 1$.

Vì vậy ta được $\frac{n!}{k!} \vdots p^{n-k+1}$, $\forall k = \overline{1,n}$ (3)

mà $n \vdots p$ nên từ (1) ta có $\alpha^n \vdots p$, và do đó $\alpha \vdots p$.

Suy ra $\alpha^k \vdots p_k$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Kết hợp điều này với (3) ta được $n!\frac{\alpha^k}{k!} \vdots p_n^{r+1}$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Từ đây và (1) ta suy ra $n! \vdots p_n^{r+1}$: mâu thuẫn $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 19. 2: Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và P(x) = 1 ; P(x) = 2; P(x) = 3 có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3. Chứng minh P(x) = 5 không có hơn một nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.

Ta có $P(x) = (x - x_2).q(x) + 2$ với $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Cho $x = x_1$ và $x = x_3$, ta được

$1 = P(x_1) = (x_1 - x_2)q(x_1) + 2 \Rightarrow (x_1 - x_2)\,q(x_1) = -1$

$3 = P(x_3) = (x_3 - x_2)\,q(x_3) + 2 \Rightarrow (x_3 - x_2)\,q(x_3) = 1$

Vì $x_1 - x_2$; $x_3 - x_2$; $q(x_1)$; $q(x_3)$ là những số nguyên nên $x_1 - x_2$ và $x_3 - x_2$ chỉ có thể bằng ± 1. Nhưng $x_1 \ne x_3$ nên:

Hoặc $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$

Hoặc $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$

Do đó x_2 là trung bình cộng của x_1, x_3

Giả sử phương trình $P(x) = 2$ còn có một nghiệm nguyên $x'_2 \neq x_2$. Lặp lại lập luận trên cho 3 số x_1, x_2, x_3 thì ta thấy x'_2 là trung bình cộng của x_1 và x_3, tức là $x'_2 = x_2$ (mâu thuẫn)

Vậy x_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $P(x) = 2$.

Hướng dẫn giải tương tự cho $P(x) = 1$; $P(x) = 3$.

Giả sử phương trình $P(x) = 5$ có một nghiệm nguyên x_5, ta có:

$$5 = P(x_5) = (x_5 - x_2)q(x_5) + 2 \Rightarrow (x_5 - x_2)\, q(x_5) = 3$$

Nên $x_5 - x_2$ chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 3.

Nếu $x_5 - x_2 = \pm 1$ thì theo chứng minh trên x_5 phải trùng với x_1 hoặc x_3. Vô lý vì x_5 khác với x_1 và x_3. Do đó chỉ có thể xảy ra khả năng $x_5 - x_2 = \pm 3$.

Mà $\quad P(x) = (x - x_3)r(x) + 3$; $r(x) \in \mathbf{Z}[x]$

$\Rightarrow 5 = P(x_5) = (x_5 - x_3)r(x_5) + 3 \Rightarrow (x_5 - x_3)r(x_5) = 2$

Suy ra $x_5 - x_3$ chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 2. Có thể thấy

$x_5 - x_3 = \pm 1$ (mâu thuẫn). Nên $x_5 - x_3 = \pm 2$, do đó:

Nếu $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$ thì $x_5 - x_2 = -3$

Nếu $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$ thì $x_5 - x_2 = 3$.

Như vậy nghiệm nguyên x_5 (nếu nó tồn tại) của phương trình $P(x) = 5$ được xác định hoàn toàn bởi x_1, x_2, x_3. Các số này là duy nhất. Vậy $P(x) = 5$ không thể có hơn một nghiệm nguyên.

Bài toán 19. 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, đa thức:

$f(x) = x^4 - 2001x^3 + (2000 + a)x^2 - 1999x + a$ không thể có hai nghiệm nguyên (phân biệt hay trùng nhau).

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh rằng nếu x_0 là một nghiệm nguyên của $f(x)$ thì x_0 phải là số chẵn. Thật vậy:

$f(x_0) = 0$; $f(1) = 2a - 1999$ là số lẻ nên $f(x_0) - f(1)$ là số lẻ

Nhưng $f(x_0) - f(1)$ chia hết cho $x_0 - 1$ nên $x_0 - 1$ là một là số lẻ do đó x_0 chẵn. Ta xét 2 trường hợp:

– Giả sử $f(x)$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 phân biệt, thế thì:

$$0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) - 2001(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

$$+ (2000 + a)(x_1 + x_2) - 1999$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_1, x_2 đều chẵn.

– Giả sử $f(x)$ có nghiệm kép x_0 chẵn. Khi đó x_0 cũng là nghiệm của đạo hàm $f'(x)$. Do đó

$$f'(x_0) = 4x_0^3 - 6003x_0^2 + 2(2000 + a)x_0 - 1999 = 0$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_0 chẵn.

Bài toán 19. 4: Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n + c^n$ là số nguyên. Chứng minh tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta xét bài toán: Cho hai số thực a, b thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n$ là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q sao cho a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Theo định lý Viet, rõ ràng điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minh a + b và a.b là số nguyên. a + b hiển nhiên nguyên theo điều kiện đề bài.

Ngoài ra ta có $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$ là số nguyên. Đến đây, ta có thể tiếp tục dùng hằng đẳng thức này để suy ra $2a^2b^2$ cũng là số nguyên: $2a^2b^2 = (a^2+b^2) - (a^4+b^4)$

Bổ đề. Nếu x là số thực sao cho 2x và $2x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử 2x = k nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ :

$k = 2m + 1$. Suy ra $x = m + \frac{1}{2}$.

Nhưng khi đó $2x^2 = 2(m+\frac{1}{2})^2 = 2m^2 + 2m + \frac{1}{2}$ không nguyên. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là x nguyên.

Như vậy, theo bổ đề thì ab nguyên và ta suy ra điều phải chứng minh. Từ phép chứng minh ta cũng suy ra kết quả mạnh hơn:

Nếu a + b, $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$ là các số nguyên thì a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ với p, q là các số nguyên nào đó (và do đó $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương). Điều đó cũng có nghĩa là ta chỉ cần dùng giả thiết của bài toán đến n = 4. Ví dụ $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cho thấy k = 4 là giá trị nhỏ nhất thoả mãn điều kiện: Nếu a, b là các số thực thoả mãn điều kiện $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi n=1, 2, ..., k thì $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương.

Trở lại với bài toán, Ta chỉ cần chứng minh a + b + c, ab + bc + ca và abc nguyên.

Theo điều kiện đề bài thì a + b + c là số nguyên. Tiếp theo ta có

$2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ là số nguyên.

Tương tự như lời Hướng dẫn giải trên, ta muốn chứng minh rằng $2(ab + bc + ca)^2$ cũng là số nguyên.

Từ đó dùng bổ đề suy ra ab + bc + ca là số nguyên.

Ta có $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2+b^2+c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$

và $2(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a+b+c)$ (1)

Vì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$ (2)

Từ đây, do $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ và $2(ab + bc + ca)$ là số nguyên nên ta suy ra $6abc$ là số nguyên (ta nhân (2) với 2!). Từ đó, nhân (2) với 3 ta thu được

$6(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 12abc(a+b+c)$ là số nguyên.

Như vậy $2(ab+bc+ca)$ và $6(ab + bc + ca)^2$. Áp dụng cách chứng minh như bổ đề nêu trên, ta suy ra $ab + bc + ca$ là số nguyên. Từ đây, thay vào (2) ta có $3abc$ là số nguyên.

Tiếp theo, ta sử dụng hằng đẳng thức tương tự (2)

$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = (a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$

với chú ý $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ là số nguyên ta suy ra $6a^2b^2c^2$ là số nguyên. Từ $6abc$ và $6a^2b^2c^2$ là số nguyên, bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra abc là số nguyên. Bài toán được Hướng dẫn giải quyết hoàn toàn.

Bài toán 19. 5: Cho đa thức $P(x)$ có bậc $m > 0$ và có các hệ số nguyên. Gọi n là số tất cả các nghiệm nguyên phân biệt của hai phương trình $P(x) = 1$ và $P(x) = -1$. Chứng minh rằng: $n < m + 2$.

Hướng dẫn giải

Xét hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$, với các hệ số nguyên, chúng giống nhau hoàn toàn, chỉ trừ hai số hạng tự do là khác nhau, hai số hạng này hơn kém nhau 2 đơn vị.

Gọi r và s là các nghiệm nguyên tương ứng của hai đa thức, tức là:

$A(r) = 0$ (1) và $B(s) = 0$ (2)

Khi đó, trừ (1) cho (2) ta được một tổng của hạng tử có dạng $a(r^i - s^i)$ và cộng thêm cho 2. Mỗi hạng tử này chia hết cho $(r - s)$, do đó 2 phải chia hết cho $(r - s)$. Từ đó, suy ra r và s hơn kém nhau 0, 1 hoặc 2 đơn vị.

Giả sử r là nghiệm nguyên bé nhất trong tất cả các nghiệm nguyên của hai phương trình: $P(x) = 1$ và $P(x) = -1$.

Ta biết rằng đa thức bậc m và có không quá m nghiệm phân biệt, do đó nó cũng có không quá m nghiệm nguyên phân biệt. Theo nhận xét trên, nếu r là một nghiệm nguyên của phương trình này và s là một nghiệm nguyên của phương trình kia thì r và s khác nhau 0, 1 hoặc 2 đơn vị.

Nhưng ta có $s \geq r$, do đó ta được $s = r$, $s = r + 1$ hoặc $s = r + 2$.

Do vậy, ta suy ra rằng phương trình thứ hai chỉ có thêm vào nhiều nhất là 2 nghiệm phân biệt nữa.Vậy: $n \leq m + 2$.

Bài toán 19. 6: Tìm các nghiệm của đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x - 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x)$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

Ta có $(x + 2)(x^2 + x + 1)P(x - 1) = (x - 2)(x^2 - x + 1)P(x)$

Từ đây chọn : $x = -2$ suy ra $P(-2) = 0$, chọn $x = -1$ suy ra:

$P(-1) = 0$ (do $P(-2)=-9P(-1)$),

chọn x =0 suy ra P(0) = 0, chọn x =1 suy ra P(1) = 0.

Do đó $P(x)=x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với Q(x) là đa thức hệ số thực.

Thay P(x) vào đẳng thức ở đề bài ta được

$$[(x+2)(x^2+x+1)](x-1)(x-2)x(x+1)Q(x-1)$$

$=(x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+2)Q(x)$.

Suy ra

$(x^2+x+1)Q(x-1)=(x^2-x+1)Q(x),\forall x\neq 0,x\neq 1,x\neq -1,x\neq -2,x\neq 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{Q(x-1)}{x^2-x+1}=\dfrac{Q(x)}{x^2+x+1},\forall x\neq 0,x\neq 1,x\neq -1,x\neq 2,x\neq -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1}=\dfrac{Q(x)}{x^2+x+1},\forall x\neq 0,x\neq 1,x\neq -1,x\neq -2,x\neq 2$

Đặt $R(x)=\dfrac{Q(x)}{x^2+x+1}$, ta có $R(x)=R(x-1),\forall x\neq 0,x\neq 1,x\neq -1,x\neq 2,x\neq -2$.

Suy ra $R(x)\equiv C$ (hằng số), nên $Q(x)\equiv C(x^2+x+1)$.

Do đó $P(x)=Cx(x-1)(x+1)(x+2)$ .Thử lại :

$(x+2)(x^2+x+1)C(x^2-x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)$

$=(x-2)(x^2-x+1)C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)$ (thoả mãn).

Vậy $P(x)=Cx(x-1)(x+1)(x+2)$ nên có 4 nghiệm x= 0; ± 1, –2.

Bài toán 19. 7: Tìm a để phương trình: $16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Gọi 4 nghiệm phân biệt lập cấp số nhân y, ym, ym^2, ym^3 với

$y\neq 0$, $m\neq \pm 1$, $m\neq 0$. Với $A=\dfrac{a}{16}$, theo Viete.

$y(1+m+m^2+m^3)=A$ (1)

$y^2(m+m^2+2m^3+m^4+m^5)=2A+\dfrac{17}{16}$ (2)

$y^3(m^3+m^4+m^5+m^6)=A$ (3)

Ta có: $m\neq -1$ vì nếu m = –1 thì phương trình có 2 nghiệm trùng nhau là $y=ym^2$ trái với bài ra.

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $y(m+1)(m^2+1)=A\neq 0$

Chia (3) cho (1) vế theo vế: $y^2m^3=1$ (4)

Suy ra $m^3>0$, m > 0. Thay (4) vào (2) được:

$y^2(m+m^2+m^4+m^5)=2A-\dfrac{15}{16}>0$ (2')

Vì m > 0, $y^2 > 0$, do đó A > 0. Từ (1) suy ra y > 0.

Từ (4) ta có: $\sqrt[3]{y} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$.Đặt: $\sqrt{m} = v$ thì $y = v^{-3}$

Thay vào (2) và (2') được: $v^{-3}(1 + v^2 + v^4 + v^6) = A$ (5)

rồi biến đổi thì được phương trình:

$$\frac{1}{8}(v-2)(v-\frac{1}{2})(2v^2+3v+2)\left[2v^2-(1+\sqrt{2})v+2\right]\left[2v^2+(\sqrt{2}-1)v+2\right]=0$$

$$\left[2v^2+(\sqrt{2}-1)v+2\right]=0$$

Ta có: $2v^2 + 3v + 2 > 2v^2 - (1 + \sqrt{2})v + 2 > 0$,

$2v^2 + (\sqrt{2} - 1)v + 2 > 0$ (do các biệt số đều âm) nên:

$(v - 2)(v - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow v = 2$ hoặc $v = \frac{1}{2}$

Thay vào (5) thì có: $A = \dfrac{170}{16}$ suy ra: a = 170.

Đảo lại a = 170 thì phương trình: $16x^4 - 170x^3 + 357x^2 - 170x + 6 = 0$ có 4 nghiệm $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$, 2, 8 phân biệt lập cấp số nhân có công bội là 4. Vậy a = 170.

Bài toán 19. 8: Tìm a, b nguyên sao cho phương trình:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \qquad (1)$$

có 2 trong số các nghiệm có tích bằng –1.

Hướng dẫn giải

Giả sử có 2 số nguyên a, b mà phương trình

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có 2 nghiệm u, v với $u.v \in \mathbf{Z}$ và $u.v \neq 1$.

Để ý rằng nếu x là 1 nghiệm thì $x \neq 0$ và $\frac{1}{x}$ cũng là nghiệm.

Như vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: u, v, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$

Theo định lý Viet ta có: $u + v + \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{(u+v)(uv+1)}{uv} = -a$ (2)

và $u.v + \dfrac{v}{u} + \dfrac{u}{v} + \dfrac{1}{u.v} + 2 = u.v + \dfrac{(u+v)^2+1}{u.v} = b$ (3)

Ta sẽ chứng minh u.v = –1.

Giả sử $u.v \neq -1$. Từ (2) và (3) ta suy ra u + v hữu tỉ và $(u + v)^2 \in \mathbf{Z}$ nên $(u + v) \in \mathbf{Z}$ và cả hai (u + v), $(u + v)^2 + 1$ đều chia hết cho u.v.

Nhưng $[(u + v), (u + v)^2 + 1] = 1$, nên suy ra hoặc u.v = 1 hoặc u.v = –1. Điều này mâu thuẫn với $u.v \neq \pm 1$.

Vậy u.v = –1 và do đó a = 0, $b = -(u + v)^2 - 2 \leq -2$.

Ngược lại nếu a = 0, $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq -2$.

Phương trình (1) trở thành: $x^4 + bx^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm:

$$u = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}}, \quad v = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}}$$

Thoả mãn: $u.v = -1 \in \mathbb{Z}$, $u.v \neq 1$.

Vậy các số nguyên a, b cần tìm là: a = 0, $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq -2$.

Bài toán 19. 9: Cho phương trình bậc 3: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh điều kiện cần và đủ để 3 nghiệm x_1, x_2, x_3:

a) Lập cấp số cộng là: $2p^3 - 9pq + 27r = 0$

b) Lập cấp số nhân là: $q^3 - rp^3 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$

Theo định lý Viete thì $x_1 + x_2 + x_3 = -p \Rightarrow x_2 = -\frac{p}{3}$

Nên: $\left(-\frac{p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = 0$.

Do đó: $2p^3 - 9pq + 27r = 0$.

Đảo lại nếu có $2p^3 - 9pq + 27r = 0$ thì phương trình nhận $x_2 = -\frac{p}{3}$ là nghiệm

nên $\left(x + \frac{p}{3}\right).(x^2 + \frac{2}{3}px + q - \frac{2}{9}p^2) = 0$

Khi đó: $x_1 + x_3 = -p + \frac{p}{3} = -\frac{2p}{3} = 2x_2$

Vậy x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng .

b) Giả sử 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập cấp số nhân nên $x_1x_3 = x_2^2$.

Theo định lý Viete thì:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 = q, x_2(x_1 + x_2 + x_3) = q$$

Mà $x_1 + x_2 + x_3 = -p$. Suy ra $x_2 = -\frac{q}{p}$

Nên: $\left(-\frac{q}{p}\right)^3 + p\left(-\frac{q}{p}\right)^2 + q\left(-\frac{q}{p}\right) + r = 0 \Rightarrow q^3 - rp^3 = 0$

Đảo lại nếu có $q^3 - rp^3 = 0$ thì phương trình nhận $x_2 = -\frac{q}{p}$ là một nghiệm của phương trình.

Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{q}{p})(x^2 + Mx + \frac{pr}{q}) = 0$

Khi đó $x_1x_3 = \frac{pr}{q} = (\frac{q}{p})^2 = x_2^2$ nên x_1, x_2, x_3 lập cấp số nhân

Bài toán 19. 10: Cho đa thức P(x) có bậc n > 1 có n nghiệm thực $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ x_n phân biệt. Chứng minh: $\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), a \neq 0$

Nên $P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x)$ với $P_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$.

Ta thấy $P_i(x_j) = 0$, $\forall j \neq i \Rightarrow P'(x_j) = P_j(x_j) \neq 0$, $\forall j = \overline{1,n}$

Xét đa thức: $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P'(x_i)} - 1$ có bậc không vượt quá n – 1.

Với $i = \overline{1,n}$ ta có: $F(x_i) = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$

$\Rightarrow$ F(x) có n nghiệm phân biệt $\Rightarrow F(x) \equiv 0$

Mà hệ số của F(x) đối với x^{n-1} bằng 0

Nên $\frac{a}{P'(x_1)} + \frac{a}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{a}{P'(x_n)} = 0$

Vậy: $\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$ (đpcm).

Bài toán 19. 11: Giả sử a và b là 2 trong 4 nghiệm cuả đa thức: $x^4 + x^3 - 1$. Chứng minh tích ab là nghiệm cuả đa thức: $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử a, b, c, d là 4 nghiệm cuả đa thức: $x^4 + x^3 - 1$

$P(x) = x^4 + x^3 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \Rightarrow abcd = -1$

Ta cần chứng minh: Q(ab) = 0 với:

$$Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^3 + x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})$$

$$\Rightarrow Q(ab) = (ab)^3.\left[(ab)^3 + (ab) + 1 - \frac{1}{ab} - \frac{1}{(ab)^3}\right]$$

$$= (ab)^3.\left[(ab)^3 + ab + 1 + cd + (cd)^3\right]$$

Do đó: $Q(ab) = 0 \Leftrightarrow (ab)^3 + ab + 1 + cd + (cd)^3 = 0$

Thật vậy: $P(a) = 0 \Rightarrow a^4 + a^3 = 1 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{a+1}$,

Tương tự $b^3 = \frac{1}{b+1}$ nên: $a^3b^3 = \frac{1}{(a+1)(b+1)} = -(1 + c)(1 + d)$

Tương tự: $c^3d^3 = -(1 + a)(1 + b)$ suy ra:

$(ab)^3 + ab + 1 + cd + (cd)^3 = -(1 + c)(1 + d) + ab + 1 + cd - (1 + a)(1 + b)$

$= -1 - a - b - c - d = 0$. Vậy: $Q(ab) = 0$ (đpcm)

Bài toán 19. 12: Cho $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hệ số nguyên. Chứng minh nếu P(x) có một nghiệm bằng tích 2 nghiệm còn lại thì:

$$2P(-1) \,\vdots\, P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)).$$

Hướng dẫn giải

Gọi 3 nghiệm là u, v, u.v theo định lý Viete:

$u + v + uv = -a,\ uv(1 + u + v) = b,\ u^2v^2 = -c$

- Xét a = 1 thì $0 = u + v + uv + 1 = (u + 1)(v + 1)$ nên có nghiệm bằng -1 do đó $2P(-1) = 0$ chia hết cho mọi số.
- Xét $a \neq 1$ thì $b - c = uv(1 + u + v + uv) = uv(1 - a)$

Nên $uv = \frac{b-c}{1-a}$ hữu tỉ.

Do $u^2v^2 = -c$ nguyên nên uv nguyên

Ta có: $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)) = 2(a - 1)$

$= -2(u + v + uv + 1) = -2(1 + u)(1 + v) \neq 0$

Và $2P(-1) = 2(-1 - u)(-1 - v)(-1 - uv)$

$= -2(1 + uv)(1 + u)(1 + v)$

Do đó: $2P(-1) \,\vdots\, P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$.

Bài toán 19. 13: chứng minh phương trình:

a) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương.

b) $x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm.

c) $x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 - 9x + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm dương và ít nhất 1 nghiệm âm.

Hướng dẫn giải

Sử dụng qui tắc dấu Đề các.

a) Dãy các dấu của các hệ số là + – + + –

Gọi L là số lần đổi dấu hệ số và D là số nghiệm dương thì:

$L = 3 \Rightarrow 3 = D + 2k$

Do đó D = 3 hoặc 1 hay $D \geq 1$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương.

b) Dãy các dấu của các hệ số là + – – + nên: $L = 2 \Rightarrow 2 = D + 2k$.

Do đó D = 0 hoặc D = 2.

Mặt khác f(0) = 1, f(1) = –2 nên f(0). f(1) < 0 do đó phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong (0,1).

Vậy D > 0 do đó D = 2 nên phương trình có 2 nghiệm dương .

Rõ ràng f(x) > 0 nếu x < 0 nên phương trình chỉ có 2 nghiệm dương không có nghiệm âm.

c) Dãy các dấu của các hệ số là + – – – – + nên:

L = 2. Thành thử D = 0 hoặc D = 2.

Vì f(0) = 1 và f(1) < 0 nên phương trình có nghiệm dương trong (0,1).

Vậy D > 0 do đó D = 2.

Xét $g(x) = f(-x) = -x^5 - 2x^4 + 8x^3 - x^2 + 9x + 1$

Dãy các dấu của các hệ số của g(x) là: – – + – + +

$\Rightarrow$ L = 3 do đó phương trình g(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm dương nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm âm.

Bài toán 19. 14: Cho $f \in \mathbf{R}[x]$, deg f = n. Giả sử a < b mà f(a).f(b) < 0. Chứng minh f(x) có một số lẻ các nghiệm trong khỏang (a, b) kể cả bội. Còn nếu f(a).f(b) > 0 thì f(x) có một số chẵn các nghiệm trong (a,b).

Hướng dẫn giải

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ là các nghiệm cuía f(x) với các bội tương ứng là k_1, $k_2, \ldots, k_s$. Khi đó: $f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s}.g(x)$

Trong đó g(x) không có nghiệm trong (a, b) nên đa thức g(x) giữ nguyên dấu trong (a,b). Giả sử g(x) > 0 với mọi $x \in [a,b]$.

Ta có f(b). g(b) > 0 và f(a). g(a). $(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_s} > 0$.

Vì f(a) trái dấu với f(b) và g(a) cùng dấu với g(b) do đó f(a) trái dấu với g(a). Thành thử tổng $k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ là số lẻ.

Chứng minh tương tự khi f(a). f(b) > 0.

Bài toán 19. 15: Cho đa thức P(x) bậc n và 2 số a < b thoả:

$P(a) < 0, -P'(a) \le 0, P''(a) \le 0, \ldots, (-1)^n P^{(n)}(a) \le 0$

$P(b) > 0, P'(b) \ge 0, P''(b) \ge 0, \ldots, P^{(n)}(b) \ge 0$

Chứng minh các nghiệm thực của P(x) thuộc (a,b).

Hướng dẫn giải

Khai triển Taylor ta có:

$$P(x) = P(b) + \frac{P'(b)}{1!}(x-b) + \frac{P''(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

Nếu $x \ge b \Rightarrow P(x) > 0 \Rightarrow P(x)$ không có nghiệm $x \ge b$.

Tương tự: $P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$= P(a) + \frac{-P'(a)}{1!}(a-x) + \frac{P''(a)}{2!}(a-x)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n.P^{(n)}(a)}{n!}(a-x)^n$$

Nếu $x < a \Rightarrow P(x) < 0 \Rightarrow P(x)$ không có nghiệm $x \le a$

Vậy các nghiệm phải thuộc (a,b)

Bài toán 19. 16: Cho $f(x)$ là đa thức bậc n có các hệ số bằng ± 1. Biết rằng đa thức có x =1 là nghiệm bội cấp m với $m \ge 2^k$, $k \ge 2$, k nguyên. Chứng minh rằng $n \ge 2^{k+1} - 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $\bar{f}$ là đa thức với các hệ số theo modulo 2. Vì f(x) có các hệ số là 1 và –1 nên $\bar{f}(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$

Ta có $f(x) = (x-1)^{2^k} g(x)$ trong đó g(x) là đa thức có hệ số nguyên.

Dễ dàng chứng minh được rằng $C_{2^k}^i \equiv 0 \pmod{2}$, $1 \le i \le 2^k - 1$

nên $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = \left(x^{2^k} + 1\right)\bar{g}(x)$ (*)

Giả sử $\bar{g}(x)$ có bậc không quá $2^k - 2$.

Ta có hệ số của $x^{2^k - 1}$ ở vế phải của (*) là 0. Điều này mâu thuẫn vì hệ số vế trái của (*) là 1. Do đó, bậc của $\bar{g}(x)$ không nhỏ hơn $2^k - 1$.

Vậy $n \ge 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$.

Bài toán 19. 17: Cho đa thức $P(x) = rx^3 + qx^2 + px + 1$ trong đó p, q, r là các số thực với r > 0. Xét dãy số (a_n), *n = 0, 1, 2, …* xác định như sau

$$a_0 = 1, a_1 = -p, a_2 = p^2 - q$$
$$a_{n+3} = -pa_{n+2} - qa_{n+1} - ra_n \ (n \ge 0).$$

Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực và không có nghiệm bội thì dãy (a_n) có vô số số âm.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện đề bài suy ra phương trình đặc trưng của phương trình sai phân $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ có 1 nghiệm thực âm và hai nghiệm phức liên hợp.

Giả sử ba nghiệm đó là –a, $R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ với a > 0, R > 0, $0 < \alpha < \pi$ thì $a_n = C_1(-a)^n + C_2R^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + C_3R^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$ trong đó C_1, C_2, C_3 là các hằng số nào đó, C_2, C_3 là các số phức liên hợp.

Đặt $C_2 = R^*(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $\varphi \in [0, 2\pi)$, ta có

$a_n = C_1(-a)^n + R^n(R^*(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos n\alpha + i\sin n\varphi)$
$+ R^*(\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos n\alpha - i\sin n\varphi)$
$= C_1(-a)^n + 2R^nR^*(\cos(n\alpha + \varphi))$

Giả sử ngược lại tồn tại n sao cho $a_n \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$.

Khi đó ta có $0 \leq a_{n+1} + aa_n$
$= 2R^{n+1}R^*(\cos((n+1)\alpha + \varphi)) + a2R^nR^*(\cos(n\alpha + \varphi))$
$= 2R^nR^*(R\cos((n+1)\alpha + \varphi) + a\cos(n\alpha + \varphi))$
$= 2R^nR^*.C.\cos(n\alpha + \varphi^*)$ $(C > 0, \varphi^* \in [0, 2\pi))$ với mọi $n \geq n_0$.

Điều này không xảy ra vì $0 < \alpha < \pi$ nên tồn tại vô số n sao cho:

$$n\alpha + \varphi^* \in (\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi).$$

Bài toán 19. 18: Cho phương trình: $x^3 - x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Tính tổng lũy thừa bậc 8 của 3 nghiệm đó.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Viete: phương trình: $x^3 - x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1$ và $x_1x_2x_3 = -1$.

Ta có: $x_i^3 - x_i + 1 = 0 \Rightarrow x_i^3 = x_i - 1$

$\Rightarrow x_i^5 = x_i^3 - x_i^2 = -x_i^2 + x_i - 1$

Nên: $x_i^8 = 2x_i^2 - 3x_i + 2$

Do đó: $T = \sum x_i^8 = 2\sum x_i^2 - 3\sum x_i + 6 = 2[(\sum x_i)^2 - 2\sum x_ix_j] - 3\sum x_i + 6$, $i \neq j = 10$.

Bài toán 19. 19: Giả sử đa thức $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ có 5 nghiệm r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Đặt $Q(x) = x^2 - 2$. Tính tích: $Q(r_1). Q(r_2). Q(r_3). Q(r_4). Q(r_5)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P(x) = x^5 + x^2 + 1 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5)$

Và $Q(r_1) . Q(r_2) . Q(r_3) . Q(r_4) . Q(r_5)$
$= (r_1^2 - 2)(r_2^2 - 2)(r_3^2 - 2)(r_4^2 - 2)(r_5^2 - 2)$
$= (\sqrt{2} - r_1)(\sqrt{2} - r_2)(\sqrt{2} - r_3)(\sqrt{2} - r_4)(\sqrt{2} - r_5)$
$(-\sqrt{2} - r_1)(-\sqrt{2} - r_2)(-\sqrt{2} - r_3)(-\sqrt{2} - r_4)(-\sqrt{2} - r_5)$
$= P(\sqrt{2}). P(-\sqrt{2})$
$= ((\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^2 + 1). ((-\sqrt{2})^5 + (-\sqrt{2})^2 + 1)$
$= (4\sqrt{2} + 3) . (-4\sqrt{2} + 3) = 9 - 32 = -23.$

Bài toán 19. 20: Chứng tỏ đa thức: $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1$ (1) có đúng 5 nghiệm x_i, $i = \overline{1,5}$. Tính tổng $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1$ thì f(x) là hàm số liên tục trên R.

Ta có: $f(-2) = -5 < 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} > 0$, $f(3) = \frac{175}{2} > 0$.

Phương trình f(x) = 0 có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho:

$$-2 < x_1 < -\frac{3}{2} < x_2 < 0 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4 < 1 < x_5 < 3$$

Hơn nữa, vì f(x) = 0 là phương trình bậc năm nên có đúng 5 nghiệm.
Ta có x_i là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_i^5 - \frac{1}{2}x_i^4 - 5x_i^3 + 4x_i - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 2(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i)$$

Do đó: $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i)}$

Xét biểu thức $g(x) = \frac{x+1}{5x^3 - x^2 - 4x} = \frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Ta có: $\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{5x+4}$ nên đồng nhất được:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)} = -\frac{1}{4x} + \frac{2}{9(x-1)} + \frac{5}{36(5x+4)}$$

Do đó $S = -\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}}$

Mà $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

Vậy $x \neq x_i (i = \overline{1,5})$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$

và $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$, do đó:

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1 - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} = -\frac{f'(1)}{f(1)} = -12$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = 4$$

$$\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(-\frac{4}{5})} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-\frac{4}{5}-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+\frac{4}{5}} = -\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(-\frac{4}{5})} = -\frac{12900}{4789}$$

Vậy $S = -\dfrac{8959}{4789}$.

Bài toán 19. 21: Cho $ab \neq 0$. Chứng minh phương trình:
$x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số: $y = x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3)$, $D = \mathbf{R}$

Ta chứng minh hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ} . y_{CT} < 0$

$y' = 3x^2 - 3(a^2 + b^2)$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, $(S = 0, P = a^2 + b^2)$

Vì y' bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt nên có CĐ và CT.

Lấy y chia y' ta có: $y = \frac{1}{3}x \cdot y' - 2(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3)$

$\Rightarrow y_{CĐ}.y_{CT} = (-2(a^2 + b^2)x_1 + 2(a^3 + b^3))$
$(-2(a^2 + b^2)x_2 + 2(a^3 + b^3))$

$= 4(a^3 + b^3)^2 - 4(a^2 + b^2)^3$

$= -4a^2b^2(3a^2 + 3b^2 - 2ab)$

$= -4a^2b^2[2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2] < 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 19. 22: Cho phương trình $ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực:

$$4(ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001)(3ax + 27) = (3ax^2 + 54x + 12)^2,\ a \neq 0$$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001$

Ta có: $2f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$

Đặt $g(x) = 2f(x) . f''(x) - [f'(x)]^2$. Ta có $g'(x) = 2f(x). f'''(x)$

Gọi 3 nghiệm của f(x) là α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ ta có:

$g'(x) = 12a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$g(\beta)$	↘	$g(\gamma)$	↗	$+\infty$

Vì $f'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow g(\alpha) = -[f'(x)]^2 < 0$

Tương tự ta có: $g(\beta) < 0$ và $g(\gamma) < 0$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm thực.

Bài toán 19. 23: Cho $f \in R[x]$, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

Chứng minh nếu: $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{1} = 0$ thì f có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét $Q(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_0}{1}x$

thì $Q'(x) = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

Ta có $Q(0) = Q(1) = 0$. Áp dụng định lý Role thì $Q(x)$ có 2 nghiệm nên $Q'(x) = f(x)$ có nghiệm .

Bài toán 19. 24: Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$ có n nghiệm phân biệt. Chứng minh: $f(x) - f'(x) = 0$ cũng có n nghiệm phân biệt và:

$$(n-1)\, a^2_1 > 2na_0a_2.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x) = e^{-x} f(x)$.

Vì $f(x) = 0$ có n nghiệm $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ nên $g(\alpha_i) = 0, i = 1, 2, ..., n$.

Theo định lý Role trong mỗi khỏang (α_i, α_{i+1}) $(i = 1,2, ..., n-1)$ thì tồn tại β_i để $g'(\beta_i) = 0$.Mặt khác : $g'(x) = e^{-x}[f(x) - f'(x)]$.

Suy ra $f(x) - f'(x)$ có $n - 1$ nghiệm $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}$ và do đó $f(x) - f'(x) = 0$ có đủ n nghiệm.

Vì f(x) có n nghiệm phân biệt nên theo định lý Role thì: $f'(x)$ có $n - 1$ nghiệm nghiệm; $f''(x)$ có $n - 2$ nghiệm , ...

$\Rightarrow f^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}a_0x^2 + (n-1)!\, a_1x + (n-2)!\, a_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó: $\Delta > 0$ nên: $((n-1)!\, a_1)^2 - 2n!\, a_0(n-2)!\, a_2 > 0$

Vậy $(n-1)a^2_1 > 2na_0.a_2$.

Bài toán 19. 25: Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức với các hệ số thực, có $a_0 \neq 0$ và thoả mãn đẳng thức sau với $\forall x \in R$: $f(x).\, f(2x^2) = f(2x^3 + x)$ (*). Chứng minh f(x) không có nghiệm số thực.

Hướng dẫn giải

Từ (*) nhận thấy nếu x_0 là nghiệm thực của f(x) thì tất cả các số thực:

$x_n = 2x^3_{n-1} + x_{n-1}$; $n = 1,2,3, ...$ cũng sẽ là nghiệm của f(x).

Hơn nữa dễ dàng nhận thấy:

$x_0 < 0$ thì $x_0 > x_1 > x_2 ... > x_n > x_{n+1} > ...$ và :

với $x_0 > 0$ thì $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} < ...$

Từ đó suy ra nếu f(x) có 1 nghiệm thực khác 0 thì f(x) sẽ có vô số nghiệm thực khác nhau. Tuy nhiên f(x) chỉ có tối đa n nghiệm thực, do f(x) là đa thức bậc n với các hệ số thực. Mâu thuẫn, chứng tỏ f(x) không có nghiệm thực khác 0.

Ta chứng minh $f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_n \neq 0$.

Giả sử $a_n = 0$. Gọi k là chỉ số lớn nhất thoả $a_k \neq 0$.

Do vậy: $g(x) = f(x) . f(2x^2) = a^2_0 2^n . x^{3n} + ... + a^2_k 2^{n-k} . x^{3(n-k)}$

$h(x) = f(2x^3 + x) = a_0 2^n x^{3n} + ... + a_k x^{n-k}$

Vì $n - k > 0 \Rightarrow 3(n - k) > n - k$.

Do đó $g(x) \equiv h(x) \Rightarrow a_k = 0$ (mâu thuẫn). Nên $a_n \neq 0$

Vậy f(x) không có nghiệm số thực.

Bài toán 19. 26: Cho 2 cấp số cộng (a_n), (b_n) và số m nguyên dương, m >2. Xét m tam thức bậc hai: $p_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$ với k =1,2,..,m. Chứng minh nếu $p_1(x)$ và $p_m(x)$ không có nghiệm số thực thì các tam thức còn lại cũng không có nghiệm số thực

Hướng dẫn giải

Ta có tam thức bậc hai: $p_1(x)$ và $p_m(x)$ không có nghiệm số thực thì $p_1(x)$ và $p_m(x)$ đều luôn luôn dương với mọi x.

Giả sử tồn tại $p_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$ với k =2,3,..,m–1 có nghiệm số thực x = c.

Gọi a, b là công sai của hai cấp số cộng (a_n), (b_n).

Ta có $p_m(x) - p_k(x) = (m-k)(ax + b)$ và $p_k(x) - p_1(x) = (m-k)(ax + b)$

Do đó $p_m(c) = (m - k)(ac + b)$ và $p_1(c) = -(k - 1)(ac + b)$ nên $p_m(c). p_1(c) < 0$: vô lý.

Vậy các tam thức còn lại cũng không có nghiệm số thực

Bài toán 19. 27: Cho các đa thức $P_k(x)$, k = 1,2,3,... xác định bởi:

$$P_1(x) = x^2 - 2,\ P_{i+1} = P_1(P_i(x)),\ i = 1,2,3,...$$

Chứng minh rằng $P_n(x) = x$ có 2^n nghiệm thực phân biệt nhau.

Hướng dẫn giải

Ta thu hẹp việc xét nghiệm của phương trình trên đoạn $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt x = 2cost,

Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được: $P_n(x) = 2\cos 2^n t$

và phương trình $P_n(x) = x$ trở thành : $\cos 2^n t = \cos t$

Từ đó ta được 2^n nghiệm: $t = \dfrac{2k\pi}{2^n - 1}, t = \dfrac{2k\pi}{2^n + 1}$, k = 1,2, ..., n

Suy ra rằng phương trình $P_n(x) = x$ có 2^n nghiệm thực phân biệt.

Bài toán 19. 28: Chứng minh rằng nếu đa thức P(x) bậc n có n nghiệm thực phân biệt thì đa thức P(x) + P'(x) cũng có n nghiệm thực phân biệt.

Hướng dẫn giải

Giả sử P(x) có đúng n nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2 < ... < x_n$

Đặt $f(n) = e^x.P(x)$ thì $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n) = 0$

Do $f'(x) = e^x(P(x) + P'(x))$ nên theo định lí Rolle, tồn tại $n - 1$ số thực phân biệt $y_1, y_2 ... y_{n-1}$ thoả mãn: $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ sao cho $f'(y_1) = f'(y_2) = ... = f'(y_{n-1}) = 0$

Vì $e^x > 0$ với mọi x nên ta có $n - 1$ nghiệm của $G(x) = P(x) + P'(x)$

Ta sẽ chứng minh G(x) còn có một nghiệm $y_0 < x_1$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử hệ số cao nhất của P(x) là 1.

Xét degP = n chẵn, ta thấy G(x) là một hàm đa thức bậc chẵn thì : $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$.

Ta có: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) ... (x - x_n)$ nên

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) + (x - x_3)...(x - x_n)(x - x_1) + ...+ (x - x_{n-1})(x - x_1)...(x - x_{n-2})$$

$\Rightarrow P'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n) < 0$

Do vậy: $G(x_1) = P(x_1) + P'(x_1) = P'(x_1) < 0$

Suy ra tồn tại $y_0 \in (-\infty; x_1)$ sao cho $G(y_0) = 0$

Xét degP = n lẻ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$ và tính tương tự ta có $G(x_1) > 0$ nên tồn tại $y_0 \in (-\infty; x_1)$ sao cho $G(y_0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 19. 29: Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ có n nghiệm thực. Chứng minh với $\forall p > n-1$ thì đa thức

$$g(x) = a_0 + a_1.p.x + a_2.p(p-1)x^2 + ... + a_np(p-1)...(p-n+1).x^n$$

cũng có n nghiệm thực.

Hướng dẫn giải

Để giải bài toán ta xét hai trường hợp

– Trường hợp 1: f(x) không nhận x = 0 làm nghiệm

Ta chứng minh bằng quy nạp

Với n = 1 bài toán hiển nhiên đúng

Giả sử đúng với n = k, ta chứng minh đúng với n = k+1, tức là

Nếu đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{k+1}x^{k+1}$ có k+1 nghiệm thực khác 0 thì đa thức $g(x) = a_0 + p.a_1.x + ... + p(p-1) ... (p-k).a_{k+1}.x^{k+1}$ cũng có k+1 nghiệm thực khác 0 với mọi p > k.

Gọi c là một nghiệm của f(x) thì $f(x) = (x - c).\ q(x)$ (1)

Với: q(x) là đa thức bậc k của x:

$q(x) = b_0 + b_1.x + ... + b_k.x^k$ (2)

Thay (2) vào (1), đồng nhất hệ số ta được:

$a_0 = c.b_0;\ a_1 = c.b_1 + b_0;\ ...;\ a_k = c.b_k + b_{k-1};\ a_{k+1} = b_k$

Do đó $g(x) = a_0 + p.a_1.x + ... + p.(p-1) ... (p-k)a_{k+1}.x^{k+1}$

$= c.b_0 + p(c.b_1 + b_0)x + ... + p(p-1) .. (p-k).b_k.x^{k+1}$

$= c.Q(x) + p.x.Q(x) - x^2.Q(x)$ (3)

Trong đó $Q(x) = b_0 + b_1.p.x + ...+p(p-1) ... (p-k+1).b_k.x^k$

Do f(x) có k+1 nghiệm thực khác 0 nên q(x) có k nghiệm thực khác 0. Mặt khác p > k nên p > k–1. Cho nên theo giả thiết quy nạp ta có đa thức Q(x) có k nghiệm thực.Do đó g(x) có k+1 nghiệm thực.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, bài toán đúng.

– Trường hợp 2: f(x) nhận x = 0 làm nghiệm.

Giả sử x = 0 là nghiệm bội k của f(x), ($k \in \mathbf{Z}^+$, $k \le n$).

Khi đó ta có: $f(x) = a_k.x^k + ... + a_n.x^n = (a_n.x^{n-k} + ... + a_k)x^k$

và $g(x) = p(p-1) ... (p-k+1)a_k.x^k + ... + p(p-1) ... (p-n+1)a_n .x^n$

$= p(p-1)...(p-k+1).x^k[a_k + ...+ (p-k)...(p-n+1).a_n.x^{n-k}]$

Vì f(x) có n nghiệm thực nên

$H(x) = a_k + ... + a_n.x^{n-k}$ có (n–k) nghiệm thực khác 0.

Do đó áp dụng kết quả của trường hợp 1 cho H(x) và:

p' = p–k > n–k–1 (do p > n–1), ta được đa thức:

$R(x) = ak + ... + (p-k) ... (p-n+1).a_n.x^{n-k}$ có n–k nghiệm thực.

Vậy g(x) có n nghiệm thực (đpcm)

Bài toán 19. 30: Cho k = 1,2,...,n; p là số dương bất kỳ .Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+a_n$ với hệ số thực (hoặc phức) có modun không vượt quá:

a) $1 + \max\left|\dfrac{a_k}{a_0}\right|$ b) $p + \max\left|\dfrac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right|$,

c) $2\max\sqrt[k]{\left|\dfrac{a_k}{a_0}\right|}$, d) $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right| + \max\sqrt[k-1]{\left|\dfrac{a_k}{a_1}\right|}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+a_n$

$= a_0x^n(1 + \dfrac{a_1}{a_0x} + ... + \dfrac{a_n}{a_0x^n})$

Gọi $A = \max\left|\dfrac{a_k}{a_0}\right|$. Với nghiệm $|x| \le 1$ là hiển nhiên $|x| \le 1 + A$,

Với nghiệm $|x| > 1$ thì:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -1 = \frac{a_1}{a_0}.\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}.\frac{1}{x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0}.\frac{1}{x^n}$$

$$\Rightarrow 1 \le A\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x^2|} + ... + \frac{1}{|x^n|}\right) = \frac{A}{|x|}.\frac{1-\dfrac{1}{|x^n|}}{1-\dfrac{1}{|x|}} \le \frac{A}{|x|}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{|x|}}$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{A}{|x|-1} \Rightarrow A \ge |x| - 1 \Rightarrow |x| \le 1 + A.$$

b) Ta có: $\frac{1}{p^n.}f(x) = a_0\left(\frac{1}{p.}\right)^n + \frac{a_1}{p}\left(\frac{x}{p.}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{p.}$

Theo câu a), mọi nghiệm x của đa thức đều phải có:

$$\frac{|x|}{p} \le 1 + \max\left|\frac{a_k}{a_0p^k}\right| \Leftrightarrow |x| \le p + \max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right|$$

c) Đặt $p = \max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$ khi đó:

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \le pk \Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le p \text{ nên } \max\left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le p$$

Do đó, theo câu b), modun tất cả nghiệm không vượt quá

$$|x| \le p + \max\left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le 2p = 2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$$

d) Đặt $p = \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$, khi đó $|a_k| \le a_1.p^{k-1}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \Rightarrow \max\left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right|$$

Theo câu b), nghiệm của đa thức không vượt quá

$$|x| \le p + \max\left|\frac{a_k}{a_0.p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}.$$

Cho 2 + 2n số a_i, b_i thoả: $0 < b_0 \le |a_0|$, $b_i \ge |a_i|$ với i = 1,..., n.

Bài toán 19. 31: Chứng minh các nghiệm nếu có cuả đa thức $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ có giá trị tuyệt đối không vượt quá nghiệm dương duy nhất x_0 của phương trình: $b_0x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

$g(x) = b_0x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n$

Ta có: $g(x) = x^n(b_0 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} - \ldots - \frac{b_n}{x^n}) = x^n.h(x)$.

Thì $h'(x) = \dfrac{b_1}{x^2} + \dfrac{2b_2}{x^3} + \ldots + \dfrac{nb_n}{x^{n+1}} \ge 0$ do $b_i \ge |a_i| \ge 0$.

Nên h(x) tăng trên $(0, +\infty)$ và nhận giá trị thuộc $(-\infty, b_0)$.

Do đó g(x) có 1 nghiệm dương duy nhất x_0.

Và khi $x > x_0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Ta có $|f(x)| = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|$

$\ge |a_0x^n| - |a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|$

$\ge |a_0x^n| - |a_1x^{n-1}| - \ldots - |a_n|$

$= |a_0| . |x|^n - |a_1| . |x^{n-1}| - \ldots - |a_n|$

$\ge b_0 . |x|^n - b_1 . |x|^{n-1} - \ldots - |a_n|$

$= g(|x|)$

Nên với nghiệm x nếu có của f(x) thì $x \le x_0$.

Bài toán 19. 32: Cho đa thức: $P(x) = 1 + x^2 + x^9 + x^{n_1} + \ldots + x^{n_s} + x^{1992}$ với $n_1, \ldots n_s$ là các số tự nhiên thoả mãn: $9 < n_1 < \ldots < n_s < 1992$. Chứng minh nghiệm của đa thức P(x) (nếu có) không thể lớn hơn $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x) = 1 + x^2 + x^9 + x^{n_1} + \ldots + x^{n_s} + x^{1992}$

Với $x \ge 0$ thì $P(x) \ge 1 > 0$.

Ta sẽ chứng minh $P(x) > 0$ với $\forall x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0)$

Thật vậy với $x < 0$ và $x \ne -1$ ta có:

$P(x) \ge 1 + x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2k+1} + \ldots + x^{1991}$

$= 1 + x.\dfrac{(x^{1990} + x^{1988} + \ldots + 1).(1-x^2)}{(1-x^2)}$

$= 1 + x\dfrac{1-x^{996}}{1-x^2} = \dfrac{1-x^2+x-x^{997}}{1-x^2}$

Mà với $x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0)$ thì $1-x^2 > 0$; $-x^{997} > 0$, $1-x^2+x > 0$

nên $P(x) > 0$ với $\forall x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0)$.

Vậy $P(x) > 0$ với $x \in (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; +\infty)$ (đpcm).

Bài toán 19. 33: Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có 3 nghiệm dương x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}$

Hướng dẫn giải

Theo Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Ta có: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{a} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Và $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2}{3a^2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Do đó: $0 < \frac{b^2c}{3a^3} \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \Rightarrow 0 < \frac{b^2c}{9a^3} \leq (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$

Vì $x_1, x_2, x_3 > 0$ nên:

$$\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\right)^2 = (x_1^{\frac{1}{2}}.x_1^{\frac{7}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}.x_2^{\frac{7}{2}} + x_3^{\frac{1}{2}}.x_3^{\frac{7}{2}})^2$$

$$\leq\left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^4c^2}{81a^6} \leq -\frac{b}{a}\left(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7\right) \Rightarrow \quad -\frac{b^3c^2}{81a^5} \leq \left(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}$.

Bài toán 19. 34: Cho số thực a và số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng nếu z là nghiệm phức của đa thức $X^{n+1} - X^2 + aX + 1$ thì $|z| > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Do z là nghiệm của đa thức $P(X) = X^{n+1} - X^2 + aX + 1$

nên $r^{n+1}\left[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\right] - r^2\left[\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right]$

$$+ar\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) + 1 = 0 = 0 + 0i.$$

Từ đây đồng nhất phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo ta được

$$\begin{cases} r^{n+1}\cos(n+1)\varphi - r^2\cos 2\varphi + ra\cos\varphi + 1 = 0 & (1) \\ r^{n+1}\sin(n+1)\varphi - r^2\sin 2\varphi + ra\sin\varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

Nếu $\sin\varphi = 0$ thì z là số thực, mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $\cos\varphi = 0$ thì $|z| = 1 \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo giả sử $\sin\varphi \neq 0$ và $\cos\varphi \neq 0$.

Nhân hai vế của (1) với $\sin\varphi$, nhân hai vế của (2) $\cos\varphi$ rồi trừ nhau ta được $r^{n+1}\sin(n\varphi) - r^2\sin\varphi - \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow r^{n+1}\sin(n\varphi) = (r^2+1)\sin\varphi$.

Do đó $\frac{r^{n+1}}{r^2+1} = \left|\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\right|$.

Mà $\left|\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\right| \geq \frac{1}{n}$ nên $\frac{r^{n+1}}{r^2+1} \geq \frac{1}{n}$.

Mặt khác $r^2 + 1 \geq 2r \overset{\text{do } r>0}{\geq} r$

Suy ra $\frac{1}{n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^2+1} < \frac{r^{n+1}}{r} = r^n \Rightarrow r > \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \Rightarrow |z| = r > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 19. 35: Chứng minh: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Ta có: $x^3 = 2 + 4 + 3\sqrt[3]{8}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

nên $x^3 = 6 + 6x \Leftrightarrow x^3 - 6x - 6 = 0$

Giả sử x hữu tỉ mà $a_0 = 1 \Rightarrow$ x là số nguyên.

Và $2 < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 4$ nên x = 3.

Do đó: $x^3 - 6x - 6 = 3 \neq 0$: vô lý. Vậy x là số vô tỉ.

Bài toán 19. 36: Tìm a, b để $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + ax - b$ chia hết cho $(x-1)^2$. Chứng minh khi đó f(x) không chia hết cho $(x-1)^3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) \vdots (x-1)^2$ nên f có nghiệm bội $k \geq 2$

$\Rightarrow f(1) = 0$ và $f'(1) = 0$

$\Rightarrow 2 + a + b + a - b = 0$ và $8 + 3a + 2b + a = 0$

Vậy $a = -1$ và $b = -2$.

Do đó $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$, $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

$f''(x) = 24x^2 - 6x - 4$

Vì $f''(1) = 14 \neq 0$ nên f(x) không chia hết cho $(x-1)^3$.

Bài toán 19. 37: Giả sử $c^n - d^n = (c+d)^n, n \in N, n > 1$.

Chứng minh rằng $cd(c+d) = 0$.

Hướng dẫn giải

Nếu $c = 0$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu $c \neq 0$, ta xét đa thức $P(x) = (x+c)^n + x^n - c^n$.

Ta có $P(0) = 0$. Ta sẽ chứng minh $P(x)$ không có nghiệm nào khác 0 và khác $-c$.

$$P(x) = (x+c)^n + x^n - c^n.$$

nên có $P'(x) = n(x+c)^{n-1} + nx^{n-1} = n\left[(x+c)^{n-1} + x^{n-1}\right]$.

- Nếu n lẻ thì P'(x) không có nghiệm, suy ra P(x) là hàm đơn điệu thực sự, suy ra x =0 là nghiệm duy nhất của P(x).
- Nếu n chẵn, thì P'(x) có nghiệm duy nhất, suy ra P(x) có nhiều nhất hai nghiệm. Mà 0 và –c là hai nghiệm của P(x), do đó P(x) có đúng hai nghiệm là 0 và –c.

Tóm lại P(x) không có nghiệm nào khác 0 và khác $-c$. Mà theo giả thiết ta có P(d)=0, suy ra d chỉ có thể là d = 0 hoặc d = –c, do đó cd(c+d)=0.

Bài toán 19. 38: Cho a, b, c đôi một không đối nhau.

Chứng minh: $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$

Hướng dẫn giải

Giả sử $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$

Quy đồng mẫu số vế trái, ta được tử thức:

$$f = (a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(c+a)(a+b) + (c-a)(a+b)(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a)$$

Ta xem: f là đa thức theo a có deg $f \leq 2$

Để ý: f(b) = f(c) = f(0) = 0

Xét b, c, 0 đôi một khác nhau thì $f(a) \equiv 0$.

Xét 3 trường hợp còn lại b = c hay b = 0 hay c = 0 thì ta đều có f(a) = 0.

Vậy f = 0.

Bài toán 19. 39: Cho $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là n + 1 số đôi một khác nhau. Giải hệ

phương trình: $$\begin{cases} x_0 + x_1a_0 + x_2a_0^2 + \ldots + x_na_0^n = 0 \\ x_0 + x_1a_1 + x_2a_1^2 + \ldots + x_na_1^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0 + x_1a_n + x_2a_n^2 + \ldots + x_na_n^n = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Xét đa thức: $f(y) = x_ny^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1y + x_0$ có deg $f \leq n$.

Từ hệ $\begin{cases} x_0 + x_1a_0 + x_2a_0^2 + \ldots + x_na_0^n = 0 \\ x_0 + x_1a_1 + x_2a_1^2 + \ldots + x_na_1^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0 + x_1a_n + x_2a_n^2 + \ldots + x_na_n^n = 0 \end{cases}$

ta có $f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a^n) = 0$,

nên f(y) có n + 1 nghiệm phân biệt, do đó $f(y) \equiv 0$.

Từ đó suy ra $x_0 = x_1 = \ldots = x^n = 0$.

Thử lại ta thấy $x_0 = x_1 = \ldots = x^n = 0$ thoả mãn hệ đã cho.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x_0, x_1, \ldots, x^n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Bài toán 19. 40: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 1 \end{cases}$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots b_n$ là 2n số khác nhau. Tính tổng các nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đa thức f(X) với biến số X, xác định bởi công thức:

$$\frac{x_1}{X - b_1} + \frac{x_2}{X - b_2} + \ldots + \frac{x_n}{X - b_n} - 1 = \frac{f(X)}{(X - b_1)(X - b_2)\ldots(X - b_n)} \quad (1)$$

Rõ ràng đa thức f(x) có bậc n và có hệ số cao nhất bằng –1

Từ hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 1 \end{cases}$

Suy ra rằng: $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0$ (2)

Nhân hai vế của (1) với $X - b_i$, và để ý đến (2), ta được:

$$x_i + (X - b_i)\left(\frac{x_1}{X - b_1} + \ldots + \frac{x_{i-1}}{X - b_{i-1}} + \frac{x_{i+1}}{X - b_{i+1}} + \ldots + \frac{x_n}{X - b_n} - 1\right)$$

$$= -\frac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)}{(X-b_1)\ldots(X-b_{i-1})(X-b_{i+1})\ldots(X-b_n)}$$

Và trong đẳng thức này, cho $X = b_i$, thì đi đến kết quả:

$$x_i = \frac{-(b_i-a_1)(b_i-a_2)\ldots(b_i-a_n)}{(b_i-b_1)\ldots(b_i-b_{i-1})(b_i-b_{i+1})\ldots(b_i-b_n)},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Đó là nghiệm của phương trình đã cho:

Ta có: $f(X) = -(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)$

Thành thử quy đồng mẫu ở vế trái của (1), thì được:

$x_1(X-b_2)(X-b_3)\ldots(X-b_n) + x_2(X-b_1)(X-b_3)\ldots(X-b_n) +$

$\ldots + x_n(X-b_1)(X-b_2)\ldots(X-b_{n-1}) - (X-b_1)(X-b_2)\ldots(X-b_n)$

$= f(X) = -(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)$

So sánh hệ số của X^{n-1} trong hai vế của đẳng thức trên, ta được:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

do đó tổng: $T = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 - b_2 - \ldots - b_n$.

Bài toán 19. 41: Cho đa thức p(x) bậc 5 có 5 nghiệm thực phân biệt. Tìm số số bé nhất của các hệ số khác 0.

Hướng dẫn giải

Xét $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx + e,\ a \neq 0$

Nếu có 4 hệ số bằng 0 thì $b = c = d = e = 0$ nên

$P(x) = ax^5$ có nghiệm bội (loại) tức là p(x) không thể có 1 hệ số khác 0. Do đó p(x) có ít nhất 2 hệ số khác 0.

Xét $p(x) = ax^5 + bx^n,\ n \geq 2$ thì p(x) có nghiệm bội: loại

Xét $p(x) = ax^5 + dx = ax(x^4 + \frac{d}{a})$ có tối đa 3 nghiệm: loại

Xét $p(x) = ax^5 + e$ có một nghiệm: loại.

Do đó p(x) có ít nhất 3 hệ số khác 0.

Chọn $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^2-1)(x^2-4)$

Thì p(x) có đúng 5 nghiệm phân biệt và đúng 3 hệ số khác 0: tồn tại min. Vậy số bé nhất của hệ số khác 0 là 3.

Bài toán 19. 42: Chứng minh tồn tại 2015 tam giác ABC thoả mãn: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{12}{7}; \sin A \sin B \sin C = \frac{12}{25}$.

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC thì có $\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

$$\sum \sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};\ \sum \cos A = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đặt: $u = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $v = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Theo giả thiết: $\frac{v}{1+4u} = \frac{12}{7}$ và $8uv = \frac{12}{25} \Rightarrow u = \frac{1}{10}, v = \frac{3}{5}$

Ta lập phương trình bậc 3 có 3 nghiệm :

$\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ $\qquad\qquad$ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{u}{v} = \frac{1}{6}$

Ta có: $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \prod\left(1+\text{tg}^2\frac{A}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{25}{9} = 1 + \sum\tan^2\frac{A}{2} + \sum\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9} = 1 + \left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2 - 2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \left(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)^2 - 2\prod\tan\frac{A}{2}.\sum\tan\frac{A}{2} + \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9} = 1 + \left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2 - 2.1 + 1 - 2.\frac{1}{6}.\sum\tan\frac{A}{2} + \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right) - \frac{99}{36} = 0 \Rightarrow \sum\tan\frac{A}{2} = \frac{11}{6}$$

Do đó: $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là nghiệm phương trình: $X^3 - \frac{11}{6}X^2 + X - \frac{1}{6} = 0$.

Hướng dẫn giải được tập nghiệm $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ do đó sinA, sinB, sinC bằng $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$. Vậy có vô số tam giác ABC thoả mãn điều kiện, đồng dạng với tam giác vuông Ai Cập (3,4,5) nên tồn tại 2015 tam giác như thế.

Bài toán 19. 43: Tính tổng: $T = \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ là nghiệm phương trình: $\sin^2 4x = \sin^2 3x$

Đặt t = sinx thì $\sin^2 3x = (3t - 4t^3)^2$

$\sin^2 4x = (2\sin 2x . \cos 2x)^2 = 16t^2(1 - t^2)(1 - 2t^2)^2$

Ta có phương trình: $64t^6 - 112t^4 + 56t^2 - 7 = 0$

Do đó: $\sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{3\pi}{7}, \sin^2\frac{6\pi}{7}$ là 3 nghiệm phương trình:

$$64z^3 - 112z^2 + 56z - 7 = 0.$$

Áp dụng định lý Viete:

$$T = \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 8$$

Bài toán 19. 44: Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ thoả mãn: $\sum_{j=0;j\neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Kí hiệu $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Chứng minh rằng $x_{n+1-i} = 1 - x_i$ với $i = 1,2,\ldots, n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $P(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)(x - x_{n+1})$

thì $P'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=0,j\neq i}^{n+1} (x - x_j)$ và $P''(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{l=0}^{n+1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k,l}}^{n+1} (x - x_j)$

Từ đó $P''(xi) = \sum_{i=0}^{n+1} \prod_{j=0,j\neq i}^{n+1} (x - x_j) = \prod_{j\neq i}^{n+1} (x - x_j) \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_k} = 0$

Suy ra: $x(x - 1)P''(x) = (n + 2)(n + 1) . P(x)$ (1)

Do đó: chỉ tồn tại duy nhất một đa thức bậc $n + 2$ với hệ số cao nhất bằng 1, thoả (1)

Mặt khác đa thức $Q(x) = (-1)^n . P(1 - x)$ thoả mãn phương trình (1), $Q(x)$ là đa thức bậc $n + 2$ với hệ số cao nhất bằng 1.

Vậy $(-1)^n . P(1 - x) = P(x)$

Và vì $0 < x_1 < x_2 < \ldots < xn < 1$ nên ta có đpcm.

Bài toán 19. 45: Cho $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$, với các $a_i \geq 0$ có n nghiệm x_i.Chứng minh: $P(x) \geq (x + 1)^n$, $\forall x \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Vì $a_i \geq 0$ nên các nghiệm $x_i < 0$ và $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$. Xét $x \in \mathbb{Z}^+$:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(x + |x_i|) = \prod_{i=1}^{n}(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{x+1\$} + |x_i|)$$

$$\ge \prod_{i=1}^{n} (x+1)^n \sqrt[x+1]{|x_i|} = (x+1)^n \sqrt[x+1]{|x_1 \ldots x_n|} = (x+1)^n$$

Xét x > 0 tuỳ ý:

$$a_k = \sum x_{i_1}.x_{i_2} \ldots x_{i_k} (-1)^k \quad (1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n)$$

$$= \sum |x_{i_1}|.|x_{i_2}| \ldots |x_{i_k}| \qquad \text{(BCS } C_n^k \text{ số)}$$

$$\ge C_n^k.\sqrt[C_n^k]{|x_1x_2 \ldots x_n|^k} = C_n^k$$

Do đó: $\quad P(x) \ge \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-k} = (1+x)^n$ (đpcm).

Bài toán 19. 46: Cho 4 số dương a, b, c, d. Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{1}{2})$. Chứng minh bất đẳng thức: $21a + 164c \ge 80b + 320d$.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ có 4 nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 thuộc $(0; \frac{1}{2})$. Theo định lý Viete ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{c}{a} \text{ và } x_1x_2x_3x_4 = \frac{d}{a}.$$

Vì a > 0 nên bất đẳng thức: $21a + 164c \ge 80b + 320d$

$$\Leftrightarrow 21 + 164\frac{c}{a} \ge 80\frac{b}{a} + 320\frac{d}{a}$$

$$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$
$$\ge 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320(x_1x_2x_3x_4) \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS

$$(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)$$

$$\le \left(\frac{1 - 2x_1 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{1 + 2x_4}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \le (1 + 2x_4)^3 \qquad (1)$$

Tương tự:

$$27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_4) \le (1 + 2x_3)^3 \qquad (2)$$

$$27(1 - 2x_1)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \le (1 + 2x_2)^3 \qquad (3)$$

$$27(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \le (1 + 2x_1)^3 \qquad (4)$$

Nhân từng vế của (1), (2), (3), (4) và rút gọn ta có:

$81(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$

$\leq (1+2x_3)(1+2x_4)(1+2x_1)(1+2x_2)$

Khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức (*).

Đẳng thức xảy ra: $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{8}, \frac{c}{a} = \frac{1}{16}, d = \frac{1}{256}$

Bài toán 19. 47: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}}$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

Xét đa thức: $f(x) = (x-a)(x-b)x-c)(x-d)$

$= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+bc+cd+da+ac+bd)^2$

$- (abc+bcd+cda+dab)x + abcd$

Vì f có 4 nghiệm nên f ' có 3 nghiêkm $x_1, x_2, x_3 > 0$

$f'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)x$

$- (abc+bcd+cda+dab)$

$\equiv 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Theo định lý Viete, ta có: $x_1x_2x_3 = \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab)$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da+ac+bd)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da+ac+bd) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$\geq 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{16}(abc+bcd+cda+dab)^2}$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 19. 48: Cho $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ có bậc $n \geq 2$ và có n nghiệm thực $b_1, b_2, ..., b_n$.Chứng minh:

$$f(x+1).\left(\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \ldots + \frac{1}{x-b_n}\right) \geq 2n^2, \forall x > b_i.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ có n nghiệm thực $b_1, b_2, ..., b_n$.

Nên: $f(x) = (x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)$

$\Rightarrow f(x + 1) = (1 + x - b_1)(1 + x - b_2) \ldots (1 + x - b_n)$

Do đó: $f(x + 1) . \left(\dfrac{1}{x - b_1} + \dfrac{1}{x - b_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - b_n}\right)$

$\geq \; f(x + 1) .n \sqrt[n]{\dfrac{1}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n)}}$ (BCS)

$= \; n\sqrt[n]{\dfrac{(1 + x - b_1)^n}{x - b_1} \ldots \dfrac{(1 + x - b_n)^n}{x - b_n}}$

Từ nhị thức Newton thì $(1 + t)^n \geq 1 + nt + \dfrac{n(n-1)t^2}{2}$, $t > 0$

và $1 + nt + \dfrac{n(n-1)t^2}{2} \geq 2nt$, $\forall t > 0$, $n \geq 2$, nên ta có:

$(1 + t)^n \geq 2nt$ do đó: $(1 + x - bj)^n \geq 2n(x - bj)$, $t = x - bj > 0$

$\Rightarrow f(x + 1) . \left(\dfrac{1}{1 - b_1} + \dfrac{1}{1 - b_2} + \ldots + \dfrac{1}{1 - b_n}\right) \geq n. \sqrt[n]{(2n)^n} = 2n^2.$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 19. 1: Giả sử m là một tham số để phương trình:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$$

có 4 nghiệm khác nhau. Tính giá trị: $P = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$ theo m.

Hướng dẫn

Dùng định lý Viet. Kết quả $\dfrac{50}{24 - m}$.

Bài tập 19. 2: Cho đa thức: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1$.

Hãy tính tổng $S = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$ với n là số nghiệm x_i của đa thức f(x).

Hướng dẫn

Chứng minh f(x) có 4 nghiệm. Kết quả $S = \dfrac{9}{2}$.

Bài tập 19. 3: Cho $abc \neq 0$ và $\dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{5} + \dfrac{c}{3} = 0$

Chứng minh: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn

Xét $F(x) = \dfrac{a}{7}x^7 + \dfrac{b}{5}x^5 + \dfrac{c}{3}x^3$ và áp dụng định lý Lagrange trên [0,1].

Bài tập 19. 4: Cho x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phương trình: $x^3 + 3px + q = 0$. Lập phương trình bậc 3 có 3 nghiệm là:

$$\alpha = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3),\ \beta = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1),\ \text{và}\ \gamma = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Hướng dẫn

Dùng định lý Viet. Kết quả $x^3 + 9px^2 - 27(q^2 + 4p^3) = 0$.

Bài tập 19. 5: Tồn tại hay không tồn tại các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ là các nghiệm của đa thức: $P(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k}$.

Hướng dẫn

Chú ý tổ hợp. Kết quả $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$

Bài tập 19. 6: Cho $a_0 = 1$, $a_1 = -n$, $a_2 = \dfrac{n^2 - n}{2}$. Tìm n nghiệm của đa thức P(x) $= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ với $n \geq 3$.

Hướng dẫn

Dùng định lý Viet và đánh giá AM–GM. Kết quả $x_i = 1$

Bài tập 19. 7: Cho phương trình $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ có 3 nghiệm dương. Chứng minh rằng: $2a^2(a + 1) \geq 9(3b - 1)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn

Dùng Viet và bất đẳng thức AM–GM.

Bài tập 19. 8: Phương trình : $z^3 - 2z^2 - z + m = 0$ có thể có 3 nghiệm hữu tỉ phân biệt không?

Hướng dẫn

Dùng phản chứng.

Kết quả không thể có 3 nghiệm hữu tỉ phân biệt.

Bài tập 19. 9: Tìm a để phương trình sau vô nghiệm:

$$x^6 + 3x^5 + (6 - a)x^4 + (7 - 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + 3x + 1 = 0\ .$$

Hướng dẫn

Biến đổi đưa về tham số a một bên.

Kết quả $a < \dfrac{27}{4}$.

Bài tập 19. 10: Đặt: $u_n = \cos^n\dfrac{\pi}{7} + \cos^n\dfrac{3\pi}{7} + \cos^n\dfrac{5\pi}{7}$, n nguyên.

Chứng minh u_n hữu tỉ với mọi n nguyên.

Hướng dẫn

Dùng qui nạp và $8u_{n-1} = 4u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}$, $n \geq 3$

Chuyên đề 20: TỔ HỢP VÀ RỜI RẠC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Tổ hợp và xác suất CX

- Số hoán vị của tập A có n phần tử: $P_n = n!$
- Số chỉnh hợp n chập k: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Số tổ hợp n chập k: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Xác suất: $P(A) = \dfrac{|\varpi_A|}{|\varpi|}$
- Xác suất có điều kiện: $P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(AB)}$
- Nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k$
- Cho n tập $A_1,\ldots, A_n$ là n tập hợp hữu hạn ($n \geq 2$) thì số phần tử:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<k\leq n}^{n}|A_i \cap A_k| + \sum_{1\leq i<k<\ell\leq n}^{n}|A_i \cap A_k \cap A_\ell|$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

- Cho ánh xạ f từ tập hữu hạn X có n phần tử vào tập hữu hạn Y có m phần tử.
  Số ánh xạ f từ X và Y là m^n.
  Số đơn ánh f từ X vào Y là $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ với $n \leq m$.
  Số toàn ánh f từ X vào Y là $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k.C_m^k.(m-k)^n$ khi $n \geq m$.
  Số song ánh f từ X và Y là $n.(n-1)(n-2)\ldots2.1 = n!$ khi $n = m$.

Nguyên tắc Dirichlê

- Nếu nhốt k + 1 con thỏ vào k chuồng (k nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất 2 con. Nếu nhốt 2k + 1 con thỏ vào k chuồng (k nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất 3 con.
- Nếu nhốt nk + 1 con thỏ vào k chuồng (k, n nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất n + 1 con.

Nguyên tắc cực hạn

Tồn tại độ đo lớn nhất và độ đo nhỏ nhất hay đại lượng lớn nhất và đại lượng nhỏ nhất của tập hữu hạn khác rỗng các độ đo hay các đại lượng.

Bất biến và đơn biến

Đại lượng bất biến, tính chất bất biến là những đại lượng hay tính chất không thay đổi trong quá trình thực hiện các phép biến đổi nào đó.

Đại lượng đơn biến, tính chất đơn biến là những đại lượng hay tính chất thay đổi một chiều, hoặc tăng thêm hoặc giảm đi trong quá trình thực hiện các phép biến đổi nào đó.

Đồ thị

- Bổ đề bắt tay: Cho đồ thị G = (V, E) thì tổng bậc các đỉnh của đồ thị là số chẵn và $\sum_{v\in V} d(V) = 2\,\text{card}\,(E)$
- Định lý Tocran: Nếu đồ thị G có n đỉnh và số tam giác của G là t(G) = 0 thì số cạnh: $c \le \left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 20. 1: Tính:

$$A = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) + \ldots +$$
$$+ C_n^n.n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x).$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số y = $(1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n$ thì:

$$y = (C_n^0 + C_n^1\cos x + C_n^2\cos^2 x + \ldots + C_n^n\cos^n x) +$$
$$(C_n^0 + C_n^1\sin x + \ldots + C_n^n\sin^n x)$$
$$= 2C_n^0 + C_n^1(\sin x + \cos x) + C_n^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \ldots +$$
$$C_n^n(\sin^n x + \cos^n x)$$
$$\Rightarrow y' = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0.C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) +$$
$$+ \ldots + C_n^n n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$$

Do đó: $A = y' = [(1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n]'$

$= n(1 + \cos x)^{n-1}.(-\sin x) + n(1 + \sin x)^{n-1}\cos x$

$= n[\cos x(1 + \sin x)^{n-1} - \sin x(1 + \cos x)^{n-1}]$

Bài toán 20. 2: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên dương n và k thoả: $C_{3n}^n = (3n)^k$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_{3n}^n = (3n)^k$

$$\Leftrightarrow \frac{(3n)!}{n!(2n)!} = (3n)^k \Leftrightarrow \frac{(3n-2)!(3n-1)(3n)}{(n-1)!n(2n-1)!(2n)} = (3n)^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = \frac{(3n)^{k-1}.2n^2}{(3n-1)} \Leftrightarrow C_{3n-1}^{n-1} = \frac{3^{k-1}.2n.n^k}{3n-1}$$

Vì $C_{3n-1}^{n-1} \in \mathbf{Z}\ \forall n \geq 1$ nên $3^{k-1}.2n.n^k \ \vdots\ (3n-1)$ (1)

Mà (3, 3n–1) = 1, (n, 3n–1) = 1 nên (1) xảy ra $\Leftrightarrow 2n \ \vdots\ (3n-1)$

Do đó $2n \geq 3n-1 \Leftrightarrow n \leq 1 \Leftrightarrow n = 1$

Thử lại $C_3^1 = 3^k \Leftrightarrow k = 1$Tóm lại (n, k) = (1, 1).

Bài toán 20. 3: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1990}C_{1990}^1 + \frac{1}{1989}C_{1989}^2 - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + \ldots - \frac{1}{996}C_{996}^{995} = \frac{1}{1991}$$

Hướng dẫn giải

Với n = 1, 2,..., ta đặt $S(n) = \sum_m (-1)^m C_{n-m}^m$, trong đó tổng được lấy từ m = 0 cho đến hết những số hạng khác 0.

Ta có: $\sum_{k=m}^{n} C_m^k = C_{n+1}^{k+1}$ nên: $\sum_{k=m}^{n-2} S(k) \sum_{k=0}^{n-2}\sum_m (-1)^m C_{k-m}^m = \sum_m (-1)^m \sum_{k=2m}^{n-2} C_{k-m}^m$

$= \sum_m (-1)^m C_{n-1-m}^{m+1} = 1 - S(n)$

Ta có $S(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra S(n + 1) = S(n) – S(n – 1) (1)

Ta có S(0) = S(1) = 1, từ đó

S(2) = 0, S(3) = –1, S(4) = –1, S(5) = 0, S(6) = 1, S(7) = 1

Từ (1) ta có S(m) = S(n) nếu $m \equiv n \pmod 6$. Do

$\frac{n}{n-m}C_{n-m}^m = C_{n-m}^m + C_{n-m-1}^{m-1}$ nên ta được:

$$1991.\left[\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1990}C_{1990}^1 + \frac{1}{1989}C_{1989}^2 - \ldots \right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + \ldots - \frac{1}{996}C_{996}^{995}\right] = 1$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 4: Cho các số nguyên dương m và n sao cho $n \leq m$.

Chứng minh rằng: $2^n.n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = (m+n)(m+n-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)$

$$= \prod_{i=1}^{n} (m+1-i)(m+i)$$

Ngoài ra $2^n . n! = 2^n.1.2.3.n = (2.1)(2.2)...(2n) = \prod_{i=1}^{n} 2i$ và

$(m^2 + m)^n = (m^2 + m)(m^2 + m)...(m^2 + m) = \prod_{i=1}^{n} (m^2 + m)$

Do đó, các bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\prod_{i=1}^{n} 2i \le \prod_{i=1}^{n} (m+1-i)(m+i) \le \prod_{i=1}^{n} (m^2+m)$$

Ta có: $2i = i^2 + i - i^2 + i \le m^2 + m - i^2 + i = (m + 1 - i)(m + i)$

$\le m(m + 1) = m^2 + m$

vì i là số nguyên nằm giữa 1 và n. Suy ra:

$2i \le (m + 1 - i)(m + i) \le m^2 + m$

do đó ta được: $\prod_{i=1}^{n} 2i \le \prod_{i=1}^{n} (m+1-i)(m+i) \le \prod_{i=1}^{n} (m^2+m)$

Vậy các bất đẳng thức đã cho là đúng.

Bài toán 20. 5: Cho n nguyên dương, $n \ge 2$ và $a, b > 0$.

Chứng minh: $\dfrac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n - 2} \ge \sqrt{(ab)^n}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ và khai triển nhị thức:

$$\frac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n - 2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i - a^n - b^n}{2^n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i.a^{n-i}.b^i}{2^n - 2}$$

$$= \frac{1}{2^n - 2}.\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i \left(a^{n-i}b^i + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i.b^{n-i}.a^i\right)\right)$$

$$\ge \frac{1}{2^n - 2}.\sum_{i=1}^{n} C_n^i \sqrt{a^n.b^n} = \frac{1}{2^n - 2}(2^n - 2).\sqrt{a^n b^n} = \sqrt{(ab)^n}.$$

Bài toán 20. 6: Hỏi từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được tất cả bao nhiêu số có 15 chữ số mà trong mỗi số mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần và không có chữ số nào chiếm 3 vị trí liên tiếp trong số?

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập gồm tất cả các số thoả mãn yêu cầu đề bài.

A là tập gồm tất cả các số có 15 chữ số được lập nên bởi các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần trong số.

Khi đó: $X = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)$ với A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A mà chữ số i chiếm đúng 3 vị trí liên tiếp (i = 1, 2, 3, 4, 5)

Xét $1 \le k \le 5$ ta chứng minh được: $\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \dfrac{(15-2k)!}{3^{5-k}}$ và $|A| = \dfrac{15!}{3^5}$

Áp dụng công thức: $\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2\ldots i_k\le i_n}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$

$\Rightarrow |X| = \dfrac{15!}{3^5} - C_5^1\dfrac{13!}{3^4} + C_5^2\dfrac{11!}{3^3} - C_5^3\dfrac{9!}{3^2} + C_5^4\dfrac{7!}{3^1} - C_5^5\dfrac{5!}{3^0}$

Bài toán 20. 7: Cho các số nguyên dương k và n với $k \le n$. Hỏi tất cả có bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ thoả mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

1) Tồn tại $s, t \in \{1; 2; \ldots; k\}$ sao cho $s < t$ và $a_s > a_t$

2) Tồn tại $s \in \{1; 2; \ldots; k\}$ sao cho $(a_s - s)$ không chia hết cho 2.

Hướng dẫn giải

Gọi A là tập hợp tất cả chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên và A_1 là tập hợp tất cả chỉnh hợp thoả mãn yêu cầu của bài ra.

Nếu kí hiệu A_2 = {chỉnh hợp $(a_1, \ldots, a_k) \in A$ / $a_i < a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ và $a_i = i \bmod 2$, $i = 1, 2, \ldots, k$} thì rõ ràng:

$A_2 \subset A$ và $A_1 = A \setminus A_2$. Suy ra: $|A_1| = |A| - |A_2|$

Bây giờ ta xét A_2. Với mỗi $(a_1, \ldots, a_k) \in A_2$ ta đều có $a_i + i \ne a_j + j$ với mọi $i \ne j \in \{1, \ldots, k\}$, $(a_i + i) \vdots 2$ và $a_i + i \in \{1, \ldots, n+k\}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ta chứng minh: $|A_2| = C^k_{\left[\frac{n+k}{2}\right]}$ từ đó ta có: $|A_1| = \dfrac{n!}{(n-k)!} - C^k_{\left[\frac{n+k}{2}\right]}$.

Bài toán 20. 8: Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 100 điểm đó, có không quá 70% các tam giác nhọn.

Hướng dẫn giải

Từ 4 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, nhiều lắm là có 3 tam giác nhọn. Từ kết quả này, suy ra với 5 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta nhận được 10 tam giác và có không quá 7 tam giác nhọn.

Với 10 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 4 điểm nhân cho 3 rồi chia cho số các tập con 4 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 3 ta nhân cho 4. Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 3/4 số tất cả các tam giác (đối với 10 điểm).

Lí luận tương tự, ta xét 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 5 điểm nhân cho 7 rồi chia cho số các tập con 5 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 7 ta nhân cho 10. Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 7/10 số tất cả các tam giác tạo thành, điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 9: Có một trò chơi xổ số như sau: Từ 90 số Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 số. Người chơi được quyền đặt tiền cho một số bất kì hay cho một nhóm số. Nếu tất cả các số người chơi viết nằm trong 5 số của Ban tổ chức thì người chơi thắng số tiền bằng 15 lần số tiền đặt nếu người chơi viết một số; bằng 270 lần nếu người chơi viết hai số; bằng 5500 lần nếu người chơi viết ba số; bằng 75000 lần nếu người chơi viết bốn số; bằng 1000000 lần nếu anh ta viết năm số. Tìm số lần thắng trung bình của người chơi khi viết một số, hai số, ..., năm số.Giả sử có 100000 người đặt tiền viết ba số. Tìm xác suất sao cho có hơn 10 người thắng trong số họ.

Hướng dẫn giải

Nếu người chơi viết k số, thì xác suất p_k sao cho tất cả các số anh ta viết nằm trong năm số của Ban tổ chức, bằng:

$$p_k = \frac{C_{90-k}^{5-k}}{C_{90}^{5}}; p_1 = \frac{1}{18}; p_2 = \frac{2}{801}; p_3 = \frac{1}{11748}; p_4 = \frac{1}{511038}; p_5 = \frac{1}{43949268}$$

Kí hiệu E_k là số lần thắng trung bình của người chơi khi viết k số và đặt a đồng, ta có: $E_1 = 15a.\frac{1}{18} - a.1 = -\frac{1}{6}a$; $E_2 = -\frac{29}{89}a \approx -\frac{1}{3}a$, ...

Vì tất cả $E_k < 0$, nên rõ ràng là trò chơi xổ số này không có lợi cho người chơi dù viết mấy số. Xác suất sao cho có hơn 10 người thắng trong số những người viết 3 số bằng $\approx 0,24$.

Bài toán 20. 10: Hai đấu thủ A và B thi đấu trong một giải cờ vua. Người thắng một ván được một điểm và không có ván hoà. Xác suất thắng một ván của đấu thủ A là α và của B là β. Ai hơn đối thủ hai điểm thì thắng giải. Tính xác suất thắng giải của mỗi đấu thủ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\alpha > \beta$. Kí hiệu $P_n(A)$ là xác suất thắng giải của A sau n ván; A_1 và B_1 là các biến số tương ứng A và B thắng ván đầu tiên. Khi đó:

$$P_n(A) = P(A_1)P_{n-1}(A/A_1) + P(B_1)P_{n-1}(A/B_1)$$

$$= \alpha.P_{n-1}(A/A_1) + \beta P_{n-1}(A/B_1) \qquad (*)$$

Trong đó $P_{n-1}(A/A_1)$ là xác suất A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu tiên; $P_{n-1}(A/B_1)$ là xác suất A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi B đã thắng ván đầu tiên.

Xét n > 2. Để A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu, thì B phải thắng ván thứ hai, nghĩa là:

$P_{n-1}(A/A_1) = P(B_1)P_{n-2}(A) = \beta P_{n-2}(A)$

Tương tự: $P_{n-1}(A/B_1) = P(A_1)P_{n-2}(A) = \alpha P_{n-2}(A)$

Từ đó và (*) ta có $P_n(A) = 2\alpha\beta P_{n-2}(A)$, và suy ra:

$P_4(A) = 2\alpha\beta\alpha^2, \ldots, P_{2n}(A) = 2\alpha\beta)^{n-1}\alpha^2$

Khi n = 2 ta có $P_2(A) = \alpha^2$. Vì không có ván hoà nên $\alpha + \beta = 1$, do đó xác suất thắng giải của A là:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(A) = \alpha^2\left[1 + 2\alpha\beta + (2\alpha\beta)^2 + \ldots\right] = \frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Bài toán 20. 11: Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất sau: Có thể chia tập hợp 6 số {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5} thành hai tập hợp, sao cho tích tất cả các số của tập hợp này bằng tích tất cả các số của tập hợp kia.

Hướng dẫn giải

Ta hãy để ý rằng trong 5 số nguyên liên tiếp phải có một số chia hết cho 5. Vì vậy nếu tập hợp 6 số {n, n+1, ..., n+5} có tính chất đã nêu trong đầu bài, thì trong tập hợp ấy phải có đúng hai số chia hết cho 5, dĩ nhiên đó phải là các số n và n + 5, còn các số n + 1, n + 2, n + 3, n + 4 không chia hết cho 5.

Mặt khác, nếu trong 6 số của tập hợp trên chia hết cho một số nguyên tố p ≥ 7, thì 5 số còn lại sẽ không chia hết cho p, và tập hợp không có tính chất đòi hỏi. Từ đây đặc biệt suy ra rằng các số n+1, n+2, n+3 và n+4 chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2 và 3, tức là:

$$n + 1 = 2^{k_1}3^{l_1}; n + 2 = 2^{k_2}3^{l_2}; n + 3 = 2^{k_3}3^{l_3}; n + 4 = 2^{k_4}3^{l_4},$$

trong đó $k_1, l_1, \ldots, k_4, l_4$ là những số nguyên không âm.

Nếu n+1 (và do đó n+4) chia hết cho 3, thì n+2 và n+3 không chia hết cho 3, vậy $l_2 = l_3 = 0$ và $n+2 = 2^{k_2}$, $n+3 = 2^{k_3}$ nhưng như thế thì n+2 và n+3 là hai số nguyên liên tiếp mà lại là hai số chẵn, điều này vô lí.

Lập luận tương tự, ta thấy rằng nếu n+2 chia hết cho 3, hoặc nếu n+3 chia hết cho 3, thì ta vẫn gặp mâu thuẫn. Chứng tỏ không có số nguyên dương n nào thoả mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 20. 12: Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho có thể phân chia tập hợp X = {1990, 1990 + 1, ..., 1990 + k} thành hai tập con A, B thoả mãn điều kiện: Tổng của tất cả các phần tử thuộc A bằng tổng của tất cả các phần tử thuộc B

Hướng dẫn giải

Ta quy ước: tập số M được gọi là có tính chất T nếu M có thể được chia thành hai tập con rời nhau sao cho tổng của tất cả các phần tử của tập con này bằng tổng của tất cả các phần tử của tập con kia.

Theo bài ra, ta cần tìm tất cả các số nguyên dương k để tập X có tính chất T. Dễ thấy nếu X có tính chất T thì tổng của tất cả các phần tử của x sẽ là một số chẵn. Mà tổng này bằng 1990(k + 1) + k(k + 1)/2 nên k(k + 1) ⋮ 4. Suy ra, k cần có dạng k = 4t + 3 hoặc k = 4t với t ∈ N. Xét:

Trường hợp 1 : k = 4t + 3 ∈ N. Khi đó, số phần tử của X sẽ là 4(t + 1). Do đó, ta có thể chia tập X thành t + 1 tập con rời nhau sao cho mỗi tập con đều gồm 4 số tự nhiên liên tiếp. Dễ thấy, tập gồm 4 số tự nhiên liên tiếp là tập có tính chất T. Từ đó suy ra tập X có tính chất T.

Trường hợp 2: k = 4t, t ∈ N. Khi đó, tập X sẽ có 4t + 1 phần tử. Do đó, nếu X được chia thành hai tập con rời nhau A, B thì một trong hai tập con đó, không mất tổng quát giả sử là A, phải có không ít hơn 2t + 1 phần tử. Như vậy, tập B sẽ có không quá 2t phần tử. Suy ra, nếu kí hiệu a, b tương ứng là tổng của tất cả các phần tử của A, B thì:

$a \geq 1990 + (1900+1) + ... + (1900+2t) = 1990(2t+1) + t(2t+1)$

$b \leq (1990 + 2t + 1) + ... + (1990 + 4t) = 1990 \times 2t + t(6t + 1)$

Với giả thiết a = b ta có:

$1990 \times 2t + t(6t + 1) \geq 1990(2t + 1) + t(2t + 1)$

$\Leftrightarrow 4t^2 \geq 1990$ nên $t \geq 23$.

Với t = 23 ta có X = {1990, 1990 + 1,..., 1990 + 92} = AUB,

Với: A = {1990 + 1, 1990 + 2,..., 1990 + 46}.

B = {1990 ; 1990 + 47, 1990 + 48,..., 1990 + 92}

Hiển nhiên A, B rời nhau, và bằng tính toán trực tiếp dễ thấy a = b. Như vậy với t = 23 (⇔ k = 92) tập X có tính chất T.

Với t > 23 ta có : $X = X_1UX_2$ với X_1 = {1990, 1990 + 1, ..., 1990 + 92} và X_2 = {1990 + 93, 1990 + 94, ...,1990 + 4t}.

Theo phần trên, tập X_1 có tính chất t. Hơn nữa, do tập X_2 có 4(t – 23), phần tử nên, vận dụng những lập luận đã trình bày khi xét trường hợp 1, ta sẽ được tập X_2 có tính chất T. Từ đó suy ra tập X cũng có tính chất T.

Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên dương k cần tìm là tất cả các số có dạng k = 4t + 3, t ∈ N và k = 4t, t ∈ N, t > 23.

Bài toán 20. 13: Cho tập hợp số M = {1, 2,...,n}. Hãy tìm số m nhỏ nhất sao cho mỗi tập con chứa m phần tử của tập M đều tồn tại ít nhất hai số a, b thoả số này là bội của số kia.

Hướng dẫn giải

Ta có $C = \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1; \left[\frac{n}{2}\right]+2; ...n\right\}$ có $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ phần tử và không có phần tử nào là bội của ít nhất 1 phần tử khác thuộc C.

Suy ra: $m \geq \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$ phần tử. Ta chứng minh: $m = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$

Xét 1 tập con P bất kì chứa $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ phần tử của M. Với mỗi $p \in P$ đặt $p = 2^s q$; $s \geq 0$; $s \in N$ và q là số lẻ, vì $1 \leq p \leq n$ nên $1 \leq q \leq n$ mà từ 1 đến n có $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ số lẻ khác nhau nên trong biểu diễn các phần tử $p \in P$, phải có ít nhất 2 số q lẻ bằng nhau suy ra tồn tại ít nhất 2 số a, $b \in P$ sao cho: $a = 2^{s_1} l$, $b = 2^{s_2} l$. Tức là trong 2 số a, b phải có 1 số là bội của số kia.

Bài toán 20. 14: Cho n là một số nguyên dương.

Xét $S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{0,1,...,n\},\ x+y+z > 0\}$ như là một tập hợp gồm $(n+1)^3 - 1$ điểm trong không gian 3 chiều. Hãy xác định số nhỏ nhất có thể các mặt phẳng mà hợp của chúng chứa tất cả các điểm của S nhưng không chứa điểm (0,0,0).

Hướng dẫn giải

Ta thấy 3n mặt phẳng x = i, y = i và z = i chứa tất cả các điểm của S và không chứa điểm (0,0,0). Như vậy số mặt phẳng cần tìm không vượt quá 3n.

Để chứng tỏ số mặt phẳng cần tìm đúng bằng 3n, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Xét đa thức k biến $P(x_1, x_2, ..., x_k)$. Nếu P triệt tiêu tại các điểm của tập hợp $S = \{(a_1,a_2,...,a_k) : a_i \in \{0,1,...,n\},\ a_1 + a_2 + ... + a_k > 0\}$ và không triệt tiêu tại điểm (0,0,...,0) thì P có bậc không nhỏ hơn kn.

Chứng minh. Ta chứng minh kết quả bổ đề bằng quy nạp theo k. Dễ thấy kết luận của bổ đề đúng với k = 0. Giả sử kết luận bổ đề đúng cho k – 1, ta chứng minh kết luận của bổ đề cũng đúng cho k.

Thực vậy, nếu đa thức k biến $P(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x)$ thoả mãn điều kiện của bổ đề (trong đó x là biến thứ k), thì ta thực hiện phép chia $P(x_1, x_2,..., x_{k-1}, x)$ cho đa thức $x(x-1)...(x-n)$ để được thương là $Q(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x)$ và đa thức dư $R(x_1, x_2,..,x_{k-1}, x)$. Viết lại $R(x_1, x_2,..., x_{k-1}, x)$ dạng chính tắc theo luỹ thừa của x ta có:

$$R(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x) = R_n(x_1, x_2,...,x_{k-1})x^n + ... + R_0(x_1, x_2,...,x_{k-1}) \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh $R_n(x_1, x_2, ...,x_{k-1})$ là đa thức k–1 biến thoả mãn điều kiện của bổ đề.

a) $T(x) = R(0,0,...0,x)$ là đa thức của x với bậc không vượt quá n và triệt tiêu tại các điểm x = 1, 2,...,n. Do

$T(0) = R(0,0,...,0,0) \neq 0$ cho nên T(0) là đa thức bậc n của x, suy ra hệ số của bậc cao nhất x^n trong khai triển (*) là $R_n(0, 0,...,0) \neq 0$.

b) Với một bộ $(a_1, a_2, ..., a_{k-1})$ thoả $a_1 \in \{0, 1,...,n\}$, $a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} > 0$ ta có $R(a_1, a_2,..., a_{k-1}, x\}$ triệt tiêu tại n+1 điểm x = 0, 1, 2, ...,n. Vì bậc của $R(a_1, a_2,...,a_{k-1}, x)$ không vượt quá n, cho nên $R(a_1, a_2,...,a_{k-1}, x)$ là đa thức đồng nhất 0, do đó tất cả hệ số của nó trong khai triển (*) bằng 0 và đặc biệt là $R_n(a_1, a_2,...,a_{k-1}) = 0$

Như vậy, $R_n(x_1,x_2,...,x_{k-1})$ là đa thức có bậc không nhỏ hơn (k–1)n theo giả thiết quy nạp, cho nên $R(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x)$ là đa thức có bậc không nhỏ hơn kn. Do đó $\deg P \geq \deg R(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x) \geq kn$. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ giả sử N mặt phẳng $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ chứa tất cả các điểm của S nhưng không chứa điểm (0,0,...,0). Khi đó xét

$$P(x,y,z) = \prod_{i=1}^{N}(a_ix + b_iy + c_iz + d_i)$$

Đa thức này có bậc là N và P(x, y,z) thoả mãn các giả thiết của bổ đề, nên ta có $N = \deg P \geq 3n$ là điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 15: Xét hoán vị $s_0, s_1, ..., s_n$ cua các số 0, 1, 2,...,n, ta tác động một phép biến đổi lên hoán vị này nếu tìm được i, j sao cho $s_i = 0$ và $s_j = s_{i-1} + 1$. Hoán vị mới tạo thành nhận được bằng cách đổi chỗ hai phần tử s_i và s_j. Hỏi với số n nào thì xuất phát từ hoán vị (1, n, n–1, n–2,..., 3, 2, 0) ta có thể nhận được hoán vị (1,2,...,n,0) bằng cách lập lại nhiều lần phép biến đổi đó?

Hướng dẫn giải

Thử trực tiếp, ta thấy rằng có thể thực hiện yêu cầu của bài toán trong trường hợp n = 1, n = 2, 3, 7, 15, nhưng không thực hiện được khi n = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13,1 4. Từ đó, ta dự đoán rằng các số dạng $n = 2^m - 1$ và số n = 2 sẽ thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta để ý, nếu n = 2m, thì sau m–1 lần biến đổi ta sẽ có 1 n 0 n–2 n–1 n–4 n–3... 4 5 2 3 và không thể làm tiếp được. Vậy với n chẵn, n > 2 ta không thực hiện được

Nếu n = 15 ta có thể làm như sau:

1 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 0

(bắt đầu)

1 0 14 15 12 13 10 11 8 9 6 7 4 5 2 3

(sau 7 lần biến đổi)

1 2 3 0 12 13 14 15 8 9 10 11 4 5 6 7

(sau 8 lần biến đổi)

1 2 3 4 5 6 7 0 8 9 10 11 12 13 14 15

(sau 8 lần biến đổi)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 0

(sau 8 lần biến đổi)

Tổng quát, ta giả sử $n = 2^m - 1$. Gọi P_0 là hoán vị đầu tiên và P_r là hoán vị có dạng:

1 2 3...R–1 0, n–R+1, n–R+1 n–R+2 n–R+3...
n, n–2R+1 n–2R+2...n–R,..., R R+1 ... 2R–1

Ở đây R là kí hiệu cho số 2^r và dấu phẩy ngăn cách biểu thị rằng, sau hoán vị ban đầu 1, 2...R–1 0, tăng lên R số hạng. Nếu khởi đầu từ P_r, thì số 0 được chuyển đổi thành công với R, 3R, 5R,..., n–R+1, rồi với R+1, 3R+1..., n–R+2, tiếp tục với 2R–1, 4R–1,...,n. Điều này sẽ cho ta P_{r+1}. Dễ dàng kiểm tra được P_0 dẫn đến P_1 và sau đó đến P_m là vị trí kết thúc. Như thế, có thể thực hiện được theo yêu cầu đề bài cho trường hợp $n = 2^m-1$.

Tiếp theo, giả sử n lẻ nhưng không có dạng 2^m-1. Lúc đó, ta có thể viết $n = (2a+1)2^b - 1$ (lấy 2^b là luỹ thừa cao nhất của 2 sao cho nó chia hết n+1). Ta có thể định nghĩa $P_0, P_1,..., P_b$ như trên. Ta có thể đạt đến P_b như trên:

1 2... B–1 0, 2aB 2aB+1 ... (2a+1)B–1, (2a–1)B ... 2aB–1,...,

3B, 3B+1,... 4B–1, 2B, 2B+1,..., 3B–1, B, B+1,..., 2B–1

với $B = 2^b - 1$. Khi đó, 0 được chuyển với B, 3B, 5B..., (2a–1)B, và đặt nó ngay bên phải của (2a+1)B–1 = n, nên không thể tiếp tục được xa hơn, điều này có nghĩa không thể thực hiện được để thoả mãn điều kiện bài toán cho $n = (2a+1)2^b - 1$.

Bài toán 20. 16: Cho S là tập hợp {1, 2,...,n}, n ≥ 1. Ta gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của S có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$

Hướng dẫn giải

Ta có: $nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k \Rightarrow \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$ nếu $k \neq 0$

Để ý: $p_n(k) = C_n^k p_{n-k}(0)$, $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!$

Từ đó suy ra: $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k.C_n^k p_{n-k}(0)$

$$= n\sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1}p_{n-k}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}p_{n-k-1}(0) = n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n(n-1)! = n!$$

Bài toán 20. 17: Chứng minh rằng tập hợp {1, 2, 3,...,1989} có thể được viết thành hợp của các tập rời nhau $A_1, A_2, ..., A_{117}$ sao cho mọi A_i, i = 1, 2,...,117, đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị của các phần tử những A_i đều bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Trước hết, ta xây dựng 117 tập hợp gồm 3 số sao cho tổng của 3 số đó trong mỗi tập đều bằng 0 và chúng rời nhau từng đôi một như sau:

Từ tập {1, 2, 3,...,1989}, ta tạo thành tập M = {–994, –993,...,993, 994}, tập hợp này có được bằng cách lấy từng số hạng của tập hợp đã cho trừ đi 995.

Khi đó, ta tạo 116 tập hợp gồm 3 số nói trên là:

N_1 = {993, –496, –497}, N_2 = {–993, 496, 497},

N_{2k+1} = {993–4k, 2k–496, 2k–497},

N_{2k+2} = {–993+4k, –2k+496, –2k+497},

....

N_{115} = {665, –382, –383}, N_{116} = {–665, 382, 383}

Ngoài ra, ta đặt $N_{117} = \{-1, 0, 1\}$

Tất cả 117 tập hợp trên đều rời nhau từng đôi một. Thật vậy, trong mỗi tập, do các phần tử thứ hai đều chẵn nên các phần tử thứ hai của các tập hợp $N_1, \dots, N_{116}$ không thể trùng với các phần tử thứ nhất hoặc thứ ba của những tập hợp này, tất cả các phần tử thứ nhất của những tập hợp này có giá trị tuyệt đối lớn hơn tất cả phần tử thứ ba, thành thử các tập hợp N_i rời nhau từng đôi một.

Ngoài ra, nếu số x nào đó là phần tử của một trong các tập hợp N_i thì số (–x) cũng là phần tử của một trong các tập hợp N_i. Để ý rằng 14.117 phần tử của tập hợp M, không thuộc về một trong các tập hợp N_i, được chia thành 7.117 cặp số với dấu đối nhau. Bằng cách tuỳ ý ta thêm 7 cặp số phân biệt vào tập hợp N_i đã chọn ở trên, ta sẽ chia được tập hợp M thành 117 tập hợp con từng cặp không giao nhau.

Cuối cùng để thoả mãn yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần xây dựng 117 tập A_i bằng cách cộng 995 vào từng phần tử của các tập N_i tương ứng.

Bài toán 20. 18: Trong một kì thi học sinh giỏi toán có một số thí sinh là bạn bè của nhau. Quan hệ bạn bè là quan hệ hai chiều. Gọi một nhóm các thí sinh là nhóm bạn bè nếu như hai người bất kì trong nhóm này là bạn bè của nhau. (Mỗi nhóm tuỳ ý ít hơn hai thí sinh cũng vẫn được coi là một nhóm bạn bè). Số lượng các thí sinh của một nhóm bạn bè được gọi là cỡ của nó.

Cho biết rằng, trong kì thi này, cỡ của một nhóm bạn bè có nhiều người nhất là một số chẵn. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh vào hai phòng sao cho cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng này cũng bằng cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng kia

Hướng dẫn giải

Ta gọi cỡ của một tập hợp A, kí hiệu là c(A), là cỡ của nhóm bạn bè đông người nhất trong A. Gọi M là nhóm bạn bè đông người nhất trong tập hợp G tất cả các thí sinh, như vậy $c(M) = c(G) = 2m$ là số chẵn. Ta chỉ ra một cách phân hoạch G thành hai tập hợp có cùng cỡ như sau:

Trước hết A là một tập hợp m thí sinh của M và $B = G - A$. Như vậy $c(B) \geq m \geq c(A)$. Chừng nào $c(B) \geq c(A) + 2$ ta chuyển một thí sinh của M từ B sang A. Mỗi lần như vậy cỡ của B giảm không quá 1 và cỡ của A tăng đúng 1. Do đó, ta có thể thực hiện được việc điều chỉnh này cho tới khi $c(B) = c(A)$ hoặc $c(B) = c(A) + 1$. Trong trường hợp $c(B) = c(A)+1$ ta thực hiện tiếp việc điều chỉnh mới bằng cách xét tất cả nhóm bạn bè $B_1, B_2, \dots, B_s$ gồm c(B) người trong B. Nếu tồn tại B_i và $m \in M-A$ sao cho $m \notin B_i$ thì tập hợp $A \cup \{m\}$ và $B - \{m\}$ là hai tập hợp có cùng cỡ $c(A) + 1$. Nếu $m \in B_i$ với mọi B_i và $m \in M-A$ thì $B_i - (M-A)$ luôn khác tập rỗng vì B_i có ít nhất m+1 phần tử còn M–A chỉ có nhiều nhất m phần tử. Xuất phát từ $C = \varnothing$ ta chọn một phần tử của $B_i - (M-A)$ vào C, với B_i là nhóm bạn bè nào đó có c(B) người trong tập hợp B–C. Quá trình kết thúc khi thu được một tập hợp C sao cho $c(B - C) = c(B)$

– 1 = c(A). Ta chứng minh c(A ∪ C) = c(A). Thật vậy, xét một nhóm bạn bè Q tuỳ ý trong A ∪ C. Do mỗi phần tử của C là bạn bè của mọi phần tử M–A cho nên Q ∪ (M–A) là một nhóm bạn bè trong G và do đó:

$$c(G) = 2m \geq |Q \cup (M-A)| = |Q| + (2m - |A|) \Rightarrow |A| \geq |Q|.$$

Vậy B – C và A ∪ C là phân hoạch của G thành hai tập hợp có cùng cỡ (đpcm).

Bài toán 20. 19: Trong kỳ thi Olympic có 17 học sinh thi Toán được mang số ký danh trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng tỏ rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số ký danh được mang chia hết cho 9.

Hướng dẫn giải

Xét 5 số tự nhiên tuỳ ý, khi chia cho 3 có thể xảy ra: Có 3 số dư giống nhau ⇒ Tổng 3 số tương ứng chia hết cho 3. Trái lại, sẽ có 3 số dư đôi một khác nhau ⇒ Tổng 3 số tương ứng chia hết cho 3.

Vậy trong 5 số tự nhiên bất kì, tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3.

Xét 17 số tự nhiên tuỳ ý: Chia chúng thành 3 tập, có lần lượt 5, 5, 7 phần tử. Trong mỗi tập, chọn được 3 số có tổng lần lượt là: $3a_1, 3a_2, 3a_3$ ($a_1, a_2, a_3 \in N$) còn lại: 17 – 9 = 8 số, trong 8 số này, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$, còn lại 5 số, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_5$.

Trong 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có 3 số a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} có tổng chia hết cho 3.

⇒ 9 học sinh tương ứng có tổng các số kí danh là:

$$3a_{i1} + 3a_{i2} + 3a_{i3} = 3(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) \vdots 9.$$

Bài toán 20. 20: Cho 75 điểm trong hình lập phương có cạnh 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh trong số các điểm đó có diện tích không quá $\frac{7}{72}$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Trong hình lập phương cạnh a có 3 điểm, khi đó diện tích tam giác có 3 đỉnh tại các điểm đó không lớn hơn $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Chứng minh: Dựa vào nhận xét đơn giản sau: trong không gian cho 5 điểm B, C, M, A, N trong đó M, A, N theo thứ tự nằm trên một đường thẳng, khi đó: max{S(MBC), S(NBC)} ≥ S(ABC)

Ta suy ra diện tích tam giác ABC không lớn hơn diện tích tam giác có đỉnh là đỉnh của hình lập phương. So sánh diện tích các tam giác này, ta thấy tam giác có cạnh là các đường chéo của các mặt bên có diện tích lớn nhất.

Diện tích đó bằng $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Và như vậy bổ đề được chứng minh.

Quay lại bài toán, ta chia hình lập phương thành 27 hình lập phương nhỏ cạnh 1/3. Vì 27 x 2 < 75 nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 3 điểm trong số

75 điểm đã cho nằm trong 1 hình lập phương nhỏ nào đó. Diện tích tam giác có đỉnh tại ba điểm này có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{72}$ (đpcm).

Bài toán 20. 21: Có 1991 học sinh đứng thành vòng tròn và quay mặt vào giữa để chơi trò đếm số như dưới đây. Mỗi học sinh đếm một số lần lượt theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ học sinh A nào đó. Các số đếm được là 1, 2, 3 và cứ lặp lại theo thứ tự như thế. Nếu học sinh nào đến số 2 hoặc số 3 thì phải rời ngay khỏi vị trí ở vòng tròn. Học sinh còn lại cuối cùng sẽ được thưởng. Hỏi học sinh muốn nhận phần thưởng thì lúc bắt đầu chơi phải chọn vị trí thứ bao nhiêu theo chiều kim đồng hồ kể từ học sinh A đếm số 1 lần đầu tiên?

Hướng dẫn giải

Xét 2 trường hợp:

1) Trường hợp có 3^n học sinh đứng thành vòng tròn

Nếu chia học sinh thành từng nhóm 3 người theo số đếm 1, 2, 3 thì có $3^n : 3 = 3^{n-1}$ nhóm. Sau 1 vòng đếm thì số học sinh ra khỏi vòng là 2.3^{n-1} và còn lại 3^{n-1} học sinh. Chú ý rằng học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong vòng đầu sẽ lại đếm số 1 đầu tiên ở mỗi vòng nên sẽ ở lại đến cuối cùng và sẽ được nhận thưởng.

2) Trường hợp có 1991 học sinh

Ta có: $3^6 = 729 < 1991 < 3^7 = 2187$. Ta đưa về trường hợp 1 bằng cách tính xem đến khi nào còn lại $729 = 3^6$ học sinh thì học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong 729 người sẽ được thưởng.

Như vậy: cần có 1991 – 729 = 1262 học sinh rời khỏi vị trí có 1262 : 2 = 631 nhóm 3 người, do đó cần có 631 . 3 = 1893 học sinh đứng trước học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong 729 người còn lại.

Vậy nếu chọn số 1 đầu tiên trong số 1991 người thì học sinh B đứng ở vị trí thứ 1894 sẽ là người đếm số 1 đầu tiên trong 729 người, do đó sẽ còn lại đến cuối cùng và được thưởng.

Bài toán 20. 22: Tại đỉnh A_0 của đa giác lồi $A_0A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) người ta đặt n viên bi. Thực hiện việc chuyển chỗ các viên bi theo cách sau: mỗi lần lấy một viên bi ở A, rồi đặt vào một đỉnh kề A_i và đồng thời lấy một viên bi ở A_i rồi đặt nó vào một đỉnh kề A_i với i, j $\in$ {0, 1, 2,...,n} (có thể i = j).

Hãy tìm tất cả giá trị của n sao một số hữu hạn lần thực hiện việc chuyển bi nói trên một cách thích hợp thì ở mỗi đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ đều có một viên bi.

Hướng dẫn giải

Ta thấy n = 2k (k là số tự nhiên ≥ 2) thoả mãn bài ra.

Vậy ta xét n = 2k + 1 với k tự nhiên $\neq 0$. Ta tô các đỉnh $A_0, A_1, ..., A_{2k+1}$ với hai màu xanh, đỏ sao cho đỉnh A_0 được tô màu đỏ; với mỗi i = 0, 1, 2, ..., 2k + 1 đỉnh A_i có màu khác với màu của đỉnh kề với nó.

Ta nhận thấy rằng: trong mỗi lần chuyển bi, mỗi bi đều được chuyển từ đỉnh có màu này sang đỉnh có màu kia. Vì thế, sau mỗi lần chuyển bi, tổng số bi có tại tất cả các đỉnh được tô màu xanh không thay đổi tính chẵn, lẻ. Suy ra có thể xếp được vào mỗi đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{2k+1}$ một bi chỉ khi $k + 1 \equiv 0 \pmod 2$ hay $n \equiv 3 \pmod 4$. Ngược lại, với $n = 4m + 3$, $m \in N$, thực hiện việc chuyển bi theo cách sau đây chẳng hạn:

Lần lượt, với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 2m+1$ ở bước thứ 1 ta làm như sau: Lấy 2 bi ở A_0, chuyển chúng qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots,$ tới đỉnh A_{2k} thì dừng lại. Sau bước thứ $2m+1$, tại đỉnh A_0 sẽ có 1 bi, tại mỗi đỉnh $A_2, A_4, \ldots, A_{4m+1}$ đều có 2 bi, còn tại các đỉnh $A_1, A_3, \ldots, A_{4m+3}$ đều không có bi. Sau đó lần lượt với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 4m+1$ ở bước thứ k ta làm như sau: Lấy 1 bi ở A_{4k} chuyển sang A_{4k+1}, đồng thời lấy 1 bi ở A_{4k+2} chuyển sang A_{4k+3} (quy ước coi A_0 là A_{4m+4}). Sau bước thứ $m+1$, tại mỗi điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{4m+3}$ sẽ có 1 bi. Vậy tất cả giá trị $n \neq 3$ phải tìm là $n \equiv 1 \pmod 4$.

Bài toán 20. 23: Từ bảng

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots 3n \\ & & & \ldots. \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \ldots n^2 \end{bmatrix}$$

Hãy chọn n số sao cho không có hai số nào đứng trong cùng một dòng và không có 2 số nào nằm trong cùng một cột của bảng. Tính tổng n số đã chọn.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu a_{ij} là số ở hàng thứ i, cọt thứ j và để ý đến cấu tạo của bảng thì ta có: $a_{ij} = (i-1)n + j$

Muốn có n số thoả mãn đầu bài, ta chỉ việc lấy n số sau:

$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$ trong đó α_i là số thứ tự chỉ cột và $\alpha_i \neq \alpha_j$ nếu $i \neq j$.

Như vậy nếu hoán vị các α_i cho nhau, ta được tất cả n! cách chọn

Muốn có cách chọn khác ta chỉ việc hoán vị α_i và α_j cho nhau mà phép hoán vị không làm thay đổi tổng của hai số đã cho, nên mọi cách chọn đều có chung một tổng. Gọi tổng của n chữ số đó là S ta có:

$$S = (1-1)n + \alpha_1 + (2-1)n + \alpha_2 + \ldots + (n-1)n + \alpha_n$$

$$S = 0n + n + 2n + \ldots + (n-1)n + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

mà $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

nên: $S = [1 + 2 + \ldots + (n-1)]n + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Bài toán 20. 24: Tồn tại hay không một cách xếp 100 số nguyên: 51, 52, ..., 149, 150 vào trong một lưới vuông gồm 10 hàng 10 cột (mỗi ô vuông một số) sao cho nếu *a* và *b* là hai số đứng kề nhau trên một hàng hoặc trên một cột thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 - ax + b = 0$, $x^2 - bx + a = 0$ có nghiệm nguyên?

Hướng dẫn giải

Đặt $S = \{51; 52: ...; 150\}$. Giả sử $a, p \in S$; *p* nguyên tố. Khi đó:

– Nếu phương trình $x^2 - ax + p = 0$ có nghiệm nguyên, thì theo định lý Vi–ét, cả hai nghiệm x_1, x_2 của nó đều nguyên và dương; hơn nữa, do *p* là số nguyên tố, $x_1x_2 = p \Rightarrow \{x_1; x_2\} = \{1; p\} \Rightarrow a = x_1 + x_2 = p + 1$.

– Nếu phương trình $x^2 - px + a = 0$ có nghiệm nguyên. Cả hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình này cũng nguyên dương và $x_1 + x_2 = p$, nên

$$\{x_1; x_2\} = \{1; p-1\} \vee \{x_1; x_2\} = \{2; p-2\} \vee ...$$

$$\vee \{x_1; x_2\} = \{[p/2]; p - [p/2]\}.$$

Suy ra: $a = p - 1 \vee a = 2(p-2) \vee ... \vee a = [p/2](p - [p/2])$.

Nhưng do $p - 1 \le 2(p-2) \le ... \le [p/2](p - [p/2])$

nên nếu *p* thỏa: $2(p-2) > 150 \Leftrightarrow p > 77$ thì chỉ còn khả năng $a = p - 1$.

Từ hai trường hợp trên, ta thấy: nếu tồn tại một cách xếp 100 số của *S* vào trong một lưới vuông gồm 10 hàng 10 cột sao cho yêu cầu của bài toán được thỏa mãn, thì mỗi số nguyên tố *p* thỏa (1) của *S* có tối đa 2 số đứng kề với nó, là $p \pm 1$; vậy, chỉ có thể xếp *p* vào một trong 4 ô vuông ở góc của lưới vuông đó.

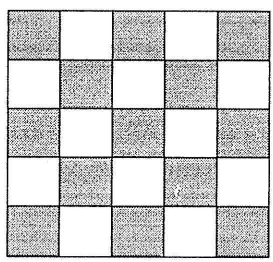
Nhưng *S* có nhiều hơn 4 số nguyên tố thỏa p>77, là 79, 83, 89, 97, 101, ...; nên ta không thể xếp hết chúng vào lưới vuông.

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng: không thể tồn tại một cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 20. 25: Một bảng vuông gồm 1999 x 1999 ô với mỗi ô có chứa một hoặc không hòn đá. Tìm số bé nhất các hòn đá để cho khi chọn một ô trống bất kì, tổng số các hòn đá trong hàng và cột tương ứng với ô trống này ít nhất là 1999.

Hướng dẫn giải

Ta hãy xếp các hòn đá lên bảng vuông sao cho ở bốn góc đều có bốn hòn đá, và sắp xếp toàn bảng như hình bàn cờ (ô đen có một hòn, ô trắng không có – có dạng như hình 5 x 5 bên cạnh).



Dễ thấy cách sắp xếp này thoả mãn điều kiện đề bài.

Tổng số các hòn đá được dùng trong cách sắp xếp này là:

1000 x 1000 + 999 x 999 = 1998001 (hòn đá)

Ta sẽ chứng minh rằng 1998001 là số bé nhất cần tìm.

Giả sử các điều kiện của bài toán được thoả mãn, trong đó, k là số bé nhất các hòn đá trong một hàng hay cột bất kì.

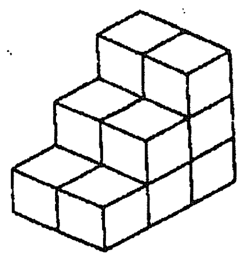
Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng có một cột nào đó chứa k hòn đá. Trong cột này, tương ứng với mỗi một trong k hòn đá, hàng có chứa hòn đá đó phải chứa ít nhất k hòn đá, do giả thiết k là số bé nhất các hòn đá trong một hàng hay cột bất kì. Với 1999 – k ô trống của cột này, tương ứng với một ô trống, để thoả mãn điều kiện đã nêu, hàng chứa ô trống phải chứa ít nhất 1999 – k hòn đá. Vậy tổng số các hòn đá ít nhất phải là:

$$k^2 + (1999-k)^2 = 2\left(k - \frac{1999}{2}\right)^2 + \frac{1999^2}{2} \geq \frac{1999^2}{2} = 1998000,5$$

Tóm lại, số cần tìm là 1998001.

Bài toán 20. 26:

Một khối bằng gạch có dạng hình của một tam cấp gồm ba bậc có bề rộng là 2 được làm từ 12 khối hình lập phương đơn vị. Hãy xác định số nguyên n sao cho ta có thể dựng một khối lập phương cạnh n từ các khối bằng gạch (dạng tam cấp) ấy.



Hướng dẫn giải

Thể tích trọn viên gạch (dạng tam cấp) bằng 12, nên điều kiện ắt có là cạnh của hình lập phương phải là bội của 6. Hai viên gạch có thể gắn với nhau dễ dàng để tạo thành một hình hộp chữ nhật kích thước 2 x 3 x 4, và hình hộp chữ nhật này có thể xếp thành hàng để tạo thành một hình lập phương cạnh 1 hay thành một hình lập phương bất kì có cạnh là bội của 12.

Đảo lại, ta sẽ chứng minh rằng:

Một hình lập phương cạnh $n = 6\ell$ chỉ có thể tạo thành theo điều kiện bài toán nếu ℓ chẵn.

Thật vậy, giả sử một hình lập phương như thế được tạo xong, thế thì ta đã sử dụng $m = n^3/12 = 18\ell^3$ viên gạch (dạng tam cấp). Ta chuyển hình lập phương này vào trong góc phần tám x, y, z $\geq$ 0 của hệ trục toạ độ trong không gian với một đỉnh của hình lập phương nằm tại gốc O(0, 0, 0). Tô màu mỗi cạnh của hình lập phương đơn vị

[i, i + 1] x [j, i + 1] x [k, k+1]

bằng một trong tám màu, tuỳ theo tính chẵn lẻ của bộ ba (i, j, k). Trong mỗi viên gạch, tất cả tám màu đều có sáu trong tám mày ấy xuất hiện chỉ trong một hình lập phương đơn vị, và mỗi một trong hai màu còn lại có mặt trong ba hình lập phương đơn vị.

Ta chọn một trong tám màu và gọi p là số viên gạch mà trong đó màu này xuất hiện ba lần. Trong hình lập phương có m viên gạch, màu này xuất hiện cả thảy $3p + (m - p) = m + 2p$ lần.

Mặt khác, tám màu được phân phối đều trong hình lập phương cạnh 6ℓ, cho nên mỗi màu xuất hiện đúng 12m/8 lần. Suy ra rằng $m + 2p = 12m/8$ và thế là $m = 4p$. Như vậy m là bội của 4 và ℓ phải là số chẵn.

Bài toán 20. 27: Tại một cuộc khiêu vũ, một nhóm S gồm 1994 học sinh đứng thành một vòng tròn lớn. Mỗi học sinh sẽ vỗ vào tay một trong hai học sinh kề hai bên một số lần. Với mọi học sinh x, ta gọi f(x) là tổng tất cả các số lần mà x vỗ vào tay những người bạn đứng kề. Chẳng hạn, ta giả sử có 3 học sinh A, B và C, A vỗ vào tay B hai lần, B vỗ vào tay C ba lần và C vỗ vào tay A năm lần. Như thế, ta có: f(A) = 7, f(B) = 5 và f(C) = 8

a) Chứng minh$\{f(x) / x \in S\} \neq \{n / n$ là số nguyên, $2 \le n \le 1995\}$

b) Tìm một số ví dụ chứng tỏ:

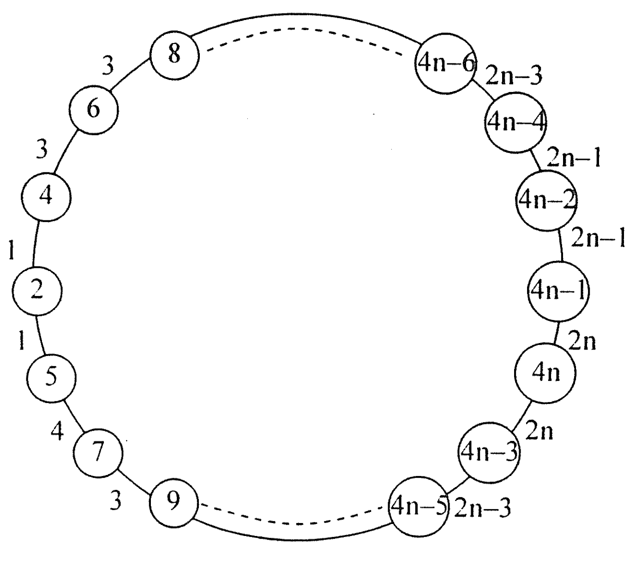
$\{f(x) / x \in S\} = \{n / n$ là số nguyên, $n \neq 3$, $2 \le n \le 1996\}$

Hướng dẫn giải

a) Để ý rằng hai lần tổng số các lần vỗ vào tay là một số chẵn, và bằng $\sum\limits_{x \in S} f(x)$ số này không thể bằng số lẻ: $2 + 3 + 4 + \ldots + 1995$

b) Cho $n \ge 2$. Với một nhóm S_n gồm $4n - 2$ học sinh, biểu đồ sau đây cho ta ví dụ chứng tỏ.

$\{f(x) / x \in S\} = \{n / n$ là số nguyên, $n \neq 3$, $2 \le n \le 1996\}$



Mỗi vòng tròn trên biểu đồ biểu diễn một học sinh x và con số trong vòng tròn biểu diễn f(x). Số nằm trên các cung tròn thì biểu diễn số lần 2 học sinh kề nhau vỗ vào tay nhau. Chọn n = 499, ta có được ví dụ thoả mãn bài toán.

Bài toán 20. 28: Cho $n \geq 1$ là một số nguyên. Một con đường từ (0,0) tới (n,n) trong mặt phẳng xOy được định nghĩa là một chuỗi các di chuyển liên tiếp của đơn vị sang phải (di chuyển này được kí hiệu bởi E) hay lên trên (di chuyển này được kí hiệu bởi N), mọi di chuyển được thực hiện trong nửa mặt phẳng $x \geq y$. Một bước nhảy trên con đường là sự kết hợp của hai di chuyển liên tiếp có dạng EN. Chứng minh rằng số các con đường từ (0,0) đến (n,n) mà chứa đúng s bước nhảy ($n \geq s \geq 1$) là bằng $\frac{1}{s}C_{n-1}^{s-1}C_n^{s-1}$

Hướng dẫn giải

Một con đường với s bước nhảy từ (0,0) đến (n,n) được gọi là một con đường kiểu (n, s). Cho f(n, s) là số con đường kiểu (n, s) và đặt

$$g(n,s) = \frac{1}{s}C_{n-1}^{s-1}C_n^{s-1}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n rằng (n, s) = g(n, s) với s = 1, 2,..., n. Dễ dàng thấy rằng:

f(1, 1) = 1 = g(1. 1),f(2, 1) = 1 = g(2, 1),f(2, 2) = 1 = g(2, 2).

Cho $n \geq 2$ và giả sử rằng f(m, s) = g(m, s) với $1 \leq s \leq m \leq n$. Rõ ràng là f(n + 1, 1) = g(n + 1, 1). Ta sẽ chứng minh rằng f(n + 1, s + 1) = g(n + 1, s + 1) với $1 \leq s \leq n$.

Ta nói một con đường kiểu (n, s) và một con đường kiểu (n + 1, s + 1) là liên đới với nhau nếu con đường sau thu được từ con đường trước bằng cách hoặc nhét thêm vào con đường thứ nhất một cặp EN giữa hai di chuyển liên tiếp có dạng (E, E), (N, N) hay (N, E), hoặc thêm vào một cặp EN ở cuối con đường. Ta cũng nói rằng con đường kiểu (n, s + 1) và con đường kiểu (n + 1, s + 1) là liên đới nếu con đường dài hơn có được từ con đường ngắn hơn bằng cách thêm một cặp EN vào giữa (E, N).

Mỗi con đường kiểu (n, s) liên đới với 2n + 1 – s con đường kiểu (n + 1, s + 1) khác; mỗi con đường kiểu (n, s+1) liên đới với s + 1 con đường kiểu (n + 1, s + 1) khác; mỗi con đường kiểu (n + 1, s + 1) liên đới với đúng s + 1 con đường kiểu (n, s) hay (n, s + 1). Vì thế số các cặp liên đới là:

$(s + 1)f(n + 1, s + 1) = (2n + 1 - s)f(n, s) + (s + 1)f(n, s + 1)$

Dễ dàng kiểm chứng được rằng:

$(s + 1)g(n + 1, s + 1) = (2n + 1 - s)\, g(n, s) + (s + 1)g(n, s + 1)$ và khi đó $f(n + 1, s + 1) = g(n + 1, s + 1)$.

Chú ý: Nếu $m \geq n \geq s \geq 1$, số các con đường từ (0, 0) đến (n, n) có s bước nhảy sẽ được cho bởi $f(m, n, s) = C_m^s C_{n-1}^{s-1} - C_m^{s-1} C_{n-1}^{s}$.Điều này được chứng minh bằng quy nạp theo m:

$(s + 1)f(m+1,n+1,s+ 1) = (m+ n +1- s)f(m, n, s) + (s+1)(m, n, s + 1)$.

Bài toán 20. 29: Có 18 người tham gia một cuộc thi đấu gồm 17 vòng đấu. Mỗi vòng có 9 trận thi đấu và trong mỗi vòng, mỗi đấu thủ tham gia một trận. Mỗi người đều thi đấu với người khác đúng một trận trong suốt cuộc thi đấu. Tìm số n lớn nhất sao cho nếu có xếp lại cuộc thi đấu (theo nguyên tắc trên) ta vẫn có thể tìm được 4 người trong số 18 người tham gia, mà họ chỉ chơi đúng một trận vào lúc kết thúc vòng đấu thứ n.

Hướng dẫn giải

Câu trả lời là $n = 7$

Đầu tiên, ta chứng minh $n = 8$ không thoả mãn

Thật vậy, khi $n = 8$ ta chỉ ra một sự sắp xếp để không thoả mãn như sau: Gọi A là tập con của một tập gồm 9 cầu thủ và B phần bù của A trong tập 9 cầu thủ đó. Lúc đó, ở 8 vòng thi đấu đầu tiên, ta có thể sắp xếp sao cho mỗi phần tử của B thi đấu với mọi phần tử khác của B. Ta chỉ cần chỉ ra rằng có một cuộc đấu gồm $2N - 1$ vòng trong số $2N$ đấu thủ sao cho có N trận đấu ở mỗi vòng và mỗi người đều thi đấu với người khác đúng một trận trong suốt cuộc thi đấu đó. Ta đánh số các đấu thủ là 0, 1,..., $2N-2$, X. Đánh số các vòng đấu là 0, 1, 2, ..., $2N-2$. Giả sử hai đấu thủ khác nhau i, j (không phải X) thi đấu ở vòng $i + j \pmod{2N - 1}$. Cho i và X đấu nhau ở vòng $2i \pmod{2N-1}$. Dễ dàng kiểm tra rằng cách sắp xếp như vậy thoả mãn yêu cầu.

Bây giờ ta xét trường hợp $n = 7$. Gọi S là tập hợp lớn nhất gồm các cầu thủ mà không có hai người nào trong đó đấu với nhau, gọi S' là tập hợp các đấu thủ còn lại. Chọn A trong S' là một người đã chơi với vài đấu thủ trong S. Giả sử $|S| = m$, ta có $|S'| = 18 - m$. Ta sẽ chứng minh rằng A đã chơi nhiều nhất là với $m - 2$ phần tử của S. Giả sử điều ngược lại xảy ra. Mỗi đấu thủ đã chơi 7 trận, do tất cả các phần tử của S đều có chơi với các phần tử của S' nên đã có 7m trận diễn ra giữa các phần tử của S và các phần tử của S'. Nếu mọi phần tử của S' đã chơi với $m - 1$ hay nhiều hơn các phần tử của S thì có ít nhất $(18 - m)(m - 1)$ trận diễn ra giữa các phần tử của S và các phần tử của S', suy ra $(18 - m)(m - 1) \geq 7m$, hay $m^2 - 12m + 18 \leq 0$, do đó $m < 2$ hoặc $m > 10$. Rõ ràng không thể có $m < 2$ (vì chắc chắn có hai đấu thủ không chơi với nhau). Còn nếu $m > 10$ thì do A chỉ chơi có 7 trận nên anh ta đã chơi ít hơn $m - 2$ phần tử của S'.

Vì vậy, ta có thể tìm được B và C thuộc S sao cho A không chơi với B hay C. Vì A không thuộc S và S lớn nhất như đã nói trên nên phải có D thuộc S là người đã chơi với A. Như thế A, B, C, D là 4 người cần tìm mà trong số họ chỉ chơi có một trận (A với D).

Bài toán 20. 30: một cuộc họp có 12k người, mỗi người trao đổi lời chào với đúng $3k + 6$ người khác. Với hai người bất kì nào đó, số người trao đổi lời chào với cả hai người này là giống nhau.

Hỏi có bao nhiêu người tham dự cuộc họp?

Hướng dẫn giải

Với hai người bất kì, ta gọi n là số cố định những người khác có trao đổi lời chào với cả hai. Xét một người đặc biệt a. Gọi B là tập hợp những người có trao đổi lời chào với a, và C là tập hợp những người không trao đổi lời chào với a. Thế thì có 3k + 6 người trong B và 9k – 7 người trong C. Với một người b bất kì trong B, thì người có trao đổi lời chào với a và b phải thuộc B. Như thế b đã trao đổi lời chào với n người trong B, và như thế với 3k + 5 – n người trong C.

Với một người c bất kì trong C, người trao đổi lời chào với a và c cũng phải thuộc B. Do đó c đã trao đổi lời chào với n người trong B. Tổng số lời chào được trao đổi giữa B và C được cho bởi:

$(3k + 6)(3k + 5 – n) = (9k – 7)n$, hay $9k^2 – 12n + 33k + n + 30 = 0$

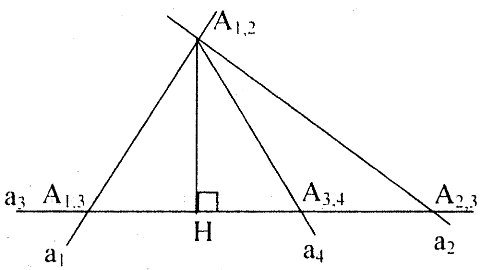
Suy ra n = 3m, với m nguyên dương và $4m = k+3+\dfrac{9k+43}{12k-1}$

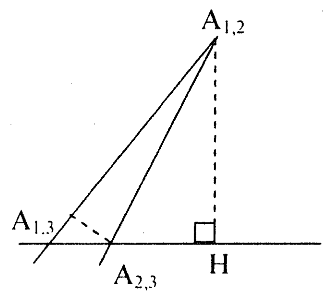
Nếu $k \geq 15$, thì $12k – 1 > 9k + 43$ và 4m sẽ không phải là một số nguyên.

Với $1 \leq k \leq 14$, chỉ có k = 3 làm cho số $\dfrac{9k+43}{12k-1}$ nhận giá trị nguyên. Vậy có tất cả 36 người tại cuộc họp.

Bài toán 20. 31: Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau nhưng không cùng đi qua một điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm là giao của hai và chỉ hai trong số n đường thẳng đó

Hướng dẫn giải





Gọi $a_1, a_2,..., a_n$ là n đường thẳng đã cho. Kí hiệu giao của hai đường thẳng a_i, a_j là a_{ij}. Xét các khoảng cách từ điểm a_{ij} tới đường thẳng a_k không đi qua nó. Vì số các khoảng cách đó là hữu hạn nên phải tìm được 3 đường thẳng (chẳng hạn a_1, a_2, a_3) sao cho khoảng cách từ điểm $A_{1,2}$ tới đường thẳng a_3 là ngắn nhất (hoặc một trong những khoảng cách ngắn nhất).

Ta chứng minh rằng không còn một đường thẳng thứ ba nào (khác a_1, a_2) lại đi qua điểm $A_{1,2}$. Trước hết ta nhận thấy rằng nếu gọi H là chân đường vuông góc hạ từ $A_{1,2}$ tới a_3 thì H phải thuộc đoạn thẳng nối $A_{1,3}$ và $A_{2,3}$.

Thật vậy nếu H nằm ngoài đoạn thẳng đó và $A_{2,3}$ gần H hơn $A_{1,3}$ thì rõ ràng khoảng cách từ $A_{2,3}$ tới A_1 còn nhỏ hơn $A_{1,2}H$.

Bây giờ giả sử rằng qua $A_{1,2}$ còn có đường thẳng a_4. Khi đó a_4 phải cắt a, tại một điểm $A_{3,4}$, điểm này phải nằm trên một trong hai tia có gốc H của đường thẳng a_3. Giả sử nó nằm trên tia chứa điểm $A_{2,3}$ thì rõ ràng khoảng cách từ $A_{2,3}$ tới a_2 nhỏ hơn $A_{1,2}H$. Vô lý!.

Bài toán 20. 32: Cho một đa giác đều 2007 đỉnh. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thoả mãn tính chất: Trong mỗi cách chọn k đỉnh của đa giác luôn tồn tại 4 đỉnh tạo thành một tứ giác lồi mà 3 trong số 4 cạnh của nó là 3 cạnh của đa giác đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi các đỉnh của đa giác đều đã cho là $A_1, A_2, \ldots, A_{2007}$.

Chú ý rằng tứ giác (tạo nên từ 4 trong số các đỉnh của đa giác) có 3 cạnh là 3 cạnh của đa giác khi và chỉ khi 4 đỉnh của tứ giác đó là 4 đỉnh liên tiếp của đa giác.

Gọi A là tập các đỉnh: $[A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_7, \ldots, A_{2003}, A_{2006}]$ (bỏ đi các đỉnh A_{4i}, i = 1,...,501 và A_{2007}). Hiển nhiên $|A| = 1505$ và trong A không chứa 4 đỉnh liên tiếp nào của đa giác. Dễ thấy, mọi tập con của A đều không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Vậy $k \geq 1506$. Ta sẽ chứng minh mọi cách chọn 1506 đỉnh tuỳ ý của đa giác thì sẽ tồn tại 4 đỉnh liên tiếp của đa giác trong 1506 đỉnh đó. Thật vậy, giả sử T là một tập gồm 1506 đỉnh tuỳ ý của đa giác. Phân hoạch tập các đỉnh của đa giác thành các tập hợp.

$B_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$; $B_2 = \{A_5, A_6, A_7, A_8\}$;.....

$B_{501} = \{A_{2001}, A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}\}$;$B_{502} = \{A_{2005}, A_{2006}, A_{2007}\}$.

Giả sử T không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Lúc đó với mỗi i = 1,..., 501, tập B_i không thuộc T, tức là mỗi tập B_i đó sẽ có ít nhất một đỉnh không thuộc T. Khi đó $|T| \leq 3 \times 502 = 1506$. Do $|T| = 1506$ nên $B_{502} \subset T$ và mỗi tập Bi (i = 1, 501) có đúng 3 phần tử thuộc T.

Ta có : $A_{2005}, A_{2006}, A_{2007} \in T$ suy ra $A_i \notin T$

$\Rightarrow A_2, A_3, A_4 \in T \Rightarrow A_5 \notin T \Rightarrow A_6, A_7, A_8 \in T \ldots$

$\Rightarrow A_{2002}, A_{2003}, A_{2004} \in T$.

Khi đó 4 đỉnh liên tiếp $A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}, A_{2005}$ thuộc T, mâu thuẫn

Vậy k = 1506.

Có thể giải ngắn gọn hơn bằng cách xét 2007 – 1506 = 501 điểm còn lại chia đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho không quá 501 cung, và phải có một cung trong chúng chứa không ít hơn $\frac{1506}{501} > 3$ đỉnh liên tiếp.

Bài toán 20. 33: Có bao nhiêu cách tô màu đỏ cho 16 khối lập phương đơn vị của khối lập phương 4 x 4 x 4, sao cho mỗi khối 1 x 1 x 4 (và mỗi khối 1 x 4 x 1 hay 4 x 1 x 1) có chứa đúng một khối lập phương đơn vị màu đỏ?

Hướng dẫn giải

Mấu chốt của vấn đề là chứng tỏ tồn tại một song ánh giữa tập các sắp xếp chấp nhận được (tức là thoả mãn yêu cầu đề bài) và tập các hình vuông Latin 4 x 4 (Một hình vuông n x n ô được gọi là một hình vuông Latin nếu nó chứa n phần tử a_1, .., a_n và mỗi hàng hoặc mỗi cột đều có chứa đựng n phần tử này).

Ở mặt đỉnh của khối lập phương, ta viết các số 1, 2, 3 hoặc 4 lên mỗi hình vuông (của mặt đỉnh này) tuỳ theo khoảng cách đến khối đơn vị có màu đỏ tính từ trên xuống. Chú ý rằng dưới mỗi hình vuông (trên mặt đỉnh) chắc chắn có ít nhất một khối đơn vị màu đỏ. Có 16 hình vuông, và chỉ có 16 khối đơn vị đó, do đó chắc chắn trong mỗi cột có đúng một khối đơn vị đỏ. Bây giờ, phải có một số 1 trong mỗi hàng của mỗi hình vuông, vì nếu không thì sẽ không có khối đơn vị đỏ nào trong khối cột 1 x 1 x 4 tương ứng. Tương tự như thế, phải có các số 2, 3 và 4. Như vậy, mỗi hàng phải là một hoán vị của 1, 2, 3, 4. Lí luận tương tự cho mỗi cột. Do đó, hình vuông (trên mặt đỉnh) phải là hình vuông Latin. Đảo lại, một hình vuông Latin cũng tương ứng với một sắp xếp chấp thuận được.

Như thế, việc còn lại là tính xem có bao nhiêu hình vuông Latin 4 x 4 như thế. Dễ thấy có đúng 4 hình vuông theo mẫu như hình bên trái, đó là:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	x	x	x	2	3	4	1	2	1	4	3	2	1	4	3	2	4	1	3
3	x	x	x	3	4	1	2	3	4	2	1	3	4	1	2	3	1	4	2
4	x	x	x	4	1	2	3	4	3	1	2	4	3	2	1	4	3	2	1

Đến đây, có thể tiếp tục lí luận dựa trên các hoán vị để chứng tỏ có tất cả 4 x 24 x 6 = 576 khả năng sắp xếp một hình vuông Latin.

Bài toán 20. 34: Cho tam giác ABC. Nếu ta sơn các điểm của mặt phẳng bằng hai màu xanh và đỏ, hãy chứng minh rằng hoặc là tồn tại hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng một đơn vị, hoặc là tồn tại ba điểm màu xanh tạo thành một tam giác bằng tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ gọi một đa giác là đa giác xanh (tương ứng, đỏ) nếu nó có tất cả các đỉnh cùng màu xanh (tương ứng, đỏ) ta cũng gọi một đoạn thẳng là đoạn thẳng xanh (tương ứng, đỏ) nếu đoạn thẳng đó có hai điểm đầu mút cùng màu xanh (tương ứng, đỏ).

Giả sử ngược lại rằng không tồn tại hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng một đơn vị và cũng không tồn tại ba điểm màu xanh tạo thành một tam giác bằng tam giác ABC (*)

Kí hiệu a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng: $a \leq b, c$.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng không có đoạn thẳng đỏ nào có độ dài a cả. Thật vậy, giả sử XY là một đoạn thẳng đỏ có độ dài a, khi đó, các đường tròn đơn vị nhận X, Y làm tâm sẽ hoàn toàn màu xanh. Gọi Z là điểm sao cho $\Delta XYZ = \Delta ABC$ (viết theo các đỉnh tương ứng). Khi đó, đường tròn đơn vị tâm Z phải có toàn màu đỏ, vì nếu không thì Z màu xanh và tam giác XYZ là tam giác xanh bằng ΔABC, mâu thuẫn với giả thiết (*). Trên đường tròn đơn vị này chắc chắn có hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng một đơn vị, vô lí.

Bây giờ, toàn mặt phẳng không thể màu xanh, nên có một điểm nào đó màu đỏ mà ta gọi là R. Đường tròn (T) có tâm R và bán kính a phải toàn màu xanh. Khi đó, lấy hai điểm D và E trên (T) sao cho DE = a. Vì $a \le b$, c nên ta có thể dựng điểm F nằm ngoài (T) sao cho $\Delta DEF = \Delta ABC$ (viết theo các đỉnh tương ứng), điểm F phải có màu đỏ. Như vậy, nếu ta quay DE quanh R, thì điểm F sẽ vạch nên một đường tròn bán kính lớn hơn a và có toàn màu đỏ, trên đường tròn này ta có thể tìm được hai điểm màu đỏ có khoảng cách a, mâu thuẫn với chứng minh trên. Như vậy, giả thiết (*) là sai và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 35: Tìm số nguyên dương n bé nhất ($n > 3$) thoả mãn tính chất sau: Với n điểm đôi một phân biệt, thẳng hàng và $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$ thì mọi cách tô màu n điểm đó bằng đúng 2 màu khác nhau đều tồn tại 3 điểm A_i, A_j, A_{2j-1} (với $1 \le i < 2j - 1 \le n$) được tô cùng một màu.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta dùng 2 màu là xanh kí hiệu là (X) và đỏ kí hiệu là (Đ)

Bổ đề: Với n điểm đã cho của đề bài, nếu ta đặt chúng trên một trục toạ độ x'Ox sao cho điểm A_k có toạ độ bằng k. Vậy: 3 điểm A_i, A_j, A_{2j-1} được tô cùng một màu khi và chỉ khi toạ độ của 3 điểm trên theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

a) Ta chứng minh: Với n = 8 (và từ đó $\forall n \le 8$) thì tồn tại cách tô màu 8 điểm A_1, A_2, ..., A_8 sao cho không có 3 điểm A_i, A_j, A_{2j-1} nào được tô cùng màu. Thật vậy: Ta chỉ việc tô các điểm A_1, A_2, A_5, A_6 cùng màu (X) và tô các điểm A_3, A_4, A_7, A_8 cùng màu (Đ) $\Rightarrow$ đpcm.

b) Ta phải chứng minh: Với n = 9 thì mọi cách tô màu 9 điểm: A_1, A_2,..., A_9 bằng đúng 2 màu khác nhau đều tồn tại 3 điểm A_i, A_j, A_{2j-i} (với $1 \le i < 2j - 1 \le 9$) được tô cùng một màu. Thật vậy, Giả sử trái lại rằng: tồn tại cách tô màu 9 điểm trên sao cho mọi bộ 3 điểm A_i, A_j, A_{2j-i} (với $1 \le i < 2j - i \le n$) đều bị tô khác nhau. Khi đó, vận dụng Bổ đề trên, ta suy ra rằng: với mỗi chỉ số $k \in \{3, 4, 5\}$ thì các điểm A_k và A_{k+2} phải được tô khác màu (vì: nếu điểm A_k và A_{k+2} được tô cùng màu chẳng hạn là màu (X) thì ta có thể tô các điểm A_{k+2}, A_{k+1}, A_{k+4} cùng màu (Đ), điều này lại trái với điều giả sử trên). Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử tô A_3 màu (Đ) $\Rightarrow$ A_5 màu (Đ) và do đó A_7 cùng màu (Đ). Vì 3, 4, 5 là cấp số cộng $\Rightarrow$ A_4 màu (X) và do đó A_6 cũng màu (X). Vì 4, 6, 8 là cấp số cộng $\Rightarrow$ A_8 màu (Đ). Vì 7, 8, 9 là cấp số cộng $\Rightarrow$ A_9 màu (X). Vì 1, 3, 5 là cấp số cộng $\Rightarrow$ A_1 màu (X). Vì 2, 5, 8 là cấp số cộng $\Rightarrow$ A_2 màu (X). Vậy 3 điểm A_2, A_4, A_6 lại cùng màu (X), trái với điều giả sử trên.

Vậy số n phải tìm là n = 9.

Bài toán 20. 36: Cho G là một đồ thị liên thông gồm k cạnh. Chứng minh rằng có thể đánh số các cạnh bằng tất cả các số 1, 2, 3,..., k sao cho tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng 1.

Hướng dẫn giải

Ta bắt đầu tại một đỉnh v_0 nào đó.

Hãy tưởng tượng rằng ta đang đi dọc theo các cạnh phân biệt của đồ thị, vừa đi vừa đánh số chúng như ta đang đếm: 1, 2, 3,..., cho đến khi ta không thể đi xa hơn được nữa vì nếu muốn đi thêm phải dừng lại một cạnh đã đi qua.

Nếu có những cạnh không được đánh số thì một trong những cạnh này phải có một đỉnh ta đã đi qua, vì G liên thông. Hãy khởi đầu từ đỉnh này, ta tiếp tục đi dọc theo các cạnh chưa dùng tới, đánh số lại nơi ta đi qua, và tiếp tục như thế cho đến khi một lần nữa ta không thể đi xa hơn. Quá trình này được lặp lại cho đến lúc tất cả các cạnh đều được đánh số.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng việc đánh số như trên thoả mãn điều kiện ở đề bài: tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng 1.

Thật vậy, gọi v là một đỉnh như thế (v thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị). Nếu $v = v_0$, tức v là đỉnh xuất phát, thì một trong các cạnh chứa đỉnh v đã được đánh số 1, do đó hiển nhiên ta có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh v này bằng 1. Nếu $v \neq v_0$, giả sử lần đầu tiên ta đánh số v trên đường đi là vào lúc cuối của cạnh được đánh số r. Vào lúc đó, có nhiều hơn 1 cạnh chưa sử dụng tại đỉnh v, một trong những cạnh này được đánh số r + 1. Do đó, ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh v này bằng 1, vì các cạnh này có chứa r và r + 1. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 37: Cho *G* là một đồ thị *đơn* (*G* không chứa khuyên và không có hai cạnh khác nhau nào nối cùng một cặp đỉnh), có hữu hạn đỉnh. Mỗi đỉnh của *G* sẽ được tô chỉ một trong hai màu đen hoặc trắng. Giả sử ban đầu tất cả các đỉnh của *G* đều có màu đen. Ta được phép thực hiện nhiều lần thao tác: chọn một đỉnh *P* tùy ý của *G* rồi đổi màu của *P* và của mọi đỉnh *kề* với *P* (hai đỉnh được gọi là kề nhau nếu chúng được nối với nhau bởi một cạnh). Hỏi: sau một số hữu hạn lần thực hiện các thao tác như vậy, ta có thể đổi màu của tất cả các đỉnh của *G* sang trắng hết được hay không?

Hướng dẫn giải

Giả sử $G = (V,E)$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n = |V|$ rằng: sau một số hữu hạn lần thực hiện (các) thao tác như đề toán cho phép, ta có thể đổi màu của tất cả các đỉnh của đồ thị đã cho sang trắng.

Đpcm rõ ràng là đúng khi $n = 1$.

Giả sử $n \geq 2$ và đpcm đã đúng cho mọi đồ thị với số đỉnh là $n - 1$.

Xét một đồ thị $G=(V,E)$ với $|V|=n$, $V=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$; mỗi đỉnh P_i $(1\le i\le n)$ đang được tô đen. Gọi f_i $(1\le i\le n)$ là thao tác "cơ sở": đổi màu của P_i và của mọi đỉnh kề với P_i trong *G*.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một dãy *g* gồm một số hữu hạn các thao tác cơ sở f_i mà "hợp thành" của chúng đổi được màu của mọi đỉnh của *G*. (1)

Xét các đồ thị $G_i=(V_i,E_i)$ với tập đỉnh $V_i=V\setminus\{P_i\}$; tập cạnh E_i của G_i thu được từ tập cạnh *E* của *G* bằng cách bỏ đi các cạnh có một trong hai đầu mút là P_i $(1\le i\le n)$. Theo giả thiết quy nạp, với mỗi $1\le i\le n$, tồn tại một dãy hữu hạn các thao tác cơ sở trong G_i mà hợp thành của chúng đổi được màu của mọi đỉnh của G_i; *suy ra*: tồn tại một dãy g_i $(1\le i\le n)$ gồm một số hữu hạn các thao tác cơ sở f_j $(j\ne i)$ trong chính *G* (như đã vừa được giới thiệu ở trên) mà hợp thành của chúng đổi được màu của tất cả các đỉnh của *G*, "không kể" đỉnh P_i. Nếu một trong *n* dãy g_i có hợp thành (của các thao tác "thành phần" trong nó) đổi được màu của cả đỉnh P_i thì chỉ cần lấy $g=g_i$ đó ta có ngay (1).

Giả sử: mọi dãy g_i $(1\le i\le n)$ đều có hợp thành không đổi được màu của đỉnh P_i. (2)

Xét hai trường hợp :

- Với *n* chẵn: lấy $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$; nghĩa là, *g* là dãy gồm tất cả các thao tác thành phần liên tiếp trong g_1, rồi các thao tác thành phần liên tiếp trong g_2, ..., cuối cùng là các thao tác thành phần liên tiếp trong g_n. Do (2) và do $n-1$ lẻ, dễ thấy *g* thỏa (1).
- Với *n* lẻ: trong trường hợp này, từ Bổ đề Bắt tay suy ra *G* có ít nhất một đỉnh bậc chẵn; không mất tính tổng quát, giả sử đó là đỉnh P_1, và tất cả các đỉnh kề với đỉnh P_1 gồm các đỉnh P_2, P_3, ..., P_{2k+1}.

Lấy $g=(f_1,g_1,g_2,\ldots,g_{2k+1})$; do (2), dễ thấy *g* thỏa (1).

Vậy (1) luôn đúng. Theo nguyên lý quy nạp đpcm đúng cho mọi *n*.

Bài toán 20. 38: Cho 21 điểm nằm trên đường tròn. Chứng minh rằng có ít nhất 100 cung được xác định bởi các cặp điểm trong các điểm đã cho được nhìn từ tâm dưới một góc không vượt quá 120^0.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Cho graph G và A, B, C là 3 đỉnh của G sao cho 2 trong số 3 đỉnh đều được nối với nhau bởi 1 cạnh thì tập hợp gồm 3 đỉnh A, B, C và 3 cạnh AB, AC, BC là một tam giác của G. Số tam giác của graph G được kí hiệu là t(G).

Khi đó ta có Định lí Turan : Nếu graph G có n đỉnh và t(G) = 0 thì số cạnh của graph G $\le \left[\frac{n^2}{4}\right]$

Chứng minh: Gọi A là đỉnh của G có bậc lớn nhất, là k. Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_k$ là các đỉnh được nối với A. G' là graph nhận được từ G bằng cách bỏ A và các cạnh xuất phát từ A. Khi đó số cạnh của G = k + số cạnh của G'.

Rõ ràng rằng không có cạnh nào nối B_i và B_k, bởi vì ngược lại ta có tam giác tạo thành, trong G' chỉ đếm được tất cả các cạnh nối từ n–k–1 các đỉnh của G (trừ A, $B_1, B_2, \ldots, B_k$) vì bậc cao nhất của các đỉnh là k nên số cạnh của G' $\le (n-k-1)k$. Do đó số cạnh của G $\le (n-k-1)k + k = (n-k)k \le \frac{n^2}{4}$ (đpcm).

Áp dụng vào bài :Từ 21 điểm ta có tất cả $C_{21}^2 = 210$ cung. Đếm tất cả các cung không vượt quá 180^0 và đầu mút là 2 trong số 21 điểm đã cho. Nối 2 điểm nào đó bởi 1 cạnh, xác định cung có số đo > 120^0. Xét tất cả các cạnh trên tạo thành 1 graph G (có các đỉnh từ 21 điểm đã cho). Không có tam giác nào trong G (nếu ngược lại sẽ có 1 tam giác có tổng lớn hơn 180^0) theo định lý Turan có không nhiều hơn $\left[\frac{21^2}{4}\right]$ cạnh nên phải có ít hơn 210–110 = 100 cung không vượt quá 120^0.

Bài toán 20. 39: Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số trên đường thẳng như sau: tại mỗi bước, xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Các số cho trước là 1 và 1000?

b) Các số cho trước là 1, 2, ..., 1000 và xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải?

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh có đúng hai số 2013 trong dãy nhận được sau 2013 lần thực hiện. Chú ý ta chỉ quan tâm đến số lần xuất hiện của 2013 nên khi có 2 số đứng kề nhau mà tổng các số đều lớn hơn 2013 hoặc các số đã xuất hiện từ trước đó rồi thì ta không cần liệt kê nữa.

Dãy ban đầu 1, 1000

Sau bước 1 1,1001,1000

Sau bước 2 1,1002,1001,2001,1000

Sau bước 3 1,1003,1002,2003,1001,3002,2001,3001,1000

Ta chỉ giữ lại 4 số đầu 1,1003,1002,2003

Sau bước 4 1,1004,1003,2005,...

Sau bước 5 1,1005, 1004,2007,...

Sau bước 6 1,1006, 1005,2009,...

Sau bước 7 1,1007, 1006,2011,...

Sau bước 8 1,1008, 1007,2013,...

Sau bước 8 số 2013 xuất hiện lần đầu. Sau đó trừ tổng của cặp đầu bé hơn 2013 còn tổng các cặp còn lại đều lớn hơn 2013. Hơn nữa, sau mỗi lần thực hiện thì số thứ 2 trong dãy tăng đúng 1 đơn vị nên sau 1013 bước thì số thứ 2 đó là 2013 và từ đó sẽ không có số 2013 nữa.

b) Ta chứng minh có đúng 1198 số 2013 trong dãy nhận được sau 2013 lần thực hiện bằng cách chuyển thao tác trên đường thẳng về trên đường tròn.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 20. 1: Cho số nguyên dương n, tính tổng $a_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i}$

Hướng dẫn

Chứng minh $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Kết quả $\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Bài tập 20. 2: Cho S = {1, 2, 3...,280}. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn

Đếm số các bội của 2, 3, 5, 7 . Kết quả n = 217.

Bài tập 20. 3: Một hoán vị $\{x_1, x_2, ..., x_{2n}\}$ của tập hợp {1, 2,...,2n} được gọi là có tính chất P, trong đó n là một số nguyên dương, nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một i thuộc {1, 2,...,2n–1}. Chứng minh rằng với mỗi n, số các hoán vị có tính chất P lớn hơn số các hoán vị không có tính chất đó.

Hướng dẫn

Lập ánh xạ f từ tập không có tính chất P vào tập có tính chất P, chứng minh f không toàn ánh. Hoặc chứng minh: $|A| > \frac{1}{2}(2n)!$

Bài tập 20. 4: Gọi S là tập hợp tất cả các n–bộ $(X_1, X_2,...,X_n)$ với mỗi X_i là một tập con của tập {1, 2,...,1998}. Với mọi k thuộc S (tức là k là một n–bộ như trên), ta gọi f(k) là số tất cả các phần tử trong hội của n tập hợp của k. Tìm tổng tất cả các f(k) khi k chạy trong khắp S.

Hướng dẫn

X_i là một tập con của tập {1, 2, 3, ..., m} thì tổng cần tính là

$$s(n, m) = m(2^{nm} - 2^{n(m-1)}).$$

Bài tập 20. 5: Chứng minh $7 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} \le 8$,n là nguyên dương.

Hướng dẫn

Đặt $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ Chứng minh: $a_k < a_{k-1}$ thì được $a_n \le 8$

và chứng minh: $(1 + a)^m \ge 1 + ma + (m - 1)^2a^2$

Bài tập 20. 6: Có 9 em học sinh cùng đi một chuyến tàu. Mỗi em chọn tuỳ ý và ngẫu nhiên một trong 3 toa tàu đã định.

a) Tìm xác suất để toa đầu có 3 em;

b) Tìm xác suất để một trong 3 toa có 4 em, một toa nữa có 3 em và toa còn lại có 2 em

Hướng dẫn

a) Không gian mẫu có số phần tử 9^3 . Kết quả $P_1 = \frac{5376}{19683} = \frac{1792}{6561}$

b) Kết quả $P_2 = \frac{280}{729}$.

Bài tập 20. 7: Ba kì thủ dự giải cờ đấu vòng tròn theo cách thức như sau: đầu tiên A đấu với B, người thắng sẽ đấu với C, tiếp theo người thắng mới sẽ đấu với người đã thua.v.v. Giải sẽ kết thúc nếu có ai đó thắng liên tiếp hai ván. Tính xác suất thắng cuộc của mỗi kì thủ nếu tất cả đều ngang tài và tính xác suất thắng cuộc của mỗi kì thủ nếu ván đầu tiên A thắng.

Hướng dẫn

Kết quả $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$ và $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$

Bài tập 20. 8: : Cho n và k là các số nguyên dương, S là tập n điểm trong mặt phẳng thoả mãn các điều kiện:

(i) Không có 3 điểm nào trong S thẳng hàng.

(ii) Với mọi điểm P thuộc S, tồn tại ít nhất k điểm trong S cách đều P.

Chứng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Hướng dẫn

Dùng phản chứng và nguyên tắc Dirichlê. Để ý: $nC_k^2 > 2.C_n^2$

Bài tập 20. 9: Trên một bảng vuông 5 x 5 ô, hai người chơi trò chơi thay nhau đánh số lên các ô vuông. Người thứ nhất luôn đánh số 1, còn người thứ hai luôn đánh số 0. Mỗi lượt, mỗi người đánh một số, cho đến khi không còn ô để đánh nữa. Sau đó, họ tính tổng các số trên các hình vuông 3 x 3 (trong bảng vuông 5 x 5 ô đó). Gọi A là số lớn nhất trong các tổng này. Hỏi người thứ nhất có thể làm cho A lớn đến bao nhiêu, bất chấp người thứ hai đánh như thế nào?

Hướng dẫn

Sử dụng tính đối xứng của bảng vuông. Kết quả A = 6

Bài tập 20. 10: Các tấm thẻ có ghi số từ 1 đến 9 được sắp xếp ngẫu nhiên thành hàng. Trong mỗi nước đi, ta có thể chọn một khối tuỳ ý các tấm thẻ liên tiếp sao cho số ghi trên chúng là theo thứ tự tăng dần hay giảm dần rồi xáo lộn vòng chúng. Chẳng hạn 91<u>653</u>2748 có thể xáo đổi thành 91<u>356</u>2748. Chứng minh rằng trong không quá 12 nước đi, ta có thể sắp xếp 9 tấm thẻ này sao cho số của chúng được sắp theo thứ tự tăng dần hay giảm dần.

Hướng dẫn

Gọi f(n) là giá trị lớn nhất của số nước đi bé nhất cần đến để sắp thứ tự các hoán vị. Chứng minh $f(n) \le f(n-1) + 2$

Bài tập 20. 11: Trên một bàn người ta dán 2015 hình tròn có bán kính bằng nhau sao cho không có hai hình nào giao nhau. Chứng minh rằng với 4 màu khác nhau ta có thể tô các hình tròn (mỗi hình tròn được tô bởi một màu) sao cho các hình tròn tiếp xúc nhau được tô bởi các màu khác nhau

Hướng dẫn

Chứng minh qui nạp theo số các hình tròn.

Bài tập 20. 12: Ta gọi một hội–S là một tập hợp S người sao cho mỗi cặp hai người nào trong họ cũng có quen nhau. Trong một buổi tiệc, cứ hai hội–3 thì có chung một người, và không có hội–5 nào trong buổi tiệc này. Chứng minh rằng trong buổi tiệc đó có hai người (hoặc ít hơn) mà khi họ rời đi thì sẽ không còn lại một hội–3 nào cả.

Hướng dẫn

Sử dụng đồ thị với đỉnh là người dự và cạnh nối 2 đỉnh nếu 2 người tương ứng quen nhau.

Chuyên đề 21: DÃY SỐ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các dãy số đặc biệt:

– Dãy cấp số cộng: $u_n = u_{n-1} + d, \forall n \in \mathbf{N}^*$

– Dãy cấp số nhân: $v_n = v_{n-1}.q, \forall n \in \mathbf{N}^*$

– Dãy Fibonaci: $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$

Công thức Binet $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

– Dãy Lucas: $L_1 = 1, L_2 = 3$ và $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ với $n \geq 2$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

– Dãy Farey bậc n: dãy f_n gồm các phân số tối giản nằm giữa 0 và 1, có mẫu số không lớn hơn n , sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

$f_1 = (\frac{0}{1};\frac{1}{1})$; $f_2 = (\frac{0}{2};\frac{1}{2};\frac{2}{2})$; $f_3 = (\frac{0}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3})$;...

Dãy số tăng, dãy số giảm

– Dãy số (u_n) là dãy số tăng nếu với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ ta có $u_n < u_{n+1}$.

– Dãy số (u_n) là dãy số giảm nếu với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ ta có $u_n > u_{n+1}$.

Dãy số tuần hoàn

Dãy số (u_n) tuần hoàn chu kỳ k nếu $u_{n+k} = u_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$

Dãy số bị chặn:

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \leq M$.

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \geq m$.

– Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, m \leq u_n \leq M$.

Xác định các dãy số bằng dãy phụ:

– Dạng $u_{n+1} = u_n + f(n)$ thì đặt dãy phụ $x_n = u_{n+1} - u_n$ hoặc viết liên tiếp :

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1 .$$

– Dạng $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + a$, đặt dãy phụ $v_n = u_n - u_{n-1}$ thì được $v_{n+1} = v_n + a$ là dãy cấp số cộng.

– Dạng $u_{n+1} - u_n = b(u_n - u_{n-1})$, đặt dãy phụ $v_n = u_n - u_{n-1}$ thì được $v_{n+1} = b.v_n$ là dãy cấp số nhân.

– Dạng $u_{n+1} = au_n + b$ với $a \neq 0$, đặt dãy phụ $u_n = v_n + c$ thì được $v_{n+1} = a.v_n + (ac + b - c)$, ta chọn hằng số c sao cho $ac + b - c = 0$ thì được $v_{n+1} = a.v_n$ là dãy cấp số nhân.

– Dạng: $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ thì tìm 2 số α và β sao cho $\alpha + \beta = a$, $\alpha.\beta = -b$, khi đó: $u_{n+2} = (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha.\beta u_1$

$\Rightarrow u_{n+2} - \beta u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \beta.u_n)$ đưa về dãy phụ $x_n = u_{n+1} - \beta u_1$ thoả mãn $x_{n+1} = \alpha.\, x_n$ dãy cấp số nhân.

Xác định các dãy số bằng phương trình sai phân:

Cho dãy số (x_n). Xét phương trình $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \ldots + a_kx_n = g(n)$ (1).

Ta gọi phương trình $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \ldots + a_kx_n = 0$ (2)

là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (1).

Và gọi phương trình ẩn λ

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k\lambda = 0 \qquad (3)$$

là phương trình đặc trưng của phương trình (1) và của (3).

Nghiệm tổng quát của (1) có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*$, $n = 1;2;\ldots$

Trong đó $\overline{x_n}$ là nghiệm tổng quát của (2) và x_n^* là nghiệm riêng bất kỳ của (1).

– Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2)

Nếu phương trình đặc trưng có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (nghiệm đơn cả) thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n,\ n = 1;2;\ldots$$

Từ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ta tìm được k hằng số $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Nếu phương trình đặc trưng có q < k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ trong đó λ_1 là nghiệm bội s, λ_2 là nghiệm bội h, còn lại $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_q$ là k– (s+h) nghiệm đơn, thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_3\lambda_3^n + c_4\lambda_4^n + \ldots + c_q\lambda_q^n + (c_{11} + c_{12}n + \ldots + c_{1s}n^{s-1})\lambda_1^n$$
$$+ (c_{21} + c_{22}n + \ldots + c_{2h}n^{h-1})\lambda_2^n,\ n = 1;2;\ldots$$

Nếu phương trình đặc trưng có s < k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ và $\lambda_q = x + yi = r(\cos\phi + i.\sin\phi)$ là nghiệm bội h thì số phức liên hiệp $\overline{\lambda_q}$ cũng là nghiệm bội h, thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_s\lambda_s^n + r^n(A_1 + A_2n + \ldots + A_hn^{h-1})\cos n\phi$$
$$+ r^n(B_1 + B_2n + \ldots + B_hn^{h-1})\sin n\phi,\ n = 1;2;\ldots$$

– Phương trình sai phân tuyến tính cấp 1:

$x_1 = \alpha,\ ax_{n+1} + bx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ có nghiệm $\lambda = \frac{-b}{a}$

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*,\ n = 1;2;...$ với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = c\lambda^n,\ n = 1;2;...$

Nếu $\lambda \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

– Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2:

$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có 2 nghiệm λ_1, λ_2

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*,\ n = 1;2;...$

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực phân biệt thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,\ n = 1;2;...$

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực bằng nhau thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn)\lambda_2^n,\ n = 1;2;...$

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm phức thì đưa về dạng lương giác $x + yi = r(\cos\phi + i.\sin\phi)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$\overline{x_n} = r^n(A\cos n\phi + B\sin n\phi),\ n = 1;2;...$$

Nếu $\lambda_i \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu λ_1 hay $\lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^2.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

– Phương trình sai phân tuyến tính cấp 3:

$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma, ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ có 3 nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*,\ n = 1;2;...$

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là 3 nghiệm thực phân biệt thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực bằng nhau và λ_3 là nghiệm đơn thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn)\lambda_2^n + C\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là 3 nghiệm thực bằng nhau thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn + Cn^2)\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu λ_1 là nghiệm thực và λ_2, λ_3 là 2 nghiệm phức liên hợp $x \pm yi = r(\cos\phi \pm i.\sin\phi)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$\overline{x_n} = A\lambda_1^n + r^n(B\cos n\phi + C\sin n\phi),\ n = 1;2;...$$

Nếu $\lambda_i \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu λ_1 hay λ_2 hay $\lambda_3 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^2.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^3.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Giới hạn dãy số

$\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbf{N}^* : n > n_o \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$

$\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$

$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_o \in \mathbf{N}^* : n > n_o \Rightarrow u_n > A.$

$\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty.$

$\Leftrightarrow \forall A < 0, \exists n_o \in \mathbf{N}^* : n > n_o \Rightarrow u_n < A.$

Nếu dãy có giới hạn hữu hạn thì gọi là dãy hội tụ, còn dãy không có giới hạn hay có giới hạn không hữu hạn ($-\infty$, $+\infty$) thì gọi là dãy phân kỳ.

Các định lý :

- Giới hạn nếu có của 1 dãy là duy nhất.
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.
- Nếu $v_n \le u_n \le w_n$ với mọi $n \ge N_0$ và $\lim v_n = \lim w_n = L$ thì $\lim u_n = L$.
- Nếu dãy hội tụ thì dãy đó bị chặn.
- Định lý Bolzano– Weierstrss : Từ một dãy bị chặn luôn trích ra được một dãy con hội tụ.
- Nếu dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.
- Dãy (u_n) được gọi là dãy Cauchy nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbf{N}^* : \forall\ m, n > n_o$

$\Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$

- Dãy (u_n) hội tụ khi và chỉ khi dãy(u_n) là dãy Cauchy
- Nếu dãy (u_n) có dãy con (u_{2n}) tăng và bị chặn trên và dãy con (u_{2n+1}) giảm và bị chặn dưới, hơn nữa 2 dãy này cùng có giới hạn L thì dãy u_n có giới hạn L.
- Định lý trung bình Cesaro:

  Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = L$.

  Hay $\lim (u_{n+1} - u_n) = L$ thì $\lim\frac{u_n}{n} = L$.
- Định lý Stolz: Nếu 2 dãy (u_n), (v_n) trong đó dãy (v_n) là dãy số dương tăng và $\lim\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ tồn tại thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = \lim\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 21. 1: Cho dãy số: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Dãy số (u_n) có tuần hoàn không ?

Hướng dẫn giải

$u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$

$u_5 = -\frac{1}{2}$, $u_6 = -\frac{7}{4}$. Ta chứng minh dãy số (u_n) không tuần hoàn.

Xét biểu diễn $u_n = \frac{q_n}{2^{s_n}}$ với q_n lẻ, $s_n \in N$, $n \geq 5$. Để chứng minh dãy số (u_n) không tuần hoàn, ta chứng minh $s_n = n - 4$ với mọi $n \geq 5$ bằng quy nạp theo n. Với n = 5, 6 thì khẳng định đúng,

Giả sử khẳng định đúng với mọi $5 \leq n \leq k$, $k \geq 6$. Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng cho n = k + 1.

Thật vậy, từ công thức $u_{k+1} = \frac{3}{2}u_k - u_{k-1}$

Ta có: $\frac{q_{k+1}}{2^{s_{k+1}}} = \frac{3}{2}.\frac{q_k}{2^{s_k}} - \frac{q_{k-1}}{2^{s_{k-1}}} = \frac{3q_k - 4q_{k-1}}{2^{k-3}}$

Do $3q_k - 4q_{k-1}$ lẻ nên ta có $s_{k+1} = (k + 1) - 4$: đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 21. 2: Dãy số (x_n) xác định: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}$, n = 1, 2, 3...

Chứng minh $x_n \neq 0$ với mọi n và x_n không tuần hoàn.

Hướng dẫn giải

Gọi φ là góc sao cho $\tan\varphi = 2$ thì:

$u_1 = \tan\varphi$, $u_2 = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \tan(2\varphi)$, ..., $u_n = \tan(n\varphi)$

Từ công thức tính u_n ta suy ra $u_{2n} = \dfrac{2u_n}{1-u_n^2}$. Từ đó suy ra nếu tồn tại n để $u_n = 0$ thì sẽ tồn tại n lẻ để $u_n = 0$. Giả sử $u_{2k+1} = 0$.

Khi đó $u_{2k} = -2$ và ta có $-2 = u_{2k} = \dfrac{2u_k}{1-u_k^2} \Rightarrow u_k^2 - u_k - 1 = 0 \Rightarrow$ mâu thuẫn vì lúc đó u_k vô tỉ, trong khi đó theo công thức truy hồi thì u_k luôn hữu tỉ.

Giả sử dãy (u_n) tuần hoàn thì phải tồn tại n và k (n > k) sao cho:

$$\tan(n\varphi) = \tan(k\varphi) \Leftrightarrow (n-k)\varphi = m\pi \Leftrightarrow u_{n-k} = 0\text{: vô lý.}$$

Vậy dãy x_n không tuần hoàn.

Bài toán 21. 3: Trong một dãy hữu hạn các số thực, tổng của bất kì 7 số hạng liên tiếp nào cũng là số âm, và tổng của bất kì 11 số hạng liên tiếp nào cũng đều là số dương. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số các số có trong dãy số đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_1 + x_2 + ... + x_7 < 0$, $x_8 + x_9 + ... + x_{14} < 0$

Do đó: $x_1 + x_2 + ... + x_{14} < 0$

Nhưng ta lại có $x_4 + x_5 + ... + x_7 > 0$ nên suy ra: $x_1 + x_2 + x_3 < 0$

Cũng vậy, vì $x_5 + x_6 + ... + x_{11} < 0$ và $x_1 + x_2 + ... + x_{11} > 0$ nên $x_4 > 0$.

Giả sử dãy đã cho có nhiều hơn 16 phần tử thì lí luận tương tự như trên ta sẽ được: $x_5 > 0$, $x_6 > 0$, $x_7 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 + ... + x_7 < 0$, $x_5 + x_6 + ... + x_{11} < 0$ và $x_1 + x_2 + ... x_{11} > 0$ nên ta cũng suy ra $x_5 + x_6 + x_7 < 0$, mâu thuẫn!.

Vậy số các số hạng có trong dãy đó phải ≤ 16.

Ta sẽ chứng tỏ rằng 16 là đáp số của bài toán, muốn vậy ta đi tìm dãy gồm 16 số hạng thoả điều kiện đề bài. Giả sử có một dãy gồm 16 số hạng như thế, mà đơn giản nhất, tổng của 7 số hạng liên tiếp là –1, tổng của 11 số hạng liên tiếp là 1, ta lập các phương trình và tìm được dãy 5, 5, –13, 5, 5, 5, –13, 5, 5, –13, 5, 5, –13, 5, 5, 5.

Vậy, giá trị lớn nhất của số các số hạng có trong dãy thoả mãn yêu cầu đề bài là 16.

Bài toán 21. 4: Cho $a \in \mathbb{Z}$, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = (u_n + 1) + (a+1)u_n + 2\sqrt{a(a+1)u_n(u_n+1)} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Ta có $[u_{n+1} - (2a + 1)u_n - a]^2 = 4a(a + 1)u_n(u_n + 1)$

$\Rightarrow u_{n+1}^2 + u_n^2 + a^2 - 2(2a+1)u_nu_{n+1} - 2a(u_n + u_{n+1}) = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$

Xét phương trình: $X^2 + u_n^2 + a^2 - 2(2a + 1)u_nX - 2a(u_n + X) = 0$.

$\Leftrightarrow X^2 - 2[(2a + 1)u_n + a]X + (u_n - a)^2 = 0$.

Theo trên, phương trình này có 2 nghiệm là u_{n+1} và u_{n-1} nên theo định lí Viet ta có: $u_{n+1} + u_{n-1} = (4a + 2)u_n + 2a, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Mà $u_1 = 0$, $u_2 = a \in \mathbf{Z}$, ta suy ra $u_n \in \mathbf{Z}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài toán 21. 5: Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \left(1+\frac{3}{n}\right)x_n + 2 - \frac{3}{n},\ n \geq 1 \text{ và } n \in N$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Ta có $x_{n+1} = x_n + 2 + \dfrac{3(x_n - 1)}{n}$ và để ý $(n - 1)n(n + 4)$ luôn chia hết cho 6.

Ta chứng minh bằng quy nạp $x_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(n+4)}{6}$.

Thật vậy, điều này đúng với n = 1. Giả sử ta đã chứng minh được:

$$x_k = 1 + \frac{(k-1)k(k+4)}{6}.$$

Khi đó:

$$x_{k+1} = \left(1+\frac{3}{k}\right)x_k + 2 - \frac{3}{k} = \left(1+\frac{3}{k}\right)\left[1 + \frac{(k-1)k(k+4)}{6}\right] + 2 - \frac{3}{k}$$

$$= 1 + \frac{k(k+1)(k+5)}{6}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. 6: Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_2 = 0$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ n \geq 1. \text{ Chứng minh } |u_n| < \frac{4}{3} \text{ với mọi n.}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phức $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Ta có dạng lượng giác $x = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ nên công thức tổng quát

$$u_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3},\ n = 1; 2; \ldots$$

Mà $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ nên $A = 1$ và $B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó số hạng tổng quát $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

Nên $|u_n| = \left|1.\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right| \le \sqrt{1+\dfrac{3}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} < \dfrac{4}{3}$.

Bài toán 21. 7: Giả sử F_n, L_n tương ứng là số hạng thứ n của dãy Fibonacci và dãy Lucas. Chứng minh rằng $F_{2n} = F_n.L_n$ với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Dãy số Fibonaxi : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \ge 0$.

Ta có $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \Leftrightarrow F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$

Phương trình đặc trưng $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

nên $u_n = A.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

mà ta có $F_0 = 0$ và $F_1 = 1$ nên tìm được 2 hệ số A, B.

Suy ra $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Dãy số Lucas: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ và $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ với $n \ge 2$

Ta có $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \Leftrightarrow L_{n+1} - L_n - L_{n-1} = 0$.

Phương trình đặc trưng

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

nên: $L_n = \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ thay $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ thì $\alpha = \beta = 1$.

Vậy $L_n = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Ta có $F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$\Rightarrow F_{2n} = F_n.L_n$.

Bài toán 21. 8: Cho dãy Fibonacci (a_n): $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
Chứng minh rằng nếu đa thức P(x) bậc n với hệ số nguyên có tính chất: $P(k) = a_k$ với mọi k = n+2, n +3, ..., 2n+2 thì luôn kéo theo $P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với n = 1 thì P(3) = 2, P(4) = 3 và P(x) = x – 1 nên: $P(5) = 4 = a_5 - 1$.

Giả sử kết luận của bài toán đúng với số (n – 1).

Xét đa thức Q(x) = P(x + 2) – P(x + 1). Ta có bậc của Q(x) không lớn hơn (n – 1) và thoả mãn điều kiện:

$$Q(k) = P(k + 2) - P(k + 1) = a_{k+2} - a_{k+1} = a_k,\ k = n+1,..., 2n.$$

Do vậy theo giả thiết quy nạp thì:

$Q(2n + 1) = a_{2n+1} - 1 = P(2n + 3) - P(2n + 2)$

Suy ra: $P(2n + 3) = P(2n + 2) + Q(2n + 1) = a_{2n+2} + a_{2n+1} - 1 = a_{2n+3} - 1$.

Bài toán 21. 9: Cho dãy số thực x_0, x_1, x_2 ... được xác định bởi $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $n(n + 1)x_{n+1} = n(n - 1)x_n - (n - 2)x_{n-1}$

Hãy tính $\frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + ... + \frac{x_{50}}{x_{51}}$.

Hướng dẫn giải

Từ công thức xác định của dãy, ta có:

$$n((n + 1)x_{n+1} - x_n) = (n - 2)(nx_n - x_{n-1})$$

Thay n = 2, ta có: $2(3x_3 - x_2) = 0 \Rightarrow 3x_3 - x_2 = 0$

Thay n = 3, ta có: $4x_4 - x_3 = 0$

Cứ lặp lại như vậy ta có: $(n + 1)x_{n+1} - x_n = 0$

Do đó: $\frac{x_n}{x_{n+1}} = n + 1, \forall n \geq 2$ và ta có $\frac{x_0}{x_1} = 1; \frac{x_1}{x_2} = 2$

Vậy $\frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + ... + \frac{x_{50}}{x_{51}} = 1 + 2 + ... + 51 = \frac{51.52}{2} = 1326$.

Bài toán 21. 10: Cho dãy n số thực $x_1, x_2, ..., x_n \in [-1; 1]$ và có tổng các số này bằng n–3.

Chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq n - 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $a_i = 1 - x_i$ ($i = 1, 2,..., n$). Ta có:

$$-1 \le x_i \le 1, \forall i \Leftrightarrow 0 \le a_i \le 2, \forall i$$

$x_1 + x_2 + ... + x_n = n - 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n = 3$

Do đó có tối đa 2 số $a_i > 1$. BĐT $\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le 5$

Nếu $0 \le a_i \le 1$, $i = 1,2,...,n$. Khi đó $a_i^2 \le a_i$, $\forall i$ nên:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1 + a_2 + ... + a_n = 3 < 5$$

Nếu có duy nhất một số $a_i > 1$. Không mất tổng quát, giả sử $a_1 > 1$. Khi đó:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1^2 + a_2 + ... + a_n$$

$$= a_1(a_1 - 1) + a_1 + a_2 + ... + a_n \le 2.1 + 3 = 5$$

Nếu có hai số $a_i > 1$. Không mất tổng quát, giả sử $a_1 > 1$, $a_2 > 1$. Khi đó:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1^2 + a_2^2 + a_3 + ... + a_n$$

$$= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\le 2(a_1 - 1) + 2(a_2 - 1) + 3 = 2(a_1 + a_2) - 1 \le 2.3 - 1 = 5$$

Dấu = không xảy ra nên suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 21. 11: Cho hai dãy số (a_n), (b_n): $\begin{cases} a_1 > 0, b_1 > 0 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{b_n} \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$

với $n = 1, 2, 3,...$ Chứng minh $a_n + b_n > 2\sqrt{2n}$, với mọi $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp với $n \ge 3$. Vì: $a_2b_2 = \left(a_1b_1 + \dfrac{1}{a_1b_1}\right) \ge 4$

Do đó: $a_3b_3 = 2 + \left(a_2b_2 + \dfrac{1}{a_2b_2}\right) > 2 + 4 = 6$

Suy ra: $a_3 + b_3 \ge 2\sqrt{a_3b_3} > 2\sqrt{6} = 2\sqrt{2.3}$.

Do đó bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, k nguyên, $k \ge 3$. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng khi $n = k + 1$. Thật vậy, ta có:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2\frac{a_k}{b_k} + \frac{1}{b_k^2};\ b_{k+1}^2 = b_k^2 + 2\frac{b_k}{a_k} + \frac{1}{a_k^2}$$

$$2a_{k+1}b_{k+1} = 2a_kb_k + 2 + \frac{2}{a_kb_k} + 2$$

Cộng vế với vế tương ứng, ta có:

$$\left(a_{k+1} + b_{k+1}\right)^2 = \left(a_k + b_k\right)^2 + 4 + 2\left(\frac{a_k}{b_k} + \frac{b_k}{a_k}\right) + \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right)^2$$

$$\left(a_{k+1} + b_{k+1}\right)^2 > \left(2\sqrt{2k}\right)^2 + 4.2 + \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right)^2 > 8(k+1)$$

Suy ra: $a_{k+1} + b_{k+1} > 2\sqrt{2(k+1)}$: đpcm.

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên n > 2.

Bài toán 21. 12: Cho dãy : $\begin{cases} u_0 = \alpha & \in (0, \pi) \\ u_n = \sin u_n - 1, & n \ge 1 \end{cases}$

Chứng minh: $0 < u_n < \sqrt{\dfrac{3}{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh:

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \forall x > 0 \Leftrightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < 0, \forall x > 0$$

Xét $y = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} \quad x \ge 0$

$y' = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$; $y'' = -\sin x + x - \dfrac{x^3}{6}$;

$y''' = -\cos x + 1 - \dfrac{x^2}{2}$;$y'''' = \sin x - x$

$y^{(5)} = \cos x - 1 < 0$. Từ đó suy ra đpcm.

Chứng minh quy nạp: $0 < u_n < \sqrt{\dfrac{3}{n+1}}$

Khi n = 1: $0 < u_1 = \sin\alpha < 1 < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (đúng)

Giả sử: $0 < u_n = \sin u_{n-1} < \sqrt{\dfrac{3}{n+1}}$

Ta chứng minh: $u_{n+1} = \sin u_n < \sqrt{\dfrac{3}{n+2}}$

Ta có $\sin u_n < \sin\sqrt{\frac{3}{n+1}} < \sqrt{\frac{3}{n+1}}\left(1-\frac{1}{6}.\frac{3}{n+1}+\frac{1}{120}.\frac{9}{(n+1)^2}\right)$

Do đó ta cần chứng minh $\sqrt{\frac{3}{n+1}}\left(1-\frac{1}{6}.\frac{3}{n+1}+\frac{1}{120}.\frac{9}{(n+1)^2}\right) < \sqrt{\frac{3}{n+2}}$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{3}{40(n+1)^2} < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}$$

Đặt $x = \frac{1}{n+1} \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$

Xét $f(x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{40}-(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad ,0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}+\frac{3x}{20}+\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{20}\left(1-\frac{5}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right) < 0 \Rightarrow f' \text{ nghịch biến}$$

Mà $x > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f$ nghịch biến

Mà $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 21. 13: Cho số thực a > 1 tuỳ ý. Hãy xây dựng dãy vô hạn và bị chặn $x_0, x_1, x_2\ldots$ sao cho $|x_n - x_m|\,|n-m|^a \ge 1$ với mọi cặp số nguyên không âm phân biệt m, n.

Hướng dẫn giải

Với $a \in R$, ta kí hiệu [a] và {a} lần lượt là phần nguyên và phần thập phân của a. Với cặp số nguyên không âm phân biệt m, n ta có:

$$\{m\sqrt{2}\}-\{n\sqrt{2}\} = (m\sqrt{2}-[m\sqrt{2}])-(n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}])$$

$$= \sqrt{2}(m-n)-h$$

Trong đó $h = [m\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]$

Vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, nên $2(m-n)^2 - h^2 \ne 0$.

Do vậy:

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{n\sqrt{2}\}| = |\sqrt{2}(m-n)-h| = \left|\frac{2(m-n)^2-h^2}{\sqrt{2}(m-n)+h}\right|$$

$$\geq \frac{1}{\left|\sqrt{2}(m-n)+h\right|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\left|m-n\right|+\left|h\right|}$$

Mặt khác:

$|h| = |[m\sqrt{2}] - [n\sqrt{2}]| \leq |m\sqrt{2} - n\sqrt{2}| + 2$

$= \sqrt{2}\,|m-n| + 2 \leq (2+\sqrt{2})|m-n|$

Do vậy:

$$|\{m\sqrt{2}\} - \{n\sqrt{2}\}| \geq \frac{1}{\sqrt{2}|m-n| + 2(2+\sqrt{2})|m-n|} = \frac{1}{(2+2\sqrt{2})|m-n|}$$

Suy ra $|8\{m\sqrt{2}\} - 8\{n\sqrt{2}\}|\,|m-n| \geq 1$

Do vậy, ta chọn dãy $x_n = 8\{n\sqrt{2}\}$ thì điều kiện ở đề bài được thoả mãn vì với mọi n ta có $|x_n| \leq 8$ và

$|x_n - x_m|\,|n-m|^a \geq |x_n - x_m|\,|n-m| \geq 1$

với mọi cặp số nguyên không âm phân biệt m, n.

Bài toán 21. 14: Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thoả mãn điều kiện

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| = 1 \text{ và } |x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \forall i = 1, 2, ..., n$$

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị các phần tử của dãy $x_1, x_2, ..., x_n$ để tạo thành dãy mà ta kí hiệu là $y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho bất đẳng thức sau đây được thoả mãn $|y_1 + 2x_2 + ... + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Với mọi hoán vị $\pi = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta kí hiệu $S(\pi)$ là giá trị của tổng $y_1 + 2y_2 + ... + ny_n$. Đặt $r = \frac{n+1}{2}$.

Ta cần phải chứng minh rằng tồn tại π nào đó để $|S(\pi)| \leq r$.

Gọi π_0 là hoán vị đồng nhất: $\pi_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và gọi $\bar{\pi}$ là hoán vị đảo ngược: $\bar{\pi} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$

Nếu $|S(\pi_0)| \leq r$ hoặc $|S(\bar{\pi})| \leq r$, bài toán coi như được hướng dẫn giải xong, do vậy, ta giả sử $|S(\pi_0)| > r$ và $|S(\bar{\pi})| > r$. Để ý:

$S(\pi_0) + S(\bar{\pi}) = (x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + ... + nx_1)$

$= (n+1)(x_1 + x_2 + ... + x_n)$,

ta suy ra $|S(\pi_0) + S(\bar{\pi})| = n + 1 = 2r$.

Nhưng vì $|S(\pi_0)| > r$ và $|S(\bar{\pi})| > r$ nên ta phải có $S(\pi_0)$ và $S(\bar{\pi})$ trái dấu nhau, nghĩa là một số thì lớn hơn r, còn một số thì nhỏ hơn –r.

Từ π_0, ta có thể thu được $\pi_m = \bar{\pi}$ bằng cách hoán chuyển hai phần tử kề nhau.

Nói cách khác, tồn tại một dãy các hoán vị $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_m$ sao cho $\pi_m = \bar{\pi}$ và với mỗi i (i = 0, 1,..., m–1), hoán vị π_{i+1} có được từ π_i bằng cách hoán chuyển hai số hạng liên tiếp. Điều này có nghĩa rằng nếu $\pi_i = (y_1, y_2,..., y_n)$, $\pi_{i+1} = (z_1, z_2,..., z_n)$ thì tồn tại một chỉ số $k \in \{1, 2,...,n-1\}$ sao cho:

$z_k = y_{k+1}, z_{k+1} = y_k, z_j = y_j, j \neq k, k + 1$

Do giả thiết $|x_i| \geq r, \forall i = 1, 2,...,n$ nên ta có:

$|S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| = |kz_k + (k + 1)z_{k+1} - ky_k - (k + 1)y_{k+1}|$

$= |y_k - y_{k+1}| \leq 2r$

Điều này chứng tỏ rằng khoảng cách giữa hai số liên tiếp bất kì trong dãy số $S(\pi_0),..., S(\pi_m)$ không lớn hơn 2r.

Mặt khác, có thể xem $S(\pi_0)$, $S(\pi_m)$ là những điểm nằm trên đường thẳng thực, nằm ngoài đoạn [–r, r], từ đó, suy ra rằng ít nhất một trong các số $S(\pi_i)$ phải rơi vào đoạn đó; nói cách khác, tồn tại π_i để $S(\pi_i) \leq r$, là điều phải chứng minh.

Bài toán 21. 15: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 5,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,\ n \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = 5(u_{n+1} - u_n)$

Đặt $x_n = u_n - u_{n-1}$ thì $x_{n+1} = 5x_n$.

Do đó $x_n = 5x_{n-1} = 5(5x_{n-2}) = 5^2.x_{n-2} = 5^2(5x_{n-3}) = 5^3.x_{n-3} = ...$

$= 5^{n-2} . x_2 = 5^{n-2} (u_2 - u_1) = 3.5^{n-2}$

Ta có $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1$

$= 3.5^{n-2} + 3.5^{n-3} + ... + 3.5^o + 2$

$= 2 + 3(1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-2}) = 2 + 3\dfrac{1-5^{n-1}}{1-5}$

$= \dfrac{3.5^{n-1}+5}{4}$.

Bài toán 21. 16: Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{a_n\}$ xác định như sau:

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^3 + 3a_n^2 - 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $b_n = a_n + 1\ \forall\ n \geq 1$, ta có dãy $\{b_n\}$ được xác định bởi:

$b_1 = 3,\ b_{n+1} = b_n^3 - 3b_n\ \forall n \geq 1$

Xét phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ (1). Ta có (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 3$, $x_1.x_2 = 1$. Ta sẽ chứng minh, bằng quy nạp theo n, rằng $b_n = x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}}$ (2) $\forall n \geq 1$.

Thật vậy, với n = 1 hiển nhiên có (2).

Giả sử đã có (2) với n = k, k ≥ 1.

Khi đó: $b_{n+1} = b_k^3 - 3b_k = (x_2^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})^3 - 3(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})$

$= \quad x_1^{3^k} + x_2^{3^k} + 3(x_1.x_2)^{3^{k-1}}.(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}) - 3(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})$

$= \quad x_1^{3^k} + x_2^{3^k}$ (vì $x_1x_2 = 1$)

nghĩa là ta cũng có (2) với n = k + 1 nên (2) đúng $\forall n \geq 1$.

Từ đó: $a_n = x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}} - 1$ với $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy $a_n = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3^{n-1}} + \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^{n-1}} - 1.$

Bài toán 21. 17: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (x_n):

$$x_1 = 6 \text{ và } x_{n+1} = x_n^2 - 2.6^{2^n}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_n = 2.e^{2^n.c}y_n$ khi đó : $y_{n+1} = 2y_n^2 - \dfrac{2.6^{2^n}}{2.e^{c.2^{n+1}}}$

Chọn $c = \ln\sqrt{6}$ ta được: $y_{n+1} = 2y_n^2 - 1$

Ta sẽ chứng minh quy nạp rằng: $y_n = \cos\left(2^n \dfrac{\pi}{6}\right)$

Thật vậy: với n = 1 ta có $y_1 = \dfrac{1}{2} = \cos\left(2^n.\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$ (đúng)

Giả sử đúng đến n = k tức là: $y_k = \cos\left(2^k \dfrac{\pi}{6}\right)$

Với n = k + 1 ta có:

$y_{k+1} = 2y_k^2 - 1 = 2\cos^2\left(2^k.\dfrac{\pi}{6}\right) - 1 = \cos\left(2^{k+1}.\dfrac{\pi}{6}\right)$:đúng

Vậy : $x_n = 2.6^{2^{n-1}}\cos\left(2^n.\dfrac{\pi}{6}\right)$

Cách 2: $x_1 = 6$, $x_2 = -36$, $x_3 = -1296 = -6^4$

Ta chứng minh qui nạp: $x_n = -6^{2^{n-1}}$, $n \geq 2$

Bài toán 21. 18: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (U_n) được xác định bởi: $U_0 > 0$, $U_1 > 0$ và $\forall n \in N$: $U_{n+2} = \left(U_{n+1}U_n^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp thì: $U_n > 0\ \forall n \in N$

Ta có: $U_{n+2} = \left(U_{n+2}U_n^2\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \quad \ln U_{n+2} = \frac{1}{3}\ln U_{n+1} + \frac{2}{3}\ln U_n$

Đặt: $V_n = \ln U_n,\ V_0 = \ln U_0,\ V_1 = \ln U_1$

Ta có: $V_{n+2} = \frac{1}{3}V_{n+1} + \frac{2}{3}V_n \Leftrightarrow 3V_{n+2} = V_{n+1} + 2V_n$

Xét phương trình đặc trưng: $3x^2 - x - 2 = 0$

có hai nghiệm: $x_1 = 1;\quad x_2 = -\frac{2}{3}$

Do đó V_n có dạng: $V_n = \lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{-2}{3}\right)^n$. Ta có: $\begin{cases} V_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ V_1 = \lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\lambda_2 = V_0 - V_1 \ \Rightarrow \ \lambda_2 = \frac{3}{5}(V_0 - V_1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = V_0 - \frac{3}{5}(V_0 - V_1) = \frac{2}{5}V_0 + \frac{3}{5}V_1$$

Nên: $V_n = \frac{1}{5}(2V_0 + 3V_1) + \frac{1}{5}(3V_0 - 3V_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\Rightarrow \quad U_n = e^{\frac{1}{5}(2V_0+3V_1)+\frac{1}{5}(3V_0-3V_1)\left(\frac{-2}{3}\right)^n} = e^{\frac{1}{5}\ln(U_0^2.U_1^3)+\frac{1}{5}\left(\ln\frac{U_0^3}{U_1^3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

$$= \left(U_0^2.U_1^3\right)^{\frac{1}{5}}.\left(\left(\frac{U_0}{U_1}\right)^3\right)^{\frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n} = U_0^{\frac{2}{5}}.U_1^{\frac{3}{5}}.U_0^{\frac{3}{5}(\frac{-2}{3})^n}.U_1^{\frac{-3}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

Vậy: $U_n = U_0^{\frac{2}{5}+\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}.U_1^{\frac{3}{5}-\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}$.

Bài toán 21. 19: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (x_n):

$$x_1 = a > 0 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n}{2+3x_n}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_n > 0,\ \forall n \in N$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$.

Ta được: $y_{n+1} - 2y_n - 3 = 0 \Rightarrow y_{n+1} + 3 = 2(y_n + 3)$

Đặt $z_n = y_n + 3$ thì $z_1 = y_1 + 3 = \frac{1}{x_1} + 3 = \frac{1}{a} + 3$

Ta được $z_{n+1} = 2z_n \Rightarrow z_n = 2^{n-1}z_1 = 2^{n-1}\left(\frac{1}{a} + 3\right)$

$\Rightarrow y_n = 2^{n-1}\left(\frac{1}{a} + 3\right) - 3 = \frac{(3a+1).2^{n-1} - 3a}{a}$

Vậy: $x_n = \frac{a}{(3a+1)2^{n-1} - 3a}$

Bài toán 21. 20: Tìm số hạng tổng quát của dãy (a_n):

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}},\ n \geq 3.$$

Hướng dẫn giải

Xét 2 số $\alpha > \beta$ sao cho $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$ thì α, β là nghiệm phương trình:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ do đó } \alpha, \beta = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ta có $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} = (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2}$.

$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$.

Đặt $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ thì $b_n = \beta b_{n-1}$

Từ đó tính được $b_n = -(1 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{n-1}$.

Suy ra: $a_n = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(2 + \sqrt{3})^{n-1} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(2 - \sqrt{3})^{n-1}$.

Bài toán 21. 21: Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) được xác định:

$u_1 = 2000;\ u_2 = 2001;\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3,\ n = 1, 2, 3...$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3$

Do đó $u_3 - 2u_2 + u_1 = 3;\ u_4 - 2u_3 + u_2 = 3;...;u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 3$.

Cộng từng vế n – 2 đẳng thức trên thì được:

$u_n - u_{n-1} - u_2 + u_1 = 3(n - 2)$.

$u_n - u_{n-1} = 3(n - 2) + u_2 - u_1 = 3n - 5$.

Do đó $u_3 - u_2 = 3.3 - 5;\ u_4 - u_3 = 3.4 - 5;...;u_n - u_{n-1} = 3.n - 5$.

Cộng từng vế n – 2 đẳng thức trên:

$u_n - u_2 = 3(3 + 4 + ... + n) - 5(n - 2)$

$u_n = \frac{3.(n+3)(n-2)}{2} - 5n + 2011$

Vậy $u_n = \frac{3n^2 - 7n}{2} + 2002$.

Bài toán 21. 22: Cho $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Tìm tất cả các dãy số thực $\{x_n\}$ thoả mãn 2 điều kiện: a) $|x_n| < 1, \forall n \geq 1$ b) $x_n = \dfrac{x_{n+1}^2 + a^2}{2}$, $\forall n \geq 1$

Hướng dẫn giải

Vì $|x_{n+1}| < 1 \ \forall n \geq 1$ nên theo b) ta có $|x_n| \leq \dfrac{a^2+1}{2}$.

Đặt $\beta = \dfrac{a^2+1}{2}$ Do $|a| < 1$ nên $\beta < 1 \Rightarrow |x_n| \leq \beta$.

Mặt khác $\forall n \geq 1$ ta có: $|x_{n+1} - x_n| = |(x_{n+2}^2 + a^2)/2 - (x_{n+1}^2 + a^2)/2|$

$= |x_{n+2} - x_{n+1}|.|(x_{n+2} + x_{n+1})/2|$

$\leq |x_{n+2} - x_{n+1}|.(|(x_{n+2}|/2 + |x_{n+1}|/2) \leq \beta|x_{n+2} - x_{n+1}|$

Bằng quy nạp theo k ta có $\forall k \in N$

$|x_{n+1} - x_n| \leq \beta^k |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leq$

$\leq \beta^k (|x_{n+k+1}| + |x_{n+k}|) \leq \beta^k . 2\beta = 2\beta^{k+1}$

Vì $0 < \beta < 1$ nên cho $k \to +\infty$ thì $2\beta^{k+1} \to 0$

Vậy ta có $|x_{n+1} - x_n| = 0$ hay $x_n = x_{n+1} \ \forall n \geq 1$.

Thay $x_n = x_{n+1}$ vào điều kiện b) ta có:

$x_n = (x_n^2 + a^2)/2$ hay $x_n^2 - 2x_n + a^2 = 0$.

Phương trình này cho ta: $x_n = 1 \pm \sqrt{1-a^2}$

Vì $|x_n| < 1, \forall n \geq 1$ nên ta có: $x_n = 1 - \sqrt{1-a^2}$, $\forall n \geq 1$.

Bài toán 21. 23: Xác định dãy số a_n được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_n = 1 + n\left\{\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right\}$ với mọi $n \geq 2$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh: $a_n = 1 + 2(n - 2^{[\log_2 n]})$ với mọi $n \geq 1$ (1)

Ta có: $\left[\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right] \leq \dfrac{1+a_{n-1}}{n} < \left[\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right] + 1$

$\Rightarrow \quad n\left[\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right] \leq 1 + a_{n-1} < n\left[\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right] + n$

$\Rightarrow \quad 1 \leq a_n = 2 + a_{n-1} - n\left[\dfrac{1+a_{n-1}}{n}\right] < n+1, \quad \forall n \geq 2$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Khi n = 1 ta có: $1 + 2(n - 2^{[\log_2 n]}) = 1 = a_1$, nên (1) đúng

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là: $a_k = 1 + 2(k - 2^{[\log_2 k]})$.

Đặt $p = [\log_2 k]$ thì $a_k = 1 + 2(k - 2^p)$ và $p \le \log_2 k < p + 1 \Rightarrow 2^p \le k < 2^{p+1}$

Vì $a_k \le k$ nên cần xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $a_k < k$. Khi đó:

$a_k = 1 + 2(k - 2^p) < k \Rightarrow 2^p \le k < k + 1 < 2^{p+1}$

$\Rightarrow p < \log_2(k + 1) < p + 1 \Rightarrow p = [\log_2(k + 1)]$

Ta có: $a_k < k \Rightarrow 0 < 1 + a_k < k + 1 \Rightarrow \left[\dfrac{1 + a_k}{k + 1}\right] = 0$

Do vậy: $a_{k+1} = 2 + a_k - (k + 1)\left[\dfrac{1 + a_k}{k + 1}\right] = 2 + a_k = 2 + 1 + 2(k - 2^p)$

$= 1 + 2(k + 1 - 2^p) = 1 + 2(k + 1 - 2^{[\log_2(k+1)]})$

Trường hợp 2: $a_k = k$. Khi đó:

$a_k = 1 + 2(k - 2^p) = k \Rightarrow k + 1 = 2^{p+1} \Rightarrow p + 1 = [\log_2(k+1)]$

Vậy: $a_{k+1} = 2 + a_k - (k + 1)\left[\dfrac{1 + a_k}{k + 1}\right] = a + a_k - (k + 1)\left[\dfrac{1 + k}{k + 1}\right]$

$= 2 + a_k - (k + 1) = 2 + 1 + 2(k - 2^p) - 2^{p+1}$

$= 1 + 2(k + 1 - 2^{p+1}) = 1 + 2(k + 1 - 2^{[\log_2(k+1)]})$

Bài toán 21. 24: Chứng minh rằng tồn tại duy nhất dãy số thoả điều kiện:

$a_n = n\ln\left(1 + \dfrac{a_n}{n + 1}\right)$ và $-2 < a_n < -1$ với n nguyên dương

Hướng dẫn giải

Xét hàm số: $f(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n + 1}\right) - x$, với n = 1, 2, 3...

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{1 + x}{n + 1 + x} > 0$, với $-2 < x < -1$

Vậy f(x) = 0 chỉ có tối đa 1 nghiệm trên (–2; –1)

Ta chứng minh rằng: f(x) = 0 có nghiệm trên (–2; –1)

$$f(-1) = n\ln\left(1 - \frac{1}{n + 1}\right) + 1 = n\ln\left(\frac{n}{n + 1}\right) + 1 = 1 - n\ln\left(\frac{n + 1}{n}\right) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0$$

$$f(-2) = n\ln\left(1 - \frac{2}{n + 1}\right) + 2 = 2 - \ln\left(\frac{n + 1}{n - 1}\right)^n \qquad (n \ge 2)$$

Ta chứng minh: $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+1}}$

$$\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{2}{n^2+n}\right)^{n+1} > 1-\frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \text{ (Bernoulli)}$$

Vậy, $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n} \geq \left(\frac{2+1}{2-1}\right)^{2} = 9 > e^2$ với $n \geq 2 \Rightarrow f(-2) < 0$ với $n \geq 2$

Từ đó, $f(-2).f(-1) < 0$, f liên tục trên $(-2; -1)$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm và nghiệm này là duy nhất.

Với n = 1 thì $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \ln(1+\frac{x}{2}) + 2 = -\infty$ nên $f(x) = 0$ cũng có nghiệm duy nhất trên $(-2; 1)$

Với mỗi n đặt nghiệm duy nhất là a_n ta thu được đpcm.

Bài toán 21. 25: Cho dãy (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2+\sqrt{3+x_n^2}} \end{cases}$ (1)

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của (x_n)

b) Chứng minh rằng số $\frac{x_n^2}{x_{2n}^2} - 2$ có thể biểu diễn được thành tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với $n \geq 1$

Hướng dẫn giải

a) Từ (1) $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{3+x_n^2}}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2}{x_n} + \sqrt{\frac{3}{x_n^2}+1}$ (2)

Đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$ thì (2) trở thành: $y_{n+1} = 2y_n + \sqrt{3y_n^2+1}$

$\Leftrightarrow (y_{n+1} - 2y_n) = \sqrt{3y_n^2+1} \Leftrightarrow (y_{n+1} - 2y_n)^2 = 3y_n^2 + 1$

$\Leftrightarrow y_{n+1}^2 + y_n^2 = 4y_{n+1}\,y_n + 1$ (3)

Thay (n + 1) bởi n ta được: $y_n^2 + y_{n-1}^2 = 4y_ny_{n-1} + 1$ (4)

Lấy (3) và (4) trừ vế theo vế ta được:

$$y_{n+1}^2 - y_{n-1}^2 = 4y_n(y_{n+1} - y_{n-1}) \Leftrightarrow y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 0 \ (5)$$

(Vì theo công thức xác định dãy, ta có $y_{n+1} > y_n > y_{n-1}$)

Phương trình (5) có phương trình đặc trưng $l^2 - 4l + 1 = 0$ có hai nghiệm số:

$\ell_1 = 2 - \sqrt{3}$, $\ell_2 = 2 + \sqrt{3}$

Khi đó: $y_n = c_1\ell_1^n + c_2\ell_2^n$ (*)

Thay các giá trị n = 1 và n = 2 tương ứng có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c_1\ell_1 + c_2\ell_2 = 1 \\ c_1\ell_1^2 + c_2\ell_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \text{ và } c_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Thay vào (*) ta được: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$

Vậy $x_n = \frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}$, $\forall n \geq 1$

b) Ta thấy luôn $\exists k \in \mathbf{N}^*$: $(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n = \sqrt{3}k$

Do đó: $\frac{x_n^2}{x_{2n}^2} - 2 = \left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right]^2 - 2$

$= \left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]^2 + 2 = 3k^2 + 2 = (k+1)^2 + k^2 + (k-1)^2$

Vậy $\frac{x_n^2}{x_{2n}^2} - 2 = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2$ (đpcm)

Bài toán 21. 26: Tính giới hạn dãy $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+2001)}$.

Hướng dẫn giải

Dùng phương pháp quy nạp, tính

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{n!}{(n+a)!}\right], \text{ với } a \in \mathbf{N}^*$$

Ta có: $u_1 = \frac{1}{1.2.3\ldots(a+1)} = \frac{1}{(a+1)!} = \frac{1}{a}\left[\frac{a+1-1}{(a+1)!}\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{1!}{(a+1)!}\right]$

Giả sử: $u_k = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{k!}{(a+k)!}\right]$

Ta có: $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+1+a)}$

$$= \frac{1}{a.a!} - \frac{k!}{a.(k+1+a)!}(k+1+a-a)$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{(k+1)!}{(k+1+a)!}\right]$$

Vậy $\forall a \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)...(i+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{n!}{(n+a)!}\right]$

Do đó: $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)...(i+2001)} = \frac{1}{2001}\left[\frac{1}{(2001)!} - \frac{n!}{(n+2001)!}\right]$

Ta có: $\lim u_n = \frac{1}{2001.(2001)!} - \lim \frac{n!}{(n+2001)!}$

mà $\lim \frac{n!}{(n+2001)!} = \lim \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+2001)} = 0$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2001.(2001)!}$

Bài toán 21. 27: Tính: $\lim \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bất đẳng thức: $\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}$, với $x > 0$.

Thay x bởi $\frac{k}{n^2}$ và tính tổng hai vế từ 1 đến n, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Ta thấy: $\lim \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \lim \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}$;

Và: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$

$< \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4n^4} == \frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^4} \to 0$.

Suy ra: $\lim\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{1}{4}$

Theo nguyên lí kẹp, ta có: $\lim\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$.

Bài toán 21. 28: Cho dãy $x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

Tìm $\lim(\ln x_n)$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\forall x>0: x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

Ta có: $\ln x_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên với: $x=\frac{i}{n^2}$, $i = 1,2,\ldots,n$ ta được:

$$\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\frac{i}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)-\frac{1}{2n^4}(1^2+2^2+\ldots+n^2)<\ln x_n<\frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}.\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<\ln x_n<\frac{1}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}$$

Vì giới hạn 2 dãy 2 bên cùng là $\frac{1}{2}$. Vậy $\lim(\ln x_n)=\frac{1}{2}$

Bài toán 21. 29: Tính các giới hạn dãy sau:

a) $\lim\left(n^2\ln(\cos\frac{1}{n})\right)$ b) $\lim\left(n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right)\right)\right)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\left(n^2\ln(\cos\frac{1}{n})\right)=\lim\left(n^2\frac{\ln(\cos\frac{1}{n}-1+1}{\cos\frac{1}{n}-1}\right)(\cos\frac{1}{n}-1)$

$=\lim\left(n^2(\cos\frac{1}{n}-1)\right)=\lim\left(-2n^2\sin^2\frac{1}{2n}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\lim\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\left(n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{n}\right)\right)\right) = \lim\left(n\left(\ln\left(1+\tan\frac{\pi}{n}\right)-\ln\left(1-\tan\frac{\pi}{n}\right)\right)\right)$

$$=\lim\left(\frac{\ln\left(1+\tan\frac{\pi}{n}\right)\tan\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}.\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.\pi+\frac{\ln\left(1-\tan\frac{\pi}{n}\right)}{\left(-\tan\frac{\pi}{n}\right)}.\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.\pi\right)=2\pi$$

Bài toán 21. 30: Cho 2 số dương a < b, hai dãy số (a_n), (b_n):

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ b_1 = \sqrt{ba_1},\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},$$

$$b_2 = \sqrt{a_2.b_1},\ \ldots,\ a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n = \sqrt{a_n.b_{n-1}}.$$

Tìm $\lim b_n$ và $\lim a_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\cos\alpha = \frac{a}{b}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b\cos\alpha + b}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_2}{2} = \frac{b\cos^2\frac{\alpha}{2}+b\cos\frac{\alpha}{2}}{2} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2} \\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} a_n = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\frac{\alpha}{2^n} \\ b_n = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\frac{\alpha}{2^n} \end{cases}$$

Suy ra $b_n = \dfrac{b}{2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\sin\alpha = \dfrac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

nên: $\lim b_n = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

Ta lại có: $a_n = b_n.\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$

Vậy: $\lim a_n = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}.\lim\cos\dfrac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$.

Bài toán 21. 31: Cho số a > 0 và một dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$u_1 = a$ và $u_{n+1} = \log_3(u_n^3+1)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{4}{3}$ Tìm $\lim u_n$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết có $u_n > \dfrac{4}{3}$

Xét $f(x) = \log_3(x^3+1)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}\log_3(x^3+1) + \dfrac{4}{3}$ $(x > 0)$

$f'(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)\ln 3}$ mà $x^3 + 1 = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^3 + 1 \ge \dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{4}}$

nên $f'(x) \le \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3\ln 3} = k$, $(0 < k < 1)$

Đặt $g(x) = f(x) - x$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến $(0; +\infty)$ mà $g(2) = 0$.
Nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $g(x) = 0$.
Có $u_{n+1} = f(u_n)$ và $|u_{n+1} - 2| = |f(u_n) - f(2)|$
Theo định lí Lagrange có số m nằm giữa u_n và 2 mà
$|f(u_n) - f(2)| = |f'(m)|.|u_n - 2|$
nên $|u_{n+1} - 2| < k|u_n - 2|$ (1)
Từ (1) có $0 \le |u_n - 2| \le k^{n-1}|u_1 - 2|$
mà $\lim k^{n-1}|u_1 - 2| = 0$, nên $\lim u_n = 2$

Bài toán 21. 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 2003 \\ 2^n.u_{n+1} = |2^n.u_n - 1| \end{cases}.$$ Tìm $\lim u_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^n.u_{n+1} = |2^n.u_n - 1| \Rightarrow u_{n+1} = |u_n - 2^{-n}|$

Ta chứng minh $u_n > 2^{1-n}$ (1) bằng quy nạp:

Khi n = 1: $u_1 = |u_o - 2^0| = |2003 - 1| = 2002 > 1$: đúng

Giả sử (1) đúng với n = k, ta có: $u_k > 2^{1-k}$

Ta có $u_{k+1} = |u_k - 2^{-k}| > |u_k| - 2^{-k} > 2^{1-k} - 2^{-k} = 2^{-k}$

$\Rightarrow u_{k+1} > 2^{1-(k+1)} \Rightarrow$ (1) đúng với n = k + 1.

Vậy bất đẳng thức (1) đúng $\forall n \in \mathbf{N}$.

Do đó $u_{n+1} = u_n - 2^{-n} = u_n - \dfrac{1}{2^n}$

$\Rightarrow u_2 = u_1 - \dfrac{1}{2^1}$; $u_3 = u_2 - \dfrac{1}{2^2}$;...; $u_n = u_{n-1} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

nên cộng từng vế các đẳng thức trên:

$u_n = 2002 - 1 + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2001 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Vậy $\lim u_n = 2001 + \lim \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2001$.

Bài toán 21. 33: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1}$, với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng với mọi số thực $a > \sqrt{5}$, ta đều có $\lim \dfrac{u_n}{a^n} = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - 4u_n + 5u_{n-1} = 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 5 = 0$, $\Delta' = -1 < 0$ nên có 2 nghiệm phức liên hiệp $x_{1,2} = 2 \pm i$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy đã cho là:

$$u_n = (\sqrt{5})^n\left(\frac{3}{5}\cos n\alpha - \frac{1}{5}\sin n\alpha\right), \forall n$$

Vì $\left|\dfrac{3}{5}\cos n\alpha - \dfrac{1}{5}\sin n\alpha\right| < 1$ nên $u_n < (\sqrt{5})^n$, $\forall n = 1,2,3,\ldots$

Suy ra : $0 < \dfrac{u_n}{a^n} < \left(\dfrac{\sqrt{5}}{a}\right)^n$; $\lim\left(\dfrac{\sqrt{5}}{a}\right)^n = 0$ nên $\lim \dfrac{u_n}{a^n} = 0$.

Bài toán 21. 34: Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n. Chứng minh $\lim x_n = 1$ và tính $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$

Hướng dẫn giải

Rõ ràng $x_n > 1$. Đặt $f_n(x) = x^n - x - 1 \Rightarrow f_n(x_n) = 0, \forall n$

Khi đó: $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = 0$

Từ đó, ta suy ra: $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn là a. Ta chứng minh a = 1.

Thật vậy, giả sử a > 1. Khi đó $x_n > a$ với mọi n và ta chọn được n đủ lớn sao cho $x_n^n \geq a^n > 3$ và $x_n + 1 < x_2 + 1 < 3$, mâu thuẫn với $f_n(x_n) = 0$.

Do đó $\lim x_n = 1$.

Đặt $x_n = 1 + y_n \Rightarrow \lim y_n = 0$ nên $(1 + y_n)^n = 2 + y_n$

$\Rightarrow \quad n.\ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n)$

$\Rightarrow \lim n.\ln(1 + y_n) = \lim \ln(2 + y_n) = \ln 2$

Mà $\lim \dfrac{\ln(1+y_n)}{y_n} = 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} ny_n = \ln 2$. Vậy $\lim n(x_n - 1) = \ln 2$

Bài toán 21. 35: Cho dãy số thực (a_n) thoả mãn: $e^{a_n} + n.a_n = 2, \forall n$

Chứng minh rằng: $\lim n(1 - n.a_n) = 1$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f_n(x) = e^x + nx - 2$, n = 1,2,3,...

Ta có: $f'_n(x) = e^x + n > 0$ là hàm đồng biến: đồng thời $f_n(0) = 1 - 2 < 0$, $f_n(\ln 2) = 2 + n.\ln 2 - 2 > 0$ nên phương trình f(x) = 0 có đúng một nghiệm là $a_n \in (0; \ln 2)$

Ta chứng minh được dãy (a_n) giảm và do nó bị chặn nên hội tụ. Giả sử $\lim a_n = L \in [0; \ln 2]$. Ta chứng minh L = 0.

Giả sử L > 0 thì từ công thức của dãy, chuyển qua giới hạn tại vô cực, ta thấy $+\infty = 2$, vô lí.

Suy ra L = 0 nên $\lim na_n = 1$

Mà $n(1 - n.a_n) = n(e^{a_n} - 1)$ nên $\lim n(1 - na_n) = 1$ (đpcm)

Bài toán 21. 36: Cho dãy (x_n): $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2 \\ x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh dãy hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $x_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$ và $x_n < 2, \forall n \in \mathbf{N}$

Mặt khác ta có: $x_{n+4} = 2^{-x_n+2} + \frac{1}{2} = 2^{-2^{-x_n}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$

Xét $f(x) = 2^{-2^{-x}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$. Với x > 0, có f '(x) > 0

Ta có: f '(x) > 0, ∀x > 0 ⇒ f(a) đồng biến.

Xét dãy (x_{4n+1}). Ta có $x_1 = 0$, $x_5 > 0 \Rightarrow x_1 < x_5$

từ đó quy nạp ta được dãy (x_{4n+1}) là dãy tăng

mà (x_{4n+1}) bị chặn trên bởi 2 nên $\exists \ell \in R$ để $\lim x_{4n+1} = \ell$,

ta có: $x_{4n+5} = 2^{-2^{-x_{4n+1}-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}$. Chuyển qua giới hạn: $\ell = 2^{-2^{\ell}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$

$\ell = 1$ thoả và f(x) đồng biến ⇒ có nghiệm duy nhất $\ell = 1$

Vậy $\lim x_{4n+1} = 1$ (1)

Xét dãy (x_{4n+3}). Đặt $g(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$, x > 0 có g '(x) < 0

Ta có g'(x) < 0, ∀x > 0 ⇒ g(x) nghịch biến

Từ $x_1 < x_5 \Rightarrow x_3 > x_7$

Quy nạp thì (x_{4n+3}) giảm và bị chặn dưới bởi 0

⇒ $\lim x_{4n+3} = 1$ (2)

Tương tự $\lim x_{4n+2} = \lim x_{4n} = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\lim x_n$ tồn tại và $\lim x_n = 1$

Bài toán 21. 37: Cho dãy số $\{x_n\}$: $x_1 = -\frac{5}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2$, với mọi n là số nguyên dương. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Tìm giới hạn của nó.

Hướng dẫn giải

Từ công thức xác định dãy ta có: $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 2$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2\right]^2 + \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 4 = \frac{1}{8}x_n^4 + \frac{1}{2}x_n^3 - x_n - 2$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x - 2$, với $x \in (-2; -1)$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$

$f'' = \frac{3}{2}(x^2 + 2x) < 0$ với mọi $x \in (-2; -1)$

Vậy f '(x) > f '(−1) = 0 (do f '(x) nghịch biến trên (−2; −1))

Do đó f(x) đồng biến trên khoảng (–2; –1) nên suy ra f(–2) < f(x) < f(–1) với $x \in (-2; -1)$ hay $-2 < f(x) < -\frac{11}{8} < -1$, với $x \in (-2; -1)$.

Nhưng $x_{2n+2} = f(x_{2n})$ và $x_2 = -\frac{11}{8}$, từ đó suy ra $-2 < x_{2n} < -1$ với n = 1, 2, 3,...

Mặt khác, do $x_2 > x_4$ ta suy ra $f(x_2) > f(x_4)$ hay $x_4 > x_6$...

Hoàn toàn tương tự ta có $-1 > x_2 > x_4 > ... > x_{2n} > ... > -2$

Vậy dãy $\{x_{2n}\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.

Đặt $a = \lim x_{2n}$, từ công thức xác định dãy qua giới hạn ta được:

$$a = \frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - a - 2 \Leftrightarrow (a-2)(a+2)^3 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ vì } a \in [-2; -1]$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được dãy $\{x_{2n+1}\}$ tăng và bị chặn trên, bởi –2 và $\lim x_{2n+1} = -2$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ và có giới hạn bằng –2.

Bài toán 21. 38: Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_{n+2} = 2^{-x_n}.n + \frac{1}{2},\ n = 0, 1, 2, ...$$

Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta xét hai dãy con: $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$

$u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, n = 0, 1, 2,... và $v_0 = 2$, $v_{n+1} = f(v_n)$, n = 0, 1, 2,...

Trong đó $f(t) = 2^{-t} + \frac{1}{2}$, t > 0.

Ta có $f'(t) = -2^{-t}.\ln 2 < 0$ nên nghịch biến và phương trình f(t) = t có nghiệm duy nhất t = 1.

Ta chứng minh được mỗi dãy con (u_n), (v_n) có cùng giới hạn là 1 (bằng cách xét thêm hai dãy con cua mỗi dãy) rồi suy ra $\lim x_n = 1$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 21. 1: Chứng minh rằng tồn tại hai dãy tăng thực sự (a_n) và (b_n) sao cho $a_n(a_n + 1)$ chia hết $(b_n^2 + 1)$ với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn

Đưa về bài toán tìm 2 dãy tăng thực sự (a_n) và (c_n) sao cho $a_n^2 \mid c_n^2 + 1$

Bài tập 21. 2: Tìm tất cả các dãy hữu hạn $(x_0, x_1, ..., x_n)$ sao cho với mọi j, $0 \le j \le n$, thì x_j bằng số lần j xuất hiện trong dãy.

Hướng dẫn

Kết quả (2, 0, 2, 0), (1, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 0, 0) và họ (p, 2, 1, 0, 0,...,0,1,0,0,0) với p – 3 số 0 ở giữa.

Bài tập 21. 3: Giả sử F_k là số hạng thứ k của Fibonaci 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
Chứng minh với mọi n thì: $4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4}$ là số chính phương.

Hướng dẫn

Chứng minh $|F_{n+4} . F_{n-2} - F_{n+2}F_n| = 3$.

Kết quả $4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4} = (2F_nF_{n+2} \pm 3)^2$

Bài tập 21. 4: Chứng minh rằng với mọi số thực M, tồn tại một cấp số cộng vô hạn sao cho: tổng các chữ số của mỗi số hạng (trong biểu diễn thập phân) lớn hơn M, mỗi số hạng là một số nguyên dương và công sai không chia hết cho 10.

Hướng dẫn

Chọn công sai dạng $10^m + 1$

Bài tập 21. 5: Chứng minh các dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó:

a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{a}{2}, & 0 < a < 1 \\ u_n = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2}u_{n-1}^2, n \geq 2 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh quy nạp. Kết quả dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1

b) Kết quả dãy tăng và bị chặn trên bởi 1

Bài tập 21.6: Cho $\alpha \in (0; 2)$. Tính giới hạn của dãy sau theo các giá trị u_0, u_1 cho trước: $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1 - \alpha)u_n$, n = 0, 1, 2,...

Hướng dẫn

Biến đổi và dùng dãy phụ:

$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1 - \alpha)u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} = b(u_{n+1} - au_n)$.

Kết quả $\lim u_n = \dfrac{u_1 - u_0}{2 - \alpha} + u_0$

Bài tập 21. 7: Cho số thực a thuộc khoảng (0; 1). Xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$x_0 = a;\ x_n = \frac{4}{\pi^2}\left(\arccos x_{n-1} + \frac{\pi}{2}\right).\arcsin x_{n-1},\ \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn

Dãy a_n giảm và bị chặn dưới bởi L . Kết quả L = 0.

Bài tập 21. 8: Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, với n = 1, 2, 3, ...

Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn

Giới hạn kẹp cho 2 dãy chẵn và lẻ $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = \ln 2$.

Kết quả $\lim u_n = \ln 2$.

Bài tập 21. 9: Cho số tự nhiên $c \geq 3$. Xây dựng dãy số tự nhiên $\{a_n\}$ như sau: $a_1 = c$; $a_n = a_{n-1}$, $\left[\dfrac{a_{n-1}}{2}\right] + 1$; $n = 2, 3, \ldots$ Tính $\lim a_n$.

Hướng dẫn

Dùng phương pháp qui nạp: dãy a_n giảm và bị chặn dưới bởi 3

Bài tập 21. 10: Xét dãy số thực (x_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ xác định bởi: $x_1 = a$ và $x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$, với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ trong đó a là một số thực. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

Hướng dẫn

Xét hàm số $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$. Kết quả $0 \leq a \leq \dfrac{4}{3}$.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : **NGUYỄN THỊ HIÊN**

Chế bản : **CÔNG TY KHANG VIỆT**

Trình bày bìa : **CÔNG TY KHANG VIỆT**

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN – LỚP 12

Mã số: 1L–144ĐH2014

Mã số ISBN: 978–604–939–318–1

In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm

Tại: **CÔNG TY TNHH In ấn Mai Thịnh Đức**

Địa chỉ: 71 Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh

Số xuất bản: 345 – 2014/CXB/12 – 54/ĐHQGHN ngày 28/02/2014.

Quyết định xuất bản số: 145LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 13/03/2014

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014